

Uč

# MĚŘITVÍ

PRO

## NIŽŠÍ GYMNASIA.

SESTAVIL

JAN DŘÍZHAL.

ODDÍL DRUHÝ.

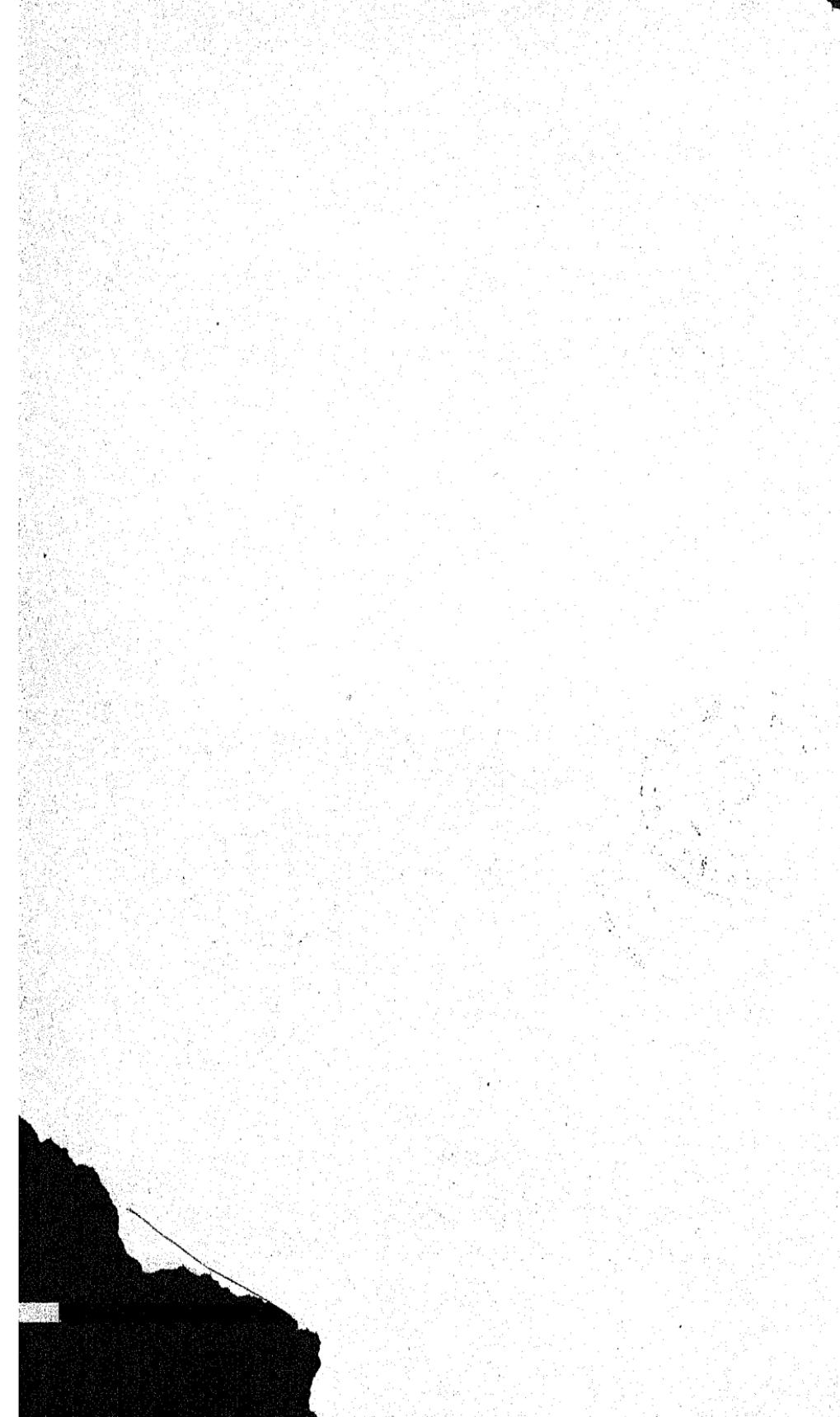


Třetí vydání.

Cena 70 kr.

V PRAZE.

NÁKLADEM KNĚHKUPECTVÍ: I. L. KOBER.  
1880.



# MĚŘICTVÍ

## pro nižší gymnasia.

Sestavil

J. Dřízhal.



II. oddíl.

Třetí vydání.



V PRAZE.

Nákladem kněhkupectví: I. L. Kober.

1880.

P

ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA  
PEDAGOGICKÉ FAKULTY  
HRADEC KRÁLOVÉ

Sign. číslo: 01213/2

Exemplář č. 202199

Národní kněžískára: I. L. Kober v Praze.

## X. O kruhu.

### 1. Střed, obvod, poloměr a průměr.

1. Pohybuje-li se přímka AO na rovině kolem pevného bodu O (obr. 130.) tak, až se opět do své prvočinné polohy navrátí, opře se konečným bodem A přímky té čára křivá, ježto kružnice se nazývá; rovina kružnicí omezená slove *kruh*. Bod O nazývá se *střed*, *střediště* (centrum). Celá kruhová křivka služe *obvod* neb *periferie*; přímka ze středu k obvodu jdoucí jmenuje se *poloměr* (radius). Přímka, kteráž středem kruhovým prochází a dva body na obvodu spojuje, zove se *průměr* (diameter). Sestává tedy každý průměr z dvou poloměrů. V obr. 130. je přímka AO poloměr, přímka CD=CO+OD průměr.

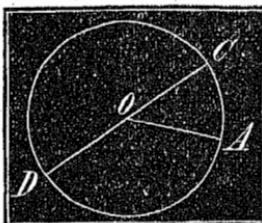
V kruhu se udává každým poloměrem vzdálenost periferie a středu. Dle toho, jak kruh vznikl, jsou délky ty sobě rovny.

*V kruhu jsou poloměry sobě rovny.*

Obr. 130.

Poněvadž jest každý průměr roven součtu dvou poloměrů, *jsou* tedy *v kruhu všechny průměry sobě rovny*.

Bod, kterýžto má od středu buď věčší aneb menší vzdálenost, než jest poloměr, nenáleží k obvodu, nýbrž nalezá se buď *vně* aneb *uvnitř* kruhu.



*Dva kruhy jsou shodné — jsou si rovny —, jsou-li poloměry aneb průměry jejich sobě rovny; neboť by se pokryly, kdyby se jeden na druhý středem náležitě položil.*

### 2. Oblouk, úhel středový, kruhový výsek.

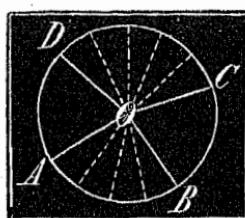
1. Každá část obvodu nazývá se *oblouk* (arcus), ku př. v obr. 130. oblouk AC, AD.

Úhel, jenž vrcholem svým v středu kruhovém leží a jehož

ramena jsou poloměry kruhu, jmenuje se *úhel středový, středoúhel*, ku př. úhel AOC, AOD (obr. 130).

Část kruhové plochy, omezena dvěma poloměry a obloukem, nazývá se *výsek kruhový* neb *výseč kruhová* (sector), ku př. (obr. 130.) výsek AOC, výseč AOD.

2. Jsou-li středové úhly AOD a BOC (obr. 131.) sobě rovny a položíme-li výsek AOD na výsek BOC tak, že se rovné úhy AOD a BOC pokryjí, padne bod A na bod B, bod D na bod C, neboť jsou poloměry sobě rovny a, jelikož mají oblouky AD a BC od bodu k bodu tuží vzdálenost od středu kruhového O, pokryje se oblouk BC obloukem AD, výsek BOC výsekem AOD; pročež pravíme:



Obr. 131.

*V též kruhu nleží k rovným středovým úhlům rovné oblouky a rovné výseky. K rovným obloukům nleží rovné středové úhly a rovné výseky. K rovným výsekům nleží rovné oblouky a rovné úhly.*

3. Sestává-li úhel AOB (obr. 131.) ze čtyř rovných částí a úhel COD z pěti takých rovných částí, sestává i oblouk AB ze čtyř, oblouk CD z pěti rovných částek; taktéž sestává výsek AOB ze čtyř, výsek COD z pěti rovných částí.

Porovnáme-li úhel AOB s úhem COD, má se:

$$\text{AOB : COD} = 4 : 5.$$

Taktéž se mají oblouky a výseky, totiž:

$$\text{arc. AB : arc. CD} = 4 : 5$$

$$\text{sec. AOB : sec. COD} = 4 : 5;$$

pročež pravíme :

*V kruhu mají se k sobě úhly středové, jako se k sobě mají oblouky a výseky k nim příslušné.*

### 3. Tetiva, úsek kruhový.

1. Přímka, kteráž v kruhu dva obvodové body spojuje, sluje *tetiva* (chorda).

Část plochy kruhové, jižto tetiva s obloukem opatým omezuje, jmenuje se *úsek kruhový* (skrojek) neb *kruhová úseč* (segmentum) ku př. (obr. 132.) tetiva AB, úsek AMB.

Každou tetivou rozděluje se kruh na dvě nerovné částky. Z těchto nerovných částí jest ta věčší, v níž kruhový střed leží.

Jde-li tetiva v kruhu středem, stane se průměrem.

Průměrem dělí se kruh na dvě rovné částky — polokruhy — průměrem se kruh rozpoluje.

2. Učíme v kruhovém obvodu (obr. 133.) oblouk AB rovným oblouku CD.

Jak z předešlého učení víme, náležejí k rovným obloukům rovné úhly a výseky. Vedeme-li ve výseku AOB tetivu AB, ve výseku COD tetivu CD; vzniknou dva rovnoramenné trojúhelníky AOB a COD. Trojúhelníky tyto se shodují; pokryjí se, když se náležitě na sebe položí. Z toho vysvítá, že je tetiva  $AB = CD$ .

Pravíme tedy:

*V kruhu náležejí k rovným obloukům rovné tetivy.*

Jsou-li na opak tetivy AB a CD rovné, jsou rovnoramenné trojúhelníky AOB a COD shodné; mají strany na vzájem rovné.

Položíme-li trojúhelníky ty jeden na druhý, pokryjí se oba středové úhly, oboje oblouky AB a CD a oboje vzniklé úseky.

*V kruhu náležejí k rovným tetivám rovné středové úhly, rovné oblouky a rovné úseky.*

3. Když se v rovnoramenném trojúhelníku spustí s vrcholu k základnici přímka kolmá, rozpůlí se kolmou tou úhel ve vrcholu — (v obr. 133.) středový úhel AOB — základnice trojúhelníka toho — tetiva AB.

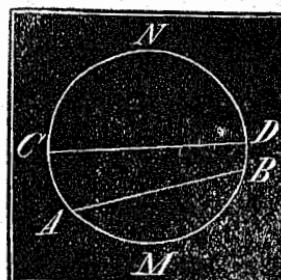
Prodloužíme-li kolmici OE až k bodu H, jsou oblouky AH a BH sobě rovny, neboť náležejí k rovným středovým úhlům AOH a BOH; pravíme tedy:

*Když se spustí v kruhu ze středu k tetivě přímka kolmá, rozpoluje se kolmice tou 1. úhel středový, 2. tetiva a 3. když se kolmice ta až k obvodu prodlouží, rozpůlí se i oblouk, jímž jest ona tetiva opatřá.*

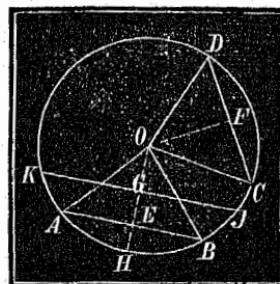
4. Rozpůlíme-li v rovnoramenném trojúhelníku AOB (obr. 133.) úhel ve vrcholu — středový úhel AOB — stojí rozpolovací přímka OE (§. 55.) k základnici — k tetivě AB — kolmo a rozpoluje ji.

Prodloužíme-li přímku OE až k bodu H, bude oblouk AH = BH, neboť náležejí oboje k rovným úhlům AOH a BOH; protož pravíme:

Obr. 132.



Obr. 133.



*Když se rozpůlí v kruhu středový uhel a vede přímka rozpolovací, stojí přímka ta na tetivě kolmo, rozpoluje ji a prodlužkou svou rozpoluje i oblouk, k tetivě té příslušný.*

5. Když se v trojúhelníku rovnoramenném s vrcholu vede k základnici přímka kolmá, stojí přímka ta na základnici kolmo v bodu — rozpolovacím.

Jestli že na opak základnici rozpůlíme a k ní v bodu rozpolovacím přímku kolmou vytýčíme, půjde kolmice ta vrcholem onoho trojúhelníka.

Rozpůlíme-li tedy (v obr. 133.) tetivu AB v bodu E a vytýčíme-li v bodu tom přímku kolmou, půjde kolmice ta vrcholem O trojúhelníka AOB neb středem kruhovým; pročež díme:

*Když v kruhu tetivu rozpůlíme a v bodu rozpolovacím k ní vytýčíme přímku kolmou, jde kolmice ta středem téhož kruhu.*

Kolik kolmic může se vztýčiti k tetivě v středu jejím.

6. Spustíme-li k oběma rovným tetivám AB a CD ze středu O (obr. 133.) kolmice OE a OF, jsou kolmice ty výškami shodných trojúhelníků AOE a COF. Trojúhelníkové shodní mají výšky rovné; jest tedy  $OE = OF$ .

Kolmice OE a OF udávají zároveň vzdálenost oněch rovných tetiv AB a CD od středu O a poněvadž jsou kolmice ty sobě rovny, pravíme:

*V kruhu mají rovné tetivy od středu rovnou vzdálenost.*

Jsou-li naopak kolmice OE a OF sobě rovny, jsou trojúhelníky AOE a COF shodné (proč?) a tedy  $AE = CF$  a jelikož jest  $AE = \frac{1}{2}AB$ ,  $CF = \frac{1}{2}CD$ ; jest tedy i  $AB = CD$  t. j.:

*Mají-li v kruhu dvě tetivy od středu rovnou vzdálenost, jsou tetivy ty sobě rovny.*

7. Vedeme-li bodem G tetivu KJ kolmo k přímce OE, jestliž z obrazce patrnó, že jest oblouk KABJ věčší než oblouk AB, tetiva KJ věčší než tetiva AB a kolmá OG menší než kolmá OE, pročež díme:

*Čím věčší tetiva, tím menší její od středu vzdálenost; čím menší vzdálenost od středu, tím věčší jest tetiva.*

Jsou tedy tetivy tím věčší, čím jsou bližší středu. Tetiva středem jdoucí jest nejvěčší nebo jinak *průměr jest věčší, než kterákoli tetiva.*

8. Jelikož víme, že jdou kolmice, kteréž se v bodech rozpolovacích k tetivám vytýčí, středem kruhovým, vyhledá se pomocí oněch kolmic střed kruhový takto: Vede se tetiva libovolně (obr. 184.) a rozpůlí se; v rozpolovacím bodu vytýčí se kolmá a prodlouží se oběma konci až k obvodu. Jelikož jde kolmice tato středem kruhovým, je průměrem kruhu a střed její jest středem kruhovým.

Známe-li jen část obvodu ku př. oblouk MDN (obr. 135.), můžeme i v tomto případu střed kruhový nalézti.

Vedeme-li dvě tetivy CD a DF a vytýčí-li se v rozpolovacích bodech tetiv těchto kolmice GH a JK; leží, jak víme, střed kruhový v kolmé GH i v kolmé JK a tudíž v společném průseku obou, totiž v bodu O.

Vedeme-li OD, může se poloměrem DO kruh (obvod) doplniti.

9. Třemi danými body vésti kruh. Jsou li (obr. 135.) C, D, F body tyto, vedou se přímky CD a DF a považují se za tetivy. Dle předešlého návodu vyhledá se střed — bod O. Spojíme-li body C, D, F s vyhledaným bodem O, jsou trojúhelníky COG a DOG, jakož i DOJ a OFJ shodné. Jest tedy  $CO=DO=FO$ . Opíše-li se kruh délkom CO kolem bodu O půjde týž kruh bodem D i F.

Kolmé GH a JK jsouce čáry přímé mohou se jenom v jediném bodu séci, kolem něhož poloměrem CO tolíko jeden kruh vésti se může; pročež pravíme:

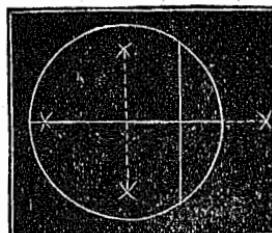
*Třemi danými body lze tolíko jeden kruh vésti.*

Body C, D, F spojili jsme dvěma přímkama CD a DF. Kdyby však body ty tak položeny byly, že by se tolíko jednou přímkou spojiti mohly, že by na jedné přímce položeny byly, nemohl by se jimi kruh vésti; neboť kruh, jenž body C a D prochází, nemůže žádným jiným bodem na přímce CD ležícím zároveň jít; majít jenom bodové C a D od středu O rovnou odlehlost. Středová vzdálenost bodu G je menší než délka CO aneb DO. Kdyby se přímka CD prodloužila, měl by pak každý bod na prodlužce té od středu O vzdálenost větší než jest DO neb CO; pročež se praví:

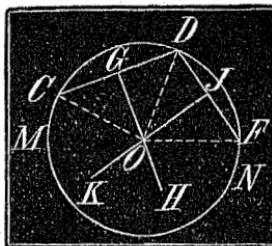
*Třemi na přímce jedné ležícími body se kruh vésti nemůže.*

10. Má se určitý oblouk AC rozpůlit. Je-li spolu střed kruhový znám, vedou se libovolným poloměrem kolem konečných bodů

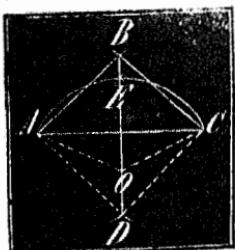
Obr. 184.



Obr. 185.



Obr. 136.



oblouku toho oblouky průsečné (obr. 136.), Průsečný bod B se spojí se středem O přímkou BO, anaž daný oblouk AC rozpoluje v bodu E.

Není-li střed znám, opíši se oblouky průsečné na obou stranách oblouku daného kolem obou bodů konečných A a C. Průsečné body B a D se spojí přímkou BD, již se daný oblouk AC rozpoluje v bodu E.

O pravosti obojího tohoto výkonu se přesvědčíme, pak-li vedeme tetivu AC. Vedou-li se v případu prvním poloměry OA a OC, přímky AB a BC, vzniknou dva rovnoramenné trojúhelníky na též základnici totiž na tetivě AC a jak známo, rozpoluje se přímkou OB základnice ta a úhel AOC, pročež i oblouk AC.

Vedou-li se v druhém případu přímky AD a CD, vzniknou rovněž dva rovnoramenné trojúhelníky na též základnici AC, ježto se přímkou BD rozpoluje a protož se rozpůlí i oblouk, jenž k tetivě té náleží.

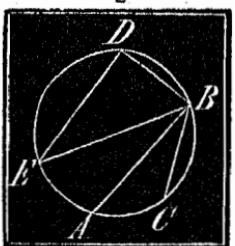
Vedte oblouky libovolně a rozpůlte je.

Vedte oblouky libovolně a rozdělte je na dva, na čtyry rovné díly.

#### 4. Úhly obvodové.

1. Úhel obvodový nazývá se ten, jenž vrcholem svým na obvodu leží a jehož ramena jsou tetivami kruhu, ku př.: úhel ABC, obr. 137.

Obr. 137.



Každý obvodový úhel opírá se v kruhu o určitý oblouk, totiž o ten oblouk, jenž jest mezi ramenoma jeho rozpjetý. Obnáší-li oblouk tento polovici obvodu, pravíme o úhlu obvodovém, že jest v polokruhu, ku př. obvodový úhel BDE.

2. Opírá-li se úhel obvodový s úhlem středovým o stejný oblouk, obnáší jen polovici úhlu středového anebo jinak, úhel středový jest roven dvojnásobnému úhlu obvodovému.

V případu tomto mohou úhly ty mít polohu trojí: 1. bud leží úhel středový vrcholem na některém rameni úhlu obvodového, neb jest 2. vnitř anebo 3. vně úhlu toho.

V obrazci 138. leží středoúhel BOC na rameni AB obvodového úhlu BAC. Úhel BOC jest úhlem zevnitřním rovnoramenného

trojúhelníka AOC a proto jest roven úhlům  $A + C$ . Jelikož jest úhel  $A = C$ , jest tedy úhel  $BOC = 2A$ .

V obrazci 139. jest středoúhel  $BOC$  vnitř obvodového úhlu  $BAC$ .

Vedeme-li průměr AD, jest úhel  $BOC = a + b$ , úhel  $BAC = m + n$ .

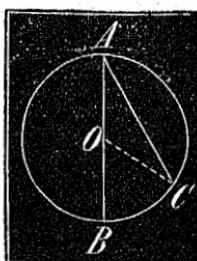
Úhel  $a$  jest zevnitřní úhel trojúhelníka AOB a tedy roven dvojnásobnému úhlu  $n$ , totiž:

$$a = 2n.$$

Takéž jest  $b = 2m$ ;

pročež jest  $a + b = 2m + 2n = 2(m + n)$ ,  
anebo  $BOC = 2BAC$ .

Obr. 138.



V obrazci 140. jest středoúhel  $BOC$  vně obvodového úhlu  $BAC$ . Vedeme-li průměr AD, jest:

$$a + b = 2n + 2m$$

a úhel  $a = 2n$ ;

pročež odčítáním:  $b = 2m$

anebo  $BOC = 2BAC$ .

Obr. 139.



Jest tedy patrné, že jest středoúhel, když se opírá s úhlem obvodovým o stejný oblouk, dvakrát tak velký, jak úhel obvodový aneb že obnáší úhel obvodový polovici úhlu středového, když se spolu o stejný oblouk opírají.

Poněvadž obnáší úhel středový tolik stupňů (úhlových), kolik má stupňů (obloukových) oblouk k němu příslušný; obnáší tedy úhel obvodový polovici tolik stupňů (úhlových), kolik stupňů (obloukových) má oblouk, jenž k němu náleží.

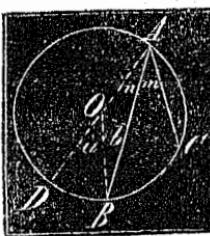
Pravíme též: *Obvodový úhel má za míru polovici oblouku toho, o něž se na obvodu opírá.*

Stojí-li tedy úhel obvodový na polokruhu, obnáší  $90^\circ$ , jelikož má polokruh  $180^\circ$ , protož pravíme:

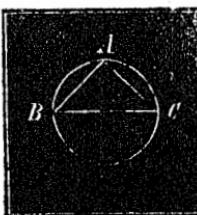
*Úhel v polokruhu obnáší  $90$  a neb jest úhel pravý.*

V krabu může se tedy lehko sestrojiti úhel pravý (obr. 141.) a trojúhelník pravoúhelný. Vede-li se průměr BC a spojíme-li konečně

Obr. 140.



Obr. 141.



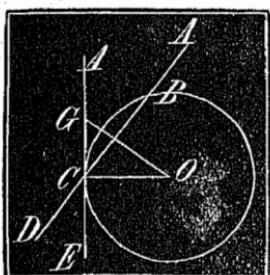
body jeho s některým bodem na obvodě ku př. s bodem A, jest úhel  $BAC$  pravý a trojúhelník  $BAC$  pravoúhelný.

Sestrojte v kruhu více obvodových úhlů tak, aby se o stejný oblouk opíraly; budou úhly ty sobě rovny? Jak se vyjádří věta o rovnosti úhlů těch?

### 5. Sečná a tečná.

1. Vede-li se z bodu vnějšího kruhem přímka, protne se kruh přímkou tou jen ve dvou bodech; neboť, kdyby tři byly, aneb více jich bylo, musely by body ty na přímce ležeti a třemi na přímce ležícími body se kruh vésti nemůže.

Obr. 142.



Přímka  $AD$  (obr. 142.), ježto z bodu vnějšího vychází a jížto se kruh ve dvou bodech  $B$  a  $C$  protíná, nazývá se *přímka sečná* neb *sečna*.

Pohybuje-li se sečná  $AD$  tak, že se průsečník bod  $B$  k bodu  $C$  neustále přibližuje, stane se konečně, že body tyto splynou — v *jediný* bod. Přímka  $AD$  zaujme polohu  $AE$  a bude mít s kruhem společně jen jediný bod  $C$ .

Přímka, kteráž má s kruhem jen jeden společný bod, nazývá se *přímka tečná* neb *tečna*, a bod ten jmenuje se *bod dotýčný*.

Poněvadž má tečná  $AE$  s kruhem jen jeden společný bod  $C$ , leží tedy všeliký jiný bod ve směru jejím mimo kruh a tedy od středu kruhového dále, než bod  $C$ . Spojí-li se bod  $C$  se středem  $O$  a taktéž některý jiný bod tečny té ku př. bod  $G$ , jest  $OG > OC$ .

Z toho vysvítá, že jest poloměr délkom nejkratší mezi tečnou a středem kruhovým.

Vede-li se ale z nějakého bodu k určité přímce přímka nejkratší, stojí přímky takové k sobě kolmo, protož pravíme:

*V bodu dotýčném stojí poloměr k tečné kolmo, nebo jinak, v bodu dotýčném činí poloměr s tečnou úhel pravý.*

Z toho vysvítá zároveň, že stojí v kruhu každý poloměr na obvodu kolmo.

2. Má se ke kruhu vésti tečná daným bodem obvodovým. Daným bodem  $C$  (obr. 142.) vede se poloměr  $OC$  a k poloměru tomu se v bodu  $C$  vytýčí kolmice. Tato kolmice jest tečnou daného kruhu.

Výkon úlohy této záleží v tom, aby se v daném bodu sestrojil pravý úhel.

**3. Z daného, vnějšího bodu A ke kruhu vésti tečnou.**

V tomto případu má se na obvodu kruhovém vyhledati bod, aby přímka z bodu A vycházející v onom bodu obvodovém stála k poloměru kolmo.

Výkon úlohy té provede se takto: Vede se přímka OA (obr. 143.), rozpůlí se a kolem rozpolovacího bodu E opíše se poloměrem OE = AE kruh, jímž se kruh daný ve dvou bodech B a D protne. Průsečné body B a D se spojí s bodem A a přímky AB a AD jsou tečny daného kruhu.

O pravosti výkonu toho přesvědčme se ihned, vedeme-li poloměry OB a OD. Jsou úhly ABO a ADO úhly v polokruhu; obnaší tedy každý  $90^\circ$  a přímky AB a AD stojí kolmo k poloměrům OB a OD, kteroužto vlastnost mají přímky tečné.

Z výkonu toho vysvítá.

*Z bodu vnějšího mohou se k danému kruhu dvě tečny vésti a tyto tečny jsou sobě rovny; neboť se shodují trojúhelníky ABO a ADO (proč?).*

Ze shodnosti trojúhelníků těchto následuje, že se středový úhel BOD, mezi tečnami rozpjatý oblouk BD jakož i tečnami sevřený úhel BAD rozpoluje tou přímkou, kterouž se vnější bod A se středem daného kruhu spojil, totiž přímkou AO.

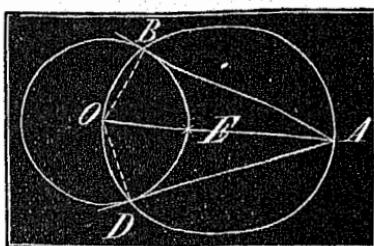
**4. Má se v otvoru daného úhlu sestrojiti kruh, aby se dotýkal obou ramen úhlu toho.** (Obr. 144.)

Jelikož střed dotyčného kruhu, jak v obr. 143. vidíme, v rovné vzdálenosti od obou tečných leží, bude tedy střed toho kruhu, jenž se v otvoru úhlu daného sestrojiti má, taktéž ležeti v rovné vzdálenosti od obou ramen, totiž v té přímce, kterouž se onen úhel rozpůlil. Výkon úlohy té provedeme tedy takto:

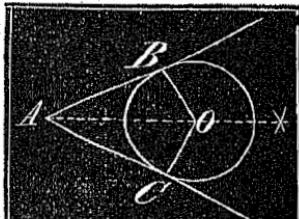
Daný úhel se rozpůlí a vede se přímka rozpolovací. Z libovolného bodu O přímky této spustí se kolmice k oběma ramenům. Kolmice tyto jsou si rovny a jestli se tedy jednou z nich opíše kruh kolem bodu O, dotkne se kruh tento obou ramen daného úhlu.

Úloha tato jest neurčitá, jelikož se neskonale mnicho takových kruhů vésti může.

Obr. 143.



Obr. 144.



Jak by se vedl dotýčný kruh k dvěma různoběžkám, kteréž se neprotinají?

Vykonejte dále tyto úlohy:

Má se vésti kruh, aby se dvou daných rovnoběžek dotýkal (úloha neurčitá).

Má se daným poloměrem sestrojiti kruh, aby se určité přímky v daném bodu dotýkal.

Má se kolem určitého bodu vésti kruh, aby se určité přímky dotýkal.

Má se daným poloměrem sestrojiti kruh, aby se dotýkal ramen daného, pravého úhlu.

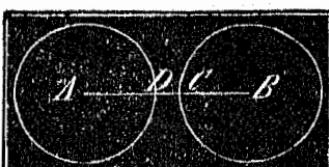
Má se k danému kruhu vésti tečna, aby byla rovnoběžná s danou přímkou.

## 6. Poloha dvou kruhů.

1. Dle polohy své jsou kruhy buď *soustředné* aneb *výstředné*.

Mají-li dva kruhy střed společný, nazývají se soustředné; nemají-li společného středu, jmenují se výstředné.

Obr. 145.



Přímka, kteráž spojuje středy dvou výstředních kruhů, nazývá se *obojstředná*.

Přímka obojstředná má dle polohy kruhů rozličnou velikost. V obr. 145. jest obojstředná AB věčší než součet poloměrů AD a BC, jestiť:

$$AB > AD + BC.$$

Přibližuje-li se kruh B ke kruhu A, stane se obojstředná každým pohybem menší; avšak, jak z obrazce vidíme, bude potud věčší než součet obou poloměrů, dokavad kruhy ty obvody svými k sobě nedosahují.

Obr. 146.



Pohybuje-li se kruh B ve směru obojstředné dále, až bod C s bodem D v jediný bod D splyne (obr. 146.); rovná se v případu tomto obojstředná AB součtu obou poloměrů:

$$AB = AD + BD.$$

Oba kruhy A a B mají nyní společný bod D. Bod tento jest jediný, jenž mimo směr přímky obojstředné, od obou středů věčší odlehlosť  $AE + BE$ , než jest přímka AB.

O kruzích těchto, kteréž jen jediný společný bod mají, pravíme, že jsou *kruhy dotýčné* a dotyk tento jmenuje se *dotyk zevnitřní* neb *vnější*.

*Kruhy se dotýkají sebe zevně, rovná-li se obojstředná součtu poloměrů jejich.*

Pošine-li se kruh B dálé ke kruhu A (obr. 147.), vpadne část jednoho kruhu v kruh druhý. Obojstředná AB jest v případu tomto menší než součet poloměrů:

$$AB < AD + BC.$$

Kruhy tyto mají nyní více společných bodů; pravíme: *Kruhy se protínají* a sice v bodech M a N.

*Kruhy se protínají, je-li přímka obojstředná menší než součet poloměrů.*

Jelikož se body M, C, N jen jeden kruh B a body M, D, N taktéž jen jeden kruh A vésti může, díme:

*Dva kruhy (dvě kružnice) mohou mít jen dva společné body, mohou se jen ve dvou bodech séci.*

Pohybuje-li se menší kruh B ve směru přímky obojstředně dálé, až středem dovnitř většího kruhu vpadne, přibližují se průsečné body M a N k sobě neustále a sloučí se konečně v jediný bod M. (Obr. 148.)

V případu tomto rovná se obojstředná rozdílu obou poloměrů; jest totiž:

$$AB = AM - BM.$$

Oba kruhy A a B mají nyní opět jen jeden bod společný; pravíme o nich taktéž, že jsou *kruhy dotýčné* a sice *uvnitř dotýčné*.

*Kruhy se dotýkají sebe uvnitř, rovná-li se přímka obojstředná rozdílu poloměrů jejich.*

Vpadne-li konečně menší kruh do kruhu většího tak, že jest přímka obojstředná totiž:  $AB < AC - BD$  (obr. 149.), (jestiť  $AC - BD = AB + CD$ ) leží menší kruh uvnitř kruhu většího.

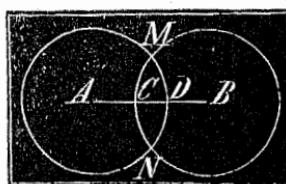
*Je-li obojstředná menší než rozdíl poloměrů, nemají kružnice nijakého společného bodu.*

2. *V otvoru daného úhlu mají se sestrojiti dva kruhy tak, aby se dotýkaly obou ramen úhlu toho a sebe pak zevnitř* (obr. 150.).

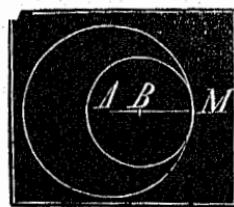
Výkon úlohy té provede se takto:

V otvoru úhlu daného sestrojí se první dotýčný kruh. Jelikož mají kruhy ty být kruhy dotýčné, půjde přímka Ax též středem druhého kruhu a bude tedy přímou obojstřednou. Má-li se druhý kruh prvního kruhu dotýkat, musí dotyk ten být v tom bodu,

Obr. 147.



Obr. 148.



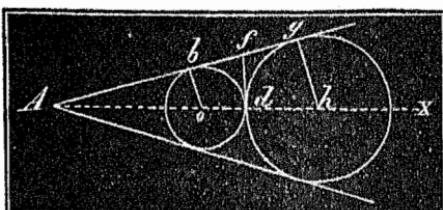
Obr. 149.



v kterémžto se obvod prvního kruhu přímkou Ax protíná, totiž v bodu d.

Přímka, kteráž se v bodu tom kolmo vytýče, na př. přímka df bude tečnou obou kruhů.

Obr. 150.



v bodu g kolmici gh, bude kolmice tato poloměrem druhého kruhu a středem kruhu toho bude bod h. Vede-li se kruh poloměrem gh kolem bodu h, bude se kruh ten dotýkat kruhu prvního a obou rámén daného úhlu.

Z výkonu tohoto vysvítá, jak by se dále více podobných kruhů sestrojiti mohlo. Úloha ta sluje neurčitá, poněvadž se první kruh libovolně, neurčitě sestrojil.

*Vykonejte ještě tyto úlohy:*

Sestrojte dvěma poloměry kruhy zevnitř dotyčné.

Opište dvěma nerovnýma poloměry kruhy uvnitř dotyčné.

Sestrojte daným poloměrem čtyři rovné, zevnitř dotyčné kruhy.

Sestavte třemi nerovnými poloměry kruhy zevnitř dotyčné.

Vedeť v daném kruhu dva kruhy, aby se kruhy ty sebe dotýkaly zevnitř a daného kruhu uvnitř. Kruhy necht jsou nejprv rovné a pak nerovné.

Vedeť mezi dvěma rovnoběžkama dva kruhy tak, aby se oba obou přímek těch dotýkaly a sebe aby se dotýkaly zevnitř.

(Jaká je to úloha určitá či neurčitá?)

Vedeť mezi dvěma rovnoběžkama dva rovné kruhy, aby se kruhy ty sebe dotýkaly zevnitř a z oněch rovnoběžek aby se každý dotýkal jen jedně. Sestrojte pak kruh věčší, aby se dotýkal obou rovnoběžek, a ony rovné kruhy aby se dotýkaly kruhu toho uvnitř.

## 7. Dělení obvodu.

1. Obvod kruhový může se na rovné díly způsobem měřickým rozděliti v případech těchto:

a) *Když se má rozpůlit.*

Průměrem rozděluje se obvod na dvě rovné částky — rozpoluje se.

Rozpůlíme-li vzniklé díly opět, bude každý obnášeti čtvrtinu

Tato tečná rovná se tečné bf a bude zároveň rovna tečné druhého kruhu, kteráž z bodu f ke kruhu tomu půjde; pročež se učiuí  $fg = df = bf$ . Poněvadž stojí poloměry v bodech dotyčných k tečnám kolmo, bude tedy poloměr druhého kruhu stát kolmo k tečné fg v bodu g. Vytýče-li

celého obvodu. Dalším půlením rozdělí se obvod na 8, 16, 32... rovných dílů.

*b) Rozdělit na tři rovné díly:*

Vede se průměr AB (obr. 151.), kolem obvodového bodu B opíše se poloměrem BO oblouk až k průseku pereferie v bodech D a E.

Spojíme-li body D a E s bodem O a B jsou trojúhelníky ODB a OBE rovnostranné, jest tedy úhel BOE =  $60^\circ$  = DOB; úhel DOE =  $120^\circ$ , pročež obnáší oblouk DE třetinu celého obvodu.

Půlením vzniklých oblouků rozdělí se obvod na 6, 12, 24... rovných dílů.

*c) Rozdělit na čtyry rovné díly:*

Na čtyry rovné díly rozdělí se obvod, když se vedou dva k sobě kolmé průměry.

Když se kruh na čtyry rovné díly rozdělí, nazývají se díly tyto *kvadranty* (čtverníky).

*d) Rozdělit na pět rovných dílů:*

Vede se průměr AB a k němu kolmý poloměr CO (obr. 152), poloměr OB se rozpůlí a kolem rozpolovacího bodu D se opíše délkom CD oblouk CF. Délka CF dá se pětkrát do obvodu vnést.

Poznam. Tento rozdělovací způsob zde odůvodnit nelze; vyžaduje se k tomu rozsáhlejší znalost pravd měřických, kteréžto se tuto v oboru bráti nemohou.

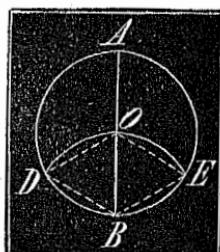
*e) Rozdělit na šest rovných dílů:*

Každý poloměr dá se do obvodu kruhu svého šestkráté vnést. Sestrojíme-li poloměrem OB (obr. 151.) v kruhu rovnostranný trojúhelník BOE, jest úhel BOE =  $60^\circ$ , pročež jest i oblouk jeho BE =  $60^\circ$  (obloukových), což se rovná  $\frac{360^\circ}{6}$ .

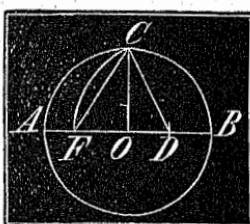
Jiným způsobem může se ono rozdelení i takto provésti:

Vede se průměr AB (obr. 153.) a poloměrem OB opíše se kolem obou konečných bodů průměru toho průsečné oblouky DOE a COF. Oblouky BD, BE, EF... jsou si rovny.

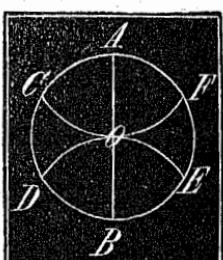
Obr. 151.



Obr. 152.

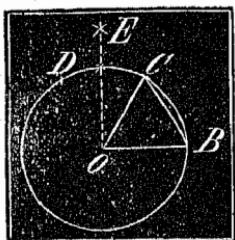


Obr. 153.



Vnesme poloměr dvakrát do obvodu kruhového (obr. 154.) tak, aby byly oblouky BC a CD sobě rovny; rozpůlme oblouk CD a vědme přímku rozpolovací OE. Lehko se vyrozumí, že jest úhel BOE úhel pravý.

Obr. 154.



Měl-li by se tedy úhel pravý sestrojiti, provede se výkon ten takto: Libovolným poloměrem opře se kolem bodu, jenž vrcholem úhlu toho býti má, oblouk a do oblouku toho se vnesе onen poloměr dvakrát tak, aby byla část  $BC = CD$ . Druhá část oblouku toho totiž CD se rozpůl a bod rozpolovací se spoji s tím bodem, kolem něhož se oblouk opsal.

Sestrojte dle udaného návodu v určitém bodu dané přímky úhel pravý nebo jinak, vytyče v určitém bodu k dané přímce přímku kolmou.

Vytyče k dané přímce v konečném bodu kolmici.

Sestrojte danou stranou čtverec; sestavte dvěma nerovnýma stranama obdélník; vede ke kruhu v daném bodu přímku tečnou.

f) *Rozdělit na osm rovných dílů:*

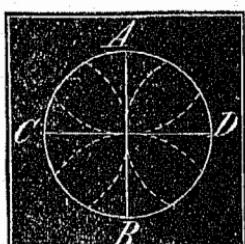
Vedou se dva k sobě kolmé průměry a vzniklé oblouky se rozpůl.

g) *Na deset rovných dílů:*

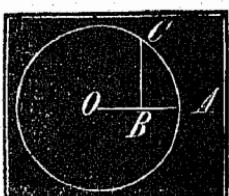
Jako v čísle 4. vyhledá se délka OF (obr. 152.). Délka tato dá se do obvodu desetkrát vnéstí.

h) *Na dvacet rovných dílů:*

Obr. 155.



Obr. 156.



Vedou se dva k sobě kolmé poloměry AB a CD (obr. 155.) a kolem obvodových bodů A, B, C, D opíši se průsečné oblouky poloměrem téhož kruhu.

Pravost tohoto dělení vysvítá z důvodu v případu b a e.

Poznam. Rozumí se, že se rozdělovací oblouky celé věci nemusí; znamenají se jen průsečné body.

2. *Dodatek.* a) Nemá-li se v dělení velké přesnosti hleděti, dá se obvod na sedm rovných dílů takto rozdělit:

Vede se poloměr OA (obr. 156.), rozpůl se a v rozpolovacím bodu B vytýčí se kolmice BC. Kolmice tato dá se do obvodu sedmkrát vnéstí.

b) Na libovolný počet rovných dílů rozdělí se způsobem mechanickým obvod kruhový takto:

Vede se průměr AB (obr. 157.), kolem obou obvodových bodů A a B vedou se poloměrem AB průsečné oblouky a průměr daného kruhu se rozdělí na tolik rovných dílů, na kolik dílů obvod rozdělit se má, ku př. na 7. Druhým, 4tým, 6tým atd. bodem a průsečními body obou velkých, poloměrem AB opsaných oblouků vedou se přímky rozdělovací. Přímkami těmito rozdělil se obvod na určený počet rovných dílů, v našem příkladu na sedm dílů.

3. Mimo uvedené rozdělovací způsoby dá se obvod též úhlově rozdělit.

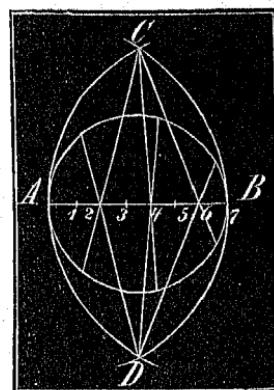
Sestrojíme-li totiž v kruhovém středu úhel, jenž obnáší tolikatý díl součtu  $360^\circ$ , na kolik dílů se obvod rozděliti má, utnou ramena úhlu toho, až k obvodu prodloužena jsouce, tolikatý díl z obvodu kruhového, na kolik rovných dílů se celá periferie rozděliti měla.

Ku př. měl by se obvod rozděliti na devět rovných dílů.

V kruhovém středu sestrojí se úhel  $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ . Oblouk, jež ramena úhlu tohoto utínají, obnáší devátý díl celého obvodu a délka jeho dá se tedy devětkrát do obvodu vnést.

Týmž způsobem se dá obvod lehko rozděliti na 4, 5, 6, 9, 10, 12 rovných dílů.

Obr. 157.



### 8. Přímočárné obrazce v kruhu.

1. Úhelník, jenž vrcholy svými na obvodu leží a jehož strany jsou tetivami kruhu, nazývá se do kruhu *vepsaný* anebo kruhem *obepsaný*.

Do kruhu mohou se vepsati úhelníky pravidelné i nepravidelné.

Má-li se do kruhu vepsati úhelník pravidelný, rozdělí se obvod na tolik rovných dílů, kolik stran úhelník vepsaný máti má. Sestrojíme-li pak body rozdělovací, budou všechny tetivy rovné a takéž budou i úhly mezi tetivami rovné, jelikož jsou úhly obvodové a o rovné oblouky se opírají.

Má se do kruhu daného vepsati:

pravidelný trojúhelník — trojec;

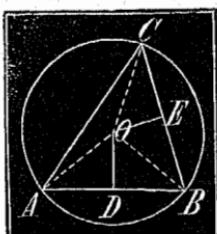
pravidelný čtyřúhelník — čtverec;

pravidelný pěti-, šesti-, osmi-, dvanáctiúhelník.

2. Daný trojúhelník kruhem obepsati. Poněvadž se třemi body, když body ty na přímce jedně neleží, kruh vésti dá, může se tedy každý trojúhelník kruhem obepsati. Obepíše se pak trojúhelník kruhem takto:

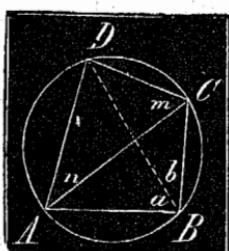
Strany daného trojúhelníka považují se za tetivy a hledá se střed kruhový. Rozpůl se totiž v daném trojúhelníku ABC (obr. 158.) dvě strany ku př. AB a BC; v bodech rozpolovacích vytýčí se kolmice a prodlouží se až k průseku O. Spojme-li v trojúhelníku ABC všechny vrcholy s bodem O, budou délky AO, BO, CO sobě rovny, jakž to ze shodnosti trojúhelníků AOD a BOD, BOE a COE vysvítá.

Obr. 158.



3. Je-li obrazec mnohostranný, nemůže se vždy kruhem obepsat. Tak se dá na př. čtyřúhelník jen pod jistou výminkou kruhem obepsati.

Obr. 159.



anebo :

$$D + \underbrace{a + b}_{B} = 180^\circ$$

$$D + B = 180^\circ \text{ t. j.:}$$

*V čtyřúhelníku do kruhu vepsaném obnášejí příčné úhly dohromady  $180^\circ$  neb  $2R$ .*

Z toho soudíme, že se čtyřúhelník jen v tom případě kruhem obepsati dá, jestliže se příčné úhly jeho součtem dvěma pravými rovnají.

V případu tom vyhledá se střed kruhový jako v předešlé úloze.

Může se každý rovnoběžník kruhem obepsati?

Může se rovnoramenný trapez (lichoběžník) vždy kruhem obepsati?

4. Úhelník pravidelný může se vždy kruhem obepsati. V každém pravidelném úhelníku jest určitý bod, od něhož jak strany, tak i vrcholy rovnou vzdálenost mají. Jak víme, sluje bod ten *střed* a vyhledá se, když rozpůlívše v úhelníku takovém dva k též straně

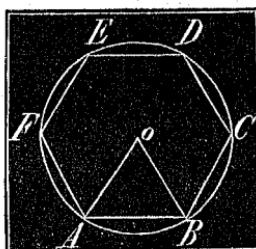
přísléhlé úhly prodloužíme přímky rozpolovací až k společnému jich průseku.

Je-li v úhelníku ABCDEF (obr. 160.) bod o středu a opíše-li kolem bodu toho délku oA kruh, půjde kruh tento všemi vrcholy daného úhelníka a úhelník ten bude tedy kruhem obepsaný.

Sestrojte danou stranou pravidelný troj-, čtyr, šesti-úhelník a obepište kruhem úhelníky ty.

Je-li obrazec mnohostranný, nepravidelný, nemůže se kruhem obepsat; jelikož obrazec takový středu nemá.

Obr. 160.



### 9. Kruh v obrazcích přímočárných.

1. Dotýká-li se kruh všech stran úhelníka, nazývá se do obrazce *vepsaný* anebo obrazcem *obepsaný* ku př. kruh O (obr. 161.) v trojúhelníku ABC.

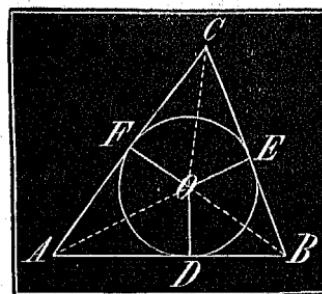
Poněvadž se kruh všech stran trojúhelníka ABC dotýká, jsou strany ty tečnami a přímka, kterouž se rozpoluje úhel tečnami sevřený, prochází středem kruhu toho. Z toho jde pravidlo, že se vyhledá střed kruhu, jenž se všech stran trojúhelníka ABC dotýká, když se dva úhly v trojúhelníku tom rozpolní a rozpolovací přímky až k průseku O prodlouží.

Spusťme-li z bodu O kolmice k stranám daného trojúhelníka, jsou, jak ze shodnosti trojúhelníků AOD a AOF, BOD a AOE vysvítá, kolmice OD, OE a OF sobě rovny. Opíše-li se kruh některou z kolmic těchto, půjde kruh ten v trojúhelníku ABC body D, E, F, a nemaje jiného společného bodu se stranami trojúhelníka toho, dotýká se jich v bodech těch a jest tedy do trojúhelníka vepsaný.

2. Má-li se do čtyrúhelníka nepravidelného kruh vepsati, může se vepsání to jen pod jistou výminkou vykonati. Výminka ta vyhledá se takto: Obepíše-li kruh nepravidelným čtyrúhelníkem (obr. 162.) a vedeme-li ze středu O k stranám kolmice, jest, jak na obrazci vidíme:

$$\begin{aligned} AB &= AE + EB = AH + BF \\ CD &= CG + DG = CF + DH. \end{aligned}$$

Obr. 161.



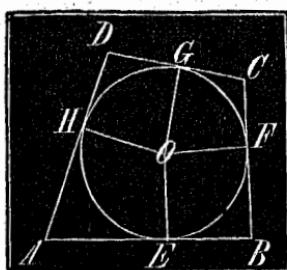
Součet rovností těchto jest:

$$AB + CD = AH + \overbrace{HD} + \overbrace{FB} + CF$$

$$AD + CD = \overbrace{AD} + CB \text{ t. j.}$$

Když se daný kruh čtyřúhelníkem obepíše, jsou v čtyřúhelníku tom součty stran protilehlých sobě rovny.

Obr. 162.



Má-li se tedy na opak do čtyřúhelníka kruh vepsati, bude vepsání to jen tehdáž možné, když budou součty protilehlých stran sobě rovny. Střed kruhový se vyhledá tak, jako v úloze předešlé.

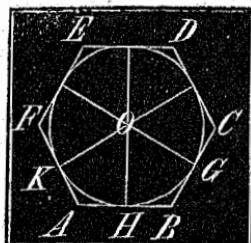
Může se do rovnoběžce kruh vepsati a do kterého?

3. Do úhelníka pravidelného dá se kruh vždy vepsati; neboť mají úhelníky pravidelné střed, totiž bod, od něhož mají všechny strany rovnou vzdálenost. Spustí-li se ze středu toho k stranám kolmá, jsou kolmice tyto sobě rovny a opíše-li se kruh některou z nich, bude se kruh ten dotýkat všech stran a bude tedy do úhelníka vepsaný.

Sestrojte pravidelný troj-, čtyr-, šestiúhelník a vpište kruh do každého z nich.

4. Má-li se kruh pravidelným úhelníkem obepsati, rozdělí se obvod jeho na tolik rovných dílů, kolik stran úhelník ten má. Body rozdělovacími vedou se poloměry a k poloměrům těmito vytýčí se v bodech těch kolmá, ježto se až k průsekům prodlouží. Šestiúhelník ABCDEF (obr. 163.) jest pravidelný, neboť se čtyřúhelníky GOHB, AHOK shodují, pokryly by se totiž jeden druhým, kdyby se náležitě na sebe položily. Ze shodnosti té jde, že jsou úhly A, B, C... a strany FK a AH, AK a BH sobě rovny. Z rovnosti těchto stran následuje, že jest též  $FK + KA = AH + BH$  anebo  $AF = AB = BC \dots$

Obr. 163.



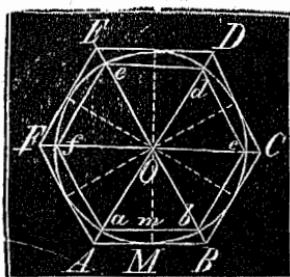
Má se daný kruh obepsati trojcem, čtvercem, pravidelným pěti-, šesti-, osmiúhelníkem.

5. Kruh, do něhož jsme úhelník pravidelný vepsali, může se snadno tolíkéžstranným pravidelným úhelníkem obepsati a sice takto:

Ze středu kruhového spustí se kolmé k stranám úhelníka vepsaného, prodlouží se kolmé tyto až k obvodu a v bodech obvodových se k stranám úhelníka vepsaného vedou rovnoběžky až k průsekům (obr. 164.).

Spojíme-li střed kruhový s body A, B, C, D ..., budou trojúhelníky AOB, BOC, COD ... shodné, pročež jest úhelník ABCDEF pravidelný.

Obr. 164



## 10. Vypočítávání stran úhelníků pravidelných vnitř a vně kruhu opsaných.

1. Vímeť z poučky Pythagorejské, že jest v trojúhelníku pravoúhelném čtverec podpony roven součtu čtverců obou odvěsen.

Je-li tedy délka podpony  $c$ , délka odvěsen  $a$  a  $b$ , jest obsah čtverce podpony  $c$ :

$$c \times c = c^2.$$

Obsah čtverců odvěsen  $a$  a  $b$ :

$$a \times a = a^2$$

$$b \times b = b^2.$$

Dle poučky Pythagorejské jest:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Z tohoto vzorce vyvodí se následující pravidlo:

a) Když jsou v trojúhelníku pravoúhelném obě odvěsnny známy vypočítá se druhá mocnost podpony, když se druhé mocnosti obou odvěsen sečtou, ku př.:  $a = 3$ ,  $b = 4$ .

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Vyhledá-li se v uvedeném příkladu z čísla 25 druhá odmocnina bude podpona  $c$ :

$$c = \sqrt{25} = 5$$

b) Když jsou v pravoúhelném trojúhelníku obě odvěsnny známy, vypočítá se podpona, když se ze součtu druhých mocností obou odvěsen druhá odmocnina vyhledá.

Pravidlo to naznačíme tímto vzorkem:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Když známe součet dvou čísel a zároveň jedno z čísel těch vypočítá se druhé neznámé číslo, jestliže se ono známé číslo od součtu toho odečte.

Je-li dána podpona  $c$  a zároveň dána odvěsna  $b$ , jest druhá mocnost odvěsnny  $a$ :

$$a^2 = c^2 - b^2.$$

Taktéž jest druhá mocnost odvěsny  $b$ :

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

c) Známe-li v trojúhelníku pravoúhelném podponu  $c$  a jednu z obou odvěsen, vypočítá se druhá mocnost odvěsny neznámé, když se od druhé mocnosti podpony odečte druhá mocnost odvěsny dané.

Ku př.

$$c = 5,$$

$$b = 4;$$

$$a^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

Vyhledá-li se z rozdílu toho druhá odmocnina, bude:

$$a = \sqrt{9} = 3.$$

d) Když jest v trojúhelníku pravoúhelném známa podpona  $a$  a jedna z obou odvěsen, vypočítá se druhá odvěsna, když se z rozdílu druhých mocností podpony a dané odvěsny druhá odmocnina vyhledá.

Pravidlo toto naznačí se tímto vzorcem:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Vypočítejte dle uvedených pravidel podponu  $c$ , když jest:

$$a = 15, 18, 24, 34, 37.$$

$$b = 20, 24, 29, 38, 48.$$

Vyhledejte odvěsnu  $a$ , když je dána podpona  $c$  a zároveň odvěsna  $b$  a sice:

$$c = 25, 30, 45, 84, 218$$

$$b = 20, 24, 36, 53, 86.$$

Rozřešte vypočítajíce tyto úlohy:

1. V trojci jest strana  $3\text{dm}$ ; jak veliká jest plocha obrazce toho?

2. V rovnoramenném trojúhelníku jest základnice  $3\text{m } 4\text{dm}$  a ramena jsou dohromady  $10\text{m } 4\text{dm}$ . Jak vysoký jest trojúhelník ten a mnoho-li obnáší plocha jeho?

3. Obměr trojúhelníka rovnostranného jest  $24\text{dm}$ , jak dlouhá jest jedna strana a mnoho-li obnáší plocha trojce toho?

4. V rovnostranném trojúhelníku jest výška  $3\text{m } 4\text{dm}$ ; jak velký jest obměr a mnoho-li obnáší plocha?

5. V trojúhelníku rovnoramenném jest výška  $4\text{m } 8\text{dm}$  a základnice  $6\text{m } 4\text{dm}$ ; jak velký jest obměr trojúhelníka toho?

6. Rovnoraméný, pravoúhelný trojúhelník má obsah  $4\cdot 5\square\text{m}$ ;  $21\cdot 5\square\text{m}$ ,  $874\square\text{m}$ . Jak velké jsou odvěsny jeho a podpony?

7. Daný čtverec má v obměru  $82\text{dm}$ ; mnoho-li obnáší jedna strana a jak dlouhá jest úhlopříčna v čtverci tom?

8. V daném obdélníku obnáší délka  $4\text{m } 2\text{dm}$ , úhlopříčna  $5\text{m}, 5\text{dm}$ ; jak velká jest šířka a plocha obdélníka toho?

9. Obměr určitého obdélníka, jenž jest  $3\text{dm}$  široký, obnáší  $26\text{dm}$ ; jak velká jest úhlopříčna v obdélníku tom?

10. V kruhu, jehož polomér má  $3\text{dm}$ , obnáší vzdáenosť tetivy od středu  $1\cdot5\text{dm}$ ; jak velká jest tetiva ta?

11. V kruhu má polomér  $4\text{dm}$ . Jak jest vzdálena od středu tetiva v kruhu tom, když je rovna poloméru?

12. Z bodu vnějšího vedla se ke kruhu přímka tečná. Jak dlouhá jest tečna ta, když obnáší polomér kruhu toho  $4\text{dm}$  a když je druhý konečný bod tečny od středu  $8\text{dm}$  vzdálen?

13. Když je obsah čtverců:  $16\square\text{dm}^2$ ,  $25\square\text{dm}^2$ ,  $1840\square\text{dm}^2$ ,  $246\square\text{m}^2$ ,  $30\square\text{dm}^2$ : jak dlouhé jsou strany čtverců těch?

14. Ve čtverci obnáší úhlopříčna  $4\text{m}$   $8\text{dm}$ ; mnoho-li obnáší jedna strana a jak velká je plocha čtverce toho?

15. Úhlopříčna určitého čtverce obnáší  $5\text{m}$   $4\text{dm}$ . Jak dlouhý musil by být obdélník, jenž jest  $5\text{dm}$  široký, aby se obsahem svým vyrovnal onomu čtverci?

16. V kosočtverci, jenž má v obměru  $20\text{dm}$ ; obnáší menší úhlopříčna  $6\text{dm}$ ; jak velká je věčší úhlopříčna a mnoho-li obnáší plocha?

17. V kosočtverci obnášíjí úhlopříčny  $2\text{m}$   $5\text{dm}$  a  $3\text{m}$   $2\text{dm}$ ; jak dlouhé jsou strany kosočtverce toho a mnoho-li obnáší plocha jeho?

18. Obměr kosočtverce obnáší  $14\text{m}$ ; jak dlouhá je menší úhlopříčna, když obnáší věčší úhlopříčna  $2\cdot8\text{m}$ .

19. Mnoho-li obnáší obměr a plocha kosočtverce, jehož úhlopříčny obnášejí  $3\cdot2\text{m}$  a  $2\cdot4\text{m}$ .

20. Plocha kosočtverce obnáší  $24\square\text{m}$ . menší úhlopříčna má  $4\text{m}$ . Jak velká je věčší úhlopříčna a jak dlouhé jsou strany téhož kosočtverce?

21. Kdo si chce zaměnit pole, anož má tvar obdélníka a je  $416\text{m}$  dlouhé a  $384\text{m}$  široké, za pole tvaru čtvercového. Jak dlouhé by musily být strany čtverce toho, aby se plochou onomu obdélníku vyrovnal?

22. V kruhu, jehož polomér obnáší  $8\text{dm}$ , vedly se tetivy; jak dlouhé jsou tetivy ty, když jsou od středu kruhového vzdáleny  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$ ,  $5$ ,  $6$ ,  $7\text{dm}$ ?

## 11. Vypočítání stran úhelníků pravidelných.

1. Strana pravidelného trojúhelníka. Je-li ABC (obr. 165.) pravidelný kruhem obepsaný trojúhelník, vedme ze středu kruhového O kolmici OD k straně AC.

Prodlouží-li se OD až k obvodu a spojíme-li bod E s bodem C, jest trojúhelník OCE rovnostranný. Jestit CE strana pravidelného šestiúhelníka a protože  $CE=CO=EO$ , a jelikož se výškou základnice rovnostranného trojúhelníka rozpoluje, jest  
 $DE=DO=\frac{1}{2}EO$ .

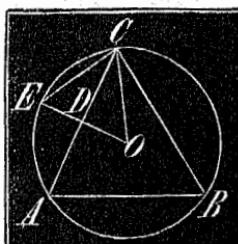
V pravoúhelném trojúhelníku CDO jest:  
 $CD^2=CO^2-DO^2$ .

Poznačíme-li stranu CD písmenem  $s$ , CO poloměr (radius) písmenem  $r$ , jest:

$$s^2=r^2-\frac{r^2}{4}, \quad DO=\frac{r}{2}$$

$$s^2=\frac{4r^2-r^2}{4}=\frac{3r^2}{4}.$$

Obr. 165.



Vyhledá-li se z výrazu tohoto druhá odmocnina, bude:

$$s = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}, \text{ což se takto píše:}$$

$$s = \frac{r}{2} \sqrt{3}.$$

Odmocnina z činitele  $\frac{r^2}{4}$ , totiž  $\frac{r}{2}$  píše se před známkou odmocňovací. Číslo  $\sqrt{3}$ , jehož odmocnina se ukončitě vypočítati nemůže, sluje nesměrné.

Poněvadž jest  $s$  jen půlstrana trojúhelníka ABC, bude celá strana AB = 2s, tedy:

$$AB = r\sqrt{3}.$$

Ze vzorku tohoto vysvítá, že se strana pravidelného kruhem obepsaného trojúhelníka vypočítá, když se poloměr kruhu nesměrným číslem  $\sqrt{3}$  znásobí.

$$\sqrt{3} = 1.73205 \dots$$

ku př.: Je-li  $r = 1^{\text{dm}}$ , jest:

$$AB = 1 \times \sqrt{3} = 1.73205^{\text{dm}} \dots$$

Je-li  $r = 2^{\text{dm}}$ , jest:

$$AB = 2 \times 1.73205 \dots \\ = 3.46410^{\text{dm}} \dots$$

2. Strana kruhem obepsaného čtverce: Vedeme-li průměry AC a BD, jest v pravoúhelném trojúhelníku CDO (obr. 166.):

$$CD^2 = OD^2 + OB^2, OD = OC = r$$

$$CD^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \text{ a}$$

$$CD = \sqrt{2r^2}, \text{ což se takto píše:}$$

$$CD = r\sqrt{2} \text{ t. j.}$$

Strana kruhem obepsaného čtverce se vypočítá, když se poloměr kruhu nesměrným číslem  $\sqrt{2}$  znásobí.

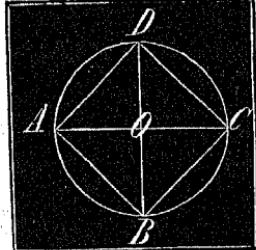
Ku př.  $r = 1^{\text{dm}}$

$$CD = 1 \times \sqrt{2} \sqrt{2} = 1.41421 \dots$$

$$CD = 1.41421^{\text{dm}} \dots$$

3. Strana obepsaného úhelníka. Obepíšeme-li kruh pravidelným úhelníkem, jenž má tolikéž stran jako do kruhu vepsaný úhelník, jsou úhelníky tyto sobě podobny majíce rovné úhly.

Obr. 166.



Je-li  $ab$  strana úhelníka vepsaného (obr. 167.),  $AB$  strana úhelníka obepsaného, a spojíme-li kruhový střed s konečnými body obou stran, jest trojúhelník  $AOB \sim aOb$ .

Vedeme-li  $OM$  kolmo k  $AB$ , jest  $Om$  kolmo k  $ab$ , pročež se má:

$$AB:ab = OM:Om, AB = S, ab = s, OM = r$$

$$S:s = r:Om$$

$$S = \frac{rs}{Om}$$

Kolmice  $Om$  se vypočítá z pravoúhelného trojúhelníka  $aOb$ , jestif:

$$Om^2 = aO^2 - am^2, aO = r, am = \frac{s}{2}$$

$$Om^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$$

Jest tedy:

$$Om = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

V šestiúhelníku jest  $s = r$ .

V případu tomto bude:

$$(Om)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

$$Om = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3} = r \times 0.86602.$$

Dáme-li hodnotu tuto do vzorce, jest

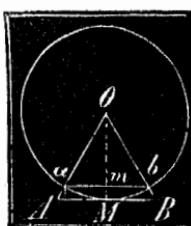
$$S = \frac{rs}{Om}$$

$$S = \frac{r \cdot s}{r \cdot 0.86602}, s = r$$

$$S = \frac{r^2}{r \times 0.86602} = r \times 1.1547 \dots$$

Jestif tedy strana obepsaného, pravidelného šestiúhelníka:  
 $S = r \times 1.1547 \dots$

Obr. 167.



## 12. Vypočítání ploch úhelníků pravidelných.

1. Vepíše-li se kruh do pravidelného úhelníka a spojíme-li v úhelníku všechny vrcholy se středem kruhovým, rozdělí se úhelník na tolik shodných trojúhelníků, kolik má stran v obměru; ku př. šestiúhelník ABCDEF (viz obr. 164.) rozdělí se na šest trojúhelníků.

Vedeme-li v kruhu tom poloměr  $OM \perp AB$ , bude plocha trojúhelníka  $AOB = AB \times \frac{OM}{2}$ .

Vezme-li se plocha trojúhelníka AOB třikrát, kolik stran má úhelník (v příkladu našem 6krát), dá součin plochu celého úhelníka.

$$\text{Jestit plocha } ABCDEF = 6AB \times \frac{OM}{4}.$$

$OM = r$ ; součin  $6AB$  činí obměr O úhelníka, protož jest:

$$ABCDEF = O \times \frac{r}{2} \text{ t. j.:}$$

*Obsah pravidelného úhelníka se vypočítá, když se znásobí obměr polovičním poloměrem kruhu, jenž se do téhož úhelníka vepsal.*

Ku př.:  $AB = 1 \cdot 1547^{\text{dm}}$  . . . ,  $r = 1^{\text{dm}}$

$$Pl = O \times \frac{r}{2}$$

$$O = 6 \cdot 9282^{\text{dm}}$$

$$Pl = 6 \cdot 9282 \times \frac{1}{2} = 3 \cdot 4641 \square^{\text{dm}} \dots$$

### 13. Vypočítání obvodu kruhového.

1. Obepřeme-li kruh pravidelným úhelníkem ku př. šestiúhelníkem a vepře-li se zároveň do téhož kruhu pravidelný šestiúhelník (viz obr. 164.), bude obměr kruhový čili obvod větší než obměr vepsaného, ale menší než obměr úhelníka obepsaného.

Je-li obměr vepsaného úhelníka  $o$ , obvod kruhový (periferie)  $p$ , obměr obepsaného úhelníka  $O$ , jest tedy

$$o < p < O.$$

Obvod kruhový činí rozhraní mezi obměry úhelníků těchto. Jelikož jest strana vepsaného šestiúhelníka rovna poloměru, jest obměr  $o = 6r$ .

V porovnání s průměrem kruhovým  $= d = 2r$ , jest:

$$o = d \times 3.$$

Strana šestiúhelníka obepsaného jest:

$$S = r \times 1 \cdot 1547 \dots$$

$$\text{Obměr } O = r \times 6 \cdot 9282 \dots$$

V porovnání s průměrem:

$$O = d \times 3 \cdot 4641 \dots$$

Vypočítají-li se obměry vepsaných a obepsaných pravidelných úhelníků, 6, 12, 24, 48. . . stranných jest:

Obměr	vepsaného	obepsaného
6 úhelníka	d. 3·00000	d. 3·46410
12 "	d. 3·10582	d. 3·21539
24 "	d. 3·13262	d. 3·15966
48 "	d. 3·13935	d. 3·14608
96 "	d. 3·14103	d. 3·14271
192 "	d. 3·14145	d. 3·14187
384 "	d. 3·14155	d. 3·14166
768 "	d. 3·14158	d. 3·14161
1536 "	d. 3·14159	d. 3·14159

Jelikož se obojí obměr úhelníka 1536-stranného v 5 desetinných místech shoduje, rovná se i obvod kruhový  $p$ , jenž mezi oběma obměry leží, této hodnotě. Jest tedy:

$$p = d \cdot 3·14159 \dots a$$

$$\frac{p}{d} = 3·14159 \dots$$

Udavatel poměru tohoto neb číslo 3·14159 znamená se písmenou  $\pi$ . Číslo toto sluje po Ludolfu, jenž je až na 35 desetinných míst vypočítal, číslo *Ludolfovo* aneb *Ludolfské*. Jest tedy:

$$\frac{p}{d} = \pi \quad a$$

$$p = d\pi \text{ nebo } 2r\pi \text{ t. j.:}$$

*Obvod se vypočítá, když se průměr aneb dvojnásobný poloměr Ludolfským číslem znásobí.*

Číslo Ludolfské nám tedy udává, kolikrát jest obvod čili periferie věčší, než jest průměr kruhu toho.

Nemá-li se v počtu velké přesnosti hleděti, běrá se obyčejně  $\pi = 3·14$  nebo zlomek  $\frac{22}{7}, = 3\frac{1}{7}$ .

Šest desetinných míst tohoto čísla dává zlomek  $\frac{355}{113}$ .

2. Dle vzorku  $p = d\pi = 2r\pi$  může se z obvodu vypočítati průměr neb poloměr. Jestíť

$$d = \frac{p}{\pi}, r = \frac{p}{2\pi}$$

*Vypočítá se z obvodu průměr, když se obvod číslem Ludolfským rozdělí.*

*Poloměr se vypočítá, když se obvod dvoujdsobným číslem Ludolfským rozdělí.*

*Příklady:*

$$1. \quad r = 4^{\text{cm}}; \quad p?$$

$$p = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 14 = 8 \cdot 3 \cdot 14 = 25 \cdot 12^{\text{cm}} = 2^{\text{dm}} \cdot 5 \cdot 12^{\text{cm}}$$

$$2. \quad d = 3^{\text{dm}} \cdot 4^{\text{cm}} \quad p?$$

$$p = 34^{\text{cm}} \times 3 \cdot 14 = 106 \cdot 76^{\text{cm}} = 1^{\text{m}} 6 \cdot 76^{\text{cm}}$$

$$3. \quad p = 28 \cdot 26^{\text{cm}}, \quad d?$$

$$d = \frac{28 \cdot 26}{3 \cdot 14} = 9^{\text{cm}}$$

$$4. \quad p = 31 \cdot 4^{\text{dm}}, \quad r?$$

$$r = \frac{31 \cdot 4}{2 \times 3 \cdot 14} = 5^{\text{dm}}.$$

3. Délka oblouku kruhového. Má-li se délka oblouku kruhového, jenž v stupněch udán jest, vypočítati, stane se vypočtání toto dle následné věty:

*Délka oblouku má se k celému obvodu, jako se má k oblouku tomu příslušný středoúhel k  $360^{\circ}$ .*

Poznačíme-li oblouk písmenou  $a$ , obvod a středoúhel písmeny  $p$  a  $u$ , bude:

$$a:p = u:360^{\circ}, \quad \text{pročež}$$

$$a = \frac{pu}{360}$$

Známe-li poloměr a středoúhel, vypočítá se délka  $a$  dle vzorku tohoto. Ku př.:

$$r = 4^{\text{dm}} \quad u = 60^{\circ}; \quad a?$$

$$a = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 14 \times 60}{360} = 4 \cdot 186^{\text{dm}} \dots$$

Z též srovnalosti vypočítá se úhel středový  $u$ :

$$u = a \cdot \frac{360}{p}$$

$$a = 4 \cdot 71^{\text{dm}} \quad r = 6^{\text{dm}} \quad u?$$

$$u = \frac{4 \cdot 71 \times 360}{2 \cdot 6 \times 3 \cdot 14} = 45^{\circ}.$$

#### 14. Plocha kruhová.

1. Kruh lze pokládati za úhelník mnohostranný, jehož strany jsou neskonale malé a pak se dá plošný obsah jeho vypočítati takto:

$$\text{Jestliž } Pl = 0 \times \frac{r}{2}.$$

U kruhu jest  $O = p = 2r\pi$ , a  $r$  jest poloměr kruhu. Protož bude obsah kruhu  $k$ :

$$k = 2r\pi \times \frac{r}{2} = r^2\pi.$$

Poznačíme-li průměr písmenem  $d$ , jest  $r = \frac{d}{2}$  a tedy  $r^2 = \frac{d^2}{4}$   
a protož bude též:

$$k = \frac{d^2}{4}\pi \text{ t. j.}$$

Obsah plochy kruhové se vypočítá, když se druhá mocnost poloměru číslem Ludolfským znásobí, anebo, když se čtvrtý díl druhé mocnosti průměru kruhového číslem Ludolfským znásobí.

Ku př.:  $r = 5^{\text{dm}}$ ;  $k?$

$$k = 5^2 \cdot 3 \cdot 14 = 78 \cdot 5^{\text{dm}}$$

$d = 8^{\text{cm}}$ ,  $k?$

$$k = \frac{8^2}{4} \times 3 \cdot 14 = 16 \cdot 3 \cdot 14 = 50 \cdot 24^{\text{cm}}$$

2. Ze vzorku  $k = r^2\pi$  dá se též vypočítati poloměr plochy kruhové. Jestit:

$$r^2 = \frac{k}{\pi} \text{ a}$$

$$r = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \text{ t. j. :}$$

Z kruhové plochy se poloměr vypočítá, když se obsah číslem Ludolfským rozdělí a z podílu toho druhá odmocnina vyhledá.

Ku př.:  $k = 28 \cdot 26^{\text{cm}}$

$$r = \sqrt{\frac{28 \cdot 26}{3 \cdot 14}} = \sqrt{9} = 3^{\text{cm}}$$

Jelikož jest též  $k = \frac{d^2\pi}{4}$ , bude:

$$4k = d^2\pi \text{ a}$$

$$d^2 = \frac{4k}{\pi}$$

$$d = \sqrt{\frac{4k}{\pi}} \text{ t. j. :}$$

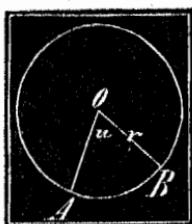
Z plochy kruhové se průměr vyhledá, když se čtyřnásobný obsah její číslem Ludolfským rozdělí a z podílu toho druhá odmocnina vyhledá, ku př.:

$$k = 50 \cdot 24^{\text{cm}} \text{ d?}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 50 \cdot 24}{3 \cdot 14}} = 8^{\text{cm}}$$

3. Obsah výseku kruhového. Je-li výsek kruhový  $v$ , poloměr  $r$  a středoúhel  $u$ , (obr. 168.) vypočítá se  $v$  z následovné srovnalosti:

Obr. 168.



*Má se totiž výsek k celé ploše kruhové jako úhel středový k  $360^{\circ}$*

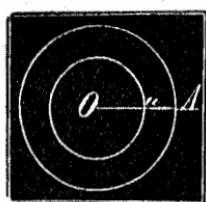
$$v : r^2\pi = u : 360^{\circ}, \text{ pročež}$$

$$v = \frac{r^2\pi u}{360^{\circ}}$$

$$\text{Ku př.: } r = 5^{\text{dm}}, u = 36^{\circ}; v = \\ v = \frac{5^2 \times 3.14 \times 36}{360^{\circ}} = 7.85 \square^{\text{dm}}$$

4. Plocha mezikružná. Sestrojíme-li dva soustředné kruhy (obr. 169.), nazývá se plocha mezi oběma obvody *mezikruží* neb *věnec*.

Obr. 169.



Plocha mezikružná rovná se rozdílu obou ploch kruhových. Jest tedy mezikruží  $M$ , jsou-li poloměry soustředných kruhů  $OA = R$ ,  $Oa = r$ :

$$M = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2).$$

Jelikož se rozdíl  $(R^2 - r^2)$  rovná součinu ze součtu a rozdílu obou polomérů, totiž:

$$R^2 - r^2 = (R + r)(R - r), \text{ jest:} \\ M = \pi(R + r)(R - r) \text{ t. j. :}$$

*Mezikruží se vypočítá, když se součin ze součtu a rozdílu polomérů číslem Ludolfským znásobí.*

$$\text{Ku př.: } R = 5^{\text{dm}}, r = 2^{\text{dm}}; M? \\ M = 3.14 \times 7 \times 3 = 65.94 \square^{\text{dm}}$$

5. Poměr obvodů a ploch kruhových. Jsou-li obvody  $P$  a  $p$ , plochy  $K$  a  $k$ , poloměry  $R$  a  $r$ , průměry  $D$  a  $d$ , je:

$$P = 2R\pi = D\pi, p = 2r\pi = d\pi \\ P:p = R:r = D:d.$$

$$K = R^2\pi = \frac{D^2\pi}{4}, k = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}.$$

$$K:k = R^2:r^2 = D^2:d^2.$$

*Obvody mají se k sobě jako poloměry nebo průměry.*

*Plochy kruhové mají se k sobě jako druhé mocnosti poloměrů nebo průměrů.*

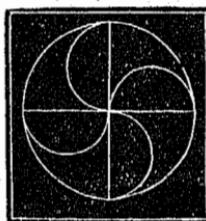
6. Dělení ploch kruhových. Má-li se daná kruhová plocha oblouky na rovné díly rozdělit, rozdělí se obvod na tolik rovných dílů, na kolik dílů se kruhová plocha rozdělit má, ku př. na čtyře rovné díly; vedou se k rozdělovacím bodům poloměry a nad každým poloměrem se opíše polovičnou délku jeho polokruh (obr. 170.). Že vzniklé díly rovné jsou, jestří z obrazce patrnō.

Rozdělte podobným způsobem plochu kruhovou na tři, na pět, na šest, osm rovných dílů.

Má-li se plocha kruhová na sudý počet rovných dílů rozdělit, může se rozdělení to vykonati i takto: Průměr kruhový se rozdělí na dvakrát tolik rovných dílů a pak se ku př. z levé strany nad průměrem kolem prvního rozdělovacího bodu jedním dílkem opíše polokruh, kolem druhého bodu dvěma, kol třetího třemi...; z pravé strany pod průměrem kolem prvního rozdělovacího bodu se opíše polokruh jedním dílkem, kol druhého dvěma... a pokračuje se tak dále, až každý spodní oblouk s příslušným obloukem hořejším dá čáru rozdělovací.

Rozdělte takto kruh na čtyře rovné díly.

Obr. 170.



### Úlohy.

1. Poloměr obnáší  $1m\ 5dm$ ,  $1m\ 5dm$ ; jak velký bude obvod a jak velká plocha?
2. Průměr obnáší  $3m\ 4dm$ ,  $3m\ 4dm\ 8cm$ ; jak velký je obvod a mnoho-li obnáší plocha kruhu toho?
3. Kruhový obvod má  $11m\ 5dm$ ,  $11m\ 5dm$ ; jak velký je poloměr, průměr?
4. Jak velký je oblouk  $60^\circ$ , když obnáší poloměr  $3dm\ 8cm$ ? Jak velký je výsek?
5. Jak velký je úhel středový, když má poloměr  $4dm$  a oblouk  $5\cdot024dm$ ?
6. Plocha kruhová obnáší  $84\ \square dm$   $28\ \square cm$ ; jak velký je poloměr?
7. Plocha kruhová má  $54\ \square dm$   $74\ \square cm$ ; jak velký je průměr kruhu toho?
8. Obvod kruhový má  $25dm\ 8cm$ , jak velká je plocha.
9. Plocha kruhová obnáší  $6\ \square m$ ,  $54\ \square dm$   $86\ \square cm$ ; jak velký je obvod kruhu toho?
10. Obvod kruhový obnáší  $18m\ 2dm$ , oč se zmenší poloměr kruhu toho, když se obvod o  $3m\ 3dm$  zmenší?
11. Poloměry dvou kruhů A a B jsou  $2m\ 4dm$  a  $3m\ 5dm$ . Jak velký je poloměr toho kruhu, jenž je tak velký jako ony oba kruhy dohromady?
12. Poloměr obnáší  $4m\ 2dm$ , oč se zvětší tento poloměr, když se zvětší plocha kruhu toho o  $9\ \square dm$   $16\ \square dm$ ?
13. Plocha kruhová obnáší  $28\ \square m$   $30\ \square dm$ , jak velký bude poloměr plochy kruhové, kteráž obnáší polovici, třetinu, čtvrtý, šestý díl plochy té?
14. Průměr země naší obnáší  $13089\cdot276km$ , muoho-li obnáší obvod na rovníku?  $\pi = 3\cdot1416$ .
15. Průměr měsíce obnáší  $3557\cdot804km$ , jak velký jest obvod jeho a oč jest menší než obvod země?
16. Vodní kolo má v obvodu  $8m\ 4dm$ ; jak velký je průměr jeho?

17. Vozové kolo má v průměru  $104\text{dm}$ . Kolikrát se otočí na dráze, kteráž obnáší  $6280\text{ m}^2$ ?

18. Průměr okrouhlé dráhy, jížto země naše kolem slunce obíhá, má v průměru  $30,848744\text{ Mm}$ . Kolik km. udělá země za rok, kolik za měsíc, za den, kolik za hodinu, za minutu, za sekundu?

19. Mnoho-li stupňů, minut, sekund obnáší oblouk, jenž se délkou svou poloměru rovná?

20. Mnoho-li obnáší výsek kruhový, když je poloměr  $2\text{m } 4\text{dm } 5\text{cm}$  a úhel středový  $80^\circ$ ?

21. Mnoho-li obnáší poloměr plochy kruhové, kteráž má  $12\cdot56\text{ dm}^2$ ?

22. Mnoho-li obnáší mezikruží, když jsou poloměry soustředných kruhů:  $R=5\text{dm } 4\text{cm}$   $r=3\text{dm } 2\text{cm}$ ?

23. Kolem okrouhlého jezera, ježto má v průměru  $86\text{m } 4\text{dm}$ , jde cesta  $3\text{m } 4\text{dm}$  široká. Mnoho-li obnáší plocha cesty této?

24. Obvody dvou soustředných kruhů obnášejí  $137\text{dm}$  a  $152\text{dm}$ ; mnoho-li obnáší mezikruží?

25. Kruhovitý rybník, jenž má v průměru  $18\text{m } 5\text{dm}$  má se zvěčšit a sice má průměr obnášet  $21\text{m } 6\text{dm}$ , oč se tím zvěčší plocha rybníka toho?

26. Poloměr obnáší  $45\text{dm}$ ; oč je kruhová plocha větší než plocha do téhož kruhu vepsaných pravidelných obrazcův, a sice: 1. vepsaného trojúhelníka, 2. vepsaného čtyřúhelníka a 3. šestiúhelníka?

### 15. Dodatek.

1. Jak z předešlého víme, lze v kruhu pravý úhel a pravoúhlý trojúhelník sestrojiti tím, že se konečné body průměru s některým bodem na obvodě spojí. Tak vznikne pravoúhelný trojúhelník ABC (obr. 171.), jestliže v polokruhu body B a C s bodem A se spojí.

Obr. 171.



Vedeme-li v trojúhelníku tom z vrcholu A k podponě BC kolmou AD, rozdělí se týž trojúhelník ve dva taktéž pravoúhlé trojúhelníky ABD a ACD. Oba tyto trojúhelníky jsou podobny trojúhelníku ABC; mají trojúhelník ABD jakož i trojúhelník ACD s trojúhelníkem ABC úhly vzájemně rovné, a jelikož jest v trojúhelníku ABD úhel m roven úhlu C v trojúhelníku ACD a úhel B roven úhlu n, jsou trojúhelníky ABD a ACD též sobě podobny.

Poněvadž jest  $\triangle ABD \sim \triangle ABC$  a  $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ , platí tyto úměry:

$$BD:AB = AB:BC$$

$$CD:AC = AC:BC \text{ t. j.:}$$

*Odvesná jest prostřední úměrnou mezi přilehlou úsečkou a podponou.*

Z podobnosti trojúhelníků ABD a ACE následuje, že jest:

$$BD:AD = AD:DC \text{ t. j.:}$$

*Kolmice jest prostřední úměrnou mezi úsečkama podpony.*

Hledáme-li ke kruhu, pronášejí se obě tyto věty takto:

- a) *Tetiva jest prostřední úměrnou mezi přilehlou úsečkou a celým průměrem.* b) *Kolmice z obvodu k průměru vedená jest prostřední úměrnou mezi úsečkama průměru.*

Položíme-li  $AB = a$ ,  $AC = b$  a  $BC = c$ , úsečku  $BD = x$  a  $DC = y$ , bude dle předešlých vět:

$$\begin{aligned}x : a &= a : c \\y : b &= b : c\end{aligned}$$

Učiníme-li rovnice z obou úměr, bude:

$$\begin{aligned}a^2 &= cx \\b^2 &= cy\end{aligned}$$

Součet obou rovnic dá:

$$a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y),$$

a jelikož jest  $x + y = c$ , bude

$$a^2 + b^2 = c \cdot c = c^2,$$

čímž se pravost věty Pythagorejské na jiný způsob osvědčuje.

Kdy se rozdělí v trojúhelníku pravoúhelném kolmici k podpoře pravýho úhlu na úhly rovné?

Mají všechny tři vrcholy pravoúhlého trojúhelníka od středu podpory vzdálenost rovnou?

2. Obou předešlých vět užívá se k rozřešení mnohých úloh, z nichž některé zde uvedeme.

a) *Má se k dvěma daným přímkám p a q vyhledati přímku prostřední úměrnou.*

Učinme  $BD = p$  a  $DC = q$  (obr. 171), nad přímou  $BC$  opíšme polokruh a v bodě  $D$  postavme přímku  $DA$  kolmo k přímce  $BC$ . Jak z předešlého učení víme, jest:

$$\begin{aligned}BD : AD &= AD : CD \text{ anebo} \\p : AD &= AD : q,\end{aligned}$$

čímž jsme prostřední úměrnou našli.

Jinak lze podobnou úlohu rozřešit i takto: Učiní se délka  $BC$  rovnou přímce věčší ku př.  $s$  nad délkou tou opíše se polokruh; na průměru  $BC$  utne se  $BD = t$  přímce menší, v bodu  $D$  se vztýčí kolmá  $DA$  a vede se  $AB$ . Jestliž pak:

$$\begin{aligned}BD : AB &= AB : BC \text{ anebo:} \\s : AB &= AB : t.\end{aligned}$$

Jest tedy  $AB$  hledaná přímka.

b) Má se daný obdélník přeměniti ve čtverec obsahem rovný.

Jak víme, vypočítá se ploský obsah obdélníka, když se základnice čili podstava jeho výškou znásobí. Je-li tedy podstava  $p$  a výška  $v$ , jest ploský obsah  $pv$ . Obsah tento má se dle úlohy naší rovnati obsahu čtverce, jehož strany nám hledati jest. Je-li neznámá dosud strana téhož čtverce  $x$ , bude ploský obsah jeho  $x^2$ ; a jelikož má býti obsah tento roven obsahu obdélníka, bude tedy:

$$x^2 = pv.$$

Učiníme-li z rovnice této úměru, bude:

$$p : x = x : v.$$

Na srovnalosti této vidíme, že strana čtverce, jejž hledáme, jest prostřední úměrnou mezi podstavou a výškou daného obdélníka, jižto dle návodu v úloze předešlé nalézti lze.

Každý obdélník může se tedy přeměniti v čtverec obsahem rovný.

Sestavte obdélníky, když se dá 1. podstava a výška, 2. podstava a úhlopříčka a vyhledejte čtverce obdélníkům tém rovné.

c) Rozpáliti daný kruh kruhem soustředným.

Víme, že se plochy kruhové k sobě mají jako čtverce jejich poloměrů. Je-li plocha daného kruhu  $k$ , poloměr  $r$ , plocha rozpolovacího soustředného kruhu  $k_1$  a poloměr  $x$ , bude se mít:

$$k : k_1 = r^2 : x^2$$

a jelikož má býti  $k_1 = \frac{1}{2}k$ , obdržíme hodnotu tuto dosadice

$$k : \frac{1}{2}k = r^2 : x^2$$

anebo krátce

$$1 : \frac{1}{2} = r^2 : x^2.$$

Učiníme-li z úměry této rovnici, bude:

$$x^2 = \frac{r^2}{2} = r \times \frac{r}{2},$$

z kteréžto rovnice tuto úměru sestaviti lze:

$$r : x = x : \frac{r}{2}.$$

Z úměry této jde, že jest poloměr soustředného rozpolovacího kruhu prostřední úměrnou mezi polovicí daného poloměru a poloměrem celým. Prostřední touto úměrnou vyhledavše, rozřešíme úlohu onu, když do kruhu daného vpřeme kruh soustředný délkom přímky úměrné.

Jaká by se musila vyhledati úměrná, když měl kruh soustředný třetinu anebo vůbec  $n$ -tý díl daného kruhu obsahovati.

Úlohy. 1. V pravoúhelném trojúhelníku jest podpona 296<sup>m</sup>, odvěsná

$a = 74\text{m}$ ; mnoho-li obnáší druhá odvěsná, mnoho-li každá úsečka a jak velká jest kolmice (z vrcholu úhlu pravého k podponě vedená).

2. Kolmice k podponě (z vrcholu pravého úhlu) spuštěná obnáší  $12 \cdot 4\text{m}$  a jedna úsečka  $3 \cdot 8\text{m}$ ; jak velká jest podpona a mnoho-li obnášejí odvěsné?

3. Kolmici z vrcholu rozdělila se podpona na dvě úsečky  $7 \cdot 2\text{m}$  a  $16 \cdot 2\text{m}$ , jak velké jsou odvěsné a plocha?

4. V obdélníku, jehož podstava je  $28\text{m}$ , výška  $42\text{m}$  vedla se úhlopříčná a k této se z vrcholu protilehlého spustila kolmice; jak velké jsou úsečky přímky úhlopříčné a mnoho-li obnáší ona kolmice?

## XI. Parabola. Ellipsa. Hyperbola.

### 1. Parabola.

1. Vznik paraboly. Vedme přímku AB, z bodu A utněme AO = OF a sestrojme v bodu tom k přímce AB kolmici YY' (obr. 172.).

Položme k přímce AB pravítko pravoúhelné MNQ tak, aby odvěsnou MQ přilehlo ke kolmici AY; připněme na odvěsnu MN v bodu N nit tak dlouhou jako je odvěsna ta, druhý konec niti té upevněme v bodu F; psacím nástrojem napněme nit tu. Když se pravítko po kolmé AY vzhůru aneb obráceno po kolmé AY, dolů posmyká a psací ústrojí zároveň po odvěsně MN pošinuje tak, že nit stále napjatá jest, opíše se čára křivá, ježto se *parabola* nazývá.

Kolmice YY' jmenuje se *přímka řidící* neb *ředitelka*, bod O *vrchol*, bod F *ohnisko* a přímka AB *osa paraboly*. Každá přímka, kteráž některý bod křivky s ohniskem spojuje, nazývá se *průvodč* neb *vektor*; ku př. FG.

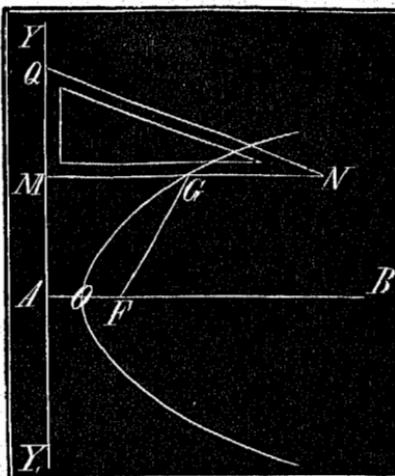
Jak ze spůsobu sestrojovacího vysvítá, je  $FG = GM$  t. j.:

V parabole mají body od přímky řidící a ohniska rovnou vzdálenost.

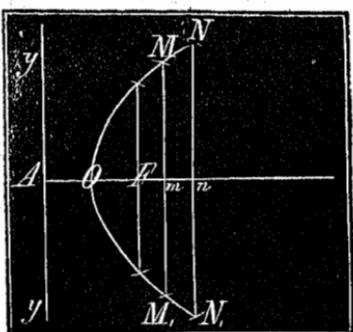
2. Sestrojiti parabolu, když dána přímka řidící a ohnisko.

9\*

Obr. 172.



Obr. 173.

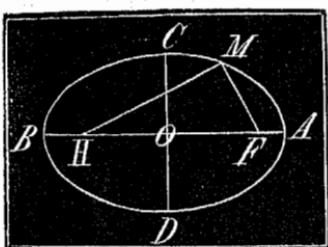


stejnou vzdálenost. Kdyby se z bodu M k přímce yy vedla přímka kolmá, byla by rovna přímce Am a pročež by byla též rovna vektoru, když by se bod M s ohniskem spojil.

## 2. Ellipse.

1. Vznik ellipsy. Když konce nití (šňůry), kteráž jest rovna délce AB v bodech F a H (obr. 174.) upevníme, nit tu nějakým kreslidlem napneme a toto, nit stále stejně napnutou držíce, kolem

Obr. 174.



a střed její O *střed ellipsy*. Kolmice CD k ose hlavní v středu jejím O zově se *osa vedlejší*; přímece OH neb OF díme *výstřednost* a konečným bodům os *vrcholy ellipsy*.

Názvů těchto užijísc pravíme: *V každém bodu ellipsy je součet vektorů roven ose hlavní.*

Jest tedy  $BH + BF = AB$  jakož i  $AF + AH = AB$  a pročež jest  $BH + BF \equiv AF + AH$ .

Dosadíme-li v rovnici této místo BF hodnotu BH + HF a místo AH hodnotu HF + FA, bude:

$BH + BH + HF = AF + AF + HF$   
anebo když zkrátíme:

Vede se z ohniska F (obr. 173.) k přímce řídící YY' kolmá FA a rozpůlí se v bodu O. Bod tento jest vrcholem paraboly. V libovolných bodech m, n, ... osy AX se sestrojí neurčité kolmé. Tyto kolmice se protnou průsečními oblouky, kteréž se kolem bodu F poloměry Am, An, ... nad a pod osou AX opíší.

Spojíme-li přísečné body  $MN$  a  $M'N'$ , utvori se parabol NMOM<sub>1</sub>N, neboť mají body jež od ohniska a přímky řídící

odu M k přímce y veda přímka a pročež by byla též rovna vek-  
kem spojil.

Takto ellipsu sestrojivše pochopíme snadno, že jest v každém bodu křivky té ku př. v bodu M součet vzdáleností od bodů F a H totiž  $HM + MF$  roven délce AB. Body F a H nazývají se ohniska, délky HM a FM vektory neb průvodící. Přímka AB, kteráž oběma ohnisky prochází, sluje osa hlavní

$$BH = AF \text{ t. j.:}$$

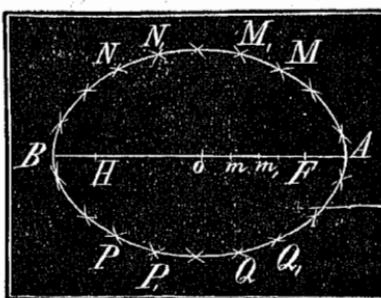
*Vrcholy osy hlavní jsou od ohnisk stejně vzdáleny.*

2. Sestrojiti ellipsu, když dána hlavní osa a obě ohniska.

Sestrojí se daná osa a ohniska F a H (obr. 175); na přímce FH, mezi oběma ohnisky poznačí se libovolné body  $m, m_1, \dots$  a délky Am a Bm,  $Am_1$  a  $Bm_1, \dots$  opíši se kolem obou ohnisk nad a pod danou osou oblouky a sice tak aby se střídavě protínaly t. j. aby se ku př. oblouk poloměrem Am kolem bodu F opsaný protál obloukem, jenž se poloměrem Bm kolem bodu H opsal a na opak.

Průsečné body MM<sub>1</sub>, ..., NN<sub>1</sub>, PP<sub>1</sub>, ..., QQ<sub>1</sub>, — dají spojením ellipsu a sice tím správněji, čím více takových bodů vyhledáme. Že křivka, kteráž takto vznikla skutečnou ellipsou jest, dokázalo by se tím, když by se s některým bodem na př. M obě ohniska spojila. Součet obou vektorů t. j. poloměrů Am a Bm, jest roven hlavní ose AB, jakž býti má.

Obr. 175.

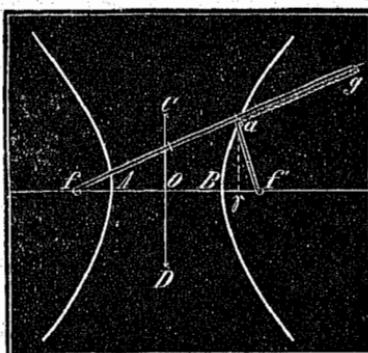


### 3. Hyperbola.

1. *Vznik hyperpoly.* Učíme délku Of = Of<sub>1</sub> (obr. 176.) a délku OA = OB. V bodě f upevněme pravítko fg tak, aby se kolem toho bodu otáčeti mohlo. Ku konci g připevněme jeden konec šňůry, ježto jest o délku AB menší pravítka fg, a druhý konec pak upevněme v bodě f<sub>1</sub>. Točíme-li ono pravítko kolem bodu f, šňůru psacím nástrojem stále stejně napjatou k němu přidržujíc, opíše bod a jednu, a jestliže pravítko v bodě f<sub>1</sub>, a druhý konec šňůry v bodě f upevníme a týmž způsobem pokračujeme, druhou větev křivky, jež se *hyperbola* nazývá.

Délka AB sluje *hlavní osa*, bod O *střed*, body A a B nazývají se *vrcholy*, f a f<sub>1</sub> jsou *ohniska hyperboly*. Přímky, ježto ohniska s některým bodem v hyperbole spojují, jmenují se *vektory*; délky Of a Of<sub>1</sub> jsou *výstřednosti*.

Obr. 176.



Dle sestrojovacího spůsobu jest  $f_1a + ag = fg - AB$  anebo jinak  $f_1a + ag + AB = fg$ .

Dosadíme-li v této rovnici místo  $fg$  hodnotu  $fa + ag$ , bude:  $f_1a + ag + AB = fa + ag$

anebo, když se rovné na obou stranách odečte:

$$f_1a + AB = fa$$

z čehož dále jde:

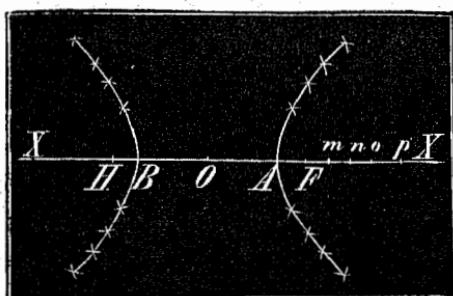
$$AB = fa - f_1a \text{ t. j.:}$$

*Rozdíl vzdáleností od obou ohnisk, rozdíl vektorů hyperboly jest v každém bodě roven ose hlavní.*

Vztýčí-li se v bodě O k ose AB přímka kolmá a utneme-li na kolmě této, kolem bodu A délku Of průsečný oblouk vedouce, délku OC = CD, vznikne přímka CD, jež sluje osa vedlejší.

2. Sestrojiti hyperbolu, když dána hlavní osa a obě ohniska. Budíž AB délka dané osy (obr. 177.) a body F a H na prodluzece osy AB obě ohniska. Poznačme na prodluzece AX body m, n, o ... a opišme oblouky kolem bodů F a H poloměry Bm, Bn ... nad i pod přímkou XX, a totéž učiňme s poloměry Am, An ... kolem obou oněch bodů a sice tak, aby se oblouky témito poloměry opsané střídavě protínaly s oněmi oblouky, jež jsme poloměry Bm, Bn ... opsali, t. j. aby se ku př. oblouk poloměrem Bm kolem bodu F opsaný protál obloukem, jenž se kolem bodu H poloměrem Am vedl.

Obr. 177.



Spojíme-li průsečné body oblouků protínajících, dá spojovací čára hyperbolu a sice tím přesněji, čím více se takových bodů vyhledá a čím blíže body tyto vedle sebe položeny jsou.

Že vzniká křivka hyperbolou jest, snadno dokážeme, když některý bod její s ohniskem F i H spojíme. Vektory, kteréž vede, jsou poloměry, ku př. Bm a Am, jichž rozdíl Bm — Am jest roven ose hlavní, jakž býti má.

## STEREOMETRIE.

### Tělesoměrství neb stereometrie.

*Výklad.* Tělesoměrství obsahuje učení o veličinách prostorných, kteréž se na jednu rovinu vměstnatí, kteréž se v jedné rovině utvářiti nemohou.

Položíme-li ku př. knihu deskou na rovinu, zaujmě kniha ta dle dvou rozsahlostí svých — délkou a šírkou — jakousi částku one roviny; třetí rozsahlostí svou — výškou neb tloušťkou — vynikne zcela nad onu rovinu.

Vedeme-li k určité rovině přímky z bodu, jenž leží nad rovinou tou, budou přímky ty celou rozsahlostí svou nad onou rovinou. Takovéto měřické útvary, kteréž si v jedné rovině mysliti, představiti nemůžeme, náležejí do oboru stereometrie.

#### I. Bod, čára v prostoru.

Jakož na rovině, tak užíváme i v prostoru bodů k poznaku místa.

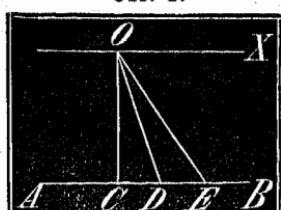
Dvěma bodama mohou se jak v rovině, tak i v prostoru rozličné krivé a klikaté čáry vésti; přímka může se jima vésti jen jedna. Ze všech čar, kteréž se dvěma bodami vésti mohou, jest přímka nejkratší. Jenom přímkou může se udati vzdálenost dvou bodů.

#### 1. Poloha přímky k přímce.

1. Vedeme-li v rovině určitou přímku AB (obr. 1.) mohou se z vnějšího bodu O, jenž leží mimo onu rovinu, k přímce AB rozličné délky vésti. Mezi délками těmito jest kolmice OC délka nejkratší; šikmé přímky OD, OE jsou delší.

Vedeme-li bodem O přímku OX týmž směrem, jako jsme vedli přímku AB, totiž tak, že jest úhel  $XOC = OCB = 90^\circ$  a tedy  $XOC + OCB = 180^\circ$ , běží obě přímky AB a OX od sebe v rovné vzdálenosti, nesetkají se nikdy, byť by se jakkoli prodloužily; jdou spolu rovnoběžně, jmenují se *rovnoběžné* neb *rovnoběžky*.

Obr. 1.



V prostoru mohou se však bodem O ještě nesčíslné přímky vésti, kteréž by přímku AB, ač s ní rovnoběžně nejdou, nikdy neprošaly, byť bychom je jakkoli prodloužili. Takovéto přímky v prostoru nazývají se *mimoběžné*.

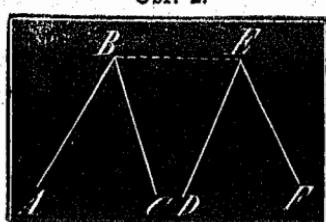
V prostoru mohou tedy dvě přímky mít k sobě polohu čtverou:

1. Mohou státi k sobě kolmo, jako OC k přímce AB;
2. mohou státi k sobě šikmo, jako OD, OE k přímce AB;
3. mohou spolu jít rovnoběžně, jako OX a AB, a
4. mohou být mimoběžné.

## 2. Úhel v prostoru.

Protínají-li se v prostoru dvě přímky, utvoří se *úhel v prostoru*.

Obr. 2.



Úhly ABC a DEF (obr. 2.) mějtež ramena na vzájem rovnoběžná. Pohybuje-li se úhel ABC vrcholem B v přímce BE k úhlu DEF stejnomořně, totiž tak, že se vzájemná rovnoběžnost ramen AB a DE, BC a EF neruší, vpadnou rovnoběžná ramena AB a BC ve směry DE a EF, jakmile vrchol B padne na vrchol E. Úhly ABC a DEF se pokryjí, a jsou si tedy rovny, pročež díme:

*V prostoru jsou dva úhly sobě rovny, jsou-li stejnomořná ramena jejich rovnoběžná.*

## II. Rovina v prostoru.

Dvěma bodyma v prostoru — jednou přímkou — může se nesčíslné množství rovin vésti.

Pravíme, *rovina vede se přímkou*, nebo jinak, *rovina jede přímkou*, když jde totiž směrem přímky té, a když přímka rozsáhlostí svou v rovině té leží.

Třemi body, dvěma kolmýma, šikmýma rovnoběžkama může se v prostoru *jen jedna rovina* vésti.

Každým úhlem může tedy *jen jedna rovina* jítí.

Jsou-li v prostoru dvě přímky mimoběžné, nemůže se jima rovina vésti.

### 1. Poloha přímek k rovině.

1. Vedeme-li k rovině MN (obr. 3.) z bodu vnějšího O přímku nejkratší ku př. OA a konečným jejím na rovině MN ležícím bodem A — *patou* přímky — po rovině té přímky AB, AC, AD, bude přímka OA nejkratší ze všech přímek, kteréž by se z bodu O k oněm přímkám vésti mohly a protož stojí kolmo na všech přímkách těchto a jest tedy spolu kolmá i na rovině MN. Protož pravíme:

*V prostoru stojí přímka k rovině kolmo, když stojí kolmo ke všem přímkám, kteréž se patou její v rovině té vedou.*

Kolmice OA činí se všemi přímkami, kteréž se patou její v rovině MN vedou, úhly pravé.

Činí-li ale některá přímka s přímkami patou její vedenými úhly *kosé* — *ostré* nebo *tupé* — stojí přímka ta na rovině *šikmo*. K rovině MN (obr. 4.) stojí šikmo přímky OB, OC, OD.

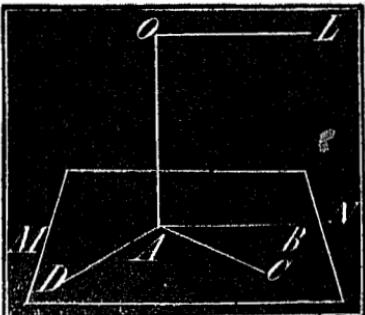
Kolmice udává nejkratší vzdálenost roviny od toho bodu, z kteréhož se k rovině vedla, jest tedy měrou délky té.

2. Přímka OA stojí kolmo na rovině MN (obr. 3.). Vedeme-li v rovině MN přímku AB a bodem O přímku OL *týmž směrem* jako jde přímka AB, totiž tak, že jest úhel AOL = OAB =  $90^\circ$  a tedy AOL + OAB =  $180^\circ$ ; jde přímka OL rovnoběžně s přímkou AB a, jelikož jde rovina MN směrem přímky AB, jde tedy přímka OL zároveň rovnoběžně s rovinou MN; pročež pravíme:

*V prostoru jde přímka s rovinou rovnoběžně, jede-li rovnoběžně s některou přímkou v rovině té.*

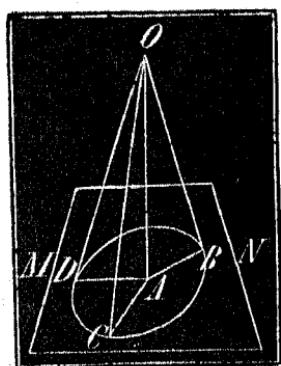
V prostoru může přímka mít k rovině polohu trojí. 1. *Může státi na rovině kolmo*, 2. *může na rovině býtí šikmo* a 3. *může jítí s rovinou rovnoběžně*.

Obr. 3.



3. Vedeme k rovině MN (obr. 4.) z bodu vnějšího O kolmici OA a zároveň rovné šikmé OB, OC, OD.

Obr. 4.



Spojíme-li paty přímek šikmých s patou kolmice OA, vzniknou trojúhelníky AOB, AOC a AOD. Tyto trojúhelníky jsou shodné. Jestit úhel  $\angle BAO = \angle CAO = \angle DAO = 90^\circ$ , strana AO jest společná a  $OB = OC = OD$ .

Ze shodnosti trojúhelníků těch jde, že jsou přímky AB, AC, AD sobě rovny. Vezmeli se bod A — pata kolmice — za střed a některá z přímek AB, AC, AD za poloměr, půjde kruh, délku tou opsaný, patami šikmých OB, OC, OD; protož se praví:

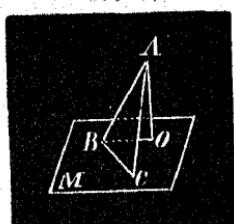
*Vedeme-li z bodu vnějšího k rovině kolmici a spolu tři rovné šikmé přímky; jest pata kolmice středem toho kruhu, jenž se patami oných šikmých přímek vede.*

Má-li se tedy z určitého bodu k určité rovině kolmice vésti, vedou se nejprve z udaného bodu k rovině té tři rovné šikmé; patami šikmých se vede kruh. Přímka, kterouž se střed kruhu s bodem daným spojí, stojí k oné rovině kolmo.

Z výkonu toho vysvítá zároveň, že se z určitého bodu k dané rovině jen jedna kolmice vésti může.

4. Průmět, úhel sklonu. Přímka AB stojí šikmo k rovině M (obr. 5).

Obr. 5.



Vedeme-li z bodu A k rovině M kolmici AO a spojíme-li patu přímky šikmé s patou kolmice přímkou BO, nazývá se přímka BO průmět šikmé přímky AB na rovinu M. Kolmice AO jmenuje se přímka promítací; šikmá AB sluje přímka promítnutá.

Úhel, jež promítnutá přímka AB s průmětem svým činí, nazývá se úhel sklonu.

Jak v obrazci ABO vidíme, jest strana BO < než strana AB t. j.:

*Průmět jest menší než přímka promítnutá.*

Vedeme-li BC = BO a přímku AC, jest přímka AC šikmo na rovině M a protož je větší, než kolmice AO. V trojúhelnících ABO a ABC jsou dvě strany vzájemně rovny, ale třetí strany totiž AC a AO jsou nerovné. V takovémto případu jsou úhly, jež v onech trojúhelnících naproti stranám nerovným leží, nerovné a sice jest úhel v onom trojúhelníku menší, jehož třetí strana je menší.

Poněvadž jest kolmice AO nejmenší ze všech přímek, kteréž se z bodu A k rovině M vésti mohou; bude tedy úhel ABO, jejž promítnutá přímka s průmětem svým činí, nejuzší nebo jinak bude menší, než všeliký jiný úhel, jež ona (promítnutá) přímka v bodu B s jinou přímkou činí. Úhel ten běže se za měřítko sklonu.

5. Vedme k rovině MN (obr. 6.) kolmice AB a CD. Spojíme-li paty obou kolmic přímkou BD, jest úhel  $ABD = CDB = 90^\circ$  a tedy jest  $ABD + CDB = 180^\circ$ . Pohybujeme-li se přímka AB ve směru přímky BD rovnoběžně k protvní poloze své, nezmění se za pohybu toho poloha její k rovině MN; každá poloha její bude kolmá k rovině MN, a kdyby konečně vstoupila do bodu D, šla by s kolmicí CD týmž směrem, z čehož jest patrno, že jde s přímkou CD rovnoběžně t. j.:

*Stojí-li dvě přímky k též rovině kolmo, jdou přímky ty spolu rovnoběžně.*

Z toho vysvitá dále:

*Stojí-li k rovině z dvou rovnoběžek jedna kolmo, jest i druhá rovnoběžka na té rovině kolmo.*

6. Vedme k rovině MN (obr. 7.) dvě šikmé AB a CD tak aby spolu rovnoběžně.

Vedeme-li z bodů A a C k rovině MN kolmice AE a CF, jsou délky BE a DF průměty oněch šikmých přímek AB a CD. V obrazcích ABE a CDF jest úhel  $AEB = CFD = 90^\circ$  a, jelikož jde  $AB \parallel CD$ ,  $AE \parallel CF$ , jest úhel  $BAE \parallel DCF$ , pročež jsou i třetí úhly rovny, totiž úhel  $ABE = CDF$ , t. j.:

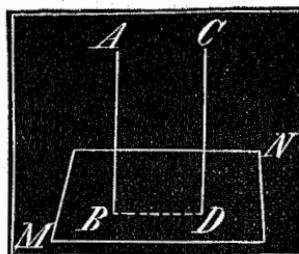
*Šikmé rovnoběžky jsou k též rovině stejně skloněny.*

## 2. Poloha roviny k rovině.

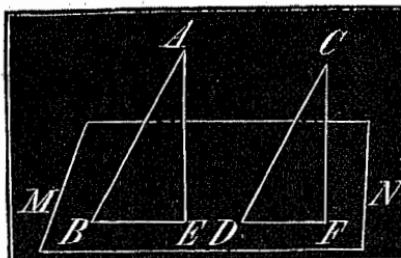
1. Vedme přímkou AB rovinu (obr. 8.), v rovině též vedme přímku EF kolmo k přímce AB.

Točíme-li rovinu ABCD kolem přímky AB až přijde do polohy AMNB, opíše se bodem E oblouk EG a kolmicí EF úhel EFG.

Obr. 6.



Obr. 7.



Roviny ABCD a ABMN jdou zároveň přímkou AB; pravíme v takovémto případu o rovinách těch, že se protínají a sice v oné společné přímce. Roviny ABCD a AMNB protínají se v přímce AB.

Úhel EFG jest tím větší, čím více se roviny ty od sebe odchýlí. Úhel EFG nazývá se *úhel plošný* a udává sklon obou průsečných rovin.

Z toho jesti patrno:

a) *Průsek dvou rovin čini přímku* anebo jinak, *rovinou protínající se rovina v čidle přímé*. b) *Sklon dvou rovin dán se tím úhlem, jejž čini spolu kolmice, kteréž se z téhož bodu přímky průsečné v obou rovinách vedou*.

Je-li úhel, jímž se sklon dvou rovin udává, pravý, stojí roviny ty k sobě *kolmo*; je-li kosý, stojí roviny k sobě *šikmo*.

Roviny, kteréž v rovné vzdálenosti od sebe běží, jmenují se *rovnoběžné*.

Roviny rovnoběžné nesetkají se nikdy, byť by se jakkoli prodloužily, poněvadž se prodloužením vzdálenost směru jejich nezmění.

Z výkladu toho vidíme, že mohou v prostoru dvě roviny mít k sobě polohu trojí:

1. *mohou stát k sobě kolmo*;
2. *mohou být k sobě šikmo*, a
3. *mohou jít spolu rovnoběžně*.

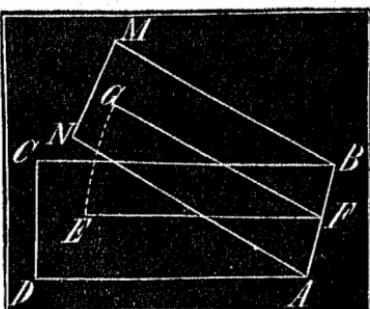
### 3. Vzájemná poloha přímek a rovin.

1. Přímka AB (obr. 9.) stojí kolmo na rovině MN.

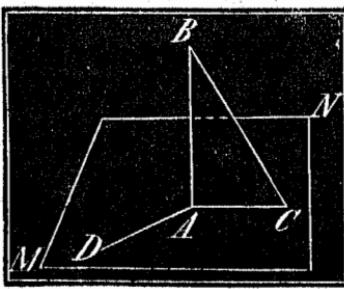
Vedeme-li kolmici AB rovinu ABC, v rovině MN v bodu A k přímce AC kolmici AD, jest úhel BAD úhel sklonu rovin MN a ABC. Poněvadž jest úhel BAD pravý, stojí rovina ABC na rovině MN kolmo. Taktéž se snadno vyrozumí, že by každá rovina, kteráž by se kolmici AB vedla, na rovině MN kolmo stála; protož pravíme:

*Vedou-li se roviny přímkou, kteráž k nějaké rovině kolmo stojí, stojí roviny ty k oné rovině kolmo.*

Obr. 8.



Obr. 9.



Z věty té vysvítá dále *a) jak by se daným bodem k určité rovině vedla rovina kolmá, b) jak se má v daném bodu na rovině vztýčiti přímka kolmá.*

Když by se měla ku př. v bodu A (obr. 10.) k rovině MN vztýčiti přímka kolmá, vedla by se k rovině té libovolně kolmice BC; kolmici touto a daným bodem A vedla by se na rovinu MN kolmá rovina ABC. V rovině ABC se strojila by se z bodu A s přímkou BC rovnoběžka AD. Přímka AD stála by pak v daném bodu A k rovině MN kolmo.

2. Roviny MN a PQ budtež rovnoběžné (obr. 11.).

Protineme-li obě tyto roviny rovinou ABCD budou průsečné přímky AB a CD rovnoběžné; neboť, kdyby nebyly rovnoběžné, musily by se kdysi protít, když by se v rovině ABCD náležitě prodloužily. Průsečný bod jejich byl by rovinám MN a PQ bodem společným, poněvadž ony přímky i v těchto rovinách leží. že by ale roviny MN a PQ měly bod společný, vidí se býti nemožným, jelikož jsou roviny ty rovnoběžné. Z toho vysvítá, že se přímky AB a CD nikdy setkatí, nikdy séci nemohou, nebo jinak, že jsou přímky ty rovnoběžné; pročež pravíme:

*Když se dvě rovnoběžné roviny rovinou protinou, jsou průsečné přímky rovnoběžné.*

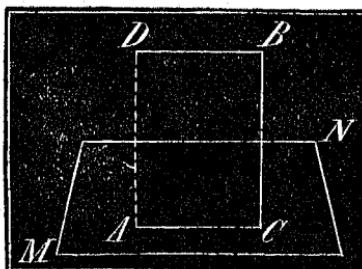
Je-li  $AC \parallel BD$ , jest obrazec ABCD rovnoběžník a protož  $AC = BD$ , t. j.:

*Mezi rovinami rovnoběžnýma jsou rovnoběžky sobě rovny.*

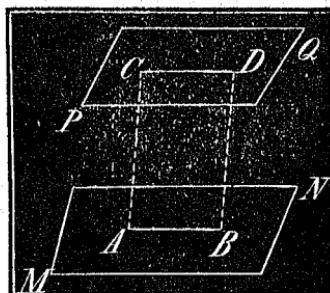
3. Roviny MN a PQ budtež rovnoběžné (obr. 12.).

Vedeme-li z bodu B v rovině MN k rovině PQ kolmici BA a kolmici touto libovolně rovinu ABCD, jsou průsečné přímky AC a BD rovnoběžné a jelikož jest úhel  $BAC = 90^\circ$ , jest i úhel  $ABD = 90^\circ$ .

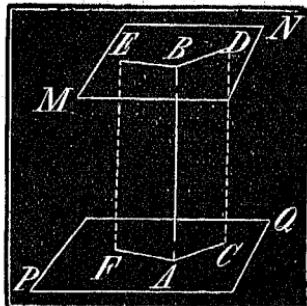
Obr. 10.



Obr. 11.



Obr. 12.



Vedla-li by se jiná protínací rovina ABEF, budou opět průsečné přímky AF a BE rovnoběžné: úhel BAF jest  $= 90^\circ$ , jakož i úhel ABE.

Z toho jest patrno, že stojí přímka AB na obou rovinách MN a PQ zároveň kolmo, protož se praví:

*Stojí-li přímka mezi rovnoběžnýma rovinama na jedné rovině kolmo, stojí kolmo i na rovině druhé.*

Z toho vyrozumí se taktéž:

*Stojí-li dvě roviny na též přímce kolmo, jsou roviny ty rovnoběžné.*

Když se vede mezi rovnoběžnýma rovinama kolmice od jedné roviny k druhé, udává kolmice tato vzdálenost obou rovin. Přímka AB udává vzdálenost rovin MN a PQ.

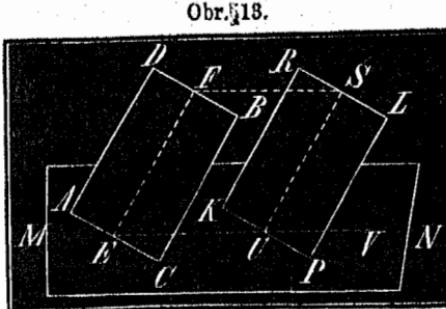
Kdyby se více takových kolmic vedlo, byly by všechny sobě rovny?

4. Rovnoběžné roviny AB a KL stojí říkáno k rovině MN (obr. 18.).

Roviny AB a KL protínají rovinu MN v přímkách AC a KP; přímky tyto jsou, jak víme rovnoběžné. Vedme k rovině MN rovinu kolmou tak, aby zároveň stála kolmo na rovnoběžkách AC a KP. Rovina ta protne obě šikmé, rovnoběžné roviny; průsečné přímky FE a SU budou rovnoběžné, úhel VUS bude roven úhlu VEF.

Poněadž stojí rovina ES kolmo k rovnoběžkám AC a KP, stojí průsečná přímka EF v rovině AB kolmo k přímce AC, průsečná přímka SU v rovině KL kolmo k přímce KP. Úhly VUS a VEF udávají sklon rovin šikmých k rovině MN, a poněadž jsou úhly ty sobě rovny, mají tedy obě roviny AB a KL k rovině MN stejnou sklonitost. Protož se praví:

*K též rovině mají šikmé, rovnoběžné roviny stejný sklon.*



Obr. 18.

### III. Úhelníky tělesné.

#### 1. Vznik úhelníka tělesného.

Protínají-li se tři roviny aneb protíná-li se více rovin (obr. 14.) v jednom bodu, nazývá se prostor mezi rovinami těmito obsažený a jen jednou stranou neomezený *úhelník tělesný* aneb *koutník, kout*.\*

\* ) Úhelník tělesný nazývá se rohem, když se vyhrocený zevnějšek jeho mísí.

Společný průsek bod O jmenuje se *vrchol*; přímky OM, ON, OP slouží *hrany*; roviny ploškých úhlů MOP, MON, NOP hranami sevřené nazývají se *boky* (stěny) a úhly tyto jmenují se *úhly hranové*.

K sestavení koutníka jest zapotřebí nejméně tří rovin. Každý koutník má vždy tolik hran a tolik úhlů hranových, kolik má boků a služe *rovno*- neb *nerovnoúhelný*, jsou-li hranové úhly vespolek rovné aneb nerovné.

Dle počtu boků nazývá se úhelník *tří-, čtyr... straný* anebo *troj-, čtyr-kout, tří-, čtyr... boký koutník*.

## 2. Vlastnosti úhelníků tělesných.

1. Třemi ploškými úhly MOP, MON a NOP (obr. 14.) může se trojkout jen tehdy sestavit, když jest součet dvou věčší než úhel třetí.

Jsou-li ku př. úhly MON a NOP součtem rovny úhlu MOP, přilehnou oba vedle sebe v rovinu úhlu toho, když je tak položíme, aby s ním měly společný vrchol O a společné hranы (rameua) MO a OP. Trojkout z úhlů těchto sestavit nelze. Rovněž by se nemohl koutník sestrojiti, kdyby byl součet dvou úhlů menší než úhel třetí.

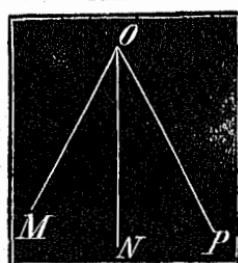
Pravíme tedy: *V trojkoutu jest součet dvou hranových úhlů věčší než úhel třetí.*

2. Protneme-li rovinou pětiboký koutník (obr. 15.) O, obdržíme průsekem tolikéžstranný mnohoúhelník a tolik pobočných trojúhelníků, kolik má koutník boků — tedy pět. Úhly při podstavách trojúhelníků těchto působí po dvou s úhlem mnohoúhelníka, v jehož vrcholu ku společné hraně přilehají, trojboký koutník (ku př. koutník A, jehož hranové úhly jsou OAB, OAE a BAE) a jsou dohromady věčší než příslušný úhel mnohoúhelníka; pročež bude součet s všech úhlů při podstavách trojúhelníků těch věčší než součet všech vnitřních úhlů mnohoúhelníka, kteréž dohromady  $5 \times 2R = 4R = 6R$  činí. Bude tedy  $s > 6R$ .

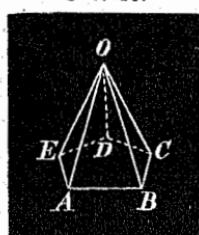
Všechny úhly v pobočných pěti trojúhelnících obnášejí dohromady  $5 \times 2R = 10R$ , v čemž součet S všech úhlů při vrcholu koutníka O i součet s úhlů při podstavách zahrnut jest. Máme tedy:  $S + s = 10R$ .

Od rovnice této předešlou nerovnost odečtouce, nabudeme:

Obr. 14.



Obr. 15.



$$S + s = 10R$$

$$s > 6R$$

$$\underline{S < 4R \text{ t. j.}}$$

Součet hranových úhlů jest menší než  $4R$ .

Poněvadž se vlastnost tato u každého koutníka objevuje, platí ono pravidlo o tělesných úhelnících vábec; pročež se dříve řeklo: *V každém koutníku jest součet hranových úhlů menší nežli  $4R$ .*

Obnáší-li tedy několik ploských úhlů dohromady  $360^\circ$  aneb více stupňů, nemůže se z úhlů těch koutník sestaviti.

3. Rovnoúhelné koutníky, jejichž ploské úhly jsou úhly z úhelníků pravidelných (trojce, čtverce . . .), nazývají se pravidelné.

V pravidelném trojúhelníku či v trojci obnáší každý úhel  $60^\circ$ . Činí tedy tři takové úhly dohromady:  $3 \times 60^\circ = 180^\circ$ ,

$$\text{čtyry úhly: } 4 \times 60^\circ = 240^\circ,$$

$$\text{pět úhlů: } 5 \times 60^\circ = 300^\circ,$$

$$\text{šest úhlů: } 6 \times 60^\circ = 360^\circ.$$

Z trojcových úhlů může se tedy *trojí* koutník sestaviti a sice pravidelný *troj-, čtyr-, a pětiboký koutník*.

Šesti trojcovými úhly se koutník sestaviti nemůže.

V čtverci obnáší každý úhel  $90^\circ$ . Činí tedy tři čtvercové úhly dohromady  $3 \times 90^\circ = 270^\circ$

$$\text{čtyry činí: } 4 \times 90^\circ = 360^\circ.$$

Čtvercovými úhly může se tedy jen jeden koutník sestavit a sice jen trojkout.

V pravidelném pětiúhelníku obnáší každý úhel  $108^\circ$ . Tři úhly činí tedy:  $3 \times 108^\circ = 324^\circ$ ,

$$\text{čtyry: } 4 \times 108^\circ = 432^\circ.$$

Z úhlů pravidelného pětiúhelníka může se jen jeden koutník sestavit a sice trojkout.

V pravidelném šestiúhelníku obnáší každý úhel  $120^\circ$ , tři úhly téhož úhelníka činí tedy:  $3 \times 120^\circ = 360^\circ$ .

Z úhlů pravidelného šestiúhelníka a protož i každého pravidelného úhelníka, jenž má více šesti stran, se tělesné úhelníky sestaviti nemohou.

Máme tedy jen *patero* pravidelných koutníků a sice *trojí* trojúhelník — (úhly ploské po  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  a  $108^\circ$ ) — *jeden čtyřúhelník* — (ploské úhly po  $60^\circ$ ) — a *jeden pětiúhelník* — (ploské úhly také po  $60^\circ$ ).

## IV. Tělesa hranatá.

### 1. Hranoly.

1. Část prostoru na vše strany omezena sluje těleso. Tělesa, kteráž jsou pouze rovinami omezena, nazývají se *hranatá*.

Pohybuje-li se přímočárný obrazec ABCDE (obr. 16.) do výšky tak, že jest každá poloha jeho s polohou první rovnoběžná, opří se stranami úhelníka se pohybujícího po stranách roviny a omezí se věstranně těleso hranaté.

Takovéto těleso jest omezeno dvěma rovnoběžnýma, shodnýma úhelníky ABCDE a  $A_1B_1C_1D_1E_1$ . Plochy po stranách jsou rovnoběžníky, jelikož jsou protilehlé strany spodněho a hořejšího úhelníka rovné a rovnoběžné. Jak vidíme, má ono hranaté těleso po stranách tolik rovnoběžníků, kolik má stran úhelník ABCDE.

*Těleso hranaté, kteréž jest omezeno dvěma rovnoběžnýma, shodnýma úhelníky a po stranách tolik rovnoběžníků, kolik stran ony úhelníky o sobě mají, nazývá se hranol* (prisma).

Průseky rovin těleso omezujících nazývají se *hrany*. Hrany po stranách slují *pobočné*. U hranolu jsou všechny pobočné hrany rovnoběžné a rovné. Kolmice z hořejší základny plochy k ploše spodní sluje *výška hranolu*.

Dle počtu stran u plochy spodní, dle počtu stěn aneb hran pobočných jsou hranoly: troj-, čtyr- . . . stranné, troj-, čtyr-stěnné anebo troj-, čtyr- . . . hranné. Jsou-li strany u plochy spodní sobě rovny, nazývá se hranol *rovnostanný*.

Dle polohy, jakou hrany po stranách k spodní ploše mají, jsou hranoly buď *kolmé* či *přímé* anebo *šikmé*. Stojí-li totiž hrany po stranách k podstavné ploše kolmo, sluje hranol *kolmý* neb *přímý*, stojí-li šikmo, jest *šikmý* neb *kosý*.

Je-li hranol kolmý, jsou stěny jeho obdélníky a hrany po stranách udávají výšku jeho. Hranol šikmý má po stranách rovnoběžníky šikmé či kosé.

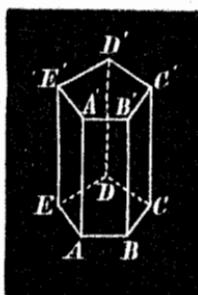
2. Rovnoběžnostěn. Je-li u hranolu spodní plocha rovnoběžník, nazývá se hranol *rovnoběžnostěn*, ku př. (obr. 17.) rovnoběžnostěn AC<sub>1</sub>.

Rovnoběžnostěn jest omezen šesti rovnoběžníky.

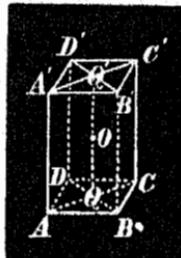
Rovnoběžnostěny jsou taktéž buď *kolmé* anebo *šikmé*.

Kolmý rovnoběžnostěn, jenž má za podstavu plochu obdélníkovou anebo čtvercovou, nazývá se *pravouhelný*.

Obr. 16.



Obr. 17.



Rovnoběžnostěn čtverci omezený nazývá se *krychle* nebo *kostka* (cubus).

3. Rovnoběžnostěny a vlastnosti jejich. V rovnoběžnostěnu jsou stěny protilehlé rovnoběžné a shodné.

Jest totiž dle vzniku (obr. 17). spodní plocha ABCD  $\cong A_1B_1C_1D_1$ . Po stranách jsou všechny hrany rovné a rovnoběžné. Úhly v rovinách protilehlých jsou si rovny, poněvadž jdou ramena jejich spolu na vzájem rovnoběžně. Jest tedy rovnoběžník  $A B A_1 B_1 \cong CDC_1 D_1$  rovnoběžník  $ADD_1 A_1 \cong BCC_1 B_1$ .

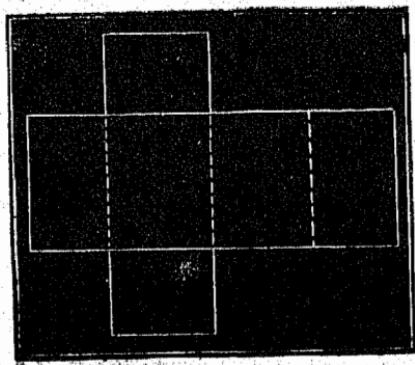
Vedeme-li v rovnoběžnostěnu (obr. 17). úhlopříčnami ku př. AB a  $A_1 C_1$  rovinu, protne se rovnoběžnostěn rovinou tou a vznikne úhlopříčný průsek  $ACC_1 A_1$ . Každý takový průsek jest rovnoběžník, nebot jsou protilehlé strany jeho rovné a rovnoběžné  $\#$ .

Vedeme-li v rovnoběžnostěnu (obr. 17.) roviny oběma úhlopříčnami v plochách protilehlých, mají úhlopříčné průseky za průsečnici přímku  $QQ_1$ , kteráž jde rovnoběžně s hranami stěn pobočných. Jelikož jest  $BB_1 \# DD_1$  jest i  $QQ_1$ , ježto středy stran BD a  $B_1 D_1$  spojuje, rovná a rovnoběžná s hranou  $BB_1$  anebo  $DD_1$ , a pročež jest  $\#$  i s ostatními hranami v stěnách pobočných.

Kdybychom v obou průsečných rovnoběžcích vedli obě úhlopříčky, protaly by se tyto v jediném bodě O, zároveň se rozpolušíce. Bod O sluje středem rovnoběžnostěnu.

4. Sít hranolu. Rozvrhnou-li se plochy, jimiž se hranol všeobecně omezuje, na rovinu, nazývá se rozvrh takový *sít*.

Obr. 18.



Připojený obrazec 18. udává síť pravoúhelného rovnoběžnostěnu.

*Poznam.* Počet úhlů ploškých hran, rohů a ploch u hranolu. Poznačme počet ploškých úhlů písmenou  $u$ , počet hran  $h$ , rohů  $r$  a ploch  $p$ . Jelikož jsou u hranolů pobočné stěny rovnoběžníky, má tedy každá stěna 4 úhly a počet ploškých úhlů stěn pobočných jest čtyrykrát tak velký jak počet stran s u plochy spodní. Plochy základné mají tolik úhlů co stran; dohromady tedy dvakrát tolik úhlů, co má jedna plocha stran o sobě. Jest tedy počet všech ploškých úhlů:

$$u = 4s + 2s = 6s, \text{ t. j. :}$$

a) Každý hranol má 6-krát tolik ploškých úhlů, co má stran podstava jeho.

Ku př. hranol pětistranný:  
 $u = 6 \times 5 = 30$  úhlů.

Jelikož se u hranolů tři ploské úhly do rohu skládají, obnáší počet hranolových rohů  $r$  třetinu všech ploských úhlů.  
 Jest tedy:

$$r = \frac{u}{3}.$$

Dáli se za počet  $u$  hodnota jeho:  $u = 6s$ , bude:

$$r = \frac{6s}{3} = 2s \text{ t. j.}$$

b) Hranoly mají 2krát tolik rohů, co má stran podstava jejich.

Ku př. hranol pětistranný:

$$r = 2 \times 5 = 10 \text{ rohů.}$$

Každý hranol má tolik pobočních hran, kolik má stran podstava jeho. U obou ploch podstavných dohromady jest dvakrát tolik hran, kolik stran má jedna plocha o sobě. Jest tedy celkem počet hran  $h$ :

$$h = s + 2s = 3s \text{ t. j.:}$$

c) U hranolů obnáší počet hran 3krát tolik, kolik stran má podstava.

Ku př. hranol pětistranný:

$$h = 3 \times 5 = 15 \text{ hran.}$$

d) Počet všech hranolových ploch p jest o dvě jednotky večší než počet stran podstavy. Pročež jest:

$$p = s + 2.$$

Ku př. hranol pětistranný má

$$p = 5 + 2 = 7 \text{ ploch.}$$

Seřadíme-li tyto hodnoty k snadnějšímu rozhledu do obrazce, má:

H r a n o l	s	u	h	r	p
		6s	3s	2s	s + 2
trojstranný . . . . .	s=3	18	9	6	5
čtyrstranný . . . . .	s=4	24	12	8	6
pětistranný . . . . .	s=5	30	15	10	7
šestistranný . . . . .	s=6	36	18	12	8
atd.					

Z obrazce toho jest patrno:

1. Počet všech ploských úhlů jest o dvě jednotky menší než součet hran, rohů a ploch.

Jestit  $u = 6s$ ,

$$h + r + p = 3s + 2s + s = 6s + 2.$$

2. Počet hran jest u každého hranolu o dvě jednotky menší než součet roků a ploch.

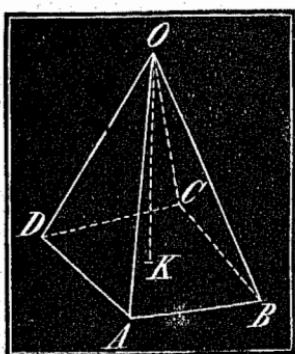
Jestit  $h = 8s$ ,

$$r + p = 2s + s + 2 = 8s + 2.$$

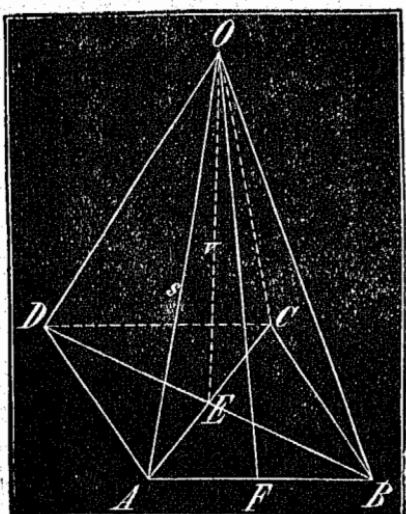
## 2. Jehlany.

1. Pohybuje-li se přímka jedním koncem po obvodě úhelníka ABCD (obr. 19.) tak, že druhý její konec zároveň nehybným nad touž rovinou ABCD ležícím bodem O prochází, opíše přímka ta trojúhelníky AOB, BOC, COD a DOA, kteréž se v bodu O stýkají a s rovinou ABCD prostor ze všech stran omezují. Těleso na ten způsob omezené sluje **jehlan**.

Obr. 19.



Obr. 20



Úhelník ABCD zove se **podstava** anebo **spod**; trojúhelníky AOB, BOC, COD... jmenují se **pobočné stěny** anebo krátce **boky**; průsečnice boků, přímky AO, BO, CO... nazývají se **hrany**, bod O sluje **vrchol**, kolmice z vrcholu k podstavě jest **výška** jehlanu.

Každý jehlan má třikolik pobočných stěn, kolik má stran neb úhlů podstava jeho. Jsouť tedy jehlany: **troj-, čtyr-, pětiboké**, anebo též **tří-, čtyr-, pětistranné**. Jsou-li strany podstavy jeho sobě rovny, sluje **rovnostroanný**.

Rozeznávají se dále jehlany **přímé** (kolmé) a **šikmé**. Jehlan přímý jest ten, jenž má za podstavu úhelník pravidelný a jehož výška stojí patou v středu téhož úhelníka; jinak jest šikmý.

Přímý jehlan má po stranách trojúhelníky rovnoramenné, vesměs shodné; neboť je li (obr. 20.)  $BE = DE = AE = CE$ , jsou pravoúhlé trojúhelníky AOE, BOE, COE a DOE shodné, pročež jest  $AO = BO = CO = DO$  t. j. trojúhelníky AOB, BOC, COD a AOD jsou

rovnoramenné a jelikož jest zároveň  $AB = BC = CD = AD$ , jsou trojúhelníky tyto též shodné.

Jsou-li pobočné hrany jehlanu přímého rovny hranám podstavným, jmenuje se jehlan *pravidelný*.

3. Průsek jehlanu. Vznik jehlanu můžeme si mysliti též takto, že se spodní plocha jeho do výšky rovnoběžně k první poloze své pohybuje a zároveň stejnometrně umenšuje tak, až konečně ve vrcholní bod S (obr. 21.) předcházejíc úplně zmizí.

Myslíme-li si, že jehlan SABC tímto způsobem vznikl a protne-li jej rovnoběžně k podstavě jeho, bude průsek abc podoben podstavě ABC; neboť týž průsek udává polohu, již podstava zaujmala na vzniku jehlanu toho.

Z toho jest dále patrnó, že jsou průseky stěn rovnoběžkami k stranám plochy spodní, a že jsou stěny jehlance Sabc podobny stěnám jehlanu SABC; z čehož jde, že jsou hrany jehlance Sabc srovnalé k stejnolehlým hranám jehlanu SABC.

Hrany jehlance Sabc učiněny jsou sekem, jejž jsme k spodní ploše ABC vedli rovnoběžně; ony hrany jsou tedy úseky hran jehlanu SABC a protož pravíme:

*Když se jehlan protne rovnoběžně k podstavě své, jest průsek podoben podstavě a úsečky hran jsou srovnalé k hranám celým.*

Jak víme, mají se podobné obrazce k sobě, jako druhé mocnosti stran stejnolehlých; má se tedy podstava  $ABC = P$  k průseku  $abc = p$ :

$$P:p = (AB)^2:(ab)^2.$$

Poněvadž jest trojúhelník  $Sab \sim SAB$ , má se:

$$AB:ab = AS:aS.$$

Plochy  $P$  a  $p$  mají se tedy k sobě též:

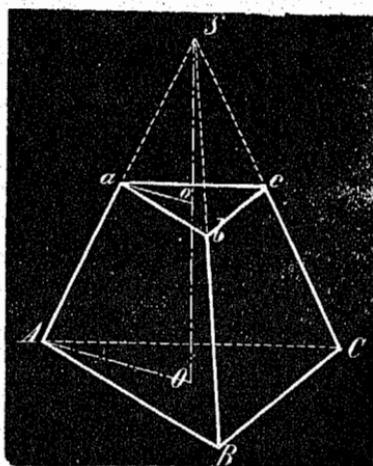
$$P:p = (AS)^2:(aS)^2.$$

Vedeme-li v jehlanu SABC výšku SO, půjde výška tato v rovině abc bodem o a So bude výškou jehlance Sabc.

Vedeme-li zároveň AO a ao, jest trojúhelník Sao podoben trojúhelníku SAO, jde totiž  $ao \parallel AO$ . Má se tedy:

$$AS:aS = OS:oS.$$

Obr. 21.



Plochy P a p budou se tedy též k sobě mít:

$$P:p = (OS)^2:(oS)^2.$$

Když se jehlan rovinou v podstavě rovnoběžně protne, vznikne plocha, která jest podobna ploše spodní a plochy ty mají se k sobě, jako druhé mocnosti vzdálenosti jejich od vrcholu jehlanu toho.

3. Jehlan zkromolený. Protínací rovinou rozdělí se jehlan (obr. 21.) na dvě tělesa, totiž jehlanec Sabc a těleso ABCabc. Těleso toto nazývá se komolí jehlana anebo komole jehlanová.

Je-li jehlan kolmý, jest i komole kolmá.

Vede-li se v komoli z některého bodu hořejší plochy kolmice k ploše spodní, je kolmice tato výškou komole. Kolmice oO je v obr. 21. výška komole.

Jak v obrazci 20. vidíme, rovná se výška komole rozdílu výšek obou jehlanů. Jestí:

$$oO = SO - So.$$

Známe-li v komoli výšku oO a dvě rovnoběžné strany ku př. ab a AB, můžeme vypočítati výšky obou jehlanů.

$$\text{Budiž: } SO = V, SO' = v', oO = v$$

$$ab = s, AB = S.$$

Jak v obrazci vidíme, jest:

$$V = v + v' \quad (1).$$

Poněvadž jest trojúhelník Sao — SAO, má se:

$$V:v' = SA:Sa$$

a poněvadž jest též

$$SA:Sa = AB:ab, \text{ bude}$$

tedy  $V:v' = AB:ab$  anebo

$$V:v' = S:s.$$

Jest tedy:

$$v' = \frac{Vs}{S}, \quad (2).$$

Dáme-li tuto hodnotu do výrazu (1) místo  $v'$ , bude

$$V = \frac{Vs}{S} + v, \text{ a}$$

$$SV = Vs + Sv$$

z čehož jde:

$$SV - Vs = Sv,$$

$$V(S-s) = Sv, \text{ a}$$

$$V = \frac{Sv}{S-s}, \text{ t. j.:}$$

Výška většího jehlanu se vyhledá, když se výška komole snásobí větší rovnoběžkou, a součin rozdílem rovnoběžek rozdělí.

Dáme-li do výrazu (2) místo výšky V hodnotu její, bude:

$$v' = \frac{s}{S} \cdot \frac{Sv}{S-s} = \frac{v \cdot s}{S-s} \text{ t. j.:}$$

Výška menšího jehlanu se vypočítá, když se výška kolmo směsobě menší rovnoběžkou, a součin rozdílem rovnoběžek rozdělí.

Příklad: Je-li S=6cm, s=4cm, v=5cm, jest:

$$v' = \frac{5 \cdot 6}{6-4} = \frac{30}{2} = 15\text{cm}$$

$$v' = \frac{5 \cdot 4}{6-4} = \frac{20}{2} = 10\text{cm}.$$

*Poznam.* Počet ploškých úhlů, počet hran, rohů a ploch u jehlanu. Jelikož jsou u jehlana stěny trojúhelníky, jest po stranách třikrát tolik ploškých úhlů, co má stran plocha podstavná. Podstava o sobě má tolik úhlů co stran. Jest tedy celkem počet úhlů u:

$$u = 3s + s = 4s \text{ t. j.:}$$

a) *Každý jehlan má 4krát tolik ploškých úhlů, co má stran podstava jeho.*

Ku př.: Jehlan čtyrstranný:

$$u = 4 \times 4 = 16 \text{ úhlů.}$$

Pobočních hran má jehlan tolik, co má stran podstava, a jelikož jest u plochy podstavné tolik hran, co má táz plocha stran; jest tedy počet všech hran h:

$$h = s + s = 2s \text{ t. j.:}$$

b) *Jehlan má 2-krát tolik hran, co má stran plocha podstavná.*

Ku př.: Jehla čtyrstranný:

$$h = 2 \times 4 = 8 \text{ hran.}$$

c) *Rohů jest tolik, kolik stran má spod jehlanový, a připočítá-li se vrchol, jest počet rohů r o jednu jednotku větší než počet stran s spodu jehlanového.*

$$r = s + 1.$$

Ku př.: Jehlan čtyrstranný.

$$r = 4 + 1 = 5 \text{ rohů.}$$

d) *Počet všech jehlanových ploch p jest o jednu jednotku větší než počet stran plochy podstavné.* Ku př.: Jehlan pětistranný:

$$p = s + 1, p = 5 + 1 = 6.$$

Seřadíme-li hodnoty ty do obrazce, má:

Jehlan	s	u	h	r	p
		4s	2s	s+1	s+1
trojstranný . . . .	s=3	12	6	4	4
čtyrstranný . . . .	s=4	16	8	5	5
pětistranný . . . .	s=5	20	10	6	6
šestistranný . . . .	s=6	24	12	7	7
atd.					

Z obrazce toho jest patrno.

1. Počet všech ploškých úhlů jest o dvě jednotky menší než součet hran, rohů a ploch. Jestit:

$$\begin{aligned} u &= 4s, \\ h &= 2s, r = s+1, p = s+1 \end{aligned}$$

a tedy:

$$h + r + p = 2s + s + 1 + s + 1 = 4s + 2.$$

2) Počet hran jest o dvě jednotky menší než součet rohů a ploch.

Jestit:

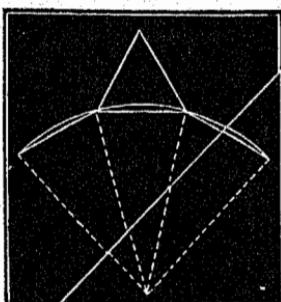
$$h = 2s$$

$$r = s+1, p = s+1$$

prodež:

$$p + r = 2s + 2.$$

5. Sít jehlanu. Rozvrhnou-li se pobočné stěny jehlanu na plochu tak, že vrcholem společně souvisí a k jedné z nich plocha spodní přilehá, povstane obrazec, jenž se sít jehlanová nazývá.  
Obr. 22.



Je-li jehlan přímý, sestrojí se síť, když se pobočnou hranou opíše oblouk, strany podstavy co tetivy na tento oblouk vnesou a body rozdělovací s tím bodem spojí, kolem něhož se oblouk opsal. U některé strany se pak sestrojí spodní plocha. Ku př. (obr. 22.) síť kolmého trojstranného jehlanu.

Sestrojte síť: 1. pravidelného trojstranného jehlanu, 2. kolmého čtyrbokého jehlanu.

### 3. Tělesa mnohostěnná.

1. Tvary a vlastnosti jejich. Tělesa hranatá jmennují a rozznávají se též dle počtu rovin, jimiž omezena jsou. Tak se nazývá ku př. pravidelný rovnoběžnostěn — šestistěn neb hexaéder;

pravidelný trojstraný jehlan čtyrstěn neb tetraëder. Vůbec se jmenují tělesa hranatá též mnohostěny (Polyeder).

Mnohostěn, jenž má na povrchu svém jenom pravidelné obrazce a v každém rohu stejný počet ploškých úhlů, nazývá se *pravidelný*, ku př. krychle.

Mnohostěn pravidelný má jen pravidelné tělesné úhelníky.

2. Jelikož máme jen patero pravidelných úhelníků, jest též jen pět pravidelných mnohostěnů. Tyto jsou:

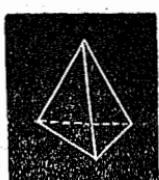
- a) Čtyrstěn, tetraëder (obr. 23.). b) Osmistěn, oktaëder (obr. 24.). c) Dvacítistěn, ikosaëder (obr. 25.). d) Šestistěn, hoxaëder (obr. 26.). e) Dvanáctistěn dodekaëder (obr. 27.).

a) Čtyrstěn má: 4 trojcové plochy, 12 ploškých úhlů, v rozích po třech, tedy 4 rohy; celkem 12 stran a, jelikož vždy dvě strany jednu hranu činí, 6 hran.

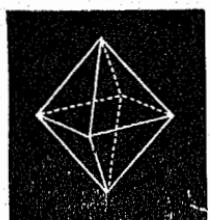
b) Osmistěn má: 8 trojcových ploch,  $24 = 8 \times 3$  ploškých úhlů, 12 hran v rozích po čtyřech úhlech, tedy 6 rohů.

c) Dvacítistěn má: 20 trojcových ploch,  $3 \times 20 = 60$  ploškých úhlů po pěti v rozích, tedy 12 rohů a 30 hran.

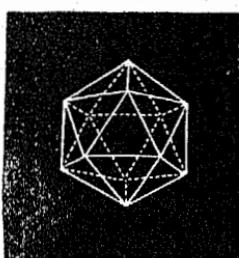
Obr. 23.



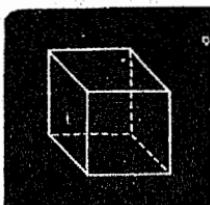
Obr. 24.



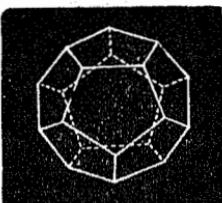
Obr. 25.



Obr. 26.



Obr. 27.



d) Šestistěn má: 6 čtvercových ploch  $4 \times 6 = 24$  ploškých úhlů, po třech v každém rohu, tedy  $\frac{24}{3} = 8$  rohů a 12 hran.

e) Dvanáctistěn má: 12 pravidelných pětiúhelníků,  $5 \times 12 = 60$  ploškých úhlů, v rozích po třech, tedy  $\frac{60}{3} = 20$  rohů, 30 hran.

Sekadime-li součty ploch, úhlů, rohů a hran do obrazce:

Má	p	u	r	h	p+r
čtyrstěn . . . . .	4	12	4	6	8
osmstěn . . . . .	8	24	6	12	14
dvacetistěn . . . . .	20	60	12	30	32
šestistěn . . . . .	6	24	8	12	14
dvanáctistěn . . . . .	12	60	20	30	32

Z obrazce tohoto jest vidno:

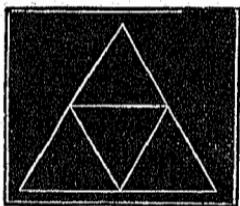
1. Počet všech ploských úhlů jest vždy o dvě jednotky menší, než součet ploch, rohů a hran.

2. Počet hran jest o dvě jednotky menší než součet rohů a ploch.

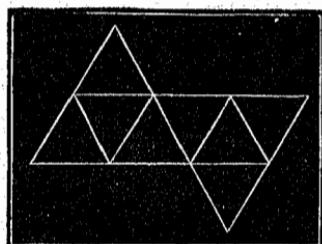
Pravidla tato platí tedy o tělesech hranatých vůbec.

3. Sítě těles pravidelných. a) *Čtyrstěn*. Sestrojí se dvojnásobnou stranou trojce, rozpůlí se strany a body rozpolovací se spojí (obr. 28.).

Obr. 28.



Obr. 29.

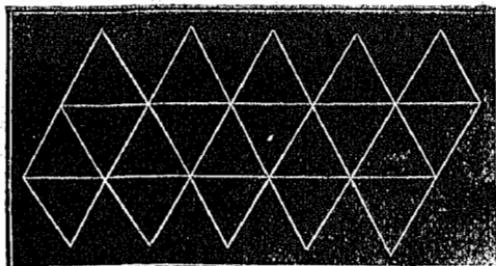


b) *Osmstěn*. Sestrojí se sít jako u čtyrstěnu a k síti této jiná stejná ale tak, aby měla s prvnou jednu společnou stranu (obr. 29.).

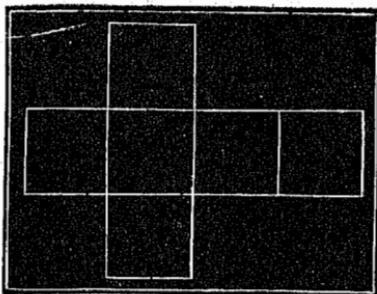
c) *Dvacacetistěn*. Sít dvacetistěnu se sestrojí, když se na určitou přímku hrana jeho pětkrát vnese a nad a pod jednotlivými délky trojce sestrojí. Vrcholy jedných trojčů vede se přímka a na přímku tuto vnese se opět hrana pětkrát a sestrojí se trojec nad každým dílkem (obr. 30.).

d) *Šestistěn*. Mezi rovnoběžkama sestrojí se délku jedné hrany čtyři čtverce vedle sebe a k dvěma protilehlým stranám po jednom čtverci (obr. 31.).

Obr. 80.



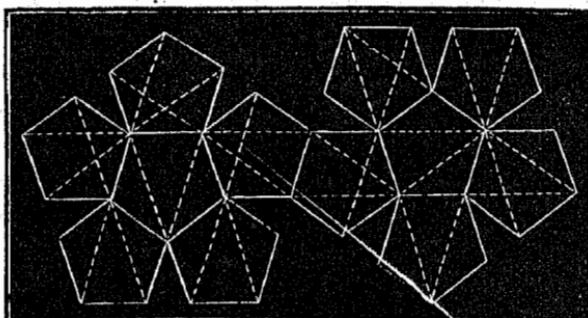
Obr. 81.



e) *Dvanáctistěn.* Vezme se délka jedné hrany tohoto mnohošesti, při této délce sestrojí se úhlopříčnou, ježto se kružidlem změří, rovnoramenný trojúhelník a při obou ramenech délku hrany taktéž rovnoramenné trojúhelníky. Tyto trojúhelníky dají první pětiúhelník.

Úhlopříčny a strany se pak náležitě prodlužují, až se sestrojí šest shodných jednou stranou souvislých pětiúhelníků. K této sítii sestrojí se pak ještě jedna shodná tak, že mají obě jednu společnou stranu. (Obr. 82.).

Obr. 82.



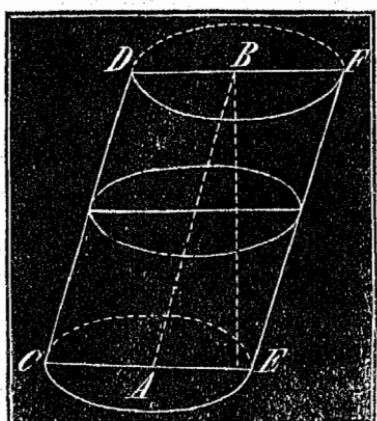
## V. Tělesa kulatá.

### 1. Válec.

1. *Vznik válce.* Pohybuje-li se přímka CD (obr. 83.) obvodem kruhovým stále rovnoběžně k prvotní poloze své, opíše se přímkou tou křivá, oblá plocha a bodem D, jakož i všelikým jiným bodem

přímky té, opíše se kruh, který se kruhu spodnímu rovná. Oblá plocha s dolejším i hořejším kruhem omezuje těleso okrouhlé, jemuž *válec* díme.

Obr. 33.



Útvor válce můžeme si takto mysliti: Když se kruh do výše pohybuje směrem takovým, že při tom plocha jeho k prvotní poloze své stále rovnoběžná jest, opíše se obvodem kruhu toho oblá plocha, kteráž s prvotním kruhem a kruhem se pohybujícím omezuje těleso kulaté, ježto se *válec* jmenuje.

Oba kruhy, dolejší i hořejší, nazývají se *plochy podstavné* a oblá plocha kolem válce sluje *oblinou* nebo *pláště*. Přímka, kteráž středy obou kruhů spojuje, nazývá se *osa*.

Vedeme-li od jednoho obvodu k druhému na oblině čary přímé ku př. EF, nazývají se tyto dolejší udává *výšku válce*.

přímky u válce *strany*. Kolmice s hořejší kruhové plochy k ploše dolejší udává *výšku válce*.

Válec, jehož osa stojí kolmo na podstavě, sluje *kolmý* nebo *přímý*. Stojí-li osa na ploše té šikmo, jmenuje se válec *kosý* nebo *šikmý*.

U válce kolmého jest osa výše rovna.

Válec, jehož strany jsou rovny průměru plochy podstavné, nazývá se *rovnostanný*.

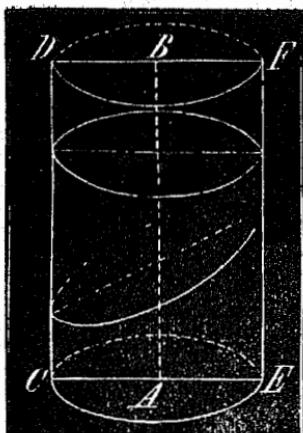
*Poznam.* Protože se může považovati kruh za úhelník mnohostranný, dá se i válec považovati za hranol mnohostranný.

2. Seky válce. Válcová síť. Protne-li se válec rovnoběžně s plochou podstavnou, jest průsek ten kruh, jenž se kruhu spodnímu rovná; udávat nám polohu, jižto tvořící kruh při vzniku válce zaujímal.

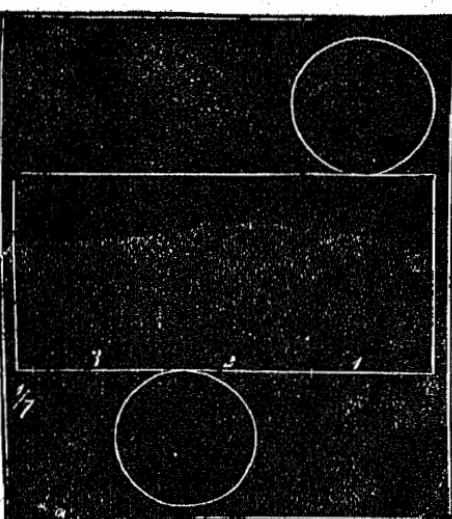
Vede-li se ale průsek šikmo k ploše podstavné, vznikne *ellipsa* (obr. 34).

Když rozvinutou oblinu válce na rovinu položíme, obdržíme obdélník, jehož šířka jest rovna obvodu plochy podstavné válce toho. Sít válce kolmého sestrojí se protož takto: Poloměrem plochy základné opíše se kruh, ke kruhu tomu se vede přímka tečná a učiní se rovnou obvodu plochy té. Tečna ta bude tedy asi  $3\frac{1}{4}$ , krát větší, než jest průměr kruhu toho. Nad tečnou tou sestrojí se

Obr. 34.



Obr. 35.



obdélník, jehož výška jest rovna výšce válcové. Při delší straně tohoto obdélníka sestrojí se ještě jeden kruh, rovný kruhu předešlému (obr. 35.).

## 2. Kužel, (conus).

1. Vznik kužele. Pohybuje-li se přímka AO (obr. 36.) tak, že jde v každé poloze budem O a obvodem kruhu AD, opíše se přímkou tou okrouhlá, oblá plocha. Plocha ta omezuje s kruhem spodním těleso okrouhlé, ježto se *kužel* nazývá.

Bod O jmenuje se *vrchol*; kruh AD sluje podstava neb *spodna oblá plocha* po stranách kužele nazývá se *oblina, plášt*.

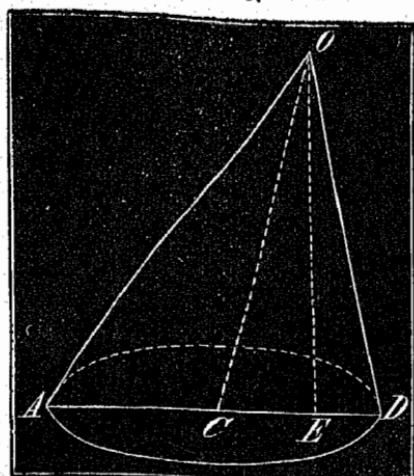
Přímka, kteráž střed přímky podstavné s vrcholem spojuje, sluje *osa, kolmice* OE z vrcholu k podstavě *výška*.

Oblina kuželová má tu vlastnost, že ji každá rovina, vedená vrcholem a dvěma body kruhu spodního, ve dvou přímkách protíná. Průsečné přímky ty nazývají se *strany*.

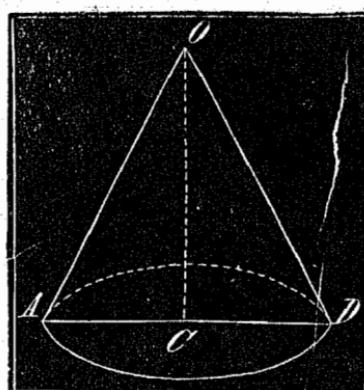
Stojí-li osa k podstavě kolmo, sluje kužel *kolmý* neb *přímý*, stojí-li k ploše té šikmo, jmenuje se kužel *kosý* neb *šikmý*.

V kuželi kolmém stojí osa k ploše základné kolmo a sice v středu plochy té, jakž to z obrazce trojúhelníka rovnoramenného AOD (obr. 37.) vysvítá.

Obr. 86.



Obr. 87.



Jsou-li u kolmého kužele strany rovny průměru plochy podstavné, nazývá se kužel *rovnostanný*.

Vznik kužele můžeme si též mysliti a představiti takto: Po-hybuje-li se kruh do výšky rovnoběžně k prvotní poloze své tak, že se zároveň plocha jeho *stejnoměrně* umenšuje až konečně docela zmíří, opře se obvodem kruhu toho oblá plocha, kteráž omezuje s kruhem prvotním těleso kulaté, jemuž kužel díme.

2. Seky. kužele. Setne-li se kužel rovnoběžně k ploše podstavné (obr. 38.), vzniknou dvě tělesa, menší kužel ODFG a těleso ADFGEC, ježto jest omezené dvěma rovnoběžnýma kruhy a oblou plochou. Těleso ADFGEC nazývá se *komolí kužele* aneb *komole kuželová*.

Byl-li kužel kolmý, jest i komole kolmá. Kolmice z hořejší plochy k ploše spodní je *výška* komole. Přímka, jdoucí z obvodu spodního po oblině k obvodu hořejšímu, sluje *strana*.

Kužel může se považovati za jehlan mnohostranný; komole kuželová jest pak komole jehlanu toho.

Je-li výška kolmá komole ADFGE známa a jsou-li též známy poloměry obou podstavných ploch, totiž  $AC=R$ ,  $DF=r$ ; dá se vypočítati výška věčího i menšího kužele. Jsou-li výšky tyto  $OC=V$ ,  $CF=v$ ,  $OV=v'$ , je:

$$V=v+v' \quad (1).$$

Jelikož je trojúhelník ODF ~ OAC, má se:

$$v':V=v:R, \text{ a}$$

$$v' = \frac{Vr}{R}, \quad (2).$$

Dáme-li hodnotu tuto do rovnice (1) místo hodnoty  $v'$ , bude:

$$V = v + \frac{Vr}{R}, \text{ a}$$

$$VR = vR + Vr,$$

z kteréžto rovnice jde, že jest:

$$VR - Vr = vR,$$

$$V(R - r) = vR \text{ a}$$

$$V = \frac{vR}{R - r}.$$

Dá-li se tato hodnota  $V = \frac{vR}{R - r}$  do rovnice (2) místo hodnoty  $V$ ,

bude:  $v' = \frac{r}{R} \times \frac{vR}{R - r} = \frac{rv}{R - r}.$

Výška menšího kuželet se vypočítá, když se výška komole menší, výška většího kuželet, když se výška komole větším poloměrem snášebí a soudí rozdílem obou poloměrů rozdělit; ku pt.:

$$R = 6\text{cm}, r = 3\text{cm}, v = 5\text{cm}$$

$$V = \frac{5 \cdot 6}{6 - 3} = \frac{30}{3} = 10\text{cm}$$

$$v' = \frac{5 \cdot 3}{6 - 3} = \frac{15}{3} = 5\text{cm}.$$

Mnoho-li obnášíjí výšky ty, když mají poloměry a výška komole tyto hodnoty:

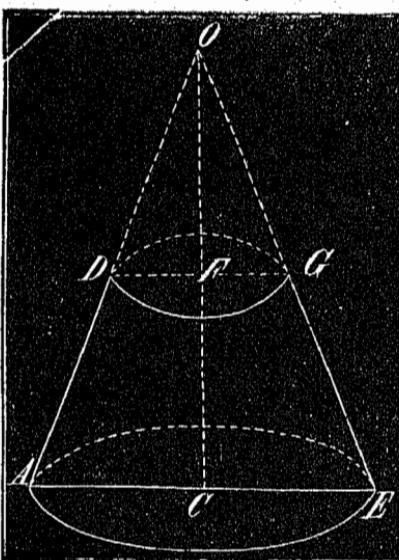
$$R = 8\text{cm}, r = 8\text{cm}, v = 5\text{cm}.$$

$$R = 8\text{cm}, r = 2\text{cm}, v = 5\text{cm}.$$

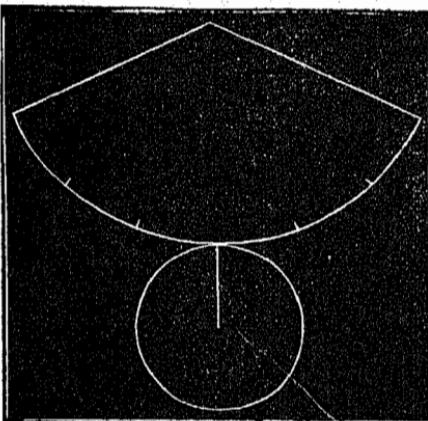
3. Síť kolmého kuželet. Síť kuželet kolmého sestrojí se takto: Poloměrem plochy podstavné opíše se kruh (obr. 39.), k tomuto kruhu sestrojí se stranou kuželet dotýčný oblouk, rovný obvodu plochy podstavné a konce jeho spojí se s tím bodem, kolem něhož se opsal.

Rovným obvodu plochy podstavné učiní se týž oblouk snadno takto, že se poloměr plochy té šestkrát naň vnese. Dát se každý poloměr šestkrát do obvodu kruhu svého vněti; pročež budou onen oblouk a obvod podstavného kruhu sobě rovny.

Obr. 38.



Obr. 39.

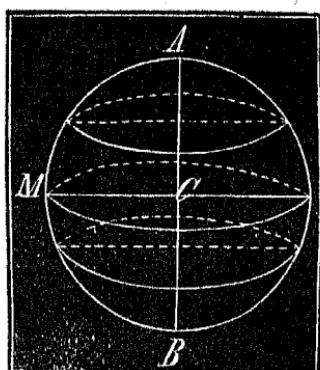


### 8. Koule a vlastnosti její.

1. Vznik koule. Otočili se polokruh AMB (obr. 40.) kolem svého průměru AB, povstane kulaté těleso, ježto se koule nazývá.

Každým bodem polokruhu AMB opíše se při otočení tom kruh, jehož střed na průměru AB leží. Všecky tyto kruhy jsou k sobě rovnoběžné a jsou tím menší, čím blíže stojí k bodu A a B. Bodem M, jenž v půli polokruhu leží, opíše se největší kruh.

Obr. 40.



Všecky body na povrchu koule jsou v rovné vzdálenosti od středu tvořícího polokruhu. Bod ten nazývá se *střed koule*.

Každá přímka, kteráž jde ze středu k povrchu koule, nazývá se *poloměr*; přímka, kteráž jde středem a dva body na povrchu kulovém spojuje, jmenuje se *průměr*.

2. Sek kulový. Koule má vlastnost tu, že jest každý roviný sek její — kruh, at se protínací rovina jakkoli vede.

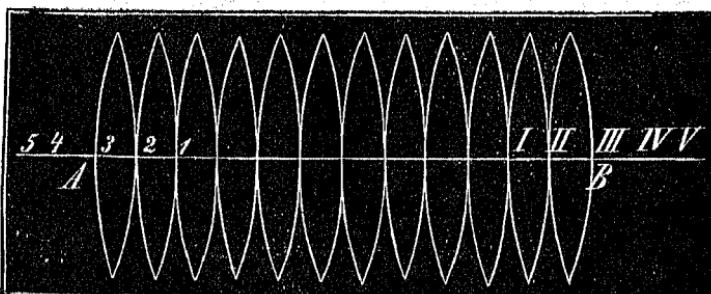
Jde-li protínací rovina středem koule, povstane *největší kruh*, jehož středem jest střed koule, jehož poloměrem jest poloměr koule. Všechny *největší kruhy* jsou si rovny, jelikož jsou poloměry jejich rovné.

Rovina protínací dělí kouli na dvě části. Části tyto nazývají se *úseky*.

Vede-li se sek středem, rozdělí se koule na dva rovné díly — *polokoule*.

Protne-li se koule dvěma rovinama rovnoběžně, jmenuje se ona část její, kteráž jest obsažena mezi rovnoběžnýma plochama, *pás kulový*.

Obr. 41.



3. Síť koule. Kulová síť se sestrojí takto: Vede se přímka a na tu přímku se vnesou z bodu A (obr. 41.) průměr kulový

$3\frac{1}{2}$ , krát. Délka tato AB rozdělí se na 12 rovných dílů a prodlouží se bodem A i B a sice o devět takových dílů. Kolem bodů 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a I, II, III, IV, V . . . se opíší poloměrem, jenž deset takových dílů obnáší, průsečné oblouky. Takto povstanou obrazce čočkovité, z kterýchž bez mála lze kouli sestavit.

## VI. Povrch těles.

### 1. Povrch hranolu.

1. Součet všech ploch, jimiž těleso omezeno jest, nazývá se *povrch* tělesa. Součet ploch po stranách jmenej se *povrch pobočný*.

U hranolu jsou stěny po stranách — rovnoběžce. Součet ploch rovnoběžců těchto činí *povrch pobočný*.

Je-li hranol kolmý, mají pobočné stěny tutéž výšku, jakouž má hranol a výška ta, stranami plochy podstavné násobena, dá plošný obsah oněch stěn. Ku př.: Je-li kolmý hranol trojstranný a jsou-li podstavy stěn pobočných (obr. 42.)  $z_1$ ,  $z_{11}$ ,  $z_{111}$ , a společná výška  $v$ , jest povrch pobočný  $p$ :

$$p = z_1 + z_{11} + z_{111} \cdot v$$

anebo:

$$p = v (z_1 + z_{11} + z_{111})$$

Součet:  $(z_1 + z_{11} + z_{111})$  činí obměr spodu O; pročež jest:

$$p = v \times O \text{ t. j. :}$$

*Pobočný povrch kolmého hranolu se vypočítá, když se obměr spodu výškou znásobí.*

$$\text{Ku př.: } z_1 = 3^{\text{dm}}, z_{11} = 4^{\text{dm}}, z_{111} = 5^{\text{dm}}, v = 6^{\text{dm}}$$

$$O = 3 + 4 + 5 = 12^{\text{dm}}$$

$$p = 6 \times 12 = 72 \square^{\text{dm}}$$

2. Připočtou-li se k povrchu pobočnému  $p$  obě podstavné plochy, neb plocha spodní dvojnásobně, činí součet tento *celý povrch hranolu P*. Jest tedy:

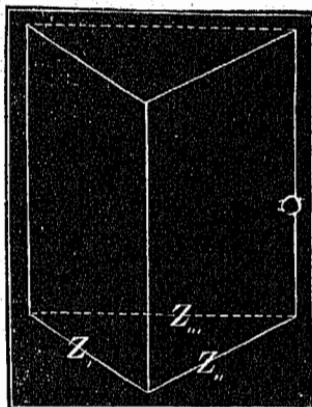
$$P = p + 2b.$$

$$b \text{ (basis, podstava)} = 6 \square^{\text{dm}}$$

$$P = 72 \square^{\text{dm}} + 12 \square^{\text{dm}} = 84 \square^{\text{dm}}$$

Snadno se vyrozumí, že se týmž způsobem povrch pobočný i celý povrch vypočítá, má-li hranol více než tří stran. Ku př.: Je-li kolmý hranol čtyrstěnný a spod jeho obdélník, strany pak  $z_1 = 3^{\text{dm}}$ ,  $z_{11} = 4^{\text{dm}}$ ,  $v = 5^{\text{dm}}$ , jest:

Obr. 42.



$$O = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 14 \text{ dm}$$

$$p = 14 \times 5 = 70 \text{ dm}^2$$

$$b = 3 \times 4 = 12 \text{ dm}$$

Celý povrch P bude tedy:

$$P = 2 \times 12 \text{ dm}^2 + 70 \text{ dm}^2 = 94 \text{ dm}^2.$$

1. Vypočítejte povrch kolmého 3-rovnostanného hranolu, jenž je 8dm 4cm vysoký a jehož strana obnáší 5dm 6cm.

2. Kolmý hranol, jenž má za podstavu plochu čtvercovou, je 5dm 8cm vysoký a plocha ta má v obměru 22dm 8cm; jak velký je povrch pobočný a povrch celý?

3. Kolmý čtyrstranný hranol má podstavnou plochu obdélníkovou, kteráž má v obměru 2m a je 4dm 2cm široká; mnoho-li činí povrch téhož hranolu, když je 9dm 8cm vysoký?

## 2. Povrch jehlanu.

1. Povrch jehlanu se vypočítá, když se vypočítají nejprvě stěny po stranách a když se pak k součtu těchto stěn připočte plocha spodní.

Je-li jehlan kolmý, anebo je-li pravidelný, vezme se jedna pobočná stěna tolikkrát, kolik má stran plocha základná. Ku př.: Měl by se vypočítati povrch kolmého, 4stranného jehlanu, jehož strana má 1m; výška trojúhelníků po stranách obnáší 9·79dm.

Plocha jednoho trojúhelníka bude:

$$\frac{10}{2} \times 9\cdot79 = 5 \times 9\cdot79 = 48\cdot95 \text{ dm}^2.$$

Povrch pobočný p bude:

$$p = 4 \times 48\cdot95 \text{ dm}^2 = 195\cdot8 \text{ dm}^2 = 1 \text{ m}^2 95\cdot8 \text{ dm}^2.$$

Je-li spodní plocha čtverec, jest obsah její  $b = 1 \text{ m}^2$  a celý povrch P bude pak:

$$P = 1 \text{ m}^2 + 1 \text{ m}^2 95\cdot8 \text{ dm}^2 = 2 \text{ m}^2 95\cdot8 \text{ dm}^2.$$

Je-li tedy jedna strana s, výška trojúhelníku v, a má-li plocha spodní n stran, jest povrch pobočný p:

$$p = \frac{n \times sv}{2} = ns \times \frac{v}{2}$$

ns jest obměr plochy spodní O, protož jest:

$$p = O \times \frac{v}{2} \text{ t. j. :}$$

Pobočný povrch kolmého (pravidelného) jehlanu se vypočítá, když se obměr spodní plochy polovičnou výškou jednoho trojúhelníka znásobí.

Ku př.: Má se vypočíti povrch kolmého, 4stranného jehlanu, jenž má v obměru 1m. Výška trojúhelníků po stranách obnáší 8dm 8cm.

$$p = 10 \times \frac{8\cdot8}{2} = 44 \text{ dm}^2.$$

Vypočítejte pobočný povrch kolmého, 3-, 4-, 6-stranného jehlanu, když obnášejí spodní strany 2dm 4cm a výška jednoho trojúhelníka 4dm 6cm.

2. Povrch zkromoleného jehlanu (povrch komole jehlanové). Povrch komole jehlanové vypočítá se takto: Vypočtou se nejprve lichoběžníky (trapezy) po stranách a k součtu jejich se připočítají obě rovnoběžné plochy.

Je-li komole kolmá, vypočítá se jen jeden lichoběžec a obsah jeho znásobí se počtem stran. K součinu tomu připočtou se pak ještě obě rovnoběžné plochy. Ku př.: Má se vypočítati povrch kolmé, 3-stranné komole; hořejší strana má  $8\text{cm}$ , dolejší  $1\text{dm} 2\text{dm}$  a výška lichoběžců obnáší  $1\text{dm} 8\text{cm}$ .

$$\text{Jeden lichoběžník má: } \frac{8 + 12}{2} \times 18 = 180 \text{ cm}^2 = 1 \text{ dm} 8 \text{ cm}^2,$$

bude tedy pobočný povrch  $p$ :

$$p = 3 \times 180 = 540 \text{ cm}^2 = 5 \text{ dm} 40 \text{ cm}^2.$$

Dáme-li k povrchu  $p$  obě rovnoběžné plochy, bude:

$$\text{hořejší plocha } = 27 \cdot 712 \text{ cm}^2,$$

$$\text{dolejší plocha } 62 \cdot 353 \text{ cm}^2;$$

celý povrch  $P$  bude pak:

$$P = 540 \text{ cm}^2 + 27 \cdot 712 \text{ cm}^2 + 62 \cdot 353 \text{ cm}^2 = 630 \cdot 065 \text{ cm}^2 = 6 \text{ dm}^2 30 \cdot 065 \text{ cm}^2.$$

Je-li u kolmé komole dolejší strana  $S$ , hořejší  $s$ , výška lichoběžníků  $v$  a má-li komole  $n$  stran, jest povrch pobočný  $p$ :

$$p = n \frac{S + s}{2} \times v.$$

nebo:

$$p = \frac{nS + ns}{2} \times v.$$

Součin  $nS$  jest obměr  $O$  spodní plochy; součin  $ns$  jest obměr  $o$  plochy hořejší, protož bude:

$$p = \frac{O + o}{2} \times v, \text{ t. j.:}$$

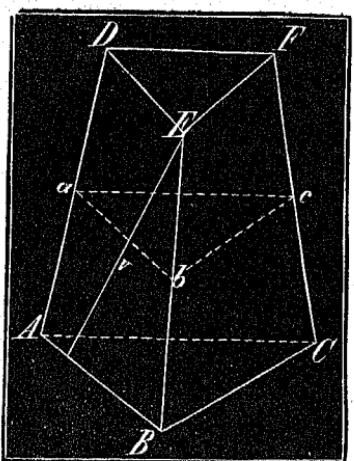
*Pobočný povrch kolmého zkromoleného jehlanu se vypočítá, když se poloviční součet obměrů ploch rovnoběžných výškou jednoho lichoběžce znásobí.*

3. Střední průsek komole jehlanové. Vedeme-li středem pobočných hran komole ABCFED (obr. 43.) rovinu protínací  $abc$ , jest dle vlastnosti lichoběžníků strana

$$ab = \frac{AB + DE}{2}, \quad bc = \frac{BC + EF}{2}, \quad ac = \frac{AC + DF}{2}, \quad \text{protož bude i}$$

$$ab + bc + ac = \frac{(AB + BC + AC) + (DE + EF + DF)}{2},$$

Obr. 48.



Součty stran udávají obměry.  
Jestit:

$$AB + BC + AC = 0$$

$$DE + EF + DE = 0$$

$ab + bc + ac = O_1$ , obměr průseku středního. Jest tedy:

$$O_1 = \frac{0+0}{2}$$

Dáme-li hodnotu tuto do vzorku:

$$p = \frac{0+0}{2} \times v, \text{ bude:}$$

$$p = O_1 \times v, \text{ t. j.:}$$

Pobočný povrch kolmé komole se též vypočítá, když se obměr středního průseku výškou lichoběžníků znásobí.

Ku př.: Je-li výška  $v = 4^{\text{dm}}$ , strana středního průseku  $5^{\text{dm}}$ , jest povrch pobočný kolmé, 3-stranné komole:

$$p = 3 \times 5 \times 4 = 60 \square^{\text{dm}}$$

Jak velký byl by pobočný povrch zkoumoleného 4-rovnostranného přímého jehlanu, kdyby byla výška pobočných lichoběžníků  $2^{\text{m}} 3^{\text{dm}} 9^{\text{cm}}$  a strana středního průseku  $1^{\text{m}} 3^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}$ ?

### 3. Povrch těles pravidelných.

Povrch těles pravidelných se vypočítá, když se jedna stěna vypočte a plošný obsah její tolíkkrt vezme, kolik takových ploch těleso má. Ku př.: Má se vypočítati povrch šestistěnu, jehož strana  $8^{\text{cm}}$  obnáší.

Šestistěn má 6 čtverců; jest tedy povrch  $P$ :

$$P = 6 \times 8^2 = 6 \times 64 = 384 \square^{\text{cm}}$$

Mnoho-li by obnášel povrch ten, kdyby strana obnášela  $2^{\text{m}} 3^{\text{cm}}, 1^{\text{m}} 5^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}?$

Vypočítejte povrch čtyr-, osmi-, dvacítistěnu, jejichž strany obnášejí  $4^{\text{cm}}, 6^{\text{cm}}, 9^{\text{cm}}$ .

### 4. Povrch válce.

Povrch válce sestává z dvou rovných kruhů a obliny neb pláště. Každý válec může se mstti za hranol mnohostranný a protož se dá povrch válce dle téhož pravidla vypočisti, jakž se u hranolu dělo.

Povrch kolmeho válce se tedy vypočítá, když se obvod spodní plochy výškou znásobí a k součinu tomu dvojnásobná spodní plocha připoče.

U válce jest obměr plochy spodní  $O = 2r\pi$ , pročež bude povrch pobočný neb oblina

$$p = 2r\pi \times v.$$

Celý povrch  $P$  bude:  $2r\pi \times v + 2b$  a jelikož jest  $b = r^2\pi$ , tedy bude:  $P = 2r\pi \times v + 2r^2\pi$ .

Ku př.:  $r = 4^{\text{dm}}$ ,  $v = 8^{\text{dm}}$

$$p = 2 \times 4 \times 3 \cdot 14 \times 8 = 200 \cdot 96^{\text{dm}}$$

$$b = 4^2 \times 3 \cdot 14 = 50 \cdot 24^{\text{dm}}.$$

Celý povrch  $P$  bude:

$$P = 200 \cdot 96^{\text{dm}} + 2 \times 50 \cdot 24^{\text{dm}} = 301 \cdot 44^{\text{dm}}.$$

Je-li válec rovnostranný, jest  $v = 2r$ , protož bude  $p$ :

$$p = 2r\pi \times 2r = 4r^2\pi, \text{ a}$$

$$P = 4r^2\pi + 2r^2\pi = 6r^2\pi.$$

Ku př.: Jak velký jest povrch rovnostranného válce, jehož poloměr má  $3^{\text{dm}}$ ?

$$p = 4 \times 3^2 \times 3 \cdot 14 = 113 \cdot 04^{\text{dm}}$$

$$P = 6 \times 3^2 \times 3 \cdot 14 = 169 \cdot 56^{\text{dm}}.$$

Jak by se vypočítal z povrchu kolmého rovnostranného válce poloměr plochy spodní?

Mnoho-li obnáší povrch kolmého válce, když jest  $v = 3^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}$ ,  $r = 1^{\text{dm}} 5^{\text{cm}}$ ?

### 5. Povrch kuželete.

1. Povrch kuželeta sestává z obliny neb pláště a plochy spodní. Má-li se celý povrch vypočítati, vypočítá se nejprvě plášt a k obsahu jeho se připočte spodní kruhová plocha.

Jest tedy:  $P = p + b$ .

Kužel může se považovati za jehlan mnohostranný. Je-li kužel kolmý, vypočítá se plášt, když se obvod plochy spodní znásobí polovičnou stranou kuželeta.

Jest tedy:  $p = 2r\pi \times \frac{s}{2} = r\pi s$ .

Spodní plocha  $b = r^2\pi$ , protož bude:

$$P = r\pi s + r^2\pi.$$

Ku př.:  $r = 4^{\text{cm}}$ ,  $s = 1^{\text{dm}} 6^{\text{cm}}$

$$p = 4 \times 3 \cdot 14 \times 16 = 200 \cdot 96^{\text{cm}}$$

$$b = 4^2 \cdot 3 \cdot 14 = 50 \cdot 24^{\text{cm}}$$

$$P = 251 \cdot 2^{\text{cm}} = 2^{\text{dm}} 51 \cdot 2^{\text{cm}}.$$

Je-li kužel rovnostranný, jest  $s = 2r$

$$p = r\pi \cdot s = r\pi \cdot 2r = 2r^2\pi$$

$$P = 2r^2\pi + r^2\pi = 3r^2\pi.$$

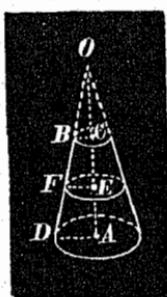
Ku př.  $r = 4\text{cm}$

$$P = 3 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 14 = 150 \cdot 72 \square \text{dm}.$$

Mnoho-li by obnášel povrch kolmého kuželeta, když je  $r = 2\text{dm}$   $8\text{cm}$ ,  $s = 7\text{dm}$   $9\text{cm}$ ?

2. Povrch kolmole kuželové. Je-li komole kolmá, vypočítá se plášt její jako při komoli kolmého jehlana, když se obvod středního průseku *délkou* (stranou) komole znásobí. Jestliž:

Obr. 44.



$$p = O_1 \times s$$

Je-li poloměr středního průseku  $EF = r$  (obr. 44.) jest:

$$p = 2r\pi \cdot s.$$

Jsou-li poloměry rovnoběžných ploch  $R$  a  $r'$ , jest:

$$2r\pi = \frac{2R\pi + 2r'\pi}{2} \text{ a skrátí-li se, jest}$$

$$R = \frac{R + r'}{2} \text{ t. j.}$$

*Polovičný součet poloměrů ploch rovnoběžných dá poloměr průseku středního.*

Ku př.  $R = 6\text{cm}$ ,  $r' = 4\text{cm}$ ,  $s = 8\text{cm}$

$$p = 2r\pi \cdot s = 2 \cdot \left( \frac{R + r'}{2} \right) \pi \cdot s$$

$$p = 2 \times 5 \times 3 \cdot 14 \times 8 = 251 \cdot 2 \square \text{cm}.$$

Připočtou-li se k plášt obě rovnoběžné plochy, činí součet celý povrch, ku př.

$$p = 251 \cdot 2 \square \text{cm}$$

$$\text{spodní plocha } 6^2 \cdot 3 \cdot 14 = 113 \cdot 04 \square \text{cm}$$

$$\text{hořejší plocha } 4^2 \cdot 3 \cdot 14 = 50 \cdot 24 \square \text{cm}$$

$$P = 414 \cdot 48 \square \text{cm} = 4 \square \text{dm} 14 \cdot 48 \square \text{cm}.$$

## 6. Povrch koule.

1. Povrch kulový se vypočítá dle předešlého početnsho způsobu a sice takto:

Vedme ke kruhu (obr. 45.) v bodu O tečnu. Učiní-li se  $TO = ON$  a spustíme-li s bodu N a T a na průměr AB kolmice

NQ a TL, opíše se tečnou, když se kruh kolem osy AB otočí, plášt kolmě kuželové komole, anebo pás kulový, čím blíže ona tečna k oblouku kruhovému přiléhá. Strana této komole jest TN a výška  $v = LQ = MN$ .

Správně s bodu O na průměr AB kolmici OP, bude OP poloměrem středního průseku, a protož jest plášt  $\nu$  dle předešlého učení:

$$p \equiv 2\pi \times OP \times TN.$$

Vede-li se kulový poloměr CO, bude trojúhelník TNM ~ COP (oba jsou pravoúhlé, úhel TNM = COP, jelikož ramena jejich na sobě vzájemně kolmo stojí). Má se tedy:

TN:MN = OG:OP

$OG = r$

$$MN \equiv LQ \equiv V$$

TN; v = r; OP. a

$$OP \times TN = r \times v.$$

Dá-li se hodnota tato do vzorku:  $p = 2\pi \times OP \times TN$ , bude  
 $p = 2\pi \times r \times v = 2\pi r v$  t. j.:

Oblína neb pldšl pásu kulového se vypočítá, když se obvod největšího kruhu výškou pásu toho znásobí.

Rozdělme-li oblouk BD na malé díly a vedeme-li z každého rozdělovacího bodu kolmice k průměru AB, opíší se těmito díly, když se oblouk BD kolem osy AB otočí, obliny malých kulových pásků. Jsou-li výšky pásků těchto  $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots$ , obnáší je obliny  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ :

$$p_1 = 2r\pi \times v_1, \quad p_2 = 2r\pi \times v_2, \quad p_3 = 2r\pi \times v_3.$$

Součet oblin těchto dá povrch polokoule  $\frac{P}{2}$ :

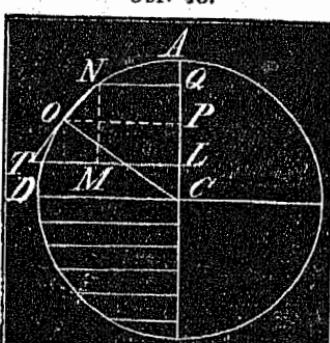
$$\frac{P}{2} = 2\pi \times v_1 + 2\pi \times v_2 + 2\pi \times v_3 + \dots$$

$$\frac{P}{2} = 2\pi r(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \dots).$$

Součet jednotlivých výšek dá poloměr  $CB=r$ , protož jest:

$$\frac{P}{2} = 2\pi r \times r = 2r^2\pi, \text{ a}$$

$$P = 4\pi r^2 n \quad \text{t. j.} \quad P = (2r^2) \times \pi = 2r\pi \times 2r.$$



Obr. 45.

Povrch koule se vypočítá, když se druhá mocnost kulového průměru číslem Ludolfským znásobí anebo, když se obvod největšího kruhu průměrem znásobí.

Jelikož jest plocha největšího kruhu  $r^2\pi$ , rovná se povrch kulový čtvernásobné ploše největšího kruhu.

Ku př.  $r = 4\text{ cm}$

$$P = 4 \times 4^2 \times 3 \cdot 14 = 64 \times 2 \cdot 14 = 200 \cdot 96 \square \text{cm}.$$

Jak velký bude povrch koule, když je  $r = 6\text{ cm}$ ,  $8\text{ cm}$ ,  $2\text{ dm}$ ?

2. Je-li povrch dvou koulí  $P$  a  $P_1$ , poloměry  $r$  a  $r_1$  jest  $P = 4r^2\pi$  a  $P_1 = 4r_1^2\pi$ .

Vyhledáme-li poměr obou povrchů, bude:

$$P:P_1 = 4r^2\pi:4r_1^2\pi \text{ nebo } P:P_1 = r^2:r_1^2 \text{ t. j.}$$

Povrchy kulové mají se k sobě jako druhé mocnosti poloměrů.

Je-li povrch kulový znám, dá se z něho poloměr vypočítat. Jestit:  $P = 4r^2\pi$  a

$$\frac{P}{4\pi} = r^2, \text{ z čehož:}$$

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi}} \text{ t. j.}$$

Z kulového povrchu se poloměr vypočítá, když se povrch čtyrnásobným Ludolfským číslem rozdělí a z podílu toho druhá odmocnina vyhledá.

Ku př.:  $P = 314 \square \text{cm}$

$$r = \sqrt{\frac{314}{4 \cdot 3 \cdot 14}} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

Mnoho-li obnáší poloměr  $r$ , když je  $P = 803 \cdot 84 \square \text{cm}$ .

## VII. Kostkový obsah těles.

**Výklad.** Prostor, jejž těleso zaujímá nazývá se *obsah tělesny*. Tělesné obsahy se měří určitou jedničkou. Těleso vyměřiti znamená, vyšetřiti kolikkrát jednička v prostoru tělesa obsažena jest. Jedničkou tou jest *kostka* čili *krychle* a proto se nazývá obsah tělesa dle jedničky té *obsah kostkový* neb *krychlený*. Kostka, jejiž strana obnáší  $1\text{dm}$ , jmenejte se *kostkový* neb *krychlený decimetr*; taktéž sluje *metr kostkový*, obnáší-li strana  $1\text{m}$ .

Měření obsahu tělesného může se dfti dvojím způsobem, bud bezprostředně anebo prostředečně. Bezprostředně se měří, když se vyšetří, mnoho-li metrů, decimetrů kostkových jistý prostor obnáší. Takovéto měření jest měření vlastní. Avšak bezprostředné měření

bylo by přečasto obtížné, ano někdy docela nemožné, ku př. vy-měření tělesného obsahu koule zemské. Protož se děje měření prostředecně. Obsah tělesný se totiž vyhledá počtem dle jistých pravidel.

### 1. Prostorný obsah kostky neb krychle.

1. Položíme-li čtyři kostky, jejichž strany  $1^{\text{cm}}$  obnášejí, na rovinu tak, že zaujmou čtvercovou plochu, ježto obnáší  $4 \square^{\text{cm}}$  a dáme-li na tyto kostky opět čtyři, představuje sloha těchto kostek krychli, jejíž strany mají délku dvou centimetrů. Obsah této krychle je  $4 \times 2 = 8$  osm kostkových centimetrů.

Má-li krychlová strana  $3^{\text{cm}}$ , obnáší spodní plocha  $3 \times 3 = 9 \square^{\text{cm}}$ . Na tuto plochu lze položit devět kostek, jejichž strany obnášejí  $1^{\text{cm}}$ . Do výšky  $3^{\text{cm}}$  dají se tři vrstvy takových kostek na sebe položiti, nebo jinak, do výšky  $3^{\text{cm}}$  dají se na sebe kostky, jejichž strany  $1^{\text{cm}}$  obnášejí, ve třech slohách položiti. Tímto způsobem utvori se krychle, jejíž strany  $3^{\text{cm}}$  obnášejí. Obsah této krychle činí tedy:

$9 \times 3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$  krychlených centimetrů, což se naznačuje takto:  $27^{\text{k.cm}}$  anebo  $27^{\text{k.cm}}$ . Rovněž se psí  $1^{\text{k.m}}$  (jeden kostkový metr),  $8^{\text{k.dm}}$  (osm krychl. dm).

Poznam. Jelikož lze rozehnati  $1^{\text{Km}}$  a  $1^{\text{k.m}}$  t. j. jeden krychl. metr a jeden kilometr, můžeme tedy psát místo  $1^{\text{k.m}}$  jen  $1^{\text{km}}$ .

Obnáší-li jedna krychlová strana  $4^{\text{cm}}$ , obnáší obsah kostkový:

$$4 \times 4 \times 4 = 64^{\text{k.cm}}, \text{ t. j.:}$$

*Počet, kolikrát se míra kostková do krychle vložit dř., nebo jinak obsah krychle se vyhledá, když se délkový počet jedné strany třikrát co činitel vezme.*

Když se ale nějaké číslo tříkráte co činitel vezme, znamená to, vésti onto číslo na mocnost třetí. Předešlá věta se tedy pronáší obyčejně krátce takto:

*Obsah krychle se vypočítá, když se jedna strana její na třetí mocnost uvede.*

Součin, jenž z tohoto výkonu vyjde, znamená cm., dm., m.... kostkové.

Jelikož obnáší metr  $10^{\text{dm}}$ , činí tedy  $1^{\text{k.m}}: 10 \times 10 \times 10 = 1000^{\text{k.dm}}$  a  $1^{\text{k.dm}}$  jest tedy  $0.001^{\text{k.m}}$ .

Takéž jest  $1^{\text{dm}} = 10^{\text{cm}}$ , protož  $1^{\text{k.dm}} = 10 \times 10 \times 10 = 1000^{\text{k.cm}}$ . Rovněž obnáší  $1^{\text{k.Dm}}$   $1000^{\text{k.m}}$ .

Krychlený metr běže se za míru pro zvláštní tělesa, ku př. dříví, kamení a p. a nazývá se pak stér (stère). Kostkový decimetr tedy tisící díl stéru (kostkového metru) služe litr a užívá se

za míru pro tělesa tekutá a sypká. Litr rozdělujeme dle potřeby na  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$  anebo též na deci-, centi-litr pro menší obsahy. Pro obsah věčší máme za míru *hektolitr* (sto litrů), jenž se dělí na  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{4}$ .

Obsahuje-li délka krychlové strany jmena nestejná, uvede se nejprvě na stejné jmeno; ku př.: Má se vypočítati obsah kostky, jejíž strana obnáší  $3^{\text{dm}} 8^{\text{cm}} = 38^{\text{cm}}$ .

Obsah  $k$  bude tedy:

$$k = (38)^3 = 54872^{\text{k. cm.}}$$

V tomto případu může se pak součin opět ve vyšší jméno uvést. Předešlý obsah 54872 uvede se na jméno vyšší, když se počet ten rozdělí číslem 1000, protože na př.  $1000^{\text{k. cm.}} \text{ činí } 1^{\text{k. dm.}}$ . Bude tedy  $54872 : 1000 = 54^{\text{k. dm.}}$  a  $872^{\text{k. cm.}}$  anebo  $54 \cdot 872^{\text{k. dm.}}$ .

Může se však počítati i takto, že se menší jména uvedou na jméno vyšší; ku př. má se vyhledati obsah kostky, jejíž strany obnášeji  $3^{\text{dm}} 5^{\text{cm}} = 3 \cdot 5^{\text{dm.}}$

$$3^{\text{dm}} 5^{\text{cm}} = 3 \cdot 5^{\text{dm.}}$$

Obsah  $k$  bude tedy:

$$k = 3 \cdot 5 \times 3 \cdot 5 \times 3 \cdot 5 = 3 \cdot 5^3 = 42 \cdot 875^{\text{k. dm.}}$$

Vypočítejte obsah kostky, jejíž strany obnášeji  $2^{\text{dm}}, 3^{\text{cm}}; 1^{\text{m}} 3^{\text{dm}} 8^{\text{cm.}}$

2. Je-li kostkový obsah krychle udán, dá se z obsahu toho vypočítati strana krychle té. Je-li totiž jedna strana krychle  $s$ , bude obsah krychle té dle předešlého pravidla:

$$k = s^3.$$

Z výrazu tohoto jde, že jest:

$$s = \sqrt[3]{k}; \text{ t. j.:}$$

*Z kostkového obsahu krychle vypočítá se délka jedné strany krychle té, když se z obsahu toho třetí odmocnina vyhledá.*

*Příklady.* Krychle obsahuje  $157464^{\text{k. cm.}}$ , mnoho-li obnášeji strany její?

$$s = \sqrt[3]{157464} = 54^{\text{cm}} = 5^{\text{dm}} 4^{\text{cm}}$$

$$k = 42 \cdot 875^{\text{k. dm.}}$$

$$s = \sqrt[3]{42 \cdot 875} = 3 \cdot 5^{\text{dm}} = 3^{\text{dm}} 5^{\text{cm.}}$$

*Vyhledejte stranu krychle, kteráž obnáší 43200, 10824, 46656^{\text{k. dm.}}*

## 2. Obsah pravoúhelného rovnoběžnostěnu.

Obnáší-li v pravoúhelném rovnoběžnostěnu u plochy spodní strana delší (*délka*)  $3^{\text{cm}}$ , strana kratší (*šířka*)  $2^{\text{cm}}$ , obsahuje plocha ta  $2 \times 3 = 6^{\square\text{cm}}$ . Na plochu tu dá se 6 kostkových centimetrů uměstnat. Slohou kostek těch utvoří se pravoúhelný rovnoběžnostěn, jehož *výška* jest  $1^{\text{cm}}$ .

Dáme-li na tu slohu ještě tři takové, vznikne rovnoběžnostěn pravoúhelný, jenž jest  $4^{\text{cm}}$  vysoký. Kostkový obsah toho rovnoběžnostěna obnáší:  $4 \times 6 = 4 \times 2 \times 3 = 24^{\text{k. cm}}$ , t. j.:

*Kostkový obsah pravoúhelného rovnoběžnostěnu se vypočítá, když se délka, šířka a výška jeho spolu znásobí anebo, když se podstava výškou jeho znásobí.*

*Příklad.* Pravoúhelný rovnoběžnostěn jest  $3^{\text{dm}} 4^{\text{cm}}$  dlouhý,  $1^{\text{dm}} 5^{\text{cm}}$  široký a  $4^{\text{dm}} 2^{\text{cm}}$  vysoký; mnoho-li činí kostkový obsah jeho?

$R = 34 \times 15 \times 42 = 21420^{\text{k. cm}}$ . Uvedeme-li obsah ten na jméno vyšší, bude:

$$R = 21^{\text{k. dm}} 420^{\text{cm}}$$

Vypočítejte obsah pravoúhelného rovnoběžnostěnu, jenž jest  $1^{\text{m}} 4^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}$  vysoký,  $1^{\text{m}} 2^{\text{dm}} 4^{\text{cm}}$  dlouhý a  $8^{\text{dm}} 6^{\text{cm}}$  široký.

## 3. Obsah hranolu.

1. Víme, že hranol vznikne, když se přímočárný obrazec do výšky tak pohybuje, že jde každá poloha jeho rovnoběžně s polohou prvotní. U hranolů jsou tedy všechny průseky, kteréž se s plochou spodní rovnoběžně vedou, shodné; neboť udávají polohu jedné a též plochy, jižto ona za útvaru hranolu toho zaujímala. *Hranol má ve směru výšky své všude stejnou rozsáhlost.*

Jsou-li spodní plochy dvou hranolů sobě rovny, třebas se tvarem svým neshodovaly, mají hranoly ty ve směru výšky své všude rovnou rozsáhlost a protož, jsou-li výšky jejich sobě rovny, jsou rovny i prostorné obsahy jejich.

Poznam. Vezme-li se ku př. trojí hranolová nádoba jedna trojstěnná, druhá čtyrstěnná pravoúhelná a třetí čtyrstěnná kosouhelná, a mají-li nádoby ty na spodu plochy rovné a mají-li též rovné výšky, dá se do každé z nich tolikéž tekutiny nalít.

Pravíme tedy:

*Hranoly jsou si rovny, mají-li rovné plochy podstavné a rovnou výšku.*

Z toho vysvítá, že má každý hranol tak velký obsah prostorný, jako rovnoběžnostěn pravoúhelný, má-li tak velkou spodní plochu a tak velkou výšku, jako onen rovnoběžnostěn.

Jelikož se obsah pravoúhelného rovnoběžnostěnu vypočítá, když se spodní plocha výškou znásobí, vypočítá se kostkový obsah hranolu vůbec, když se spodní plocha výškou znásobí.

Ku příkladu: Jak velký jest obsah hranolu, jehož spodní plocha obnáší  $14 \square^{\text{dm}}$  a jehož výška obnáší  $8^{\text{dm}}$ ?

Obsah hranolu H bude:

$$H = 14 \times 8 = 112^{\text{k. dm}}.$$

2. Poznačíme-li spodní plochu písmenou  $b$ , výškou písmenou  $v$ , bude obsah hranolu H dle uvedeného pravidla:

$$H = b \times v.$$

Je-li obsah hranolu znám a známe-li též podstavu hranolu toho, vypočítá se výška  $v$ , když se počet obsahu H spodní plochou  $b$  rozdělí. Jestit:

$$v = \frac{H}{b}.$$

Ku př.  $H = 128^{\text{k. dm}}$ ,  $b = 32 \square^{\text{dm}}$ , jest:

$$v = \frac{128}{32} = 4^{\text{dm}}.$$

Známe-li obsah H a výšku  $v$ , vypočítá se podstava, když se obsah výškou rozdělí. Jestit:

$$b = \frac{H}{v}.$$

Ku př.  $H = 126^{\text{k. dm}}$ ,  $v = 6^{\text{dm}}$  je pak:

$$b = \frac{126}{6} = 21 \square^{\text{dm}}.$$

Vypočítejte obsah hranolu, jehož spodní plocha obnáší  $34 \square^{\text{dm}}$   $120 \square^{\text{cm}}$  a jenž je  $2^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}$  vysoký.

Jak vysoký je hranol, jenž obsahuje  $13^{\text{k. dm}}$   $740^{\text{k. cm}}$  a jehož spodní plocha obnáší  $6 \square^{\text{dm}}$ ?

Mnoho-li obnáší spodní plocha hranolu, jenž obsahuje  $218^{\text{k. dm}}$   $976^{\text{k. cm}}$  a je  $5^{\text{dm}} 9^{\text{cm}}$  vysoký?

#### 4. Kostkový obsah jehlanu.

1. Protnou-li se dva jehlany, kteréž na stejně ploše stojí a stejnou výšku mají, rovinou, jejž jde rovnoběžně s plochou spodní, jsou průsečné obrazce podobny spodní ploše.

Jsou-li spodní plochy jehlanů těch sobě rovny, jsou i ony průseky sobě rovny.

Z toho soudíme, že se jehlany, kteréž mají rovnou výšku a rovné plochy spodní, k vrcholu stejnoměrně ouží, že mají v rovné výšce rovnou rozsáhlost a tedy rovnou prostornost. Pročež pravíme:

*Jehlany jsou si rovny, mají-li rovnou výšku a na spodu rovné plochy.*

Z toho vysvítá dálé, že jehlany, kteréž mají stejnou výšku, i tehdáž sobě rovny jsou, když se spodní plochy jejich, třebas tvarem rozdílné, obsahem sobě rovnají.

2. Hranol trojboký dá se na tři rovné jehlany rozdělit. Vedeme-li rohem  $C_1$  (obr. 46.) trojbokého hranolu  $ABCC_1A_1B_1$  rovinu  $C_1AB$ , rozdělí se hranol ten v trojboký jehlan  $C_1ABC$  a čtyrboký  $C_1ABB_1A_1$ . Vedeme-li rohem  $C_1$  rovinu  $C_1A_1B$ , rozdělí se čtyrboký jehlan na dva trojboké, totiž  $C_1A_1B_1B$  a  $C_1A_1AB$ . Rozdělil se tedy hranol  $ABCC_1A_1B_1$  na tři jehlany.

Jehlany  $C_1A_1B_1B$  a  $C_1A_1AB$  mají na spodu rovné plochy  $A_1B_1B$  a  $AA_1B$ , mají stejný vrchol  $C_1$  a protož i rovnou výšku; jehlany  $C_1A_1B_1B$  a  $C_1A_1AB$  jsou si tedy rovny.

Takéž jsou rovny jehlany  $C_1A_1B_1B$  a  $C_1ABC$ . U jehlanu  $C_1A_1B_1B$  můžeme místo bodu  $C_1$  vzít bod  $B$  za vrchol, podstavou bude pak plocha  $A_1B_1C_1$ . Jehlany  $BA_1B_1C_1$  a  $C_1ABC$  jsou si rovny, mají rovné podstavy  $ABC$  a  $A_1B_1C_1$  a jelikož plochy ty jsou zároveň spolu rovnoběžné, mají oba jehlany též stejnou výšku. Jest tedy:  $C_1ABC = BA_1B_1C_1 = C_1A_1B_1B = C_1A_1AB$ .

Jelikož se trojboký hranol na tři rovné jehlany rozděliti dá, obnáší tedy jeden z nich o sobě, ku př. jehlan  $C_1ABC$  třetinu obsahu hranolu, totiž hranolu  $ABCC_1A_1B_1$ .

Jelikož jest:

$ABCC_1A_1B_1 = b \times v$ , bude:

$$C_1ABC = \frac{b \times v}{3},$$

což se obyčejně takto píše:

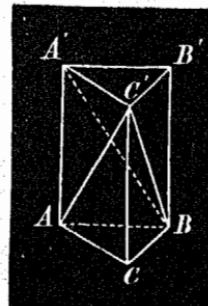
$$C_1ABC = b \times \frac{v}{3} \text{ t. j.:}$$

*Kostkový obsah trojstranného jehlanu se vypočítá, když se obsah podstavy jeho třetinou výšky znásobí.*

Ku př.:  $b = 140 \text{ cm}$ ,  $v = 1 \text{ dm } 8 \text{ cm}$ ; obsah j bude:

$$j = 140 \times \frac{18}{3} = 140 \times 6 = 840 \text{ cm}^3.$$

Obr. 46.



Mnoho-li obnáší kostkový obsah trojstranného jehlanu, jehož spodní plocha obnáší  $41 \text{ dm}^2$   $286 \text{ cm}^2$  a jenž je  $2\text{dm} 8\text{cm}$  vysoký?

Je-li naopak znám obsah kostkový a ploský obsah podstavy, vypočítá se výška  $v$  z rovnice:

$$j = b \times \frac{v}{3}, \text{ jestit:}$$

$$v = \frac{3j}{b}.$$

Ku př.:  $j = 6\text{ k. dm}^2 420\text{ k. cm}^2$ ,  $b = 3 \text{ dm}^2 101\cdot25 \text{ cm}^2$ ,  $v$ ?

$$v = \frac{6420 \times 3}{401\cdot25} = 48\text{ cm} = 4\text{ dm } 8\text{ cm}.$$

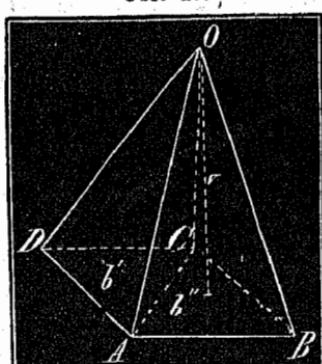
Známe-li kostkový obsah a výšku jehlanu, vypočítá se spodní plocha z též rovnice, jestit:

$$b = \frac{3j}{v}.$$

Ku př.:  $j = 2407\text{ k. cm}^2$ ,  $v = 2\text{ dm } 9\text{ cm}$ ,  $b$ ?

$$b = \frac{3 \times 2407}{29} = 249\text{ cm} = 2\text{ m } 49\text{ cm}.$$

Obr. 47.



Jak vysoký jest jehlan, jenž obsahuje  $46\text{k. dm}^2 670\text{k. cm}^2$  a jehož spodní plocha obnáší  $28\text{ dm}^2 52\cdot25\text{ cm}^2$ ?

Jak velkou plochu má na spodu jehlan, jenž je  $2\text{ m } 9\text{ dm}$  vysoký a obsahuje  $2\text{k. m}^2 792\text{k. dm}^2$ .

3. Předešlé pravidlo, jak se má totiž vypočítati kostkový obsah jehlanu trojstranného, platí i o jehlanech, kteréž mají více tří stran. Dá se totiž jehlan mnohostranný rozděliti v jehlany trojstranné, ježto mají tutéž výšku a jejichž spodní plochy součtem činí podstavu jehlanu mnohostranného. Čtyrstranný jehlan OABCD (obr. 47.) rozdělí se ve dva trojstranné, vedeme-li úhlopříčnu AC a úhlopříčnu tou vrcholem O rovinu OAC.

Jestit patrnó, že jest obsah jehlanu OABCD = OACD + OABC.

Poznačme-li spodní plochy písmenami  $b'$ ,  $b''$ , výšku písmenou  $v$ , bude:

$$OACD = b' \times \frac{v}{3}$$

$$OABC = b'' \times \frac{v}{3}$$

pročež jest:

$$OABCD = b' \frac{v}{3} + b'' \frac{v}{3} (b' + b'')$$

$$b' + b'' = ABCD = b, \text{ tedy}$$

$$OABCD = \frac{v}{3} \times b.$$

Že se týmž způsobem každý mnohostranný jehlan v jehlany trojstranné rozdělití dá a že pak jehlany ty součtem dají obsah jehlanu mnohostranného, vyrozumí se snadno; pročež se toto pravidlo stanoví:

*Krychlený* neb *kostkový obsah jehlanu* se vypočítá, když se obsah podstavy jeho třetinou výšky znásobí.

Ku př. Čtyrstranný jehlan, jenž jest  $5^{\text{dm}}$  vysoký, má na spodu čtverec a čtverec ten má v obměru  $12^{\text{dm}}$ , jak velký jest krychlený obsah téhož jehlanu?

Jedna strana téhož čtverce bude:  $\frac{12}{4} = 3^{\text{dm}}$ , obsah plošný bude pak:  $3^2$ , pročež je krychlený obsah jehlanu toho  $j$ :

$$j = 3^2 \times \frac{5}{3} = 15^{\text{k. dm.}}$$

Mnoho-li by obsahoval týž jehlan, kdyby byl  $8^{\text{dm}} 9^{\text{cm}}$  vysoký, a kdyby měla spodní plocha v obměru  $2^{\text{m}} 8^{\text{dm}}$ .

### 5. Obsah komole jehlanové.

Komole jehlanová rovná se obsahem rozdílu dvou jehlanů, věčšího  $J$  a menšího  $j$ ; jest tedy komole  $k$ :

$$k = J - j.$$

Vypočítá se tedy jehlan věčší i menší a od jehlanu věčšího se menší odečte. Rozdíl dá obsah komole.

*Příklad.* Mnoho-li obnáší kostkový obsah kolmé čtyrstranné komole, kteráž jest  $6^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}$  vysoká, když strana spodní čtvercové plochy obnáší  $7^{\text{dm}} 5^{\text{cm}}$ , strana hořejší plochy  $2^{\text{dm}} 4^{\text{cm}}$ ?

$$\text{Jestif: } k = J - j.$$

$$J = B \times \frac{V}{3}$$

$$j = b \times \frac{v}{3}$$

Výška věčšího jehlanu bude:

$$\frac{68 \times 75}{75 - 24} = \frac{68 \times 75}{51} = 4 \times 25 = 100^{\text{cm}};$$

výška jehlanu menšího jest:

$$\frac{68 \times 24}{75 - 24} = \frac{68 \times 24}{51} = 4 \times 8 = 32^{\text{cm}}.$$

Obsah věčšího jehlanu bude tedy:

$$J = (75)^2 \times \frac{100}{3} = 5625 \times \frac{100}{3} = 1875 \times 100 = 187500^{\text{k.cm}} = \\ 187^{\text{k.dim}} 500^{\text{k.cm}};$$

obsah jehlanu menšího jest:

$$j = (24)^2 \times \frac{32}{3} = 576 \times \frac{32}{3} = 192 \times 32 = 6144^{\text{k. cm}} = 6^{\text{k. dim}} 144^{\text{k. cm}}.$$

Jest tedy obsah jehlanu zkomoleného:

$$k = 187500^{\text{k. cm}} - 6144^{\text{k. cm}} = 181356^{\text{k. cm}} = 181^{\text{k. dim}} 356^{\text{k. cm}}.$$

Poznam. Prostorný obsah jehlanů zkomolených lze poněkud kratčeji vypočítati podle tohoto vzorce:  $\frac{v}{3}(B + b + \sqrt{B \cdot b})$ . Ve vzorci tom značí v výšku, B věčší, b pak menší rovnoběžnou rovinu jehlanu zkomoleného. Příklad předešlý by se podle toho vzorce vypočítal takto:  $= \frac{68}{3}(75^2 + 24^2 + 24 \cdot 75) = \frac{68}{3}(5625 + 576 + 1800) = \frac{68}{3} \times 8001 = 68 \times 2667 = 181356^{\text{k.cm}}$ .

Vzorec ten zde zevrnběji odůvodnit nelze.

Mnoho-li by obsahovala komole ta, kdyby měla místo čtvercových ploch plochy trojcové, a kdyby byly strany ploch těch též tak dlouhé, jako v předešlém příkladu?

Poznam. Jelikož se může šestistěn vypočítati jako hranol, čtyrstěn a osmstěn jako jehlan, zhývá z těles pravidelných jen dvanácti- a dvacítistěn. Obsah těchto vypočítá se následujícím způsobem:

Tělesa ta — dvanácti- a dvacítistěn — dají se rozdělit na tolik rovných jehlanů, kolik ploch na povrchu svém mají. Mají totiž ona tělesa uvnitř určitý bod, od něhož veškeré plochy jejich stejně vzdáleny jsou. Bod ten sluje střed a nalezá se u prostředě té přímky, kteráž středy dvou protilehlých ploch spojuje. Vedou-li se bodem tímto a stranami oněch ploch roviny, vznikne tolik jehlanů, kolik ploch tělesa na povrchu svém má; u dvacítistěnu bude tedy dvacet, u dvanáctistěnu, dvanáct jehlanů. Jehlany tyto mají rovné plochy spodní a stejnou výšku, poněvadž jsou ony plochy od středu tělesa stejně vzdáleny. Jehlany ty jsou tedy sobě rovny. Výška jednoho takového jehlanu obnáší polovici té vzdálenosti, jakouž dvě protilehlé plochy od sebe mají.

Z toho vysvítá, že se tělesný obsah dvanácti- a dvacítistěnu vypočítá, když se povrch jejich třetinou výšky jednoho jehlanu znásobi. Ku př. Jedna stěna dvacítistěnu obnáší  $68 \square^{\text{cm}}$ , výška jednoho jehlanu obnáší  $6^{\text{cm}}$ ; mnoho-li činí tělesný obsah O?

$$O = 20 \times 68 \times \frac{6}{3} = 2720^{\text{k.dim}}.$$

## 6. Kostkový obsah válce.

1. Jelikož se může válec považovat za hranol mnohostranný, vypočítá se kostkový obsah jeho, když se spodní plocha výškou znásobí. Bude tedy obsah C:

$$C = b \times v.$$

Spodní plocha b jest kruh, pročež bude  $b = r^2\pi$  a obsah

$$C = r^2\pi \times v \text{ t. j.:}$$

*Obsah válce se vypočítá, když se podstava jeho výškou znásobí.*

Je-li válec rovnostranný, jest  $v = 2r$  a obsah C bude pak:

$$B = r^2\pi \times 2r = 2r^3\pi.$$

*Příklady:* 1)  $r = 2^{\text{dm}}$ ,  $v = 4^{\text{dm}}$ , C?

$$C = 2^2 \times 3 \cdot 14 \times 4 = 4 \times 3 \cdot 14 \times 4 = 50 \cdot 24^{\text{kdm}}.$$

2)  $r = 1^{\text{dm}} 2^{\text{cm}}$ ,  $v = 3^{\text{dm}} 4^{\text{cm}}$ , C?

$$C = 14^2 \times 3 \cdot 14 \times 34 = 20924 \cdot 96^{\text{kem}} \text{ anebo } 20^{24} \cdot 96^{\text{kem}}.$$

3. Poloměr rovnostranného válce obnáší  $10^{\text{cm}}$ ; mnoho-li činí kostkový obsah válce toho?

$$C = 2 \times 10^2 \times 3 \cdot 14 = 6280^{\text{kem}} \text{ anebo}$$

$$C = 6^{24} \cdot 280^{\text{kem}}.$$

4. Jak velký jest kostkový obsah válce, jenž jest  $8^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}$  vysoký a jenž má v obvodu  $7 \cdot 71^{\text{kem}}$ ?

2. Z předešlých vzorků dá se naopak vypočítati poloměr válce, když se u válce nerovnostranného udá obsah a výška. Jestit:

$$C = r^2\pi \times v.$$

Ze vzorku tohoto jde:  $r^2 = \frac{C}{\pi v}$

$$r = \sqrt{\frac{C}{\pi v}}.$$

Ku př.:  $C = 791 \cdot 6832^{\text{kem}}$ ,  $v = 7^{\text{cm}}$ , ( $\pi = 3 \cdot 1416$ )

$$r = \sqrt{\left(\frac{791 \cdot 6832}{7 \times 3 \cdot 1416}\right)} = \sqrt{36} = 6^{\text{cm}}.$$

Dá-li se obsah a poloměr, vypočítá se výška v takto:

$$C = r^2\pi \times v \text{ a z toho jde } v = \frac{C}{r^2\pi}.$$

Ku př.:  $C = 6280 \text{ kom}$ ,  $r = 8 \text{ cm}$  ( $\pi = 3 \cdot 14$ ), v?

$$v = \frac{6280}{8 \times 3 \cdot 14} = 25 \text{ cm} = 2 \text{ dm } 5 \text{ cm}.$$

Je-li válec rovnostranný, dostačí k vypočítání poloměru jenom udání obsahu. Jest totiž:

$$C = 2r^2\pi,$$

z čehož jde:

$$r^2 = \frac{C}{2\pi} \text{ a}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{C}{2\pi}}.$$

Ku př.:  $C = 401 \cdot 92 \text{ kom}$ , r?

$$r = \sqrt[3]{\frac{401 \cdot 92}{2 \times 3 \cdot 14}} = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ cm}.$$

1. Mnoho-li má v průměru válec, jenž jest  $2 \text{ dm } 3 \text{ cm}$  vysoký a jenž obsahuje  $806 \cdot 76 \text{ kom}$ ?

2. Jak vysoký jest válec, jehož obsah činí  $9 \text{ kdm } 928 \text{ kom}$  a jenž má v průměru  $1 \text{ dm } 4 \text{ cm}$ ?

3. Jak velký jest průměr rovnostranného válce, jenž obnáší  $18 \text{ kdm } 956 \text{ kom}$ ?

3. *Kostkový obsah rour válcových.* Kostkový obsah rour válcových vyhledá se takto: Vypočítá se věčší válec tak, jako by byl plný a od obsahu jeho se odečte obsah válce ve světlosti.

Je-li poloměr věčšího válce  $R$ , poloměr válce ve světlosti  $r$  a délka roury  $l$ , bude obsah  $O = R^2\pi \times l - r^2\pi \times l$

což jest též rovno:

$O = \pi l (R^2 - r^2)$  a jelikož jest rozdíl

$R^2 - r^2 = (R + r) (R - r)$ , bude:

$O = \pi l (R + r) (R - r)$ .

Ku př.: Válcová roura má v světlosti průměr  $16 \text{ cm}$ , jest  $2 \text{ cm}$  tlustá a  $50 \text{ cm}$  dlouhá; jak velký jest kostkový obsah její?

$$r = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}.$$

$$R = 8 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

$$O = 3 \cdot 14 \times 50 \times 18 \times 2 = 5652 \text{ kom} = 5 \text{ kdm } 652 \text{ kom}.$$

Mnoho-li obnáší válcovitá roura, kteráž jest  $1 \text{ m } 4 \text{ dm}$  dlouhá,  $2 \text{ cm}$  tlustá a má v průměru  $20 \text{ cm}$ ?

## 7. Kostkový obsah kužele.

1. Pravidlo, dle něhož se obsah jehlanu vypočítá, platí i o kuželi, jelikož se kužel za jehlan mnohostranný považovat může.  
Obsah kužele k bude tedy:

$$k = b \times \frac{v}{3}.$$

U kužele jest podstava kruh, pročež jest:

$$b = r^2\pi,$$

obsah k bude:

$$k = r^2\pi \times \frac{v}{3} \text{ t. j.:}$$

*Obsah kužele se vypočítá, když se podstava třetinou výšky znásobí.*

Ku př.:  $r = 4^{\text{cm}}$ ,  $v = 1^{\text{m}} 8^{\text{dm}}$

$$k = 4^2 \times 3 \cdot 14 \times \frac{180}{3} = 4^2 \times 3 \cdot 14 \times 60 = 3014 \cdot 40^{\text{kom}} = 3^{\text{kdm}} 14 \cdot 4^{\text{kom}}.$$

1. Mnoho-li činí obsah kužele, jenž jest  $3^{\text{dm}} 6^{\text{cm}}$  vysoký a jehož poloměr obnáší  $1^{\text{dm}} 4^{\text{cm}}?$

2. Mnoho-li činí obsah kužele, jehož podstava má v obvodu  $12 \cdot 56^{\text{dm}}$  a jehož výška jest poloměru rovna?

2. Známe-li obsah kužele a též výšku, vypočte se z předešlého vzorku poloměr podstavy. Jestliť:

$$k = r^2\pi \times \frac{v}{3}.$$

Ze vzorku toho jde:

$$r^2 = \frac{3k}{\pi \times v}, \text{ a}$$

$$r = \sqrt{\frac{3k}{\pi \times v}}.$$

Ku př.:  $k = 351 \cdot 68^{\text{kdm}}$ ,  $v = 2^{\text{m}} 1^{\text{dm}}$ ,  $r?$

$$v = \sqrt{\frac{3 \times 351 \cdot 68}{3 \cdot 14 \times 21}} = \sqrt{16} = 4^{\text{dm}}.$$

Známe-li obsah k a poloměr podstavy, vypočte se výška v; jestliť:

$$v = \frac{3k}{r^2\pi}.$$

Ku př.:  $k = 2826 \text{ kom}$ ,  $r = 9 \text{ cm}$ , v?

$$v = \frac{3 \times 2826}{81 \times 3 \cdot 14} = \frac{100}{3} = 33 \cdot 3 \text{ cm} = 3 \text{ dm } 3 \cdot 3 \text{ cm}.$$

1. Mnoho-li obnáší poloměr podstavy, když činí obsah kuželes  $24 \text{ dm}^3$   
 $826 \text{ kom}$  a když jest kužel  $2 \text{ dm } 8 \text{ cm}$  vysoký?

2. Jak vysoký jest kužel, jehož podstava má v obvodu  $9 \text{ dm } 7 \text{ cm}$  a  
jehož obsah činí  $36 \text{ dm}^3$   $928 \text{ kom}$ ?

### 8. Kostkový obsah komole kuželové.

Obsah zkomoleného kuželes aneb komole kuželové jest roven rozdílu obou sekem vzniklých kuželů.

Je-li výška komole udána, vypočítá se výška věčšího i menšího kuželes. Obsahy obou kuželů vypočítají se pak dle předešlého pravidla a rozdíl obsahů těch dá obsah komole.

Ku př.: Mnoho-li obnáší komole kuželová, ježiž podstava má v průměru  $2 \text{ dm}$ , hořejší plocha v průměru  $8 \text{ cm}$  a výška obnáší  $3 \text{ dm}$ ?

Výška věčšího kuželes bude  $\frac{30 \times 10}{10 - 4} = 50 \text{ cm}$ ; výška kuželes menšího jest:  $\frac{30 \times 4}{10 - 4} = 20 \text{ cm}$ .

Obsah kuželes věčšího jest pak:  $10^2 \times 3 \cdot 141 \times \frac{50}{3} = 5235 \text{ kom}$ ;

obsah menšího kuželes bude:  $4^2 \times 3 \cdot 141 \times \frac{20}{3} = 335 \cdot 04 \text{ kom}$ .

Bude tedy obsah komole  $k = 5235$

$$\frac{335 \cdot 04}{4899 \cdot 96 \text{ kom}} = 4 \text{ dm } 899 \cdot 96 \text{ kom}.$$

Obsah zkomoleného kuželes lze snadno vypočítati podle tohoto vzorku:  $\frac{\pi r^2}{3} (r^2 + r_i^2 + rr_i)$ . V tomto vzorce značí výšku,  $r$  znamená poloměr plochy spodní,  $r_i$  poloměr plochy hořejší. Podle tohoto vzorce počítajíce obdrželi bysme:

$$k = \frac{30}{3} \times 8 \cdot 141 (10^2 + 4^2 + 40) = 10 \times 3 \cdot 141 \times 156 = 31 \cdot 41 \times 156 = 4899 \cdot 96 \text{ kom}?$$

Odůvodnití vzorec tento je poněkud nesnadno, pročež zde uveden toliko k použití.

Mnoho-li bude obnášeti komole, jež jest  $4 \text{ dm } 7 \text{ cm}$  vysoká a jejíž plochy mají v obvodu  $12 \cdot 56$  a  $6 \cdot 28 \square \text{ dm}^2$ ?

### 9. Kostkový obsah koule.

1. Protne-li kouli rovinou a sice ve směru průměru AB (obr. 48.), jest průsek — kruh nejvěčší, jelikož jest poloměr koule té poloměrem jeho. Vede-li se více takových průseků, vzniknou průsečné nejvěčší kruhy. Protne-li kruhy ty rovinami kolmo k průměru AB, vzniknou kruhy rovnoběžné, jimiž se celý povrch

koule na malé délky rozdělí; kteréto délky, když se ony rovnoběžné kruhy blízko sebe vedou, pro nepatrnou rozsáhlost jejich za obrazce přímočárné považovati můžeme. Vedeme-li stranami těchto obrazců a středem koule roviny, rozvrhne se celá koule na malé jehlance, ježto mají společný vrchol v středu a jejichžto výškou jest poloměr koule té.

Jestit patrno, že součet oněch jehlanců dá obsah koule.

Jsou-li podstavy oněch jehlanců;  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$ , ..., budou obsahy jejich:

$$p_1 \times \frac{r}{3}, p_2 \times \frac{r}{3}, p_3 \times \frac{r}{3}, p_4 \times \frac{r}{3}, \dots$$

Součet obsahů těchto dá kostkový obsah  $k$ , bude:

$$k = p_1 \times \frac{r}{3} + p_2 \times \frac{r}{3} + p_3 \times \frac{r}{3} + \dots$$

nebo:

$$k = \frac{r}{3} (p_1 + p_2 + p_3 + \dots)$$

Součet ploch v závorce dá povrch koule  $P$ ; bude pak:

$$k = \frac{r}{3} \times P.$$

Jak známo, jest povrch koule  $P = 4r^2\pi$ , pročež bude obsah  $k$

$$k = \frac{r}{3} \times 4r^2\pi = \text{t. j. : } \frac{4}{3} r^3\pi.$$

*Kostkový obsah koule se vypočítá, když se  $\frac{4}{3}$  z třetí mocniny poloměru číslem Ludolfským znásobí.*

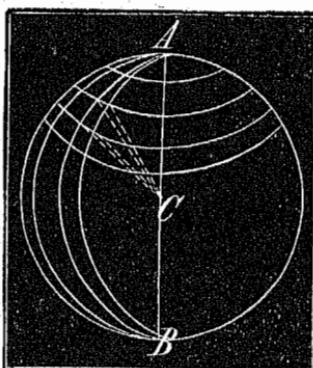
Ku př.:  $r = 3^{\text{cm}}$

$$k = \frac{4}{3} \times 3^3 \times 3 \cdot 14 = 113 \cdot 04^{\text{cm}}.$$

Mnoho-li činí obsah koule, ježž poloměr obnáší  $5^{\text{cm}}$ ,  $6^{\text{cm}}$ ,  $2^{\text{dm}}$ ?

2. Je-li obsah kulový znám, dá se z něho poloměr koule vypočítati; jestit:

$$k = \frac{4}{3} r^3\pi.$$



$$r^3 = \frac{3k}{4\pi}, \quad a$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{k}{\pi}} t. j.$$

Z kostkového obsahu koule vypočítá se poloměr, když se  $\frac{3}{4}$  obsahu číslem Ludolfským rozdělí a z tohoto podílu třetí odmocnina vyhledá.

Ku př.:  $K = 904.32 \text{ cm}^3$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{904.32}{3 \cdot 14}} = \sqrt[3]{216} = 6 \text{ cm}$$

Jak velký jest poloměr koule, jejíž obsah činí  $2150.25 \text{ cm}^3$ ?

3. Jsou-li poloměry dvou koulí  $R$  a  $r$ , obsahy  $K$  a  $k$ , bude:

$$K = \frac{4}{3} R^3 \pi,$$

$$k = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Hledá-li se poloměr obsahů těchto, má se:

$$K : k = \frac{4}{3} R^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi$$

anebo, když se zkrátí:

$$K : k = R^3 : r^3$$

a jelikož jest poloměr  $R^3 : r^3 = (2R)^3 : (2r)^3$  roveň poměru průměru  $D$  a  $b$ , bude též

$$K : k = D^3 : d^3, \quad t. j.$$

*Kostkové obsahy koulí mají se k sobě, jako třetí mocniny poloměrů anebo průměrů.*

### VIII. Úlohy smíšené.

1. Má se vypočítati obsah rovnostranného kuželetu, když se jedna strana jeho udá.

Je-li kužel rovnostranný (obr. 49.), jsou strany jeho rovny průměru plochy podstavné. Poznačme strany písmenou  $s$ , výška budiž  $v$ , poloměr plochy spodní  $r$ . Obsah  $k$  bude:

$$k = r^2 \pi \times \frac{v}{3} \dots (1)$$

Ukuželerovnostranného jest:

$$s = 2r$$

pročež bude:

$$r = \frac{s}{2}$$

Dáme-li hodnotu tuto do vzorku (1) místo r, bude:

$$k = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \pi \times \frac{v}{3}$$

Výška  $v$  dá se vypočítati z pravoúhelného trojúhelníka AOC (obr. 49.). Jestit:

$$v^2 = s^2 - r^2$$

a poněvadž jest  $r = \frac{s}{2}$ , bude:

$$v^2 = s^2 - \frac{s^2}{4} = \frac{4s^2 - 3s^2}{4} = \frac{3s^2}{4}$$

$$v = \frac{s}{2} \sqrt{3}$$

Obsah  $k$  bude tedy:

$$k = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \pi \times \frac{1}{3} \times \frac{s}{2} \sqrt{3} = \frac{s^2 \pi}{24} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = 1.73205 \dots$$

$$k = s^3 \pi \times \frac{1.73205}{24} = s^3 \pi \times 0.07216 \dots$$

Ku př.: Mnoho-li obnáší rovnostranný,  $8^{\text{dm}}$  dlouhý kužel?

$$k = 8^3 \times 3 \cdot 14 \times 0.07216 = 116^{\text{kdm}}.$$

Mnoho-li by obnášel týž kužel, kdyby byl  $9^{\text{cm}}$ ,  $1^{\text{dm}}$   $8^{\text{cm}}$  dlouhý?

2. Má se vypočítati plášť kolmého kuželeta, když se udá výška  $v$  a poloměr plochy podstavné.

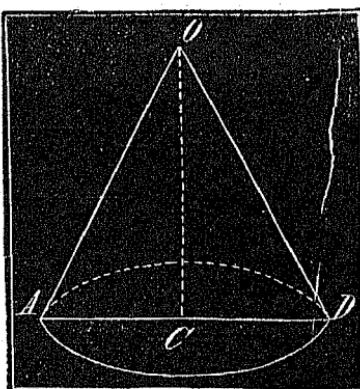
Plášť kolmého kuželeta se vypočítá, když se obvod plochy podstavné polovičnou stranou znásobí. Jestit:

$$P = 2\pi r \times \frac{s}{2} \dots (1)$$

Délka strany  $s$  vypočítá se z pravoúhelného trojúhelníka AOC (obr. 48.), jest totiž:

$$s^2 = r^2 + v^2;$$

Obr. 49.



z výrazu tohoto jde:

$$s = \sqrt{r^2 + v^2}.$$

Dáme-li hodnotu tuto do vzorku (1) místo  $s$ , bude:

$$P = 2r\pi \times \frac{1}{2} \sqrt{r^2 + v^2}$$

$$= r\pi \times \sqrt{r^2 + v^2}$$

$$\text{Ku př.: } r = 4^{\text{dm}}, v = 6^{\text{dm}}$$

$$P = 4 \times 3 \cdot 14 \times \sqrt{16 + 36}$$

$$= 12 \cdot 56 \times \sqrt{52}$$

$$\sqrt{52} = 7 \cdot 211 \dots$$

Jest tedy:

$$P = 12 \cdot 56 \times 7 \cdot 211 = 90 \cdot 55 \square^{\text{dm}}.$$

Mnoho-li by obnášel plášt knžele toho, kdyby byl poloměr  $r = 3^{\text{dm}}$ ,  $v = 4^{\text{dm}}$ ,  $r = 1^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}$  a  $v = 4^{\text{dm}} 6^{\text{cm}}$ ?

3. Má se vypočítati obsah kolmého kužele, když se dá strana jeho a poloměr plochy podstavné.

Obsah kužele k jest:

$$k = r^2\pi \times \frac{v}{3} \dots (1)$$

Výška  $v$  může se vypočisti z pravoúhelného trojúhelníka AOC (obr. 49.) jestit:

$$v^2 = s^2 - r^2$$

z výrazu toho vyhledá se:

$$v = \sqrt{s^2 - r^2}$$

Dáme-li hodnotu tuto do výrazu (1) místo  $v$ , bude:

$$k = r^2\pi \times \frac{1}{3} \sqrt{s^2 - r^2} = \frac{1}{3} r^2\pi \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$\text{Ku př. } s = 5^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}, r = 1^{\text{dm}} 4^{\text{cm}}$$

$$k = 14^2 \times 3 \cdot 14 \times \frac{1}{3} \sqrt{58^2 - 14^2} = 196 \times 3 \cdot 14 \times \frac{1}{3} \sqrt{3168} =$$

$$196 \times 3 \cdot 14 \times 18 \cdot 76 = 11545 \cdot 65^{\text{kom}} = 11^{\text{kdm}} 545 \cdot 65^{\text{kom}}.$$

Mnoho-li by obnášel obsah téhož kužele, kdyby byl poloměrem  $r = 2^{\text{dm}} 4^{\text{cm}}$ ,  $1^{\text{m}} 5^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}$ ?

Vypočítejte obsah kolmého kuželeta, jenž jest 5dm 9cm vysoký a jehož strana obnáší 1m 4dm.

4. Má se vypočítati obsah kuželeta, koule a válce, když mají tělesa tato stejně průměry a když jest výška válce a kuželeta téměř průměru rovna (obr. 50.).

$$\text{Budiž } AC = r, CH = v = 2r$$

Obr. 50.

Obsah kuželeta  $k$  jest:

$$k = r^2\pi \times \frac{v}{3} = r^2\pi \times \frac{2r}{3} = \frac{2}{3} r^3\pi$$

Obsah koule  $K$  jest:

$$K = \frac{4}{3} r^3\pi$$

Jelikož jest průměr  $AB = CH$ , bude obsah válce  $C$ :

$$C = r^2\pi \times 2r = 2r^3\pi.$$

Obsahy těles těchto budou se  $k$  sobě mít:

$$k : K : C = \frac{2}{3} r^3\pi : \frac{4}{3} r^3\pi : 2r^3\pi$$

aneb, když zkrátíme:

$$k : K : C = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 2$$

což jest též rovno:

$$= 2 : 4 : 6 \text{ aneb}$$

$$= 1 : 2 : 3$$

Z toho jest patrno, že jest v případu tomto obsah koule dvakrát, obsah válce třikrát tak velký, jako obsah kuželeta.

5. Má se vypočítati plášt a povrch rovnostranného válce; povrch koule, když mají tělesa tato stejný průměr (obr. 50.).

Plášt rovnostranného válce jestiť:

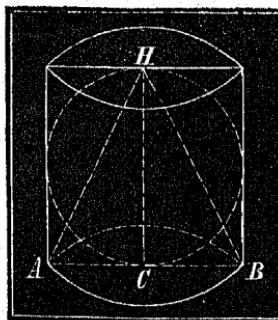
$$p = 2r\pi \times 2r = 4r^2\pi \dots (1)$$

Celý povrch  $P$  se vypočítá, když se k obsahu pláště dvojnásobná plocha spodní připočte, bude pak:

$$P = 4r^2\pi + 2r^2\pi = 6r^2\pi \dots (2)$$

Povrch koule  $P_1$  jest:

$$P_1 = 4r^2\pi \dots (3)$$



Z výrazu (1) a (3) jestif patrno, že jest v případu tomto povrch koule roven oblině onoho rovnostranného válce:  $P_1 = p$ . Taktéž vysvítá dále, že se má:

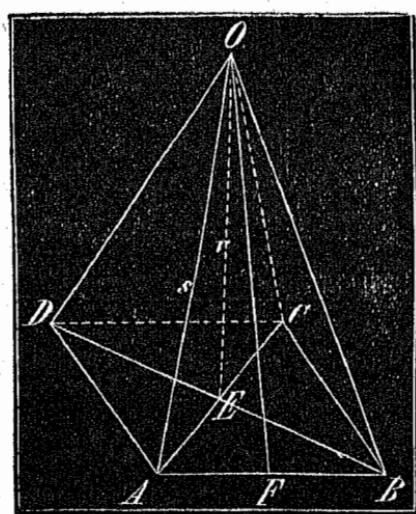
$$P_1 : P = 4 : 6 \text{ aneb}$$

$$= 2 : 3$$

Když jest v obr. 50. průměr  $AB = 7\text{cm}$ ; mnoho-li obnáší plášt a povrch kužele, válce a koule; mnoho-li obnáší v tomto případu obsahy oněch těles?

6. Má se vypočítati povrch a obsah přímého, čtyrbokého jehlanu, když se dá délka pobočné i podstavné hrany.

Obr. 51.



Budiž (v obr. 51.)  $AO = s$  a  $AB = d$ . Pobočný povrch  $p$ , sestávaje ze čtyř shodných rovnoramenných trojúhelníků se vypočítá, když se obměr plochy podstavné znásobí polovičnou výškou jednoho trojúhelníka. Poněvadž jsou hrany podstavné sobě rovny, jest obměr

$$O = 4d.$$

Výška trojúhelníka  $AOB$  vy- počítá se z pravoúhlého trojúhelníka  $AOF$ ; jestif:

$$\overline{OF}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AF}^2$$

anebo:

$$\overline{OF}^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - \frac{d^2}{4}$$

a tedy:

$$OF = \sqrt{s^2 - \frac{d^2}{4}}$$

Zavedeme-li stejné jmenovatele, bude:

$$OF = \sqrt{\frac{4s^2 - d^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{(4s^2 - d^2)}.$$

Pobočný povrch  $p$  bude:

$$\begin{aligned} p &= 4d \times \frac{1}{2} OF \\ &= 4d \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{4s^2 - d^2} \\ &= d \sqrt{4s^2 - d^2} \end{aligned}$$

Přičte-li se k výsledku tomuto ploský obsah podstavy, obdržíme celý povrch  $P$ ; bude pak:

$$P = d^2 + d \sqrt{4s^2 - d^2}.$$

Kdyby byl jehlan pravidelný, bylo by  $d = s$ , a pak by byl pobočný povrch:

$$p = s \sqrt{4s^2 - s^2} = s \sqrt{3s^2} = s^2 \sqrt{3}.$$

a celý povrch:

$$P = s^2 + s^2 \sqrt{3} = s^2 (1 + \sqrt{3}).$$

Budiž výška jehlanu  $OE = v$  a podstava  $ABCD = b$ . Prostorný obsah jehlanu jest dle pravidla:

$$j = b \times \frac{1}{3} v$$

a jelikož jest  $b = d^2$ , bude

$$j = \frac{d^2 v}{3}$$

Výška  $v$  se počítá takto: Vedme v podstavné ploše obě úhlopříčny. Úhlopříčny tyto jsou (ve čtverci) sobě rovny a rozpolují se, stojíce na sobě kolmo; střed jejich jest patou výšky v rovině ABCD. Trojúhelník AOE jest tedy pravoúhelný a protož bude:

$$\overline{OE}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AE}^2 \text{ anebo}$$

$$v^2 = s^2 - AE^2$$

$AE$  jest polovičná úhlopříčna ve čtverci ABCD, jehož strana AB jest rovna  $d$ . V pravoúhelném trojúhelníku ABC jest:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = d^2 + d^2 = 2d^2$$

a tedy:

$$AC = \sqrt{2d^2} = d\sqrt{2}$$

a jelikož jest:

$$AE = \frac{1}{2} AC$$

bude:

$$AE^2 = \frac{1}{4} AC^2 = \frac{1}{4} \times 2d^2 = \frac{d^2}{2}$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do hořejší rovnice, bude:

$$v^2 = s^2 - \frac{d^2}{2} \text{ anebo}$$

$$v^2 = \frac{2s^2 - d^2}{2}$$

jestliže na stejné jméno obě části uvedeme. Z toho následuje:

$$v = \sqrt{\frac{2s^2 - d^2}{2}}$$

Prostorný obsah  $j$  bude tedy:

$$j = d^2 \times \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2s^2 - d^2}{2}} = \frac{d^2}{3} \sqrt{\frac{2s^2 - d^2}{2}}$$

U jehlanu pravidelného jest  $d = s$  a protož jest pak obsah:

$$j = \frac{s^2}{3} \sqrt{\frac{s^2}{2}} = \frac{s^3}{3\sqrt{2}}$$

Budiž  $s = 1^m$ ,  $d = 6^{\text{dm}}$ . Jest pak:

$$\text{OF} = \sqrt{10^2 - \frac{6^2}{4}} = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91}$$

$$\text{OF} = \sqrt{91} = 9.539 \dots$$

$$\text{pobočný povrch } p = 4 \times 6 \times \frac{9.539}{2}$$

$$p = 12 \times 9.539 = 114.47 \square^{\text{dm}}$$

Celý povrch  $P$  bude:

$$P = 36 \square^{\text{dm}} + 114.47 \square^{\text{dm}} = 150.47 \square^{\text{dm}}$$

Obsah jehlanu bude:

$$j = \frac{36}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^2 - 6^2}{2}} = 12 \sqrt{\frac{200 - 36}{2}}$$

$$= 12 \sqrt{\frac{164}{2}} = 12 \sqrt{82} = 12 \times 9.055$$

$$j = 108.66 \text{ kdm}.$$

Mnoho-li by obnášel povrch i obsah téhož jehlanu, kdyby byla hrana  $4 = 8^{\text{cm}}, 12^{\text{cm}}, 18^{\text{cm}}$  a hrana  $s = 14^{\text{cm}}, 38^{\text{cm}}, 42^{\text{cm}}$ ?

Kdyby byla u jehlanu pravidelného hrana s rovna  $8^{\text{cm}}$ , byl by pobočný povrch:

$$p = 8^2 \sqrt{3} = 64 \sqrt{3} \text{ anebo}$$

$$p = 64 \times 1.73205 \dots$$

$$= 110.85 \square^{\text{cm}}$$

Celý povrch by byl:

$$P = 64 \square^{\text{cm}} + 110.85 \square^{\text{cm}} = 174.85 \square^{\text{cm}}.$$

Prostorný obsah byl by pak:

$$j = \frac{8^3}{3\sqrt{2}} = \frac{512}{3\sqrt{2}}$$

$$= 512 : 3 \times 1.4142$$

$$= 512 : 4.2426 = 120.68 \text{ kcm}.$$

Mnoho-li by obnášel povrch i obsah téhož jehlanu, kdyby byla hrana  $s = 1^{\text{dm}}, 3^{\text{cm}}, 2^{\text{dm}}, 2^{\text{cm}}$ ?

### Dodatek.

1. Prostorný obsah těles a to obzvláště obsah těles nepravidelných, určitého tvaru nemajících, může se i následným způsobem vypočítati. K vypočtení tomu použije se nádoby buď hranolovité aneb válcovité, jejíž spodní plocha známa a jejíž výška na jedné straně rozměrem či skálou poznáčena jest. Má-li se prostorný obsah nějakého tělesa vyhledati, dá se těleso to do nádoby té, nalije se naň vody, až jest celé těleso ve vodě ponořeno, a poznamená se výška vody. Na to se pak ono těleso z vody vydá a hledí se, jakou výšku voda potom v nádobě má. Výška ta bude ovšem menší, než byla výška předešlá. Těleso, jehož prostorný obsah se vypočítati má, jest obsahem rovno hranolu neb válci, jenž má tutéž spodní plochu jako ona nádoba a jehož výška jest rovna rozdílu výšek na rozměru. Obnáší-li ku př. spodní plocha  $4 \square^{\text{dm}}$ ; věčší výška  $8^{\text{dm}}$ , menší  $5^{\text{dm}}$ , bude prostorný obsah tělesa:

$$4 \times (8 - 5) = 4 \times 3 = 12^{\text{kdm}}.$$

Je-li tedy spod  $b$ , věčší výška  $v$ , menší  $v'$ , bude obsah  $O$ :

$$O = b \times (v - v').$$

Jak velký byl by obsah tělesa, kdyby byla spodní plocha  $b = 120 \square^{\text{cm}}$  věčší výška  $v = 28^{\text{cm}}$ , menší  $v' = 15^{\text{cm}}$ ?

Poznam. Kdyby snad těleso, jehož obsah by se dle tohoto způsobu vyhledati měl, vodou proměnu aneb porušení bráti měl, použilo by se buď drobného písaku aneb jiné tekutiny, která by se dle povahy tělesa k tomu hodila.

Nádobou tou může se určiti i obsah dutých, tvarem nepravidelných nádob a sice takto: Naplní se nádoba ta tekutinou, kteráž se pak do oné hranolovité aneb válcovité nádoby vlije. Z obsahu plochy spodní a výšky, jižto v nádobě této tekutina zaujme, vypočte se obsah nádoby duté.

### 2. Prostorný obsah těles může se vypočítati i z váhy.

Váha těles udává se podle grammů, dekagrammů a kilogrammů a 1 gr. jest jak známo tolik, co váží jeden krychlený centimetr čisté vody při teplotě  $4^{\circ}\text{C}$ . Z toho jde, že na př. 8 gr. vody dá  $8^{\text{kom}}$ , 34 gr. pak  $34^{\text{kom}}$  a 1 kg. činí tedy dle obsahu  $1^{\text{kdm}}$  čili 1 litr. Dle toho lze podle váhy vody ihned stanoviti prostorný obsah její. Když by se naplnila nějaká nádoba vodou a voda by vážila 3 Kg. 85 Dg., byl by prostorný obsah té nádoby  $3^{\text{kdm}}$  a  $850^{\text{kom}}$ .

Tak by ovšem bylo, kdyby měla voda vždy teplotu  $4^{\circ}\text{C}$ . Je-li ale teplota věčší, má voda hustinu i váhu menší; avšak není-li rozdíl v teplotě příliš velký, jest rozdíl ve váze nepatrný a lze tedy tímto způsobem obsah prostorný určiti.

Týmž způsobem může se podle váhy i prostorný obsah těles pevných vyhledati, když víme mnoho-li váží jistá prostorná jednička ku př.  $1^{\text{km}}$  tělesa toho. Váha tato nazývá se *váha poměrná* a jelikož se váha jednoho krychleného centimetru čisté vody za jedničku běže, udává se *poměrnou vahou* tedy kolikrát krychlený centimetr těles více váží, než krychlený cm. vody čisté. Je-li na př. poměrná váha pískovce  $2\cdot5$ , bude  $1^{\text{km}}$  pískovce vážiti  $2\cdot5$ krát tolik co váží  $1^{\text{km}}$  vody; totiž  $2\cdot5$  gr.

Nevadí při tom pranic, jestliže třeba věčší prostornou jedničku ku př.  $1^{\text{kdm}}$  k proměrné váze zvolíme. Bude váha jak vody tak tělesa tisíckrát věčší a poměr obou tedy stejný jak při jedničce menší.

Váží-li tedy kus pískovce  $128\cdot25$  kg., jak velký jest prostorný obsah jeho? Tuť počítáme takto: Jelikož má pískovec poměrnou váhu  $2\cdot5$ , váží  $1^{\text{kdm}}$  tělesa toho  $2\cdot5$  kg. a protož jest  $128\cdot25 : 2\cdot5 = 51\cdot3^{\text{kdm}}$ .

Stojí zde poměrná váha několika těles:

Alabaster . . . . .	2·70	Pískovec . . . . .	2·50
Cín . . . . .	7·45	Platina kutá . . . . .	21·34
Dřevo dubové . . . . .	0·65	Rtuť . . . . .	13·60
— jedlové . . . . .	0·48	Sklo bslé . . . . .	3·35
— smrkové . . . . .	0·76	— krystallové . . . . .	2·89
Korek . . . . .	0·24	Stříbro . . . . .	10·51
Měď kutá . . . . .	9·00	Vápno vypálené . . . . .	3·05
— litina . . . . .	0·79	Zinek . . . . .	7·56
Mosaz . . . . .	8·40	Zlato . . . . .	19·36
Mramor . . . . .	2·70	Železo kuté . . . . .	7·79
Ocel . . . . .	7·80	— lité . . . . .	7·60
Olovo . . . . .	11·39		

Uvedeme zde ještě několik příkladů. 1. Železná koule váží 24 Kg., mnoho-li obnáší prostorný obsah její?

Poměrná váha železa litého činí  $7\cdot6$  t. j.: krychlený dm. litiny železné je  $7\cdot6$ —krát těžší, než krychlený dm. čisté vody; váží tedy krychlený dm. litého železa:

$$7\cdot6 \times 1 = 7\cdot6 \text{ kg.}, \text{ pročež bude:}$$

$$24 : 7\cdot6 = 3\cdot157^{\text{kdm}}$$

2. Mnoho-li váží kostka z mramoru, kteráž má strany  $3^{\text{dm}}$  dlouhé?

Prostorný obsah kostky té bude:  $3^3 = 27$ , bude tedy váha  $27 \times 2\cdot7 = 72\cdot9$  kg.

3. Kostka z olova vážila  $728\cdot96$  kg.; mnoho-li obnášel prostorný obsah její a mnoho-li obnášely její strany?

Poměrná váha olova je  $11\cdot39$  a protož bude prostorný obsah

$$728\cdot96 : 11\cdot39 = 64. \text{ Strany krychle té jsou pak: } \sqrt[3]{64} = 4^{\text{dm}}.$$

Mnoho-li obnáší poloměry železných koulí, když váží koule ty 6, 12, 20, 24, 48 kg.?

## Úlohy

k vypočítání povrchu a obsahu těles.

1. Kolmý hranol jest  $5\text{dm } 8\text{cm}$  vysoký; spodní plocha jest čtverec  $3\text{dm } 4\text{cm}$  dlouhý. Jak velký jest povrch?
2. Mnoho-li obnáší povrch hranolu přímého, jenž jest  $4\text{dm}$  vysoký a jehož spodní plocha jest obdélník  $3\text{dm } 4\text{cm}$  dlouhý a  $2\text{dm } 6\text{cm}$  široký.
3. Pobočný povrch přímého, trojstranného hranolu obnáší  $84\text{ dm } 56\text{ cm}^2$ ; strany jsou  $4\text{dm } 3\text{cm}$ ,  $3\text{dm } 4\text{cm}$  a  $2\text{dm } 3\text{cm}$ . Jak vysoký jest hranol ten?
4. U kostky jest hrana  $2\text{dm } 8\text{cm}$  dlouhá, mnoho-li obnáší celý povrch kostky té?
5. Mnoho-li obnáší povrch dvacítistěnu, jehož hrana má  $8\text{cm}$ ?
6. Jak dlouhá jest hrana u kostky, jejíž povrch obnáší  $2\text{dm } 84\text{ cm}^2$ ?
7. Mnoho-li obnáší pobočný povrch přímého šestistranného jehlanu, jenž má  $15\text{dm}$  v průměru a jehož pobočné hrany jsou  $4\text{dm}$  dlouhé?
8. Hrana osmistěnu jest  $8\text{cm}$  dlouhá; mnoho-li obnáší povrch jeho?
9. U kolmého zkomořeného jehlanu jsou podstavné plochy čtverce. Dolejší má v obměru  $5\text{dm } 6\text{cm}$ , horejší  $3\text{dm } 2\text{cm}$ ; výška lichoběžců obnáší  $2\text{dm } 8\text{cm}$ . Mnoho-li obnáší celý povrch?
10. Mnoho-li obnáší plášt a povrch přímého válce, jenž jest  $4\text{dm}$  vysoký a má v průměru  $2\text{dm } 8\text{cm}$ ?
11. Jak vysoký jest přímý válec, jehož povrch činí  $361 \cdot 64\text{ dm}^2$  a jehož spodní plocha má v průměru  $1 \cdot 4\text{dm}^2$ ?
12. Prímý rovnostranný válec má v průměru  $1\text{dm}$ ; jak velký jest plášt a povrch jeho?
13. U přímého válce obnáší plášt  $4\text{ dm } 84\text{ cm}^2$ ; výška obnáší  $1\text{dm } 2\text{cm}$ . Jak velký jest polomér?
14. Oblina přímého rovnostranného válce obnáší  $344 \cdot 58\text{ cm}^2$  ( $\pi = 3 \cdot 14159$ ); jak velký je polomér?
15. U přímého kužele obnáší strana  $3 \cdot 4\text{dm}$ , polomér má  $0 \cdot 8\text{dm}$ ; mnoho-li obnáší plášt, mnoho-li celý povrch?
16. Mnoho-li obnáší plášt přímého kužele, jenž jest  $4\text{dm}$  dlouhý, a jehož spodní plocha má v obvodu  $5 \cdot 4\text{dm}^2$ ?
17. Mnoho-li obnáší plášt přímého, rovnostranného kužele, jehož spodní plocha má v obvodu  $6 \cdot 8\text{dm}^2$ ?
18. Plášt přímého kuželu má  $8\text{ dm } 96\text{ cm}^2$ , polomér spodní plochy má  $0 \cdot 8\text{dm}$ ; mnoho-li obnáší strana?
19. Jak velký jest plášt přímého komolu kuželového, jenž jest  $1\text{dm } 4\text{cm}$  dlouhý a jehož horejší plocha má v obvodu  $8 \cdot 4\text{cm}$ , dolejší  $25 \cdot 2\text{cm}^2$ ?
20. Má se vypočítat plášt přímého kuželového komolu, jehož plochy mají  $12 \cdot 56\text{ dm}^2$  a  $50 \cdot 24\text{ dm}^2$  a jenž jest  $4\text{dm}$  dlouhý?
21. Koule má v průměru  $1\text{dm } 4\text{cm}$ ; jak velký jest povrch její?
22. Povrch koule obnáší  $50 \cdot 24\text{ dm}^2$  jak velký jest polomér její?
23. Kuželovitá nálevka jest  $8\text{cm}$  dlouhá a má v průměru  $6\text{cm}$ ; mnoho-li plechu jest na oblině její?
24. Obvod rovníku zemského obnáší asi  $40099\text{km}$ ; jak velký byl by povrch země, kdyby byla úplinou koulí?
25. Má se zhodnotit oblá nádoba měděná podobná komoli kuželové. Spodní plocha má v průměru  $2\text{dm } 8\text{cm}$ , horejší  $1\text{dm } 6\text{cm}$ , délka strany obnáší  $8\text{dm}$ . Mnoho-li  $\square\text{dm}$  plechu jest v nádobě této zapotřebí?
26. Má se udělati bedna s víkem. Bedna ta má podobu pravoúhelného rovnoběžnostěnu, jest  $14\text{dm}$  dlouhá,  $8\text{dm}$  široká a  $6\text{dm}$  vysoká. Mnoho-li prken bude zapotřebí, když jsou  $14\text{dm}$  dlouhá,  $4\text{dm}$  široká?
27. Válcovitá roura jest  $8\text{cm}$  tlustá a  $9\text{dm}$  dlouhá. Průměr v světlosti obnáší  $8\text{cm}$ ; jak velká jest vnitřní i zevnitřní oblnia?
28. Kolik bridičových ploten bude zapotřebí k pokrytí čtyřstranné jeblancovité věže, jejíž spodní strana má  $3\text{m } 4\text{dm}$  a pobočná hrana  $7\text{m } 8\text{dm}$ ; plotny jsou  $18\text{cm}$  dlouhé a  $8\text{cm}$  široké a mají se na  $0 \cdot 6\text{m}$  na sebe klásti?

29. Kuželovitá věž má se plechem pobit. Mnoho-li plechu bude zapotřebí, když má věž ta v průměru 4m 5dm a jest 10·4m vysoká?

30. Koule mající v průměru 2dm 7cm má se pozlatit; mnoho-li bude pozlátka zapotřebí, když jsou lístky 0·8cm dlouhé, 0·5cm široké a když se pro ztrátu 6%, přidati má?

## II. Obsah tělesný:

1. Jak velký jest obsah kostky, jejíž strana má 5dm 9cm?

2. Obsah kostky obnáší 82k. dm 728k. cm, mnoho-li obnáší jedna strana?

3. Pravoúhelný rovnoběžnostěn jest 5dm 9cm dlouhý, 8dm 8cm široký a 6dm 4cm vysoký; jak velký jest obsah jeho?

4. Prímý 6dm 8cm vysoký hranol má rovnostranný trojúhelník za spodní plochu. Jak velký jest obsah hranolu, když má tato spodní plocha v obměru 12 dm?

5. U přímého jehlanu jest spodní plocha čtverec, jehož strana 5dm obnáší. Jak velký jest obsah, když jsou pobočné hrany 84cm dlouhé?

6. Jehlanová komole jest 7dm 8cm vysoká. Podstavné plochy jsou rovnostranné trojúhelníky; hořejší má v obměru 6dm, dolejší 15dm. Mnoho-li činí obsah komole?

7. Průměr válce má 6dm 4cm, výška 8dm 2cm; kolik kostkových stop má válec tento?

8. Válcová roura jest 7m dlouhá, uvnitř má 19cm v průměru. Jak velký jest kostkový obsah její, když jest 8·4cm tlustá?

9. Mnoho-li kostkových palců obnáší přímý kužel, jenž má v spodním obvodu 24·8dm a jehož strana obnáší 4·8dm?

10. Jaký obsah tělesný má komol kuželový, jenž jest 2m vysoký a jehož hořejší plocha má v průměru 5dm dolejší 9·8dm?

11. Povrch kulový obnáší 48·2dm; jak velký jest obsah tělesný?

12. Má se vypočítati polomér koule, kteráž má 496·24k. cm?

13. Kolik kostkových metrů má 10m dlouhá, 4dm široká, a 1·4m vysoká zed?

14. Válcová nádoba má obnáset 46 litrů, jak musí být vysoká, když má mit průměr v světlosti 4dm?

15. Jak velký obsah má země (považuje-li se za úplnou kouli), když má průměr její 12764km?

16. Průměr slunce je 112-krát větší průměru země naší. V jakém poměru jest prostorný obsah slunce k obsahu země naší? Jak velký je povrch slunce?

17. Jedle má v spodním obvodu 4dm a jest až k vršku 5·8m vysoká. Mnoho-li kostkových dm. obsahuje, když se považuje za kužel?

18. \*) Kolik kostkových metrů má kulatá kláda, kteráž je 7m dlouhá a jejíž věčí průsek má 8dm, menší 2·5dm v průměru?

19. Rovnostranný kužel je 5dm 4cm vysoký; jak velký jest obsah jeho?

20. Rovnostranný válec má v obvodu 18dm; kolik kostkových metrů obnáší obsah jeho?

21. Mnoho-li bude stát jehlanový pomník ze žuly, jehož pobočné hrany mají obnáset 2m 6dm. Podstavná plocha jest čtverec 6dm dlouhý; za kostkový dm. se má platit 1 zl. 48 kr.

22. Mnoho-li váží dělová koule mající v průměru 4cm, když váží 1k. om 7·6 gr.?

23. Na dvoře srovval čeledín dříví; hranice měla tvar rovnoběžnostěnu byla 2m dlouhá a 1·5m vysoká a dříví bylo 75cm dlouhé. Mnoho-li by přibylo krychlených metrů kdyby bylo dříví 90cm dlouhé?

24. Mnoho-li krychl. m. dříví 80cm dlouhého dá jedle, ježto má v dolejším obvodu 4dm 8cm a jest 4m 8dm vysoká, když se počítá, že štípáním a rovnáním o  $\frac{1}{4}$  prostorností přibude?

\*) Při tomto počtu běže se obyčejně střední průsek za plochu podstavnou a délka za výšku, čímž se ovšem krychlený obsah jen zblíženě vypočítá.

25. Do nádoby, kteráž jest  $5\text{dm}$   $8\text{cm}$  dlouhá,  $4\text{dm}$  široká, podstavou obdélníku podobná nalilo se vody a potopilo se zároveň do vody té těleso nepravidelné; voda vystoupila na  $3\text{dm} 4\text{cm}$ . Když se těleso vydalo, měla voda toliko  $1\text{dm} 2\text{cm}$  výšky. Jaký prostor zaujímalo ono nepravidelné těleso?

26. Má se vystavěti zed  $14\text{m} 8\text{dm}$  dlouhá,  $2\text{dm}$  vysoká a  $3\cdot4\text{dm}$  tlustá. Mnoho-li cihel bude zapotřebí k stavbě této, když jsou cihly  $30\text{cm}$  dlouhé,  $15\text{cm}$  široké a  $5\text{cm}$  tlusté a když se na maltu mezi cihlami  $0\cdot8\text{cm}$  počítá?

27. Do válcovité nádoby, kteráž jest  $1\cdot8\text{m}$  dlouhá a  $4\cdot2\text{dm}$  široká, leje se voda konvici, kteráž  $15$  litrů obsahuje. Jak vysoko vystoupne voda v nádobě té, když se onou konvicí  $15$ krát naleje?

28. Kolik koulí může se uliti z  $9\text{ Kg}$ . olova, aby měly  $1\text{cm}$  v průměru?

29. Mnoho-li obsahuje dutá železná koule, kteráž má ve vnitřním průměru  $1\text{dm} 8\text{cm}$  a jest  $1\cdot2\text{dm}$  tlustá; mnoho-li by vážila?

30. Má se z mosazu uliti krychle a má vážiti  $1\text{ Kg}$ .; jak dlouhé budou strany krychle této?

31. Dutá cínová koule mající uvnitř v průměru  $12\text{cm}$  váží  $4\text{ Kg}$ .; jak tlustá jest ta koule?

32. Tlak vzduchu na plochu nějakou se vypočítá, když se obsah plochy té znásobí výškou  $76\text{cm}$ ; rovněž se vzduchový tlak váze sloupu rtuťového, jehož spodní plocha jest rovna oné ploše a jehož výška obnáší  $76\text{cm}$ . Mnoho-li činí tlak na ploše  $1\Box\text{cm}^2$ , mnoho-li na ploše  $1\Box\text{dm}^2$ ?

33. Mnoho-li krychlených dm. korku musilo by být, aby vážil tolik, co váží koule olověná, anáž má v průměru  $0\cdot8\text{cm}$ ?

34. Z válce dubového, jevž jest  $2\text{m} 3\text{dm}$  dlouhý a má v průměru  $3\text{dm}$  má se určitouti kus rovnoběžně s plochou spodní tak, aby byl pak válec ten o  $40\text{ Kg}$ . lehčí. Jak dlouhý kus musí se určitouti?

35. Válcová nádoba měla v průměru  $4\text{dm}$  a byla  $6\text{dm}$  vysoká. Do nádoby té nasypala se pšenice s vrcholem kuželovitým, jenž byl  $1\cdot5\text{dm}$  vysoký; mnoho-li to obnášelo litrů?

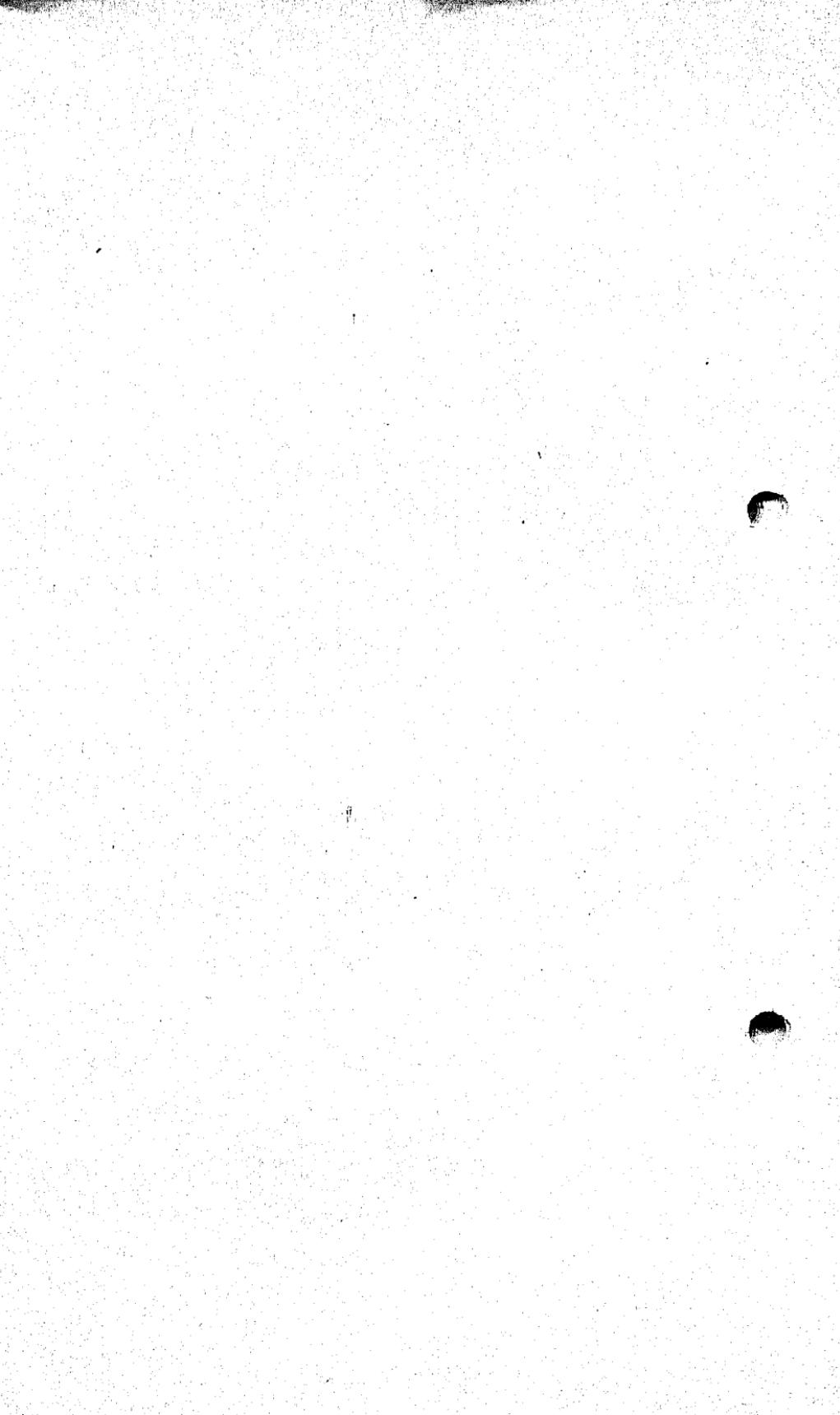
36. Mnoho-li litrů obsahuje kád, kteráž má v spodním obvodu  $3\cdot4\text{dm}$ , hořejším  $2\cdot1\text{dm}$  a jest  $11\text{dm}$  vysoká?

37. Sypalo se obilí do nádoby, kteráž měla podobu kolmo kuželové; spodní plocha její měla v průměru  $8\text{dm}$  hořejší pak  $5\text{dm}$ ; nádoba ta byla  $12\text{dm}$  vysoká. Mnoho-li Hl. vešlo se do nádoby té?

38. Z dvou kusů olova váží věčší  $7\text{ Kg}$ ., menší  $4\text{ Kg}$ .; mnoho-li by obnášely poloměry koulí, kteréž by se z kasů těch uliti mohly, a mnoho-li by obnášel poloměr koule, kteráž by se z obou oněch kasů nila?

39. Jak velký musil by být poloměr koule cínové, když by tolik vážila, co váží koule železná, kteráž má v průměru  $5\text{cm}$  a koule olověná, kteráž má v průměru  $3\text{cm}$ ?

40. Jaký tlak činí vzduch na postavu lidskou, jež jest  $17\text{dm}$  vysoká, považuje-li se za válec, jenž má průměrn  $28\text{cm}$ ?



# O b s a h.

## X. O kruhu.

	Strana
1. Střed, obvod, poloměr a průměr . . . . .	87
2. Oblouk, úhel středový, kruhový výsek . . . . .	—
3. Tetiva, úsek kruhový . . . . .	88
4. Úhly obvodové . . . . .	92
5. Sečny a tečny . . . . .	94
6. Poloha dvou kruhů . . . . .	96
7. Dělení obvodu . . . . .	98
8. Přímočárné obrazce v kruhu . . . . .	101
9. Kruh v obrazcích přímočárných . . . . .	108
10. Vypočítávání stran úhelníků pravidelných vnitř a vně kruhu opsaných . . . . .	105
11. Vypočítání stran úhelníků pravidelných . . . . .	107
12. Vypočítání ploch úhelníků pravidelných . . . . .	109
13. Meze obvodu kruhového . . . . .	110
14. Plocha kruhová . . . . .	112
15. Dodatek . . . . .	116

## XI. Parabola. Ellipsa. Hyperbola.

1. Parabola . . . . .	119
2. Ellipsa . . . . .	120
3. Hyperbola . . . . .	121

## **Stereometrie.**

### *Tělesoměrství neb stereometrie.*

#### I. Bod, čára v prostoru.

1. Poloha přímky k přímce . . . . .	128
2. Úhel v prostoru . . . . .	124

#### II. Rovina v prostoru.

1. Poloha přímek k rovině . . . . .	125
2. Poloha roviny k rovině . . . . .	127
3. Vzájemná poloha přímek a rovin . . . . .	128

#### III. Úhelníky těles měřických.

1. Vznik úhelníka tělesného . . . . .	130
2. Vlastnosti úhelníků tělesných . . . . .	131

#### IV. Tělesa hranatá.

1. Hranoly . . . . .	133
2. Jehlany . . . . .	136
3. Tělesa mnogostenná . . . . .	140

## V. Tělesa kulatá.

1. Válec . . . . .	148
2. Kužel . . . . .	145
3. Koule a vlastnosti její . . . . .	148

## VI. Povrch těles.

1. Povrch hranolu . . . . .	149
2. " jehlanu . . . . .	150
3. " těles pravidelných . . . . .	152
4. " válce . . . . .	—
5. " kuželu . . . . .	153
6. " koule . . . . .	154

## VII. Kostkový obsah těles.

1. Prostorný obsah kostky neb krychle . . . . .	157
2. Obsah pravoúhelného rovnoběžnostěnu . . . . .	159
3. " hranolu . . . . .	—
4. Kostkový obsah jehlanu . . . . .	160
5. Obsah komole jehlanového . . . . .	163
6. Kostkový obsah válce . . . . .	165
7. " " kužele . . . . .	167
8. " " komole kuželové . . . . .	168
9. " " koule . . . . .	—

## VIII. Úlohy smíšené.

Dodatek . . . . .	177
Úlohy . . . . .	179

---