J 160.

ANALYTICKÁ

GEOMETRIE

V ROVINĚ.

N 204.

PRO ŠKOLU

I. 160. = P. 3471.

NAPSAL

D^R. KAREL ZAHRADNÍK,

V. Ř. PROFESSOR NA UNIVERSITĚ FRANTIŠKA JOSEFA V ZÁHŘEBĚ.

V PRAZE.

NÁKLADEM KARLA BELLMANNA.

1883.

Všechna práva vyhražena.

P
ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA
PEDAGOGICKÉ FAKULTY
V PRAZE
Sign. U 1086
Inv. č. 201675

Tiskem Karla Bellmanna v Praze.

Prof. knihovna c. k.
stát. gymn. v

Analytická geometrie v rovině.

Jičíně.

J. 160. = P. 347

Předmluva.

Odevzdávaje svou knihu našim školám, připomenouti musím, že jsem se vynasnažil, abych vyhověl i předpisům zákonitým i požadavkům doby novější.

Přihlížel jsem všude hlavně k tomu, by důkazy byly po možnosti snadny, průzračny a přesny, jakož i ku geometrickému výkladu analytických výkonů. Poznámky četné namířeny jsou pilnějším žákům, kteří tu najdou nejen dosti látky ku přemýšlení, ale, což účelem jest, popudu ku vlastnímu studiu. Jelikož determinanty nejsou dosud pojmuty v rozsah učiva školního, nemohl jsem arci jimi počítati. Mimochodem a jen na málo místech počátku upotřebil jsem pouze tvaru determinantu jako zkráceniny výrazu již vypočítaného i to z týchž příčin, z jakých poznámky v knize uvádím. Vždyť lze toto označení na těch čtyřech neb pěti místech vynechati, komu by to bylo nemístným. Příkladů v knize uvádím dosti, mimo to najde pilný žák hojnost příkladů, jež jsem ku konci knihy připojil, při čemž hlavně ku číselným příkladům jsem přihlížel.

Pan nakladatel s uznání hodnou ochotou postaral se o vzornou úpravu i co do obrazců i co do tisku, zač mu budiž zde vysloven můj dík.

Aby po možnosti i tisk byl zcela správný, požádal jsem za příčinou své vzdálenosti od místa tisku přítele svého pana prof. Ant. Votrubu, by mi laskavě obstaral korrekturu. Za nevšední ochotu a péči, kterou korrektuře věnoval, buďtež mu zde vyjádřeny mé díky.

Zbývá mi toliko přání, by se té knihy na školách našich hojně upotřebovalo; viděl bych pak, že práce knize této pouze z lásky ku věci samé věnovaná přispěje ku zdaru a rozkvětu našich škol.

V Litomyšli na den sv. Anny r. 1883.

Spisovatel.

Milovanému příteli a učiteli svému

Dr. Josefu Durdíkovi,

v. ř. prof. na c. k. českém vysokém učení Karlo-Ferdinandově,
t. č. prodekanu filos. fakulty, členu kr. české společnosti nauk,
poslanci na sněmu českém a t. d., a t. d.,

druhdy professoru při gymnasiu v Litomyšli

knihu tuto

posvěcuje

vděčný jeho žák

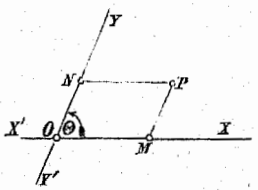
K. Z.

Geometrie bodu.

Rovnoběžné souřadnice bodu.

Bychom jednoznačně polohu bodu v rovině určili, upotřebujeme tak zvanou soustavu souřadnic čili koordinat. Sestrojíme totiž v rovině dvě přímky XX' a YY', jež považujíce za pevné, jmenujeme je osy souřadnic. Bychom rozeznávali tyto dvě přímky, jmenujeme přímku XX' osa úseček (axis abscissarum) či osa X a přímku YY' zoveme osa pořaden (axis ordinatarum) či osa Y, průsek jejich O jmenujeme počátek soustavy souřadnic.

Daným bodem P v rovině soustavy souřadnic či krátko v rovině souřadnic (obr. 1.) veďme PN rovnoběžně s osou XX' a PM rovnoběžně s osou YY'. Délky těchto rovnoběžek jsou polohou bodu P v rovině souřadnic zúplna určeny i naopak, známe-li délky PN a PM, mohli bychom polohu bodu P určiti. Stavíme-li totiž $PN = a$, $PM = b$, třeba, bychom jen odměřili na ose X počínajíce od počátku souřadnic délku $OM = a$; podobně na ose Y délku $ON = b$, načež bychom vedli rovnoběžky s osami souřadnic MP, NP. Průsek těchto rovnoběžek dává nám bod P. Rovnoběžky MP a NP jmenujeme souřadnice — koordinaty — bodu P. Souřadnici rovnoběžnou s osou X, totiž NP, kteráž se patrně rovná délce OM, označujeme obyčejně

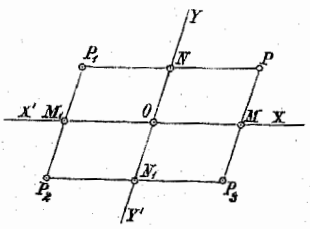


Obraz 1.

písmenem x a zveme ji úsečkou (abscissou), a podobně označujeme souřadnici MP, rovnoběžnou s osou Y, písmenem y a jmenujeme ji pořadnou (ordinatou) bodu P.

2. Seznali jsme, že jsou souřadnice bodu P polohou jeho zúplna určeny; má-li však i naopak poloha bodu P býti jednoznačně určena jeho souřadnicemi, musíme nejen velikost souřadnic, nébrž i jejich směr uvážiti a jej znaménkem příhodně vytknouti.

Můžeme totiž délku $NP = a$ na ose X po obou stranách od počátku souřadnic odměřiti, podobně bychom i délku $MP = b$ po obou stranách osy Y od počátku souřadnic odměřiti mohli. Vedeme-li nyní (obr. 2.) koncovými body M, M_1, úseků na ose X rovnoběžky s osou Y a podobně koncovými body N, N_1, úseků na ose Y rovnoběžky s osou X, obdržíme takto čtyři body P, P_1, P_2, P_3 a každý z těchto bodů má úsečku a i pořadnu b.



Obraz 2.

Můžeme však, tak jako to činíme v trigonometrii, rozdílný směr úseček OM, OM_1 znaménkem vyjádřiti. Vezmeme směr úsečky OM za kladný a směr OM_1 jakožto záporný směr osy X; podobně vezmeme směr pořadny ON za kladný a směr ON_1 za záporný směr osy Y. Dle toho můžeme souřadnice zmíněných čtyř bodů P, P_1, P_2, P_3, předpokládajíce veličiny a i b za kladné, následujícím způsobem schematicky vyjádřiti:

	x	y
P	$+a$	$+b$
P_1	$-a$	$+b$
P_2	$-a$	$-b$
P_3	$+a$	$-b$,

z čehož shledáváme, že každému z těch čtyř bodů rozdílný pár souřadnic přisluší.

Značí-li tudíž a, b dvě jakékoli reálné veličiny, jsou

$$x = a, \quad y = b$$

dvě rovnice, jimiž každý bod v rovině vyjádřiti můžeme.

Bod, jenž má souřadnice $x = a$, $y = b$, označujeme zkrátka jako bod (a, b).

Dle toho je (o, b) bod N (obr. 2.), $(-a, o)$ značí bod M_1, (o, o) počátek souřadnic O. Pravíme taktéž místo bod P, jenž má za souřadnice $x = x'$, $y = y'$, zkrátka bod $P\ (x', y')$.

3. Seznali jsme, že dvě rovnice tvaru

$$x = a, \quad y = b$$

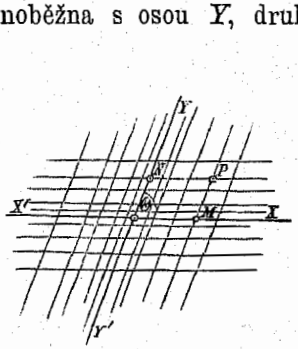
vyjádřují zcela určitý bod. Tu se nám namítá otázka, co značí jedna z těch rovnic, na př. $x = a$?

Snadně nahlédneme, že je rovnicí touto vyjádřena přímka rovnoběžná s osou Y jdoucí bodem M na ose X ve vzdálenosti $OM = a$ od počátku souřadnic. Každý bod této přímky má totiž za úsečku a, což právě vyjádřuje daná rovnice.

Podobně vyjádřuje rovnice $y = b$ přímku rovnoběžnou s osou X, jdoucí bodem N na ose Y ve vzdálenosti $ON = b$ od počátku souřadnic. Rovnice osy X je tudíž $y = o$ a rovnice osy Y je $x = o$.

4. Dvě rovnice $x = a$, $y = b$ značí tudíž bod, co průsek dvou přímek, z nichž jedna je rovnoběžna s osou Y, druhá rovnoběžna s osou X.

Mysleme si v rovině dvě soustavy rovnoběžných přímek (obr. 3.); i vytkněme sobě v každé soustavě po jedné přímce co osy souřadnic, každý pár přímek nespadající v jednu soustavu určuje jistý bod. — Úhel ω, jejž činí osy souřadnic, jmenujeme úhlem soustavy souřadnic rovnoběžných. Měří-li tento

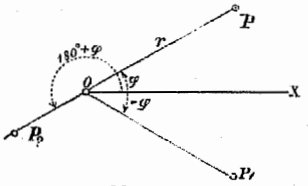


Obraz 3.

úhel 90°, máme pravoúhelnou soustavu souřadnic, v každém jiném případě máme kosoúhlou soustavu souřadnic. V následujícím upotřebíme veskrze pravoúhelné soustavy souřadnic, ku kosoúhelné soustavě přihlédneme pouze v poznámkách.

Polárné souřadnice bodu.

5. Jiný jednoduchý způsob, jímž polohu bodu P v rovině určujeme, jest následující: Vytkneme si v rovině nějaký pevný bod O (obr. 4.) a veďme jím pevnou přímku OX. Bod O jmenujeme p o l e m a přímku OX, kteráž je po jedné straně polem omezená, avšak u druhém směru OX neomezená, jmenujeme p o l a r n o u o s o u.



Obraz 4.

Poloha bodu P v rovině je nyní určena, známe-li vzdálenost $\overline{OP}$ bodu P od polu, již jmenujeme p r o v o d i č (radius vector) bodu P, a úhel POX, jejž provodič bodu s polárnou osou uzavírá. Úhel tento jmenujeme p o l á r n ý ú h e l čili a n o m a l i e. Provodič OP označujeme obyčejně písmenem r a polárný úhel POX písmenem φ.

Veličiny r a φ jsou p o l á r n é s o u ř a d n i c e bodu P.

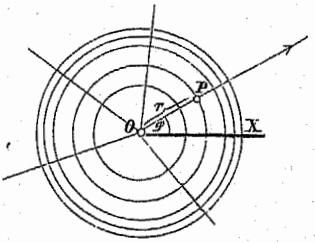
Avšak dva body souměrné s polárnou osou P, P_1 (obr. 4.) mají týž provodič i týž polárný úhel. Aby tudíž souřadnice r, φ bod P jednoznačně určovaly, třeba, bychom na způsob rovnoběžných souřadnic rozeznávali směr otáčky při úhlu.

Vezmeme, jak to v trigonometrii činíme, směr otáčky z prava nahoru na levo t. j. od kladné osy X ku kladné ose Y za kladný, i směr ve smyslu opáčném považovati budeme za záporný. Dle toho je úhel P_1OX sice téže velikosti jako úhel POX, avšak je opáčného směru t. j.

$$\sphericalangle P_1OX = -\sphericalangle POX = -\varphi.$$

Provodič a polárný úhel určují nyní zcela určitě polohu bodu v rovině. Všechny body roviny obdržíme, myslíme-li si,

že se provodič mění od 0 do ∞ (obr. 5.) a polární úhel φ od 0^0 do 360^0.



Obraz 5.

Provodič je tudíž vždy kladný. Tak jsou oba provodiči bodů P a P_2 totiž OP a OP_2 kladné, opačný jejich směr jde zde na účet polárného úhlu*), jenž je pro bod P roveň φ, pro bod P_2 (obr. 4.) však měří $180^0 + \varphi$.

Všechny body s týmž provodičem r leží na kruhu, jenž má pol za svůj střed a provodič r co poloměr. Mysleme si za r posloupně různé hodnoty, obdržíme soustavu soustředných kruhů.

Úhlem φ dána je opět přímka, vybíhající z polu O t. j. paprsek polu O. Mysleme si opět za φ postupně rozličné hodnoty, i obdržíme celou řadu přímek, jdoucích z polu O t. j. svazek paprsků, jehož střed je pol O.

V polárné soustavě souřadnic myslíme si tudíž rozdělenou rovinu soustavou soustředných kruhů a svazkem paprsků, jenž má svůj střed ve společném středu kruhů. Vždy jeden kruh — provodič r — a jeden paprsek — polární úhel φ — určují nyní bod roviny.

Tím vysvětlili jsme pojem souřadnic, jejž můžeme nyní obecněji následovně vyměřiti: „Veličiny, určující jednoznačně polohu bodu, jmenujeme souřadnice**) tohoto bodu.“

Z toho výměru plyne, že je počet možných soustav souřadnic neomezen.

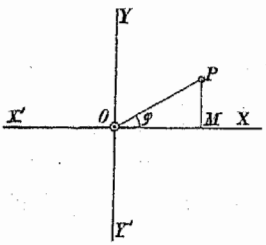
---

*) Mluvíme-li o bodech na přímce jdoucí polem souřadnic, tu třeba býti toho dbalým, že taková přímka zahrnuje dva paprsky vybíhající z polu O. Na této přímce můžeme arci rozeznávati body s kladnou a zápornou vzdáleností od polu, právě tak, jak to činíme s body na ose souřadnic rovnoběžných.

**) Tak máme v geografii délku a šířku co souřadnice bodu na kouli. Místo dvou přímek máme nyní dva kruhy, jeden je rovník, a druhý je poledník. Roste-li poloměr koule do bezkonečna, co se stane s touto soustavou souřadnic?

Přechod z rovnoběžných souřadnic bodu na souřadnice polárné.

6. Mezi pravoúhelnými a polárnými souřadnicemi bodu v rovině vyskytuje se jednoduchý vztah, sjednotí-li se pol s počátkem souřadnic a polárná osa s osou X (obr. 6.), a roste-li polárný úhel od kladné osy X ku kladné ose Y. Z obrazce (6.) plyne bezprostředně:



Obraz 6.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1)$$

Rovnice tyto platí, nechť je bod P v kterémkoli kvadrantu, jelikož znaménko kosinusu polárného úhlu se shoduje se znaménkem úsečky x a znaménko sinusu téhož úhlu se znaménkem pořadnice y.

Rovnice (1) vyjádřují pravoúhelné souřadnice nějakého bodu pomocí jeho souřadnic polárných. Avšak i naopak můžeme polárné souřadnice vyjádřiti pravoúhelnými. Plyne totiž ze součtu čtverců rovnic (1):

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \text{tudíž} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2)$$

a dělením týchž rovnic obdržíme:

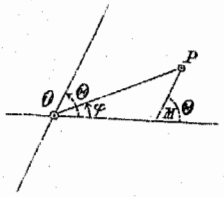
$$tg\, \varphi = \frac{y}{x}. \quad (3)$$

Polárný úhel φ určují podrobněji znaménka x a y, jelikož je jimi dán kvadrant, ve kterém bod leží.

Poznámka. Vztah mezi souřadnicemi kosoúhelnými a polárnými souřadnicemi bodu v rovině není již tak jednoduchý. Předpokládajíc opět, že se pol sjednocuje s počátkem souřadnic a polárná osa s osou X, plyne z trojúhelníku OPM (obr. 7.):

$$\frac{OM}{\sin(OPM)} = \frac{MP}{\sin(MOP)} = \frac{OP}{\sin(OMP)},$$

aneb označíme-li Θ úhel soustavy souřadnic, je



Obraz 7.

$$\frac{x}{\sin(\Theta-\varphi)}=\frac{y}{\sin\varphi}=\frac{r}{\sin\Theta},$$

z čehož plyne

$$x=\frac{r\sin(\Theta-\varphi)}{\sin\Theta},$$
$$y=\frac{r\sin\varphi}{\sin\Theta}. \qquad (4)$$

Sečteme-li čtverce rovnic (4), obdržíme

$$r^2=x^2+y^2+2xy\cos\Theta,$$

což ostatně již z obrazce (7) plyne pomocí známé kosinusové poučky. Dělením rovnic (4) obdržíme opět polární úhel φ, totiž

$$tg\,\varphi=\frac{y\sin\Theta}{y\cos\Theta+x}.$$

Dva a více bodů v rovině.

7. Na základě toho, co jsme dosud seznali, řešme nyní několik úloh, vztahujících se ku skupině dvou nebo více bodů v rovině.

I. Nechť se určí vzdálenosť dvou bodů A_1, A_2 daných souřadnicemi (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Promítneme-li délku $\overline{A_1A_2}$ jednou na osu X, po druhé na osu Y, obdržíme (obr. 8.) označivše úhel spojnice $\overline{A_1A_2}$ s osou X písmenem φ:

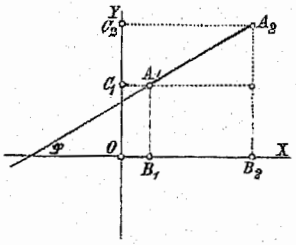
$$\overline{A_1A_2}\cos\varphi=B_1B_2=OB_2-OB_1=x_2-x_1$$
$$\overline{A_1A_2}\sin\varphi=C_1C_2=OC_2-OC_1=y_2-y_1.$$

Sečtením čtverců těchto rovnic obdržíme:

$$\overline{A_1A_2}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

tudíž je

$$\overline{A_1A_2}=\pm\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



Obraz 8.

Dvojité znaménko $\pm$ pouze značí, že můžeme vzdálenosť bodů A_1 i A_2 měřiti buď od bodu A_1 ku bodu A_2 čili naopak od A_2 ku A_1.

Vezmeme-li vzdálenost $\overline{A_1A_2}$ za kladnou, je vzdálenost A_2A_1 záporna.

Jedná-li se pouze o veličinu samu o sobě, nebéřeme znaménko v úvahu.

II. Nechť se najdou souřadnice x, y bodu A, jenž dělí spojnici daných dvou bodů A_1 (x_1, y_1), A_2 (x_2, y_2) v daném poměru λ, t. j. by platilo

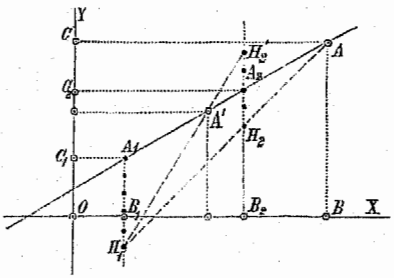
$$\frac{A_1A}{A_2A} = \lambda. \qquad (1)$$

Promítneme délku A_1A_2A jednou na osu X, po druhé na osu Y. Značí-li opět φ úhel spojnice $\overline{A_1A_2}$ s osou X (obr. 9.), obdržíme:

$$\overline{A_1A}\cos\varphi = B_1B = x - x_1, \quad \overline{A_1A}\sin\varphi = C_1C = y - y_1,$$
$$\overline{A_2A}\cos\varphi = B_2B = x - x_2, \quad \overline{A_2A}\sin\varphi = C_2C = y - y_2.$$

Dělením dvou vždy pod sebou stojících rovnic obdržíme vzhledem k rovnici (1):

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \lambda, \qquad \frac{y - y_1}{y - y_2} = \lambda. \qquad (2)$$



Obraz 9.

Rovnice tyto vyjádřují, že bod A leží na spojnici bodů A_1A_2 a že ji dělí v daném poměru λ. Vyloučíme-li z těchto rovnic poměr λ, obdržíme rovnici, kteráž, protože se λ více nevyskytuje, nám pouze vyjádřuje, kdy bod A leží na spojnici bodů A_1, A_2, t. j. že tři body

$$A\ (x, y), \quad A_1\ (x_1, y_1), \quad A_2\ (x_2, y_2)$$

leží na téže přímce. Tato podmínečná rovnice zní:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}, \qquad (3)$$

již bychom i psáti mohli ve tvaru determinantu:

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1 \\ x - x_2, & y - y_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Řešením rovnic (2) dle x a y obdržíme souřadnice bodu A, příslušného poměru λ, totiž:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}. \qquad (5)$$

Je-li poměr λ kladný, leží bod A mimo konečnou spojnici $\overline{A_1 A_2}$; jsouť v případě tomto délky $A_1 A$, $A_2 A$ téhož směru. Za záporné λ leží bod A mezi body A_1, A_2 na jejich konečné spojnici; v případě tomto jsou délky $A_1 A$, $A_2 A$ nestejného směru, tudíž je jejich podíl záporný. Za $\lambda = -1$, je $\overline{A_1 A} = -\overline{A_2 A}$ t. j. $A_1 A = A A_2$, bod A půlí vzdálenosť bodů A_1, A_2. Za souřadnice půlícího bodu obdržíme

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Za $\lambda = +1$ obdržíme na spojnici $\overline{A_1 A_2}$ bod se souřadnicemi nekonečně velikými, to jest nekonečně vzdálený čili úběžný bod spojnice $\overline{A_1 A_2}$.

Dva body na spojnici bodů A_1, A_2, jejichž poměr je sice stejně velký, avšak se liší znaménkem, t. j. jejichž součet se rovná nulle, jmenují se body harmonicky sdružené vzhledem ku daným bodům A_1, A_2.

Sestrojení bodu A z daného poměru je zcela jednoduché. Body A_1 i A_2 proložíme dvě rovnoběžky na př. s osou Y. Je-li nyní $\lambda = \frac{m}{n}$, odměříme m jednotek délky na rovnoběžku bodem A_1, tudíž $A_1 H_1 = m$, a n jednotek délky na rovnoběžku bodem A_2, tudíž $A_2 H_2 = n$, i to v témž směru co $A_1 H_1$, je-li λ kladno, v opáčném směru při záporném λ. Spojnice $H_1 H_2$ určuje na přímce $\overline{A_1 A_2}$ hledaný bod, jejž jsme v obrazci s A označili pro positivné λ a písmenem A' pro negativné λ. Plyne totiž z podobnosti trojúhelníků

$A_1 H_1 A \sim A_2 H_2 A$ potažmo $A_1 H_1 A' \sim A_2 H_2 A'$:

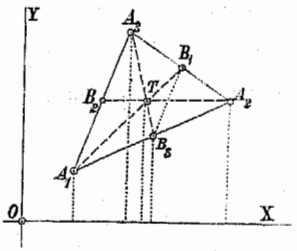
$$\frac{A_1 H_1}{A_2 H_2} = \frac{A_1 A}{A_2 A} = \lambda, \quad \frac{A_1 H_1}{A_2 H_2} = \frac{A_1 A'}{A_2 A'} = -\lambda.$$

Body A i A', jejichž poměry liší se pouze znaménkem, jsou harmonicky sdružené vzhledem k bodům A_1 i A_2. V obrazci provedená je konstrukce za $\lambda = \pm \frac{5}{2}$.

8. Nechť se najdou souřadnice těžiště trojúhelníku, jenž jest dán souřadnicemi jeho vrcholů $A_1\ (x_1, y_1)$, $A_2\ (x_2, y_2)$, $A_3\ (x_3, y_3)$.

Je-li B_3 střed strany $\overline{A_1 A_2}$, leží těžiště na těžné přímce (obr. 10.) $A_3 B_3$, již dělí v poměru -2, jest totiž $A_3 T = 2\,T B_3$ aneb

$$\frac{A_3 T}{B_3 T} = -2.$$



Obraz 10.

Označíme souřadnice bodu B_3 s $\xi_3\ \eta_3$, je

$$\xi_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \eta_3 = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

tím obdržíme za souřadnice těžiště T:

$$x = \frac{x_3 + 2\,\xi_3}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y = \frac{y_3 + 2\,\eta_3}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Ze souměrnosti výrazů pro souřadnice těžiště uzavíráme, že jsme mohli od kteréhokoli vrcholu a strany mu protilehlé vyjíti, t. j. od kterékoli těžné přímky trojúhelníku, na př. $A_1 B_1$. Souřadnice bodu T určeného poměrem

$$\frac{A_1 T}{B_1 T} = -2$$

budou opět tytéž co dříve. Jest tudíž těžiště společný bod všech tří těžných přímek (těžnic) trojúhelníku, t. j. těžnice trojúhelníku protínají se v bodě jediném.

9. Dán jest čtyřúhelník souřadnicemi vrcholů, totiž

$A_1\ (x_1, y_1)$, $A_2\ (x_2, y_2)$, $A_3\ (x_3, y_3)$, $A_4\ (x_4, y_4)$.

Má se dokázati, že spojnice středů protilehlých stran, jakož i spojnice středů úhlopříček sekou se v bodě jediném.

Označíme-li (obr. 11.) střed strany $\overline{A_1 A_2}$ písmenem B_{12} a podobně B_{23}, B_{34}, B_{41} středy stran $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_1$

a B_{13}, B_{24} středy úhlopříček A_1A_3, A_2A_4, jsou souřadnice těchto středů:

$$B_{12}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right), \quad B_{34}\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}\right),$$

$$B_{23}\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right), \quad B_{14}\left(\frac{x_1+x_4}{2}, \frac{y_1+y_4}{2}\right),$$

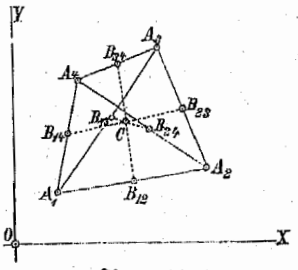
$$B_{13}\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right), \quad B_{24}\left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right).$$

Jelikož jsou souřadnice středu jak spojnice $\overline{B_{12}B_{34}}$ tak spojnic $\overline{B_{23}B_{14}}$, $\overline{B_{13}B_{24}}$ tytéž, totiž:

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},$$

$$y = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},$$

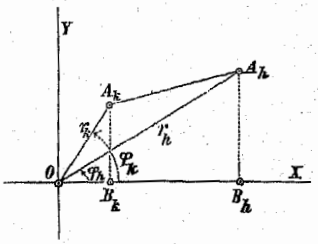
tož vysvítá, že je to společný bod C všech tří spojnic, čímž je i věta dokázána.



Obraz 11.

10. Má se vyjádřiti ploský obsah trojúhelníku pomocí daných souřadnic jeho vrcholů.

Přihlížejme nejprve ku případu, kdy jeden vrchol trojúhelníku leží v počátku souřadnic a ostatní dva vrcholy A_h, A_k že mají za pravoúhlé souřadnice (x_h, y_h), (x_k, y_k) a za polarné souřadnice (r_h, φ_h), (r_k, φ_k). Dvojnásobný ploský obsah trojúhelníku OA_hA_k vyjádřen je, jak z trigonometrie je známo (obr. 12.):



Obraz 12.

$$2 \triangle OA_hA_k = \overline{OA_h} \cdot \overline{OA_k} \sin (A_kOA_h). \quad (1)$$

Jest však $\measuredangle A_kOA_h = \varphi_k - \varphi_h$,

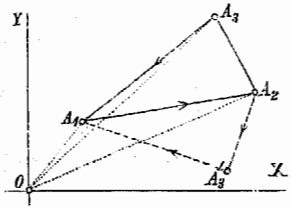
$OA_h = r_h$, $OA_k = r_k$,

tudíž je: $2 \triangle OA_hA_k = r_h \cdot r_k \sin (\varphi_k - \varphi_h)$.

Rozvedeme-li sinus rozdílu, obdržíme [čl. 6., rov. (1)] (2)

$$2 \triangle O A_h A_k = x_h y_k - x_k y_h.$$

Nyní můžeme vyjádřiti plošký obsah kteréhokoli trojúhelníku v rovině souřadnic. Jest totiž (obr. 13.):



Obraz 13.

$$\triangle A_1 A_2 A_3 = \triangle O A_2 A_3 + \triangle O A_3 A_1 - \triangle O A_2 A_1,$$

a násobíme-li rovnici tuto číslem 2, obdržíme vzhledem k rovnici (2): (3)

$$2 \triangle A_1 A_2 A_3 = (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) - (x_2 y_1 - x_1 y_2).$$

Poznámka. Patrně můžeme i levou stranu této rovnice psáti:

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

což opět je determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

rozložený po prvcích prvého sloupce. Při číselných příkladech vhodněji je místo tohoto determinantu upotřebiti následujícího

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1, & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2, & y_3 - y_2 \end{vmatrix},$$

jehož hodnota je táž jako předcházejícího, což nám podává malá proměna s determinantem anebo jednoduchý výpočet. Jest tudíž:

$$2 \triangle A_1 A_2 A_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 - x_1, & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2, & y_3 - y_2 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Tak jest na příklad plošký obsah trojúhelníku A_1 (1, 1), A_2 (4, 1), A_3 (2, 3)

$$2 \cdot \triangle A_1 A_2 A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

tedy: $$\triangle A_1 A_2 A_3 = 3,$$

t. j. 3 kvadratné (plošné) jednotky.

11. Při výpočtu ploského obsahu trojúhelníku přijali jsme, že je plošký obsah trojúhelníku $O A_h A_k$ kladný, opíše-li strana $O A_h$ plošký obsah otáčkou ve smyslu kladném. Kdy-

bychom tudíž ve výrazu pro trojúhelník dva vrcholy vyměnili, mění tím i plošný obsah trojúhelníku své znaménko, což analyticky i tím vychází, že determinant své znaménko mění, vyměníme-li v něm dva řádky.

Jedná-li se nám pouze o velikosť plochy trojúhelníku, nebeřeme na znaménko zřetele.

Tak jest pro trojúhelník

$$A_1\ (1,\ 2),\quad A_2\ (3,\ -5),\quad A_3\ (-2,\ 3)$$

plošný obsah záporný totiž $-9{\cdot}5$; záporné znaménko plochy nám praví, že jdeme-li od vrchole A_1 na A_2, od A_2 na A_3, od A_3 na A_1, že to činíme ve smyslu záporné otáčky, t. j. strana $\overline{A_1A_2}$ opisuje plochu trojúhelníku ve smyslu záporném. Nehledíc k znaménku, je plocha tohoto trojúhelníku rovna $9{\cdot}5$ kvadratných jednotek.

Poznámka. Co se tkne znaménka plochy trojúhelníku, přidáme ještě několik slov. Spojnice A_1A_2 dělí rovinu souřadnic na dva díly. Leží-li bod A_3 v tom dílu, jejž přímka A_1A_2 otáčkou o 180° okolo bodu A_1 ve smyslu kladném opíše, je plocha trojúhelníku $A_1A_2A_3$ kladná; leží-li bod na druhé straně, na př. A'_3, je plocha trojúhelníku $A_1A_2A'_3$ záporná. Přibližuje-li se tudíž bod A_3 ku spojnici $\overline{A_1A_2}$, zmenšuje se tím plošný obsah trojúhelníku $A_1A_2A_3$, a přejde-li vrchol A_3 na druhou stranu spojnice, mění trojúhelník své znaménko. Z kladného však nullou přecházíme do záporného, t. j. leží-li bod A_3 na spojnici $\overline{A_1A_2}$, je plocha trojúhelníku rovna nulle. Podmínku, by bod A_3 ležel na spojnici bodů A_1A_2, vyjádříme tudíž tím, že píšeme [rov. (4)]:

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1, & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_2, & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

výsledek to, jehož jsme se již dříve jinou cestou dodělali. Ve čl. 7. [rov. (4)] je $A(xy)$ bodem třetím $A_3(x_3\,y_3)$.

12. Nalézti se má plošný obsah mnohoúhelníku, daného souřadnicemi jeho vrcholů.

Rozdělme daný mnohoúhelník z jednoho vrcholu na př. A_1 úhlopříčkami na trojúhelníky. Odpovídá-li pořádek vrcholů A_1, A_2, A_3 . . . daného mnohoúhelníku kladnému smyslu otáčky, je plošný obsah každého trojúhelníku

$$A_1A_2A_3,\quad A_1A_3A_4,\quad A_1A_4A_5,\quad \text{atd.}$$

téhož znaménka, totiž kladný, a součet ploch těchto trojúhelníků jest plocha mnohoúhelníku.

Je-li na příklad dán čtyřúhelník

$$A_1\ (1,\ 1),\quad A_2\ (4,\ 1),\quad A_3\ (3,\ 3),\quad A_4\ (2,\ 4),$$

je [čl. 10., rov. (3) neb (4)]

$$2 \triangle A_1 A_2 A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$2 \triangle A_1 A_3 A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

tudíž je plocha čtyřúhelníku $A_1 A_2 A_3 A_4$ rovná 5 čtverečným jednotkám.

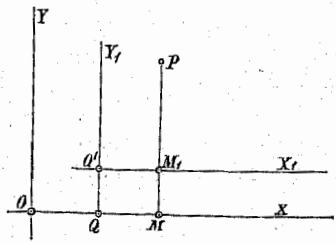
Proměna rovnoběžných souřadnic.

13. Častěji se shledá býti velmi prospěšným, proměniti čili transformovati osy souřadnic, t. j. vztáhnouti body roviny na jinou soustavu rovnoběžných souřadnic. Úlohu tuto řešíme tím, že vyjádříme souřadnice kteréhokoli bodu v staré soustavě souřadnicemi téhož bodu v soustavě nové.

Zde rozeznáváme tři případy, jejichž spojením každý jiný případ snadno řešiti můžeme.

Případ prvý. Mění se pouze počátek souřadnic, směry os se nemění.

Jsou-li a, b souřadnice nového počátku O' vzhledem ku staré soustavě souřadnic, a označíme-li souřadnice bodu P vzhledem k nové soustavě (obraz 14.) souřadnic $x_1 y_1$, máme



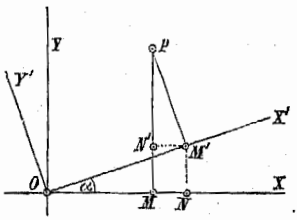
Obraz 14.

$$\begin{aligned} OM &= OQ + O'M_1 \quad \text{t. j.} \quad x = a + x_1, \\ MP &= QO' + M_1 P \quad \text{t. j.} \quad y = b + y_1. \end{aligned} \tag{1}$$

V případě tomto pošinujeme osy souřadnic rovnoběžně do nového počátku O' $(a,\ b)$.

Případ druhý. Osy pravoúhlé soustavy otočíme o úhel α okolo počátku souřadnic.

Označíme-li písmenem M' patu kolmice spuštěné s bodu P na osu X' nové soustavy pravoúhlé, a vedeme-li $M'N'$ rovnoběžně s osou X, (obr. 15.) i $M'N$ rovnoběžně s osou Y, máme



Obraz 15.

$$x = OM = ON - MN,$$
$$y = MP = MN' + N'P. \qquad (2)$$

Jest však $\sphericalangle M'PM = \sphericalangle X'OX = \alpha$ (ramena jejich jsou vzájemně kolmá), tudíž je, označíme-li s x', y' souřadnice bodu P vzhledem k nové soustavě souřadnic:

$$ON = x' \cos\alpha, \quad MN' = NM' = x' \sin\alpha,$$
$$N'P = y' \cos\alpha, \quad MN = N'M' = y' \sin\alpha,$$

což staveno do rovnic (2) dává*):

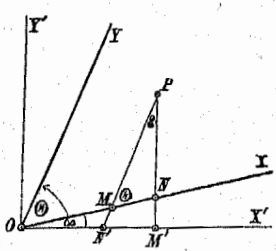
$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \qquad (3)$$

Třetí případ. Přechod z kosoúhlé soustavy souřadnic na pravoúhlou soustavu při témž počátku.

Jsou-li X, Y osy a ω úhel kosoúhlé soustavy, i označíme-li dále úhel osy X s osou X' nové pravoúhlé soustavy, t. j.

$$\sphericalangle XOX' = \alpha,$$

bude vzájemná poloha obou soustav zcela určena (obr. 16.), přidáme-li ještě, že úhel $Y'OX = 90^0 - \alpha$.



Obraz 16.

*) Obr. 15. upomíná nás na goniometrické vzorce pro $\cos(\alpha + \beta)$ a $\sin(\alpha + \beta)$. Skutečně, dělíme-li rovnice (3) provodičem OP, a označíme-li úhel $POM' = \beta$, obdržíme ihned následkem vztahu (1) čl. 6. zmíněné goniometrické vzorce.

Mámeť tu:

$$OM = x, \quad MP = y, \quad OM' = x', \quad M'P = y',$$
$$\sphericalangle MPN = \varepsilon = 90^0 - (\Theta + \alpha).$$

Z trojúhelníku MPN plyne:

$$MN = \frac{y \cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha},$$

a podobně z trojúhelníku OMN':

$$MN' = \frac{x \sin \alpha}{\sin(\Theta + \alpha)};$$

dosadíme-li tyto hodnoty do následujících relac:

$$OM' = ON \cos \alpha = (OM + MN) \cos \alpha,$$
$$M'P = N'P \cos \varepsilon = (N'M + MP) \sin(\Theta + \alpha),$$

obdržíme hledané rovnice transformační:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \cos(\Theta + \alpha), \\ y' &= x \sin \alpha + y \sin(\Theta + \alpha). \end{aligned} \tag{4}$$

Tyto rovnice podávají nám přechod z pravoúhelné soustavy $X'Y'$ na soustavu kosoúhlou XY. Pro opáčný přechod třeba pouze rovnice (4) řešiti dle x a y, čímž obdržíme:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\Theta + \alpha)}{\sin \Theta} - y \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\sin \Theta}, \\ y &= -\frac{x' \sin \alpha}{\sin \Theta} + y \frac{\cos \alpha}{\sin \Theta}. \end{aligned} \tag{5}$$

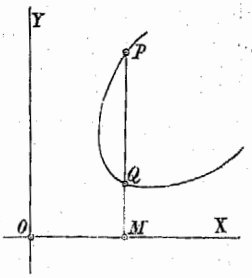
Případ druhý vychází z tohoto jako případ zvláštní (pro $\Theta = 90^0$, píšíce $-\alpha$ za α, jelikož dle obr. 18., z něhož jsme vyvinuli rovnice (5), osa X otáčkou ve smyslu negativném ve osu X' přechází.)

Přece však jsme samostatně druhý případ vyvinuli, a to za příčinou jeho častého upotřebení. Třetí případ nemohli jsme opět přejíti k vůli úplnosti.

Navedené tři případy řeší ve spojení se čl. 6. každou proměnu — transformaci — uvedených soustav souřadnic.

Analytické vyjádření geometrického místa bodů.

14. Dosud jsme uvažovali jednotlivé body v rovině souřadnic. Mysleme si nyní, že bod P leží na dané křivce K. Mění-li bod P svou polohu po této křivce, mění se tím i souřadnice tohoto bodu. Avšak pro každou hodnotu úsečky OM, obdržíme (obr. 17.) zcela určité pořadny MP, MQ, jejichž velikosť jest již křivkou určena.



Obraz 17.

Dána-li je nyní křivka geometricky jako místo bodů, jež mají všechny společnou danou vlastnosť, můžeme tuto křivku na základě výměru křivky sestrojiti.

Křivkou samou dán je tudíž zákon závislosti pořadny nějakého bodu na úsečce téhož bodu křivky.

Avšak můžeme z geometrického výměru křivky nalézti i její analytický výraz, t. j. rovnici mezi x a y, nebo vztah mezi úsečkou a pořadnou kteréhokoli bodu křivky. Touto rovnicí vyjádřen je opět týž zákon závislosti ve tvaru analytickém, t. j. můžeme nyní ku kterémukoliv x příslušné y vypočísti, jakož jsme dříve k danému x příslušné y konstrukcí našli. Takovouto rovnici mezi x i y, t. j. takový vztah mezi souřadnicemi kteréhokoli bodu geometrického místa jmenujeme rovnicí téhož místa.

Na př. můžeme vyměřiti kruh jako místo všech bodů v rovině, jež jsou od určitého pevného bodu v téže rovině stejně vzdáleny.

Značí-li x, y souřadnice kteréhokoli bodu místa, a, b souřadnice pevného bodu, r stálou vzdálenosť, vyjádřuje (dle čl. 7.) rovnice:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

vlastnosť tohoto místa.

15. Naopak mohli bychom vyjíti od rovnice mezi x a y. Každé dvé reálných hodnot, na př. x_0, y_0, jež vyhovují dané

rovnici, určuje bod (x_0, y_0) v rovině souřadnic. Mění-li se nyní stále x od x_0 počínajíc, tož se i y stále mění počínajíc od y_0 dle zákonu, jejž podává zmíněná rovnice. Bod (x, y) měně stále svou polohu, opisuje křivku. Všechna možná reálná řešení rovnice o dvou proměnlivých veličinách x a y vyjádřena jsou tudíž křivkou, kteráž je geometrickým obrazem dané rovnice.

Budiž na př. dána rovnice

$$y = \tfrac{1}{2} - 2x + \tfrac{3}{4}x^2.$$

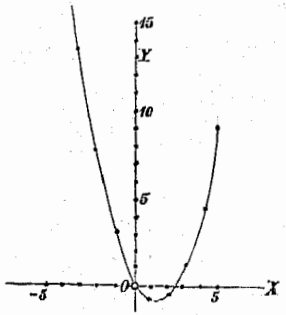
Píšeme-li postupně za úsečku x hodnoty

$$x = -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots$$

obdržíme za příslušné pořadny v témž pořádku:

$$y = 29\tfrac{1}{4},\ 20\tfrac{1}{2},\ 13\tfrac{1}{4},\ 7\tfrac{1}{2},\ 3\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ -\tfrac{3}{4},\ -\tfrac{1}{2},\ 1\tfrac{1}{4},\ 4\tfrac{1}{2},\ 9\tfrac{1}{4}\ \ldots$$

Takto jsme pouze několik řešení (obr. 18.) dané rovnice vytkli, a kdybychom je sestrojili, obdrželi bychom pouze několik bodů křivky. Jelikož však přechod z jednoho celého čísla na následující celé číslo si můžeme mysliti souvislým, tím že všechny možné zlomky a irracionalná čísla v úvahu vezmeme, jejichž hodnoty mezi ta dvě čísla spadají, následuje, že mezi dvě navedená posloupná řešení spadá ještě nesčetně mnoho jiných řešení. Mohli bychom takto řadu řešení ne pouze rozšířiti ale i doplniti, a tím i křivku, kteráž jest místem všech řešení, spojením posloupných řešení sestrojiti. Patrně, že křivku tím přesněji sestrojíme, čím více máme řešení dané rovnice, t. j. čím více známe bodů křivky, a čím menší jsou rozdíly postupných úseček.



Obraz 18.

Nyní můžeme analytickou geometrii blíže vyměřiti jako upotřebenou algebru na geometrii. Křivku vyměřujeme jako místo bodů, jejichž sou-

řadnice vyhovují dané rovnici. Vlastnosti rovnice vedou nás do vlastností křivky samé.

16. Probíhají-li dvě křivky týmž bodem, pravíme, že se křivky v tomto bodě sekou. Souřadnice průseku vyhovují tudíž rovnicím obou křivek. Naopak, dány-li jsou dvě křivky svými rovnicemi, jsou společná řešení obou rovnic souřadnice průseků daných křivek. K tomu můžeme ihned připojiti poznámku, kteréž se dá dobře upotřebiti. Jsou-li $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ rovnice dvou křivek, a značí-li λ_1, λ_2 dvě stálé veličiny, totiž číselné součinitele, je

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$$

rovnice křivky třetí, probíhající průseky křivek*) K_1 i K_2. Souřadnice průseků těchto křivek vyhovujíce rovnicím obou daných křivek, vyhoví tím i rovnici

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0.$$

17. Seznali jsme, že můžeme geometricky vyměřiti křivku jako místo bodů určité vlastnosti, a že tu křivku analyticky vyjádřiti můžeme rovnicí. V rovině křivky vzali jsme dvě přímky za osy soustavy souřadnic, avšak je patrno, že tvar a vlastnosti křivky se tím změniti nemohou, zvolíme-li si jiné dvě přímky v rovině křivky za osy nové soustavy souřadnic.

Tak zůstane kruh kruhem, nechť ten neb onen pár přímek v rovině jeho si zvolíme za osy souřadnic, k nimž body kruhu vztahujeme. Přechod z jedné soustavy rovnoběžných souřadnic na druhou soustavu rovnoběžných souřadnic provede se tím (čl. 13.), že místo souřadnic libovolného bodu $(x\,y)$ stavíme výrazy stupně prvého v nových souřadnicích téhož bodu x', y'. Taková proměna může arci míti vliv na tvar rovnice, ale stupeň její se tím neměnÍ.

Nyní můžeme i zkrátka vytknouti prospěch, jejž těžíme z proměny soustavy rovnoběžných souřadnic.

Pošineme-li soustavu souřadnic na nějaký, z počátku neurčitý bod, uvádíme tím dvě veličiny neurčité do počtu, totiž

*) Pravíme křivka K_1 místo křivka, jejíž rovnice je $K_1 = 0$.

souřadnice nového počátku, a otočíme-li nyní soustavu souřadnic o úhel též z počátku neurčitý α, tu třetí veličina neurčitá do počtu vchází, totiž úhel α. Veličiny tyto můžeme nyní určiti z podmínky, by koefficienty tří členů rovnaly se nulle. Tím obdržíme tři rovnice, z nichž opět tři neznámé veličiny,*) totiž souřadnice nového počátku a otáčku os α určiti můžeme.

Příhodnou volbou soustavy souřadnic můžeme si takto počet značně zjednodušiti.

18. Seznali jsme, že se stupeň rovnice proměnou soustavy souřadnic nemění. Dle toho dělíme křivky dle stupně rovnice. Rovnice je n-tého stupně, vchází-li x neb y samo o sobě neb v součinu nejvýše v n-tém stupni. Stupeň součinu $x^h y^k$ rovná se součtu $(h + k)$ exponentů jednotlivých činitelů.

Křivka vyjádřená rovnicí n-tého stupně jmenuje se křivkou n-tého stupně. Tak jest

$$a x^2 y + b y^2 + c = 0$$

křivka třetího stupně,

$$a x^2 + b y^2 + c = 0$$

křivka druhého stupně, a

$$a x + b y + c = 0$$

křivka prvního stupně, kdež vesměs značí a, b, c veličiny stálé, t. j. nezávislé na zvláštních hodnotách x i y.

V následujícím obírati se budeme křivkami stupně prvního a druhého, t. j. přímkou a kuželosečkami.

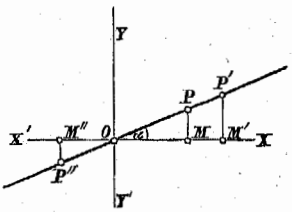
---

*) Kdybychom ještě z pravoúhlé soustavy přešli na kosoúhlou soustavu, jejíž úhel os by byl Θ, můžeme opět úhel soustavy považovati neznámým, jejž bychom opět určili podmínkou, by další koefficient členu v rovnici vymizel. Později shledáme, že pošinutí os nemá vlivu na koefficienty nejvyšších členů, jakož je otáčka os bez vlivu na stálý člen. (Plyne ostatně z rovnic (1) a (3) čl. 13.)

Geometrie přímky.

Rovnice přímky.

19. Přímka jdoucí počátkem souřadnic. Již ve článku 3. jsme našli, že je $x = a$ rovnice přímky rovnoběžné s osou Y, kteráž seče osu X ve vzdálenosti a od počátku souřadnic. Předpokládejme nyní, že jde přímka počátkem souřadnic a tvoří s osou X úhel α. Z vlastnosti přímky, že teče stále v témž směru (obr. 19.), plyne, že je podíl souřadnic kteréhokoli bodu této přímky veličina stálá. Z podobnosti trojúhelníků OPM, $OP'M'$, $OP''M''$ a t. d. vychází:



Obraz 19.

$$\frac{MP}{OM} = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{M''P''}{OM''} = \ldots \qquad (1)$$

Označíme-li stálý tento podíl písmenem A, máme:

$$\frac{MP}{OM} = \frac{y}{x} = A.$$

Jest tudíž: $$y = Ax, \qquad (2)$$

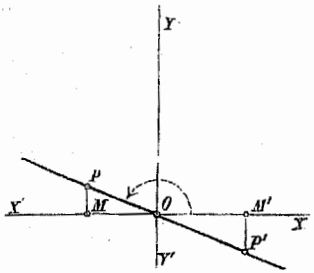
rovnice, jíž souřadnice kteréhokoli bodu přímky jdoucí počátkem souřadnic vyhovují, t. j. rovnice (2) jest rovnice přímky jdoucí počátkem.

Je-li stálá veličina A kladná, jsou souřadnice každého bodu přímky téhož znaménka, tudíž buď kladné, jako OM', $M'P'$, anebo záporné, na př. OM'', $M''P''$ (obr. 19.). V případě tomto leží přímka uvnitř úhlu XOY a uvnitř vrcholového úhlu $X'OY'$.

---

*) Místo: bod kterýkoli na přímce pravíme obyčejně: proměnlivý bod přímky a označujeme souřadnice jeho x, y.

Je-li veličina stálá A záporná, jsou nutně souřadnice každého bodu této přímky různého znaménka. Jsouť tudíž všechny body takové přímky a tím i přímka sama uvnitř úhlu YOX' a XOY' (obr. 20.).



Obraz 20.

20. Stálou veličinu A můžeme nyní jednoduše geometricky vysvětliti. Z obrazce 19. plyne:

$$\frac{MP}{OM} = tg\, POX = tg\, \alpha = A. \qquad (3)$$

Tangentu úhlu, jejž činí přímka s osou X, tudíž veličinu A v souřadnicích pravoúhelných, jmenujeme směrnice přímky; dle toho jest

$$y = A\,x,$$

rovnice přímky, jdoucí počátkem souřadnic, jejíž směrnice je A.

Poznámka. Je-li Θ úhel os souřadnic kosoúhlých, plyne z trojúhelníku OPM, kterýž nyní je kosoúhlý:

$$\frac{MP}{OM} = \frac{sin\,(POM)}{sin\,(MPO)} = \frac{sin\,\alpha}{sin\,(\Theta - \alpha)} = A;$$

je tudíž:
$$y = \frac{sin\,\alpha}{sin\,(\Theta - \alpha)}\,x$$

rovnice přímky jdoucí počátkem pod směrem α. Za $\alpha < \Theta$ je A kladno, a za $\alpha > \Theta$ je A záporno. Místo 90° nastoupí nyní úhel Θ.

21. Jde-li přímka mimo počátek souřadnic ještě bodem $P_1\,(x_1, y_1)$, musí souřadnice tohoto bodu rovnici (2) vyhovovati, t. j. rovnice (2) zůstává v platnosti, i když místo souřadnic proměnlivého bodu přímky píšeme souřadnice bodu P_1; platí tudíž

$$y_1 = A\,x_1,$$

a tím je
$$A = \frac{y_1}{x_1}. \qquad (3)$$

Známe-li souřadnice některého bodu P_1 na přímce (2), známe tím i směr této přímky, a tím je i přímka sama dána,

jakožto spojnice počátku souřadnic s bodem P_1. Rovnice její je

$$y = \frac{y_1}{x_1} x. \qquad (4)$$

Přicházíme takto k jednoduchému sestrojení přímky, dané rovnicí

$$y = A x.$$

Jelikož je A obecně zlomek (rov. 3.), tudíž tvaru:

$$A = \frac{m}{n},$$

můžeme rovnici (3) psáti:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{m}{n},$$

z čehož plyne:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda n, \\ y_1 &= \lambda m, \end{aligned} \qquad (5)$$

kdež značí λ poměrný činitel, jednotku délky, kterouž libovolně zvoliti můžeme. Sestrojíme-li x_1 rovno n jednotkám a y_1 rovno m jednotkám, jsou (x_1, y_1) souřadnice bodu na přímce (2), jelikož je

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{m}{n} = A.$$

Na příklad bychom měli narýsovati přímku danou rovnicí:

$$y = \tfrac{2}{3} x.$$

Odměříme $x_1 = +3$ i $y_1 = +2$; spojnice bodu (3, 2) s počátkem souřadnic je hledaná přímka.

Co příklad druhý budiž

$$y = -3x.$$

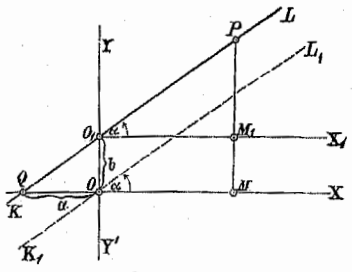
Narýsujme opět bod

$x_1 = +1$, $y_1 = -3$ (neb $x_1 = -1$, $y_1 = +3$)

a spojnice tohoto bodu s počátkem souřadnic je přímka, vyjádřená danou rovnicí.

22. Obyčejná rovnice přímky. Hledejme nyní rovnici přímky, nechť již je poloha její k osám souřadnic jakákoliv.

Budiž KL taková přímka (obr. 21.), a O_1 její průsek s osou Y. Sestrojme tímto bodem rovnoběžku O_1X_1 k ose X; průsek její s pořadnou bodu P dané přímky budiž M_1. Je-li A směrnice této přímky, je vzhledem k předcházejícímu článku



Obraz 21.

$$\frac{M_1P}{O_1M_1} = A, \qquad (1)$$

kdež je M_1P pořadna, O_1M_1 úsečka bodu P na dané přímce KL vzhledem X_1, Y co osám souřadnic. Pošineme-li nyní osu X_1 rovnoběžně ve smyslu negativné osy Y, roste tím pořadna každého bodu P, totiž M_1P, naopak se zmenší tato pořadna, pošineme-li osu X_1 ve smyslu kladné osy Y o určitou délku.

Mysleme si, že, jak vidno z obr. 21., pošineme osu X_1 ve smyslu negativné osy Y do polohy OX. Jelikož se tím nemění ani směrnice přímky, ani úsečka bodu P ($OM = O_1M_1$) a pořadna téhož bodu o délku OO_1 roste, t. j.

$$MP = M_1P + OO_1,$$

obdržíme, označivše délku $\overline{OO_1} = b$, vzhledem k rovnici (3)

$$y = Ax + b, \qquad (2)$$

rovnici přímky KL v soustavě souřadnic XY.

Znaménko veličiny b je zcela určeno tím, co jsme dříve navedli, a plyne i jednoduše z poznámky, že je b pořadnou bodu Q_1 vzhledem na soustavu XY, t. j. úsek přímky KL na ose Y. Rovnici (2) jmenujeme obyčejnou rovnicí přímky.

Naopak každá rovnice stupně prvého ve x a y tvaru (2) značí přímku. Můžeme ji totiž psáti:

$$\frac{y-b}{x} = A,$$

a v tomto tvaru vyjádřuje karakteristickou vlastnosť přímky.

23. Kdybychom chtěli nyní přímku danou rovnicí

$$y = Ax + b,$$

narýsovati, třeba si pouze připomenouti, co vyjádřují stálé veličiny A, b.

Máme totiž narýsovati přímku, jdoucí bodem $(0, b)$ se směrnicí A.

Přímka $$y = Ax$$

je rovnoběžná s přímkou (2), jelikož má tutéž směrnici, a známe ji již snadně narýsovati. Označme ji v obr. 21. $K_1 L_1$. Hledanou přímku KL obdržíme nyní co přímku jdoucí bodem O_1 $(0, b)$ rovnoběžně s přímkou $K_1 L_1$.

Tak jest přímka daná rovnicí

$$y = 2x + 3,$$

přímka jdoucí bodem $(0, 3)$ rovnoběžně s přímkou $y = 2x$.

Podobně bychom sestrojili přímku

$$y = \tfrac{2}{3} x - 3.$$

Sestrojili bychom nejdříve přímku $y = \frac{2}{3} x$, a rovnoběžka s touto přímkou vedená bodem $(0, -3)$ je hledaná přímka.

24. Chtějíce nalézti průsek přímky

$$y = Ax + b,$$

s osou X, třeba si pouze připomenouti, že body ležící na ose X mají pořadnu rovnou nulle.

Pořadna tohoto průseku rovna je tudíž nulle a označíme-li příslušnou mu úsečku a, plyne z rovnice přímky

$$0 = Aa + b,$$

tudíž je $$a = -\frac{b}{A}. \qquad (3)$$

Výsledek tento již z obrazce 21. je patrný. Řešíme-li rovnici (3) dle A obdržíme:

$$A = -\frac{b}{a}, \qquad (4)$$

z čehož shledáváme, že úseky a, b, jež činí daná přímka na osách souřadnic, jsou opáčného znaménka nebo téhož znaménka,

dle toho je-li A kladno neb záporno t. j. uzavírá-li daná přímka s osou X úhel menší nebo větší než 90^0.

Z rovnice (2) přicházíme na zvláštní, dříve již uvedené případy, stavíme-li za stálé veličiny A, b, kteréž i polohu i směr přímky zcela určují, zvláštní hodnoty.

Je-li $b = 0$, máme přímku jdoucí počátkem souřadnic; za $A = 0$, přechází rovnice (2) ve $y = b$, t. j. obdržíme rovnoběžku s osou X (čl. 3.). Přímku rovnoběžnou s osou Y obdržíme, je-li $A = \infty$. Můžeme však dříve rovnici (2), dělivše veličinou A, vzhledem k rovnici (3) psáti:*)

$$\frac{y}{A} = x - a, \qquad (5)$$

a stavíme-li nyní za $A = \infty$, obdržíme

$$x - a = 0,$$

což jest známá nám již rovnice rovnoběžky s osou Y.

25. Úsečková rovnice přímky. Úseky přímky na osách je přímka sama dána, neboť v případě tomto známe dva body ležící na osách.

Vychází to též analyticky, stanovíme-li za A hodnotu z rovnice (4) předcházejícího článku do obyčejné rovnice přímky. Obdržíme takto rovnici, kteráž visí pouze na veličinách a, b, b, totiž:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (1)$$

Jsou-li tudíž dány úseky a, b, můžeme ihned rovnici přímky napsati a i přímku samu bezprostředně narýsovati.

*) Z rovnice (3) totiž: $b = -aA$ plyne, že b současně s A je nekonečně veliké, předpokládaje, že $a \gtrless 0$, t. j. každá přímka rovnoběžná s osou Y protíná tuto osu v nekonečné vzdálenosti. Je-li však $A = \infty$ a b kterákoli konečná veličina, je

$$a = -\frac{b}{A} = 0$$

pro $A = \infty$, a rovnice (2) přejde ve $x = 0$, t. j. ve rovnici osy Y. Ono je i geometricky patrno. Mysleme si, že tu rovnoběžnou přímku paralelně pošineme až se sjednotí s osou Y, potom kterýkoli bod osy Y považovati můžeme jako průsek; analyticky: výraz pro b stává se neurčitým.

Je-li přímka rovnoběžna s jednou osou, protíná ji ve vzdálenosti nekonečně veliké, t. j. úsek je nekonečně veliký. Je-li tudíž $a = \infty$, přechází rovnice (1) ve $y = b$, a podobně pro $b = \infty$ obdržíme z rovnice (1) $x = a$, kteréž rovnice již dříve jsme seznali jako rovnice přímek rovnoběžných s osami. Rovnice přímky (1) jmenuje se úsečková rovnice přímky.

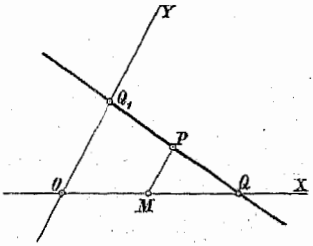
Poznámka. Rovnice úsečková s velkým prospěchem se mnohdy upotřebuje a platí touže měrou i pro souřadnice kosoúhlé. Vychází to i tím, že rovnice (2) čl. 22., již jsme upotřebili při odvození i pro soustavu kosoúhlou, platí;*) ale i geometricky to můžeme přímo dokázati. Nechť je $\overline{QQ_1}$ daná přímka (obr. 22.), P libovolný bod té přímky, OM, MP souřadnice jeho. Z podobnosti trojúhelníků

$$OQQ_1 \sim MPQ \quad \text{plyne:}$$

$$\frac{MP}{OQ - OM} = \frac{OQ_1}{OQ},$$

tudíž je $$\frac{OM}{OQ} + \frac{MP}{OQ_1} = 1,$$

t. j. $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



Obraz 22.

Odvození toto je patrně nezávislé na úhlu soustavy souřadnic, což nám závěrek geometricky vysvětluje.

Jakkoli je i patrný prospěch tohoto tvaru rovnice přímky, přece všeobecnému upotřebení jejímu vadí ta okolnost, že nemůžeme této rovnice upotřebiti v případě, když jde přímka počátkem souřadnic, poněvadž oba body Q a Q_1, jež určují přímku, v tomto případě spojují se v jediný bod O, počátek to souřadnic.

Je-li na příklad přímka KL dána rovnicí

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1,$$

odměřme na ose X: $OQ = +2$, a na ose Y: $OQ_1 = +3$, a QQ_1 je hledaná přímka (obr. 23.).

Podobně je pro přímku K_1L_1, danou rovnicí

$$-\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1,$$

*) Co se týče hodnoty A v případě tomto, viz čl. 20. poznámku.

$OQ = -3$, $OQ_1 = +1$. Dána-li je přímka $K'L'$ rovnicí

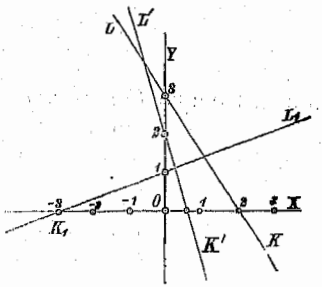
$$y = -3x + 2,$$

obdržíme, svedeme-li ji na tvar úsečkový:

$$\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{2} = 1,$$

tudíž jsou úseky té přímky na osách

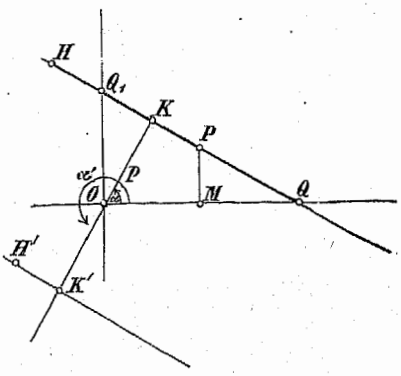
$$OQ = \tfrac{2}{3}, \quad OQ_1 = +2.$$



Obraz 23.

26. Normálná rovnice přímky. Na danou přímku spustíme z počátku souřadnic kolmici. K budiž její pata (obr. 24.) a p její délka $\overline{OK}$. Označíme-li úhel té kolmice s osou X písmenem α, $OQ = a$, $OQ_1 = b$, je

$$p = a \cos \alpha = b \sin \alpha. \quad (1)$$



Obraz 24.

Znásobíme-li nyní úsečkovou rovnici přímky $\overline{QQ_1}$ veličinou p, obdržíme vzhledem k rovnicím (1)

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p. \quad (2)$$

Tvar (2) rovnice přímky, dané kolmicí*) p z počátku a úhlem α, jejž ta kolmice s osou X tvoří, jmenujeme normálný tvar rovnice přímky.

Kolmici p bereme vždy positivně a úhel α počítáme od kladné osy x ku kolmici ve směru kladném. Může tudíž úhel $(p\,x) = \alpha$ míti každou hodnotu mezi 0^0 a 360^0.

*) Rovnice (2) vyjádřuje, že průmět přímky na kolmici p je bod K, což je jinými slovy, že přímka ve všech svých bodech má týž směr. Na základě toho můžeme ihned rovnici (2) nalézti, tím že zlomenou čáru $OMPK$ promítneme na kolmici OK. Obdržíme tu ihned: $x \cos (x\,p) + y \cos (y\,p) = p$, což jest právě rovnice (2).

Přímka $K' H'$, jež leží souměrně vzhledem k počátku souřadnic s přímkou $K H$, danou rovnicí

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p,$$

má kolmici téže délky

$$O K' = p,$$

avšak úhel té kolmice s osou X je

$$X O K' = \alpha' = 180 + \alpha;$$

jest tudíž rovnice této přímky $K' H'$:

$$x \cos (180 + \alpha) + y \sin (180 + \alpha) = p.$$

Poznámka. Mohli bychom tuto rovnici i psáti

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = -p,$$

kterýžto výsledek praví, že bychom museli uvážiti znaménko kolmice, kdybychom přijali, že úhel $\alpha = (p\,x)$ nepřekročí 180°. Můžeme tím říci: přímka $K_1 L_1$ určena je α', p aneb α, $-p$. Mluvíme-li o normálném tvaru rovnice přímky, tu vždy kolmici p beřeme jakožto kladnou.

Obecná rovnice prvého stupně.

27. Navedené tři tvary pro rovnici přímky jsou stupně prvého, i namítá se nám otázka, jaké jest to místo bodů, jejichž souřadnice vyhovují obecné rovnici stupně prvého?

Nejobecnější rovnice stupně prvého mezi x a y je:

$$l x + m y + n = 0, \qquad (1)$$

kdež jsou l, m, n veličiny kladné nebo záporné, z nichž může býti jedna ano i dvě rovny nulle; pouze koefficienty od x a y nesmějí současněji vymizeti.

Mysleme si, že máme tři současná řešení této rovnice, totiž: x, y; x_1, y_1; x_2, y_2. Je tudíž:

$$\begin{aligned} l x + m y + n &= 0, \\ l x_1 + m y_1 + n &= 0, \\ l x_2 + m y_2 + n &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Odečteme-li druhou rovnici od prvé a podobně i třetí od prvé, obdržíme:

$$\begin{aligned} l (x - x_1) + m (y - y_1) &= 0, \\ l (x - x_2) + m (y - y_2) &= 0, \end{aligned}$$

z kterýchžto rovnic plyne:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}, \tag{3}$$

nebo ve tvaru determinantu:

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1 \\ x - x_2, & y - y_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3'}$$

Rovnice tato je podmínkou (čl. 7, rovn. 4), vedle které tři body (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) leží na jedné a téže přímce.

Kterékoli tři body, jejichž souřadnice vyhovují rovnici (3), leží na jedné a téže přímce; jelikož však dva z těch bodů přímku úplně určují, vysvítá, že místo všech bodů, jejichž souřadnice rovnici (1) vyhovují, je přímka, t. j.: obecná rovnice stupně prvého vyjádřuje přímku.

Můžeme však rovnici (3) i jiným způsobem vyložiti. Dle čl. 10. vyjádřuje:

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1 \\ x - x_2, & y - y_2 \end{vmatrix}$$

dvojnásobnou plochu trojúhelníku, jehož vrcholy jsou (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y), a jelikož tento výraz pro každé tři body, jejichž souřadnice vyhovují rovnici (1) se rovná nulle, vysvítá, že útvar geometrický vyjádřený rovnicí (1) je přímka.

28. Takto jsme bezprostředně dokázali, že obecná rovnice stupně prvého vyjádřuje přímku, avšak mohli bychom to dokázati i tím způsobem, že bychom obecnou rovnici na jeden z dříve uvedených tvarů svedli, čímž současně bychom dokázali, že geometrickému útvaru vyjádřenému obecnou rovnicí prvého stupně přísluší karakteristická vlastnost přímky. Tím způsobem bychom obdrželi více rovnic pro jednu a tutéž přímku a dokážeme nyní, že rovnice stupně prvého, jež značí jednu a tutéž přímku, pouze stálým činitelem se liší, jímž jsme danou rovnici přímky buď znásobili nebo zkrátili.

Mají-li dvě rovnice

$$\begin{aligned} l\,x + m\,y + n &= 0, \\ l'\,x + m'\,y + n' &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

jednu a tutéž přímku vyjádřovati, musíme za kterékoliv x

z obou rovnic obdržeti tuž hodnotu pro y, t. j. musí býti*):

$$-\frac{l}{m}x - \frac{n}{m} \equiv -\frac{l'}{m'}x - \frac{n'}{m'}. \qquad (5)$$

Za $x = 0$, plyne

$$\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}. \qquad (6)$$

Následkem této rovnice můžeme horní totožnosť psáti:

$$\frac{l}{m}x \equiv \frac{l'}{m'}x,$$

kterážto rovnice opět pro všechny možné hodnoty za x musí býti platna, což však je tenkráte, když

$$\frac{l}{m} = \frac{l'}{m'}. \qquad (7)$$

Podmínečné rovnice totožnosti (6) a (7) můžeme též psáti:

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}.$$

Označíme-li nyní společnou hodnotu těch poměrů λ, je

$$l = \lambda\, l', \quad m = \lambda\, m', \quad n = \lambda\, n',$$

čímž seznáváme, že skutečně rovnice přímky

$$l'x + m'y + n' = 0,$$

přechází ve rovnici téže přímky

$$l\,x + m\,y + n = 0,$$

znásobíme-li ji určitým činitelem λ. Můžeme nyní říci: Dvě rovnice prvého stupně mezi x a y, jež se liší pouze nějakým stálým činitelem, vyjádřují jednu a tuž přímku.

Chceme-li na příklad svésti obecnou rovnici přímky

$$l\,x + m\,y + n = 0,$$

na tvar normální

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

znásobíme obecnou rovnici přímky činitelem λ, jejž určíme z podmínky, že platí totožně:

$$\lambda\,(l\,x + m\,y + n) \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - p.$$

*) Znak $\equiv$ upotřebujeme pro totožnosť — identitu, t. j. že rovnici vyhovuje se každou hodnotou pro x.

Jest tudíž
$$\lambda l = \cos \alpha,$$
$$\lambda m = \sin \alpha,$$
$$\lambda n = -p.$$

Sečteme-li čtverce prvých dvou rovnic, obdržíme:
$$\lambda^2 (l^2 + m^2) = 1,$$
tudíž je:
$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{l^2 + m^2}}.$$

Znaménko kořene je opáčné znaménka veličiny n, jelikož součin λn musí býti záporný, totiž $-p$.

Je-li na příklad dána rovnice přímky:
$$3x - 2y + 5 = 0,$$
to ji svedeme dělením činitelem: $\lambda = -\sqrt{15}$ na normálný tvar, čímž obdržíme:
$$-\frac{3}{\sqrt{15}} x + \frac{2}{\sqrt{15}} y - \frac{5}{\sqrt{15}} = 0.$$

Znásobíme-li horní rovnici činitelem $\lambda = -\frac{1}{5}$, obdržíme úsekový tvar rovnice, totiž:
$$\frac{x}{-\frac{5}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} - 1 = 0.$$

Poznámka. Že obecná rovnice stupně prvého vyjádřuje přímku, vysvítá i tím, že každá přímka seče druhou přímku v jediném bodě. Rovnice obou přímek mohou míti tím pouze jediné společné řešení, t. j. každá z nich musí býti prvého stupně.

29. V rovnici přímky, nechť již je toho neb onoho tvaru, vyskytují se dvě libovolné stálé, pouze obecná rovnice přímky
$$l x + m y + n = 0$$
zdánlivě má tři stálé veličiny. Jelikož vždy jednou z těchto tří stálých, na př. n, můžeme rovnici děliti, zůstanou opět jen dvě libovolné stálé, totiž:
$$\frac{l}{n}, \quad \frac{m}{n}.$$
Vezmeme-li obyčejnou rovnici přímky
$$y = A x + b,$$
jsou veličiny A, b libovolné stálé; libovolné — jelikož může

tato rovnice kteroukoli přímku v rovině vyjádřovati, — a stálé — jelikož pro jednu a tutéž přímku se nemění. Považujeme-li ty stálé veličiny jakožto neznámé, můžeme je určiti, známe-li dvě podmínky, jimž mají vyhověti. Takové dvě podmínky vyjádřujeme totiž pomocí dvou rovnic. Můžeme tedy určiti přímku ze dvou daných podmínek, což na následujících příkladech vysvětlíme.

I. Má se určiti přímka jdoucí bodem (x', y'). Budiž hledaná rovnice přímky

$$y = A x + b. \qquad (1)$$

Jelikož je bod (x', y') bodem této přímky, podávají souřadnice jeho jedno řešení rovnice (1), to jest, platí:

$$y' = A x' + b. \qquad (2)$$

Podmínka, by přímka probíhala daným bodem, dává tudíž jednu rovnici mezi A i b, pomocí jejíž můžeme jednu stálou vyjádřiti druhou. Píšeme-li tedy $y' - A x'$ za b v rovnici přímky (1), nebo což je totéž, vyloučíme-li z rovnic (1) a (2) stálou veličinu b, obdržíme:

$$y - y' = A (x - x'), \qquad (3)$$

jakožto rovnici přímky, jdoucí daným bodem. Rovnice (3), v níž je A ještě libovolné, značí rovnici kterékoli přímky jdoucí bodem (x', y'), není totiž přímka jedním bodem určena.

II. Rovnice přímky jdoucí bodem (x', y') rovnoběžně ku dané přímce.

Rovnici přímky jdoucí daným bodem, známe již, jest:

$$y - y' = A (x - x').$$

Má-li býti přímka tato rovnoběžna s danou přímkou, jejíž je směrnice A_1, musí býti:

$$A = A_1,$$

tím je $$y - y' = A_1 (x - x'),$$

hledaná rovnice přímky.

III. Přímka jdoucí dvěma danými body (x', y') a (x'', y'').

Rovnice přímky jdoucí bodem (x', y') je:

$$y - y' = A (x - x'). \qquad (1)$$

Koefficient A najdeme z podmínky, že tato přímka probíhati má i bodem (x'', y''); platí tudíž:

$$y'' - y' = A\,(x'' - x'),$$

z čehož plyne:

$$A = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}. \qquad (2)$$

Tím je i směrnice té přímky určena, a rovná se podílu z rozdílu pořaden a rozdílu příslušných úseček. Dosadivše do rovnice (1) hodnotu za A, obdržíme:

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,(x - x'), \qquad (3)$$

kteroužto rovnici bychom též mohli psáti:

$$y - y'' = \frac{y' - y''}{x' - x''}\,(x - x''),$$

čehož důkaz leží v odvození rovnice (3).

Poznámka. V případě tomto máme dvě podmínečné rovnice, jelikož jde přímka dvěma body, totiž:

$$y' = A\,x' + b,$$
$$y'' = A\,x'' + b.$$

Dosadíme-li hodnoty za A i b plynoucí z těchto rovnic do rovnice

$$y = A\,x + b,$$

obdržíme hledanou rovnici přímky. Oba výkony, totiž řešení a uvedení hodnot do rovnice přímky, mají v zápětí vyloučení stálých A, b z uvedených tří rovnic. Výsledek eliminace můžeme ihned napsati ve tvaru determinantu:

$$\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ y' & x' & 1 \\ y'' & x'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vzdálenosť bodu od přímky.

30. Mysleme si daným bodem $P\,(\xi, \eta)$ proloženou přímku rovnoběžně s přímkou danou

$$x\,cos\,\alpha + y\,sin\,\alpha = p.$$

Je-li L pata kolmice z počátku souřadnic na rovnoběžku spuštěné (obr. 25.), je

$$\xi\,cos\,\alpha + \eta\,sin\,\alpha = \overline{OL} = p + \overline{KL},$$

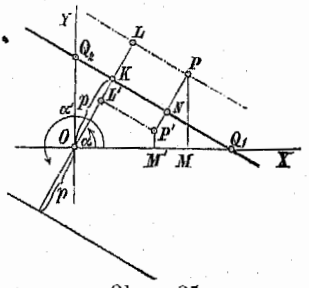
tudíž je*)

$$\overline{KL} = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha - p$$

délka vzdálenosti NP. Kdyby však bod P ležel s počátkem O po téže straně přímky, a v případě tomto označme jej P', bylo by:

$$OL' = OK - L'K,$$

tím bychom obdrželi:



Obraz 25.

$$\overline{L'K} = OK - OL' = p - \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha$$

pro vzdálenosť $P'N$. Vidíme, že se znaménko kolmice mění, přejde-li bod P z jedné strany přímky na druhou stranu.**) Jsouť i vzdálenosti PN, $P'N$ opáčného směru a tím i opáčného znaménka. Obdržíme tím pro vzdálenosť nějakého bodu od přímky výraz:

$$PN = \pm (\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha - p).$$

Nyní určíme ještě znaménko kolmice. Vezmeme-li kolmice bodů, jež leží s počátkem souřadnic na téže straně přímky jako kladné ***), platí pro každou polohu bodu P dolní znaménko, jest totiž:

$$PN = -(\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha - p),$$

nebo přejde-li bod P do počátku souřadnic, splývá též pata jeho K s patou N, čímž obdržíme:

$$ON = OK = +p.$$

Předpokládajíce, že máme přímku danou rovnicí tvaru normalného, a že jsme všechny členy její převedli na levou stranu (rovnice anullovaná), tak že je

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0,$$

můžeme nyní říci: Dosadíme-li souřadnice kterého-

*) Srovnej poznámku ku čl. 25.; můžeme zde totiž promítnouti lomenou čáru OMP na kolmici OL, čímž též obdržíme:

$$OM\cos\alpha + MP\sin\alpha = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha = OL.$$

**) Porovnej poznámku čl. 11.

***) Mohli bychom i opáčně rozhodnouti, avšak potom bychom se museli toho důsledně přidržeti.

koli bodu do levé strany anullované rovnice dané přímky ve tvaru normalném, obdržíme zápornou vzdálenosť tohoto bodu od dané přímky.

Kdyby byla dána přímka rovnicí v jiném tvaru, svedeme ji dříve na tvar normalný; tak jest vzdálenosť bodu $P\,(\xi\,\eta)$ od přímky $\qquad l\,x + m\,y + n = 0,$

dána rovnicí:

$$-PN = \frac{l\,\xi + m\,\eta + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}; \quad \text{nebo} \quad PN = \frac{l\,\xi + m\,\eta + n}{\sqrt{l^2 + m^2}};$$

vzdálenosť PN téhož bodu od přímky, dané rovnicí

$$y = A\,x + b,$$

je: $\quad -PN = \dfrac{\eta - A\,\xi - b}{+\sqrt{1 + A^2}}$, t. j.: $\quad PN = \dfrac{-\eta + A\,\xi + b}{\sqrt{1 + A^2}}$.

Souřadnice paty $N\,(x_1,\ y_1)$ (obr. 25.) plynou z rovnic:

$$\xi - x_1 = \overline{NP}\cos\alpha = (\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p)\cos\alpha,$$

$$\eta - y_1 = \overline{NP}\sin\alpha = (\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p)\sin\alpha.$$

Je-li na příklad dán bod $P\,(-2,\ 1)$ a přímka

$$3\,x - 2\,y + 5 = 0,$$

je $\quad \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p = \dfrac{3\cdot(-2) - 2\cdot 1 + 5}{-\sqrt{9+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}},$

tudíž je vzdálenosť toho bodu od dané přímky

$$-\frac{3}{\sqrt{13}},$$

a $\qquad \cos\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}.$

Pro souřadnice paty N kolmice s bodu P na přímku spuštěné obdržíme $\qquad x_1 = -\frac{17}{13}, \qquad y_1 = \frac{7}{13}.$

Úloha. Najdi vzdálenosť bodu (1, 2) od přímky

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1,$$

jakož i souřadnice paty N kolmice toho bodu na danou přímku.

Řeš: Vzdálenosť $= \frac{2}{5}$, $N\,(\frac{33}{25},\ \frac{31}{25})$.

Úhel dvou přímek.

31. Dány buďtež dvě přímky rovnicemi svými ve tvaru obyčejném, totiž:

$$y = A\,x + b,$$
$$y = A'\,x + b'.$$

Označíme-li α a α' úhly, jež uzavírají tyto přímky s osou X, a písmenem δ úhel těch přímek, je (obr. 26.):

$$\delta = \alpha' - \alpha,$$

tudíž i

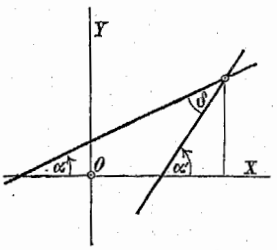
$$tg\,\delta = \frac{tg\,\alpha' - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha'\,tg\,\alpha} = \frac{A' - A}{1 + A\,A'}. \qquad (1)$$

Dané dvě přímky stojí na sobě kolmo, je-li $\delta = 90^0$, tudíž:

$$1 + A\,A' = 0. \qquad (2)$$

Dvě přímky stojí tudíž na sobě kolmo, rovna-li směrnice jedné přímky negativno-reciproké směrnici přímky druhé, je-li totiž:

$$A' = -\frac{1}{A}.$$



Obraz 26.

Dané dvě přímky jsou rovnoběžny, je-li $\delta = 0$, čímž z (1) opět plyne rovnost směrnic, totiž:

$$A = A'. \qquad (3)$$

Kdyby byly přímky dány rovnicemi ve tvaru obecném:

$$l\,x + m\,y + n = 0,$$
$$l'\,x + m'\,y + n' = 0,$$

je

$$tg\,\varphi = \frac{l\,m' - l'\,m}{l\,l' + m\,m'}. \qquad (4)$$

Podmínka kolmosti je:

$$l\,l' + m\,m' = 0, \qquad (5)$$

a podmínka rovnoběžnosti je:

$$l\,m' - l'\,m = 0. \qquad (6)$$

Úloha 1. Určiti jest úhel přímek:

$$3x - 2y + 5 = 0,$$
$$5x + 7y + 9 = 0.$$

Řeš: $$tg\,\delta = \frac{21 + 10}{15 - 14} = 31.$$

Úloha 2. Který úhel uzavírá s osou Y přímka:

$$3x + 8y - 2 = 0.$$

Řeš: $$tg\,\delta = \tfrac{8}{3}.$$

Úloha 3. Bodem (x', y') vésti se má přímka, která s přímkou $$lx + my + n = 0,$$ uzavírá daný úhel φ.

Řeš: Rovnice přímky jdoucí bodem (x', y') je:

$$y - y' = A(x - x').$$

Směrnice dané přímky je $-\frac{l}{m}$, tudíž je:

$$tg\,\varphi = \frac{A + \frac{l}{m}}{1 - A \cdot \frac{l}{m}} = \frac{Am + l}{m - Al},$$

z čehož plyne: $$A = \frac{m\,tg\,\varphi - l}{m + l\,tg\,\varphi},$$

a rovnice hledané přímky je:

$$y - y' = \frac{m\,tg\,\varphi - l}{m + l\,tg\,\varphi}(x - x').$$

Úloha 4. Určiti jest rovnice přímky, jdoucí počátkem souřadnic kolmo na přímku:

$$3x - 5y + 8 = 0.$$

Řeš: Rovnice této kolmice je:

$$5x + 3y = 0;$$

jelikož součet součinů koefficientů stejnojmenných proměnlivých se rovná nulle, stojí na dané přímce kolmo (rov. 5.), a jelikož není v ní stálého členu, probíhá počátkem souřadnic.

Průsek dvou přímek.

32. Dány jsou dvě přímky rovnicemi svými:

$$\begin{aligned} l\,x + m\,y + n &= 0, \\ l'\,x + m'\,y + n' &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Předpokládajíce, že mají i x i y v obou rovnicích tuž hodnotu jakožto souřadnice bodu společného oběma přímkám, obdržíme řešením *) těchto rovnic dle x a y:

$$x = \frac{m\,n' - m'\,n}{l\,m' - l'\,m},$$

$$y = \frac{n\,l' - n'\,l}{l\,m' - l'\,m}.$$

V případě, že je jmenovatel

$$l\,m' - l'\,m \gtrless 0,$$

máme zcela určitý průsek v konečnosti. Kdyby však byl společný jmenovatel

$$l\,m' - l'\,m = 0,$$

jsou obě přímky rovnoběžny (čl. 31., rov. 6.), což i geometricky vysvětlují nekonečně veliké hodnoty souřadnic průseku v případě tomto.

Zde jsme předpokládali, že čítatelé souřadnic se liší nully.

Kdyby mimo společný jmenovatel i čítatel jedné souřadnice rovnal se nulle, platilo by totéž i pro čítatel druhé souřadnice.

Z rovnic

$$l\,m' - l'\,m = 0,$$

$$m\,n' - m'\,n = 0,$$

plyne totiž:

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'},$$

a tudíž i:

$$n\,l' - n'\,l = 0.$$

V případě tomto obě přímky (1) v jednu splývají (čl. 28.). Každý bod té přímky považovati můžeme za průsek, odtud neurčitosť ve výrazech pro souřadnice průseku.

*) Jest prospěšno, pamatovati si toto řešení ve tvaru:

$$x : y : 1 = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}.$$

Úloha 1. Mají se určiti souřadnice vrcholů trojúhelníku, jehož strany jsou dány rovnicemi:

$$2y - x = 2, \quad y + x = 1, \quad 2x + y = -4.$$

Řeš: A_1 (0, 1), A_2 (−2, 0), A_3 (−5, 6).

Úloha 2. Nechť se určí průsek přímek:

$$y = Ax + A^2, \quad y = A_1 x + A_1^2.$$

Řeš: $[-(A + A_1), -AA_1]$.

33. Tři přímky protínají se v témž bodě, přísluší-li jim jeden bod společně, nebo jinak řečeno, průsek dvou přímek jest bodem přímky třetí.

Jsou-li tudíž:

$$\begin{aligned} lx + my + n &= 0, \\ l'x + m'y + n' &= 0, \\ l''x + m''y + n'' &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

rovnice daných tří přímek, obdržíme, předpokládajíce tuž hodnotu pro x a y ve všech třech rovnicích, tím že hodnoty pro x a y plynoucí z posledních dvou rovnic (čl. 32.) dosadíme do rovnice prvé:

$$l(m'n'' - m''n') + m(n'l'' - n''l') + n(l'm'' - l''m') = 0, \qquad (2)$$

jakožto podmínku společného řešení. Podmínečnou tuto rovnici psáti můžeme ve tvaru determinantu [výsledek vyloučení veličin x, y; z rovnice (1)]:

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

jelikož z jednoho členu na př. $lm'n''$ všechny ostatní členy levé strany rovnice (2) permutací písmen obdržíme, měníce současně i znaménko.

Poznámka. Toto pravidlo můžeme i následovně vyjádřiti: Je-li součet rovnic tří přímek, když jsme byli dříve dvě z nich určitými činiteli znásobili, roven identicky nulle, protínají se ty tři přímky v bodě jediném.

Znásobíme-li totiž prvou rovnici činitelem λ, druhou činitelem μ, obdržíme sečtením:

$$(l\lambda + l'\mu + l'')x + (m\lambda + m'\mu + m'')y + (n\lambda + n'\mu + n'') = 0.$$

Součet tento je tenkráte totožný nulle, je-li současně:

$$\begin{aligned} l\lambda + l'\mu + l'' &= 0, \\ m\lambda + m'\mu + m'' &= 0, \\ n\lambda + n'\mu + n'' &= 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

a podmínku soudobné platnosti rovnic těchto najdeme, vyloučíme-li z nich veličiny λ, μ.

Obdržíme tím opět rovnici (2). Platí-li tudíž podmínečná rovnice (2), můžeme z dvou od rovnic (4) zmíněné činitele λ, μ vypočítati.

Rovnice přímky v souřadnicích polarných.

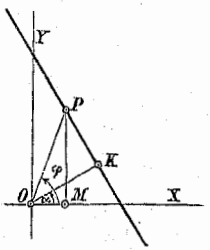
34. Promítneme-li provodič libovolného bodu P přímky na kolmici z počátku p (obr. 27.), obdržíme, značí-li r provodič a φ polarný úhel:

$$r\cos(\varphi - \alpha) = p,$$

z čehož je:

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

rovnice přímky v souřadnicích polarných; p i α jsou veličiny stálé.



Obraz 27.

Vyjdeme-li od obecné rovnice přímky v souřadnicích pravoúhlých, obdržíme, píšíce (čl. 6.): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, rovnici přímky v souřadnicích polarných:

$$r = -\frac{n}{l\cos\varphi + m\sin\varphi},$$

kteroužto rovnici bychom ihned svedli na tvar dřívější stanovivše:

$$l = -\frac{n}{p}\cos\alpha, \quad m = -\frac{n}{p}\sin\alpha.$$

Dodatek ku geometrii přímky.

35. α) Píšeme-li za levou stranu anullované rovnice přímky, tudíž za

$$lx + my + n,$$

zkrátka písmeno jedno, na př. P, jakožto počátečné písmeno slova přímka, je

$$P = 0,$$

rovnice přímky, již opět ve obrazci příhodně písmenem týmž P pojmenovati můžeme. Píšeme-li podobně

$$P' \equiv l x' + m y' + n,$$

a připomeneme-li si, že je

$$\frac{l x' + m y' + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

vzdálenost*) d' bodu (x', y') od přímky $P = 0$, je:

$$l x' + m y' + n = P' = d' \sqrt{l^2 + m^2},$$

což nám praví, že je výsledek substituce souřadnic některého bodu do rovnice dané přímky úměrná veličina se vzdáleností téhož bodu od dané přímky.

β) Máme-li dva body (x', y'), (x'', y''), je

$$\frac{l x' + m y' + n}{l x'' + n y'' + n'} = \frac{P'}{P''} = \frac{d'}{d''}.$$

γ) Jsou-li dány rovnice dvou přímek

$$\begin{aligned} P &= l\ x + m\ y + n = 0, \\ P_1 &= l_1 x + m_1 y + n_1 = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

vyjádřuje

$$P - \lambda P_1 = 0, \qquad (2)$$

rovnici přímky, jdoucí průsekem přímek P i P_1, jelikož souřadnice průseku vyhovující rovnicím $P = 0$ i $P_1 = 0$, vyhovují nezávisle na hodnotě λ i rovnici přímky (2).

Z neurčitostí činitele těžiti můžeme při úlohách, kdež jedna z podmínek, jež přímku určují, je průsek daných dvou přímek.

Na příklad: Jest určiti rovnice přímky, jdoucí průsekem přímek

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5 &= 0, \\ 2x + 7y - 6 &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

i bodem (2, 1).

Řeš: Tvar hledané rovnice je

$$(3x - 2y + 5) - \lambda (2x + 7y - 6) = 0, \qquad (2)$$

a jelikož ta přímka má jíti bodem (2, 1), musí souřadnice tohoto bodu rovnici (2) vyhovovati, čímž obdržíme:

$$9 - \lambda 5 = 0. \qquad (3)$$

Dosadíme-li z rovnice (3) plynoucí hodnotu pro λ do rovnice (2), obdržíme jakožto hledanou rovnici přímky:

$$3x + 73y - 79 = 0.$$

*) Srovnej čl. 30. i čl. 28.

Příklad 2. Má se určiti rovnice přímky jdoucí průsekem přímek

$$\begin{aligned} 2x + y - 3 &= 0, \\ x - 3y + 2 &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

kolmo na přímku:

$$3x + 2y + 2 = 0. \qquad (2)$$

Řeš: Tvar hledané rovnice bude:

$$(2x + y - 3) - \lambda(x - 3y + 2) = 0, \qquad (3)$$

tudíž:

$$(2 - \lambda)x + (1 + 3\lambda)y - (3 + 2\lambda) = 0,$$

a jelikož tato přímka má býti kolmicí na přímku (2), platí (čl. 31., rov. 4.):

$$3(2 - \lambda) + 2(1 + 3\lambda) = 0.$$

Z rovnice této obdržíme hodnotu pro $\lambda = -\frac{5}{7}$.

Hledaná rovnice přímky je tím zcela určena, třeba pouze uvésti hodnotu pro λ do rovnice (3), načež obdržíme:

$$24x - 21y + 7 = 0.$$

δ) Nyní můžeme i poznámku čl. 33. poněkud v krátkosti doplniti. Jsou-li

$$P = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0 \qquad (1)$$

rovnice tří přímek a platí-li identicky

$$\lambda P + \mu P_1 + P_2 \equiv 0, \qquad (2)$$

probíhají ty tři přímky bodem společným.

Můžeme totiž rovnici (2) psáti:

$$\lambda P + \mu P_1 \equiv -P_2, \qquad (3)$$

z čehož shledáváme, že souřadnice průseku přímek P i P_1, vyhovující levé straně rovnice (3), vyhovují tím za příčinou totožnosti i pravé straně t. j. průsek přímek P a P_1 leží na přímce P_2 nebo přímka P_2 jde průsekem přímek P a P_1.

Geometrie kuželoseček.

O kruhu.

36. Kruh je místo všech bodů, jež jsou od daného pevného bodu stejně vzdáleny. Daný pevný bod C (a, b) jmenuje se střed tohoto kruhu a stálá vzdálenosť r bodů kruhových od středu C je poloměr kruhu.

Analyticky vyjádřuje (čl. 7.) tuto karakteristickou vlastnosť kruhu rovnice:

$$\overline{CN}^2 + \overline{NP}^2 = \overline{CP}^2,$$

t. j.
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \qquad (1)$$

kdež jsou x, y souřadnice libovolného bodu P na kruhu (obr. 28.).

Rozvineme-li rovnici (1) obdržíme

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Rovnice kruhu v souřadnicích pravoúhlých je tudíž tvaru:

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0, \qquad (2)$$

a naopak každá rovnice tvaru (2) vyjádřuje analyticky kruh. Můžeme totiž rovnici (2) svésti na tvar (1), čímž obdržíme

$$\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{l^2 + m^2}{4} - n.$$

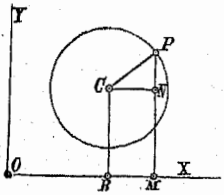
Srovnáme-li tuto rovnici s rovnicí (1), shledáme, že jsou

$$\left(-\frac{l}{2}, \; -\frac{m}{2}\right)$$

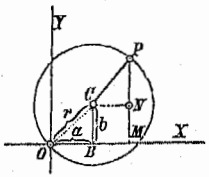
souřadnice středu tohoto kruhu a poloměr jeho že je

$$r = \sqrt{\frac{l^2 + m^2}{4} - n}.$$

Rovnici (1) jmenujeme obecnou rovnicí kruhu.



Obraz 28.



Obraz 29.

Kdyby počátek souřadnic ležel na obvodu kruhu, byl by bodem kruhu, t. j. souřadnice jeho (0, 0) vyhovovaly by rovnici jeho. V případě tomto plyne z rovnice (1)

$$a^2 + b^2 = r^2 \qquad (3)$$

nebo z rovnice (2) $n = 0$, což ostatně i z obrazce 29. plyne, kdež je:

$$\overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{OC}^2.$$

Nevyskytuje-li se tudíž stálý člen n v rovnici kruhu (2), leží počátek souřadnic na kruhu samém.

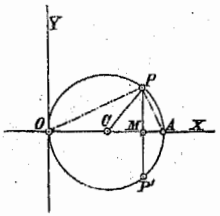
Směr osy X byl v případě tomto libovolný; i vezmeme nyní onu přímku jdoucí bodem O na kruhu, jež probíhá středem kruhu, za osu X. Souřadnice středu C (obr. 30.) v této soustavě souřadnic jsou $a = r$, $b = 0$, a rovnice kruhu zní zde:

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0, \qquad (4)$$

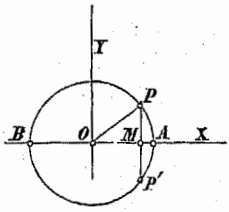
kteryžto tvar jmenujeme vrcholovou rovnicí kruhu.

Osa Y je tu tečnou kruhu, neboť stojí kolmo na průměru kruhu v krajním jeho bodě.

Mysleme si konečně, že vložíme počátek souřadnic do středu kruhu (obr. 31.).



Obraz 30.



Obraz 31.

Souřadnice středu, poněvadž je nyní počátkem souřadnic, jsou $a = 0$, $b = 0$ a rovnice kruhu (1) přejde v případě tomto ve

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad (5)$$

což bezprostředně i z obr. 31. plyne, kdež pro libovolný bod P na kruhu platí: $\overline{OM}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{OP}^2$.

Rovnici (5) jmenujeme středovou rovnicí kruhu.

Dotýká-li se kruh osy X, je $b = \pm r$ dle toho, leží-li kruh nad nebo pod osou X. V případě, že je

$$a = \pm r, \quad b = \pm r,$$

dotýká se kruh obou os souřadnic, a leží v tom kvadrantu, ve kterém se nalezá jeho střed.

37. Ze středové rovnice kruhu plyne řešením dle y:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2},$$

t. j. každé úsečce, na př. $x = OM$, příslušejí dvě pořadny sice stejné co do velikosti, avšak opáčného znaménka, totiž MP, MP', jež jsou dotud realné, dokud je $x \leqq r$. Kdybychom otočili kruh okolo osy X, přejde horní díl APB ve díl spodní $AP'B$, t. j. osa X půlí kruh, jest tím jeho osou souměrnosti.

Řešením rovnice středové dle x obdržíme

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Úsečka x je tudíž reálná za hodnoty y, jež jsou $\leqq r$. Co jsme dříve o ose X uvedli, platí zde i pro osu Y, a jelikož každé dvé kolmých na sobě průměrů za osy souřadnic vziti můžeme, plyne, že každým průměrem se kruh půlí.

Dvěma na sebe kolmými průměry se tudíž kruh čtvrtí. Dále plyne z této úvahy, že sestrojíme-li v průsecích os s kruhem rovnoběžky s osami, obdržíme čtverec, jenž jest kruhu opsaný, z čehož opět dále vychází, že je kruh křivka uzavřená.

38. Vrcholovou rovnici kruhu (4) můžeme psáti:

$$y^2 = 2rx - x^2.$$

Že je osa X osou souměrnosti, vysvítá již tím, že leží střed kruhu na této ose, jakož i z té okolnosti, že ku každému $x = OM$ příslušejí dvě hodnoty y, totiž MP, MP', jež jsouce stejně veliky, pouze znaménkem se liší (obr. 30.).

Rovnici vrcholovou můžeme psáti:

$$y^2 = x(2r - x),$$

aneb

$$x^2 + y^2 = 2r \,.\, x.$$

Jelikož je $y = MP$, $x = OM$, $2r = OA$, vyjádřují uvedené rovnice následující dobře známé vlastnosti kruhu:

$$\overline{MP}^2 = OM \,.\, MA,$$

$$\overline{OP}^2 = OA \,.\, OM.$$

39. Svedeme-li všechny členy obecné rovnice kruhu na levou stranu, obdržíme tak zvanou anullovanou rovnici, totiž:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Stanovíme-li zkrátka:

$$K \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2,$$

a označíme-li týmž písmenem i kruh v obrazci 32., můžeme se ptáti, co obdržíme, píšeme-li místo souřadnic bodu $P\ (x, y)$ na kruhu souřadnice kteréhokoli bodu $A\ (x', y')$ v rovině kruhu?

Značí-li T bod styku tečny vedené z bodu A na kruh K, jehož je střed bod C, máme

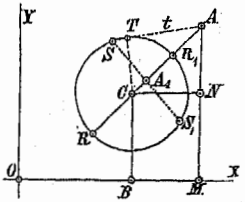
$$\overline{AC}^2 - r^2 = \overline{AC}^2 - \overline{TC}^2 = \overline{AT}^2;$$

dále je:

$$\overline{AC}^2 = (x'-a)^2 + (y'-b)^2,$$

tudíž:

$$(x'-a)^2 + (y'-b)^2 - r^2 = \overline{AT}^2.$$



Obraz 32.

Levá strana této rovnice je výsledek substituce souřadnic bodu (x', y') místo souřadnic bodu (x, y) do výrazu K; což krátce K' vyjádříme, a stanovíme-li dále za délku tečny $AT = t$, můžeme poslední rovnici psáti následovně

$$K' = t^2.$$

Zde jsme předpokládali, že leží bod A mimo kruh K, leží-li uvnitř kruhu, na př. A_1 v obrazci, platí i zde

$$\overline{A_1C}^2 = (x'-a)^2 + (y'-b)^2.$$

Vedeme-li bodem A_1 tětivu kolmou*) na průměr A_1C, a stanovíme-li opět půl této tetivy, t. j.:

$$\overline{SA_1} = t,$$

je

$$\overline{SA_1}^2 = t^2 = \overline{SC}^2 - \overline{CA_1}^2,$$

tudíž je: $K' = (x'-a)^2 + (y'-b)^2 - r^2 = -t^2$.

Dle toho, leží-li bod A mimo kruh nebo uvnitř kruhu K, je $K' \gtrless 0$; je-li však $K' = 0$, leží bod A na kruhu samém. Veličinu K' jmenujeme mocnost bodu A vzhledem kruhu K.

---

*) Z planimetrie je známo, že

$$\overline{CA_1}^2 = r^2 = (CA_1 + r)(CA_1 - r) = RA_1 \,.\, R'A_1 = SA_1 \,.\, S'A_1 = -\overline{S'A_1}^2$$

jelikož je: $\overline{SA_1} = -\overline{S'A_1}$.

40. Kruh, daný třemi body. Obecná rovnice kruhu obsahuje tři stálé veličiny, kteréž jak jsme viděli, určují i polohu i velikosť kruhu. Veličiny tyto nemusí býti bezprostředně dány, dostačí, známe-li tři podmínečné rovnice, z nichž bychom je mohli určiti. Na příklad můžeme určiti rovnici kruhu z podmínky, by probíhal třemi danými body

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3).$$

Vezmeme obecnou rovnici kruhu ve tvaru (2) totiž:

$$x^2 + y^2 + l\,x + m\,y + n = 0.$$

Souřadnice bodů, jimiž kruh probíhati má, musí rovnici kruhu vyhověti. Obdržíme tím tři podmínečné rovnice:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + l\,x_1 + m\,y_1 + n &= 0, \\ x_2^2 + y_2^2 + l\,x_2 + m\,y_2 + n &= 0, \qquad (6) \\ x_3^3 + y_3^2 + l\,x_3 + m\,y_3 + n &= 0, \end{aligned}$$

z nichž můžeme neznámé veličiny l, m, n vypočísti, čímž je i rovnice kruhu (2) určena.

Společný jmenovatel:

$$\triangle = (x_1\,y_2 - x_2\,y_1) + (x_2\,y_3 - x_3\,y_2) + (x_3\,y_1 - x_1\,y_3),$$

neznámých l, m, n musí se lišiti od nully, jelikož by v případě $\triangle = 0$ dané tři body leželi na přímce (čl. 27.). Jedná-li se o střed tohoto kruhu, třeba, bychom našli l a m. Odečteme-li druhou z rovnic (6) od prvé, obdržíme

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + l\,(x_1 - x_2) + m\,(y_1 - y_2) = 0,$$

aneb:

$$(y_1 - y_2)\,(m + y_1 + y_2) + (x_1 - x_2)\,(l + x_1 + x_2) = 0.$$

Dělíme-li rovnici tuto činitelem -2, a píšeme-li

$$\xi_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \eta_3 = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

jakožto souřadnice středu spojnice bodů (x_1, y_1), (x_2, y_2), obdržíme, vzhledem k tomu, že je (čl. 36.)

$$a = -\frac{l}{2}, \quad b = -\frac{m}{2},$$

$$(y_1 - y_2)\,(b - \eta_3) + (x_1 - x_2)\,(a - \xi_3) = 0.$$

Z rovnice této seznáváme, že střed kruhu (a, b) leží na přímce

$$y - \eta_3 = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}(x - \xi_3),$$

kteráž jde středem spojnice bodů (x_1, y_1), (x_2, y_2), kolmo na tuto spojnici. Podobně bychom mohli vyjíti od druhých dvou rovnic (6), čímž přijdeme opět na známou větu z planimetrie, že „střed kruhu, který jde třemi body, leží na kolmicích vztýčených ve středech spojnic těchto bodů."

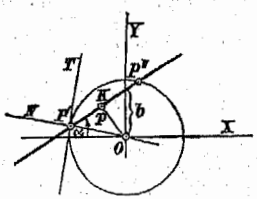
Přímka a kruh.

41. Vzájemnou polohu přímky a kruhu v rovině jednoduše vyšetříme, stanovíme-li střed kruhu za počátek souřadnic (obr. 33.). Jsou-li totiž:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2, \\ y &= Ax + b, \end{aligned} \qquad (1)$$

rovnice daného kruhu a přímky, pak je vzdálenosť p středu $(0, 0)$ tohoto kruhu od dané přímky:

$$p = \frac{b}{\sqrt{1 + A^2}}.$$



Obraz 33.

Přímka protíná daný kruh ve dvou bodech realných, je-li

$$r > p \quad \text{t. j.} \quad r > \frac{b}{\sqrt{1 + A^2}},$$

v bodech pomyslných, je-li

$$r < p \quad \text{t. j.} \quad r < \frac{b}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

V případě, že je

$$r = p = \frac{b}{\sqrt{1 + A^2}},$$

splývají oba průseky v bodě jediném, t. j. přímka se dotýká daného kruhu. Vysvítá to i z obrazce, jelikož je

$$\sqrt{1 + A^2} = \sec \alpha.$$

Souřadnice průseků přímky s kruhem vyhovují i rovnici přímky i rovnici kruhu. Berouce tudíž x, y v rovnicích (1) za souřadnice téhož bodu, obdržíme řešením rovnic (1) dle x a y hodnoty těchto souřadnic. Vyloučíme-li z těch rovnic nejdříve pořadnu y, obdržíme

$$x^2 + (A\,x + b)^2 = r^2,$$

nebo spořádáme-li ji dle mocnin úsečky x:

$$(1 + A^2)\,x^2 + 2\,b\,A\,x + (b^2 - r^2) = 0. \qquad (2)$$

Z rovnice této, kteráž je kvadratická, obdržíme řešením pro x dvě hodnoty x' a x'' jakožto úsečky průseků, z čehož patrno, že přímka protíná kruh ve dvou bodech. Úsečkám průseků příslušné pořadny plynou z rovnice přímky, jsouť:

$$y' = A\,x' + b, \quad y'' = A\,x'' + b.$$

Z rovnice (2) mohli bychom opět vyvinouti uvedená již kriteria o průsecích přímky s kruhem, nač budiž zde poukázáno.

Pro vzdálenosť obou průseků obdržíme:

$$P'\,P'' = 2\,P'\,K = 2\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{1 + A^2}}, \qquad (3)$$

kteryžto výraz je arci potud realný, dokud jsou průseky realné, což opět nás na uvedená kriteria vede.

42. Oproti předcházející úloze hledejme nyní přímku jdoucí dvěma danými body $P'\,(x', y')$, $P''\,(x'', y'')$ na kruhu. Rovnice spojnice těchto dvou bodů jest:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}\,(x - x'). \qquad (4)$$

Do této rovnice třeba nyní uvésti podmínku, že dané body P', P'' leží na kruhu daném rovnicí

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (5)$$

Jest tudíž

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= r^2, \\ x''^2 + y''^2 &= r^2; \end{aligned} \qquad (6)$$

odečteme-li obě rovnice, obdržíme:

$$x'^2 - x''^2 + y'^2 - y''^2 = 0,$$

aneb

$$(x' + x'')\,(x' - x'') + (y' + y'')\,(y' - y'') = 0,$$

z čehož plyne: $$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{x' + x''}{y' + y''}. \qquad (7)$$

Uvedeme-li nyní hodnotu tuto pro směrnici do rovnice (4), obdržíme

$$y - y' = -\frac{x' + x''}{y' + y''}(x - x'), \qquad (8)$$

jakožto rovnici spojnice dvou bodů ležících na kruhu, t. j. rovnici s e č n y kruhu.

Blíží-li se nyní bod P'' ku bodu P', otáčí se sečna okolo bodu P', a blíží se k určité poloze, ku které dospěje, splyne-li bod P'' s bodem P'. V této poloze jmenujeme sečnu, jejížto oba průsečíky splynuly v bod jediný, t e č n u kruhu.

Píšeme-li v rovnici sečny

$$y'' = y', \quad x'' = x',$$

čímž vyjádříme, že bod P'' splyne s bodem P', obdržíme rovnici tečny v bodě P' na kruhu, totiž

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'),$$

kterážto rovnice nabude jednoduššího tvaru

$$x x' + y y' = r^2,$$

znásobíme-li ji jmenovatelem y' a přihlížíme-li k tomu, že bod P', jejž b o d e m d o t y k u jmenujeme, leží na kruhu.

P o z n á m k a. Kdyby byl dán kruh rovnicí obecnou

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

mohli bychom nejdříve rovnoběžně pošinouti osy souřadnic do středu kruhu jakožto nového počátku. Toto provedeme substitucí (čl. 13.)

$$x - a = \xi, \quad y - b = \eta,$$

načež je rovnice kruhu v této nové soustavě souřadnic

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

Rovnice tečny bodu $\xi' = x' - a$, $\eta' = y' - b$ je

$$\xi' \xi + \eta' \eta = r^2,$$

nebo vrátíme-li se na prvotnou soustavu souřadnic:

$$(x' - a)(x - a) + (y' - b)(y - b) = r^2.$$

43. M á s e u r č i t i r o v n i c e t e č n y k r u h u v e d e n é z d a n é h o b o d u P (x_1, y_1), l e ž í c í h o m i m o k r u h.

Souřadnice bodu dotyku A (ξ, η) hledané tečny vyhovují rovnici kruhu, máme tudíž:

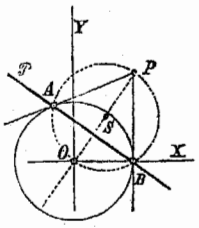
$$\xi^2 + \eta^2 = r^2, \qquad (1)$$

kdež jest střed kruhu počátkem souřadnic (obr. 34.). Rovnice tečny kruhu v bodě jeho (ξ, η) jest:

$$\xi x + \eta y = r^2,$$

a jelikož ta tečna i bodem P (x_1, y_1) probíhati má, je:

$$\xi x_1 + \eta y_1 = r^2. \qquad (2)$$



Obraz 34.

Obdrželi jsme takto dvě rovnice, jimž souřadnice neznámého bodu dotyku vyhovovati musí. Prvá rovnice vyjádřuje kruh, druhá přímku a společné jejich body jsou tudíž hledané body dotyku. Jelikož však přímka (2) protíná kruh (1) ve dvou bodech, vysvítá, že z bodu P na kruh dvě tečny $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ sestrojiti můžeme, a rovnice jejich obdržíme jako rovnice spojnic bodu P s body dotyku. Přímku (2), na níž leží body dotyku tečen bodu P, jmenujeme polara*) bodu P. Rovnice její zcela se shoduje s rovnicí tečny. Blíží-li se bod P ku kruhu, přibližují se i body dotyku tečen z tohoto bodu na kruh vedených. Leží-li nyní bod P na kruhu, sjednotí se polara bodu P s tečnou bodu P. Rovnice (2) vyjádřuje tudíž buď tečnu bodu P, anebo polaru bodu P dle toho, leží-li nebo neleží-li bod P na kruhu.

Z tohoto společného tvaru plyne i společná vlastnosť tečny bodu P potažmo polary bodu P, že stojí kolmo na spojnici bodu P se středem kruhu. Jest totiž směrnice od spojnice $\overline{OP}$ negativně reciproká směrnice tangenty potažno polary bodu P. Tím dokázána je známá vlastnosť kruhu, že „tangenta bodu P stojí kolmo na poloměru téhož bodu.“

Kterak jsou tečny z bodu P sestrojiti, je z planimetrie známo. Kruh nad $\overline{OP}$ průměrem seče daný kruh v bodech

*) Jmenuje se též tětivou dotyku tečen bodu P.

dotyku A, B tečen vedených z bodu P. Uvidíme později, že tato konstrukce plyne přímo z rovnic (1) a (2).

Pro tečny rovnoběžné s danou přímkou

$$y = Ax + b,$$

je tětiva dotyku kolma na tuto přímku a probíhá středem daného kruhu. Rovnice (2) je v tomto případě

$$\xi + A\eta = 0. \qquad (2^1)$$

Poznámka. Mohli jsme i jinou cestou jíti. Rovnice přímky jdoucí bodem $P(x_1\ y_1)$ je:

$$y - y_1 = A(x - x_1),$$

a má-li býti tečnou daného kruhu, musí se rovnati její vzdálenosť od středu kruhu poloměru kruhu. Je-li tudíž jako dříve počátek souřadnic středu kruhu, je

$$r = \frac{y_1 - Ax_1}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Z této podmínečné rovnice obdržíme dvě hodnoty pro směrnici A, kteréž dosazeny byvše do rovnice hořejší, určují rovnice obou tečen vedených z bodu P na daný kruh.

Normala bodu na kruhu.

44. Normala bodu (x', y') na kruhu je přímka vedená tímto bodem kolmo na tečnu téhož bodu (obr. 33.). Směrnice tečny bodu (x', y') na kruhu, jehož je rovnice

$$x^2 + y^2 = r,$$

je $-\frac{x'}{y'}$, tudíž je rovnice normaly téhož bodu

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x'),$$

aneb

$$y = \frac{y'}{x'}x,$$

t. j. normala N každého bodu kruhu probíhá středem tohoto kruhu.

Dva kruhy.

45. Středy daných kruhů K, K_1 označíme písmeny O a C a poloměry jejich r, potažmo r_1. Stanovíme-li obojstřednu $\overline{OC}$ za osu X a střed O kruhu K za počátek souřadnic, jsou rovnice těch kruhů (obr. 35.):

$$\begin{aligned} K &\equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0, \\ K_1 &\equiv (x - c^2) + y^2 - r_1{}^2 = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

kdež je $c = \overline{OC}$. Průseky těch kruhů jsou jejich společné body, t. j. souřadnice jejich vyhovují současně rovnicím obou kruhů. Určíme tudíž souřadnice těch průseků řešením obou rovnic dle x a y. Můžeme však při vypočítávání průseků jednu z rovnic (1) nahraditi některou rovnicí z nich odvozenou, t. j. rovnicí (čl. 16.):

$$K - \lambda K_1 = 0, \qquad (2)$$

kdež značí λ určitý číselný činitel, jelikož souřadnice průseku vyhovující každé z rovnic (1) zvlášť, vyhovují i rovnici (2).

Geometricky lze tuto rovnici snadně vyložiti, neboť píšeme-li místo K a K_1 příslušné výrazy z (1), obdržíme jakožto rovnici (2) ve tvaru rozvinutém:

$$(1 - \lambda)(x^2 + y^2) + 2c\lambda x - [r^2 - \lambda(r_1{}^2 - c^2)] = 0, \qquad (3)$$

tudíž opět rovnici kruhu, jenž dle toho, co jsme právě uvedli, probíhá průseky kruhů K a K_1, a jehož střed leží na obojstředně daných kruhů, již jsme učinili osou X, ve vzdálenosti

$$-\frac{c\lambda}{1 - \lambda}$$

od počátku souřadnic. Ze všech těch kruhů, majících společné průseky s K a K_1 nejpříhodněji upotřebiti můžeme onen, jenž odpovídá hodnotě $\lambda = 1$.

V případě tomto je:

$$K - K_1 \equiv 2cx - (r^2 - r_1{}^2 + c^2) = 0, \qquad (4)$$

t. j. obdržíme přímku jdoucí průseky kruhů K i K_1 v konečnu. Přímku tuto jmenujeme chordalu kruhů K i K_1 aneb

i přímku rovných mocností těchto kruhů, kterážto vlastnosť plyne z článku 39. Píšeme-li totiž:

$$K = K_1$$

rovnici (4), obdržíme za kterýkoli bod P této přímky (obr. 35.)

$$\overline{PT}^2 = \overline{PT}_1^2,$$

t. j. mocnosti bodu P vzhledem na oba kruhy se rovnají. Poslední rovnici můžeme též psáti:

$$\overline{PT} = \overline{PT}_1,$$

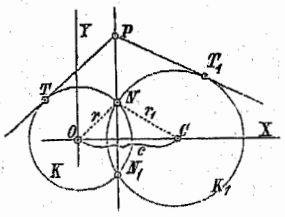
t. j. tečny vedené z kteréhokoli bodu chordaly dvou kruhů na tyto kruhy mají tuž délku. Z rovnice (4), kterou můžeme i psáti:

$$x = \frac{r^2 + c^2 - r^2}{2c}, \qquad (5)$$

plyne, že stojí chordala kolmo na obojstředně obou kruhů a že je vždy realná, ať se již oba kruhy sekou čili nic. Rovnice (5) podává současně i úsečku průseků, a příslušné pořadny určíme, uvedeme-li hodnotu tuto do jedné z rovnic (1) na př. do prvé. Obdržíme takto:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} = \pm\frac{1}{2c}\sqrt{4c^2r^2 - (c^2 + r^2 - r'^2)^2}. \qquad (6)$$

Oba průseky N, N_1 leží tudíž souměrně vzhledem k obojstředně, již jsme učinili osou X. Je-li výraz pod odmocnítkem kladný, jsou dvě realné hodnoty pro y, t. j. průseky daných dvou kruhů jsou realné. Tyto dva průseky splývají v bod jediný, t. j. dané dva kruhy se dotýkají, rovná-li se výraz pod odmocnítkem nulle; oba průseky jsou imaginarné, je-li výraz pod odmocnítkem záporný. Výraz pod odmocnítkem vyjádřuje šestnáctinásobný čtverec plochy trojúhelníku $C\,C'\,N$, jehož strany jsou c, r, r' (obr. 35.), nebo rovná se $4c^2y^2$, kdež c je základna a y výška tohoto trojúhelníku. Ostatně plyne toto i rozkladem výrazu pod odmocnítkem ve činitele, čímž obdržíme:



Obraz 35.

$$2cy = \pm\sqrt{(c + r + r_1)\,(c + r - r_1)\,(c - r + r')\,(-c + r + r_1)}.$$

Dokud je tudíž trojúhelník $C C' N$ realný, jsou i průseky realny. Vrcholy tohoto trojúhelníku leží na přímce, t. j. plocha trojúhelníku rovná se nulle, je-li součet dvou stran roven straně třetí. V případě tomto musí býti buď:

$$c = r + r_1,$$

nebo:

$$c = \pm (r - r_1).$$

V případě prvém dotýkají se kruhy zevnitř, v případě druhém uvnitř, což je z planimetrie známo.

46. Nyní můžeme se navrátiti k důkazu konstrukce uvedené ve čl. 43. Rovnice polary bodu P byla:

$$P \equiv \xi x_1 + \eta y_1 - r^2 = 0,$$

a rovnice kruhu $K \equiv \xi^2 + \eta^2 - r^2 = 0.$

Rovnice

$$K - P \equiv \xi^2 + \eta^2 - x_1 \xi - y_1 \eta = 0,$$

vyjádřuje kruh (obr. 34.) jdoucí průseky A, B kruhu K s přímkou P. Avšak rovnici tohoto kruhu můžeme psáti

$$\left(\xi - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{y_1}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{4},$$

z čehož jest patrna rovnice kruhu, jehož střed je

$$S\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$$

a poloměr $O S = \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$;

t. j. kruh tento je opsán nad průměrem $\overline{O P}$.

47. Dány-li jsou tři kruhy rovnicemi:

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0,$$

a označíme-li chordalu kruhů K_h a K_k písmenem P_{hk}, máme:

$$P_{12} = K_1 - K_2 = 0,$$
$$P_{23} = K_2 - K_3 = 0,$$
$$P_{31} = K_3 - K_1 = 0.$$

Jelikož se rovná součet rovnic těchto tří přímek identicky nulle, je totiž

$$P_{12} + P_{23} + P_{31} \equiv 0,$$

plyne (čl. 33. pozn.), že se chordaly tří kruhů protínají v jednom bodě, jejž jmenujeme bod rovných mocností vzhledem ku daným třem kruhům.

Rovnice kruhu v souřadnicích polarných.

48. Bod O v rovině daného kruhu učiňme polem a přímku OX polarnou osou soustavy polarné. Buďtež dále ϱ, α souřadnice středu kruhu C (obr. 36.), jehož poloměr písmenem a označíme.

Budiž P libovolný bod na obvodě kruhu, a souřadnice jeho r, φ.

Z trojúhelníku OCP plyne:

$$\overline{CP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OC} \cos (COP)$$

t. j. $$a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2 r \varrho \cos (\alpha - \varphi).$$

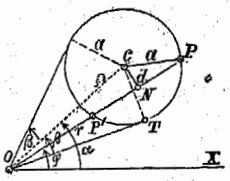
Spořádáme-li rovnici tuto dle mocností veličiny r, je:

$$r^2 - 2 \varrho r \cos (\alpha - \varphi) + (\varrho^2 - a^2) = 0, \qquad (1)$$

hledaná rovnice kruhu v souřadnicích polarných.

Rovnice ta jest vzhledem k r stupně druhého, t. j. každá přímka jdoucí polem O protíná kruh ve dvou bodech P, P'. Hodnoty provodičů r_1, r_2 těchto bodů obdržíme jako kořeny rovnice (1). Součin provodičů průseků je:

$$r_1 r_2 = OP \cdot OP' = \varrho^2 - a^2,$$



Obraz 36.

tudíž veličina stálá, nezávislá na směru φ, jímž jsme přímku sestrojili, a je vždy realná. Tento stálý součin je mocnosť polu O vzhledem k danému kruhu (čl. 39.), a je kladný pro $\varrho > a$, záporný pro $\varrho < a$. Mocnosť ta rovná se nulle pro $\varrho = a$, v kterémžto případě rovná se jeden provodič jednoho průseku buď r_1 buď r_2 nulle. Pro tuto polohu polu zní rovnice kruhu,

$$r = 2 \varrho \cos (\alpha - \varphi). \qquad (2)$$

Leží-li pol souřadnic ve středu kruhu, je $\varrho = 0$, a rovnice kruhu (1) je v tomto případě:

$$r = a,$$

jejíž geometrický výklad se shoduje s výměrem kruhu daným ve čl. 36.

Vraťme se opět ku rovnici (1) i vyšetřme, kdy jsou průseky P, P' přímky OP s kruhem realné. Řešíme-li rovnici (1) dle r, obdržíme:

$$r = \varrho \cos(\alpha - \varphi) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2 \sin^2(\alpha - \varphi)}.$$

Provodiči r_1, r_2 jsou potud realny, dokud je

$$a > \varrho \sin(\alpha - \varphi),$$

a jelikož je vzdálenosť středu od přímky OP rovna:

$$CN = d = \varrho \sin(\alpha - \varphi),$$

praví nám podmínka realnosti $a > d$, že přímka OP tenkráte kruh ve dvou realných bodech seče, je-li její vzdálenosť od středu kruhu menší, než je poloměr toho kruhu (čl. 41.).

Je-li $r_1 = r_2$,

t. j. $a = d = \varrho \sin(\alpha - \varphi)$,

je: $\varrho \cos(\alpha - \varphi) = OT = \sqrt{\varrho^2 - a^2}$.

Přímka OP je v případě tomto tečna. Polarné úhly bodů dotyku plynou z rovnice:

$$a^2 - \varrho^2 \sin^2(\alpha - \varphi) = 0,$$

kterou můžeme i psáti:

$$[a + \varrho \sin(\alpha - \varphi)]\,[a - \varrho \sin(\alpha - \varphi)] = 0.$$

Může býti buď:

$$\sin(\varphi - \alpha) = \frac{a}{\varrho} \quad \text{nebo} \quad \sin(\alpha - \varphi) = \frac{a}{\varrho}.$$

Je-li β úhel, jehož sinus je $\frac{a}{\varrho}$, obdržíme z prvé rovnice

$$\varphi = \alpha + \beta,$$

a z rovnice druhé plyne $\varphi = \alpha - \beta$,

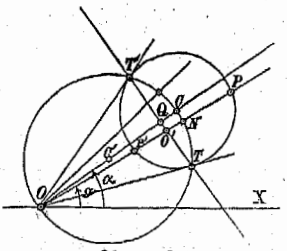
výsledek to dobře známý z planimetrie, pravíť nám, že „střed kruhu leží na přímce, která půlí úhel tečen O.“ Úhel obou tečen rovná se 2β.

49. Uvedeme dvě úlohy, které ještě více objasní upotřebení souřadnic polarných.

I. Středy tětiv kruhu vedených z některého bodu O leží na kruhu, který probíhá tímto bodem O, středem C daného kruhu, jakož i body dotyku T, T' tečen, vedených z bodu O na daný kruh.

Zvolme daný bod za pol souřadnic polarných. Je-li N střed tětivy PP' (obr. 37.), je:

$$ON = \frac{OP + OP'}{2}.$$



Obraz 37.

Z rovnice kruhu (1) plyne

$$\frac{OP + OP'}{2} = \varrho \cos(\alpha - \varphi),$$

tudíž je

$$ON = r = \varrho \cos(\alpha - \varphi),$$

t. j. místo bodu N je kruh, jenž jde polem souřadnic a jehož střed C' je od polu vzdálen o délku $\frac{\varrho}{2}$. Že tento kruh probíhá body dotyku tečen z polu na kruh vedených, vysvítá již tím, že se v bodu dotyku T splývají oba průseky P a P' s bodem N.

II. Narýsujme na přímkách jdoucích polem body O', by bylo *)

$$\frac{1}{OO'} = \frac{\frac{1}{OP} + \frac{1}{OP'}}{2}, \qquad (1)$$

a hledejme místo těch bodů. Z rovnice kruhu (1) plyne:

$$\frac{1}{OP} + \frac{1}{OP'} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = \frac{2\varrho \cos(\alpha - \varphi)}{\varrho^2 - a^2};$$

*) O takovém bodě O' pravíme, že je harmonicky sdružen s bodem O vzhledem ku bodům P, P'. Staří Řekové jmenovali totiž veličinu $OP + OP' : 2\,OP.\,OP'$ harmonickým průměrem veličin OP a OP'. Srovn. čl. 7. II. Rovnice (1) plyne z podmínky

$$PO : P'O = -PO' : P'O'_2$$

tím se poměry bodů O a O' liší pouze znaménkem.

tudíž je: $$\frac{1}{O\,O'} = \frac{\varrho\,cos\,(\alpha - \varphi)}{\varrho^2 - a^2},$$

aneb: $$O\,O'\,cos\,(\alpha - \varphi) = \frac{\varrho^2 - a^2}{\varrho}.$$

Stanovíme-li nyní:

$$\frac{\varrho^2 - a^2}{\varrho} = \frac{\overline{O\,T}^2}{O\,C} = O\,Q = b,$$

můžeme veličinu b snadno narýsovati.

Je-li O mimo kruh, je b průmět $O\,Q$ tečny $O\,T$ na provodič středu kruhu. Píšeme-li konečně za provodič $O\,O' = r$, je

$$r\,cos\,(\alpha - \varphi) = b,$$

což značí přímku kolmou na spojnici $O\,C$, jejíž vzdálenosť od polu O rovná se b. Že je ta přímka polarou polu vzhledem ku kruhu (čl. 43.), vysvítá z toho, že je $O\,O' = O\,T$, splynou-li průseky P, P' přímky $O\,O'$ s kruhem v bod jediný T. Z toho plyne, že je polara bodu O místo harmonicky sdružených bodů O' s bodem O vzhledem ku průsekům jejich spojnic $\overline{O\,O'}$ s daným kruhem.

O ellipse.

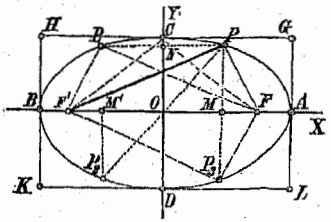
50. Geometrické místo všech bodů, jejichž součet vzdáleností od dvou pevných bodů měří stálou délku $2a$, jmenuje se **ellipsa.**

Jsou-li F a F' zmíněné pevné body, tu platí pro každý bod P ellipsy rovnice

$$F\,P + F'\,P = 2\,a. \qquad (1)$$

Pevné body F, F' jmenujeme ohniska ellipsy a vzdálenosti bodu P ellipsy od ohnisek slovou jeho provodiče (radii vectores). Vzdálenosť obou ohnisek budiž $2\,e$ a za příčinou $F\,P + F'\,P > F\,F'$ je $a > e$. Délku e, t. j. vzdálenosť ohniska od středu ellipsy jmenujeme její délkovou výstřednosť.

Z výměru ellipsy plyne, že sestrojíme-li z ohnisek dva kruhy, jejichž součet poloměrů rovná se stálé délce $2a$, jsou průseky těchto kruhů body ellipsy. Hledejme nyní body ellipsy, jež leží na spojnici ohnisek. Ze souměrnosti konstrukce vzhledem k bodům F a F' je takových bodů dvě, totiž A, B, pro které platí $F'A = FB$ a $F'A = FB$. Vzdálenost těchto bodů rovná se součtu jejich vzdáleností od jednoho ohniska, tedy $2a$, neboť je:



Obraz 38.

$$F'A + FB = FA + F'A = 2a.$$

Označíme-li střed délky BA písmenem O, je

$$BO = OA = a.$$

Že je bod O středem vzdáleností ohnisek, vyplývá již z konstrukce samé.*)

Další význačné body ellipsy jsou body C, D, které leží na kolmici vztýčené v bodě O na spojnici $F'F$; mají od ohnisek rovnou vzdálenost, totiž a. Body A, B, C, D jsou vrcholy ellipsy, spojnice vrcholů A, B, na níž leží ohniska, jmenujeme hlavní či velká osa a spojnice obou ostatních vrcholů C, D slove vedlejší či malá osa ellipsy. Průsek jejich O je střed ellipsy.

Rovnice ellipsy.

51. Hleďme nyní onu vlastnost, jíž jsme ellipsu vyměřili, analyticky vyjádřiti rovnicí. Za osy souřadnic s prospěchem zvoliti můžeme osy ellipsy a její střed za počátek souřadnic.

Budiž P libovolný bod ellipsy, a souřadnice jeho

$$x = OM, \quad y = MP.$$

*) Též odečtením stejných délek $F'A - 2e = FB - 2e$ od stejných délek $BO = OA$.

Provodiče toho bodu snadno vyjádříme pomocí jeho souřadnic (obr. 38.); jest

$$\overline{FP}^2 = (OF - OM)^2 + \overline{MP}^2 = (e - x)^2 + y^2,$$
$$\overline{F'P}^2 = (F'O + OM)^2 + \overline{MP}^2 = (e + x)^2 + y^2. \qquad (2)$$

Dosadíme-li nyní hodnoty pro FP a $F'P$ do rovnice (1), čímž vyjádříme, že bod P leží na ellipse, obdržíme

$$\sqrt{(e - x)^2 + y^2} + \sqrt{(e + x)^2 + y^2} = 2a, \qquad (3)$$

aneb učinivše tuto rovnici racionalnou, máme:

$$(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - e^2).$$

Jest však $a > e$, tedy je $a^2 - e^2$ veličina kladná. Význam geometrický plyne ihned z pravoúhelného trojúhelníku OCF. Značí-li b délku vedlejší poloosy OC ellipsy, je

$$b^2 = a^2 - e^2.$$

Uvedeme-li nyní tuto hodnotu do hořejší rovnice, obdržíme

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2, \qquad (4)$$

kteroužto rovnici též můžeme psáti

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \qquad (4')$$

Rovnici tuto jmenujeme osovou rovnicí ellipsy.

Úlohy. 1. Osy ellipsy $x^2 + 4y^2 = 4$ jsou $a = 2$, $b = 1$ a výstřednost $e = \sqrt{3}$.

2. Dána-li ellipsa rovnicí $2x^2 + 3y^2 = 12$, dělme tuto dříve 12, načež obdržíme dle rovnice (4') $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $e = \sqrt{2}$. Ostatně jsme mohli rovnici ellipsy znásobiti činitelem 2, čímž bychom ji ihned svedli na tvar (4).

Poznámka. Takový společný činitel, jímž rovnice ellipsy byla zkrácena, můžeme opět snadně určiti. Budiž λ zmíněný činitel, jenž svede rovnici ellipsy $mx^2 + ny^2 = p$, kdež m, n a p jsou čísla positivná, na tvar (3), najdeme z podmínky

$$\lambda m \,.\, \lambda n = \lambda p,$$

z čehož ihned plyne

$$\lambda = \frac{p}{mn}.$$

Rozbor rovnice ellipsy.

52. Řešíme-li rovnici ellipsy dle y, obdržíme

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad (5)$$

z čehož plyne, že pro všechny hodnoty x, ležící mezi $-a$ i $+a$, obdrží y dvě realné hodnoty lišící se pouze znaménkem, t. j. ellipsa rozprostírá se souměrně po obou stranách osy X. Podobně obdržíme řešením rovnice (4) dle x pro všechny hodnoty y ležící mezi $-b$ a $+b$ dvě realné hodnoty pro x, jež se liší pouze znaménkem, t. j. ellipsa*) je souměrna vzhledem k ose Y.

Osy ellipsy, jež jsme zvolili za osy souřadnic, čtvrtí ellipsu (obr. 38.).

Body A, B, v nichž osa úseček ellipsu protíná, mají největší možnou úsečku, podobně mají průseky ellipsy s osou pořaden C, D největší možnou pořadnu. Ellipsa leží proto cele uvnitř rovnoběžníku $GHKL$, jehož strany probíhají body A, B, C, D a jsou rovnoběžny s osami souřadnic.

53. Osová rovnice ellipsy obsahuje pouze čtverce souřadnic x, y, z čehož plyne, že jsou-li x, y souřadnice libovolného bodu P na ellipse, vyhovují i souřadnice $-x$, $-y$ rovnici ellipsy, je tedy na ellipse bod P_2, jehož souřadnice jsou sice tak veliky, jako jsou souřadnice bodu P, avšak jsou opáčného znaménka. Ze shodnosti (obr. 38.) pravoúhlých trojúhelníků OMP, $OM'P_2$ plyne, že $P_2O = OP = \frac{1}{2}P_2P$, t. j. každá tětiva jdoucí počátkem souřadnic půlí se tímto bodem, jenž je proto středem ellipsy, jak jsme již dříve (čl. 51.) byli vytkli.**)

*) Ze výměnlivosti provodičů v konstrukci plyne již souměrnosť vzhledem k ose Y a jelikož provésti lze konstrukci po obou stranách spojnice ohnisek, patrna je souměrnosť i vzhledem k ose X. Viz obraz 38.

**) Výsledky článku 52., 53. plynou bezprostředně z rovnice (3), z níž je patrno, že je $\frac{x^2}{a^2}$ i $\frac{y^2}{b^2}$ menší a nejvýše rovno jednotce. Obdrží-li

Vzdálenosť bodu ellipsy od počátku souřadnic je

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2},$$

nebo dosadivše hodnotu za y^2 z rovnice ellipsy, obdržíme:

$$OP = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2}.$$

Z výrazu tohoto plyne, že je vzdálenosť tato tím větší, čím větší je úsečka bodu P. Body A, B mající největší úsečku

$$x = \pm a,$$

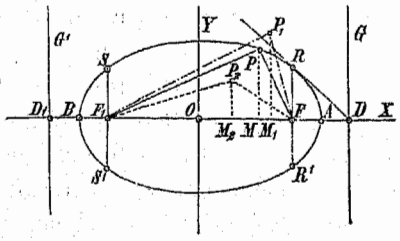
jsou nejvíce od středu vzdáleny, totiž o délku a; vzdálenosť bodů C, D od středu je nejmenší, totiž b, nebo jim přísluší nejmenší úsečka $x = 0$. Z toho plyne dále, že je velká osa $\overline{AB}$ největší a malá osa $\overline{CD}$ nejmenší tětiva ellipsy jdoucí jejím středem.

Poloha bodu vzhledem k ellipse.

54. Stanovme nyní podmínku, z níž bychom seznali, leží-li bod, daný souřadnicemi svými, na ellipse, uvnitř ellipsy nebo mimo ellipsu, danou rovnicí osovou.

Leží-li bod $P(x, y)$ na ellipse, je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$



Obraz 39.

Mysleme si nyní, že bychom bod P pošinuli mimo ellipsu do polohy P_1 ve směru OP. Souřadnice x_1, y_1 bodu P_1 jsou nyní větší než souřadnice bodu P, tudíž je

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0.$$

---

x největší možnou hodnotu, je $y = 0$ a naopak. Další plyne ze současné platnosti rovnic

$$\left(\frac{\pm x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pm y}{b}\right)^2 = 1, \quad \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}, \quad (-x)^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2.$$

Podobně jsou souřadnice x_2, y_2 bodu P_2 uvnitř ellipsy na spojnici OP menší než souřadnice bodu P, tím platí

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1 < 0.$$

Můžeme tudíž říci, je-li

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \gtreqless 0,$$

leží bod (x, y) mimo ellipsu, na ellipse neb uvnitř ellipsy.

Dána-li jsou ohniska ellipsy a její hlavní osa, plyne již z výměru ellipsy, že bod P leží mimo ellipsu, na ellipse neb uvnitř ellipsy, je-li

$$FP + F'P \gtreqless 2a.$$

Provodiče bodu ellipsy, její řiditelky a parametr.

55. Provodiče bodu ellipsy najdeme, odečteme-li rovnice (2), píšíce k vůli krátkosti $FP = r$, $F'P = r_1$; obdržíme takto

$$r^2 - r_1^2 = -4ex.$$

Dělíme-li rovnici tuto rovnicí (1), obdržíme

$$r - r_1 = -\frac{2ex}{a},$$

z kteréžto rovnice ve spojení s rovnicí (1) plynou, sečtením a odečtením, výrazy pro provodiče*) r, r_1 totiž:

$$\begin{aligned} r &= a - \frac{ex}{a}, \\ r_1 &= a + \frac{ex}{a}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Píšeme-li nyní

$$r = FP = \frac{e}{a}\left(\frac{a^2}{e} - x\right),$$

*) Z rovnic (6) plyne, že ohniska ellipsy mají tu vlastnost, že vzdálenosti jejich od libovolného bodu na ellipse, vyjádřiti můžeme racionalně pomocí úsečky tohoto bodu. Vlastnost tato přísluší jedině ohniskům a sloužiti může tím i za výměr ohnisek.

obdržíme, sestrojivše kolmice DG, $D'G'$ (obr. 39.) na osu X ve vzdálenosti

$$OD = OD' = \frac{a^2}{e}$$

od počátku souřadnic, a spustivše $PN \perp DG$,

$$\frac{a^2}{e} - x = OD - OM = MD = PN,$$

tudíž je

$$\frac{FP}{PN} = \frac{e}{a}. \qquad (7)$$

Podobně bychom z druhé z rovnic (6) určili

$$\frac{F'P}{PN'} = \frac{e}{a}. \qquad (7^1)$$

Přímky DG, $D'G'$ jmenujeme řiditelky (directrices) ellipsy, z nichž každá je přidružena ohnisku bližšímu. Vzdálenosti bodů ellipsy od ohniska a přidružené řiditelky jsou ve stálém poměru menším než 1.

Podíl $\frac{e}{a}$ značíme obyčejně ε a jmenujeme číselná výstřednost ellipsy.

56. Z pořaden bodů ellipsy význačna je pořadna, která má patu v ohnisku. Dosadíme-li tudíž do rovnice (5)

$$x = \pm e = \pm\sqrt{a^2 - b^2},$$

bude

$$y = \pm\frac{b^2}{a},$$

t. j.

$$FR = F'S = +\frac{b^2}{a}, \quad FR' = F'S' = -\frac{b^2}{a}.$$

Tětiva ellipsy jdoucí ohniskem kolmo na hlavní osu jmenuje se parametr ellipsy a délka jeho rovná se dvojnásobné pořadně v ohnisku (obr. 39.), totiž $2\frac{b^2}{a}$ nebo $2p$, kladouce, jak jest obyčejem

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Jest tudíž parametr třetí geometrická úměrna mezi malou a velkou osou ellipsy.

Některá sestrojení ellipsy.

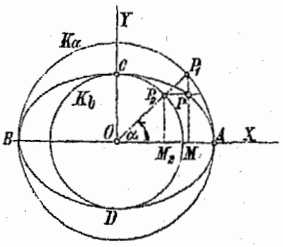
57. Z rovnice ellipsy (3), kterou můžeme psáti

$$\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

obdržíme, položivše $BM = a + x$, $MA = a - x$ (obr. 40.)

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{BM} \,.\, \overline{MA}} = \frac{b^2}{a^2},$$

z čehož vysvítá, že čtverec pořadny je v stálém poměru k součinu úseků, jež tato činí na hlavní ose.



Obraz 40.

Opíšeme-li nyní nad průměrem BA kruh K_a, platí (čl. 38.)

$$\overline{MP_1}^2 = BM \,.\, MA,$$

což vloženo do horní rovnice, dává

$$\frac{MP}{MP_1} = \frac{b}{a}, \qquad (7)$$

t. j.: „Opíšeme-li nad velkou osou ellipsy jakožto průměrem kruh K_a, jsou pořadny ellipsy a pořadny kruhu příslušné k téže úsečce v stálém poměru.“

Z výsledku tohoto plyne, že můžeme z daného kruhu K_a sestrojiti ellipsu, zkrátíme-li jeho pořadny v daném poměru $\frac{b}{a}$. Píšeme-li $\frac{b}{a} = \cos\varphi$, je $\overline{MP} = \overline{MP_1} \,.\, \cos\varphi$, t. j. otočíme-li kruh K_a okolo osy BA o úhel φ, a promítneme-li jej pak kolmo do dřívější roviny, obdržíme průmět: ellipsu. Vlastnosti této, totiž že můžeme považovati ellipsu za průmět kruhu, lze výhodně při odvozování i dokazování mnohých vlastností ellipsy upotřebiti.

Zmíněné zkrácení pořadny v poměru $\frac{b}{a}$ provedeme pomocí druhého soustředného kruhu K_b o poloměru b. Spojnice $\overline{P_1 O}$ seče kruh K_b v bodě P_2. Rovnoběžka $P_2 P$ ku OA seče po-

řadnu bodu P_1 na K_a v příslušném bodě ellipsy P, nebo souřadnice tohoto bodu:

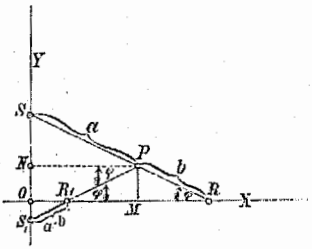
$$x = OM = OP_1 \cos\alpha = a\cos\alpha,$$
$$y = MP = OP_2 \sin\alpha = b\sin\alpha, \qquad (8)$$

vyhovují rovnici ellipsy, jest:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Téhož výsledku bychom ihned nabyli, kdybychom byli psali v rovnici (7) $MP_1 = a\sin\alpha$; další závěrky na konstrukci neliší se od předcházejícího.

II. Smýká-li se přímka stálé délky RS po ramenou pravého úhlu XOY, opisuje libovolný, avšak pevný bod P této přímky při tomto pohybu ellipsu, jejíž osy rovnají se úsekům, ve které pevný bod stálou délku dělí (obr. 41.).



Obraz 41.

Je-li
$RP = b$, $PS = a$, $\sphericalangle SRO = \varphi$,
máme $OM = NP = x = a\cos\varphi$, $MP = y = b\sin\varphi$,
čím i konstrukce dokázána.

Učiníme-li $PS_1 = PS = a$, je trojúhelník PRR_1 rovnoramenný [$\sphericalangle SPN = \sphericalangle PR_1R = \varphi$], tudíž $R_1P = PR = b$, a $S_1R_1 = a - b$, z čehož plyne: Smýká-li se stálá délka R_1S_1, která se rovná rozdílu os ellipsy, po ramenou pravého úhlu, opisuje každý bod P nalezající se na jejím prodloužení ellipsu.

Jak třeba délku PR_1 uvážiti, bychom oba případy na jednou vyjádřiti mohli? Jak souvisí tato sestrojení přímo s kontrukcí prvou? Učiníme-li v obrazcích 40. a 41.

$$\sphericalangle AOP_1 = ORS,$$ je $S_1P \parallel OP_1$ atd.

58. Konstrukce na základě součtu a rozdílu os vhodně se dá upotřebiti při mechanickém vytvoření ellipsy z daných os (elliptické kružidlo). Na základě výměrné vlastnosti ellipsy

plyne též jednoduché mechanické narýsování ellipsy. Nit dané délky $2a$ připevníme v pevných bodech F, F'. Pohybuje-li se nyní tužka, držíc stále napjatou nit, opisuje ellipsu, jejíž ohniska jsou body F, F' a délka její velké osy rovná se délce napjaté niti.

Ellipsa a přímka.

59. Máme-li určiti průseky ellipsy, dané rovnicí

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \qquad (1)$$

s přímkou, jejíž je rovnice

$$y = A x + n,^*) \qquad (2)$$

třeba uvážiti, že průseky jsouce společnými body ellipsy i přímky mají souřadnice, které oběma rovnicím současně vyhovují.

Na základě toho můžeme, předpokládajíce za x a y v obou rovnicích tutéž hodnotu, řešením daných rovnic dle x a y souřadnice průseku vypočísti. Dosadíme-li hodnotu za y z rovnice (2) do rovnice (1), obdržíme

$$(a^2 A^2 + b^2) x^2 + 2 a^2 n A x = a^2 (b^2 - n^2).$$

Rovnice tato je vzhledem ku x kvadratická, obdržíme tudíž řešením dvě úsečky, totiž

$$x = \frac{-a^2 n A \pm a b \sqrt{a^2 A^2 + b^2 - n^2}}{a^2 A^2 + b^2} \qquad (3)$$

a příslušné pořadny

$$y = \frac{b^2 n \pm a b A \sqrt{a^2 A^2 + b^2 - n^2}}{a^2 A^2 + b^2} \qquad (4)$$

podává rovnice (2).

Realnosť obou průseků visí na realnosti veličiny kořenové.

Dle toho, je-li $a^2 A^2 + b^2 \gtrless n^2$,

jsou oba průseky realné neb imaginarné.

---

*) V rovnici přímky píšeme n pro úsek na ose Y, jelikož zde b značí již délku malé poloosy.

Oba průseky splývají v jeden, je-li

$$a^2 A^2 + b^2 = n^2,$$

v kterémžto případě se dotýká přímka (2) ellipsy (1).

Poznámka. Je-li α úhel, jejž přímka (2) uzavírá s osou X, je $A = tg\,\alpha$, a tudíž můžeme podmínku dotyku $a^2 A^2 + b^2 = n^2$ psáti

$$a^2 (sec^2 \alpha + 1) + b^2 = n^2,$$

aneb

$$a^2 = (e \cos \alpha)^2 + (n \cos \alpha)^2. \quad (5)$$

Jest však (obr. 42.)

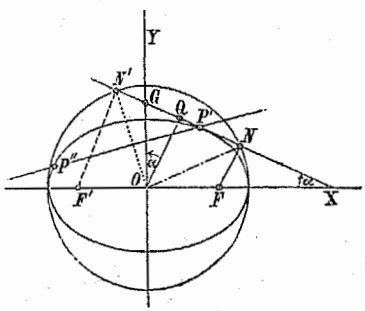
$$e \cos \alpha = Q N,$$

t. j. průmět délky OF na tečnu, podobně je

$$OQ = OG \cos \alpha = n \cos \alpha,$$

a tudíž můžeme horní rovnici psáti

$$a^2 = \overline{MN}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{ON}^2,$$



Obraz 42.

t. j. $ON = a$. Pata N kolmice, s ohniska na tečnu ellipsy spuštěné, vzdálena je od středu ellipsy o délku stálou a, t. j. leží na kruhu K_a, jenž jest tudíž místem pat kolmic s ohniska na tečny ellipsy spuštěných. Přímka (2) dotýká se tedy ellipsy, leží-li průmět N ohniska ellipsy F (neb i F') na tu přímku na kruhu K_a. Leží-li průmět N uvnitř kruhu nebo mimo kruh K_a, potom seče přímka ellipsu ve dvou bodech realných nebo jde mimo ellipsu, což dokážeme, vyměnivše v rovnici (5) znaménko rovnosti znaménkem $>$, potažmo $<$.

Úloha. Která z přímek

$$y = x + 2, \quad y = x + \sqrt{5}, \quad y = x + 3$$

protíná ellipsu $x^2 + 4y^2 = 4$ v bodech realných? Dotýká se jedna z těch přímek ellipsy? V případě, že ano, které jsou souřadnice bodu dotyku?

Sečna, tečna, normala.

60. Pravili jsme dříve (čl. 42. a 59.), že můžeme tečnu považovati jako sečnu, jejíž oba průseky splývají v bod jediný. Na základě toho můžeme i rovnici tečny v daném bodě $P'(x'\,y')$ na ellipse určiti. Sestrojme zprvu bodem P' kteroukoli sečnu

(obr. 42.), která protíná ellipsu mimo v bodě P' ještě v dalším bodě $P''\,(x''\,y'')$. Rovnice spojnice dvou bodů P', P'' je

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Směrnici $\dfrac{y' - y''}{x' - x''}$

vyjádříme nyní z podmínky, že body P', P'' leží na ellipse. Platí tudíž

$$\begin{aligned} b^2 x'^2 + a^2 y'^2 &= a^2 b^2, \\ b^2 x''^2 + a^2 y''^2 &= a^2 b^2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Odečtením obou rovnic obdržíme

$$b^2 (x'^2 - x''^2) + a^2 (y'^2 - y''^2) = 0,$$

z kteréžto rovnice vypočteme, rozloživše rozdíly čtverců ve činitele

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')}.$$

Jest tudíž rovnice přímky, spojující dva body P', P', ellipsy

$$y - y' = -\frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')}(x - x'). \qquad (2)$$

Představme si nyní, že se bod P'' stále přibližuje bodu P', tu přibližuje se sečna $\overline{P'\,P''}$ k určité poloze mezní, k tečně bodu P', s níž se sjednotí, splyne-li bod P'' s bodem P'. Toto splynutí vyjádříme tím, že v horní rovnici píšeme

$$x'' = x', \qquad y'' = y',$$

čímž přejde rovnice sečny (2) v rovnici tečny

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x'). \qquad (3)$$

Znásobíme-li jmenovatelem, můžeme vzhledem k rovnici (1) psáti rovnici tečny (3):

$$\frac{x' x}{a^2} + \frac{y' y}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

Poznámka. Na základě čl. 58. můžeme rovnici tečny ellipsy v bodě $P'\,(x', y')$ následovně vyvinouti. Jelikož přímka probíhá bodem P', platí $y' = A x' + n$, a jakožto tečna vyhovuje podmínce $a^2 A^2 + b^2 = n^2$. Z těchto dvou rovnic můžeme určiti veličiny A, n,

čímž je i tečna určena. Je-li určiti tečna, jejíž směrnice je A, tu je

$$n = \pm\sqrt{a^2 A^2 + b^2},$$

a tudíž rovnice hledané tečny

$$y = A x \pm \sqrt{a^2 A^2 + b^2}.$$

Můžeme tedy sestrojiti dvě tečny ellipsy rovnoběžné s danou přímkou.

61. Normala bodu P' ellipsy je přímka jdoucí tímže bodem kolmo na jeho tečnu. Tím je směrnice normaly

$$\frac{a^2 y'}{b^2 x'},$$

a rovnice její je $$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'). \qquad (5)$$

62. Tečna vedená z daného bodu na ellipsu. Rovnice přímky jdoucí bodem $P(x' y')$ je

$$y - y' = A(x - x') \text{ aneb } y = A x + (y' - A x'). \qquad (6)$$

Jelikož přímka tato má býti tečnou ellipsy, určíme její směrnici A z podmínky dotyku (čl. 58.), kladouce v ní za

$$n = y' - A x',$$

tedy z rovnice $$a^2 A^2 + b^2 = (y' - A x')^2.$$

Jelikož je tato rovnice vzhledem k směrnici A kvadratická, nabudeme tím dvou hodnot pro A, totiž

$$A = \frac{-x' y' \pm \sqrt{b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 b^2}}{a^2 - x'^2}. \qquad (7)$$

Můžeme tedy z bodu $(x' y')$ dvě tečny na ellipsu sestrojiti, jež jsou realné neb imaginarné dle toho, je-li

$$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 b^2 \gtrless 0,$$

t. j. leží-li bod $(x' y')$ mimo ellipsu neb uvnitř ellipsy (čl. 54.) Je-li $$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 b^2 = 0,$$

splývají obě tečny v jednu, t. j. leží-li bod $P(x', y')$ na ellipse, můžeme jím pouze jedinou tečnu vésti. Dosadíme-li hodnotu za směrnici v případě tomto

$$A = -\frac{x' y'}{a^2 - x'^2} = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'},$$

do rovnice (6), obdržíme známou již rovnici (4) tečny bodu $(x' y')$ na ellipse.

63. Úhel δ obou tečen z bodu $P\,(x', y')$ na ellipsu vedených obdržíme pomocí rovnice (1), čl. 34. Pišme zkrátka

$$\triangle = \sqrt{a^2 x'^2 + b^2 y'^2 - a^2 b^2},$$

načež máme $$A_2 - A_1 = \frac{2\triangle}{a^2 - x'^2},$$

$$1 + A_2 A_1 = \frac{a^2 + b^2 - x'^2 - y'^2}{a^2 - x'^2},$$

kdež jsme společným činitelem $(a^2 - x'^2)$ zkrátili, tudíž je (obr. 43.)

$$tg\,\delta = \frac{2\triangle}{x'^2 + y'^2 - a^2 - b^2}. \qquad (8)$$

Vyhovují-li souřadnice bodu P rovnici

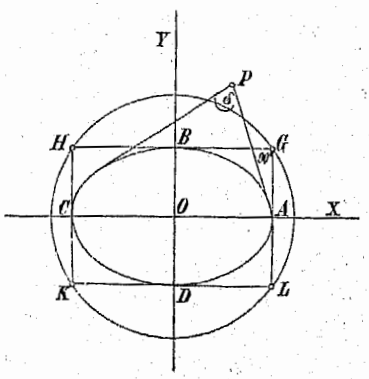
$$x'^2 + y'^2 = a^2 + b^2,$$

t. j. leží-li bod P na kruhu opsaném ze středu ellipsy poloměrem

$$\sqrt{a^2 + b^2},$$

jsou jeho tečny navzájem kolmy, což můžeme následovně vyjádřiti: „Otáčí-li se pravý úhel tak, že ramena jeho stále se ellipsy dotýkají, opisuje vrchol jeho kruh soustředný s ellipsou mající poloměr

$$O\,G = \sqrt{a^2 + b^2}.“$$



Obraz 43.

64. Souřadnice bodů dotyku tečen bodu P určíme buď dle čl. 59., buď rychleji následující úvahou. Budiž (x_1, y_1) hledaný bod dotyku tečny jdoucí bodem (x', y'), je tudíž:

$$b^2 x' x_1 + a^2 y' y_1 = a^2 b^2, \qquad (9)$$

a jelikož bod dotyku je bod ellipsy, platí

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2.$$

Řešením obou rovnic dle x_1 a y_1 obdržíme souřadnice bodů dotyku obou tečen z bodu $(x' y')$ na ellipsu vedených.

Poznámka. Považujeme-li x_1, y_1 za souřadnice bodu proměnlivého, vyjádřuje rovnice (9) přímku, a jelikož souřadnice bodů dotyku tečen z bodu $(x' y')$ na ellipsu vedených jí vyhovují, probíhá přímka tato body dotyku, začež se i častěji tětiva dotyku zove.

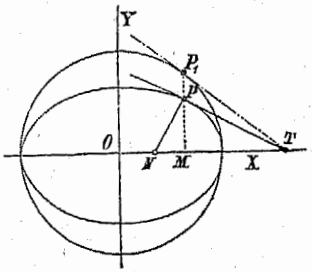
Úloha. Dána je ellipsa $2x^2 + 3y^2 = 12$ a na ní bod $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 1\right)$. Rovnice tečny tohoto bodu je $x\sqrt{2} + y = 4$. Průvodiče jeho

$$r_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad r_2 = 3\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Nechť se určí rovnice tečen vedených z bodu (5, 3) na ellipsu, který je úhel těchto tečen, které jsou souřadnice bodů dotyku? Jak je vzdálena spojnice bodů dotyku od středu ellipsy?

Délka tangenty, subtangenty, normaly a subnormaly.

65. Budiž T průsek tečny bodu P ellipsy s osou X a N průsek normaly téhož bodu s osou úseček. Délku $\overline{PT}$ jmenujeme délku tangenty, délku $\overline{PN}$ délku normaly bodu P (obr. 44.). Průmět tangenty PT na osu úseček, totiž MT, jmenujeme subtangentu S_t a podobně průmět MN normaly bodu P na osu úseček jmenujeme subnormalu S_n téhož bodu.



Obraz 44.

Jelikož je $MT = OT - OM$, plyne, že píšeme-li $y = 0$ v rovnici tečny

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x'),$$

jest rozdíl $x - x' = OT - OM$ délka subtangenty S_t, t. j.

$$S_t = \frac{a^2 y'^2}{b^2 x'} = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Zcela obdobně podává rozdíl úseček $x - x'$ v rovnici normaly bodu $(x' y')$ ellipsy, totiž

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'),$$

dosadíme-li v ní $y = 0$, a zkrátíme-li pořadnou y', délku subnormaly S_n

$$S_n = -\frac{b^2 x'}{a^2},$$

neboť je $x - x' = ON - OM = -NM = MN.$

Znajíce S_t, S_n, snadně vypočítáme délku tangenty a normaly Pythagorovou větou z pravoúhlých trojúhelníků

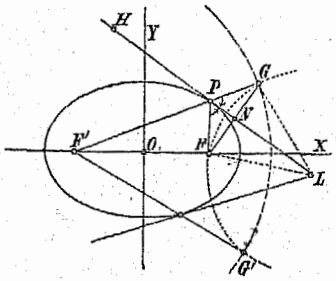
$$PMT \text{ a } PMN.$$

Subtangenta ellipsy nevisí na velikosti malé osy, neboť se b ve výrazu pro S_t nevyskytuje. Body kruhu K_a, jakožto ellipsy, jejíž $b = a$, mají tudíž při téže úsečce tuž subtangentu.

Úhly tečny s provodiči bodu dotyku a sestrojení tečny.

66. Z vlastnosti, která z výměru ellipsy odvozena byla, plyne: „Souměrné body jednoho ohniska vzhledem k tečnám ellipsy leží na kruhu, jehož střed je druhé ohnisko a poloměr roven veliké ose $2a$.“

Jest totiž $FN = NG$ (obr. 45.), následkem čehož a ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků FPN, GPN je $\sphericalangle FPN = \sphericalangle GPN$. Bod G leží tudíž na prodlouženém provodiči $F'P$ o délku $PG = PF$, tím je $F'G = 2a$ veličina stálá.



Obraz 45.

Z tohoto důkazu uvedené vlastnosti ellipsy plyne současně

$$\sphericalangle FPN = \sphericalangle F'PH,$$

jelikož se oba rovnají $\sphericalangle NPG$, t. j. tečna uzavírá s provodiči bodu dotyku rovné úhly, nebo jinými slovy: „Tečna ellipsy v bodě P půlí úhel, jejž uzavírá jeden provodič tohoto bodu s prodlouženým provodičem druhým.“

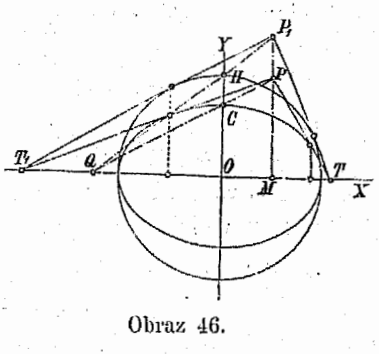
Kterak dokážeme tuto vlastnosť berouce v počet směrnici tečny bodu P, jakož i směrnice jeho provodičů $\overline{FP}$, $\overline{F'P}$?

Z uvedené vlastnosti plyne sestrojení tečny bodu P ellipsy, známe-li její ohniska. Prodloužíme $\overline{F'P}$ do bodu G o délku $\overline{PF}$ a kolmice z bodu P na FG je hledaná tečna.

Z tohoto sestrojení můžeme nyní pomocí vlastnosti ohnisek, uvedené na počátku tohoto článku, odvoditi sestrojení tečny z bodu L na ellipsu. Určíme totiž souměrný bod G ohniska F vzhledem k hledané tečně $\overline{LP}$. Bod G leží na kruhu opsaném z ohniska F' poloměrem $2a$, dále leží též na kruhu opsaném z bodu L poloměrem LF, (jest totiž $LN \perp FG$, $FN = NG$, tudíž $LF = LG$.)

Obdržíme takto dva body G, G' jako průseky obou kruhů, tím i dvě tečny, které sestrojíme spustivše s bodu L kolmice na FG a FG'. Body dotyku jsou průseky spojnic $F'G$, $F'G'$ s ellipsou. Dle toho jsou-li body G, G' realné neb imaginarné, jsou obě tečny realné neb imaginarné. V případě, že body tyto splývají v jeden, obdržíme tečnu jedinou, t. j. bod L leží na ellipse. (Viz čl. 62.).

Poznámka. Tečny z bodu P na ellipsu snadno sestrojiti můžeme, považujíce ellipsu za pravoúhelný průmět kruhu K_a. Sestrojíme (obr. 46.) příslušný bod P_1 v rovině kruhu, kterou si myslíme otočenou do roviny ellipsy. Sestrojme $\overline{PC}$ do průseku Q s velkou osou, načež vedeme QH, jež protíná pořadnu bodu P v hledaném bodě P_1. Jest totiž (čl. 57.) $MP : MP_1 = OC : OH = b : a$. Sestrojíme nyní v bodu P_1 tečny na K_a, jež protínají osu úsečk v bodech T, T_1. Spojnice PT, PT_1 jsou hledané tečny.*)



Obraz 46.

*) Srovnej konec čl. 65.

Průměry ellipsy.

67. Středy rovnoběžných tětiv ellipsy leží na přímce, kterou jmenujeme průměr ellipsy. Budiž $\overline{P_1 P_2}$ jedna z tětiv rovnoběžných daných směrnicí A, a

$$y = A x + n \qquad (1)$$

její rovnice. Dále budiž bod $Q\ (\xi, \eta)$ střed tětivy $\overline{P_1 P_2}$, t. j. střed vzdálenosti průseků přímky (1) s ellipsou (obr. 47.)

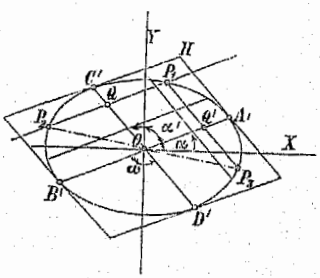
$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2. \qquad (2)$$

Jsou-li (x_1, y_1), (x_2, y_2) souřadnice zmíněných průseků P_1, P_2 (čl. 59., rovnice 3., 4.), jsou

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2 n A}{a^2 A^2 + b^2},$$
$$\eta = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b^2 n}{a^2 A + b^2}, \qquad (3)$$

souřadnice středu Q tětivy $\overline{P_1 P_2}$.

Pošinujeme-li nyní rovnoběžně tětivu (1), mění se tím veličina n, čímž i poloha bodu Q. Dělením rovnic (3) vyloučíme veličinu n, t. j. obdržíme vztah mezi souřadnicemi středů rovnoběžných tětiv nebo rovnici průměru, která je:



Obraz 47.

$$\eta = -\frac{b^2}{a^2 A}\xi. \qquad (4)$$

Z rovnice této plyne, že každý průměr probíhá středem ellipsy. Že i naopak každá přímka jdoucí středem ellipsy je průměrem, vysvítá z toho, že můžeme určiti vždy směr rovnoběžných tětiv (t. j. určiti směrnici A), které daná přímka jdoucí počátkem půlí.

Je-li A' směrnice průměru (4), je

$$A' = -\frac{b^2}{a^2 A}, \quad \text{tedy je} \quad A A' = -\frac{b^2}{a^2}, \qquad (5)$$

t. j. součin směrnic soustavy rovnoběžných tětiv ellipsy a příslušného jim průměru je veličina stálá $-\frac{b^2}{a^2}$.

Z rovnice (5) je patrna výměnlivosť obou směrnic A, A' t. j. značí-li jedna z nich směrnici rovnoběžných tětiv, značí druhá směrnici příslušného průměru a naopak. Půlí-li tedy průměr $y = A' x$ tětivy rovnoběžné s průměrem $y = A x$, platí to i naopak. Dva průměry $\overline{A' B'}$, $\overline{C' D'}$, z nichž jeden půlí tětivy rovnoběžné s druhým, jmenujeme sdružené průměry.

Osy ellipsy jsou dva na vzájem kolmé, sdružené průměry. Velké ose mající směrnici $= 0$ sdružen je dle (5) průměr, jehož směrnice je $= \infty$ t. j. malá osa.

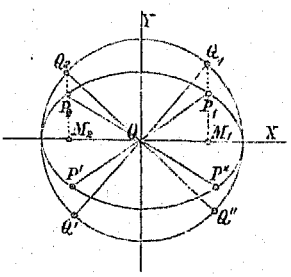
Je-li ω úhel dvou sdružených průměrů, je hledíc k rovnici (5)

$$tg\,\omega = \frac{A' - A}{1 + A A'} = -\frac{a^2 A^2 + b^2}{e^2 A}; \qquad (6)$$

jsou tedy osy ellipsy jediným párem sdružených průměrů, které stojí na sobě kolmo.

Pro $a = b$ máme ellipsu stejnoosou, t. j. kruh; z rovnic (5) a (6) plyne ihned, že v kruhu každé dvé sdružených průměrů stojí na sobě kolmo.

Poznámka. Vlastnosť průměrů sdružených obdržíme ihned geometricky, uváživše ellipsu jako průmět kruhu K_a. Dva navzájem kolmé průměry kruhu tvoří dvé sdružených průměrů. Průměty jejich jsou opět sdruženými průměry průmětu kruhu, t. j. ellipsy, nebo rovnoběžky promítají se v rovnoběžky a středy tětiv kruhu ve středy tětiv ellipsy. Jsou-li tedy $Q_1 Q'$, $Q_2 Q''$ dva sdružené průměry kruhu, jsou $P_1 P'$, $P_2 P''$ průměty jejich. Jest však (obr. 48.)



Obraz 48.

$$\frac{M_1 P_1}{M_1 Q_1} = \frac{tg\,(M_1 O P_1)}{tg\,(M_1 O Q_1)} = \frac{A}{A_1} = \frac{b}{a};$$

podobně je

$$\frac{M_2 P_2}{M_2 Q_2} = \frac{A'}{A_1'} = \frac{b}{a},$$

pročež $$\frac{AA'}{A_1A_1'} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Jelikož je $OQ_1 \perp OQ_2$, je $A_1 . A_1' = -1$, tedy

$$AA' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Cestou touto přímo dokázati můžeme, že je 1. součet čtverců dvou sdružených průměrů roven součtu čtverců os; 2. rovnoběžník nad dvěma sdruženými průměry rovná se obdélníku nad osami.

68. Z rovnice (5) plyne bezprostředně (obr. 47.):

α) Jelikož je součin $A . A' = tg\,\alpha . tg\,\alpha'$ záporný, je úhel α kosý, úhel však α' tupý nebo naopak, sdružené průměry leží po obou stranách malé osy.

β) Strany P_1P_2, P_1P_3 trojúhelníku vepsaného v ellipsu nad průměrem P_2P_3 mají směry dvou sdružených průměrů (tětivy supplementarné). Jsou-li totiž Q, Q' středy stran P_1P_2, P_1P_3, je $QO \parallel P_1P_3$, $Q'O \parallel P_1P_2$.

γ) Tečny v krajných bodech průměru jsou rovnoběžny s průměrem sdruženým. Je-li $C'(x', y')$, je směrnice $\frac{y'}{x'}$ průměru $C'D'$ a směrnice tečny v bodě C' je $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$, tedy je součin obou směrnic $-\frac{b^2}{a^2}$. Totéž obdržíme i geometricky, neboť pošinujíce rovnoběžně tětivu P_1P_2, obdržíme tečnu za mezní polohu. Body P_1, P_2 splynou s bodem dotyku C'.

δ) Na základě *(β)* sestroj tečnu v bodě C'. Sestroj bodem tím průměr a sestroj nad libovolným průměrem trojúhelník vepsaný v ellipsu, jehož jedna strana je rovnoběžna s průměrem bodu C', druhá strana udává směr tečny tohoto bodu. Nebo na základě *(γ)*: Spojnice středu rovnoběžné tětivy s průměrem bodu C' podává směr tečny bodu C'.

ε) V rovnoběžníku opsaném ellipse tvoří úhlopříčky, jakož i spojnice bodu dotyku protilehlých stran dvé a dvé sdružených průměrů.

Úlohy. 1. Budiž $A = 2$ směrnice rovnoběžných tětiv ellipsy $x^2 + 4y^2 = 4$, rovnice sdruženého průměru je $x + 8y = 0$.

2. Je-li $y = 3x$ průměr ellipsy $2x^2 + 3y^2 = 12$, je směrnice sdruženého průměru $A = -\frac{2}{9}$.

3. Kterak určiti jest střed narýsované ellipsy na základě uvedené vlastnosti průměru?

4. Vypočti sdružené průměry ellipsy $2x^2 + 3y^2 = 12$, uzavírající úhel 60°. Kterak určiti je vzhledem k (β) konstrukci?

5. Jsou-li x', y' souřadnice bodu A' na ellipse, urči souřadnice průseků C', D' průměru sdruženého k $\overline{OA'}$.

Řeš: Jsouť $x_1 = \pm\frac{a}{b}y'$, $y_1 = \mp\frac{b}{a}x'$.

6. Dokaž, že je součet čtverců dvou sdružených průměrů stálý.

Řeš: Jelikož je $a'^2 = x'^2 + y'^2$, $b'^2 = x_1^2 + y_1^2$, plyne dle předcházející úlohy ihned $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$.

7. Obdélník sestrojený nad dvěma sdruženými průměry má stálou plochu.

Řeš: Je-li K pata kolmice s O na tečnu bodu A', je

$$OK \,.\, A'H = a'b' \sin(\alpha' - \alpha),$$

$$OK = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}} = \frac{ab}{\sqrt{\left(\frac{bx'}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay'}{b}\right)^2}},$$

tedy hledíc k úloze 5. a 6. je

$OK = \frac{ab}{b'}$, a jelikož $A'H = b'$, obdržíme $ab = a'b' \sin(\alpha' - \alpha)$.

Ellipsa vztažená na dva sdružené průměry.

69. Kdybychom místo os ellipsy zvolili za osy souřadnic kterékoli jiné dvé sdružených průměrů, příslušely by opět každé úsečce dvě pořadny sice stejně veliké, avšak opačného znaménka, t. j. v rovnici vyskytovalo by se y pouze ve čtverci. Avšak z pojmu sdružených průměrů vyplývá totéž i pro x. Rovnice ellipsy v této kosoúhlé soustavě, kdež jsou dva sdružené průměry osy souřadnic, je pak tvaru

$$mx^2 + ny^2 = p,$$

který uvésti můžeme na tvar rovnice osové, stanovivše

$$\frac{p}{m} = a_1^2, \quad \frac{p}{n} = b_1^2.$$

Tvar rovnice se tedy nemění, volíme-li kterékoli dvé sdružených průměrů za osy souřadnic.

K témuž výsledku dojdeme i transformací souřadnic. Budiž průměr $B'A'$ novou osou X_1 a sdružený průměr $D'C'$ novou osou Y_1; dále

$$\sphericalangle(XX_1) = \alpha,$$
$$\sphericalangle(XY_1) = \alpha' = \alpha + \omega,$$

kdež je $\omega = \sphericalangle A'OC'$

(obr. 47.) úhel nové soustavy souřadnic.

Přechod na nové osy provedeme, dosadivše*) za

$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\alpha',$$
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \sin\alpha',$$

do rovnice ellipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Uváživše, že mezi směrnicemi dvou sdružených průměrů platí

$$tg\,\alpha \,.\, tg\,\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$$

(čl. 67., rov. 5.), anebo což totéž

$$a^2 \sin\alpha \sin\alpha' + b^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0, \qquad (1)$$

obdržíme rovnici ellipsy vztažené na dva sdružené průměry

$$(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)\,x_1^2 + (a^2\sin^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha')\,y_1^2 = a^2b^2. \qquad (2)$$

Píšeme-li

$$\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} = a_1^2, \quad \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha'} = b_1^2, \qquad (3)$$

přejde rovnice hořejší ellipsy (2) ve

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1, \qquad (4)$$

kdež jsou x_1, y_1 souřadnice proměnlivého bodu ellipsy ve nové kosoúhlé soustavě, a_1, b_1 poloviční délky sdružených průměrů, vzatých za osy souřadnic.

Úloha. Z rovnic (1) a (3) odvoditi jest (srovnej konec pozn. k čl. 67., jakož i úlohy 6. a 7., čl. 68.)

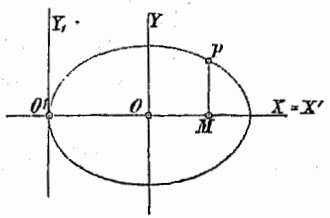
$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2, \quad a_1 b_1 \sin(\alpha' - \alpha) = ab$$

(Theoremy Apolloniovy).

*) Viz str. 16. rov. 4.

Vrcholová rovnice ellipsy.

70. Pošineme-li osu Y rovnoběžně na vrchol O' ellipsy jakožto počátek souřadnic, třeba (čl. 13., I.) $x - a$ psáti místo x ve středové rovnici ellipsy, neboť nová úsečka $O'M$ zmenšená o a rovná se staré úsečce OM (obr. 49.). Jest



Obraz 49.

$$b^2 (x - a^2) + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

rovnice ellipsy v nové soustavě, kterou můžeme též psáti

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = 2 a b^2 x, \qquad (1)$$

aneb uvedše délku poloparametru

$$p = \frac{b^2}{a}$$

(čl. 56.) do rovnice, obdržíme

$$y^2 = 2 p x - \frac{p}{a} x^2. \qquad (2)$$

Rovnice ellipsy, kdež velká osa je osou úseček, a tečna krajního bodu této osy osou pořaden, zove se vrcholová rovnice ellipsy. Jak z rovnice (1) vysvítá, nezměnily se součinitelé u x^2 a y^2 tím, že jsme rovnoběžně pošinuly osy souřadnic do nového počátku O'.

Rovnice vrcholové mohli bychom stejně upotřebiti k vyšetřování ellipsy, jakož jsme to učinili k vůli jednoduchosti s rovnicí osovou.

Plocha ellipsy.

71. Jelikož je ellipsa pravoúhlý průmět kruhu K_a, rovná se plocha ellipsy ploše kruhu znásobené kosinusem úhlu φ, t. j. úhlu, který svírá rovina kruhu s rovinou ellipsy. Jest však (čl. 57.)

$$\cos \varphi = \frac{b}{a}$$

a plocha kruhu K_a je πa^2, protož je plocha ellipsy

$$E = \pi a^2 . \frac{b}{a} = \pi a b.$$

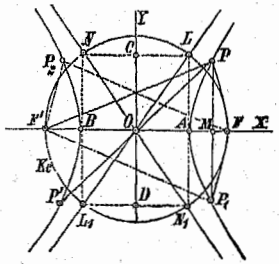
O hyperbole.

72. Místo všech bodů, jejichž vzdálenosti od dvou pevných bodů F, F' mají stálý rozdíl $2a$, jmenuje se hyperbola. Pevné body F, F' jmenujeme ohniska hyperboly a vzdálenosť jejich znamenáme $2e$. Délku e jmenujeme délkovou výstředností hyperboly. Je-li P bod hyperboly, je dle výměru

$$F'P - FP = 2a$$

nebo $$FP - F'P = 2a, \qquad (1)$$

dle toho, je-li spojnice $F'P$ větší nebo menší než spojnice FP, kteréžto spojnice bodu P s ohnisky jmenujeme provodiče (radii vectores). A jelikož v každém trojúhelníku (obr. 50.) $F'PF$ je rozdíl $F'P - FP$ menší než $F'F$, je $a < e$.



Obraz 50.

Z výměru hyperboly plyne ihned, že sestrojíme-li z ohnisek dva kruhy, jejichž rozdíl poloměrů rovná se stálé délce $2a$, průseky těchto kruhů jsou body hyperboly. Na spojnici ohnisek $F'F$ leží dva body A, B hyperboly (plyne ze souměrnosti konstrukce hledíc k bodům F', F), pro něž platí

$$F'A = FB, \quad F'B = FA.$$

Vzdálenosť jejich rovná se rozdílu jejich vzdáleností od jednoho ohniska, neboť je

$$F'A - F'B = F'A - FA = 2a.$$

Střed délky BA je současně i středem vzdálenosti ohnisek. Toto vyplývá již z konstrukce jakož i odečtením

rovnice $BO = OA$ od rovnice

$$2e - F'A = 2e - FB.$$

Body A, B jsou vrcholy, spojnice jejich hlavní osa hyperboly, a střed O té osy je střed hyperboly.

Rovnice hyperboly.

73. Vyjádříme nyní výměrnou vlastnosť hyperboly analyticky, t. j. rovnicí.

Za osy souřadnic s prospěchem voliti můžeme hlavní osu hyperboly jakožto osu X a kolmici v jejím středu O jakožto osu Y. Budiž P libovolný bod hyperboly, souřadnice jeho

$$x = OM, \quad y = MP.$$

Délky provodičů toho bodu (obr. 50.) plynou z rovnic

$$\begin{aligned} \overline{F'P}^2 &= (F'O + OM)^2 + \overline{MP}^2 = (e+x)^2 + y^2, \\ \overline{FP}^2 &= (OF - OM)^2 + MP = (e-x)^2 + y^2, \end{aligned} \tag{2}$$

z nichž patrno, že pro kladné x, je $F'P > FP$ a naopak $F'P < FP$ pro záporné x. Uvedeme-li nyní hodnoty tyto pro FP a $F'P$ do rovnice (1), čímž vyjádříme, že bod P leží na hyperbole, obdržíme

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} - \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = \pm 2a \tag{3}$$

kdež platí buď horní buď dolní znaménko dle toho, je-li x kladné nebo záporné. Učiníme-li rovnici (3) racionalnou, obdržíme, píšíce

$$e^2 - a^2 = b^2 \quad \text{aneb} \quad e^2 = a^2 + b^2,$$

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \tag{4}$$

středovou rovnici hyperboly, kterou můžeme též psáti ve tvaru

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \tag{5}$$

Rozbor rovnice hyperboly.

74. Řešíme-li rovnici hyperboly dle y, obdržíme

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \tag{6}$$

z čehož plyne: Pro každou kladnou hodnotu x větší než a

obdržíme dvě realné hodnoty pro y rovné co do velikosti, ale různé co do znaménka, t. j. hyperbola rozprostírá se souměrně po obou stranách osy X od bodu A počínajíc, v němž osu seče, do nekonečna. Avšak hodnota pro y se nemění, píšeme-li v rovnici (6) $-x$ za $+x$; obdržíme takto pro úsečky od $-a$ do $-\infty$ souměrnou část hyperboly k oné již vytknuté části i to vzhledem k ose Y, rozprostírající se od bodu B, v němž osu X seče, souměrně k této ose do nekonečna ve směru opačném. Osy souřadnic čtvrtí hyperbolu.

Přímka kolmá na ose X mezi vrcholy hyperboly neprotíná realně hyperbolu, neboť je tu x číselně menší než a. Tím jsou i průseky osy Y s hyperbolou pomyslné; obdržíme pro

$$x = 0, \quad y = \pm b\sqrt{-1}.$$

Délka $2b$ je délka pobočné osy, kterou si odměříme kolmo v počátku souřadnic, by bylo*) $D\,O = O\,C = b$. Hyperbola má tedy jen dva realné vrcholy A, B, jejichž spojnice je hlavní osa.

Počátek souřadnic je střed hyperboly nebo leží-li bod $P(x\,y)$ na hyperbole, platí to i pro bod $P'(-x, -y)$, jenž je s ním souměrný hledíc k počátku, t. j. každá tětiva $\overline{P\,P'}$ hyperboly, jdoucí bodem O, půlí se v tomto bodě (srov. čl. 53.).

75. Rovnici hyperboly (5) můžeme též psáti

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Přihlížíme-li pouze k hornímu znaménku, je podíl (obr. 50.)

$$\frac{y}{x} = tg\,P\,O\,M < \frac{b}{a}, \quad \text{je-li} \quad x > a.$$

Čím se bod P na hyperbole vzdaluje, tím roste jeho úsečka a směrnice jeho spojnice s počátkem přibližuje se podílu $\frac{b}{a}$. Vzdálí-li se bod P na hyperbole do nekonečna, bude

*) Tečna vrcholu A protíná kruh K_e v bodě L;

$$\overline{A\,L}^2 = F'A \,.\, A\,F = (e + a)(e - a) = b^2,$$

pročež $$A\,L = b = O\,C.$$

i jeho $x = \infty$ a tím přiblíží se hodnota $\frac{a^2}{x^2}$ nulle, t. j. spojnice $\overline{O P_\infty}$ bude soumezna s přímkou $O L$, k níž se hyperbola neustále těsněji přibližuje, aniž ji postihne. Přímka $O L$ slove z té příčiny asymptota hyperboly.

Přeneseme-li tuto úvahu na ostatní čtvrti hyperboly, shledáme, že má hyperbola dvě asymptoty $L L'$ a $N N'$, které obdržíme, sestrojivše $A L = B N = b$ kolmo na osu X, jako spojnici bodů L, N se středem hyperboly.

Hyperbola leží celá uvnitř oné části roviny omezené asymptotami, která obsahuje realnou osu hyperboly. Rovnice asymptot můžeme dle předcházejícího ihned napsati, jsou

$$y = + \frac{b}{a} x, \quad y = - \frac{b}{a} x. \qquad (7)$$

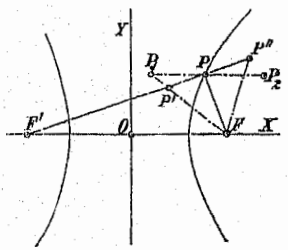
Asymptoty stojí na sobě kolmo, je-li $b = a$, t. j. je-li hyperbola rovnostranná.

Poloha bodu hledíc k hyberbole.

76. Pro souřadnice bodu P hyperboly je

$$b^2 x^2 - a^2 y - a^2 b^2 = 0, \quad \text{nebo} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (8)$$

Mysleme si, že se bod P pohybuje po rovnoběžce s osou X, tím nemění se člen $\frac{y^2}{b^2}$, avšak člen $\frac{x^2}{a^2}$ je větší nebo menší dle toho, vzdálí nebo přiblíží-li se bod P k ose Y. Z toho plyne, že je trojčlen (8) záporný pro body P_1 ležící mezi oběma větvemi hyperboly (obr. 51.), leží-li však bod P_2 po straně vyduté hyperboly jako na př. ohnisko, — analogicky s ellipsou pravíme i zde, že bod P_2 leží uvnitř hyperboly — je trojčlen (8) kladný.



Obraz 51.

Na polohu bodu hledíc k hyperbole souditi můžeme, dána-li jsou její ohniska, již výměrné rovnice (1.).

Dle toho je-li rozdíl provodičů menší, větší nebo roven nulle, má daný bod polohu bodu P', P'' nebo P, t. j. bod tento leží mezi větvemi hyperboly, vně hyperboly nebo na hyperbole.

Provodiče bodu hyperboly, její řiditelky a parametr.

77. Píšeme-li jako při ellipse (čl. 55.)

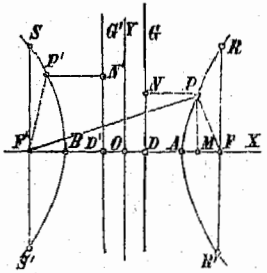
$$F P = r, \quad F' P = r_1,$$

plyne z rovnic (2) čl. 73.

$$r^2 - r_1^2 = -4 e x.$$

Rozložíme-li levou stranu v činitele, obdržíme hledíce k rovnici (1) čl. 72.

$$r_1 + r = \frac{2 e x}{a}.$$



Obraz 52.

Z této rovnice, jakož i ze zmíněné rovnice (1) obdržíme výrazy pro provodiče*) r, r_1 bodu P na hyperbole (obr. 52.)

$$r = \frac{e x}{a} - a,$$
$$r_1 = \frac{e x}{a} + a. \qquad (9)$$

Píšeme-li nyní

$$r = F P = \frac{e}{a}\left(x - \frac{a^2}{e}\right),$$

je, jestliže sestrojíme kolmice na osu X ve vzdálenosti

$$O D = O D' = \frac{a^2}{e}$$

*) Z rovnic (9) plyne, že ohniska hyperboly mají tu vlastnost, že vzdálenosti jejich od libovolného bodu hyperboly vyjádřiti můžeme racionalně pomocí úsečky tohoto bodu. Viz poznámku k čl. 55.

od počátku souřadnic,

$$x - \frac{a^2}{e} = OM - OD = DM = NP,$$

pročež

$$\frac{FP}{NP} = \frac{e}{a}. \qquad (10)$$

Podobně bychom z druhé rovnice (9) obdrželi

$$\frac{F'P}{N'P} = \frac{e}{a}. \qquad (10')$$

Přímky DG a $D'G'$ jmenujeme řiditelky hyperboly, z nichž každá je přidružena ohnisku bližšímu. Vzdálenosti bodů hyperboly od ohniska a přidružené řiditelky jsou ve stálém poměru větším než 1.

Podíl $\frac{e}{a}$ značíme obyčejně ε a jmenujeme číselnou výstředností hyperboly.

78. Tětivu jdoucí ohniskem hyperboly kolmo na osu hlavní, jmenujeme parametr hyperboly. Dosadíme-li

$$x = \pm e = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$$

do rovnice hyperboly, obdržíme

$$y = \pm \frac{b^2}{a},$$

t. j. $$FR = F'S = +\frac{b^2}{a}, \quad FR' = F'S' = -\frac{b^2}{a};$$

$$RR' = SS' = 2\frac{b^2}{a} = 2p$$

je délka parametru. Jest i při hyperbole parametr třetí měřickou úměrnou mezi délkou poboční a hlavní osy.

Úlohy. α) Hyperbola $2x^2 - 3y^2 = 6$ má osy $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$, délkovou výstřednost $e\sqrt{5}$, rovnice řiditelek jsou

$$x = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Vyšetři polohu bodů (1, 2), (3, 2), (5, 2) vzhledem k této hyperbole. Rovnice asymptot jsou

$$y = \pm x\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

β) Rovnici hyperboly $2x^2 - 3y^2 = 10$ uvedeme na tvar (4), znásobivše ji činitelem $\lambda = \frac{10}{2 \cdot 3} = \frac{5}{3}$. (Srovnej pozn. k čl. 51.) Osy této hyperboly jsou

$$a = \sqrt{\frac{10}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{10}{3}},$$

a výstřednost délková

$$e = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Hyperbola a přímka.

79. Průseky hyperboly přímkou obdržíme, řešíce*) rovnice

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2, \tag{1}$$

$$y = A x + n, \tag{2}$$

jimiž je hyperbola a přímka dána dle x a y. Vyloučíme-li z těchto rovnic y, obdržíme spořádavše výsledek**) dle mocnin x

$$(a^2 A^2 - b^2) x^2 + 2 a^2 n A x = - a^2 (b^2 + n^2). \tag{3}$$

Z rovnice této plynou dvě hodnoty pro úsečku x, totiž

$$x_1 = O M_1, \quad x_2 = O M_2$$

(obr. 53.), odpovídající dvěma průsekům P_1, P_2 přímky s hyperbolou. Hodnoty jejich jsou

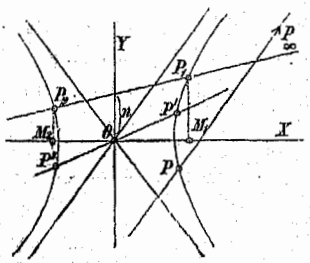
$$x = \frac{- a^2 n A \pm a b \sqrt{n^2 - (a^2 A^2 - b^2)}}{a^2 A^2 - b^2} \tag{4}$$

a příslušné pořadny $M_1 P_1$, $M_2 P_2$ totiž

$$y = \frac{- n b^2 \pm a b A \sqrt{n^2 - (a^2 A^2 - b^2)}}{a^2 A^2 - b^2} \tag{5}$$

obdržíme z rovnic přímky (2). Oba průseky jsou realné, splývají nebo jsou imaginarné dle toho, je-li

$$n^2 \gtreqless a^2 A^2 - b^2.$$



Obraz 53.

Zde se nám vyskytuje ještě jeden případ, jejž třeba blíže uvážiti. Je-li totiž

$$a^2 A^2 - b^2 = 0,$$

tedy

$$A = \pm \frac{b}{a},$$

je přímka (2) rovnoběžna s asymptotou (čl. 75.), protíná hy-

*) Srovnej čl. 59.

**) Výsledek tento plyne ihned z článku 59., kdež třeba pouze $-b^2$ místo b^2 dosaditi, neboť touto substitucí přejde středová rovnice ellipsy ve středovou rovnici hyperboly.

perbolu v jednom pouze bodě v konečnu, druhý průsek je nekonečně vzdálený bod hyperboly, k němuž asymptota rovnoběžná s danou přímkou stále spěje, aniž jej postihne (obr. 53.). Geometrická tato úvaha plyne i z rovnice (3), kteráž v případě tomto přechází ve

$$2nAx = -(b^2 + n^2).$$

Z této rovnice obdržíme úsečku konečného*) průseku

$$x = -\frac{b^2 + n^2}{2nA}, \qquad (6)$$

kdež má A jednu z hodnot $\pm \frac{b}{a}$.

Je-li $n = 0$, probíhá přímka (2) středem hyperboly, a její průseky s hyperbolou jsou realné, je-li

$$b^2 > a^2 A^2,$$

t. j. prochází-li přímka úhlem asymptot, ve kterém leží hlavní osa hyperboly; je-li $b^2 < a^2 A^2$

jsou průseky pomyslné; pro

$$b^2 = a^2 A^2$$

protíná přímka hyperbolu ve dvou**) splývajících bodech v nekonečnu. V případě tomto je přímka tato asymptotou, nebo jdouc středem má směr asymptoty (čl. 75). Můžeme tudíž asymptotu považovati za tečnu hyperboly, jejíž bod dotyku je nekonečně vzdálen.

---

*) Řešíme-li kvadratickou rovnici

$$px^2 + 2qx + r = 0,$$

obdržíme $x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - pr}}{p} = \frac{r}{-q \mp \sqrt{q^2 - pr}}$.

Je-li nyní $p = 0$, je

$$x_1 = \frac{r}{-q - \sqrt{q^2}} = -\frac{r}{2q}, \quad x_2 = \frac{r}{-q + \sqrt{q^2}} = \infty.$$

**) Jelikož $a^2 A^2 = b^2$ je jeden průsek nekonečně vzdálen, a za příčinou $n = 0$, plyne tož z rovnice (6) i pro druhý průsek, a jelikož se zde vyhovuje podmínce $n^2 = a^2 A^2 - b^2$, splývají oba průseky.

Sečna, tečna, normala.

80. Pro směrnici sečny, jakožto spojnici dvou bodů P', P'' hyperboly, obdržíme postupujíce jako při ellipse (čl. 60.)

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')}.$$

Rovnice sečny $\overline{P' P''}$ pak je

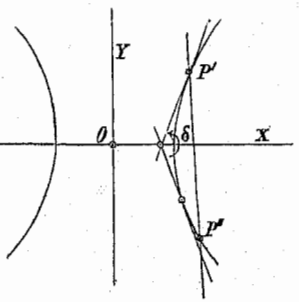
$$y - y' = \frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')} (x - x'). \qquad (1)$$

Přibližuje-li se nyní bod P'' po hyperbole k bodu P', přibližuje se sečna $\overline{P' P''}$ k určité mezní poloze (obr. 54.), k tečně bodu P', s níž se sjednotí, splyne-li bod P'' s bodem P', což vyjádříme píšíce v rovnici (1)

$$x'' = x', \quad y'' = y'.$$

Obdržíme takto

$$y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x') \qquad (2)$$



Obraz 54.

rovnici hyperboly v bodě jejím P', kterou můžeme též psáti ve tvaru

$$\frac{x' x}{a^2} - \frac{y' y}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Úloha. Kterak určiti jest na základě podmínky dotyku přímky s hyperbolou rovnici tečny? (Srovnej poznámku k čl. 60.)

Jelikož je $y' = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x'^2 - a^2}$,

můžeme rovnici tečny bodu $(x' y')$ psáti ve tvaru

$$\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x'}\right)^2} = \frac{a}{x'}, \qquad (4)$$

kdež arci platí buď horní buď dolní znaménko dle toho, je-li y' kladné nebo záporné. Vzdálí-li se bod dotyku do nekonečna, je $x' = \infty$, a rovnice jeho tečny přejde ve

$$\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = 0.$$

Obdrželi jsme zde dvě mezné polohy, jelikož se může bod po větvi hyperboly ve dvojím směru vzdalovati do nekonečna. Tyto mezné polohy tečen s úběžným bodem dotyku jsou asymptoty hyperboly (čl. 75. i 79.).

81. Normala bodu P' je přímka jdoucí tímto bodem kolmo na tečnu; tím je rovnice normaly hyperboly v bodě jejím P'

$$y - y' = -\frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'). \qquad (6)$$

82. Tečna z daného bodu na hyperbolu. Rovnici tečny z bodu daného na hyperbolu určíme zcela obdobně jako při ellipse (čl. 62.). Směrnice její plyne z podmínky dotyku přímky s hyperbolou

$$a^2 A^2 - b^2 = n^2,$$

(čl. 79.), když v ní položíme

$$n = y' - A x'.$$

Jelikož je výsledná rovnice vzhledem k A druhého stupně, obdržíme dvě hodnoty pro A, totiž:

$$A = \frac{-x' y' \pm \sqrt{-(b^2 x' - a^2 y' - a^2 b^2}}{a^2 - x'^2}.$$

Dle toho můžeme z daného bodu $(x'\, y')$ dvě tečny na hyperbolu vésti (obr. 54.), jež jsou realné, splývají, nebo jsou pomyslné dle toho, je-li

$$b^2 x' - a^2 y^2 - a^2 b^2 \gtreqless 0 \quad \text{(čl. 76.)}.$$

Úlohy. α) Najdi úhel tečen z bodu $(x'\, y')$ na hyperbolu sestrojených? Píšeme-li

$$\triangle = \sqrt{-(b^2 x'^2 - a^2 y'^2 - a^2 b^2)}, \quad \text{je} \quad tg\,\delta = \frac{2\triangle}{x'^2 + y'^2 - a^2 + b^2}.$$

Leží-li bod (x', y') na kruhu $x'^2 + y'^2 = a^2 - b^2$, tečny z něho na hyperbolu sestrojené stojí na sobě kolmo. (Srovnej čl. 63.)

β) Najdi body dotyčné tečen z bodu P' na hyperbolu sestrojených? Souřadnice hledaného bodu dotyku (x_1, y_1) vyhovují rovnici hyperboly, mimo to má probíhati tečna bodu (x_1, y_1) bodem P', pročež platí $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, $b^2 x' x_1 - a^2 y' y_1 = a^2 b^2$.

Řešením obou rovnic dle x_1, y_1 určíme souřadnice bodu dotyku obou tečen sestrojených z bodu (x', y') na hyperbolu.

γ) Určiti jsou průseky přímky $x - 3y + 1 = 0$ s hyperbolou $2x^2 - 3y^2 = 6$.

δ) Kterou hodnotu musíme veličině a dáti, by přímka $x - 3y + a = 0$ byla tečnou hyperboly úlohy předešlé?

ε) Pro kterou hodnotu veličiny a je přímka $x + ay + 1 = 0$ tečnou téže hyperboly?

ζ) Dána je hyperbola rovnicí $2x^2 - 3y^2 = 6$, určiti jest

1. rovnice tečny v bodě (3, 2),
2. směrnice tečen sestrojených z bodu (1, 2) na danou hyperbolu, a rovnice spojnice bodů dotyku těchto tečen.

Délka tangenty, subtangenty, normaly, subnormaly.

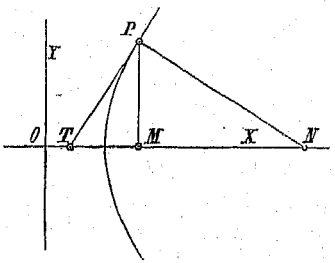
83. Jako ve čl. 65., podává v rovnici tečny bodu $(x' y')$ i zde rozdíl $x - x'$ délku subtangenty MT (obr. 55.), píšeme-li v ní $y = 0$. Obdržíme takto

$$S_t = -\frac{a^2 y'^2}{b^2 x'} = -\frac{x'^2 - a^2}{x'}.$$

Podobně plyne z rovnice normaly pro subnormalu MN

$$S_n = \frac{b^2 x'}{a^2},$$

a délku tečny PT a normaly PN obdržíme nyní pomocí Pythagorovy poučky z trojúhelníků pravoúhlých PMT, PMN.



Obraz 55.

Úhly tečny s provodiči bodu dotyku; sestrojení tečny.

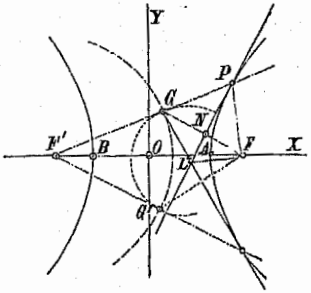
84. Z výměrné vlastnosti hyperboly plyne, že souměrné body jednoho ohniska vzhledem k tečnám hyperboly leží na kruhu, jehož je střed druhé ohnisko a poloměr roven hlavní ose hyperboly $2a$.

Je-li totiž PQ tečna bodu P (obr. 56.), obdržíme souměrný vzhledem k ní bod G, prodloužíme-li kolmici FN

z ohniska na tečnu o její délku. Ze shodnosti trojúhelníků FPN a GPN plyne $FP = GP$. Jest tedy

$$F'P - FP = F'P - GP = 2a,$$

z čehož vysvítá, že souměrný bod leží G na provodiči $F'P$, t. j. $F'G = 2a$, což dokazuje uvedenou vlastnost, že „místo bodů G je kruh, jeho střed F' a poloměr $2a$.“



Obraz 56.

Jelikož bod souměrný leží G na provodiči $F'P$, plyne z předcházejícího

$$\sphericalangle F'PN = \sphericalangle FPN,$$

t. j. tečna bodu P půlí úhel provodičů téhož bodu.

Úloha. Kterak bychom dokázali tuto vlastnost, berouce v počet směrnici tečny bodu P, jakož i směrnice jeho provodičů?

Opírajíce se o tuto vlastnost, sestrojíme tečnu v bodě P hyperboly následovně (obr. 56.): Učiníme $PF = PG$ a kolmice s bodu P na FG je hledaná tečna.

Nyní můžeme též snadně sestrojiti tečnu na hyperbolu z bodu L, neležícího na hyperbole (obr. 56.). Souměrný bod ohniska F vzhledem k hledané tečně leží na kruhu, opsaném z bodu F' poloměrem $2a$, jakož i za příčinou $LF = LG$ na kruhu opsaném z bodu L poloměrem LF. Obdržíme takto dva průseky G, G', tedy dva body souměrné odpovídající dvěma tečnám, které z bodu L na hyperbolu sestrojiti můžeme. Kolmice z bodu L na FG a FG' jsou hledané tečny, a jejich body dotyku jsou průseky prodloužených spojnic $F'G$, $F'G'$ s hyperbolou. Platí tedy totéž sestrojení pro hyperbolu jako pro ellipsu (čl. 66.).

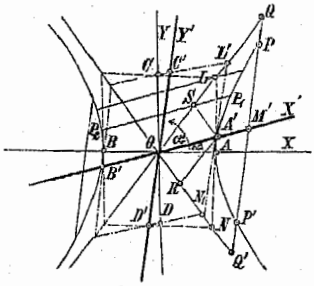
Průměry hyperboly.

85. Jako při ellipse leží středy rovnoběžných tětiv hyperboly na přímce, kterou jmenujeme průměr hyperboly. Budiž $P_1 P_2$ jedna z těch rovnoběžných tětiv daných směrnicí A, a

$$y = A x + n \qquad (1)$$

její rovnice. Dále budiž Q střed tětivy $P_1 P_2$, t. j. střed vzdálenosti průseků přímky (1) s hyperbolou (obr. 57.)

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2. \qquad (2)$$



Obraz 57.

Úsečku jeho obdržíme ihned z rovnice (4) čl. 79.; jest totiž

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2 n A}{a^2 A^2 - b^2} \qquad (3)$$

a příslušná pořadna η plyne z rovnice přímky (1)

$$\eta = -\frac{b^2 n}{a^2 A^2 - b^2}. \qquad (3')$$

Dělením obou rovnic obdržíme vztah mezi souřadnicemi středu rovnoběžných tětiv (srv. čl. 67.), t. j. rovnici průměru hyperboly

$$\eta = \frac{b^2}{a^2 A} \xi, \qquad (4)$$

jenž, jak rovnice svědčí, jde středem hyperboly. Je-li A' směrnice tohoto průměru, platí

$$A A' = \frac{b^2}{a^2}, \qquad (5)$$

t. j. součin směrnic soustavy rovnoběžných tětiv hyperboly a příslušného jim průměru je veličina

$$\text{stálá} = \frac{b^2}{a^2}.$$

86. Z rovnice (5) je patrna vyměnlivosť směrnic A, A', t. j. značí-li jedna z nich směrnici rovnoběžných tětiv, značí druhá směrnici příslušného průměru a naopak. Půlí-li tedy

průměr $y = A' x$ tětivy rovnoběžné s průměrem $y = A x$, platí to i naopak. Takové dva průměry $A' B'$, $C' D'$ jmenujeme sdružené průměry. Osy hyperboly jsou dva na vzájem kolmé sdružené průměry. Hlavní ose přísluší směrnice $= 0$, a sdružený jí průměr, jenž má směrnici $= \infty$, je pobočná osa hyperboly.

Osy hyperboly jest jediné dvé sdružených, k sobě kolmých průměrů, nebo značí-li ω úhel dvou průměrů (srovnej čl. 67.), je

$$tg\,\omega = -\frac{a^2 A^2 - b^2}{e^2 A}.$$

87. Z rovnice (5) vysvítá, že roste-li A od 0 do $\frac{b}{a}$ ubývá A' od ∞ do $\frac{b}{a}$ t. j. otáčí-li se průměr směrem od hlavní osy OX k jedné asymptotě, otáčí se též sdružený průměr počínaje od pobočné osy OY k téže asymptotě, s níž oba průměry sdružené splývají, je-li

$$A = A' = \pm \frac{b}{a},$$

což ostatně i geometricky vychází. Střed tětivy $P_1 K$, rovnoběžné s asymptotou OL, je úběžný bod přímky $P_1 K$, a spojnice jeho se středem — průměr to přidružený k směru tětivy $\overline{P_1 K}$ — splývá s asymptotou OL.

Je-li $A < \frac{b}{a}$, je $A' > \frac{b}{a}$,

t. j. z průměrů sdružených seče jeden hyperbolu, druhý ji mine; jeden je sdružen s tětivami rovnoběžnými, které patří jedné větvi (vnitřní tětivy), druhý je sdružen s tětivami rovnoběžnými, spojující body obou větví (vnější tětivy) hyperboly.

Poznámka. Výsledky, jež jsme pro ellipsu čl. 68. uvedli, přenésti můžeme i na hyperbolu, majíce na mysli, že rovnice ellipsy přechází v rovnici hyperboly substitucí $b\sqrt{-1}$ místo b příslušnými proměnami. Tak platí na př. pro hyperbolu, jsou-li $2a'$, $2b'$ dva sdružené průměry, α, α' jejich směry

$$a b = a' b' \sin(\alpha' - \alpha), \quad a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$$

(theoremy Apolloniovy), z čehož opět sestrojení os ze sdružených průměrů vychází.

Hyperbola vztažená na dva sdružené průměry.

88. Že je rovnice hyperboly vztažené na dva sdružené průměry jako osy souřadnic tvaru

$$m x^2 - n y^2 = p \quad \text{anebo} \quad \left(\frac{x}{a'}\right)^2 - \left(\frac{y}{b'}\right)^2 = 1,$$

stejně bychom jako při ellipse pouhou úvahou nebo transformací souřadnic našli (čl. 69.). V druhém případě obdržíme se zřetelem na relaci (5) čl. 85., kterou též psáti můžeme

$$a^2 \sin\alpha \sin\alpha' - b^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0, \qquad (1)$$

rovnici hyperboly vztažené na dva sdružené průměry

$$(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha)\, x_1^{\,2} - (a^2\sin^2\alpha' - b^2\cos^2\alpha')\, y_1^{\,2} = a^2 b^2. \qquad (2)$$

Jelikož průměr $A'B'$, jejž jsme učinili novou osou úseček, protíná jakožto hlavní průměr hyperbolu, je

$$A = tg\,\alpha < \frac{b}{a},$$

můžeme tedy psáti*) (čl. 87.):

$$\frac{a^2 b^2}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha} = a'^2, \quad \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\alpha' - b^2\cos^2\alpha'} = b'^2, \qquad (3)$$

čím rovnice (2) nabude tvaru

$$\frac{x_1^{\,2}}{a'^2} - \frac{y_1^{\,2}}{b'^2} = 1, \qquad (4)$$

kdež značí $2a'$, $2b'$ délky sdružených průměrů $A'B'$, $C'D'$, nových to os souřadnic.

Tvar rovnice (4) je týž, jako rovnice osové hyperboly, a též rovnice asymptot jsou obdobně (čl. 75., srovnej pozn. k čl. 20.)

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x.$$

Z tohoto výsledku plyne, že úhlopříčky rovnoběžníku sestrojeného nade dvěma sdruženýma průměry hyperboly mají směr i polohu asymptot (obr. 57.).

Poznámka. Na základě předcházejícího, odvodíme z obr. 57. následující vlastnosti hyperboly:

*) Z rovnic (3) a (1) plyne (sr. čl. 87.):
$a\,b = a'\,b'\sin\omega, \quad a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2,$ kdež je $\omega = \alpha' - \alpha.$

α) Jelikož je $N_1 A' = A' L_1 = b'$, plyne, že díl tečny ležící mezi asymptotami je v bodě dotyku A' rozpůlen a délka jeho rovna průměru, jenž je sdružen ku směru spojnice $\overline{OA'}$.

β) Rovnoběžka s tečnou bodu A' protíná hyperbolu v bodech P, P' a asymptoty v bodech Q, Q'. Za příčinou $N_1 A' = A' L_1$ je $Q' M' = M' Q$ a odečteme-li od této rovnice $P' M' = M' P$, obdržíme $Q' P' = P Q$ t. j.: Díly sečny, které leží mezi hyperbolou a asymptotami, jsou sobě rovny.

γ) Plocha trojúhelníku $L_1 O N_1$, který tečna hyperboly bodu A' s asymptotami uzavírá, rovná se ploše obdélníku $O A' L_1 C'$ (obr. 57.), jehož plocha je (dle poučky Apolloniovy) stálá $= a b$, t. j.: tečny hyperboly uzavírají s asymptotami trojúhelníky stálé plochy.

δ) Sestrojme nyní bodem dotyku A' rovnoběžky $A' R$, $A' S$ s asymptotami, rozpůlíme tím úseky tečny bodu A' na asymptotách. Plocha obdélníku $O R A' S$, jejž takto obdržíme, obnáší polovic plochy trojúhelníku $L_1 O N_1$, je tedy taktéž stálá

$$= \frac{a b}{2}.$$

ε) Berouce asymptoty OQ', OQ za osy souřadnic, jsou $OR = x$, $OS = RA' = y$ souřadnice bodu A' vzhledem k této soustavě kosoúhlé. Úhel soustavy je úhel asymptot γ. Plocha obdélníku $O R A' S$ je

$$x y \sin\gamma = \frac{a b}{2},$$

a jelikož je $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{b}{a}$, je $\sin\gamma = \frac{2 a b}{a^2 + b^2}$,

tedy je $$x y = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

což jest rovnice hyperboly vztažené na asymptoty, kterou bychom i transformací souřadnic z rovnice osové snadně odvoditi mohli. Veličinu

$$\frac{a^2 + b^2}{4} = \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

jmenujeme mocnost hyperboly.

Vrcholová rovnice hyperboly.

89. Pošineme-li rovnoběžně osu Y na vrchol A hyperboly, jakožto počátek souřadnic, třeba (čl. 13., I.) $x + a$ psáti místo x v osové rovnici hyperboly, nebo nová úsečka AM zvětšená o a rovná se staré úsečce OM (obr. 58). Bude tudíž

$$b^2 (x + a)^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

rovnice hyperboly v nové soustavě souřadnic, kterou můžeme psáti

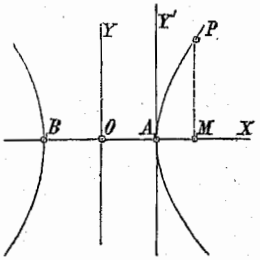
$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = -2 a b^2 x, \quad (1)$$

aneb uvedše délku poloparametru

$$p = \frac{b^2}{a}$$

(čl. 78.) do rovnice, obdržíme

$$y^2 = 2 p x + \frac{p}{a} x^2. \quad (2)$$



Obraz 58.

Tato rovnice hyperboly, kdež je hlavní osa osou úseček a tečna krajního bodu té osy osou pořaden, jmenuje se vrcholová rovnice hyperboly. Jak z rovnice (1) vysvítá, nezměnily se koefficienty u x^2 a y^2 tím, že jsme rovnoběžně pošinuli osy souřadnic na nový počátek.

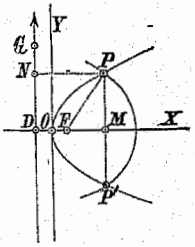
O parabole.

90. Místo všech bodů, které od daného pevného bodu a dané pevné přímky jsou rovně vzdáleny, jmenuje se **parabola.**

Pevný bod F (obr. 59.) jmenuje se ohnisko a pevná přímky DG řiditelka paraboly. Pro bod P paraboly platí*) dle výměrné vlastnosti

$$PF = PN, \quad (1)$$

kdež je PN vzdálenosť bodu P od řiditelky. Z výměrné vlastnosti plyne, že protneme-li přímku rovnoběžnou se řiditelkou po té straně, kde je ohnisko, ve vzdálenosti DM kruhem, jehož střed je F a vzdálenosť DM mu poloměrem, jsou průseky P, P' body paraboly.



Obraz 59.

*) Srv. čl. 55. a 77.; v případě paraboly je číselná výstřednost $\varepsilon = 1$.

Vzdálenosť ohniska od řiditelky značíme písmenem p. Bod O, jenž tuto vzdálenosť půlí, vyhovuje rovnici (1), patří tedy parabole a jmenuje se vrchol paraboly. Spojnice vrcholu s ohniskem je osa paraboly.

Rovnice paraboly.

91. Zvolíme-li osu paraboly za osu úseček a vrchol její za počátek pravoúhlé soustavy souřadnic, jsou souřadnice bodu P paraboly $x = OM$, $y = MP$, tedy je

$$\overline{PF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{FM}^2 = \overline{MP}^2 + [OM - OF]^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

dále je $$NP = OM + DO = x + \frac{p}{2},$$

tím je dle (1) $$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right),$$

kteroužto rovnici po malé redukci psáti můžeme

$$y^2 = 2px. \qquad (2)$$

Rovnici tuto jmenujeme vrcholovou rovnicí paraboly.

Rozbor rovnice paraboly.

92. Z rovnice (2) vychází, že ku každé hodnotě pro x, jež je téhož znaménka, jakého je činitel p, přísluší dvě realné hodnoty pro y stejně veliké, však opačného znaménka, t. j. parabola rozkládá se souměrně po obou stranách osy paraboly od vrcholu jejího počínajíc, jenž, jsa počátkem, má souřadnice (0, 0), do nekonečna, a to v tom směru osy úseček, který udává znaménko činitele p.

Pořadna FP, kolmá v ohnisku F, má délku p, tedy je

$$R'R = 2p.$$

Tětivu $R'R$ jmenujeme parametr paraboly.

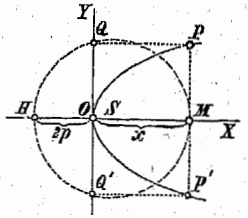
Na základě rovnice (2) paraboly můžeme říci: pořadna libovolného bodu paraboly je střední úměrna mezi úsečkou a parametrem, z čehož plyne opět jiné sestrojení (obr. 60.) paraboly.

Učiníme totiž

$$HO = 2p,$$

i opíšeme z libovolného bodu S na ose úseček kruh poloměrem HS, jenž seče osu X v bodě M a osu Y v bodech Q a Q'; sestrojme rovnoběžky

$$MP = OQ, \quad MP' = OQ'$$



Obraz 60.

a body P, P' jsou body paraboly. Souřadnice bodu P jsou

$$OM = x, \quad MP = y$$

a bod sám leží na parabole, neboť je

$$\overline{OQ}^2 = \overline{MP}^2 = HO \,.\, OM, \quad \text{t. j.} \quad y^2 = 2p \,.\, x,$$

totéž platí i pro druhý průsek Q'.

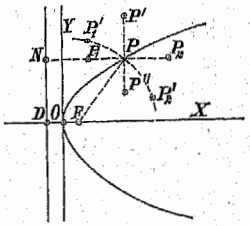
Poloha bodu hledíc k parabole.

93. Leží-li bod P na parabole, vyhovují souřadnice jeho rovnici paraboly, t. j. platí

$$y^2 - 2px = 0.$$

Přejde-li bod P na rovnoběžce s osou Y do polohy P' (obr. 61.) zvětší se jeho y při nezměněné úsečce, jest tedy pro souřadnice bodu P': $y^2 - 2px > 0$; naopak v poloze P'' zmenší se pořadna jeho při téže úsečce, je tedy pro bod P'':

$$y^2 - 2px < 0.$$



Obraz 61.

Jest tedy

$$y^2 - 2px \gtreqless 0$$

dle toho, leží-li bod P mimo parabolu, na parabole, neb uvnitř paraboly.

K témuž výsledku docházíme, předpokládáme-li, že bod P se pohybuje rovnoběžně s osou úseček, kdež opět se mění pouze úsečka toho bodu.

Poznámka. Z výměru (1) paraboly ihned lze poznati polohu bodu hledíc k parabole dané řiditelkou a ohniskem. Mysleme si, že bod P se pohybuje na kruhu, jehož střed je ohnisko F, tu je patrno, že vzdálenosť bodu od ohniska je $\gtreqless$ než vzdálenosť jeho od řiditelky dle toho, leží-li bod mimo parabolu, na parabole neb uvnitř paraboly.

Provodič bodu paraboly a její řiditelka.

94. Dle výměru paraboly rovnají se délky PN a PF, tedy je (čl. 91.), píšeme-li $PF = r$,

$$r = \frac{p}{2} + x \qquad (3)$$

a rovnice příslušné řiditelky DG je za příčinou

$$OD = -OF$$

(obr. 59.)

$$x = -\frac{p}{2}. \qquad (4)$$

Z rovnice (3) opět shledáváme, že vzdálenosť ohniska $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ od kteréhokoli bodu $P(x, y)$ paraboly racionalně*) vyjádřiti můžeme úsečkou tohoto bodu.

Parabola a přímka.

95. Průseky paraboly dané rovnicí

$$y^2 = 2px, \qquad (1)$$

a přímky, jejíž rovnice je $y = Ax + n$, (2)

mají souřadnice vyhovující oběma rovnicím současně; obdržíme je tedy řešíce dané rovnice dle x a y. Vyloučíme-li y, najdeme spořádavše výsledek dle mocnin úsečky x

$$A^2x^2 - 2(p - An)x + n^2 = 0. \qquad (3)$$

*) Vychází to i přímo, neboť je

$$\overline{PF}^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

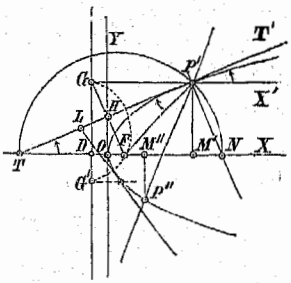
Srovnej čl. 55. i 77.

Kořeny x_1, x_2 této kvadratické rovnice jsou úsečky OM', OM'' (obr. 62.) průseků P' a P'' přímky (2) s parabolou (1). Řešením obdržíme jejich hodnoty

$$x = \frac{p - An \pm \sqrt{p(p - 2An)}}{A^2}, \qquad (4)$$

a příslušné pořadny podává rovnice (2). Řešením (4) plyne, že jsou oba průseky realné nebo jsou pomyslné dle toho, je-li

$$p(p - 2An) \gtrless 0.$$



Obraz 62.

Je-li $p - 2An = 0$, splývají oba průseky, t. j. přímka (2) je t e č n a paraboly.

Tuto podmínku dotyku přímky s parabolou snadno též geometricky vyšetřiti můžeme. Bere-li se p jako kladné*), je $OH = n$, a podmínka dotyku vyjádřuje, že pata H kolmice spuštěné s ohniska na přímku leží na ose Y, je-li tato přímka tečnou paraboly.

V případě $A = 0$ je přímka (2) rovnoběžna s osou úseček a jelikož tu činitel u x^2 v rovnici (3) mizí,**) vyplývá z toho, že je jeden průsek v nekonečné vzdálenosti a úsečka druhého průseku, jenž se nachází v konečnu, je

$$x = \frac{n^2}{2(p - An)}.$$

Úlohy. 1. Sestroj paraboly $y^2 = 4x$, $y^2 = -\frac{1}{4}x$.

2. Vyšetři polohu bodů (1, 1), (2, 1), (3, 1) vzhledem k parabole $y^2 = 2px$.

3. Urči délku tětivy jdoucí ohniskem paraboly $y^2 = 4x$ pod úhlem 45° k ose úseček.

4. Určiti jest směrnice A přímky $y = Ax + 4$ z podmínky, že přímka tato má býti tečna paraboly $y^2 = 4x$.

5. Určiti jest z téže podmínky n v rovnici přímky $y = 2x + n$.

*) Kdyby bylo p záporné, jevila by se parabola v obrazci otočena kolem vrcholu O o 180°. Srovnej čl. 92.

**) Viz poznámku k čl. 79.

Sečna, tečna, normala.

96. Z rovnice spojnice dvou bodů

$$P'(x', y'), \quad P''(x'', y''),$$

totiž $$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

obdržíme rovnici sečny, protínající parabolu v bodech P', P'', vyjádříme-li směrnici $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ spojnice $\overline{P'P''}$ z podmínky, že body P' a P'' leží na parabole. Platí tu $y'^2 = 2px'$, $y''^2 = 2px''$, (1)

a z rozdílu těchto rovnic obdržíme

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{2p}{y' + y''}$$

jako hodnotu směrnice sečny $\overline{P'P''}$ paraboly, a tím je rovnice této sečny

$$y - y' = \frac{2p}{y' + y''}(x - x'). \qquad (2)$$

Splyne-li nyní bod P'' s bodem P', přejde sečna ve tečnu paraboly bodu P' a rovnici její obdržíme, kladouce v rovnici (2) $y'' = y'$, čímž právě analyticky splynutí obou bodů vyjádřujeme. Jest tedy rovnice tečny bodu P' paraboly

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x'), \qquad (3)$$

nebo znásobíme-li jmenovatelem, vzhledem k rovnici (1)

$$y\,y' = p(x + x'). \qquad (4)$$

Poznámka. Na základě čl. 95. můžeme rovnici tečny vyvinouti touž cestou, jako v poznámce k čl. 60. pro ellipsu provedeno. Přímka $y = Ax + n$ probíhá bodem P', je tedy $y' = Ax' + n$, a jsouc tečnou paraboly $y^2 = 2px$, vyhovuje rovnici $p - 2An = 0$. Z těchto dvou podmínečných rovnic lze určiti veličiny A i n, čímž i tečnu. Máme-li určiti tečnu, jejíž směrnice je dána A, je

$$n = \frac{p}{2A} \quad \text{a tím je} \quad y = Ax + \frac{p}{2A}$$

rovnice hledané tečny. Můžeme tedy jedinou tečnu paraboly sestrojiti rovnoběžnou s danou přímkou.

97. Normala bodu P' paraboly je přímka jdoucí tímto bodem kolmo na tečnu téhož bodu. Tím je směrnice normaly

$$-\frac{y'}{p},$$

rovnice její je $$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x'). \qquad (5)$$

98. Sestrojení tečny a normaly paraboly plyne přímo z rovnice tečny (4). Jest totiž $\frac{y'}{2}$ úsek tečny bodu $(x'\,y')$ na ose Y, neboť je (obr. 62.)

$$OH = \frac{p\,x'}{y'} = \frac{y'}{2},$$

a uvážívše, že $$\triangle\, TOH \sim \triangle\, TM'P',$$

obdržíme $$TO = OM'.$$

Prodloužíme-li $M'O$ o vlastní délku, obdržíme bod T a spojnice $\overline{TP'}$ je hledaná tečna paraboly v bodě P'.

II. Dále je

$$TF = TO + OF = x + \frac{p}{2} = PF$$

(čl. 91.), z čehož opět jiné jednoduché sestrojení tečny plyne. Sestrojíme totiž kruh z ohniska F poloměrem $P'F$, jenž protíná osu paraboly ve dvou bodech T, N. Spojnice průseku T mimo parabolu s bodem P' je tečna a spojnice NP' je normala bodu P'.

III. Jelikož je $TH = HP'$, je $FH \perp TP'$, čímž vychází známá již vlastnost (čl. 95.), že „pata kolmice, na tečnu paraboly s ohniska spuštěné, leží na vrcholové tečně paraboly.“

IV. Z trojúhelníku rovnoramenného $P'TF$ plyne, že je

$$\sphericalangle\, P'TF = \sphericalangle\, FP'T,$$

t. j. tečna uzavírá s provodičem svého bodu dotyku a s osou paraboly týž úhel. Jelikož úhel tečny s přímkou jdoucí bodem dotyku rovnoběžně k ose paraboly rovná se úhlu tečny téhož bodu s osou paraboly, vysvítá, že je

$$\sphericalangle\, T'P'X' = \sphericalangle\, TP'F.$$

Úloha. Kterak upotřebiti této vlastnosti, bychom sestrojili tečnu paraboly v daném bodě?

V. Body souměrné k ohnisku paraboly vzhledem k jejím tečnám leží na řiditelce paraboly, nebo je-li G souměrný bod ohniska vzhledem ku tečně bodu P', je

$$FH = HG, \quad \text{tedy je} \quad FO = OD;$$

úsečka bodu G je stálá, rovnajíc se $-\frac{p}{2}$ (čl. 94.).

99. Tečna sestrojená z daného bodu na parabolu. Rovnice přímky jdoucí bodem $L\,(x_1, y_1)$ je

$$y - y_1 = A\,(x - x_1) \quad \text{aneb} \quad y = A\,x + (y_1 - A\,x_1). \qquad (6)$$

Určíme-li směrnici její z podmínky dotyku (čl. 95.), bude tato přímka tečnou paraboly. Píšeme-li v tu podmínku

$$n = y_1 - A\,x_1, \qquad \text{je}$$

$$p - 2\,A\,(y_1 - A\,x_1) = 0 \quad \text{aneb} \quad 2\,x_1 A^2 - 2\,y_1 A + p = 0.$$

Z této kvadratické rovnice obdržíme dvě hodnoty pro A, totiž

$$A = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2\,p\,x_1}}{2\,x}. \qquad (7)$$

Můžeme tedy z bodu (x_1, y_1) dvě tečny na parabolu sestrojiti, jež jsou realné neb pomyslné dle toho, je-li

$$y_1^2 - 2\,p\,x_1 \gtrless 0,$$

t. j. leží-li bod $L\,(x_1, y_1)$ mimo neb uvnitř paraboly (čl. 93.). Leží-li bod L na parabole, je $y_1^2 - 2\,p\,x_1 = 0$, obě tečny splývají v jednu, t. j. bodem paraboly můžeme pouze jedinou tečnu vésti. Píšíce

$$A = \frac{y_1}{2\,x_1}$$

v rovnici 6., v případě tomto obdržíme opět rovnici tečny (4).

Co se tkne sestrojení tečen z bodu L na parabolu, (obr. 62.), určíme nejdříve souměrné body G, G' ohniska vzhledem k těmto tečnám jako průseky řiditelky (čl. 98, V.) s kruhem opsaným z bodu L poloměrem LF (neb $LF = LG$). Kolmice s bodu L na $\overline{FG}$ a $\overline{FG'}$ spuštěné, jsou hledané tečny. Rovnoběžky vedené body G a G' ku ose paraboly určují body dotyku těch tečen.

100. Úhel δ tečen sestrojených z bodu L na parabolu obdržíme, píšíce

$$\triangle = \sqrt{y_1^2 - 2 p x_1}$$

z rovnice (7): $$tg\,\delta = -\frac{2\triangle}{2x_1 + p}.$$

Leží-li bod na řiditelce, je $2x_1 + p = o$, tedy $\delta = 90^0$, t. j. místo bodů, z nichž tečny sestrojené na parabolu stojí na sobě kolmo, je řiditelka paraboly.

Úlohy. 1. Najdi směrnici spojnice bodů (1, 2), (4, 4) paraboly $y^2 = 4x$; která je vzdálenosť té sečny od ohniska paraboly?

2. Určiti jest rovnice tečen zmíněných bodů paraboly úlohy 1., jakož i úhel těchto tečen.

3. Najdi rovnice normal týchž bodů a souřadnice jejich průseků.

4. Najdi rovnice tečen sestrojených z bodu (— 1, 3) na parabolu $y^2 = 4x$. Najdi souřadnice bodů dotyku těchto tečen, jakož i úhel, jejž uzavírají.

Délka tangenty, subtangenty, normaly, subnormaly.

101. Rozdíl $(x - x')$ v rovnici tečny (3) bodu $P'(x'\,y')$ paraboly podává délku subtangenty $M'T$ (obr. 62.), píšeme-li v ní $y = o$ (srv. čl. 65. i 83.). Určíme takto

$$S_t = M'T = -\frac{y'^2}{p} = -2x'.$$

Podobně obdržíme z rovnice normaly (5) délku subnormaly $M'N$, totiž $$S_n = p.$$

Rovná se tedy délka subtangenty bodu paraboly dvojnásobné úsečce téhož bodu a subnormala pro všechny body paraboly je stálé délky rovnající se poloparametru paraboly. Výsledek tento plyne již z článku 98., neboť jest

$$S_t = M'T = 2M'O = -2x'$$

a $$S_n = M'N = TN - TM' = 2(TF - TO) = 2 \cdot OF = p.$$

Délky tečny $P'T$ a normaly $P'N$ obdržíme nyní Pythagorovou poučkou z pravoúhlých trojúhelníků

$$P'MT \quad \text{a} \quad P'MN.$$

Úloha. Kterak sestrojíme tečnu v bodě paraboly na základě vlastnosti subtangenty nebo subnormaly paraboly?

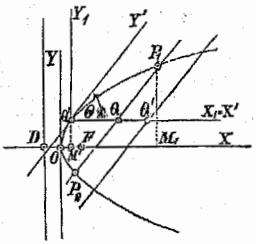
Průměry paraboly.

102. Středy rovnoběžných tětiv paraboly leží na přímce, kterou jmenujeme průměr paraboly. Budiž $\overline{P_1 P_2}$ (obr. 63.) jedna z tětiv rovnoběžných, daných směrnicí A a

$$y = A x + n \qquad (1)$$

její rovnice. Bod Q budiž střed tětivy $\overline{P_1 P_2}$, t. j. střed vzdáleností průseků přímky (1) s parabolou

$$y^2 = 2 p x. \qquad (2)$$



Obraz 63.

Úsečku jeho obdržíme (srovn. čl. 67.) z rovnice 3. článku 95.; jest totiž

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p - A n}{A^2} \qquad (3)$$

a příslušná pořadna η vychází z rovnice (1), jest

$$\eta = \frac{p}{A}. \qquad (3^1)$$

Jelikož pořadna středu tětivy nevisí na veličině n, přísluší středům všech rovnoběžných tětiv táž pořadna, t. j. středy rovnoběžných tětiv leží na přímce, (vyjádřené rovnicí [3′]) rovnoběžné s osou paraboly. Přímka tato je průměrem paraboly, jenž je přidružen ku rovnoběžným tětivám daným směrnicí A.

Z rovnice (3¹) plyne, že každý průměr paraboly je rovnoběžný s osou paraboly. Dále plyne z té rovnice $A = \frac{p}{\eta}$. Jest však (čl. 96.) $\frac{p}{\eta}$ směrnice tečny onoho bodu paraboly, jehož je pořadna η, a to je průsek O' průměru s parabolou; tedy je tečna krajného bodu průměru paraboly rovnoběžna s tětivami onomu průměru přidruženými.

Jelikož jsou průměry paraboly rovnoběžné s osou, je

$$tg\,(P_1\,Q\,Q') = A = \frac{p}{\eta},$$

a tím je $A = \infty$ pro $\eta = o$, t. j. osa paraboly je jediný průměr, jenž kolmo půlí sobě přidružené tětivy.

Uvedených vlastností průměru paraboly upotřebiti můžeme příhodně ku konstruktivnému řešení různých úloh. Na př.: Má se sestrojiti tečna paraboly rovnoběžná s danou přímkou. Spojnice středů dvou tětiv rovnoběžných k dané přímce seče parabolu v bodě dotyku hledané tečny. (Ostatně plyne též sestrojení této tečny jako zvláštní případ čl. 99., kdy je bod L úběžný, dán směrem přímky. Rovnici té tečny viz v poznámce k čl. 96.)

103. Zvolme nyní průměr $O'X'$ paraboly za osu úseček a tečnu $O'Y'$ krajního jeho bodu O' jako osu pořaden nové soustavy souřadnic, kteráž je patrně kosoúhlá, neb jsou-li (a, b) souřadnice nového počátku O', je (čl. 102.)

$$tg\, X'\, O'\, Y' = \frac{p}{b}.$$

Transformaci souřadnic na nové osy vykonáme tím, že nejprve rovnoběžně pošineme osy souřadnic na nový počátek O', načež otočíme osu pořaden, aby splynula s tečnou paraboly bodu O'. Pošinutí os do počátku O' vykonáme (čl. 13., rov. 1.) píšíce $x = a + x_1, \quad y = b + y_1.$

Uvážívše, že bod O' je bodem paraboly, tedy že platí

$$b^2 = 2\,p\,a,$$

obdržíme $$y_1^2 + 2\,b\,y_1 = 2\,p\,x_1. \qquad (4)$$

Na kosoúhlou soustavu $X'\,O'\,Y'$ přejdeme nyní otáčkou osy y_1, což analyticky vykonáme pomocí vzorců (4) článku 13., v nichž třeba pouze $\alpha = 0$ psáti, neboť se zde osa úseček nemění. Budou tedy

$$\begin{aligned} x_1 &= x' + y'\cos\Theta, \\ y_1 &= y'\sin\Theta, \end{aligned} \qquad (5)$$

zmíněné transformační vzorce,*) v nichž značí

$$\Theta = \sphericalangle\, X'\, O\, Y'.$$

*) V obrazci našem splývá X_1 s osou X'. Souřadnice téhož bodu avšak vztaženého na dvě rozličné soustavy lišíme čárkou při přechodu. Po vykonané transformaci netřeba bráti zřetele již na dří-

Uvedše hodnoty tyto do rovnice (4), obdržíme vzhledem k tomu, že je

$$b \sin \Theta = p \cos \Theta, \qquad (6)$$

$$y^2 \sin^2 \Theta = 2 p x, \qquad (7)$$

hledanou rovnici paraboly v nové kosoúhlé soustavě, jež nabude tvaru rovnice vrcholové

$$y^2 = 2 p_1 x,$$

píšeme-li

$$p_1 = \frac{p}{\sin^2 \Theta}. \qquad (8)$$

Co se tkne geometrického významu veličiny p_1, plyne z rovnice (6)

$$\sin^2 \Theta = \frac{p^2}{b^2 + p^2}.$$

Dosadíme-li hodnotu tuto do rovnice (8), obdržíme vzhledem k tomu, že je

$$b^2 = 2 a p,$$

$$p_1 = 2 \left(a + \frac{p}{2} \right).$$

Dle čl. 91. je

$$D M' = a + \frac{p}{2} = F O',$$

tedy je

$$p_1 = 2 F O'.$$

Veličina $2 p_1$ jmenuje se parametr průměru paraboly, jejž jsme učinili osou úseček. I shledáváme, že parametr průměru paraboly se rovná čtyřnásobné vzdálenosti ohniska od krajního bodu toho průměru.

Plocha paraboly.

104. Jsou-li P', P'' dva velmi blízké body paraboly (obr. 64.), tak že oblouček její $P P'$ téměř s tětivou $\overline{P P'}$ splývá, neliší se skoro proužek plochy paraboly omezený pořadnami bodů P' a P'', osou úseček a obloučkem $P' P''$ od plochy lichoběžníku $M' M'' P'' P' = T$.

Totéž platí i hledíc k lichoběžníku

$$N' P' P'' N'' = t.$$

---

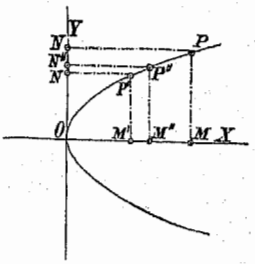
vější osy souřadnicové a můžeme opět za souřadnice libovolného bodu paraboly psáti x, y místo x', y'.

Jest-li však

$$T = \tfrac{1}{2}(x'' - x')(y' + y''),$$
$$t = \tfrac{1}{2}(y'' - y')(x' + x''),$$

tedy je

$$\frac{t}{T} = \frac{x' + x''}{y' + y''} \cdot \frac{y'' - y'}{x'' - x'}. \quad (1)$$



Obraz 64.

Při parabole je (čl. 96.)

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2p}{y' + y''},$$

pročež můžeme rovnici (1) psáti

$$\frac{t}{T} = \frac{2p(x' + x'')}{(y' + y'')^2}. \quad (2)$$

Jelikož dle toho, co jsme za nesmírně malý oblouček $P'P''$ uvedli, střed toho obloučku též jako střed jeho tětivy bráti můžeme, je pak, jsou-li ξ, η souřadnice toho středu,

$$2\xi = x' + x'', \quad 2\eta = y' + y'',$$
$$\frac{t}{T} = \frac{p\xi}{\eta^2}. \quad (3)$$

Avšak střed obloučku přísluší parabole, protož je

$$\eta^2 = 2p\xi,$$

tím přechází rovnice (3) ve $T = 2t$. (4)

Rozdělíme-li nyní plochy OPM a OPN na samé podobné lichoběžníky T a t, obdržíme sečtením těch lichoběžníků

$$OPM = 2\,OPN. \quad (5)$$

Jest však $OMPN = OPM + OPN = xy$,

pročež je vzhledem k předcházející rovnici

$$3\,OPN = xy \quad \text{aneb} \quad OPN = \tfrac{1}{3}xy,$$

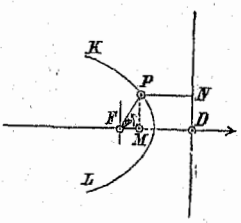
tím je: $OPM = \tfrac{2}{3}xy$. (6)

Rovnice kuželoseček v souřadnicích polarných.

105. Kruh, ellipsu, hyperbolu a parabolu jmenujeme dohromady kuželosečky, kteréž pojmenování později bude odůvodněno.

Budiž KL část kuželosečky. Ohnisko její F (obr. 65.) zvolme za pol polarných souřadnic a kolmici spuštěnou na řiditelku příslušnou tomu ohnisku zvolme za polarnou osu. Souřadnice polarné bodu P kuželosečky jsou

$$FP = r, \quad \sphericalangle DFP = \varphi.$$



Obraz 65.

Seznali jsme (55, 77, 90), že je

$$\frac{PF}{PN} = \varepsilon, \qquad (1)$$

kdež je $\varepsilon = \frac{e}{a}$. Jest však *)

$$PN = FD - FM \quad \text{a} \quad FD = \frac{b^2}{e} = \frac{p}{\varepsilon},$$

dále platí $FM = r \cos \varphi$,

tedy je: $PN = \frac{p}{\varepsilon} - r \cos \varphi$,

což dosazeno do rovnice (1), dává

$$r = \varepsilon \left(\frac{p}{\varepsilon} - r \cos \varphi \right),$$

z čehož plyne $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \qquad (2)$$

jakožto rovnice kuželosečky v souřadnicích polarných. Je-li $\varepsilon < 1$, značí rovnice (2) ellipsu, pro $\varepsilon > 1$ hyperbolu a pro $\varepsilon = 1$ vyjádřuje tato rovnice parabolu a je-li $\varepsilon = 0$, kruh.

*) Značí-li O střed kuželosečky, je pro ellipsu (obr. 39.)

$$FD = OD - OF = \frac{a^2}{e} - e = \frac{p}{\varepsilon}.$$

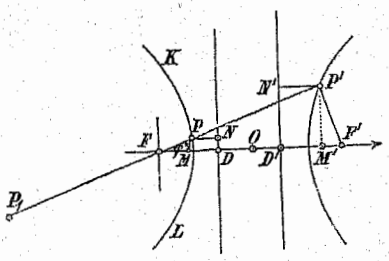
Totéž platí pro hyperbolu (obr. 66.). Jest tu

$$PN = FD - FM$$

a $$FD = \frac{b^2}{e} = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Pro parabolu je (čl. 90.)

$$\varepsilon = 1 \quad \text{a} \quad FD = p.$$



Obraz 66.

Obr. 59. myslíme si zde totiž pootočený okolo vrcholu o 180°.

Z rovnice (2) vychází, že jeden druh kuželosečky ve druhý přechází proměnou výstřednosti a že je parabola na rozhraní ellips a hyperbol. Tato vzájemnost ellipsy, hyperboly, paraboly a kruhu vyjádřená společnou rovnicí (2) dochází svého výrazu i ve společném pojmenování kuželoseček, jímž současně i společný geometrický původ jejich, jak dole bude dokázáno, vyznačujeme.

Poznámka. Rovnice (2) značí při $\varepsilon > 1$ jednu větev hyperboly, totiž větev KL (obr. 66.). Kdyby bod P' ležel na druhé větvi, plyne z výměru hyperboly $F'P' = r - 2a$; dále za příčinou

$$FD = \frac{b^2}{e}, \quad \text{a} \quad DO = \frac{a^2}{e}$$

je $$N'P' = r\cos\varphi - \frac{2a^2 + b^2}{e},$$

což vloženo do rovnice (1), totiž $\frac{F'P'}{N'P'} = \varepsilon$, dává:

$$r = \frac{-p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad (3)$$

Polarnému úhlu φ přísluší dle rovnice (2) bod P hyperboly a z rovnice (3) bod P'. Avšak, píšeme-li $180 + \varphi$ místo φ do rovnice (2), obdržíme záporně provodič FP_1, jejž máme ve smyslu opačném odměřiti. Avšak z rovnice (3) vysvítá, že tím obdržíme bod P', z čehož patrno, že rovnice (2) obě větve vyjádřuje pro kladné hodnoty provodiče body větve KL, pro záporné hodnoty provodiče (jež tu v opačném smyslu odměřujeme) body druhé větve hyperboly.

O vzájemném vztahu kuželoseček.

106. Vrcholová rovnice

$$\begin{aligned} &\text{ellipsy} && \text{je} && y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2, \\ &\text{paraboly} && \text{„} && y^2 = 2px, \\ &\text{hyperboly} && \text{„} && y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Vrcholová rovnice kuželosečky vůbec je tedy:

$$y^2 = mx + nx^2 \qquad (2)$$

a dle toho, je-li $n \gtreqless 0$, značí potahmo ellipsu, parabolu nebo

hyperbolu. Ellipsa příslušná hodnotě $n = -1$, má stejné osy, jest kruh, jehož je průměr m.

Tak jest na příklad $y^2 = 4x - \frac{x^2}{4}$ rovnice ellipsy, osy její jsou $a = 8$, $b = 4$, výstřednost délková $e = 4\sqrt{3}$, a parametr $p = 2$.

Že je parabola mezný případ jak ellipsy tak i hyperboly, vychází již z rovnic (1). V následujícím blíže vyšetříme poměr tento paraboly ku ellipse nebo hyperbole. Budiž d vzdálenost ohniska F' ellipsy od přilehlého vrcholu O, tu je

$$a = d + e,$$

následkem čehož je

$$b^2 = a^2 - e^2 = d(2a + d),$$

a tím

$$p = d\left(2 + \frac{d}{a}\right).$$

Roste-li nyní velká osa, aniž se tím d mění, obdržíme

$$p = 2d \quad \text{pro} \quad y = \infty.$$

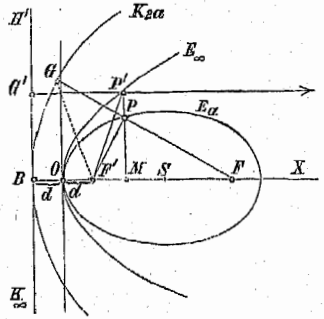
Rovnice vrcholová ellipsy

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

přechází v případě tomto v rovnici paraboly

$$y^2 = 4dx.$$

Můžeme tedy považovati parabolu jako ellipsu s nesmírně velkou hlavní osou. Stejnou úvahou plyne totéž i z rovnice hyperboly.



Obraz 67.

107. Uvedený přechod též geometricky vychází. Výměrná vlastnost ellipsy

$$F'P + PF = 2a = GF$$

(obr. 67.), kterou můžeme též psáti

$$F'P = GF - PF = GP,$$

přechází pro $a = \infty$ ve výměrnou vlastnost paraboly, neb část kruhu K_{2a} v konečnu přechází ve přímku BH' kolmou na

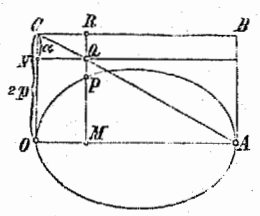
hlavní osu a přímka GP ve kolmici $G'P'$ na BH'. Předpokládáme opět jako v předcházejícím článku, že vrchol O, i ohnisko F', tím i průsek B kruhu K_{2a} s osou X polohu svou nemění, roste-li velká osa ellipsy a.

Historická poznámka. Prvý, jenž se bavil kuželosečkami a jich při řešení úloh upotřebil, byl Menaechmus. Přímý kužel kruhový protal rovinou kolmo na stranu kužele. Tím způsobem obdržel tři druhy kuželoseček (triady Menaechmovy) dle toho, byl-li kužel ostrý, pravoúhlý nebo tupý. Aristaeus (žil as 350 př. Kr.) pojmenoval tyto tři druhy kuželoseček dle jejich vzniku řez ostroúhlého kužele (ellipsa), řez pravoúhlého kužele (parabola), řez tupoúhlého kužele (hyperbola). Teprvé veleduch Apollonius z Pergy (žil as 240 př. Kr.), kterého staří všim právem poctili jménem velkého geometra, dokázal, že můžeme kterýkoli druh kuželosečky na jednom kuželi, nechť již je přímý nebo kosý, obdržeti. Od něho pocházejí jména ellipsa, hyperbola, parabola; vztahují se na vlastnost kuželoseček, již vyjádřuje vrcholová rovnice, kterou Apollonius srovnalostmi nahražuje. Původ jmen samých leží ve třech větách, které Euklid ve svých základech uvádí. Při parabole rovná se obdélník $2px$ z parametru a úsečky, čtverci nad pořadnou t. j. y^2. Postaviti nad základnou $2p$ obdélník, jehož plocha by se cele rovnala dané ploše, zove Euklid παραβάλλειν; odtud jméno parabola. Při ellipse je

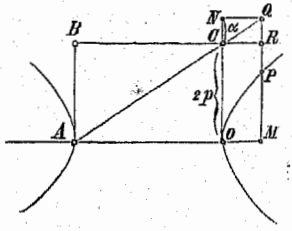
$$y^2 = (2p - \alpha)x,$$

t. j. sestrojíme-li nad úsečkou OM bodu P obdélník $OMQN$, jehož plocha by se rovnala čtverci pořadny téhož bodu, vybývá — ἐλλεῖπειν — z parametru $2p$ na výšku ON částka $\alpha = CN$ té vlastnosti, že obdélník $\alpha . x$, jenž předcházející obdélník na $2px$ doplňuje je podobným obdélníku z velké osy a parametru, t. j.

$$\alpha : x = 2p : 2a \qquad \text{(obr. 68.).}$$



Obraz 68.



Obraz 69.

Při hyperbole $y^2 = (2p + \alpha)x$ přesahuje — ὑπερβάλλειν — výška obdélníku $OMQN$ nad úsečkou OM bodu P sestrojeného

(obr. 69.), jehož plocha by se rovnala čtverci pořadny téhož bodu, délku parametru o částku $\alpha = CN$ té vlastnosti, že obdélník αx, o který předcházející obdélník přesahuje obdélník $2px$, je podobný obdélníku z velké osy a parametru, je totiž

$$\alpha : x = 2p : 2a.$$

Příslušné věty, k nimž tato vlastnost ellipsy a hyperboly se táhne, nalezáme arci v Euklidových základech, avšak vzdálili bychom se pravdy, chtějíce připisovati Euklidovi známost kuželoseček jako geometrických míst v rovině.

Dodatek ku geometrii kuželoseček.

108. Ellipsa, hyperbola a parabola jsou křivky stupně druhého, t. j. analyticky vyjádřujeme je rovnicemi stupně druhého v souřadnicích proměnlivého bodu. Křivky tyto pojmenovali jsme souhrně kuželosečky. Dokážeme nyní, že

I. každá kuželosečka t. j. průsek roviny s kuželem (kruhovým), je buď ellipsa buď hyperbola buď parabola, a že

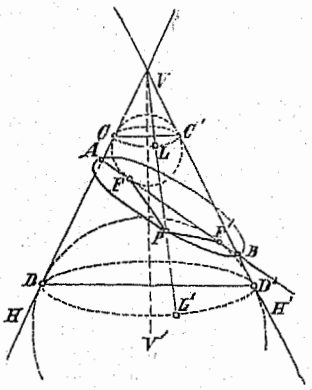
II. každá křivka vyjádřená rovnicí stupně druhého v souřadnicích x a y je kuželosečka.

109. Každá kuželosečka je buď ellipsa buď hyperbola buď parabola.

Rovinu kuželosečky jmenujeme rovinu sečnou. Na tuto rovinu sestrojme rovinu kolmou, jdoucí osou kuželu VV' (obr. 70.), kteráž protíná rovinu sečnou v přímce AB a kužel ve obou stranách (povrchových přímkách) VA, VB. Zde třeba rozeznávati tré případů, buď seče rovina sečná α) jeden plášť buď β) oba pláště kužele, jehož strany si myslíme neomezené, buď γ) rovina sečná je ku jedné straně kužele rovnoběžna.

K vůli jednoduchosti dokážeme vše na kuželi přímém.

α) V prvém případě (obr. 70.) sestrojme dvě koule, které se dotýkají roviny sečné v bodech F a F', a kužele v kruzích CLC', $DL'D'$, jejichž roviny



Obraz 70.

jsou kolmy na osu kužele, tedy na vzájem rovnoběžny. Budiž P libovolný bod kuželosečky; strana kužele $\overline{VP}$ dotýká se obou koulí v bodech L a L'. Spojnice bodu P s body dotyku F a F', koulí s rovinou sečnou jsou tečny ku koulím. Jest hledíc k horní kouli

$$FP = LP$$

a hledíc ku dolní kouli je $F'P = L'P$.

Sečtením obou rovnic obdržíme

$$FP + F'P = LP + L'P. \qquad (1)$$

A jelikož součet délek LP a $L'P$ rovná se délce LL', kteráž nezávisle na poloze bodu P na kuželosečce je stálá, rovnajíc se $\overline{CD}$, je součet vzdáleností bodu kuželosečky od dvou pevných bodů stálý, t. j. kuželosečka je v případě tomto ellipsa, jíž příslušejí body F a F' jako ohniska a jejíž velká osa je $AB\ (= CD)$.

Rovina sečná může býti v případě tomto i kolma na osu kužele, avšak tu splývají ohniska ellipsy F, F' v bod jediný, jenž je středem kruhu, ve který ellipsa v případě tomto přechází.

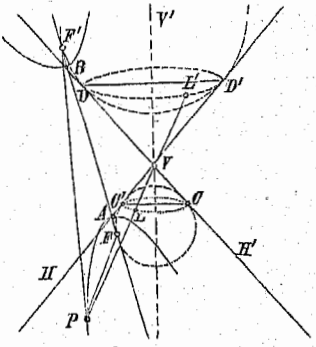
β) V druhém případě (obr. 71.), seče rovina sečná oba pláště kužele. Sestrojíme-li podobně dvě koule dotýkající se roviny sečné i kužele, obdržíme

$$FP = LP, \quad F'P = L'P,$$

pročež je

$$F'P - FP = L'P - LP.$$

Rozdíl délek $L'P$ a LP rovná se délce LL', kteráž je nezávisla na poloze bodu P na kuželosečce. Rozdíl vzdáleností bodu kuželosečky od dvou pevných bodů měří stálou délku, t. j. kuželosečka je v případě tomto hyperbola.

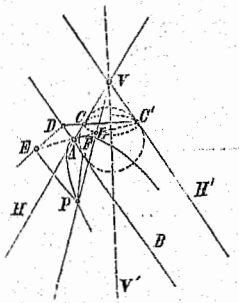


Obraz 71.

γ) V třetím případě konečně je rovina sečná rovnoběžna s jednou stranou kužele, na př. VC' (obr. 72.). Opišme tu opět kouli, kteráž se dotýká roviny sečné v bodě F a kužele v kruhu CLC'. Rovina tohoto kruhu seče rovinu sečnou ve přímce DE. Z bodu kuželosečky P spusťme na přímku DE kolmici PE. Strana kužele VP probíhající bodem P seče rovinu dotyčného kruhu v bodě L, tedy je

$$PF = PL. \qquad (1)$$

Jelikož je $EP \parallel AB \parallel VC'$, leží přímky EP, VC' a VP v téže rovině a body C',



Obraz 72.

L, E v téže přímce, průseku to roviny dotyčného kruhu s předcházející rovinou. Avšak trojúhelníky PLE a VLC' jsou podobny, a

$$VL = VC', \text{ pročež je též } PL = PE$$

a za příčinou rovnice (1) je: $PF = PE$

t. j. vzdálenosti bodů kuželosečky od pevného bodu F a pevné přímky DE se rovnají, t. j. kuželosečka je v případě tomto parabola, jíž přísluší bod F jako ohnisko a přímka DE jako řiditelka.

Dokázali jsme, že každému průseku roviny s kuželem, t. j. každé kuželosečce jedna z vlastností přísluší, jimiž jsme ellipsu, hyperbolu a parabolu vyměřili, t. j. každá kuželosečka je buď ellipsa buď hyperbola buď parabola.

Parabola leží opět na rozhraní ellips a hyperbol, jež obdržíme, otáčí-li se rovina sečná kolem přímky stojící kolmo na straně kužele.

110. Každá křivka druhého stupně je kuželosečka.

Obecná rovnice křivky druhého stupně*) je

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 + 2 d x + 2 e y + f = 0, \qquad (1)$$

kdež mohou býti veličiny, $a, b, \ldots f$ kladné, záporné aneb i rovné nulle; avšak současně nesmí se veličiny a, b, c rovnati nulle, neboť by pak rovnice (1) přestala býti stupně druhého. Činitel 2 jest k několika členům připojen, bychom se vyhnuli zlomkům.

Víme, že se transformací mění tvar rovnice křivky, aniž by se tím stupeň její změnil (čl. 17.). Určíme tedy polohu nových os souřadnic, by rovnice křivky vztažená na tyto osy byla co možná nejjednodušší.

I. Rovnoběžné pošinutí os na nový počátek (ξ, η) vystihneme analyticky dosadivše $x + \xi$ místo x a $y + \eta$ místo y do rovnice křivky (čl. 13. I.), čímž obdržíme

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 + 2 d' x + 2 e' y + f' = 0, \qquad (2)$$

kdež značí:

$$\begin{aligned} d' &= a \xi + b \eta + d, \\ e' &= b \xi + c \eta + e, \end{aligned} \qquad (3)$$

$$f' = a \xi^2 + 2 b \xi \eta + c \eta^2 + 2 d \xi + 2 e \eta + f = (d + d') \xi + (e + e') \eta + f. \qquad (4)$$

Rovnoběžným pošinutím os nemění se činitelé členů stupně druhého, a co se tkne činitelů prvého stupně můžeme nový počátek (ξ, η) tak určiti, by bylo

$$d' = e' = 0.$$

---

*) Třeba uvážiti, že značí x a y čísla, jimiž délky souřadnic těchto vzhledem k určité jednotce délky z vyjádřujeme. Ježto i stálé veličiny a, b, $c \ldots f$ jsou čísla, vychází tím stejnorodost rovnice (1). Chtějíce uvésti délky souřadnic do rovnice, nahradíme v ní x a y poměry $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$.

V případě tomto je

$$\xi = \frac{b\,e - c\,d}{a\,c - b^2}, \quad \eta = \frac{d\,b - a\,e}{a\,c - b^2} \tag{5}$$

$$f' = d\,\xi + e\,\eta + f = \frac{d\,(b\,e - c\,d) + e\,(d\,b - a\,e) + f\,(a\,c - b^2)}{a\,c - b^2} \tag{6}$$

a rovnice (2) nabude tvaru*)

$$a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2 + f' = 0. \tag{7}$$

Transformace tato vyžaduje, by bylo $a\,c - b^2 \gtrless 0$.

Z rovnice (7) vychází, že každému bodu křivky (x, y) přísluší souměrný mu bod vzhledem k počátku souřadnic, nebo souřadnice jeho $(-x, -y)$ vyhovují rovnici křivky. Nový počátek je tedy střed křivky. Kdyby bylo $a\,c - b^2 = 0$, byl by střed křivky nekonečně vzdálen (rov. 5.), pročež transformace na střed nemožna.

Otočme nyní soustavu souřadnic o úhel α, což analyticky vystihneme tím, že píšeme v rovnici křivky (7)

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha \quad \text{místo } x,$$
$$x\sin\alpha + y\cos\alpha \quad \text{místo } y$$

(čl. 13., rov. 3.).

Spořádavše výsledek, obdržíme

$$a'\,x^2 + 2\,b'\,x\,y + c'\,y^2 + f' = 0, \tag{8}$$

kdež značí

$$a' = a\cos^2\alpha + 2\,b\cos\alpha\sin\alpha + c\sin^2\alpha,$$
$$c' = a\sin^2\alpha - 2\,b\cos\alpha\sin\alpha + c\cos^2\alpha, \tag{9}$$
$$2\,b' = 2\,b\cos 2\alpha - (a - c)\sin 2\alpha.$$

Určíme-li nyní úhel**) α z podmínky, by bylo $b' = 0$, tedy

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,b}{a - c}, \tag{10}$$

nabude rovnice (8) křivky v této nové soustavě tvaru

$$a'\,x^2 + c'\,y^2 + f' = 0. \tag{11}$$

Z rovnice (11) vychází, že je křivka k novým osám souřadnic souměrna, t. j. osy souřadnic jsou osy křivky.

---

*) Budiž tu podotknuto, že je $f' = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$.

**) Je-li $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ nejmenší úhel, jenž vyhovuje rovnici (10), vyhovuje též úhel $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$. Oba tyto úhly určují směry os křivky. Zvolíme-li jednu osu za osu X, je druhá osou Y nebo naopak. Otočíme-li osy souřadnic o $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ místo α_0, vymění se tím pouze úsečka x pořadnou y v rovnici (11).

Při otáčce o libovolný úhel α, obdržíme sečtením a odečtením prvých dvou z rovnic (9)

$$a' + c' = a + c,$$
$$a' - c' = 2\,b \sin 2\alpha + (a - c)\cos 2\alpha, \qquad (12)$$

a

$$2\,b' = 2\,b \cos 2\alpha - (a - c)\sin 2\alpha$$

je třetí z rovnic (9). Odečteme-li nyní od čtverce prvé z rovnic (12) součet čtverců obou ostatních, obdržíme*)

$$a'\,c' - b'^2 = a\,c - b^2.$$

Při otáčce os souřadnic na osy křivky je $b' = o$, protož platí:

$$a' + c' = a + c, \quad a'\,c' = a\,c - b^2,$$

t. j. součinitelé a', c' rovnice (11) obdržíme jako kořeny kvadratické rovnice

$$\lambda^2 - (a + c)\,\lambda + (a\,c - b^2) = 0. \qquad (14)$$

Můžeme nyní říci: Je-li $a\,c - b^2 > 0$, t. j. jsou-li kořeny rovnice (14), tedy a' i c' téhož znaménka, je křivka ellipsa, a to realná neb imaginarná dle toho, jsou-li podíly $f' : a'$, $f' : c'$ záporny nebo kladny. Rovnají-li se kořeny, máme kruh. Je-li $f' = 0$, má rovnice (11) jediné realné řešení $x = 0$, $y = 0$, v kterémžto případě pravíme, že se ellipsa stáhla na svůj střed.

Je-li $a\,c - b^2 < 0$, znaménka kořenů z rovnice (14), tedy i veličin a' i c' nesouhlasí, pak vyjádřuje rovnice křivky hyperbolu, kteráž je rovnostranná, rovnají-li se oba kořeny co do velikosti. Je-li $f' = o$, rozpadává se hyperbola ve dvě přímky.

II. Při transformací předcházející vyloučili jsme případ

$$a\,c - b^2 = 0.$$

V případě tomto nemůžeme rovnoběžně pošinouti osy souřadnic do středu křivky, jenž je nekonečně vzdálen (rov. 5.). Za tou příčinou obrátíme zde postup předcházejícího případu, otočíme totiž nejdříve osy souřadnic, načež rovnoběžně pošineme osy na nový počátek, jehož polohu určíme tak, aby výsledná rovnice byla co nejjednodušší.

Za příčinou $a\,c - b^2 = 0$ můžeme nyní rovnici křivky (1) psáti:

$$(x\sqrt{a} + y\sqrt{c})^2 + 2\,d\,x + 2\,e\,y + f = 0. \qquad (15)$$

Otočíme osy souřadnic kolem počátku o úhel α, jehož je

$$tg\,\alpha = -\sqrt{\frac{a}{c}},$$

anebo, jinými slovy, zvolíme přímku

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{c} = 0$$

*) Rovnice

$$a' + c' = a + c,$$
$$a'\,c' - b'^2 = a\,c - b^2,$$

platí, nechť již zvolíme osy jak nám libo, nebo rovnoběžným pošinutím os nemění se činitelé členů druhého stupně vůbec.

za novou osu souřadnic na př. osu X, bude rovnice druhé osy, tedy osy Y

$$x\sqrt{c} - y\sqrt{a} = 0.$$

Souřadnice bodu (x, y) křivky, vztažené na nové osy jsou jeho vzdálenosti x_1, y_1 od těchto os. Jest tedy:

$$y_1 = \frac{x\sqrt{a} + y\sqrt{c}}{\sqrt{a+c}}, \qquad x_1 = \frac{x\sqrt{c} - y\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}},$$

z kterýchžto rovnic obdržíme řešením dle x a y

$$x = \frac{y_1\sqrt{a} + x_1\sqrt{c}}{\sqrt{a+c}}, \qquad y = \frac{y_1\sqrt{c} - x_1\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}}. \tag{16}$$

Dosadíme-li hodnoty tyto do rovnice (15.), obdržíme rovnici křivky v nových souřadnicích

$$(a+c)\,y_1^2 + 2\,d'\,x_1 + 2e'\,y_1 + f = 0,$$

kdež značí $$d' = \frac{d\sqrt{c} - e\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}}, \qquad e' = \frac{d\sqrt{a} - e\sqrt{c}}{\sqrt{a+c}}. \tag{17}$$

Po vykonané transformaci vynecháme čárky při x a y, nepřihlížejíce více k dřívějším osám souřadnic; můžeme pak psáti:

$$(a+c)\,y^2 + 2\,d'\,x + 2\,e'\,y + f = 0. \tag{18}$$

Pošineme nyní osy souřadnic na nový počátek (ξ, η), což analyticky vystihneme, dosadíce $x + \xi$ místo x a $y + \eta$ místo y.

Obdržíme takto

$$(a+c)\,y^2 + 2\,d'\,x + 2\,e''\,y + f' = 0, \tag{19}$$

kdež je

$$e'' = (a+c)\,\eta + e'$$
$$f' = (a+c)\,\eta^2 + 2\,d'\,\xi + 2\,e'\,\eta + f.$$

Určíme-li nyní nový počátek souřadnic z podmínky, by bylo $e'' = 0$, $f' = 0$, obdržíme pro jeho souřadnice:

$$\xi = \frac{e'^2 - (a+c)\,f}{2\,d'\,(a+c)}, \qquad \eta = -\frac{e'}{a+c}. \tag{20}$$

V takto určených souřadnicích nabude rovnice křivky (18) tvaru

$$(a+c)\,y^2 + 2\,d'\,x = 0$$

aneb

$$y^2 = 2\,p\,x, \tag{21}$$

kdež je

$$p = -\frac{d'}{a+c} = \frac{e\sqrt{a} - d\sqrt{c}}{(a+c)^{3/2}}. \tag{22}$$

---

*) Otáčkou os, by vymizel člen $x\,y$, mizí současně v případě

$$a\,c - b^2 = 0$$

též buď x^2 neb y^2. Jeden kořen rovnice (14) je totiž zde roveň nulle a hodnota druhého kořene je $a + c$.

V případě, že je $a\,c - b^2 = 0$, vyjádřuje obecná rovnice stupně druhého tedy parabolu, jejíž parametr je dán rovnicí (22). V případě, že je $d' = 0$, je též $p = 0$, a parabola rozpadává se ve dvě rovnoběžky splývající s osou paraboly.

Tím jsme dokázali, že tvar křivek vyjádřených obecnou rovnicí (1) visí na výrazu $\triangle = a\,c - b^2$. Je-li $\triangle > 0$, vyjádřuje rovnice (1) ellipsu, pro $\triangle < 0$ hyperbolu, a v případě $\triangle = 0$ parabolu. Mimo kuželosečky není tedy jiných křivek stupně druhého.

Úlohy.

Geometrie bodu.

1. Najdi vzdálenosť bodu (8, 15) od počátku souřadnic.
   Řeš: 17.
2. Která je vzdálenosť bodů (8, 15), (20, 21)?
   Řeš: $6\sqrt{5}$.
3. Vrcholy trojúhelníku jsou (1, 2), (0, 3), (— 3, 0), najdi délky stran toho trojúhelníku.
   Řeš: $\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$.
4. Najdi souřadnice středu přímky omezené body (2, 5), (6, 3). Řeš: (4, 4).
5. Najdi souřadnice středů stran trojúhelníku (2, 5), (4, 3), (0, 1). Řeš: (3, 4), (1, 3), (2, 2).
6. Dokaž, že strany daného trojúhelníku jsou dvakráte tak veliky, jako jsou strany trojúhelníku, který tvoří středy stran daného trojúhelníku.
7. Úloha předcházející má se provésti pro trojúhelník daný úlohou (3).
8. Dán je rovnoběžník (0, 0), (a, 0), (a, b), (b, 0); najdi souřadnice středů úhlopříček.
   Řeš: Pro obě úhlopříčky obdržíme souřadnice středu $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, t. j. úhlopříčky v rovnoběžníku se půlí.

9. Najdi souřadnice bodů, které dělí spojnici bodů (2, 3), (4, — 5) na tři rovné díly. Řeš: $(\frac{8}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{10}{3}, \frac{-7}{3})$.

10. Dokaž, že bod $(\frac{11}{3}, -\frac{11}{3})$ leží na spojnici bodů (2, 3), (4, — 5).

11. Najdi souřadnice bodu, jenž je s bodem $(\frac{11}{3}, -\frac{11}{3})$ harmonicky sdružen vzhledem k bodům (2, 3) a (4, — 5).
Řeš: $(\frac{9}{2}, -7)$. Bod $(\frac{11}{3}, -\frac{11}{3})$ dělí spojnici bodů (2, 3) a (4, — 5) v poměru — 5, tedy je poměr bodu harmonicky sdruženého + 5.

12. Dán je trojúhelník (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Najdi souřadnice středu těžné přímky jdoucí vrcholem (x_1, y_1).
Řeš: $\left(\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{4}, \frac{2y_1 + y_2 + y_3}{4}\right)$.

13. Středy těžných přímek daného trojúhelníku stanoví trojúhelník, jenž má s daným trojúhelníkem společné těžiště.

14. Prodluž spojnici bodů A (3, 2), B (5, — 8) o její délku směrem k bodu B a najdi souřadnice nového koncového bodu C.
Řeš: $\frac{AC}{BC} = 2$, C (— 17, 18).

15. Dány jsou dva vrcholy (1, 0), (5, 7) trojúhelníku a jeho těžiště (— 3, $\frac{1}{3}$); najdi souřadnice třetího vrcholu.
Řeš: (— 15, — 6).

16. Které jsou souřadnice třetího vrcholu trojúhelníku, jehož je těžiště v počátku souřadnic a jehož druhé dva vrcholy mají souřadnice (x_1, y_1), (x_2, y_2).
Řeš: $[x_3 = -(x_1 + x_2), \quad y_3 = -(y_1 + y_2)]$.

17. Najdi plochu trojúhelníku (1, 2), (2, 3), (3, 1).
Řeš: $\frac{3}{2}\square$.

18. Najdi plochu trojúhelníku (a, b), (b, c), (c, a).
Řeš: $\frac{1}{2}[(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)]$.

19. Najdi plochu trojúhelníku (a, b), $(c, -c)$, (b, a).
Řeš: $b^2 - a^2$.

20. Najdi plochu čtyřúhelníku (0, 0), (5, 0), (4, 8), (1, 4).
Řeš: $24\square$.

Geometrie přímky.

1. Sestroj přímky dané rovnicemi
   $\alpha)$ $y = 3x + 5$, $\beta)$ $y = 3x - 1$,
   $\gamma)$ $3x - 5y + 6 = 0$, $\delta)$ $3x - 5y - 3 = 0$.
2. Sveď rovnice přímek předcházející úlohy na tvar
   $\alpha)$ úsečkový, $\beta)$ normalný.
3. Sestroj trojúhelník, jehož strany jsou
   $-2x + y + 5 = 0$, $x - 3y + 4 = 0$, $5x + 2y - 5 = 0$.
4. Bodem (x_1, y_1) v prvém kvadrantu veď přímku, kteráž tvoří s positivnými osami souřadnic trojúhelník dané plochy.
   Řeš: Úseky na osách přímky jdoucí bodem (x_1, y_1), jsou $y_1 - Ax_1$, $-\frac{y_1 - Ax_1}{A}$. Značí-li $\triangle$ danou plochu trojúhelníku, je $(y_1 - Ax_1)^2 = -2\triangle A$, z čehož urči A. Dvě řešení: $A = -$, $\frac{\triangle - x_1}{x_1} > x_1 y_1$. V případě $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $\triangle = 22$, je $A_1 = -1$, $A_2 = -9$.
5. Najdi plochu trojúhelníku, který uzavírá přímka
   $3x - 2y + 6 = 0$ s osami souřadnic.
   Řeš: Úseky na osách jsou 2, -3, pročež $\triangle = 3\square$.
6. Najdi rovnice stran trojúhelníku, jehož jsou vrcholy
   $(-1, 2)$, $(2, 3)$, $(-4, 5)$.
   Řeš: $x - 3y + 7 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x + 3y - 11 = 0$.
7. Najdi rovnice těžných přímek trojúhelníku
   $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$.
   Řeš: $-17x + 3y + 25 = 0$, $7x + 9y + 17 = 0$,
   $-5x + 6y + 21 = 0$.
8. Urči vzdálenost počátku souřadnic od přímky
   $5x + 12y + 7 = 0$.
   Řeš: $p = \frac{7}{13}$.
9. Urči vzdálenost bodu $(5, 1)$ od přímky
   $8x + 15y - 4 = 0$.
   Řeš: $p = 3$.

10. Urči délky výšek trojúhelníku (2, 1), (3, − 2), (− 4, − 1).
Řeš: $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$.

11. Který úhel uzavírá přímka
$\alpha)$ $3x - 2y + 5 = 0$, $\beta)$ $5x + 6y - 2 = 0$
s osou X?

12. Urči úhel přímek $-2x + y + 3 = 0$, $3x + y - 2 = 0$.
Řeš: $tg\,\delta = 1$.

13. Urči úhel přímek
$-3x + 5y + 4 = 0$, $-7x + 6y + 10 = 0$.
Řeš: $tg\,\delta = \frac{1}{3}$.

14. Urči úhly trojúhelníku (1, 1), (5, 2), (2, 4).

15. Urči úhly trojúhelníku
$5x - y = 13$, $3x + y = 9$, $5x + 7y = -1$.

16. Dán je čtyřúhelník (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). Urči úhel úhlopříček tohoto čtyřúhelníku.
Řeš:
$$tg\,\delta = \frac{(y_1 - y_3)(x_2 - x_4) - (y_2 - y_4)(x_1 - x_3)}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$
Leží-li vrcholy na přímce, je $\delta = 0$, t. j.
$$(y_1 - y_3)(x_2 - x_4) - (y_2 - y_4)(x_1 - x_3) = 0.$$

17. Bodem (3, 5) sestroj přímku, kteráž s přímkou
$$2x - 3y + 5 = 0$$
uzavírá úhel 45^0.
Řeš: $y = 5x - 10$ anebo též $y = -\frac{1}{5}x + \frac{28}{5}$.

18. Najdi rovnici přímky jdoucí těžištěm trojúhelníku A (2, 3), B (4, − 5), C (− 3, − 6) rovnoběžně ku straně $\overline{AB}$.

19. Najdi rovnice výšek trojúhelníku (1, 2), (− 1, 1), (− 2, 3).
Řeš: $2x + y + 1 = 0$, $3x - y + 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$.

20. Najdi vzdálenosť rovnoběžek
$5x - 12y + 7 = 0$, $5x - 12y + 15 = 0$.
Řeš: $p = \frac{7}{13}$, $p_1 = \frac{15}{13}$, $d = p_1 - p = \frac{8}{13}$.

21. Najdi vzdálenosť rovnoběžek
$7x + 24y - 10 = 0$, $7x + 24y + 14 = 0$,
$p = \frac{10}{25}$, $p_1 = \frac{14}{25}$, $d = \frac{24}{25}$.

Počátek souřadnic je mezi rovnoběžkami, tedy rovná se vzdálenosť rovnoběžek součtu vzdáleností těch rovnoběžek od počátku souřadnic (viz čl. 26.). Pro $p_1 = -\frac{14}{25}$, je opět $d = p_1 - p = \frac{10}{25} - (-\frac{14}{25}) = \frac{24}{25}$.

22. Najdi rovnici přímky spuštěné s bodu $(-1, 2)$ kolmo na přímku $5x - 2y = 5$.
Řeš: $2x + 5y - 8 = 0$.

23. Daný trojúhelník má vrcholy $(1, 2)$, $(-1, 1)$, $(3, 2)$. Najdi rovnice přímek vedených vrcholy α) rovnoběžně ku protilehlým stranám, β) kolmo na protilehlé strany.

24. Bodem $(5, 4)$ nechť se vedou rovnoběžky s přímkami
$$2x - y = 3, \qquad 5x + 3y = 6$$
a urči souřadnice vrcholů takto vzniklého rovnoběžníku.

25. Najdi rovnice kolmic sestrojených ve středech stran trojúhelníku $(2, 1)$, $(3, -2)$, $(-4, -1)$.
Řeš: $7x - y + 2 = 0$, $3x + y + 3 = 0$, $3y - x + 4 = 0$.

26. Najdi rovnice přímek, jež půlí úhly přímek
$$3x + 4y - 9 = 0, \qquad 12x + 5y - 3 = 0.$$
Řeš: Jsou $7x - 9y + 34 = 0$, $9x + 7y - 12 = 0$.
Plyne z podmínky
$$\frac{3x + 4y - 9}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{12x + 5y - 3}{\sqrt{12^2 + 5^2}}.$$

27. Najdi souřadnice průseku přímek
$$2x + 3y = 7, \qquad x - y = 1.$$
Řeš: $(2, 1)$.

28. Urči průsek přímek
$$y + ax + a^2 = 0, \qquad y + bx + b^2 = 0.$$
Řeš: $(-(a + b), ab)$.

29. Urči souřadnice vrcholů trojúhelníku, jehož jsou strany:
$x - 2y + 2 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $2x + y - 4 = 0$.
Řeš: $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(-5, 6)$.

30. Najdi plochu trojúhelníku, jehož jsou strany
$x - 5y + 13 = 0$, $5x + 7y + 1 = 0$, $3x + y - 9 = 0$.
Řeš: $16\square$.

31. Najdi rovnici přímky jdoucí průsekem přímek
$2x + y - 6 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$,
rovnoběžně s přímkou $x - 2y + 5 = 0$.
Řeš: $x - 2y + 7 = 0$.

32. Najdi rovnici přímky jdoucí bodem $(1, -2)$ a průsekem přímek $y = 2x - 5$, $y = -x + 1$.
Řeš: $x - y = 3$.

33. Dokaž, že se výšky trojúhelníku sekou ve společném bodě.
Řeš: Rovnice výšky probíhající vrcholem (x_1, y_1) je:
$(y_2 - y_3)(y - y_1) + (x_2 - x_3)(x - x_1) = 0$.
Rovnice ostatních výšek obdržíme cyklickou výměnou přípon. Součet rovnic výšek identicky rovná se nulle.

34. Těžné přímky trojúhelníku procházejí bodem společným.
Řeš: Rovnice těžné přímky jdoucí vrcholem (x_1, y_1) je:
$(2x_1 - x_2 - x_3)(y - y_1) - (2y_1 - y_2 - y_3)(x - x_1) = 0$.
Další závěrek jak v předcházející úloze.

35. Dokaž předcházející úlohu vezma těžnou přímku probíhající vrcholem A za osu Y a spojnici obou ostatních vrcholů za osu X.
Řeš: $A\,(0, a)$, $B\,(b, 0)$, $C\,(-b, 0)$ jsou souřadnice vrcholů a $x = 0$, $y = \frac{b}{3a}(x + a)$, $y = -\frac{b}{3a}(x - a)$ rovnice těžných přímek. Společný průsek je $\left(0, \frac{b}{3}\right)$.

36. Dokaž tuž větu vezma dvě strany $\overline{CA} = a$, $\overline{CB} = b$ za osy souřadnic.
Řeš: Rovnice těžných přímek v této soustavě souřadnic jsou $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 1$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$; společný průsek $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$.

37. Kolmice ve středech stran trojúhelníku sestrojené probíhají společným bodem.

38. Přímky, jež půlí úhly trojúhelníku, probíhají společným bodem.

39. Pro trojúhelník (2, 3), (4, −5), (−3, −6) najdi souřadnice společného průseku α) těžných přímek, β) výšek, γ) kolmic ve středech jeho stran, δ) přímek, jež půlí jeho úhly.

40. Urči místo bodů, jichž vzdálenosti od dvou pevných bodů jsou rovny.

Řeš: Vezmi spojnici pevných bodů za X a střed její za počátek souřadnic.

41. Najdi místo vrcholu trojúhelníku, dána-li jeho základna a rozdíl čtverců ostatních jeho stran.

Řeš: Vezmi základnu za X a střed její za počátek souřadnic.

42. Spojnice středu úhlopříček lichoběžníku je rovnoběžna s oběma základnami.

43. Přímka mění svou polohu, při čemž však zůstává součet jejich reciprokých úseků na osách stálým. Dokaž, že ta přímka probíhá stále pevným bodem.

44. Na přímce OX jsou dány dva body A, B a na přímce OY též dva body A', B' tak, že je

$$OA + OB = OA' + OB'.$$

Najdi místo průseků přímek AB' a $A'B$.

45. Rovnoběžka se základnou trojúhelníku pohybuje se směrem od základny k protilehlému vrcholu. Průseky její se stranami spoj křižmo s protilehlými vrcholy a najdi místo průseků těch spojnic.

46. V trojúhelníku leží průsek jeho výšek, těžných přímek a kolmic sestrojených ve středech stran na téže přímce.

47. Najdi rovnici přímky jdoucí bodem (x_3, y_3), kteráž by spojnici bodu (x_1, y_1), (x_2, y_2) dělila v daném poměru λ.

Řeš: $$y - y_3 = \frac{(y_3 - y_1) - \lambda (y_3 - y_2)}{(x_3 - x_1) - \lambda (x_3 - x_2)} (x - x_3).$$

48. Urči rovnici přímky jdoucí body (r', φ'), (r'', φ'').

Řeš: $$r = \frac{r' r'' \sin (\varphi'' - \varphi')}{r' \sin (\varphi - \varphi') - r'' \sin (\varphi - \varphi'')}.$$

49. Urči úhel přímek

$$r = \frac{c}{a\cos\varphi + b\sin\varphi}, \qquad r = \frac{c'}{a'\cos\varphi + b'\sin\varphi}.$$

Řeš: $tg\,\delta = \frac{a\,b' - a'\,b}{a\,a' + b\,b'}$.

Geometrie kruhu.

1. Uveď rovnice kruhů
   $\alpha)\ x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$, $\beta)\ x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$,
   $\gamma)\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$, $\delta)\ x^2 + y^2 - 4x + 14y = 0$
   na tvar $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
2. Sestroj kruhy úlohy 1.
3. Najdi rovnici kruhu, jenž se dotýká osy X v bodě $x = 3$ a jehož je poloměr 5.
   Řeš: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
4. Urči průseky kruhu $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$ s osami souřadnic.
5. Najdi rovnici kruhu jdoucího body (2, 0), (3, 0), (1, 4).
   Řeš: $x^2 + y^2 - 5x - \frac{9}{2}y + 6 = 0$.
6. Najdi délku tečny sestrojené z bodu (3, 8) na kruh
   $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$.
   Řeš: $t = 7$.
7. Urči průseky kruhu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ s přímkou $4x + 3y = 35$.
   Řeš: Přímka dotýká se kruhu v bodě (5, 5).
8. Najdi rovnice tečen kruhu $x^2 + y^2 = 8$ rovnoběžných s přímkou $2x + 5y - 7 = 0$.
9. Urči úhel tečen z bodu (7, 12) na kruh $x^2 + y^2 = 4$ sestrojených.
10. Najdi tětivu dotyku tečen sestrojených z bodu (4, 7) na kruh $x^2 + y^2 = 4$.
    Řeš: $4x + 7y = 4$.

11. Najdi podmínku, vedle které se přímka $l\,x + m\,y + n = 0$ dotýká kruhu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Řeš: $\dfrac{l\,a + m\,b + n}{\sqrt{l^2 + m^2}} = r.$

12. Najdi rovnici tečny bodu (3, 4) na kruhu $x^2 + y^2 = 25$.

Řeš: $3\,x + 4\,y = 25.$

13. Najdi rovnici polary bodu (3, 4) vzhledem ku kruhu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 26.$

Řeš: $x + 3\,y = 8.$

14. Sestroj z bodu $(1, -5)$ tečnu na kruh $x^2 + y^2 = 9.$

Řeš: Rovnice tečny je $y - 1 = A\,(x + 5)$, kdež A určíme z rovnice $\dfrac{1 - 5\,A}{\sqrt{1 + A^2}} = r$; souřadnice $(\xi\ \eta)$ bodu dotyku obdržíme řešením rovnic

$$\xi^2 + \eta^2 = 9, \quad \xi - 5\,\eta = 9.$$

15. Najdi rovnici tečny z počátku souřadnic na kruh

$$x^2 + y^2 - 6\,x - 8\,y - 21 = 0.$$

Řeš: Urči λ ve $y = \lambda\,x$, by přímka tato protínala kruh ve dvou splývajících bodech. Vyhovuje tedy λ podmínce $(3 + 4\,\lambda)^2 + 21\,(1 + \lambda^2) = 0.$

16. Najdi rovnici kruhu, jenž probíhaje bodem (2, 3), má společnou chordalu s kruhy

$$x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y + 9 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 3\,x + 2\,y - 6 = 0.$$

Řeš: $x^2 + y^2 + 4\,x - 40\,y + 99 = 0.$

17. Nechť se najde místo vrcholu úhlu stálého C, jehož ramena probíhají dvěma pevnými body A, B.

Řeš: Spojnice pevných bodů budiž osou X, a střed od $\overline{A\,B} = 2\,a$ počátkem souřadnic. Rovnice místa je

$$x^2 + y^2 - \frac{2\,a}{tg\,C}\,y - a^2 = 0.$$

18. Najdi místo bodu $P\ (\xi,\ \eta)$, jehož polara vzhledem k danému kruhu $x^2 + y^2 = 9$ půlí jeho vzdálenost $\overline{O\,P}$ od středu kruhu.

Řeš: Souřadnice $\left(\frac{\xi}{2}, \frac{\eta}{2}\right)$ středu délky $\overline{O\,P}$ musí vyhovovati rovnici $\xi x + \eta y = 9$ polary bodu P, tedy je $\xi^2 + \eta^2 = 18$ místo bodu P.

19. Dány jsou tři kruhy

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4,$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9,$$
$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 6.$$

Najdi souřadnice bodu rovných mocností hledě k těmto kruhům.

20. Jsou průseky kruhů

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4, \quad (x+4)^2 + (y-1)^2 = 16$$

realné neb imaginarné?

Řeš: Realné; vzdálenosť středů je

$$\sqrt{26} \quad \text{a} \quad 2 + 4 > \sqrt{26}.$$

21. Kdy je přímka $y = A x + n$ společnou tečnou kruhů $(x-a)^2 + (4-b)^2 = r^2$, $(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1{}^2$?

Řeš: Vyhovují-li A i n podmínkám

$$(b - A a - n)^2 = r^2 (1 + A^2),$$
$$(b_1 - A a_1 - n)^2 = r_1{}^2 (1 + A^2).$$

22. Průsekem dvou kruhů veď sečnu omezenou oběma kruhy a hledej místo středů takových sečen.

Řeš: Průsek O kruhů zvol za počátek polarné soustavy souřadnic. Rovnice obou kruhů jsou

$$r = 2\varrho \cos(\alpha - \varphi), \quad r = 2\varrho' \cos(\alpha - \varphi'),$$

tedy je rovnice místa

$$r = \varrho \cos(\alpha - \varphi) + \varrho' \cos(\alpha - \varphi').$$

Rovnici tu uvésti lze na tvar

$$r = 2\varrho_1 \cos(\alpha - \varphi_1).$$

Místo je kruh, jdoucí bodem O.

Geometrie ellipsy.

1. Dána je ellipsa $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$. Jak leží bod (2, 3) hledíc k této ellipse? Najdi délkovou výstřednosť a poloparametr té ellipsy.

   Řeš: Bod leží mimo ellipsu, $e=\sqrt{2}$, $p=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

2. Najdi rovnice řiditelek ellipsy předcházející úlohy.
   Řeš: $x=\pm 3\sqrt{2}$.

3. Najdi poměr, v němž jsou vzdálenosti bodu ellipsy úlohy 1. od ohniska a přílehlé řiditelky.

   Řeš: $PF' : PN=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Najdi rovnice tečen ellipsy $x^2+4y^2=4$ rovnoběžných s přímkou $y=3x$.
   Řeš: $y=3x\pm\sqrt{37}$.

5. Které jsou souřadnice bodu dotyku tečen úlohy předcházející?

   Řeš: $\left(-\frac{12}{\sqrt{37}}, \frac{1}{\sqrt{37}}\right)$, $\left(\frac{12}{\sqrt{37}}, -\frac{1}{\sqrt{37}}\right)$.

6. Ellipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1$, kdež si za a mysleme dosazované různé hodnoty, mají všechny společná ohniska?
   Řeš: Výstřednosť $=e$ nevisí na a.

7. Najdi průsek tečen bodů $\left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 1\right)$ ellipsy $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$. Jak je vzdálen střed ellipsy od spojnice uvedených bodů?

8. Najdi polaru bodu (3, 7) hledě k ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{14}=1$.

   Řeš: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$.

9. Najdi bod (pol), jehož polara vzhledem k ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

má rovnici $l\,x + m\,y + n = 0$.

Řeš: Buďtež (x', y') souřadnice hledaného bodu, tedy je jeho polara $\frac{x'\,x}{a^2} + \frac{y'\,y}{b^2} = 1$, což srovnáno s rovnicí přímky, dává $x' = -\frac{l\,a^2}{n}$, $y' = -\frac{m\,b^2}{n}$.

10. Najdi úhel tečen z bodu $(7, 4)$ na ellipsu $x^2 + 4\,y^2 = 4$ sestrojených a délku tětivy dotyku těch tečen.

11. Najdi délky tangenty, normaly, subtangenty a subnormaly bodu $\left(2, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ ellipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

12. Najdi souřadnice průseku normal bodů $\left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 1\right)$ ellipsy $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$, jakož i úhel těchto normal.

13. Najdi rovnici průměru sdruženého ku průměru

$$3\,x - 2\,y = 0$$

ellipsy $4\,x^2 + 9\,y^2 = 36$.

14. Najdi rovnici průměru sdruženého ku průměru jdoucímu bodem $\left(2, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ ellipsy $4\,x^2 + 9\,y^2 = 36$.

15. Součin vzdáleností tečny bodu ellipsy od jejího středu a délky normaly téhož bodu jest stálý, rovnající se čtverci malé poloosy.

Řeš: Vzdálenosť tečny bodu $(x'\ y')$ od počátku je

$$\frac{a^2\,b^2}{\sqrt{b^4\,x'^2 + a^4\,y'^2}}$$

a délka normaly téhož bodu je

$$\frac{1}{a^2}\sqrt{b^4\,x'^2 + a^4\,y'^2}.$$

16. Součin vzdáleností ohnisek od libovolné tečny ellipsy je stálý, rovnaje se čtverci malé poloosy.

17. Střední geometrická úměra mezi provodiči bodu ellipsy rovná se poloprůměru, jenž je sdružen ku průměru téhož bodu.

Řeš: $FP \cdot F'P = a^2 - \frac{e^2 x'^2}{a^2} = \frac{a^2 y'^2}{b^2} + \frac{b^2 x'^2}{a^2}$,

tedy je $FP \cdot F'P = x_1^2 + y_1^2 = b'^2$.

(Srovnej úlohu 5., pag. 80.)

18. Součet vzdáleností průseků přímky rovnoběžné s velkou osou ellipsy od ohniska má délku velké osy.

Řeš: Vychází z výměrné rovnice a ze souměrnosti průseků hledíc k malé ose.

19. Vedeme-li libovolnou tětivu P_1, P_2 ohniskem F ellipsy, je součet reciprokých provodičů PF_1 a FP_2 stálý.

Řeš: Rovnice ellipsy v souřadnicích polarných je

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

tedy je

$$\frac{1}{FP_1} = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p}, \quad \frac{1}{FP_2} = \frac{1 + \varepsilon \cos (180 + \varphi)}{p},$$

pročež $$\frac{1}{FP_1} + \frac{1}{FP_2} = \frac{2}{p}.$$

20. Součet čtverců reciprokých průměrů navzájem na se kolmých je stálý.

21. Sestroj ellipsu z daného ohniska F a tří tečen.

Řeš: Najdi body souměrné G_1, G_2, G_3 ohniska hledě k daným tečnám. Viz čl. 66.

22. Sestroj ellipsu, dáno-li její ohnisko F, délka velké osy a jedna tečna s bodem dotyku.

Řeš: Najdi souměrný bod G ohniska hledě k dané tečně, a spojnici jeho s bodem dotyku tečny prodluž na délku $2a$. Koncový bod je druhé ohnisko.

23. Sestroj ellipsu, dáno-li jedno ohnisko, dvě tečny s body dotyku.

Řeš: Najdi souměrné body G a G' ohniska k daným tečnám. Spojnice jejich s příslušnými body dotyku tečen sekou se v druhém ohnisku.

24. Místo bodů dotyku tečen vedených z bodu velké osy na ellipsy homofokalné (o společných ohniskách úloh. 6.) je kruh.

Řeš: Rovnici jeho obdržíme, vyloučivše k jednotlivé ellipse vztahující se veličinu a z rovnic

$$\frac{x' x}{a^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1.$$

Jest $x' (x^2 + y^2) - (e^2 + x'^2) x + e^2 x' = 0.$

25. Najdi místo vrcholů trojúhelníků, jež mají týž obvod a společnou základnu.

Řeš: Budiž obvod s a základna e. Základnu zvolme za X a střed její za počátek, je:

$$4 s (s - 2 e) x^2 + 4 (s - e)^2 y^2 = e (s - 2 e) (s - e)^2.$$

26. Najdi místo polů přímky $l x + m y + n = 0$ ku všem ellipsám stejných ohnisek

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1.$$

Řeš: Souřadnice polu jsou

$$x' = -\frac{a^2 l}{n}, \quad y' = -\frac{(a^2 - e^2) m}{n}.$$

(Srov. úloh. 9.). Rovnici místa obdržíme vyloučením a^2; jest tedy místo přímka kolmá na danou přímku.

27. Paty kolmic spuštěných se středu ellipsy na její tečny leží na kruhu soustředném s ellipsou, jehož průměr se rovná velké ose ellipsy.

28. Ve krajních bodech sdružených průměrů ellipsy sestroj tečny a najdi místo jejich průseků.

Řeš: Sečti čtverce rovnic

$$\frac{x' x}{a^2} + \frac{y' y}{b^2} = 1, \quad \frac{x'' x}{a^2} + \frac{y'' y}{b^2} = 1$$

i obdržíš hledě k tomu, že je

$$x'' y'' = - x' y', \quad x'^2 + y'^2 = a^2, \quad x''^2 + y''^2 = b^2$$

rovnici místa $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2.$$

Geometrie hyperboly.

1. Dána je rovnice hyperboly $144\,x^2 - 25\,y^2 = 3600$. Najdi souřadnice ohnisek a délku parametru.
2. Najdi rovnice řiditelek hyperboly předcházející úlohy.
3. Najdi α) provodiče bodu $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ hyperboly $x^2 - 4\,y^2 = 4$, β) úhel provodičů, γ) rovnice řiditelek této hyperboly.
4. Najdi rovnice a úhel asymptot hyperboly úlohy 1. i 3.
5. Najdi rovnici tečny a normaly bodu $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ hyperboly úlohy 3. Řeš: $y = 2\sqrt{3}\,.\,x - 4$ (tečna)
$$\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{y}{1} = 1 \quad \text{(normala)}.$$
6. Urči tečny hyperboly $144\,x^2 - 25\,y^2 = 3600$ rovnoběžné s přímkou $y = 2\,x$, jakož i souřadnice bodů dotyku těch tečen.
7. Najdi α) rovnice tečen hyperboly $x^2 - 4\,y^2 = 4$ sestrojených z bodu $(2, 4)$; β) urči úhel těch tečen, γ) najdi rovnici polary téhož bodu, δ) vypočítej plochu trojúhelníku, jejž uzavírají tečny a polara bodu $(2, 4)$.
8. Najdi délku tangenty, subtangenty, normaly a subnormaly bodu $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ hyperboly $x^2 - 4\,y^2 = 4$.
9. Najdi rovnici průměru sdruženého ku průměru, jenž probíhá bodem $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ hyperboly $x^2 - 4\,y^2 = 4$. Jak veliký je úhel těch sdružených průměrů?
10. Jak zní rovnice hyperboly úlohy 3., jestliže zvolíme asymptoty za osy souřadnic?
11. Sestroj hyperbolu, dány-li jsou její asymptoty a jeden bod.
12. Sestroj hyperbolu z daného ohniska a tří tečen.
13. Součin vzdáleností ohnisek od libovolné tečny hyperboly je stálý $= -b^2$.

Řeš: $$p\,.\,p' = \frac{1 - \frac{e\,x'}{a^2}}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}} \cdot \frac{1 + \frac{e\,x'}{a^2}}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}} = -\,b^2.$$

14. Součin délky normaly bodu hyperboly a vzdálenosti tečny téhož bodu od středu hyperboly je stálý $= b^2$.

15. Délka tečny vedené z paty pořadny libovolného bodu hyperboly rovnoramenné na kruh sestrojený nad realnou osou jako průměrem rovná se té pořadně.

Řeš: $t^2 = x_1^2 - a^2$, $y_1^2 = x_1^2 - a$, tedy $t = y_1$.

16. Průsek výšek trojúhelníku vepsaného ve rovnoramennou hyperbolu leží opět na dané hyperbole.

17. Najdi rovnici hyperboly, dán-li je úhel α asymptot a délková výstřednost e.

Řeš: $a = e \cos \alpha$, $b = e \sin \alpha$.

Geometrie paraboly.

1. Najdi plochu trojúhelníku (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') vepsaného ve parabolu $y^2 = 2px$.

Řeš: $\triangle = \frac{1}{4p}(y' - y'')(y'' - y''')(y''' - y')$.

2. Ohniskem paraboly $y^2 = 2px$ veď tětivu směrem α ku ose, a urči její délku.

Řeš: $d = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}$; parametr je nejkratší tětiva paraboly jdoucí ohniskem.

3. Dán je bod $(\frac{1}{6}, 1)$ paraboly $y^2 = 6x$. Najdi rovnici tečny a normaly toho bodu, β) urči úhel, jejž uzavírá provodič toho bodu s tečnou, γ) najdi délky tangenty, normaly, subtangenty a subnormaly toho bodu.

4. Najdi souřadnice průseku tečen bodů (x', y'), (x'', y'') paraboly $y^2 = 2px$.

Řeš: $x = \frac{y'y''}{2p}$, $y = \frac{y' + y''}{2}$.

5. Vzdálenost ohniska paraboly od libovolné její tečny je střední geom. úměrna vzdáleností ohniska od bodu dotyku té tečny a od vrcholu.

Řeš: Zmíněná vzdálenost $d = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} + x'\right)}$.

6. Najdi rovnici tečny paraboly $y^2 = 4x$ rovnoběžné s přímkou $y = 5x$.

7. Z bodu $(-2, 3)$ veď tečny na parabolu $y^2 = 6x$ a urči úhel těch tečen, jejich body dotyku a délku tětivy dotyku.

8. Najdi rovnici tečny paraboly $y^2 = 4x$ kolmé na přímku $y = 2x + 7$.

9. Najdi rovnici tečny paraboly, která uzavírá přímkou $y = 2x + 3$ úhel 45^0.

10. Dokaž, že můžeme rovnici paraboly v polarných souřadnicích psáti: $r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\varphi = (\frac{1}{2}p)^{\frac{1}{2}}$.

11. Najdi rovnici tečny sdružené ku průměru $y = 3$ paraboly $y^2 = 6x$. Který úhel uzavírá ta tečna a sdružený jí průměr?

12. Na spojnice bodů paraboly $y^2 = 2px$ s vrcholem spusť s ohniska kolmice a urči místo pat jejich.
Řeš: Místo je ellipsa, rovnice její: $y^2 = px - 2x^2$.

13. Dána je vrcholová tečna s bodem dotyku a bod paraboly. Má se α) určiti rovnice paraboly, β) parabola sestrojiti.
Řeš: Vrcholová tečna budiž osa Y a kolmice k ní v bodě dotyku směrem k té straně, kde leží daný bod, osa X, tu je $y^2 = \frac{y_1^2}{x_1} x$, $2p = \frac{y_1^2}{x_1}$.

14. Dáno je ohnisko a vrchol, sestroj parabolu.

15. Sestroj parabolu, dáno-li je ohnisko a dvě tečny.
Řeš: Spojnice souměrných bodů G, G' ohniska hledíc k tečnám je řiditelka paraboly a kolmice na ni spuštěná s ohniska její osa.

16. Sestroj parabolu, dána-li je řiditelka a jedna tečna s bodem dotyku.

17. Sestroj parabolu, dány-li jsou její dva body a řiditelka.
Řeš: Opiš z daných bodů kruhy, jejichž poloměry jsou rovny vzdálenostem těch bodů od řiditelky. Průsek těch kruhů je ohnisko. Obdržíme dva průseky — dvě řešení.

O kuželosečkách vůbec.

1. Urči druh následujících kuželoseček

$\alpha)$ $3x^2 + xy - y^2 + 2x - 4y = 0,$

$\beta)$ $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 5x - 10 = 0,$

$\gamma)$ $10x^2 + 8xy + 12y^2 + 6x - 2y - 9 = 0.$

Řeš: $\alpha)$ hyperbola, $\beta)$ parabola, $\gamma)$ ellipsa.

2. Jak zní rovnice kuželosečky

$$3x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 6y - 3 = 0,$$

zvolíme-li střed její $(\frac{7}{2}, -4)$ za počátek nové soustavy souřadnic, při nezměněném směru os.

Řeš: $12x^2 + 16xy + 4y^2 + 1 = 0.$

3. Osy souřadnic ellipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

pošineme rovnoběžně $\alpha)$ na ohnisko $(e, 0)$ jako nový počátek, $\beta)$ na vrchol $(0, -b)$ jako nový počátek. Jak zní transformovaná rovnice?

4. Jak zní rovnice paraboly, zvolíme-li ohnisko paraboly za počátek a osu paraboly za osu X pravoúhelné soustavy?

Řeš: $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right).$

5. Najdi místo bodů, jež mají od svých polar vzhledem k parabole tuž vzdálenosť, jakou má ohnisko.

Řeš: Místo je parabola; vyšetři blíže polohu.

6. Urči místo středů tětiv paraboly probíhajících pevným bodem (a, b).

Řeš: $$y^2 - by - px + ap = 0,$$

tedy parabola, jejíž vrchol má souřadnice

$$\xi = a - \frac{b^2}{4p}, \quad \eta = \frac{b}{2}.$$

7. Najdi souřadnice středu kuželosečky $y = \frac{1}{x - a}.$

Řeš: Kuželosečka je hyperbola, souřadnice středu $(a, 0)$.

8. Pošiň rovnoběžně osy souřadnic do středu kuželosečky

$$x^2 - 2xy + 2y + 2x + 1 = 0.$$

Jak zní v této nové soustavě souřadnic rovnice té kuželosečky?

Řeš: $x^2 - 2xy = -4.$

Souřadnice středu $\xi = 1, \quad \eta = 2.$

9. Najdi rovnice os ellipsy $14x^2 - 4xy + 11y^2 = 60.$

Řeš: $2x - y = 0, \quad x + 2y = 0.$

10. Najdi místo bodu, z něhož tečny vedené na parabolu uzavírají daný úhel φ.

Řeš: Místo je hyperbola

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 sec^2\,\varphi.$$

11. Transformuj kuželosečku

$$50x^2 + 14xy + 2y^2 - 72x + 22y - 21 = 0$$

na její osy.

Řeš: Rovnoběžně pošineme osy na střed $(1, -2)$ kuželosečky, kteráž je ellipsa, neboť je

$$ac - b^2 = +.$$

Obdržíme tu $50x^2 + 14xy + 2y^2 = 51.$

Otočíme nyní osy souřadnic, by se sjednotili s osami ellipsy.

Zde je $\lambda^2 - 52\lambda + 51 = 0,$

tedy $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 51.$

Rovnice osová ellipsy dané je

$$x^2 + 51y^2 = 51.$$

12. Transformuj hyperbolu

$$23x^2 + 48xy + 9y^2 = 369 \quad \text{na osy.}$$

Řeš: $\lambda^2 - 32\lambda - 369 = 0,$

$\lambda_1 = 41, \quad \lambda_2 = -9,$

$41x^2 - 9y^2 = 369.$

13. Transformuj hyperbolu

$$11x^2 + 84xy - 24y^2 = 156 \quad \text{na osy.}$$

Řeš: $3x^2 - 4y^2 = 12.$

14. Transformuj ellipsu úlohy 9. na osy.

Řeš: $\lambda^2 - 25\lambda - 150 = 0,$

$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 15,$

$2x^2 + 3y^2 = 12,$

kdež jsme celou rovnici společným činitelem 5 zkrátili.

15. Transformuj rovnici paraboly

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 2x + 6y + 5 = 0$$

na tvar rovnice vrcholové.

Řeš: Rovnici danou můžeme psáti

$$(3x + 4y)^2 + 2x + 6y + 5 = 0.$$

Otočme nejprve osy souřadnic, by splynula osa X_1 s přímkou

$$3x + 4y = 0$$

ve své nové poloze. Rovnice příslušné osy Y_1 je

$$4x - 3y = 0.$$

V této nové soustavě souřadnic je rovnice paraboly

$$125y^2 - 10x - 18y + 25 = 0.$$

Pošineme-li osy souřadnic rovnoběžně na vrchol paraboly, obdržíme: $125y^2 - 10x = 0$, aneb $y^2 = \frac{2}{25}x$ jakožto hledanou rovnici vrcholovou dané paraboly.

16. Najdi směr osy paraboly

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

a její parametr.

Řeš: Odstraníme-li odmocnítko, obdržíme

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + 1 = 0.$$

Směrnice osy paraboly je:

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a} \quad \text{a} \quad p = \frac{2a^2b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}}.$$

OBSAH.

Geometrie bodu.

Stránka

Rovnoběžné souřadnice bodu (1—4). Polarné souřadnice bodu (5). Přechod z rovnoběžných souřadnic na souřadnice polarné; poznámka pro případ kosoúhlých souřadnic (6). Dva a více bodů v rovině. Vzdálenosť dvou bodů, souřadnice bodu dělícího vzdálenosť dvou bodů v daném poměru (7). Těžiště trojúhelníku (8), věta o čtyřúhelníku (9), plošný obsah trojúhelníku (10). O znaménku plošného obsahu (11). Plošný obsah mnohoúhelníku (12). Proměna soustavy rovnoběžných souřadnic, tři případy (13). Analytické vyjádření geometrického místa bodu; výhody plynoucí z proměny soustavy rovnoběžných souřadnic; o dělení křivek dle stupně jejich rovnic (14—18) . . . . . 1—20

Geometrie přímky.

Rovnice přímky jdoucí počátkem souřadnic (19—21). Obyčejná rovnice přímky (22—24). Úsečková rovnice přímky (25). Normalný tvar rovnice přímky (26). Obecná rovnice stupně prvého a její geometrický význam (27). Dvě rovnice prvého stupně lišící se pouze stálým činitelem vyjádřují tuž přímku (28). Určení rovnice přímky z daných podmínek; rovnice přímky jdoucí jedním bodem; rovnice přímky jdoucí daným bodem rovnoběžně ku dané přímce; rovnice přímky jdoucí dvěma body (29). Vzdálenosť bodu od přímky (30). Úhel dvou přímek (31). Průsek dvou přímek (32). Podmínka, kdy tři přímky jdou bodem společným (33). Rovnice přímky v souřadnicích polarných (34). Dodatek ku geometrii přímky (35) . . 21—43

Geometrie kuželoseček.

O kruhu. Rovnice kruhu obecná, vrcholová, středová (36). Kruh je křivka uzavřená a souměrná ku každému průměru (37). Geometrický význam vrcholové rovnice (38). Mocnosť bodu vzhledem ku kruhu (39). Kruh daný třemi body (40). Přímka a kruh (41). Sečna a tečna kruhu (42). Tečna z daného bodu na kruh (43). Normala bodu na kruhu (44). Dva kruhy, chordala dvou kruhů; bod rovných mocností vzhledem ku třem kruhům (45—47). Rov-

Stránka
nice kruhu v souřadnicích polarných; upotřebení polarných souřadnic k důkazu dvou vět o kruhu (48—49) . . . . . 43—60

O ellipse. Výměr ellipsy (50). Osová rovnice ellipsy (51). Rozbor rovnice ellipsy (52—53). Poloha bodu vzhledem k ellipse (54). Provodiče bodu ellipsy, její řiditelky a parametr (55—56). Některá sestrojení ellipsy (57—58). Ellipsa a přímka (59). Sečna, tečna a normala bodu ellipsy (60—61). Tečna z daného bodu na ellipsu (62). Úhel tečen z bodu na ellipsu; místo průseků kolmých tečen ellipsy je kruh (63). Souřadnice bodů dotyku tečen z daného bodu (64). Délka tangenty, subtangenty, normaly a subnormaly (65). Úhly tečny s provodiči bodu dotyku a sestrojení tečny (66). Průměry ellipsy, sdružené průměry (67—68). Ellipsa vztažená na dva sdružené průměry (69). Vrcholová rovnice ellipsy (70). Plocha ellipsy (71) . . . . . 60—83

O hyperbole. Výměr hyperboly (72). Osová rovnice hyperboly (73). Rozbor rovnice hyperboly (74), asymptoty (75). Poloha bodu hledíc k hyperbole (76). Provodiče bodu hyperboly, řiditelky její a parametr (77—78). Hyperbola a přímka (79). Sečna, tečna a normala bodu hyperboly (80—81). Tečna z daného bodu na hyperbolu (82). Délka tangenty, subtangenty, normaly a subnormaly (83). Úhly tečny s provodiči bodu dotyku, sestrojení tečny (84). Průměry hyperboly, průměry sdružené (85—87). Hyperbola vztažená na dva sdružené průměry (88). Vrcholová rovnice hyperboly (89) . . 83—99

O parabole. Výměr paraboly (90). Vrcholová rovnice paraboly (91). Rozbor rovnice (92). Poloha bodu hledíc k parabole (93). Provodič bodu paraboly a její řiditelka (94). Parabola a přímka (95). Sečna, tečna, normala bodu paraboly (96—97). Sestrojení tečny a normaly v bodě paraboly (98). Tečna z daného bodu na parabolu (99). Úhel tečen z bodu na parabolu, místo průseků kolmých tečen (100). Délka tangenty, subtangenty, normaly a subnormaly (101). Průměry paraboly (102). Parabola vztažená na tečnu a sdružený jí průměr jako osy souřadnic (103). Plocha paraboly (104) . 99—111

Rovnice kuželoseček v souřadnicích polarných (105) . . 111—113

O vzájemném vztahu kuželoseček;
historická poznámka (106—107) . . . . . 113—116

Dodatek ku geometrii kuželoseček. Každá kuželosečka je buď ellipsa buď hyperbola buď parabola (108—109). Každá křivka druhého stupně je kuželosečka (110) . . . . . 116—122

Úlohy . . . . . 123—142

Opravy.

Stránka	8,	shora	řádek	1,	místo:	reálné	čti: reálné.
„	9,	„	„	6,	„	Za	„ Pro
„	10,	zdola	„	11,	„	$-y$	„ $-y'$
„	10,	„	„	10,	„	$+y$	„ $+y'$
„	42,	shora	„	12,	„	$n\,y'' + n'$	„ $m\,y'' + n$
„	44,	zdola	„	7,	„	(1)	„ (2)
„	47,	shora	„	16,	„	K;	„ K,
„	47,	„	„	17,	„	, a	„ ;
„	57,	zdola	„	3,	vynechat slovo jeden.		
„	59,	„	„	9,	místo:	(1)	„ (3)
„	59,	„	„	4,	„	$O\,P + P'$	„ $[O\,P + O\,P']$
„	59,	„	„	3,	„	(1)	„ (3)
„	59,	„	„	2,	„	O'_2	„ O',
„	62,	„	„	4,	„	(3)	„ (4)
„	80,	zdola	„	16,	„	$\frac{x'^2}{a^4} =$	„ $\frac{x'^2}{a^4} +$
„	92,	„	„	16,	„	$-a^2 b^2$	„ $-a^2 b^2)$
„	96,	shora	„	10,	„	O	„ 0
„	106,	zdola	„	17,	„	$2x$	„ $2x_1$
„	125,	„	„	18,	„	$\frac{\triangle - x_1}{x_1}$	„ $\frac{\triangle}{2}$
„	136,	zdola	„	3,	„	je	„ je (str. 80, úl. 6):

Přítomně předložený náklad této školní knihy vytisknut byl pouze v malém počtu exemplářův, aby tyto k posouzení zaslány býti mohly. Ve školním vydání svrchu uvedené chyby již v textu opraveny budou.