ARITHMETIKA

PRO

NIŽŠÍ GYMNASIUM.

UPRAVIL

JAN SOMMER,

PROFESSOR C. K. VYŠŠÍHO GYMNASIA V ROUDNICI N. L.

S 10 OBRAŽCI.

CENA NEVÁZ. 1 ZL., VÁZ. 1 ZL. 25

V PRAZE A VE VÍDNI.

NÁKLADEM F. TEMPSKÉHO,

KNIHKUPCE CÍS. AKADEMIE VĚD VE VÍDNI.

1894.

Knihtiskárna B. STÝBLA v Praze.

Úvod.

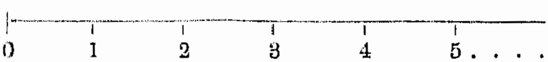
Množství stejných věcí určujeme čítáním: $1+1=2$; $2+1=3$; $3+1=4$ atd. Výsledek takového čítání zoveme *číslem* a čítané věci *jednotkou*. § 1.

Číslo jest souhrn jednotek. Je-li jednotka pojmenovaná, zove se i číslo *pojmenované*, na př. 3 žáci, 7 m; není-li jméno jednotky určeno, jest číslo *nepojmenované* na př. 3, 7. Nepojmenovaná jednotka zove se též *jednička* neb *jedna*.

V písmě označujeme číslo *číslicemi* (ciframi), na př. 3, 7, a v mluvě *číslovkami* na př. tři, sedm, patnáct.

Číslice jest viditelný znak čísla — jeho rys, a číslovka jest slyšitelný znak čísla — jeho jméno.

Čísla posloupným čítáním získaná 1, 2, 3, 4 . . . sestavujeme v *přirozenou řadu čísel* (řadu číselnou) a znázorňujeme ji na paprsku tím, že odměřujeme na něm stejné délky, jichž počet označujeme ciframi 1, 2, 3 . . . Počátek paprsku značíme číslicí 0 (nicka, nulla), jako značkou pro úplný nedostatek jednotek. Paprsek ten zoveme osou číselnou (obr. 1).



Obr. 1.

Čísla obsahující týž počet jednotek zovou se *rovná*, jinak nerovná. Znakem rovnosti jest $=$ (rovno), znakem nerovnosti $>$ neb $<$, při čemž se píše číslo větší do otvoru a menší vedle se strany druhé; na př. $5=5$ (pět se rovná pěti; pět jest pět), $7>4$ (sedm jest větší čtyř), $4<7$ (čtyři jsou menší sedmi).

Soustava dekadická. Aby bylo možno deseti ciframi (0, 1, 2, 3 . . . 9) vyznačiti všecka čísla, jichž jest nekonečně mnoho (∞), shrnujeme deset jednotek v novou jednotku vyšší (desítku); deset těchto jednotek opět v novou jednotku vyšší (sto, stovka) atd. Jednotky vyšší po řadě jmenujeme: *desítky*, *sta*, *tisíce*, *desetitisíce*, *stotisíce*, *milliony* . . . atd. (vůbec jednotky desítkové). § 2.

V písmě vyznačujeme je tím, že je píšeme v levo vedle těch jednotek, z nichž povstaly. Místa ta se nazývají vyšší, kdežto místa v pravo, jakož i jednotky na nich stojící, zoveme nižší. Není-li nižších jednotek, vyplníme místa jejich nullou. Dle toho značíme deset, dvacet, třicet .. devadesát, jakožto 1, 2, 3... 9, desítek znakem 10, 20, 30...90.

Desítky zoveme též jednotkami řádu prvého, kdežto jedničky jednotkami řádu nullového.

V písmě označovati budeme desítky pro krátkost též písmenou D a jednotky písmenou J.

Ježto dvacet pět $= 2D$ a $5J$, třicet sedm $3D$ a $7J$; devadesát devět $= 9D$ a $9J$, možno čísla ta psáti 25, 37 . . . 99.

Přidáme-li ku 99 jednu, obdržíme $10D$, jež tvoří opět 1 jednotku řádu vyššího (druhého), kteráž se zove sto (S); píšíce jednotku tuto v levo od desítek, klademe ji na místo třetí: 100. Nully vyznačují, že tu není ani desítek ani jednotek.

Sto padesát čtyři se dá rozložiti na 1 sto, 5 desítek, 4 jedničky, a proto píšeme 154 atd. Tak shrnujeme dále

deset set v 1 tisíc (T) čili 1 řádu 3ho,
„ tisíc v 1 desetitisíc (Dt) čili 1 řádu 4ho,
„ desetitisíc v 1 stotisíc (St) čili 1 řádu 5ho,
„ stotisíc v 1 million (M) čili 1 řádu 6ho,
„ millionů v 1 desetimillion (Dm) čili 1 řádu 7ho,
„ desetimillionů v 1 stomillion (Sm) čili 1 řádu 8ho,
„ stomillionů v 1 tisíc millionů (Tm)*) čili 1 řádu 9ho atd.

Tím nabyla každá cifra mimo hodnotu tvarem vyznačenou (t. zv. hodnotu cifernou) ještě jinou hodnotu (t. zv. místní), dle toho na kterém stojí místě, čili jakého jest řádu (hodnota řádová).

Tak značí 2 na druhém místě dvacet (= dvě desítky), na třetím místě dvě stě atd.

Všeobecně značí cifra desetkrát více, postavíme-li ji o 1 místo výše (v levo).

Číslo 222 skládá se ze stejných číslic, každá má však jinou hodnotu místní.

Čísla tímto spůsobem psaná zovou se čísla dekadická**).

---

*) Zove se též milliarda.

**) Tomuto spůsobu napisování, jakož i číslicím přiučili jsme se ve století 13tém od Arabů; proto zoveme číslice 1, 2, 3, . . . arabskými, ač jsou původu indického. Národové východní píší i čtou od pravé ruky k levé a tím se také vysvětluje sestavování čísel od ruky pravé k levé a nikoliv naopak.

§ 3. **Numerace.** Abychom mohli i větší číslo pohodlně vysloviti a vyslovené lehce napsati (numerace) sestavujeme dekadické jednotky v trojciferné skupiny (triady). Nejnižší jednotky k a ž d é trojskupiny zovou se jednotky, vyšší desítky a nejvyšší sta.

Dvě a dvě triady spojujeme v 1 hexadu (skupinu 6ticifernou). Jednotky každé sudé triady zovou se tisíce a to: tisíce, desetitisíce, statisíce dle toho, stojí-li na 1., 2. neb 3. místě.

Jednotky druhé hexady zovou se milliony.
„ třetí „ „ „ trilliony.
„ čtvrté „ „ „ quadrilliony atd.

I stojí na

1.	místě jednotky	$= J$	řád	0.		
2.	„ desítky	$= D$	„	1.	= jednotky	
3.	„ sta	$= S$	„	2.		
4.	„ tisíce	$= T$	„	3.		jednotek
5.	„ desetitisíce	$= Dt$	„	4.	= tisíce	
6.	„ statisíce	$= St$	„	5.		
7.	„ milliony	$= M$	„	6.		
8.	„ desetimilliony	$= Dm$	„	7.	= jednotky	
9.	„ stamilliony	$= Sm$	„	8.		
10.	„ tisícemilliony	$= Tm$	„	9.		millionů
11.	„ desetitisícemilliony	$= Dtm$	„	10.	= tisíce	
12.	„ statisícemilliony	$= Stm$	„	11.		
13.	„ billiony	$= B$.				

Pro přehled napisujeme větší čísla tak, že triady oddělujeme mezerou. Na př. 17 304 645 690 285 a čteme: 17 billionů, 304 tisíce 645 millionů, 690 tisíc 285, t. j. čteme každou triadu zvlášť jako tříciferné číslo; sudé triady označujeme jménem tisíc a ku každé hexadě připojujeme její jméno*).

C v i č e n í: **1.** Vyslov tato čísla: 4 005, 40 008, 800 015, 204 125, 306 005, 4 000 015, 12 085 347; 4 862 700 004; 135 000 200; 4 207 064 540 028; atd. a vyslovená opět napiš.

2. Napiš tato čísla: čtyři tisíce dvě; dvanáct tisíc padesát čtyři; sto dvacet tisíc čtyřicet šest; patnáct millionů dvacet čtyři tisíce třicet dva; třináct tisíc sto patnáct millionů šedesát čtyři tisíce třináct atd.

3. Urči místní hodnotu cifer *a*) 4 a 2 v čísle 14 032 708, *b*) 6 a 9 v čísle 123 654 937, *c*) jak se zovou ty jednotky, na kolikátém místě stojí a jakého jsou řádu?

*) Národové románští dělí čísla jen na triady a zovou je: jednotky, tisíce, milliony, billiony, trilliony atd., takže jejich billiony jsou naše tisícemilliony; od války prusko-francouzské zove se jednotka řádu 9. též milliardou.

4. Vyslov v čísle 7 5|12 406| 84|2 70|0 514 skupiny přímkami vymezené, tak že vytkneš jméno nejnižšího řádu.

5. Jmenuj desítky, sta, tisíce atd. těchto veličin *a*) 1 *m*, *b*) 1 *l*, *c*) 1 *g*, *d*) 1 *kr*, *e*) 1 *h* (haléř) zvláštními jmény — jsou-li jaká.

§ 4. **Rozšíření soustavy dekadické o čísla desetinná.** Postupujeme-li v čísle víceciferném od pravé ruky k levé, přicházíme ku jednotkám vždy 10krát větším; a naopak jednotka v pravo stojící jest 10krát menší (desátým dílem) jednotky sousední (v levo stojící). Na základě toho možno rozšířiti dekadickou soustavu tím, že jedničku rozdělíme na deset menších jednotek t. zv. desetin, desetinu (*d*) na 10 setin, setinu (*s*) na deset tisícin, tisícinu (*t*) na 10 desetitisícin, desetitisícinu (*dt*) na 10 stotisícin, stotisícinu (*st*) na 10 millionin, millioninu (*m*) na 10 desetimillionin atd.*)

Dle toho jest $1J = 10d = 100s = 1000t \ldots$ atd., $1J\,7d = 17d$, $3d\ 2s = 32s$, $1d\ 4s\ 3t = 143t$; $4t\ 5m = 4005\,m$; $2s\ 6t\ 14m = 26014\,m$ atd.

Ježto jest desetina desetkrát menší jedničky, možno ji psáti v pravo vedle ní. Tím by však se octla jednička na místě druhém a proto nutno místo jedniček nějak označiti jako místo prvé; to se děje desetinnou tečkou. 1·4 značí tudíž $1J\ 4d$; podobně $24{\cdot}357 = 2D\ 4J\ 3d\ 5s\ 7t$.

Není-li jednotek, nutno místo jich vyplniti nullou; $2d\ 6s = 0{\cdot}26$, $3s\ 5t = 00{\cdot}35$, $0{\cdot}45 = 0J\ 4d\ 5s$.

Tím rozšiřujeme číslo dekadické (celé) o místa desetinná (decimalní). I stojí dle toho na

1. místě desetinném desetiny d = jednotky 1. desetinného řádu.
2. „ „ setiny s = jednotky 2. desetinného řádu.
3. „ „ tisíciny t = jednotky 3. desetinného řádu.
4. „ „ desetiny tisícin dt = jednotky 4. desetinného řádu.
5. „ „ setiny tisícin st = jednotky 5. desetinného řádu.
6. „ „ millioniny m = jednotky 6. desetinného řádu.
7. „ „ desetiny millionin dm = jednotky 7. desetinného řádu atd.

d, *s*, *t*, *dt* atd. zovou se též jednotky 1., 2., 3., 4. atd. řádu desetinného. Millionina jest tedy jednotka 6 řádu desetinného a stojí na 6. místě desetinném. (a million?)

Cvičení: **1**. Kolikátým dílem tisíciny, setiny, desetiny atd. jest millionina?

2. Kolikátým dílem metru jest decimetr, *cm*, *mm*? Napište 3 *m* 2 *dm* 6 *cm* a 4 *mm* jako číslo jednojmenné a to v *m*, *dm*, *cm* neb *mm*; po-

---

*) Jednotky tyto (*d*, *s*, *t*, *dt* . . .) zoveme desetinné na rozdíl od jednotek desítkových (*D*, *S*, *T*, *Dt* . . .) a oboje se zovou jednotkami dekadickými.

dobně: 3 *m* a 14 *mm*, 12 *km* 45 *m* a 43 *mm*; 12 *hl* a 3 *l*; 25 *kg* 5 *dkg* a 3 *g*; 2 *kg* a 12 *g*; 5 *k* a 14 *h*, 13 *zl.* a 2 *kr.*, atd.

Numerace čísel desetinných. Mnohociferná čísla desetinná píšeme tak, že spojujeme vždy 3 a 3 řády desetinné ve skupiny a oddělujeme je mezerou na př.: 3 142· 573 486 29. § 5.

Čísla desetinná čteme (vyslovujeme) různým spůsobem:

a) jako čísla celá (a to, jsou-li málociferná), vyslovujíce při tom nejnižší jednotku, na př. 0·14 = 14 setin; 0·365 = 365 tisícin; 0·000 246 = 246 millionin; 0·001 24 = 124 stotisíciny.

Čísla 14, 365, 124, 246 zovou se *číselné obrazy* hořeních čísel desetinných.

b) Mnohociferná čísla vyslovujeme po triadách na př.: 0·034 489 78$_0$ = 34 tisíciny 489 millionin 780 tisícimillionin, aneb diktujíce takové číslo, čteme prostě sled cifer takto: žádná celá, nulla, tři, čtyři atd.

Cvičení: **1.** Jak se zovou jednotky na 3., 6., 9., 2., 4., 1., 5., ... místě desetinném?

2. Vyslov co nejvýhodněji tato čísla: 0·014, 14 000 0·630 004, 0·000 084, 45·008, 38·125 467. 0·001 28, 12 800 000, 0·004 246; napiš jich číselné obrazy a připiš jméno nejnižších jednotek.

3. Vyčísli (t. j. napiš ciframi) tato čísla: *a*) 35 tisícin, *b*) 12 setin a 135 millionin, *c*) tisíc dvacet pět millionin, *d*) s'o dvacet celků čtyřicet pět tisícin, *e*) 48 tisíc 5 set.

4. Vyslov přímkami omezené skupiny těchto čísel a připoj jméno nejnižší jednotky:

126·|489|723|458; 5|8·6|01 7|43; 4 08|3 05|91;

5. Srovnejte čísla *a*) 47 a 4 700, *b*) 0·47 a 0·470 0, *c*) 0·047 a 0·000 047 a vyslovte příslušnou poučku.

Cifry římské. Římané značili číslo 1 = I, 5 = V, 10 = X, 50 = L, 100 = C, 500 = D, 1000 = M. Čísla ostatní psali tak, že je rozkládali ve sčítance (rozečítali), jež psali v řádek počínajíce vždy nejvyššími jednotkami na př.: II = 2, VI = 6, XX = 20, CCLXVIII = 268 atd. Nižší jednotka před vyšší značí, že jest ji od vyšší odečísti, na př.: IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900, na př.: MDCCCXCIV = 1894, MCM = 1900. Pravidla toho se užívalo jen tehdy, když by k vyznačení čísla bylo třeba 4 stejných značek. § 6.

Cvičení: **1.** Napiš číslicemi římskými čísla: 21, 62, 19, 49, 92, 99, 176, 434, 994, 1014, 1494, 1893.

2. Napiš číslicemi arabskými čísla: LI, XLVI, XCIX, CCLXIV, CDXLIV, DCXCIX, MDCCLXIV, MMLVI.

ČÁST PRVÁ.

Čtvero základních výkonů početních nepojmenovanými a jednojmennými čísly celými i desetinnými.

Sečítání.

§ 7. *a*) Sečítati dvé neb více čísel jest vyhledati číslo, jež má tolik jednotek (touže hodnotu), jako čísla daná dohromady. Čísla daná zovou se sčítance, (summand, addend). Výkon ten označujeme tím, že píšeme sčítance v řádek, spojujíce je stojatým křížkem (znak sčítání), který se čte plus (více) neb **a** na př. $4+3$ čti 4 a 3, 4 plus 3.

b) Tímto tvarem $4+3$, jejž zoveme součet (summa), jest již hledané číslo naznačeno (určeno), ne však nalezeno (vypočteno).

Nalezneme je, postupujeme-li v řadě přirozených čísel od 4 o tři členy výše, což značíme $4+3=7$ a čteme: čtyři a tři rovná se sedmi aneb: čtyři a tři jest sedm.

c) Nalezneme je však také tím, že postupujeme od 3 o čtyři členy výše, což vyznačíme $3+4=7$. Ježto sčítance mohou místa svá zaměniti (dají se přemístiti), aniž by se tím hodnota součtu změnila, zoveme sčítání výkonem záměnným, což vyznačujeme $4+3=3+4$.

Máme-li sečítati tři čísla na př.: 3, 4 a 5, sčítáme nejprvé $3+4=7$ a k součtu připočteme 5, tedy $7+5=12$; což krátce značíme takto: $3+4+5=12$*). Ježto

$$3+4+5=4+5+3=5+3+4=\ldots,$$

jest i sčítání více sčítanců výkonem záměnným. Pořádek sčítanců jest libovolný.

d) Dvě čísla spojená znamením rovnosti tvoří rovnici; části rovnice psané v levo a v pravo od znaménka $=$ zovou se levá a pravá strana rovnice. Strany mohou se lišiti pouze tvarem, nikoliv hodnotou. Tak v rovnici $4+3=7$ jest na levé straně součet, na pravé jediné číslo; ježto se 7 rovná součtu $4+3$, zove se 7 též součtem (pokud k rovnici té přihlížíme), avšak vypočteným, neboť nemá tvar součtu. Na rozdíl od toho zoveme $4+3$ součtem naznačeným.

Napiš čísla 8, 11, 15 tvarem součtu.

e) Podobně možno sčítati čísla pojmenovaná na př:
$5\,kg + 4\,kg = 9\,kg$, $7\,m + 4\,m = 11\,m$, $2\,l + 5\,l + 4\,l = 11\,l$, $12\,zl + 8\,kr = 1200\,kr + 8\,kr = 1208\,kr$, $3\,kg + 45\,g = 3000\,g + 45\,g = 3045\,g$. Možno $3\,km + 5\,kg$ sčítati? Čísla pojmenovaná lze sčítati

*) Takové sčítání zoveme „posloupné“.

jen tehdy, mají-li společné jméno (stejnojmenná), ne-li jen tehdy, dají-li se na společné jméno uvésti.

f) Čísla desetinná možno dle toho sčítati jako čísla stejnojmenná, na př.: $0{\cdot}3 + 0{\cdot}4 = 3\,d + 4\,d = 7\,d = 0{\cdot}7$; $0{\cdot}05 + 0{\cdot}03 = 0{\cdot}08$, $0{\cdot}4 + 0{\cdot}03 = 40\,s + 3\,s = 43\,s = 0{\cdot}43$.

g) Přesvědčíme-li se nějakým způsobem, že jsme správně počítali, vykonali jsme zkoušku. Zkouška při sčítání děje se tím, že sečteme sčítance v jiném pořádku. Je-li součet týž, byl počet správný.

Cvičení: **1.** Vyjmenuj řadu čísel *a*) lichých, *b*) sudých až do 100.

2. Počínaje číslem 3, 4, 5 . . . . 10 zvětšuj je o tolikéž až do 100.

3. Počínaje *a*) číslem 1, *b*) číslem 2 zvětšuj je stále o 3, 4, 5, 6, 7 . . . 10 až do 100.

4. Počínaje číslem 4 zvětšuj je stále o 10, 20, 30 atd. až do 100, 200, 300 atd.

5. Počínaje číslem dvouciferným zvětšuj je jako v př. 4.

6. Sčítej *a*) $4D + 3D + 5D$, *b*) $3S + 7D + 2D + 4D$, *c*) $3\,d + 5\,d + 2\,d$, *d*) $7\,s + 6\,s + 5\,s$.

7. Sčítej co nejvýhodněji*) *a*) $7 + 8 + 3 + 2 + 5$, *b*) $6 + 7 + 3 + 4 + 9 + 8 + 1$, *c*) $3 + 8 + 2 + 5 + 5$, *d*) $17 + 4 + 6 + 13$, *e*) $25 + 18 + 22 + 15$.

8. Sčítej tato čísla dvouciferná dle vzoru: $23 + 45 = ?$; $23 + 40 = 63$, $63 + 5 = 68$, (tedy $23 + 45 = 68$, při čemž jest vyslovovati tato čísla: 23, 63, **68** tedy pouze částečné součty a nikoliv sčítance) $53 + 37$, $28 + 17$, $62 + 19$, $74 + 58$, $86 + 57$.

9. Jest sčítati (z paměti) vždy dvě sousední čísla řady:

25, 58, 13, 74, 48, 99, 32, 89, 67, 95, 76.

Dodatek: **1.** Je-li $7 + 5 = 12$
jest $7 < 12$
$5 < 12$

Součet jest > každého sčítance.

2. Je-li
$$\begin{array}{r} 8 + 5 = 13 \\ 7 = 7 \\ \hline \end{array}$$
jest i
$$\underbrace{8 + 5 + 7}_{20} = \underbrace{13 + 7}_{20}$$

Ze dvou rovnic možno sečtením stran utvořiti rovnici třetí. Aneb: Rovnosť se neporuší, přičteme-li k oběma stranám rovné číslo.

3. Je-li
$$\begin{array}{r} 7 = 7 \\ 3 > 2 \\ \hline \end{array}$$
jest
$$\underbrace{7 + 3}_{10} > \underbrace{7 + 2}_{9}$$

4. Je-li
$$\begin{array}{r} 12 > 10 \\ 8 = 8 \\ \hline \end{array}$$
jest
$$\underbrace{12 + 8}_{20} > \underbrace{10 + 8}_{18}$$

*) Pamatuj: „Pořádek sčítanců jest libovolný“.

Přičteme-li ku rovnosti nerovnosť dvou čísel, vznikne nerovnosť téhož směru; aneb: **4.** Nerovnosť se neruší, přičteme-li na obou stranách stejné číslo.

Sčítání písemné.

§ 8. *a*) Je-li sčítati čísla víceciferná celá, sčítáme nejprvé jednotky; je-li součet větší než 9, přičteme desítky součtu k desítkám daných sčítanců a tak pokračujeme dále Ku snadnějšímu přehledu píšeme sčítance v sloupec tak, aby stejnojmenné jednotky stály pod sebou, na př.:

$$\begin{array}{r} 2537 \\ 356 \\ 81024 \\ 5748 \\ \hline 89665 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8J+4J+6J+7J=25J=5J+2D \\ 2D+4D+2D+5D+3D=16D=6D+1S \\ 1S+7S+3S+5S=16S=6S+1T \\ 1T+5T+1T+2T=9T. \end{array}$$

Sčítance netřeba vyslovovati*), nýbrž jen součty částečné a konečný; tedy 8, 11, 17, **24**; 2, 6, 8, 13, **16**; 1, 8, 11, **16**; 1, 6, 7, **9**; 8.

Výhody: Tvoří-li dva sousední sčítance 10, přičítej hned jejich součet a nikoliv jednotlivé sčítance na př. v hořením příkladě

$$8J+10J+7J.$$

b) Je-li sčítati čísla desetinná, počínáme si podobně a sčítáme nejprvé jednotky nejnižšího řádu; na př.:

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}38 \\ 6{\cdot}948 \\ 17{\cdot}5 \\ 4{\cdot}736 \\ \hline 29{\cdot}564 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 6t+8t=\mathbf{14}\,t=4t+1s. \\ 1s+3s+4s+8s=16s=6s+1d \\ \text{atd.} \end{array}$$

Cvičení: Jest určiti součty **1.**, **2.**, **3.** se zkouškou

$$\textbf{1.}\ \begin{array}{r} 743 \\ 5268 \\ 305 \\ 2794 \\ \hline \end{array} \qquad \textbf{2.}\ \begin{array}{r} 3745 \\ 294 \\ 8536 \\ 50187 \\ \hline \end{array} \qquad \textbf{3.}\ \begin{array}{r} 16735 \\ 2489 \\ 40373 \\ 879454 \\ 387 \\ \hline \end{array}$$

4. Sečtěte sčítance

$$8214 + 10537 + 278 + 59046 = ?$$

aniž byste je psali v sloupec.

5. Sečti tato čísla sčítaje *a*) dle řádků a částečné součty dle sloupců, *b*) dle sloupců a částečné součty dle řádků. (Srovnej oba výsledky.)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2704 & + & 350 & + & 2758 & + & 483 & = & \ldots. \\ 859 & + & 4076 & + & 354 & + & 27 & = & \ldots. \\ 3075 & + & 928 & + & 35746 & + & 1645 & = & \ldots. \\ 41672 & + & 36 & + & 1072 & + & 823 & = & \ldots. \\ \hline \ldots. & + & \ldots. & + & \ldots. & + & \ldots. & = & \ldots. \end{array}$$

*) Co jest psáno (viditelno), nebudeme vyslovovati vůbec.

6. Které číslo jest o 13705 větší než 7894?

7. Které číslo jest o 9593 větší než součet 137 + 14784?

8. Nejmladší z bratrů obdržel 2745 *K*, druhý o 543 *K* více a třetí o 789 *K* více než druhý. Kolik obdržel třetí, a kolik všichni dohromady?

9. Osoba *A* má 2357 *K* a tím o 1836 *K* méně než osoba *B*. Kolik má osoba *B*?

10. Kupec prodal za 17893 *K* zboží se ztrátou 1548 *K*. Zač je koupil?

11. Je-li kupní cena 13784 *K* a zisk 1457 *K*; kolik činí cena prodejní?

12. Sečti co nejrychleji *a*) $4996 + 347 + 4 + 53 = ?$
b) $541 + 78 + 9 + 22 = ?$

13. Urči z pouhého pohledu, který ze součtů (4856 + 284) a (5783 + 396) jest větší? Jest to možno též u součtů
(3975 + 973) a (4014 + 934)?

14. Jest nerovnosť $475 + 14 > 475$ správná?

15. Jaká pravidla možno vytvořiti ze příkladů **13.** a **14.**?

Urči součty **16.**, **17.**, **18.** se zkouškou:

16.	**17.**	**18.**
14·56	4·576	413·72
0·047	37·42	9·453
37·8	0·5348	147·07
0·57	63·4	6·7984
68·458	7·5072	

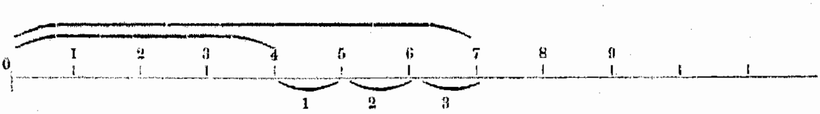
19. Jest vypočítati součet
$$14·07 + 46 + 784·27 + 0·375$$
aniž byste sčítance psali v sloupec.

20. Které číslo jest o 145·27 > součtu 24·05 + 0·375 + 200·37?

21. Otec odkázal nejmladšímu synu 1356·27 zl., druhému o 250·15 zl. více a třetímu o 137·43 zl. více než druhému. Kolik obdržel třetí a kolik činil celý odkaz?

Odečítání.

a) Které číslo nutno přičísti ku 4, aby součet obou = 7? Otázku § 9.
tuto napíšeme arithmetickými značkami $4 + x = 7$ a rozřešíme takto: Postupujíce v řadě číselné od 4 ku předu o 3 jednotky dojdeme ku 7 a proto jest hledané číslo $x = 3$ t j. $4 + 3 = 7$

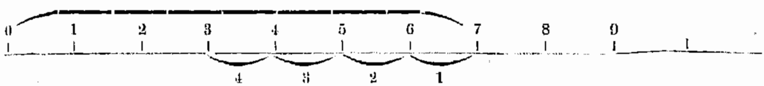


Obr. 2.

Rovnici $4 + x = 7$ možno též čísti: Ku kterému číslu jest přičísti 4, abychom obdrželi 7?

Psáti tedy: $x + 4 = 7$.

Úlohu tuto rozřešíme takto: Postupujíce v řadě číselné od 7 *zpět* o 4 jednotky, dojdeme ku 3, čímž shledáme, že $3 + 4 = 7$



Obr. 3.

V obou otázkách jsme ze dvou daných čísel (7 a 4) hledali třetí (3) tím, že jedno (větší 7) jsme považovali za součet a druhé (menší 4) za sčítance, k němuž jsme vyhledali sčítanec druhý (3). Takové*) hledání čísla zoveme odčítání (subtractio).

Od jednoho čísla (7) odčítati druhé (4) znamená vyhledati číslo (3), jež ku druhému přičteno, dá číslo prvé; čili: Odčítati jest z daného součtu a jednoho sčítance vyhledati druhý.

Číslo, od kterého odčítáme (součet), zove se menšenec (= minuend); které odčítáme (daný sčítanec), menšitel (= subtrahend) a hledané číslo (druhý sčítanec) zoveme rozdíl či zbytek (difference).

Odčítání jsme dosud značili tvarem součtovým $4 + x = 7$; $x = 3$. Aby však nový výkon (odčítání) byl vyznačen i novým tvarem, píšeme daná čísla na levou stranu a to menšenec na místo prvé a menšitel na místo druhé, oddělujíce je značkou — (minus, méně, bez). Tedy $7 - 4 = 3$

čtouce: sedm bez čtyř jsou tři; sedm minus čtyři rovná se třem.

Tvar $7 - 4$ zoveme *naznačený* rozdíl a jeho hodnotu 3 *vypočtený* rozdíl.

Menšenec — menšitel = rozdílu.

b) Dle předešlého výkladu jest

menšitel + rozdíl = menšenci.

Dle této poučky přesvědčujeme se o správnosti vypočítaného rozdílu: $7 - 4 = 3$, poněvadž $4 + 3 = 7$ (1. zkouška).

c) Dále patrno, že, je-li $7 - 4 = 3$, jest i $7 - 3 = 4$.

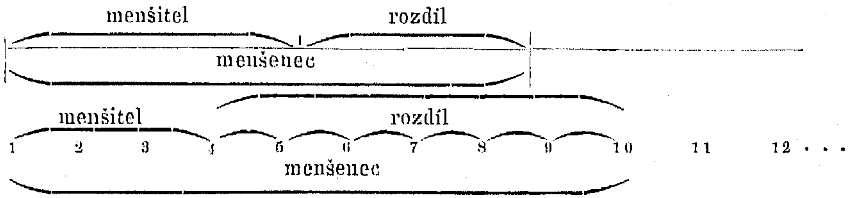
Menšenec — rozdíl = menšiteli (2. zkouška).

Menšitel a rozdíl dají se přemístiti.

---

*) Hledati ze dvou neb více čísel číslo nové tak, aby vyhovělo určitým podmínkám, zove se počítati. A výkon, jímž se to děje, jest výkon početní. Arithmetika jest tudíž nauka o početních výkonech. Nejjednodušším výkonem početním jest čítání, kterým vytvořujeme řadu číselnou.

Možno menšenec a menšitel přemístiti?
Je odčítání výkonem záměnným?
Možno větší číslo od menšího odčítati?
Možno dvě nestejnorodá čísla odčítati?
Jest 12 zl. — 8 kr. = 12 — 8?
Jaké jméno má rozdíl dvou veličin stejného jména?
d) Z pouhého pohledu na obrazec 4tý



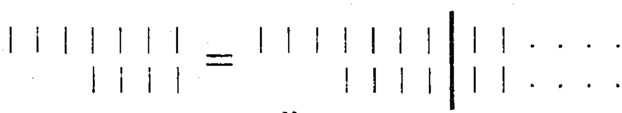
Obr. 4.

patrny jsou poučky:

Zvětší-li (zmenší-li) se menšenec [při stejném menšiteli]*), ***zvětší*** (zmenší) se rozdíl ***o*** tolikéž.

Zvětší-li (zmenší-li) se menšitel [při stejném menšenci], ***zmenší*** (zvětší) se rozdíl ***o*** tolikéž.

e) Podobně seznáme z obrazce 5.



Obr. 5.

že:

Rozdíl zůstane nezměněn, zvětšíme-li (zmenšíme-li) menšenec i menšitel ***o*** tolikéž na př.:

$$7 - 4 = 8 - 5 = 9 - 6 = 10 - 7 = \ldots$$

f) Předpokládali jsme, že při odčítání jest menšenec > menšitele. Je-li však menšenec = menšiteli na př. 5 — 5, není žádného zbytku; chtějíce však přece vyznačiti, že jsme odčítali, možno psáti 5 — 5 = 0 a nullu považovati za zbytek; podobně 7 — 7 = 0; 13 — 13 = 0.

Rozdíl dvou stejných čísel jest nulla. Tím nabyla nicka nového významu a to význam čísla (početního výsledku), kdežto dosud značila nedostatek jednotek některého řádu.

Z rozdílu 5 — 5 = 0 plyne: 5 = 5 + 0 = 0 + 5 t. j. sčítanec 0 nemění velikost součtu.

Rovná-li se součet jednomu sčítanci, jest druhý sčítanec = 0.

*) Jako samozřejmé možno vynechati, co jest v závorkách [ ] hranatých.

g) Je-li odčítati více čísel na př. 5 a 3 od 15, značíme a počítáme takto: $15 - 5 - 3 = 10 - 3 = 7$ t. j. odečteme nejprvé číslo prvé a od zbytku číslo druhé. Takové odčítání sluje posloupné. Ježto $15 - 3 - 5 = 15 - 5 - 3 = 15 - 8$, jest α) pořádek menšitelů libovolný, a β) jest lhostejno odečísti součet rázem*) neb po sčítancích (t. j. jednotlivé sčítance posloupně).

h) Je-li odčítati 8 od čísla 15 a k rozdílu 10 přičísti, značíme a počítáme takto: $15 - 8 + 10 = 7 + 10 = 17$ a pravíme, že od 15 jest 8 odčítati a 10 přičísti posloupně. Ježto

$$15 + 10 - 8 = 15 - 8 + 10 = 17,$$

jest pořádek výkonů sčetných a odčetných lhostejný.

Dle toho bude $10 - 12 + 7 = 10 + 7 - 12 = 5;$
$10 - 12 + 2 = 10 + 2 - 12 = 0.$

Ježto $\mathbf{7} + 3 - 3 = \mathbf{7}$ a $\mathbf{7} - 3 + 3 = \mathbf{7}$, lze tvrditi:

Číslo se nemění, přičteme-li a odečteme-li posloupně *totéž*. Sčítání a odčítání jsou výkony protivné; ruší se částečně neb zcela.

Cvičení: **1.** *a*) $8 + ? = 13$, *b*) $15 + ? = 24$ *c*) $28 + ? = 45$. *d*) Napiš úkoly *a*), *b*), *c*) ve formě rozdílu**).

2. Napiš *a*) 5, *b*) 13, *c*) 27 ve formě rozdílu.

3. Vykonej co naznačeno: *a*) 1 zl. — 20 kr. = ? *b*) 2 *kg* — 48 *dkg* = ? *c*) 5 *m* — 7 *dm* = ? *d*) 0·9 — 0·4 *e*) 0·8 — 0·04.

4. Jest určiti rázem (z pouhého pohledu — bez vypočítávání), který z těchto rozdílů jest větší.

a) $7 - 4$ a $5 - 4$, *b*) $9 - 5$ a $9 - 3$, *c*) $25 - 13$ a $29 - 13$, *d*) $42 - 27$ a $42 - 19$.

5. Jest to možno i u těchto rozdílů:
a) $27 - 19$ a $33 - 27$, *b*) $17 - 8$ a $23 - 16$, *c*) $14 - 8$ a $\mathbf{114} - \mathbf{108}$?

6. Jest určiti velikosť těchto číselných tvarů: *a*) $3 - 3$, *b*) $3 - 0$, *c*) $3 + 0$, *d*) $0 - 0$, *e*) $0 + 0$, *f*) jest $3 + 0 = 30$? *g*) $30 - 0 = 3$?

7. Jmenuj — stem počínaje — řadu čísel o 1, 2, ... 10 se menšících.

8. Podobně — počínaje 99ti — čísla menší o 2, 3, 4 . . . 10.

9. Podobně — počínaje 98mi — čísla menší o 3, 4, 5 . . . 10.

---

*) Jest někdy s výhodou: na př. $35 - 6 - 9 = 35 - 15 = 20$.

**) Úlohy tyto řešíme lehko doplňováním do desítek na př. *a*) $8 + \underbrace{2 + 3}_{5} = 13$; *b*) $15 + \underbrace{5 + 4}_{9} = 24$; *c*) $28 + 2 + 15 = 45$; aneb dle *g*): *a*) $13 - 5 = 13 - 3 - 2$, *b*) $24 - 9 = 24 - 4 - 5$; *c*) $45 - 28 = 45 - 20 - 5 - 3$, později $= 45 - 20 - 8 = 17$.

10. Jmenuj řadu čísel — počínaje číslem 294 — menšících se o 10, 20 .... 90.

Jest vypočítati, co zde naznačeno:

11. *a*) 24 — 4 — 10, *b*) 78 — 50 — 3, *c*) 25 — 8 — 7, *d*) 54 — 7 — 7, *e*) 43 — 10 — 3 — 6, *f*) 43 — 13 — 6, *g*) 66 — 46 — 2, *h*) 66 — 40 — 8, *i*) 115 — 15 — 30.

12. Rovněž*) *a*) 24 — 6, *b*) 78 — 53, *c*) 43 — 19, *d*) 66 — 48, *e*) 175 — 42, *f*) 143 — 38, *g*) 34 — 19, *h*) 34 — 15, *i*) 0·73 — 0·49, *k*) 0·56 — 0·37.

13. *a*) 13 — 3 + 7, *b*) 13 + 7 — 3, *c*) 23 + 2 — 15, *d*) 8 — 10 + 5, *e*) 8 + 3 + 7 — 6 — 2, *f*) 23 — 3 + 15 — 5.

14. Oč jest *a*) **43** — 6 + 26 > **43**, *b*) **52** — 38 + 8 < **52**, *c*) **2** — 3 + 13 > **2**, *d*) **8** — 9 + 2 < **8**?

Odčítání písemné.

Majíce čísla víceciferná odčítati, píšeme pro snazší přehled stejnorodé jednotky v sloupec a odčítáme nejprvé nejnižší jednotky, pak vyšší atd., na př.: § 10.

$$\begin{array}{rr} & 758 \\ + & -\,326 \\ \text{Zkouška} & \underline{\quad 432} \\ & 758 \end{array}$$

a vyslovujeme 6 a **2** jest 8; 2 a **3** = 5; 3 a **4** = 7.

Kdyby se v některém sloupci v menšenci jednotek nedostávalo, přičteme k němu 10 týchž jednotek a k menšiteli 1 jednotku vyšší, čímž rozdíl zůstane nezměněn, na př.:

$$\begin{array}{rr} & 472 \\ & -\,254 \\ \text{Zkouška} & \underline{\quad 218} \\ & 472 \end{array}$$

a vyslovujeme 4 + **8** = 12; tím jsme v menšenci přičtli 10 J a proto počítáme dále 6 (nikoliv 5) + **1** = 7; tím jsme přičetli ku menšiteli 1 D = 10 J a rozdíl se tím nezměnil; dále 2 a **2** = 4.

Podobně určíme rozdíl dvou čísel desetinných. Ježto stejnorodé jednotky píšeme v sloupec, stojí i desetinné tečky pod sebou, na př.:

$$\begin{array}{r} 8{\cdot}35 \\ -\,4{\cdot}62 \\ \hline 3{\cdot}73 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34{\cdot}275 \\ -\,8{\cdot}19 \\ \hline 26{\cdot}085 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 547{\cdot}3 \\ -\,74{\cdot}532 \\ \hline 472{\cdot}768 \end{array}$$

---

*) Počítej dle vzoru: 33 — 8 = ?; **33** — 3 = **30**; 30 — 5 = **25** a vyslovuj toliko 33, 30, 25 a konečně rázem 33 — 8 = 25; neb 67 — 32 = ?; **67** — 30 = **37**; 37 — 2 = **35** a vyslov 67, 37, 35, aneb 54 — 39 = ? **54** — 30 = **24**; 24 — 9 = **15** a vyslov 54, 24, 15.

Dodatek: **1.** Ze dvou rovnic lze odčítáním stran vytvořiti rovnici třetí, na př.

$$
a)\quad \begin{array}{rcl}
12 & = & 12 \\
-5 & = & -5 \\
\hline
\underbrace{12-5}_{7} & = & \underbrace{12-5}_{7}
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
b)\quad \begin{array}{rcl}
13 & = & 10+3 \\
-5 & = & 3+2 \\
\hline
13-5 & = & 10+3-3-2
\end{array}
$$

2. Z rovnosti a nerovnosti možno učiniti odečtením stran nerovnosť. Kdy směru protivného a kdy směru stejného?

$$
a)\quad \begin{array}{rcl}
10 & = & 10 \\
-7 & > & -5 \\
\hline
\underbrace{10-7}_{3} & < & \underbrace{10-5}_{5}
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
b)\quad \begin{array}{rcl}
9 & > & 8 \\
-4 & = & -4 \\
\hline
\underbrace{9-4}_{5} & > & \underbrace{8-4}_{4}
\end{array}
$$

Cvičení*): **1.** Jest určiti rozdíl dvou sousedních čísel této řady: 534, 339, 187, 1745, 3489, 12541, 38735.

2. Které číslo jest od 402753 odčítati, aby zbylo 83549?

3. Kolik jest přidati ku 12876, aby číslo vzrostlo na 41256?

4. Sčítanec součtu 1248 jest 755; jest vyhledati sčítanec druhý.

5. Oč jest součet $74354 + 42147 >$ *a*) součtu, *b*) rozdílu čísel 19879, 94746?

6. Který z rozdílů $(40275 - 28739)$, $(40275 - 32893)$ jest větší a oč?

7. Od kterého čísla jest odčítati 1573, aby rozdíl rovnal se rozdílu $(734 - 485)$?

8. Od čísla 85542 jest odečísti *a*) sčítance $(6493 + 884 + 29379)$ posloupně, *b*) součet rázem, jakž vedle naznačeno; vyslovuj 9, 13, 16 a **6** jest 22; 9, 17, 26 a **8** jest 34; 6, 14, 18 a **7** jest 25; 11, 17 a **8** jest 25; 4 a **4** jest 8.

$$
\begin{array}{r}
85542 \\
-\ 6493 \\
-\ 884 \\
-\ 29379 \\
\hline
48786
\end{array}
$$

9. Odčítej podobně od čísla *a*) 127843 součet $(70794 + 457 + 9316)$, *b*) 1444444 součet $(85679 + 179708 + 1261)$.

10. Oč jest $2354 > 1773$ a oč < 2935? V jakém vztahu jest číslo prvé k ostatním?

11. Kolikrát možno posloupně**) odčítati *a*) 37 od 148, *b*) 678 od 2373 a kolik zbude?

12. Jak vysoko budeme se nalézati, sestoupíme-li s výše 145 *m* o 87 *m*, na to vystoupíme o 135 *m* a konečně sestoupíme o 69 *m*?

13. Praha měla v roce 1880 177.026, v roce 1890 182.530 obyvatelů; oč vzrostl počet obyvatelstva za tu dobu?

---

*) Zkoušku jest konati jednak sčítáním [menšitele a rozdílu], jednak odčítáním [rozdílu od menšence].

**) Viz § 9 *g*).

14. Oč jest lehčí víd. libra ($\doteq$ 56 *dkg*) než 1 *kg*?

15. Píšeme-li dnes datum *a*) 23. září, *b*) 12. února 1896, za kolik dní bude nový rok?

16. Strýc se narodil v r. 1853 a synovec v r. 1875; *a*) oč jest strýc starší, *b*) oč bude starší za 10 let?

17. Kdosi byl v roce 1848 stár 19 let; jak stár byl v r. 1893?

18. Kupec prodal zboží za 1173 zl. a získal tím 245 zl.; zač je koupil?

19. Jest určiti rozdíl dvou sousedních čísel této řady:

$$0{\cdot}4,\ 1,\ 0{\cdot}25,\ 0{\cdot}087,\ 8{\cdot}05,\ 37{\cdot}507,\ 3{\cdot}79.$$

20. Ke kterému číslu jest přidati součet $(35{\cdot}08 + 0{\cdot}59 + 9{\cdot}7)$, abychom obdrželi 100?

21. Které číslo jest odčítati od 78·35, aby zbytek se $=$ 52·867?

22. Kolik jest přidati ku 37·593, aby součet $=$ 100?

23. Oč jest součet

$$(0{\cdot}584567 + 0{\cdot}37978) > \text{rozdílu } (1{\cdot}05232 - 0{\cdot}086754)?$$

24. Vykonej, co naznačeno: $17{\cdot}4583 - (2{\cdot}6728 + 0{\cdot}539 + 0{\cdot}0487)$ *a*) posloupným odčítáním, *b*) rázem (viz př. 8).

25. Vykonej, co naznačeno:

$$a)\ 0{\cdot}7254 - 0{\cdot}097 + 54{\cdot}76 + 375{\cdot}4 - 283{\cdot}45,$$

b) kolik bylo v celku k prvému číslu přičteno a kolik odečteno? *c*) oč bylo více přičteno?

26. Měsíční služné osoby *A* jest 216·67 *K*, *B* o 25·94 *K* menší a *C* o 37·5 *K* větší než *B*; jest vypočítati úhrnný příjem všech tří osob.

27. Zahradník měl 24057 sazenic bukových, 769 lipových, 5708 hrušových, 17058 dubových. Z těch mu vyhynulo 985 bukových a 2868 dubových. Kolik mu jich v celku zbylo?

28. Bývá s výhodou cvičiti odčítání i v tom případě, kdy menšenec jest psán pod menšitel na př. 7546 — 3285

— 3285	— 0·0937	Napište sami několik
7546	12·481	takových cvičení.
4261	12·3873	

Násobení.

a) Máme-li sčítati několik stejných sčítanců na př. $4 + 4 + 4$, **§ 11.** možno tento součet stejných sčítanců napsati kratšeji co součin 4×3, což čteme: čtyři násobeny třemi; čtyři třikrát. Číslo, jež se kladlo několikrát co sčítanec, píše se jednou a zove se násobenec (multiplicand); číslo určující, kolikrát sčítanec byl kladen, píše se vedle a zove se násobitel (multiplicator); mezi obě se klade ležatý křížek $\times$ neb tečka dole psaná. Tvar 4×3 aneb $4 . 3$ zove se součin (product); ježto $4 \times 3 = 12$, jest i 12 součin a to vypočtený (nemá tvar součinu), kdežto 4×3 je součin naznačený. (4×3 jest součin už svým tvarem.*) Dá se 13 napsati tvarem součinu?

Dle toho značí $7 \times 4 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$.

Součin jest součet stejných sčítanců.

Součin vypočítáváme posloupným sčítáním; avšak častým opakováním pamatujeme si součiny čísel jednociferných dle t. zv. násobilky a počítáme rázem $7 \times 4 = 28$, $8 . 6 = 48$ atd. Takový výkon početní zoveme násobení. „$\times$" aneb tečka dole psaná jest znakem násobení.

Násobiti číslo jedno druhým, jest položiti číslo prvé sčetně (co sčítanec) tolikrát, kolik má číslo druhé jednotek.

Patrno, že násobenec může býti číslem pojmenovaným na př. $5m + 5m + 5m + 5m = 5m \times 4 = 20m$, že součin má totéž jméno co násobenec a že násobitel, ježto značí počet sčítanců, nemůže býti pojmenovaný.

Součin zove se též násobek (násobné); tak jest $5m \times 4$, čtyřnásobek $5m$; 6×7 jest 6tinásobné sedmi, aneb sedminásobek 6ti.

b) Napišme 12 jednotek ve 3 řádky a 4 sloupce:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Sčítajíce dle řádků, obdržíme $12 = 4 \times 3$; sčítajíce dle sloupců obdržíme $12 = 3 \times 4$; z toho plyne, že $4 \times 3 = 3 \times 4$.

Součin se nemění, přemístíme-li násobenec a násobitel; proto je zoveme i stejným jménem „činitel" a pravíme: Pořádek 2 činitelů jest libovolný. Násobení je výkonem záměnným.

Kdyby však hoření jednotky byly pojmenované na př. m, tu by bylo psáti takto: $12m = 4m \times 3 = 3m \times 4$. Zde lze tedy jen číselné hodnoty násobence a násobitele zaměniti.

c) $5 \times 4 \times 3$ znamená posloupné násobení, t. j. že jest násobiti 5 čtyřmi a součin (5×4) třemi. Jest tudíž $5 \times 4 \times 3 = 20 \times 3 = 60$. Týž součin obdržíme, změníme-li pořádek činitelů, tak že

$$5 \times 4 \times 3 = 5 \times 3 \times 4 = 3 \times 5 \times 4 = \ldots \text{ atd.} = 60.$$

Pořádek činitelů jest i zde libovolný.

d) $(5 \times 4) + (5 \times 3) = (5 + 5 + 5 + 5) + (5 + 5 + 5) = 5 \times 7$;

$$(5 \times 4) \times 3 = (5 \times 4) + (5 \times 4) + (5 \times 4) = \left.\begin{matrix} 5 + 5 + 5 + 5 \\ + 5 + 5 + 5 + 5 \\ + 5 + 5 + 5 + 5 \end{matrix}\right\} = 5 \times 12$$

a naopak: $5 \times 12 = 5 \times 4 \times 3$.

*) $4 \times 3 = 4 \cdot 4 + 4 = 12$; 12 je tu napsáno *a*) tvarem součinu, *b*) tvarem součtu, *c*) jedním číslem (tvar nejjednodušší).

Jaká výhoda plyne z toho výkladu pro úlohy: $(5\times 3)+(5\times 7)=?$ $(29\times 4)+(29\times 6)=?$ $(35\times 12)+(35\times 8)=?$ $17\times 18=?$ (počítej $17\times 3=51$; $51\times 6=306$; $17\times 18=306$); $24\times 35=?$

e)
$$\begin{aligned}5\times 2&=10\\ 5\times 4&=20\\ 5\times 6&=30\\ 5\times 8&=40\\ 10\times 2&=20\\ 15\times 2&=30\\ 20\times 2&=40\end{aligned}$$

Ze součinů těchto patrno, že, zvětšíme-li jeden činitel 2, 3, 4 ... krát, zvětší se tím i součin 2, 3, 4 ... krát.

Chtějíce násobiti součin, násobme jeden činitel (možno-li s výhodou).

1) $5\times 2=5+5$

2) $5\times 6=5+5+5+5+5+5$

3) $10\times 6=10+10+10+10+10+10$

Srovnejte činitele těchto součinů a ukažte, proč jest součin 3) šestkrát větší součinu 1)?

f) Z výkladu *a*) patrno, že $4\times 1=1\times 4=4$. 1 jako činitel součinu nemění; možno tudíž činitel 1 vždy vynechati i připsati. Možno též sčítanec 1 vynechati? Jest $5+1=5$?

Dále patrno, že $0\times 3=0+0+0=0$.

3×0 nemá však dle výkladu *a*) významu. Má-li však poučka *b*) platiti i zde, musí $3\times 0=0\times 3=0$; je-li jeden činitel součinu nulla, jest i součin nulla.

K tomu jsme oprávněni i následující úvahou:

$3\times 3=9$
$3\times 2=6$ t. j. o 3 méně,
$3\times 1=3$ „ „ „ „
$3\times 0=?$ o 3 méně jest $=0$.

Nullu jako sčítanec možno vynechati; možno ji vynechati též jako činitel?

Dodatek: **1.**
$$\begin{array}{r}3\times 2=6\\ 5=5\\ \hline \underbrace{(3\times 2)}_{30}\times 5=\underbrace{6\times 5}_{30}\end{array}$$

Rovnost se neporuší rovným činitelem.

Ze dvou rovnic možno násobením stran vytvořiti rovnici třetí.

2. Z rovnosti a nerovnosti možno násobením vytvořiti nerovnost téhož směru na př.:
$$\begin{array}{r}8=8\\ 5>3\\ \hline \underbrace{8\times 5}_{40}>\underbrace{8\times 3}_{24}\end{array}$$

Cvičení: **1.** Co znamená 12×5, 5×7, $0{\cdot}4\times 3$, $0{\cdot}07 . 5$, $7S\times 5$, $3T\times 8$, $6D\times 3$?

2. Jak lze kratšeji psáti součty: $125+125$, $43+43+43+43$, $0{\cdot}12+0{\cdot}12+0{\cdot}12$?

3. Jmenujte některé násobky čtyř, pěti, šesti. Jest některé číslo násobkem i čtyř, i pěti, i šesti (společným násobkem)?

4. Přesvědč se o správnosti rovnic

$$12 \times 8 = 8 \times 12; \quad 7\,kg \times 12 = 12\,kg \times 7.$$

5. Vypočítejte součiny tyto co nejvýhodněji

a) $5 \times 7 \times 20$, *b*) $9 \times 6 \times 5$, *c*) $12 \times 7 \times 5$.

6. Součin *a*) 5×13 jest násobiti 2ma, *b*) 18×4 pěti, *c*) 7×15 čtyřmi.

7. Jest sečísti s výhodou součiny

a) $(8 \times 13) + (8 \times 7)$, *b*) $(49 \times 18) + (49 \times 2)$, *c*) $(8 \times 78) + (8 \times 22)$.

8. Který ze součinů jest větší *a*) 15×21 neb 15×27, *b*) 8×12 neb 10×8, *c*) 7×12 neb 8×13, *d*) 5×7 neb 5×14, *e*) 5×8 neb 10×24.

9. Jest vypočítati tyto součiny: 0×5, 4×0, 0×0, $3 \times 7 \times 0$, $6 \times 0 \times 7 \times 4$.

10. Jest násobiti čísla dvouciferná 35, 27, 48, 53, 79 ... jednocifernými 5, 8, 9, 7mi ... dle vzoru $47 \times 3 = ?$ $40 \times 3 = 120$, $7 \times 3 = 21$, $120 + 21 = 141$ a vyslovovati pouze 120, 21, 141 (odůvodni postup ten).

Schází-li násobenci do nejbližší desítky 1 neb 2, možno násobiti s výhodou takto: $78 \times 7 = 80 \times 7 - 2 \times 7 = 560 - 14 = 546$.

11. Jest násobiti čísla od 1 do 10 *a*) 11ti, *b*) 12ti, *c*) 15ti (velká násobilka).

Písemné násobení čísly celými.

§ 12. *a*) Násobení jednociferným činitelem celým: na př. 637×4 znamená:

$$\begin{array}{rl}
637 & \text{I budeme sčítati zkráceně:} \\
+\ 637 & 7\,J \times 4 = 28\,J = \ldots\ldots\ldots .\ 2\,D + 8\,J \\
+\ 637 & 3\,D \times 4 = 12\,D = \ldots\ldots\ 1\,S + 2\,D \\
+\ 637 & 6\,S \times 4 = 24\,S = \ldots\ 2\,T + 4\,S \\
\hline
 & \text{Úhrnem} \ldots\ 2\,T + 5\,S + 4\,D + 8\,J = 2548.
\end{array}$$

Píšeme-li částečné součiny pod násobenec a to stejnojmenné jednotky v sloupec, jest úprava kratší:

$$\begin{array}{r}
637 \times 4 \\
\hline
28 \\
12 \\
24 \\
\hline
2548
\end{array}$$

A vykonáme-li současně sčítání z hlavy, jest úprava nejjednodušší tato: $\dfrac{637 \times 4}{2548}$, při čemž vyslovujeme toliko **28***) *J*, 12, **14**, 24, **25**; ostatní řády mimo nejnižší nevyslovujeme, vědouce, že, násobíme-li řád o

*) 8 vyslov s důrazem a napiš; 2 pamatuj.

stupeň vyšší, jest i součin o stupeň vyšší. Násobitel jest si pamatovati a jednotky násobencovy sledujeme okem.

Podobně $\begin{array}{r} 0{\cdot}409 \times 3 \\ \hline 1{\cdot}227 \end{array}$ | $9t \times 3 = 27t = 7t + 2s$; $0s \times 3 = 0s$; $0s + 2s = 2s$; $4d \times 3 = 12d$; $12d = 2d + 1J$, vyslovujíce: **27** tisícin, **2**, **12**.

Z toho zároveň vidno, že J, D, S ... d, s, t ... násobeny jednotkami dají opět (jedno- až dvouciferné) J, D, S ... d, s, t ... tedy: Násobíme-li jednotkami, má součin týž (nejnižší) řád co násobenec. I pravíme zkrátka: násobíme-li jednotkami, řád se nemění.

b) Násobení řádových jednotek řádovými jednotkami.

Převedením součinu na součet pochopíme snadno tyto výsledky:

$1 \times 10 = 10$	$1 \times 100 = 100$	$1 \times 1000 = 1000$
$10 \times 10 = 100$	$10 \times 100 = 1000$	$10 \times 1000 = 10000$
$100 \times 10 = 1000$	$100 \times 100 = 10000$	$100 \times 1000 = 100000$
. . .	. . .	. . .
$0{\cdot}1 \times 10 = 1$	$0{\cdot}1 \times 100 = 10$	$0{\cdot}1 \times 1000 = 100$
$0{\cdot}01 \times 10 = 0{\cdot}1$	$0{\cdot}01 \times 100 = 1$	$0{\cdot}01 \times 1000 = 10$
$0{\cdot}001 \times 10 = 0{\cdot}01$	$0{\cdot}001 \times 100 = 0{\cdot}1$	$0{\cdot}001 \times 1000 = 1$
. . .	. . .	. . .

t. j.: Řádové jednotky násobeny 10ti, 100, 1000 ... zvýší se o 1, 2, 3 ... stupně (násobilka místních hodnot).

c) Násobení čísel **10ti, 100, 1000** ... Rozvedeme-li součin 547×10 v součet, dá $7J \times 10 = 7D$, $4D \times 10 = 4S$, $5S \times 10 = 5T$; tudíž $547 \times 10 = 5470$.

Podobně $0{\cdot}496 \times 10 = 4{\cdot}96$; z desetin se staly jednotky. Řada cifer (obraz číselný) se nezměnila, jen řád se o 1 zvýšil.

Součin 547×100 převeden na sčítání dá $7J \times 100 = 7S$, $4D \times 100 = 4T$, $5S \times 100 = 5Dt$, tudíž $547 \times 100 = 54700$.

Podobně $0{\cdot}496 \times 100 = 49{\cdot}6$; ze setin se staly jednotky. Obraz číselný se nezměnil, jen řád se zvýšil o 2 stupně atd.

A naopak: $470 = 47 \times 10$; $5300 = 53 \times 100$ atd. (roznásobení = dáti číslu tvar součinu).

Násobíme-li číslo dekadické (ať celé neb desetinné), ***10ti, 100, 1000 ..., zvýší se řád číselný o 1, 2, 3 ... stupně.*** Obraz číselný se nezmění.

d) Násobení několika D, S, T ... na př. $258 \times 30 = ?$ Tu jest učiniti součet ze 30 sčítanců; rozdělme těchto 30 sčítanců do skupin po desíti; každá skupina jest $258 \times 10 = 2580$; tudíž $258 \times 30 = 2580 \times 3$ aneb $= 258 \times 3 \times 10 = 7740$. Je-li násobiti třiceti, násobíme *třemi* D t. j. násobíme třemi a řád součinu zvýšíme o 1 stupeň; tedy $\dfrac{258 \times 30}{7740}$.

Podobně $0{\cdot}62 \times 40 = 0{\cdot}62 \times 4 \times 10 = 2{\cdot}48 \times 10 = 24{\cdot}8$, kratšeji $= 6{\cdot}2 \times 4 = 24{\cdot}8$ aneb rázem $\dfrac{0{\cdot}62 \times 40}{24{\cdot}8}$.

Aneb $437 \times 500 = 437 \times 5 \times 100 = 218500$;

rázem: $\dfrac{437 \times 500}{218500}$.

Několika (2, 3 . . . 9) D, S, T atd. (na př. 20ti, 500, 7000 . . .) se násobí jako číslem jednociferným, při čemž dlužno řád zvýšiti dle násobilky místních hodnot.

d) Násobení číslem dvou- a víceciferným.

342×24 znamená položiti 342 sčetně (co sčítanec) 24krát. Rozdělíme-li součet ten ve dvě skupiny 1) po dvaceti a 2) po čtyřech, obdržíme

$$\underset{6840}{\underline{342 \times 20}} + \underset{1368}{\underline{342 \times 4}} = \begin{array}{r} 6840 \\ \underline{1368} \\ 8208 \end{array}$$

což krátce píšeme takto:

$$a)\ \begin{array}{l} \underline{342 \times 24} \\ 684. \\ \underline{1368} \\ 8208 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{l} \underline{342 \times 24} \\ 1368 \\ \underline{684.} \\ 8208 \end{array}$$

Násobíme tedy 4mi J a 2ma D a částečné součiny sečteme.

Částečné součiny píšeme (dle násobilky místních hodnot) na příslušná místa pod násobenec*); pořádek násobení jest libovolný.

Podobně vyložíme násobení číslem trojciferným.

$$a)\ \begin{array}{r} \underline{586 \times 316} \\ 3516 \\ 586. \\ \underline{1758..} \\ 185176 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{r} \underline{586 \times 316} \\ 1758.. \\ 586. \\ \underline{3516} \\ 185176 \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{r} \underline{5{\cdot}86 \times 316} \\ 1758 \\ 58{\cdot}6 \\ \underline{35{\cdot}16} \\ 1851{\cdot}76 \end{array}$$

Vyslovování děje se jak v *a*) vyloženo. Řád se určí jen při prvém součinu na př. v *a*) $6J \times 6J = 36J$, v *b*) $6J \times 3S = 18S$, v *c*) $6s \times 3S = 18J$. Ostatně se řídíme pravidlem: Násobíme-li řád (aneb řádem) o 1 vyšším, jest i součin o stupeň vyšší. Desetinné tečky v částečných součinech při *c*), jakož i tečky v *a*) a *b*) se později vynechávají.

*) Tím cvičíme stále násobilku místních hodnot.

Jiné příklady:

d) 374 × 403	*e*) 890 × 13	*f*) 6700 × 350
1496 . .	89 .	201 . .
1122	267	335
150722	11570	2345000

Násobíme-li číslem víceciferným, násobíme všemi řádovými jednotkami, píšeme částečné součiny na příslušná místa a sečteme je.

Cvičení: **1.** Určte předem kolik asi nejvyšších jednotek a jaké má součin *a*) 248 × 3, *b*) 254 × 8, *c*) 4074 × 7, *d*) 8754 × 6, *e*) 37698 × 9 a pak vykonejte násobení.

2. Jest určiti předem α) kolik a jaké nejmenší, β) kolik asi a jaké nejvyšší jednotky má součin *a*) 0·297 × 3, *b*) 0·0483 × 7, *c*) 0·00078 × 5, *d*) 14·756 × 8 a γ) vykonejte násobení.

3. Cvičte násobilku místních hodnot dle těchto vzorů:

$$\mathbf{d} \times \mathbf{D} = \mathbf{J},\quad d \times S = D,\quad d \times T = S \;\ldots$$
$$s \times D = d,\quad \mathbf{s} \times \mathbf{S} = \mathbf{J},\quad s \times T = D \;\ldots$$
$$t \times D = s,\quad t \times S = d,\quad \mathbf{t} \times \mathbf{T} = \mathbf{J} \;\ldots$$
$$J \times D = D,\quad J \times S = S,\quad J \times T = T \;\ldots$$
$$D \times D = S,\quad D \times S = T,\quad D \times T = Dt \;\ldots$$
$$S \times D = T,\quad S \times S = Dt,\quad S \times T = St \;\ldots$$

4. Vykonejte, co jest naznačeno: 127 × 100, 0·29 × 100, 1·4 × 100, 5·387 × 100, 350 × 1000, 0·047 × 1000, 2·53 × 1000, 12·4735 × 1000.

5. Kterak se změní *a*) číslo celé, připíšeme-li k němu 1, 2, 3 nicky v pravo (v levo), *b*) číslo desetinné, pošineme-li desetinnou tečku o 1, 2, 3 . . . místa v pravo.

6. Vykonejte, co jest naznačeno: 3057 × 40, 500 × 90, 0·059 × 70, 2·5 × 30, 450 × 700, 0·00743 × 600, 1·045 × 800, 2·5 × 900, 45 × 7000, 370 × 5000, 2·07 × 3000, 0·128 × 4000, 5000 × 3000, 2·4087 × 50000.

7. Roznásobte tato čísla tak, aby 1 činitel byl dekadickou jednotkou: 40, 360, 43500, 7200, 3000, 57000, 24 = 2·4 × 10 = 0·24 × 100, 13·5, atd.

8. Vykonejte násobení: 7463 × 347, 7056 × 825, 690 × 6740, 3008 × 78 se zkouškou (výměna činitelů).

9. Vykonej, co jest naznačeno: 0·043 × 72, 385 × 0·4057, 74·65 × 409, 0·007489 × 6700.

10. V těchto součinech počni násobiti nejprvé 8mi, pak 6ti, a konečně 9ti: 3075 × 968, 82·94 × 986, 6·7045 × 698, 689 × 92300, 168·7 × 896.

11. Oč jest součin *a*) $2703 \times 670 > 987 \times 807$,
b) $537 \times \mathbf{954} > 63 \times \mathbf{954}$?

12. Jest srovnati součin čísel 74·5 a 247 s 75násobným součtem týchž čísel.

13. Jest vypočítati součet součinů **4705** $\times$ 739, **4705** $\times$ 46, **4705** $\times$ 215 *a*) posloupně, *b*) rázem (s výhodou).

14. Jest vypočítati součiny $125 \times 627 \times 8$, $37{\cdot}28 \times 28 \times 75$ *a*) posloupně, *b*) s výhodou.

15. Jest v součinech*) 24×5967, $270 \times 4835{\cdot}4$, $405 \times 27{\cdot}375$, násobitel ponechati na straně levé a vykonati násobení.

16. Je-li *kg* cukru za 45 kr., zač je *a*) 1 *q* (viz přídavek), *b*) 275 *kg*?

17. Je-li *l* vína za 67 kr, zač je *a*) 1 *hl*, *b*) 184 *l*?

18. Je-li *m* sukna za 4 zl. 8 kr., zač je 3070 *m*?

19. Je-li *hl* žita za 7 zl. 48 kr., zač je *a*) 27 *hl*, *b*) 308 *hl*?

20. Lidumil, chtěje rozdati 138 zl., daroval každému ze 138 osob 94 kr. Kolik mu zbylo a kolik by musil přidati, kdyby každému chtěl dáti 1·06 zl.?

21. Kdosi chtěl poděliti 27 osob penězi; kdyby byl dal každému 39 kr., bylo by se mu právě tolik nedostávalo, kolik mu zbylo, dal-li každému 35 kr. Kolik peněz měl?

22. Obchodník obilím koupil 176 *hl* obilí za 1496 zl. a prodal *hl* po 8 zl. 95 kr. Kolik získal?

23. Kolik stržil rolník celkem, odprodav od svého statku 26 *ha* pole po 875 zl., 38 *ha* lesa po 278 zl. 50 kr. a 13 *ha* pastvin po 127 zl. 90 kr.?

24. Rovník jest rozdělen na 360 stejných dílů (stupňů); kolik zeměp. mil má rovník, je-li 1 stupeň 15 mil dlouhý?

25. Kolik obyvatelstva má země, jejíž plocha = 37698 km^2, žije-li na 1 km^2 průměrem 127 obyvatelů?

26. Kolo mající v obvodu 2·35 *m*, otočilo se v běhu svém 300krát. Jak velikou dráhu uběhlo?

27. Rolník prodal do roka 807 *hl* žita po 7 zl. 86 kr., 270 *hl* pšenice po 12 zl. 97 kr. a 358 měr zemčat po 80 kr. Kolik mu zbylo, zaplatil-li z toho za práci 2367 zl. 58 kr. a daní 285 zl. 63 kr.?

28. Úředník béře měsíčně 134 zl. služného; platí-li 48 zl. čtvrtletně za byt, měsíčně 70 zl. za stravu a 10 zl. za posluhu, 120 zl. ročně za oděv, 87 zl. knihkupci a 100 zl. za různé potřeby; kolik ročně ušetří?

---

*) Činitel méněciferný volíme v ž d y za násobitel.

Výhody při násobení.

§ 13.

a) Je-li v násobiteli na k r a j n í m*) místě 1, možno násobenec považovati za částečný součin, na př.:

$$\begin{array}{r} 3{\cdot}76 \times 41, \\ 1504 \\ \hline 154{\cdot}16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 759. \times 13, \\ 2277 \\ \hline 9867 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 834.. \times 157 \\ 4170. \\ 5838 \\ \hline 130938 \end{array}$$

b) Je-li násobitel 11, netřeba částečné součiny vůbec psáti, nýbrž ihned jednotky násobencovy posloupně sčítati dle vzoru:

$$\begin{array}{r} 3948 \times 11 \\ 3948 \\ \hline 43428 \end{array}$$

tedy $3948 \times 11 = 43428$

vyslovujíce: **8**; **12**; 5, **14**; 10, **13**; **4****).

c) Je-li jedna cifra (aneb i dvojskupina) násobitele násobek druhé cifry, možno vyvinouti částečný součin násobením příslušného částečného součinu na př.:

$$\begin{array}{r} 359 \times 48 \\ \hline 1436. \times 2 \\ 2872 \\ \hline 17232 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7289 \times 3662 \\ \hline 14578 \times 3 \\ 43734 \times 6 \\ 262404 \\ \hline 26692318 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 786 \times 735 \\ \hline 5502.. \times 5 \\ 27510 \\ \hline 577710 \end{array}$$

d) Jsou-li v násobiteli kromě nejnižšího místa samé d e v í t k y. Na př. $7483 \times 996 = ?$ Zvýšíme-li násobitel na 1000, klademe tím v součinu o 4 sčítance (7483×4) více, proto nutno 7483×4 odečísti

Tedy
$$\begin{array}{r} 1000 - 4 \\ \hline 7483 \ldots \times 996 \\ -\,29932 \\ \hline 7453068 \end{array}$$

Podobně
$$\begin{array}{r} 100000 - 20 \\ \hline 3967 \ldots\ldots \times 99980 \\ -\,7934. \\ \hline 396620660 \end{array}$$

e) Jsou-li v násobiteli***) kromě nejvyššího místa samé d e v í t k y.

$$\begin{array}{r} 500 - 1 \\ \hline -\,4653 \times 499 \\ 23265.. \\ 2321847 \end{array}$$

Ježto $499 = 500 - 1$, vzato násobením pětisty o 1 sčítance (4653) více, proto nutno jej odečísti.

Aneb

$$\begin{array}{r} 40000 - 10 \\ \hline -\,7286. \times 39990 \\ 29144 \ldots . \\ \hline 291367140 \end{array}$$

*) Stojí-li 1 uprostřed, možno též užiti té výhody, avšak úprava částečných součinů dle místních hodnot bývá nemožná. Touž »nehodu« má tato výhoda, je-li násobitel desetinným číslem.

) Ježto násobilka 11 jest snadná, násob též jako číslem jednociferným: **88; **44**, **52**; 99, **104**; 33, **43**.

***) V číselném jeho obrazu.

f) Má-li násobitel kromě nejvyššího i nejnižšího místa samé devítky; na př.

$$
\begin{array}{r}
6000 - 3 \\
38{\cdot}05 \times 5997 \\
\hline
114{\cdot}15 \times 2 \\
22830\ldots \\
\hline
228185{\cdot}85
\end{array}
$$

g) Je-li násobiti 2735×48, ušetříme sčítání částečných součinů, násobíme-li posloupně

$$
\begin{array}{r}
2735 \times 6 \times 8\text{*)} \\
\hline
16410 \times 8 \\
\hline
131280
\end{array}
$$

Násob dle toho týž násobenec 35, 49, 56ti . . .

Cvičení. 1. Vypočítej s výhodou, co jest naznačeno: **1.** 7495×18, $3{\cdot}876 \times 71$, 5709×194, $37{\cdot}48 \times 601$.

2. 3642×11, $74{\cdot}504 \times 11$, 7586×11.

3. $82{\cdot}47 \times 28$, 4873×93, $12{\cdot}58 \times 246$, 4805×735.

4. 4732×97, 8×69, $14{\cdot}07 \times 398$, 2584×9993, $73{\cdot}897 \times 6999$, 87596×4998, $35{\cdot}24 \times 99600$.

5. 3450×36, 2700×77, $79{\cdot}58 \times 54$.

Dělení.

§ 14. *a*) Je-li v násobení $4 \times 3 = 12$ součin a 1 činitel znám, možno určiti činitel druhý. I tážeme se: Kolikráte jest násobiti 4, aby součin byl $= 12$? Což možno krátce psáti $4 \times ? = 12$ aneb $4 \times x = 12$. Takovému početnímu výkonu říkáme dělení a sice 12 dělíme 4mi. Aby však obě daná čísla (12, 4) stála hned na prvých místech, píšeme dělení takto: $12 : 4 = ?$ a výsledek dělení (podíl) píšeme na stranu pravou: $12 : 4 = 3$. I čteme 12 děleno čtyřmi jest 3; 12 na čtyři (díly rozděleno) dá 3; 4 ve 12 jest 3krát (obsaženo). Číslo, které jest děliti, zove se dělenec (dividend), kterým se dělí dělitel (divisor) a výsledek dělení podíl (quotient); znakem dělení jest dvojtečka „ : “; tvar číselný (12 : 4) zoveme naznačený podíl**).

Děliti jedno číslo (12) druhým (4), jest vyhledati číslo třetí (3), jež by ze druhého násobením (4×3) učinilo číslo prvé (12).

b) $12 : 4 = ?$ a $4 \times ? = 12$ značí tudíž týž početní výkon —

---

*) Zasadíme-li po 6 stromech do 8 řad, kolik jsme jich spotřebovali? Položíme-li součet 6 sčítanců 8krát, kolikrát jest sčítanec položen?

**) Začasté značíme podíl ve formě zlomkové, píšíce dělitel pod dělenec a oddělujíce je přímkou t. zv. lomítkem na př.: $\frac{2}{3}$ t. j. dvě děleno (lomeno) třemi, aneb 2 třetiny.

dělení*). Příslušné odpovědi jsou: $12 : 4 = 3$; $4 \times 3 = 12$. Z toho patrno, že **d ě l e n e c j e s t s o u č i n z d ě l i t e l e a p o d í l u.** Dělitel a podíl jsou činitele dělence. I možno říci: **D ě l i t i j e s t z e s o u č i n u a j e d n o h o č i n i t e l e v y h l e d a t i č i n i t e l d r u h ý.**

Dělenec jest tedy násobek dělitele. Dělencem může býti tudíž jen násobek čísel 1, 2, 3 . . . Dle poučky: Dělitel $\times$ podíl $=$ dělenec možno vykonati zkoušku při dělení, na př.: $56 : 8 = 7$, ježto $8 \times 7 = 56$.

c) Z rovnice $4 \times 3 = 12$ mohli jsme vytvořiti též dělení:

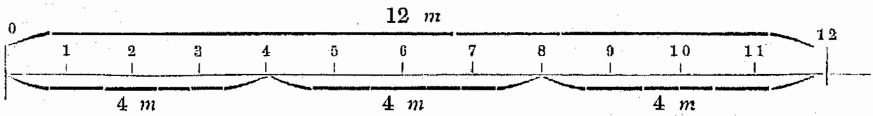
$$? \times 3 = 12 \quad \text{či} \quad 12 : 3 = ?$$

a srovnáme-li odpověď $12 : 3 = 4$
s předešlou $12 : 4 = 3$,
vidno, že podíl a dělitel lze zaměniti. Nikoliv však dělenec a dělitel. Jest tedy dělení výkonem záměnným?

d) Z násobení $4m \times 3 = 12m$ možno učiniti d v o j e dělení: dle *a*) $4m \times ? = 12m$ či $12m : 4m = 3$, a dle *c*) $? \times 3 = 12m$ či $12m : 3 = 4m$.

V prvém případě jest dělenec i dělitel pojmenovaný a podíl bezejmenný; tu jest na místě otázka: Kolikrát jsou $4m$ ve $12m$ obsaženy? Takové dělení zove se m ě ř e n í; dělenec jest násobkem dělitele.

V druhém případě jest dělenec a podíl pojmenovaný, dělitel bezejmenný. Hoření otázka jest zde nemístna; i čteme: $12m$ jest rozděliti na 3 díly, či: jak veliký jest 3 díl ze $12m$; dělení to zoveme r o z d ě l o v á n í; podíl jest několikrý (alikvotní) díl dělence.



Obr. 6.

Dělení čísel bezejmenných možno považovati i za měření i za rozdělování; $12 : 4 = ?$ možno čísti 1) kolikrát jest 4 ve 12 obsaženo a 2) jak veliký jest 4. díl ze 12.

e) Podíl $24 : 8 = 3$ vyhledáme rázem na základě násobilky. Neznajíce násobilku, mohli bychom otázku „kolikrát jest 8 obsaženo ve 24“, zodpovídati též p o s l o u p n ý m odčítáním: $24 - 8 = 16$, $16 - 8 = 8$, $8 - 8 = 0$. 8 možno 3krát posloupně od 24 odečísti, jest tudíž 8 ve 24 obsaženo 3krát.

Podíl $23 : 4$ nelze dle násobilky vyhledati, neboť 23 není ná-

*) Výkonu $4 \times ? = 12$ říkáme též roznásobení, či rozklad v činitele; 12 jest rozložiti v činitele $4 \times ?$

sobkem čtyř; hledáme-li však podíl $23 : 4$ posloupným odčítáním, seznáme, že 4 ve 23 obsaženo 5krát, že však 3 zbudou, že tudíž $23 = 4 \times 5 + 3$, 23 se dá tedy rozložiti na 2 sčítance, z nichž jeden jest násobkem čtyř (20) a druhý menší dělitele ($3 < 4$), což krátce vyznačujeme takto: $\underline{23 : 4 = 5}$
3

a čteme 4 ve 23 jsou obsaženy 5krát a zbudou 3, aneb: 23 děleno 4mi dá 5 [za podíl] se zbytkem 3.

Dělení takové zoveme částečné, ježto jen část dělence byla rozdělena; podíl 5 jest neúplný a část druhá, kterou více rozděliti nelze, zove se zbytek; *zbytek* jest < dělitele. Při dělení částečném jest

dělenec = děliteli × podílem (neúpl.) + zbytek.

Dělenec — zbytek = děliteli × podílem.

Neúplný podíl můžeme učiniti úplným, naznačíme-li, co jest ještě vykonati, tedy $23 : 4 = 5 + \frac{3}{4}$; 5 jest neúplný podíl a (5 + 3 čtvrtiny) úplný podíl.

Tímto rozšířením odpadá tvrzení, že dělenec musí býti násobkem podílu. (Viz § 32. *e*).

f) Ježto $3 \times 1 = 3$, jest $3 : 3 = 1$ a $3 : 1 = 3$.

Tak i $5 : 5 = 1$; a $5 : 1 = 5$ atd

Číslo samo sebou děleno dá za podíl 1. Číslo jednotkou děleno se nemění, t. j. dá za podíl samo sebe. Ke každému číslu možno připsati dělitel 1 a naopak dělitel 1 možno prostě vynechati.

Možno-li 1 jako dělenec vynechati*)? Jest $1 : 5 = 5$?

g) Ježto $0 = 0 \times 1$ a $0 = 0 \times 2$, $0 = 0 \times 3$ jest $\begin{cases} 0 : 0 = 1 \\ 0 : 0 = 2 \\ 0 : 0 = 3 \end{cases}$ a $\begin{cases} 0 : 1 = 0 \\ 0 : 2 = 0 \\ 0 : 3 = 0 \end{cases}$

0 : 0 nemá určitou velikost; jest = 1, jindy 2, 3 atd.**)
0 dělená libovolným číslem dá 0.

Jest $3 : 0 = 3$? jest $3 : 0 = 0$? (učiň zkoušku).

h) Ježto $3 \times \mathbf{4} = 12$ a $12 : \mathbf{4} = 3$, lze tvrditi: Číslo se nezmění, násobíme-li a dělíme-li je posloupně týmž číslem.

Tedy $(3 \times 4) : 4 = 3$; tak i $(8 : 4) \times 4 = 8$.

Násobení a dělení jsou výkony protivné

k) $6 : 3 = 2$, $12 : 3 = 4$, $18 : 3 = 6$ | Kolikrát zvětšíme (zmenšíme) dělenec [při stejném děliteli], tolikrát se zvětší (zmenší) podíl.

*) Opakuj: Kdy možno z početních úkonů 1 vynechati.

**) Neodporuje poučka tato poučce *f*): Číslo samo sebou děleno... Jest 0 číslo? Některé poučky platí i tehdy, když místo čísla píšeme 0, jiné nikoliv.

$12 : 2 = 6$ $12 : 4 = 3$ $12 : 6 = 2$ . . .	Kolikrát zvětšíme (zmenšíme) dělitel [při stejném dělenci], tolikrát se zmenší (zvětší) podíl.
$10 : 2 = 5$ $20 : 4 = 5$ $30 : 6 = 5$ . . .	Zvětšíme-li (zmenšíme-li) dělenec i dělitel stejněkrát, zůstane hodnota podílu nezměněna.

Dodatek: **1.**

$$\frac{\begin{matrix}36 = 9 \times 4 \\ 4 = 4\end{matrix}}{\underbrace{36 : 4}_{9} = \underbrace{(9 \times 4) : 4}_{9}}$$

Ze dvou rovnic možno dělením stran vytvořiti rovnici třetí.

2.

$$\frac{\begin{matrix}36 > 16 \\ 4 = 4\end{matrix}}{\underbrace{36 : 4}_{9} > \underbrace{16 : 4}_{4}}$$

Nerovnosť dělena jsouc rovností*) se neruší.

3.

$$\frac{\begin{matrix}36 = 36 \\ 12 > 9\end{matrix}}{\underbrace{36 : 12}_{3} < \underbrace{36 : 9}_{4}}$$

Rovnosť dělena jsouc nerovností mění se v nerovnosť směru protivného.

Cvičení: **1.** Naznač arithmetickými značkami tyto úlohy: *a*) kolikrát jest 12 obsaženo ve 48, 6 v 18, 5 v 60 atd.? Odpověď: $48 : 12 = ?$ *b*) 15 na 3, 40 na 10, 24 na 6 atd. Odpověď: $15 : 3$.

2. Které z výkonů početních jsou záměnné a které nikoliv? Které části**) početních výkonů možno zaměniti? Které nikoliv?

3. Jest pouze naznačiti: *a*) Kolikrát jest 5 *kg* obsaženo ve 20 *kg*, 12 *l* v 72 *l*, 13 v 52, 27 v 999 atd., *b*) 7mý díl ze 63, 17tý díl ze 102 *m*, 37mý díl z 999 atd.

4. Urči posloupným odčítáním, kolikrát jest 12, 13, 17, 21 v 84 obsaženo a s jakým zbytkem?

5. Čísla 72, 68, 64, 63, 56, 54 . . . jest děliti čísly 9, 8, 7, 6 . . .

6. Napište 4, 12, 7 . . . tvarem součtu, rozdílu, součinu a podílu.

7. Napište několik podílů; jsou všechny 3 části libovolny?

8. Vypočítejte tyto podíly: $54\,m : 9$, $54\,J : 9$, $54\,S : 9$ . . ., $54\,s : 9$, $54\,t : 9$ . . , $540 : 9$, $5400 : 9$ . . ., $0{\cdot}54 : 9$, $0{\cdot}054 : 9$ . . ., $48\,S : 6\,S$, $12\,D : 3\,D$ . . ., $2400 : 800$, $270 : 90$ . . .

*) To jest strany nerovné děleny stranami rovnými dají opět strany (podíly) nerovné.

**) Součet, sčítanec, rozdíl, menšenec . . . atd.

9. *a*) Které číslo 6ti děleno, dá podíl 15? *b*) Které číslo 9ti děleno, dá podíl 4 se zbytkem 5? *c*) Čím jest násobiti 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 36, aby součin byl 360?

10. Kolikrát jsou 3 obsaženy v součinech 3×4, 3×7, $3 \times 2 \times 5$, 3×10, 6×5, $3 \times 3 \times 5$, 9×5, 12×5, 18×2 atd. *b*) Naznač úlohy ty; na př. $(3 \times 4) : 3 = 4$, $6 \times 5 : 3 = (3 \times 2 \times 5) : 3 = 2 \times 5$. Dělíme-li součin jedním činitelem, obdržíme součin ostatních činitelů za podíl.

11. Srovnej podíly: 6 : 3, 12 : 3 a 12 : 6.

12. *a*) Kolikrát jest 25 obsaženo v číslech 50, 75, 100, 200, 300, 175, 250, 325 atd. *b*) Kolikrát jest 25 obsaženo v číslech 230, 340, 265, 485 atd. a jaký jest zbytek?

13. Kolikrát jest 125 obsaženo ve 250, 500, 750, 375, 625, 875, 1000 atd.

14. Jest vyhledati 2., 3. . . . 9. díl jakéhokoliv čísla dvou- a tříciferného. Návod: Rozlož dělenec na známé násobky a děl po částech na př. *a*) 6. díl z 84 jest 14 (60 : 6 = 10, 24 : 6 = 4), *b*) polovice ze 750 jest 350, 25, **375** (t. j. 700 : 2 = 350, 50 : 2 = 25), *c*) třetina z 83 jest 2 *D*, 7, **27** a 2 zbudou (t. j. 6 *D* : 3 = 2 *D*, 21 : 3 = 7), *d*) sedmina z 854 jest 1 *S*, 2 *D*, 2 *J*, **122** (7 *S* : 7 = 1 *S*, 14 *D* : 7 = 2 *D*, 14 : 7 = 2).

15. Jmenujte čísla, jež dělena *a*) 8mi, dají zbytek 3, *b*) 12ti zbytek 5, *c*) 6ti zbytek 3.

16. Čím jest děliti 39, aby byl podíl 7 a zbytek 4?

17. Čím jest děliti 38, aby byl zbytek 2?

Písemné dělení.

a) Dělení číslem jednociferným.

5. Je-li číslo víceciferné děliti jednociferným, rozdělujeme je po částech, počínajíce nejvyššími jednotkami, na př.:

$$\begin{array}{lll} \overset{S}{8}49 : 3 = \overset{S}{2}83, & \text{t. j.: } 8\,S \text{ na 3 díly dá } 2\,S \text{ se zbytkem } 2, \\ \underline{24} & 2\,S + 4\,D = 24\,D \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad 8\,D, \\ =\underline{9} & \qquad\qquad\quad 9\,J \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad 3\,J. \\ \;= & \end{array}$$

Při krátkém cviku počítáme $\overset{S}{8}4\overset{J}{9} : 3 = \overset{S}{2}83$ a vyslovujeme $S : J = S$; 3 v 8 2krát, zbudou 2; ve 24 8krát, v 9 3krát.

$$\overset{S}{\overparen{41}}02 : \overset{J}{7} = \overset{S}{5}86$$

Podobně $\overset{S}{\overparen{41}}02 : 7 = 586$ t. j. $4\,T$ nelze rozděliti na 7 dílů*).

60 — $41\,S : 7 = 5\,S$ se zbytkem 6,

42 — $6\,S + 0\,D = 60\,D$ rozd. na 7 dílů dá $8\,D$ se zbytkem 4.

$=$ — $4\,D + 2\,J = 42\,J$ rozd. na 7 dílů dá $6\,J$.

Kratšeji píšeme $\overset{S}{\overparen{41}}02 : \overset{J}{7} = \overset{S}{5}86$ a mluvíme: $S : J = S$; 7 v 41 **5**krát, zbude 6; v 60 **8**krát zbudou 4; v 42 **6**krát.

$0{\cdot}\overset{s}{\overparen{28}}38 : 6 = 0{\cdot}0473$ t. j. $28\,s : 6 = 4\,s$ se zbytkem 4,

43 — $4\,s + 3\,t = 43\,t$; děl. 6 dá $7\,t$ se zbytkem 1.

18 — $1\,t + 8\,dt = 18\,dt$; děl 6 dá $3\,dt$.

$=$

Kratšeji: $0{\cdot}\overset{s}{\overparen{28}}38 : \overset{J}{6} = 0{\cdot}0\overset{s}{4}73$; $s : J = s$; 6 v 28 **4**krát, zbude 4; ve 43 **7**krát, zbude 1; v 18 **3**krát.

$\overset{T}{\overparen{14}}800 : 4 = \overset{T}{3}700$; $14\,T : 4 = \mathbf{3}\,T$ se zbytkem 2,

$28 : 4 = \mathbf{7}$; ježto poslední částečný podíl (7) jsou S, nutno připsati v podílu ještě 2 nully.

$\overset{T}{\overparen{35}}091 : 7 = \overset{T}{5}013$; $35\,T : 7 = 5\,T$; $0\,S : 7 = 0\,S$; $9\,D : 7 = 1\,D$ se zbytkem 2; $21 : 7 = 3$.

$\overset{D}{\overparen{29}}3 : 4 = \overset{D}{7}3{\cdot}25$ — Zde jest neúplný podíl 73 a zbytek 1; proměníme-li však zbytek v řád nižší $1\,J = 10\,d$, můžeme v dělení pokračovati, což v podílu nutno vyznačiti desetinnou tečkou.

13

10

20

Takto by však se mohlo státi, že dělení nebéře konce, na př.:

$\overset{D}{\overparen{41}}6$ zl. : $7 = 59{\cdot}428\ldots$ zl.

66

30

20

60

4

což naznačíme tečkami a počítáme tolik desetinných míst, co je jich třeba.

Zkouška záleží dle § 14. *c*) v tomto:

$$59{\cdot}428 \times 7 + 0{\cdot}004 = 416\,?$$

---

*) V tom případě budeme krátce říkati: T nejsou **dělitelny**. Nejvyšší **dělitelné** jednotky jsou zde S a sice 41. J budou v podílu nejvyššími jednotkami S.

b) Dělení dekadických jednotek 10ti, 100, 1000 . . .

1 : 10 = 0·1	0·1 : 10 = 0·01	
10 : 10 = 1	0·01 : 10 = 0·001	Dělíme-li 10ti, sníží se
100 : 10 = 10	0·001 : 10 = 0·0001	řád dekadických jedno-
1000 : 10 = 100	. . .	tek o 1 stupeň.
. . .		
1 : 100 = 0·01	0·1 : 100 = 0·001	
10 : 100 = 0·1	0·01 : 100 = 0·0001	Dělíme-li stem, sníží
100 : 100 = 1	0·001 : 100 = 0·00001	se řád dekadických
1000 : 100 = 10	. . .	jednotek o 2 stupně.
. . .		

Dělíme-li 10ti, 100, 1000 . . ., sníží se řád dekadických jednotek o 1, 2, 3 . . . stupně.

c) Dělení čísel 10ti, 100, 1000 . . .

$\overset{S}{4}37 : 10 = \overset{D}{4}3{\cdot}7$ t. j. $4S : 10 = 4D$; $3D : 10 = 3J$; $7J : 10 = 7d$.

$\overset{D}{4}3{\cdot}7 : 10 = \overset{J}{4}{\cdot}37$ t. j. $4D : 10 = 4J$; $3 : 10 = 3d$; $7d : 10 = 7s$.

$\overset{S}{4}37 : 100 = \overset{J}{4}{\cdot}37$ t. j. $4S : 100 = 4J$; $3D : 100$.

$\overset{J}{4}{\cdot}37 : 100 = 0{\cdot}0437$ atd.

Z příkladů těchto patrno, že, dělíme-li 10ti, 100, 1000... sníží se řád dělencův o 1, 2, 3... stupně, avšak obraz číselný se nezmění. Snížení řádu vykoná se posunutím desetinné tečky.

d) Dělení čísel několika *D*, *S*, *T* . . .

4720 : 20 = ? Násobilku 20ti neznáme, nelze tedy 20ti rázem děliti; i suďme takto: Rozdělíme-li přímku (číslo, veličinu atd.) na 10 stejných dílů a každý díl opět na 2, je tím přímka rozdělena na 20 dílů. Máme-li děliti 20, dělíme *posloupně* 10ti a 2ma, t. j. snížíme řád o 1 stupeň a dělíme 2ma; aneb krátce řečeno: dělíme dvěma *D*.

Tedy: $4720 : 20 = 472 : 2 = 236$ aneb kratšeji $\overset{T}{4}720 : \overset{D}{2}0 = \overset{S}{2}36$ t. j. určíme nejprvé řád nejvyšších jednotek v podílu dle (*c*) a na to dělíme dvěma.

Nejvyšší jednotky podílů určí se dělením nejvyšších [dělitebných] jednotek dělence nejvyššími jednotkami dělitele. 1720 : 20 dá toliko *D* na nejvyšším místě podílu, ježto *T* nejsou dělitebny.

I počítáme $\overset{S}{\overparen{17}}20 : \overset{D}{2}0 = \overset{D}{8}6$.

Tak i $0{\cdot}\overset{S}{\overparen{17}}2 : \overset{D}{2}0 = 0{\cdot}00\overset{t}{8}6$;

$\overset{D}{\overparen{141}} : \overset{D}{30} = \overset{J}{4}{\cdot}7$; $\quad 0{\cdot}0\overset{t}{\overparen{141}} : \overset{D}{30} = 0{\cdot}000\overset{dt}{47}$;

$\overset{S}{\overparen{196}}8 : \overset{T}{6000} = 0{\cdot}\overset{d}{3}28$; atd.

N ě k o l i k a D, S, T . . . d ě l í m e, s n í ž í m e-li ř á d d ě l e n c ů v d l e c), (t. j. u r č í m e n e j v y š š í ř á d p o d í l u) a d ě l í m e p o č t e m D, S, T.

e) D ě l e n í č í s l e m d v o u- a v í c e c i f e r n ý m.

$\overset{T}{\overparen{10}}440 : \overset{D}{24} = ?$ α) Považujme dělení to za rozdělování: Rázem rozděliti nedovedeme; rozdělujme po částech, počínajíce nejvyššími jednotkami; tedy $104\,S : 24$; ani to rázem nedovedeme; zaokrouhlíme-li však dělitel v nejbližší dekadickou jednotku, dovedeme dělení vykonati $104\,S : 20 = 5\,S$*) i soudíme, že i $104\,S : 24$ bude asi $5\,S$. Násobením $24 \times 5\,S$ bychom se však přesvědčili, že $24 \times 5\,S > 104\,S$ a že tedy $104\,S : 24 = 4\,S$.

$\underline{}$
8

Tím jest stanovena nejvyšší jednotka podílu i její řád. I počítáme podobně dále:

$$
\begin{array}{l}
\overset{T}{\overparen{10}}440 : \overset{D}{24} = \overset{S}{4}35 \\
96 \\
\overline{84} \\
72 \\
\overline{120} \\
120 \\
\overline{=}
\end{array}
$$

Zbytek ($8\,S$) proměníme v řád nižší $8\,S + 4\,D = 84\,D$ a rozdělujeme dále; řád druhého částečného podílu bude; též o stupeň nižší, i netřeba ho stanoviti (leč s počátku pro cvik) $84\,D : 24 = 3\,D$; zbytek $\underline{12}\,D$ proměníme opět v řád nižší a pokračujeme v rozdělování.

β) Považujme $\overset{T}{\overparen{10}}440 : \overset{D}{24}$ za m ě ř e n í.

Kdyby dělitel byl zaokrouhlen ve 20, dělili bychom $10\,T : 2\,D$ a tak bychom našli nejvyšší řád podílu $= S$. I počítáme:

$$
\begin{array}{l}
\overset{T}{\overparen{10}}440 : \overset{D}{24} = \overset{S}{4}35; \\
=84 \\
120 \\
=
\end{array}
$$

$10 : 2 = 5$, avšak $104 : 24 = \mathbf{4}$, ježto $24 \times 4 = 96$, což h n e d odčítáme. Dále proměníme zbytek v řád nižší: 2 v 8 4krát, ale 24 v 84 jen **3**krát, 12 a **2** jest 14; 6, 7 a **1** jest 8; proměníme v řád nižší atd.

---

*) Tím jest určen aspoň ř á d nejvyšších jednotek v podílu a to z nejvyšších dělitelných jednotek dělence (T) a nejvyšších jednotek v děliteli D; $T : D = S$.

D S d
323·059 : 473 = 0·6783
3925
614
1419
=

$D : S = d$; 473 zaokrouhlíme v 500; 5 ve 32 6krát; 18 a **2** = 20; 42, 44 a **9** = 53; 24, 29 a **3** = 32; proměníme v řád nižší; 5 v 39 **7**krát atd., zbude 614 > 473, tudíž obsaženo **8**krát; (přetrhneme*) a odečteme dělitel) 3 a **1** = 4; 7 a **4** = 11; 5 a **1** = 6 atd. Bystřejší počtář pozná však hned, že jest 3925 : 473 = 8krát a to tím, že při zkoušce násobí nejen nejvyšší jednotku 4S, nýbrž i sousední: tedy 4·7S × 8 ≐ 38 . .

Kdyby dělenec vykazoval zbytek, vedeme si jak v § 15. *a*) naznačeno, na př.:

S D D
3458 : 73 = 47·36 . . .
538
270
510
72

Zkouška: 47·36 × 73
3315·2
142·08
0·72 = zbytek
3458·00 = dělenci.

Sčítání, odčítání, násobení a dělení zovou se výkony základní.

Cvičení: **1.** Vykonej dělení: 9180 : 5, 4·018 : 7, 123·75 : 9, 0·6048 : 8, 7583 : 9, 0·0134 : 4 (se zkouškou).

2. Děl 10ti, 100, 1000 tyto dekadické jednotky: D, T, d, t, S, s, Dt, St, dle vzoru: D : 1000 = s neboť s × 1000 = D.

3 Děl 10ti, 100, 1000 tato čísla: 538, 7400, 0 43, 13, 35000, 0 035 (se zkouškou).

4. Jest vykonati dělení: 828 : 9, 8280 : 900, 0·0828 : 90, 2634 : 600, 2·634 : 60, 3674 : 2000, 36·74 : 200, 4365 : 50, 436·5 : 5000, 60·32 : 800, 60320 : 8000 (se zkouškou).

5. V podílech 734 : 23, 12754 : 523. 0·478 : 27, 348 63 : 423, 405843 : 8743 jest učiniti toliko řád a počet nejvyšších jednotek.

6. Podíly tyto jest určiti až do jednotek (zkouška násobením [dělitele a podílu]); 590450 : 930, 170385 : 37, 837459 : 46, 1100658 : 137, 36998400 : 4920, 40779255 : 7531, 3958151710 : 56470

7. V těchto podílech jest určiti nejvýš 4 místa (t. j. 4 řádové jednotky) (zkouška jako v 6.) 327 : 47, 59·532 : 820, 7·833501 : 943, 0·0936 : 273.

8. Vypočítej tyto podíly (zkoušku dělením [dělence podílem]), 29008 : 37, 154224 : 112, 410452 : 749, 128520 : 765, 2755032 : 483, 1054212 : 708.

9. Kterým číslem jest násobiti 483, aby součin byl 245364.

10. Kolikrát lze 2074 posloupně odečísti od 4301476?

*) Nechť každý žák přetrhne v podílu číslici 7!

11. Násobte 1297 číslem 27 a součin dělte 27.

12. Číslo 1459478 jest děliti číslem 4754 a podíl násobiti číslem 4754.

13. Jest děliti číslem 63 *a*) 603918, *b*) 60·3918

14. 239·778 jest děliti *a*) číslem 462, *b*) číslem 519.

15. Napiš číslo, jež 47mi děleno dá 348 za podíl a 37 za zbytek.

16. Kterým číslem jest *a*) 225, *b*) 59135 děliti, abychom obdrželi podíl *a*) 17, *b*) 635 a zbytek *a*) 4, *b*) 90. Návod: *a*) Odečteme-li zbytek 4 od dělence 225, jest 221 násobek 17ti; hledané číslo jest tedy 221 : 17 = 13 neboť 225 : 13 = 17 se zbytkem 4; rozřeš dle toho *b*).

17. 22440 jest *a*) děliti posloupně 3mi, 4mi, 5ti, *b*) jak možno rázem obdržeti poslední podíl?

18. Oč jest podíl 245364 : 483 $>$ podílu 29008 : 784?

19. Oč jest 28200 *a*) zmenšiti, *b*) zvětšiti, aby ve zbytku bylo 58 beze zbytku obsaženo?

20. Kolik *m* látky po 96 kr. obdržíme za 54 zl. 72 kr.?

21. Kolik osob spolčilo se ku společnému podniku, připadlo-li na každého účastníka 58 zl. z úhrnného zisku 28130 zl.?

22. Obchodník koupil 374 *m* sukna za 1002 zl. 32 kr. Kolik získal na metru, prodal-li jej za 3·05 zl.?

23. Koupil-li kdosi 256 *kg* zboží za 286·72 *K* a prodal je za 322·56 *K*, kolik získal na 1 *kg*?

24. Počíná-li *a*) obyčejný rok, *b*) přestupný rok nedělí, kterým dnem počne rok budoucí?

25. Vinárník koupil 47 *hl* vína po 27·35 zl., 28 *hl* po 30 zl. 8 kr., a 22 *hl* po 35 zl. 80 kr. Kolik platil průměrně za 1 *hl*?

26. Aby posádka 18000 mužů byla na 4 dny zásobena chlebem, přivezen tento na 80 vozech, z nichž každý měl 450 třiliberních pecnů; kolik bylo počítáno denně na 1 muže?

27. Obchodník prodal z balíku sukna 32 *m* po 3 zl. 78 kr.; zbytek prodával dráže o 22 kr. na 1 *m* a tím utržil za veškeré sukno 232 zl. 96 kr. Kolik *m* bylo v balíku?

28. Kupec koupil 387 *kg* zboží za 1033 zl.; dovozného zaplatil 12 zl. 29 kr.; zač bude prodávati 1 *kg*, chce-li na zboží 100 zl. získati?

29. Jak rychle kráčel posel (t. j. kolik *km* urazil za hodinu), byl-li denně 6 hodin na pochodu, a vykonal-li za týden 168 *km*?

30. Vinárník smíchal 231 *l* vína po 50 kr. se 165 *l* po 38 kr.; zač bude 1 *l* směsi?

Početní výhody. *a*) 57 × 25 = ? Násobíme-li místo 25 stem, zvětšíme součin 4krát; aby se hodnota součinu nezměnila, jest 100násobek 4mi děliti; i bude 57 × 25 = 5700 : 4 = 1425. 25ti se [číslo] násobí, dělíme-li stonásobek [čísla] 4mi. **§ 16.**

b) $346 \times 125 = ?$ Ježto $125 \times 8 = 1000$, bude 346×1000 8krát větší hledaného součinu a tudíž $346 \times 125 = 346000 : 8 = 43250$. 125ti se [číslo] násobí, dělíme-li 1000násobek [čísla] 8mi.

c) Je-li $475 : 25$, jest s výhodou, násobiti dělenec i dělitel 4mi. I bude $475 : 25 = 1900 : 100 = 19$. Aneb: Vezmeme-li ze 475 stý díl (4·75), jest tento 4krát menší hledaného podílu. I jest stý díl 4mi násobiti; tedy $475 : 25 = 4·75 \times 4 = 19$. 25ti se dělí, násobíme-li stý díl dělence 4mi.

d) Podobně ukážeme, že $1625 : 125 = 1625 \times 8 : 1000$ aneb $1·625 \times 8 = 13$. 125ti se dělí, násobíme-li 1000cí díl dělence 8mi.

e) Rozdělíme-li číslo, přímku ... na 5 stejných dílů a pětinu opět na 3 stejné díly, rozpadne se celek na 15 stejných dílů. Z toho plyne, že úlohu $195 : 15 = ?$ možno počítati takto: $195 : 5 = 39$, $39 : 3 = 13$ či krátce $195 : 15 = 39 : 3 = 13$. Dle toho jest
$468 : 900 = 4·68 : 9 = 0·52$; $11200 : 7000 = 11·2 : 7 = 1·6$ atd.

Cvičení. Jest počítati s výhodou, co naznačeno jest.

1. 25×25, 39×250, 3750×25, 279×125, 8000×125, $0·25 \times 25$, $3·8 \times 25$, $2·48 \times 125$.

2. $475 : 25$, $3250 : 250$, $14250 : 125$, $13125 : 125$, $27·4 : 25$, $3·2 : 25$, $482·75 : 250$, $284·25 : 125$, $3671·5 : 1250$.

3. $16092 : 18$, $19124 : 28$, $29·312 : 64$, $1406·3 : 49$, $41160 : 56$, $63·495 : 45$.

Násobení číslem desetinným.

§ 17. *a*) Násobení desetinnými jednotkami 0·1, 0·01, 0·001...

Jest násobiti $4 \times 0·1 = ?$ Možno však 4 položiti „desetinkrát“ jako sčítanec? To nemá významu. Mohu položiti sčítanec toliko 1, 2, 3krát... (Násobitel jest vždy celým číslem), avšak nikoliv $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$krát.

Význam součinu $4 \times 0·1$ poznáme z následující úvahy: Pozorujme součiny

$4 \times 1000 = 4\,T$ $4 \times 100 = 4\,S$ $4 \times 10 = 4\,D$ $4 \times 1 = 4\,J$	Každý následující součin jest 10krát menší: Zmenšíme-li násobitel 10krát, zmenší se i součin 10krát. Bude tedy
$4 \times 0·1 = 4\,d = 4 : 10$ $4 \times 0·01 = 4\,s = 4 : 100$ $4 \times 0·001 = 4\,t = 4 : 1000$	Násobíme-li 0·1nou, 0·01nou, 0·001nou..., snížíse řád [násobence] o 1, 2, 3... stupně*).

*) Totéž jest ukázati na jiných násobencích na př. $400 \times 0·1$, $400 \times 0·01$, $400 \times 0·001$ atd.

0·1nou, 0·01nou, 0·001nou násobiti, jest tolik, jako 10ti, 100em, 1000em děliti.

Urovnáme-li dekadické jednotky v řádek

$$\ldots\ T\quad S\quad D\quad J\quad d\quad s\quad t\ \ldots,$$

seznáme lehko dle vytčeného pravidla, ve kterou jednotku se násobenec promění, násobíme-li jinou dekadickou jednotkou. Tím jest násobilka místních hodnot rozšířena a doplněna.

Proč zavádíme násobitel 0·1, nemá-li významu?

1. Poučka: „Násobení jest výkonem záměnným“, platila by jen pro čísla celá; nyní platí i pro čísla desetinná; neboť $0·1 \times 4 = 4 \times 0·1$.

2. Je-li 1 *kg* zboží za 45 kr., zač jsou 2, 3, 4 ... *n* (několik) *kg*? Odpověď: za 45 kr. $\times$ 2, 45 kr. $\times$ 3, 45 kr. $\times$ 4 ..., 45 kr. $\times$ *n*. Z toho plyne pravidlo: Hodnotu mnohosti z hodnoty jednotky vypočítáme, násobíme-li cenu jednotky $\times$ počtem jednotek. Dle toho tedy je 0·1 *kg* za 45 kr. $\times$ 0·1 = 4·5 kr., což se shoduje s tím, že 0·1 *kg* = 10 *dkg* = 1 *kg* : 10.

b) Násobení několika desetinnými jednotkami.

$64 \times 0·3 = ?$ Ježto $0·3 = 0·1 \times 3$,

jest $64 \times 0·3 = 64 \times 0·1 \times 3 = 6·4 \times 3$.

Podobně $7·45 \times 0·3 = 0·745 \times 3$; $657 \times 0·04 = 6·57 \times 4$.

Násobiti několika *d*, *s*, *t* ... jest výkon dvojí: ***dělení*** 10ti, 100, 1000, (t. j. snížení řádových jednotek o 1, 2, 3 ... stupně) a ***násobení*** obrazem číselným.

Dle toho počítáme:

$$\begin{array}{l} \overset{s}{}\overset{d}{} \\ 4·63.\times 0·6 \\ \hline 2·778 \end{array} \qquad s \times d = t;\ \ 6 \times 3 = 18t \text{ atd.}$$

jako bychom násobili 6ti.

$$\begin{array}{l} 81·\overset{d}{7} \times 0·0\overset{s}{4} \\ \hline 3·268 \end{array} \qquad d \times s = t;\ \ 4 \times 7 = 28t\ \ \text{atd.}$$

Pro cvik v násobilce místních hodnot jest násobiti s počátku takto:

$$\begin{array}{l} 4·63.\times 0·6 = ? \\ \hline 2·778 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3s \times 6d = 18t = 1s + 8t \\ 6d \times 6d = 36s = 3d + 6s \\ 4J \times 6d = 24d = 2 \ \ + 4d \\ \hline \end{array}$$

při čemž se stejnojmenné jednotky ihned sčítají a součin napisuje jak obyčejně.

c) Násobení víceciferným číslem desetinným.

$127 \times 0·52 = ?$ Ježto $0·52 = 0·01 \times 52$,

jest $127 \times 0·52 = 127 \times 0·01 \times 52$.

Podobně $0·086 \times 0·52 = 0·086 \times 0·01 \times 52$.

Násobiti číslem desetinným jest výkon dvojí: určiti řádové jednotky v součinu a ***násobiti*** obrazem číselným.

Dle toho počítáme:

1) $127 . \times 0{\cdot}52$
$63{\cdot}5 . \; J \times d = d$*)
$2{\cdot}54 \; J \times s = s$*)
$66{\cdot}04$

2) $0{\cdot}086 . \times 0{\cdot}52$
$430 . \; t \times d = dt$*)
$172 \; t \times s = st$*)
$0{\cdot}04472$

3) $3{\cdot}46 \times 2{\cdot}08$
$6{\cdot}92 . .$
2768
$7{\cdot}1968$

4) $27{\cdot}5 . . \times 0{\cdot}064$
$1{\cdot}650 .$
1100
$1{\cdot}76$

5) $4800 \times 0{\cdot}7 = 3360.$
$336 .$

Ke kontrole služiž pokyn: Součin má tolik desetinných míst, co oba činitele dohromady, ač to v součinu není vždy zřejmo na př. 4) a 5). Při kterých výkonech se řád sníží?

Cvičení**): **1.** Jest určiti tyto součiny: $D . d$, $S . s$, $T . t$, $T . s$, $D . s = D . d : 10$, $S . dt = S . s : 100$, $d . d$, $d . s$, $d . t$, $s . d$, $s . s$, $s . t$ atd.

2. Taktéž: $4 \times 0{\cdot}03$, $0{\cdot}4 \times 0{\cdot}03$, $40 \times 0{\cdot}3$, $400 \times 0{\cdot}03$, $0{\cdot}4 \times 0{\cdot}3$, $0{\cdot}4 \times 0{\cdot}003$, $0{\cdot}04 \times 0{\cdot}03$, $0{\cdot}004 \times 0{\cdot}003$ atd.

3. *a*) Jaké nejnižší jednotky mají součiny: $38 \times 0{\cdot}4$, $24{\cdot}7 \times 0{\cdot}09$, $0{\cdot}35 \times 0{\cdot}7$, $0{\cdot}048 \times 0{\cdot}003$; *b*) urči nejvyšší jednotky součinů těch a kolik jich asi bude; *c*) vypočítej součiny ty.

4. Totéž: $248 \times 0{\cdot}14$***), $3{\cdot}57 \times 0{\cdot}25$, $0{\cdot}36 \times 7{\cdot}2$, $87500 \times 9{\cdot}3$, $5{\cdot}7 \times 6{\cdot}07$, $0{\cdot}237 \times 2{\cdot}5$.

5. Totéž: $85{\cdot}7 \times 0{\cdot}618$, $75600 \times 0{\cdot}0735$, $0{\cdot}074 \times 12{\cdot}3$, $42{\cdot}57 \times 1{\cdot}25$ (se zkouškou), $3{\cdot}075 \times 3{\cdot}075$, $417 \times 4{\cdot}17 \times 0{\cdot}0417$, $3{\cdot}1416 \times 0{\cdot}24 \times 5000$, $43 \times 0{\cdot}4 \times 30 \times 0{\cdot}5$.

6. V součinu $3{\cdot}75 \times 12{\cdot}4$ urči, ze kterých jednotek násobence a dělitele povstanou t, ze kterých s, d atd. Vypočti je, sečti a srovnej se součinem.

7. Je-li 1 *m* látky za 5·36 zl., zač je *a*) 0·25 *m* *b*) 4·85 *m*?

8. Je-li 1 *kg* kávy za 2·95 zl., zač je *a*) 2·08 *kg*, *b*) 45 *dkg*, *c*) 12 *kg* 30 *dkg*?

9. Vyseje-li se na 1 *ha* pole 1·85 *hl* žita, kolik se vyseje na 14·37 *ha*?

10. Obvod kruhu jest 3·1416krát větší průměru. Vypočítej obvod, je-li průměr *a*) 3·64 *m*, *b*) 2 *m* 5 *cm*.

---

*) Místo toho krátce říkáme: Násobíme-li desetinami, sníží se řád o 1 stupeň a píšeme o stupeň níže. Násobíme-li řádem sousedním, sníží (zvýší) se řád o 1 stupeň. Na konec ke kontrole určíme nejnižší řád v součinu z nejnižších řádů obou činitelů.

**) Výhod jest stále užívati.

***) Možno užiti výhody naznačené v § 13 *a*).

Dělení číslem desetinným.

a) Dělení desetinnými jednotkami. § 18.

$1 : 0{\cdot}1 = 10$	$10 : 0{\cdot}1 = 100$	$100 : 0{\cdot}1 = 1000$
$1 : 0{\cdot}01 = 100$	$10 : 0{\cdot}01 = 1000$	$1000 : 0{\cdot}001 = M.$
$1 : 0{\cdot}001 = 1000$	$10 : 0{\cdot}001 = 10000$	

Co zde napsáno pochopíme snadno, považujeme-li dělení za měření*): Kolikrát jest desetina v celku (= 10 desetin) obsažena? 10krát. Kolikrát setina v celku (= 100 setin)? 100krát atd.

Kolikrát jest desetina obsažena v 10? V 1 *J* 10krát, v 10 *J* tedy 100krát. Ve stu? V 1 *J* 10krát, ve 100 *J* 1000krát atd.

Z toho poznáváme:

Dělíme-li 0·1nou, 0·01nou, 0·001nou..., ***zvýší*** se řád [dělence] o 1, 2, 3 . . . stupně.

0·1nou, 0·01nou, 0·001nou . . . ***děliti*** jest tolik, jako 10ti, 100, 1000 . . . ***násobiti.***

O správnosti hořeních rovnic možno se přesvědčiti dle věty:

Dělenec = děliteli $\times$ podílem.

Dle této poučky možno i určiti podíl v těchto úlohách:

$1 : 0{\cdot}1 = ?$ Čím jest $\times\ 0{\cdot}1$, aby součin $= 1$? 10ti.
$1 : 0{\cdot}01 = ?$ „ „ $\times\ 0{\cdot}01$, „ „ $= 1$? 100.
$1 : 0{\cdot}001 = ?$ „ „ $\times\ 0{\cdot}001$, „ „ $= 1$? 1000.

Srovnáním těchto podílů přesvědčíme se též o správnosti toho, co bylo tvrzeno:

$1 : 1000 = 0{\cdot}001$	zmenšíme li dělitel 10krát, podíl se 10krát zvětší a tudíž $1 : 0{\cdot}1 = 10$;
$1 : 100 = 0{\cdot}01$	$1 : 0{\cdot}01 = 100$ atd.
$1 : 10 = 0{\cdot}1$	
$1 : 1 = 1$	

Seřadíme-li řádové jednotky v řadu

$$\ldots\ T\quad S\quad D\quad J\quad d\quad s\quad t\ \ldots$$

určíme snadno dle hořeního pravidla podíl, ať dělíme kteroukoliv jednotkou; dělíme-li desítkovou jednotkou, sníží se řád, dělíme-li desetinnou jednotkou, zvýší se řád; na př.:

$$\left.\begin{array}{l} J : T = t \\ J : t = T \end{array}\right\} \; T \times t = J$$

b) Dělení několika desetinnými jednotkami.

$42 : 0{\cdot}3 = ?$ Ježto $0{\cdot}3 = 0{\cdot}1 \times 3$, bude nám děliti 42 posloupně 0·1 a 3mi, čili 10ti násobiti a 3mi děliti; tedy $42 : 0{\cdot}3 = 420 : 3 = 140$; třemi desetinami děliti jest tudíž dvojí výkon: deseti násobiti a třemi

*) Dělitel jest pojmenovaný: 1 desetina, 1 setina atd.

děliti; tím se zvýší řád o 1 stupeň a dělí obrazem číselným; tedy krátce $\overset{D}{42} : \overset{d}{0·3} = \overset{S}{140}$; z D se stala S (o 1 stup.)

Podobně: $0·085 : 0·5 = 0·85 : 5 = 0·17$ aneb kratšeji $\overset{s}{0·085} : \overset{d}{0·5} = \overset{d}{0·17}$; ze s se staly d (o 1 stupeň). $23·8 : 0·07 = ?$ Ježto $0·07 = 0·01 \times 7$, bude $23·8 : 0·07 = 2380 : 7 = 340$ aneb krátce $\overset{J}{\widehat{23}·8} : \overset{s}{0·07} = \overset{S}{340}$ z J se stala S (o 2 stupně) atd.

Děliti n ě k o l i k a d, s, t . . . j e s t v ý k o n d v o j í: ***násobiti*** 10ti. 100, 1000 (t. j. z v ý š i t i ř á d o 1, 2, 3 . . . s t u p n ě) a ***děliti*** o b r a z e m č í s e l n ý m.

c) Že to jsou skutečně dva výkony, seznáme i takto:

$42 : 0·3 = ?$ jest měření, neboť dělitel jest pojmenovaný ($3\,d$), tedy nutno čísti: Kolikrát jsou $3\,d$ ve 42 obsaženy? d jsou obsaženy zase jen v desetinách i nutno 42 1) proměniti v $420\,d$ a 2) děliti $420\,d : 3\,d = 420 : 3 = 140$.

d) D ě l e n í v í c e c i f e r n ý m č í s l e m d e s e t i n n ý m.

$1·692 : 0·47 = ?$ Ježto $0·47 = 0·01 \times 47$, zvýšíme řád dělencův o 2 stupně a dělíme 47mi; tedy

$1·692 : 0·47 = 169·2 : 47 = 3·6$
282
=

či krátce $\overset{d}{\widehat{1}·692} : \overset{d}{0·47} = \overset{J}{3·6}$; $d : d = J$
282
=

Podobně: $\overset{D}{\widehat{10}4·4} : \overset{s}{0·0435} = \overset{T}{2400}$; $D : s = T$
1740
=

$\overset{J}{\widehat{29}·008} : \overset{D}{78·4} = \overset{d}{0·37}$; $J : D = d$
5488
=

Děliti d e s e t i n n ý m č í s l e m j s o u d v a v ý k o n y: u r č i t i n e j v y š š í ř á d p o d í l u a ***děliti*** o b r a z e m č í s e l n ý m.

P ř i k t e r ý c h v ý k o n e c h s e ř á d z v ý š í?

C v i č e n í: **1.** $J : s$, $J : d$, $J : t$, $s : s$, $d : d$, $t : t$, $D : d$, $S : s$, $D : s$, $T : t$, $S : d$, $s : d$, $s : t$, $d : s$, $t : d$, $d : t$ atd.

2. 4 : 0·1, 8 : 0·01, 70 : 0·1, 0·05 : 0·1, 12 : 0·001, 0·004 : 0·001.

3. 1·8 : 0·6, 2·1 : 0·07, 0·045 : 0·05, 0·08 : 0·004, 0·24 : 0·0008.

4. (Se zkouškou) 278 : 0·4, 13·27 : 0·05, 0·0252 : 0·9, 0·001 : 0·08.

5. *) (Zkoušku násobením) 99·9 : 0·27, 0·09222 : 5·3, 1 : 0·67, 0·08253 : 0·054, 65·598 : 0·0841.

6. (Zkoušku dělením) 144·76 : 0·047, 0·03008 : 0·64, 0·10726 : 17·3, 1946·7 : 2·06, 0·7395 : 43·5, 0·740993 : 0·0341.

7. **) Vypočítajíce podíl 7482 : 0·43 určte rázem podíly 7482 : 4·3, 7482 : 43, 7482 : 430, 7482 : 4300.

8. Kolik stupňů mají schody 3·96 *m* vysoké, je-li výška 1 stupně 0·165 *m*.

9. Kolikrát jest násobiti 0·125, aby součin byl 38?

10. Kterým číslem jest děliti 92·46, aby podíl = 0·0345?

11. Které číslo jsouc 4·005 děleno, dá podíl 0·00389 (přesvědč se o výsledku).

12. Které číslo jsouc 0·0709 děleno dá neúplný podíl 43·07 a zbytek 0·00543 (přesvědč se o výsledku).

13. *a*) Kolikrát, *b*) oč jest podíl 1732·4 : 0·568 > podílu 12·0536 : 0·7904?

14. Kolikrát jest podíl 59·532 : 0·726 > *a*) 59·532 : 726, *b*) 595·32 : 0·726, *c*) 59·532 : 7·26?

15. Kolikátým dílem čísla 24·4441 jest 0·08429?

16. Kolikrát možno posloupně odečísti číslo 0·00435 od 2·9232?

17. Podíl 1241·3093 : 0·035 : 0·8714 jest násobiti číslem 0·030499.

18. 1 *kg* kávy je za 2·59 zl.; kolik *kg* obdržíme za 96·75 zl.?

19. Je-li *m* sukna za 5·12 zl., kolik *m* možno koupiti za 176·4 zl.?

20. Vyžadovala-li stavba tratě 56·84 *km* dlouhé 4256000 zl., zač byl vystavěn 1 *km*?

21. Kolik *km* urazí vlak průměrně za 1 hodinu, projede-li za 3·28 hodin dráhu 100·275 *km*?

22. 1 víd. lot má 1·75 *dkg*; *a*) kolik víd. lotů má 1 *kg* (= 100 *dkg*); *b*) kolik víd. liber má 1 *kg*, činí-li 32 lotů 1 libru?

23. Kolika dukáty jest zaplatiti dluh 1732·4 zl., platí-li dukát 5·68 zl.?

24. Má-li 1 *ha* 3·475 korce, kolik *ha* má statek držící 100 korců?

25. Z přímky 237·43 *m* dlouhé učiňte 2 části o 1 *cm* rozdílné. Z větší části učiňte díly 0·35 *m* dlouhé, z menší 0·45 *m* dlouhé. Na kolik dílů se rozpadla celá přímka?

---

*) Neobjeví-li se dříve zbytek = 0, vyhledej toliko 4 částečné podíly (číselný obraz podílu budiž 4ciferný).

**) Nemění-li se číselný obraz dělence a dělitele, nemění se ani číselný obraz podílu.

ČÁSŤ DRUHÁ.

Počítání čísly vícejmennými.

§ 19. Není-li měřítko (*m*) v dané délce, kterou změřiti jest, beze zbytku obsaženo, nutno zbytek měřiti menším měřítkem (*dm*) Je-li na př. *m* v délce obsažen 3krát a *dm* ve zbytku 4krát, jest délka $= 3\,m + 4\,dm$. Velikost jest zde určena dvěma stejnorodými sice, ale různě pojmenovanými jednotkami. Součet $3\,m + 4\,dm$ píšeme zkrátka $3\,m\;4\,dm$ a zoveme číslem dvojjmenným. Váha $2\,kg\;34\,dkg\;5\,g$ jest určena číslem trojjmenným, doba 6 dnů 5 hodin 18 minut 10 vteřin číslem čtverojmenným atd. Čísla taková zoveme vůbec vícejmenná. Jmenujte některá.

Jest $5\,kg\;3\,cm$ číslem vícejmenným?

Číslo vícejmenné jest souhrn čísel stejnorodých, jež lze převésti na totéž jméno.

Tak jest $1\,m = 10\,dm$, $1\,dm = 0{\cdot}1\,m$, tudíž $3\,m\;4\,dm$ číslem vícejmenným. Podobně 1 den = 24 hod., 1 hod. = 60 minut atd., tudíž čísla 6 dnů, 5 hodin, 18 minut stejnorodá a 6 dnů 5 hod. 10 min. číslo vícejmenné.

Číslo, určující kolik jednotek nižších tvoří jednu jednotku vyšší, zove se měnitel. 10, 24, 60 jsou měnitelé.

§ 20. **Převod jednotek.** *A*) Vyšších v nižší. Číslo vícejmenné lze převésti na číslo jednojmenné, proměníme-li různojmenné jednotky na jednotku jedinou a to buď nejnižší aneb nejvyšší; na př.

a) $6\,m\;5\,cm\;7\,mm = ?\,mm$ | $= 6057\,mm$

$$\begin{aligned} 6\,m &= 6000\,mm \\ 5\,cm &= 50\,mm \\ 7\,mm &= 7\,mm \\ \hline & \ 6057\,mm \end{aligned}$$

Pamatujíce, že
$cm = D\,mm$
$dm = S\,mm$
$m = T\,mm$
možno odpověď psáti rázem.

b) 9 dnů 5 hodin 18 minut = ? min. | = 13278 min.

1 den má 24 hodin (měnitel).

$$\left.\begin{aligned} 9 \text{ dnů má } 9 \times 24 \text{ hodin} &= 216 \text{ hod.} \\ 5 \text{ „} \end{aligned}\right\} 221 \text{ hod.}$$

1 hodina má 60 minut.

$$\left.\begin{aligned} 221 \text{ hodin má } 221 \times 60 \text{ minut} &= 13260 \text{ min.} \\ 18 \text{ „} \end{aligned}\right\} 13278 \text{ min.}$$

c) 3·15 hod. = ? vteř. | = 11340 vteř.

1 hodina $= 60 \times 60$ vteř. $= 3600$ vteř.

$$\begin{aligned} 3{\cdot}15 \text{ hodin} &= 3600 \times 3{\cdot}15 \text{ vteř.} \\ &\ 1890 \times 6 \\ \hline &\ 11340 \end{aligned}$$

Z toho patrno, že *počet* jednotek nižších jest vždy větší a že se vyhledá, *násobíme-li počet vyšších jednotek měnitelem.*

B) *Nižších ve vyšší.*

a) $2\,kg\ 37\,dkg\ 4\,g = ?\,kg$	$= 2.374\,kg$	
$2\,kg = 2\,kg$	Pamatujíce, že	
$37\,dkg = 0{\cdot}37\,kg$	$dkg = 0{\cdot}01\ kg = s\,.\,kg$	možno od-
$4\,g = 0{\cdot}004\,kg$	$g = 0{\cdot}001\ kg = t\,.\,kg$	pověď psáti
$2{\cdot}374\,kg$		rázem.

Patrno, že *počet* jednotek nižších jest menší, a vypočítá se, *dělíme-li počet nižších jednotek měnitelem*)*.

Cvičení: **1.** Jmenuj jednotky (měřítka) délkové, plošné, krychlové, vah a jich měnitele.

2. Jmenuj jednotky časové a jich měnitele. Která léta jsou přestupná? Které měsíce mají 31 dnů. (Pamatuj na kloubech prstů.)

3. Jmenuj některé jednotky hromadné.

4. Jmenuj nejznámější jednotky mincovní a urči jejich hodnotu rak. zlatými neb korunami.

5. *a*) Kolik *mm* jsou 17 *cm* 2 *mm*, 4·5 *cm*, 2 *m* 34 *cm*, 5 *m* 6·3 *cm*, 5 *dm* 6 *mm*? *b*) Kolik *m* jest 2 *m* 4 *cm*, 2 *dm* 3 *cm* 5 *mm*, 13 *dm* 7 *cm*, 3 *km* 25 *m*?

6. *a*) Kolik *g* jest 13 *kg* 56 *dkg*, 2·35 *kg*? *b*) Kolik *kg* jest 3 *kg* 7 *dkg*, 2 *dkg* 5 *g*? *c*) Kolik *mg* jest 14 *cg* 6 *mg*, 0·35 *g*? *d*) Kolik *g* jest 2 *cg* 5 *mg*, 37 *cg* 4 *mg*?

7. Kolik *l* jest 3 *hl* 5 *l*, 7 *hl* 25 *l*?

8. Jest proměniti 5 zl. 37 kr., 16 zl. 5 kr. v kr.

9. Jest proměniti 14 *K* 5 *h*, 7 *K* 38 *h* v *K*.

10. Jest proměniti *a*) 2 *ha* 3 *a*, 17 *ha* 37 *a* v *a*. *b*) 35 *ha* 14 *a*, 8 *ha* 4 *a* v *ha*. *c*) 3 *ha* 5 *a* 13 m^2, 14 *ha* 25 *a* 7 m^2 *α*) v *ha*, *β*) v m^2. *d*) 12 m^3 45 dm^3 327 cm^3 *α*) v cm^3, *β*) v m^3.

11. Jest převésti 2 dny 14 hodin na minuty; 5 hodin 15 vteřin na vteřiny; 365 dní 6 hod. 9 min. 10 vteř. na vteř.; 365·24225 dnů na vteř.

12. Převeď $4^0 17' 35''$ na vteřiny; taktéž $14{\cdot}206^0$.

Rozvod jednotek. *a*) Jak dlouho trvá 1, 2, 3, 4 . . . vteřiny, minuty, hodiny, dny dovede si každý představiti. Sotva ale, jak dlouho trvá 1000 vteřin, neboť už 60 vteřin shrnujeme v novou jednotku — minutu. Je-li tudíž počet jednotek > měnitele, převádíme počet ten na počet jednotek vyšších soudíce: Kolikrát jest 60 vteřin v 1000 vteř. obsaženo, tolik minut má doba. Tedy **§ 21.**

*) Případ, v němž jest jiný měnitel než 10, 100 . . . . na př.: 2 dny 9 hodin 24 min. = ? dnů = 2·39375 dne, odkazujeme k nauce o zlomcích (§ 46, 47).

$$1000 \text{ vteřin} = (\overset{S}{1000} : \overset{D}{60}) \text{ min.} = \overset{D}{16} \text{ min.} + 40 \text{ vteřin}$$
$$\underline{40}$$
$$40 \text{ vteř.}$$

Ježto dělení nelze úplně vykonati, nelze dobu 1000 vteřin převésti na minuty (co celky) a dlužno dobu tu měřiti číslem vícejmenným: 16 min. 40 vteř. Co shrnuto bylo v jedinou jednotku, rozvádíme zde ve více jednotek a proto zoveme proměnu čísla jednojmenného na vícejmenné rozvodem jednotek. Na př. 2035 *g* = 2 *kg* 3 *dkg* 5 *g*.

b) Podobně nedovedeme si představiti dobu 2·29375 roku, ježto dobu < roku měříme měsíci, dny atd.; bude tedy i zde část 0·29375 r. proměniti především v měsíce.

I soudíme: 1 rok má 12 měsíců,

0·29375 r. má (0·29375. × 12) měsíců
58750
= 3·52500 měsíců.

Část 0·525 měs. jest opět proměniti v jednotky nižší (dny).

1 měsíc má 30 dnů,

0·525 měsíce má (0·525 × 30) dnů = **15**·75 dnů.

Dále: 1 den má 24 hodin.

0·75 dne má (0·75 × 24) hod. = 6·00 × 3 = 18 hod.

Odpověď: 2·29375 roku = 2 r. 3 měs. 15 dn. 18 hod.

Cvičení. Jest rozvésti v celky nižších neb vyšších jednotek:

1. 3·052 *m*, 254 *mm*, 42·3 *cm*.
2. 14·2547 *hl*, 10582 *cl*, 348·04 *l*.
3. 12·148 *kg*, 3057 *g*, 43·503 *dkg*, 2384 *mg*.
4. 5·0426 m^2, 1434·5 dm^2, 541304 cm^2.
5. 3·1704 *ha*, 438572 m^2, 3·0456 *a*.
6. 2·03457 m^3, 12753 cm^3, 43·0567 dm^3.
7. 25·375 zl., 1340 kr., 43·5 *K*, 205 *h*.
8. 1000000 vteřin, 4·835 hod., 365·24225 r.
9. ∢ 57·29585°, ∢ 5400″.
10. Synodický měsíc (doba od 1 úplňku ke druhému) trvá 2551443 vteřin; rozveď ve vyšší celky.

§ **22**. **Sčítání.** Sčítati lze jen čísla stejnojmenná. I píšeme sčítance vícejmenné tak, aby jednotky stejnojmenné stály v sloupci a počínáme sčítati jednotky nejnižší. Ze součtu jejich vyloučíme jednotky vyšší a přičteme je ku sčítancům vyšším; na př.:

a) 13 roků 7 měs. 24 dnů	15 d. + 24 d. = 39 d. = 9 d. + 1 m.;
5 „ 8 „ 15 „	1 m. + 8 m. + 7 m. = 16 m. = 4 m.
19 roků 4 měs. 9 dnů	+ 1 r.; 1 r. + 5 r. + 13 r. = 19 r.

b) 3 *kg* 62 *dkg* 7 *g*	Aneb možno-li rázem jako v *b*)	3·627 *kg*
5 *kg* 79 *dkg* 6 *g*	píšeme sčítance co čísla jedno-	5·796 *kg*
9 *kg* 42 *dkg* 3 *g*	jmenná a sčítáme.	9·423 *kg*

Cvičení: **1.** Obchodník zasýlal poštou 4 poukázky a to na 307 zl. 84 kr., 1407 zl. 9 kr., 35 zl. 70 kr. a 849 zl. 5 kr. Kolik poslal celkem?

2. Kupec utržil v 1. roce 8074 zl. 56 kr., ve 2. o 367 zl. 8 kr. více a ve 3. o 1205 zl. 75 kr. více než ve druhém. Kolik utržil za ta 3 léta?

3. 15 *m* 37 *cm* + 3 *m* 8 *dm* + 15 *cm* 4 *mm* = ?

4. 3 *ha* 4 *a* + 2 *ha* 46 *a* 15 m^2 + 37 *a* 8 m^2 = ?

5. 27 m^3 136 dm^3 84 cm^3 + 2 m^3 250 cm^3 + 14 dm^3 8 cm^3 = ?

6. 3 *kg* 72 *dkg* 5 *g* + 2 *kg* 5 *dkg* 7 *g* + 48 *dkg* = ?

7. $58^0\,43'\,32'' + 14^0\,25'\,14'' + 45^0\,30'\,46'' = ?$

8. Evropa leží mezi $11^0\,50'\,20''$ západní a $60^0\,30''$ východní délky od Paříže. Jakou délku má Evropa?

9. Rozdíl mezi časem místním a středoevropským*) jest pro *a*) Chrudim 3 min. 12 vt., *b*) Litomyšl 5 m. 15 vt., *c*) Sněžku 2 m. 59 vt., *d*) Turnov 39 vteřin. Ukazují-li tudíž telegrafní hodiny 11 hod. 56 min. 30 vteřin, kolik mají ukazovati místní?

10. Meridian jdoucí přes Greenwich jest vzdálen $17^0\,39'\,51''$ od Ferro. Praha (hlavní pošta) $14^0\,25'\,45''$ od Greenwiche. Jak jest Praha vzdálena od Ferro?

11. Jan Amos Komenský narodil se na Moravě 28. března 1592 a žil 78 let 7 měsíců 17 dnů; kdy zemřel?

Návod: Od nar. Krista až do nar. Komenského uplynulo

	1591 rok	2 měsíce	27 dnů	
žil	78 „	7 „	17 „	; do smrti Komenského
uplynulo	1669 roků	10 měsíců	14 dnů	; zemřel tedy 15. listo-

padu roku 1670.

12. Kdosi se narodil 2. března 1753 a dočkal se věku 72 roků 11 měsíců a 16 dnů. Kdy zemřel?

13. Císař František Josef I. narodil se 18. srpna 1830 a nastoupil vládu ve věku 18 let 3 měs. 14 dní. Kdy to bylo?

---

*) Čas středoevropský jest místní čas poledníka vzdáleného o 15^0 na vých. od poledníka Grenwichského. Jde přes J. Hradec, Pacov, Mn. Hradiště (skoro) Č. Dub, a j. Pošty, dráhy, telegrafy kr. českého řídí se tímto časem středoevropským. Jejich hodiny jsou v městech na východ od 15^0 meridianu ležících proti času místnímu opožděny, kdežto na západě se předbíhají.

§ 23. **Odčítání.** Na př.:

$$\left.\begin{array}{r} \;5 \text{ hod. } \overset{60}{14} \text{ min.} \\ -\;3 \;\;„\;\; 36 \;\;„\;\; \\ \hline 1 \text{ hod. } 38 \text{ min.} \end{array}\right\} + \text{zkouška.}$$

Ježto v menšiteli jest více minut než v menšenci, zvětšíme tento o 60 min.*) (= 1 hod.) a menšitel o 1 hodinu. Tím rozdíl zůstane neporušen. Zkoušku vykonej sečtením (bez zvláštního psaní).

Cvičení: **1.** 5 *m* 24 *cm* — 3 *m* 9 *cm* 7 *mm* = ?

2. 13 *km* 61 *m* — 4 *km* 257 *m* = ? 3 *km* — 1 *km* 34 *m* = ?

3. 2 *q* — 74 *kg* = ? 4 *t* 7 *q* 5 *kg* — 2 *t* 9 *q* 37 *kg* = ?

4. 74 m^2 — 4 cm^2, 2 *ha* — 5 *a*, 24 m^2 3 dm^2 25 cm^2 — 7 m^2 15 dm^2 43 cm^2.

5. 14 m^3 35 dm^3 — 7 m^3 175 dm^3 4 cm^3, 4 m^3 — 8 cm^3.

6. 2 zl — 1 zl. 7 kr., 13 *K* 5 *h* — 7 *K* 36 *h*, 23 *M* 50 *pf.* — 8 *M* 69 *pf.*

7. Stavitel platil za práci tesařskou 1274 zl. 5 kr., truhlářskou 2038 zl. 74 kr., zámečnickou 965 zl. 88 kr., zednickou 3587 zl. 3 kr., za stavivo 10938 zl. 65 kr. a 1649 zl za ostatní potřeby. Kolik získal na domě, prodal-li ho za 25300 zl.?

8. Sadař utržil za ovoce z 1. zahrady 1025 zl. 37 kr., ze 2. 827 zl. 5 kr., ze 3. 1204 zl. 10 kr. Nájemného zaplatil 2030 zl.; výloh prodejem ovoce měl 358 zl. 48 kr. Kolik získal?

9. Jak stár byl 13. dubna 1894 ten, kdo se 27. srpna 1848 narodil?

10. Bedřich Smetana, slavný hudební český skladatel, narodil se 2. března 1824 a zemřel 12. května 1884. Jakého stáří se dočkal? (Fr. Palacký nar. 14. června 1798, † 26. května 1876); (Mik. Koperník nar. 19. února 1473, † 21. května 1543).

11. Krištof Kolumbus vydal se dne 3. srpna 1492 na výzkumnou cestu a objevil v 71tý den své plavby Ameriku; vrátil se dne 15. března 1493. Jak dlouho byl na cestě a v který den přistál ke kýžené zemi?

12. Jest určiti rozdíl geogr. délek *a*) Vídně (16° 22′ 46″ v. od Gr.) a Pešti (19° 3′ 45″ v. od Gr.), *b*) Bregenze (27° 24′ 51″ v. od Fe.) a Černovic (43° 36′ 21″ v. od Fe.)

13. Rozdíl mezi časem středoevropským a místním jest pro *a*) Cheb 10 m. 31 vt., *b*) Plzeň 6 m. 28 vt. *c*) Písek 3 m. 23 vt. *d*) Prahu (Malá Strana) 2 m. 23 vt. *e*) Praha (hlavní pošta) 2 m. 17 vt. Kolik jest na hodinách místních, hlásí-li se právě v nádraží poledne?

14. Praha**) má 50° 5′ 18″ a Vídeň 48° 12′ 36″ severní šířky. *a*) Oč leží Praha severněji? *b*) Jak daleko od Prahy jest sev. točna?

---

*) Začátečníkům dovol je připsati v sloupec.

**) Jest počítati pro místo, v němž ústav se nalézá.

Násobení. Čísla vícejmenná násobí se jako víceciferná čísla dekadická: nejdříve se násobí jednotky nejnižší, součin se převede na jednotky vyšší, jež se přičtou k součinu jednotek stejnojmenných; na př.: § 24.

3 d. 7 h. 35 m. $\times$ 4	35 m. $\times$ 4 = 140 m. = 2 h. 20 m.
13 d. 6 h. 20 m.	7 h. $\times$ 4 = 28 h. = 1 d. 4 h.
	3 d. $\times$ 4 = 12 d.
	13 d. 6 h. 20 m.

Možno-li násobenec snadno převésti na číslo jednojmenné, jest výhodnější vykonati nejprvé převod a potom násobiti; na př.:

$$23\,m\ 8\,cm \times 7 = 2308\,cm \times 7 = 16156\,cm$$
aneb
$$= 23{\cdot}08\,m \times 7 = 161{\cdot}56\,m.$$

Cvičení: **1.** 87 *km* 128 *m* $\times$ 7 = ?

2. 7 *kg* 53 *dkg* $\times$ 23 = ? 3 *q* 7 *kg* $\times$ 14 = ?

3. 12 *hl* 75 *l* $\times$ 25 = ? 3 *ha* 54 *a* $\times$ 100 = ?

4. Polní hlídač má denně 1 *K* 95 *h*; kolik obdrží za měsíc a 21 dnů?

5. Rozšíří-li se zvuk za 1 vteřinu o 332 *m* 65 *cm*, jak daleko se rozšíří za 23 vteřin?

6. Uplyne-li mezi zábleskem a zahřměním 6 vteřin, jak daleko jest bouřka od nás vzdálena?

7. Trvá-li synodický (lunní) měsíc 29 d. 12 h. 44 m. 3 s.; jak dlouho trvá 12 syn. měsíců?

8. Padne-li za 1 min. na určitou plochu 3079 dešť. kapek, kolik jich dopadne za 18 h. 13 m.?

9. Rolník prodal na trhu 16 *hl* žita po 7 zl. 38 kr., 27 *hl* pšenice po 13 zl. 97 kr. a nakoupil zboží za 17 zl. 64 kr. Kolik mu zbylo, měl-li mimo to ještě 8 zl. 5 kr výloh?

10. Vlak urazil za vteřinu průměrem 12 *m* 7 *dm*; kolik urazil za 3 h. 35 m. 14 s.?

11. ∢ 37° 12′ 35″ jest 5krát zvětšiti.

12. Kolik franků a centimů obdržíme za 354 *K*, je-li *K* = 1 fr. 5 c.?

13. Kolik *m* má rovník, měří-li se na 1° jeho 15 zeměp. mil a na 1 zem. míli 7 *km* 420 *m* 4 *dm*?

14. Rok tropický (doba od jedné jarní rovnodennosti do druhé) trvá 365 d. 5 h. 48 m. 47 s. *a*) Oč jsou 4 roky obyčejné menší než 4 roky tropické? *b*) Vyrovná se tento rozdíl rokem přestupným úplně? Oč se tu chybuje a jak veliká je chyba ta, uplyne-li 100 přestupných roků?

15. Urazí-li země na své dráze kolem slunce za vteřinu 4 míle, kolik za tropický rok (viz cvič. 14).

Dělení. *a*) Rozdělování (dělitel nepojmenovaný) na př.: § 25.
14° 25′ 16″ : 4 = ?

Jako u čísel víceciferných počínáme i zde rozdělovati nejvyšší jednotky $14^0 : 4 = \mathbf{3^0}$ se zbytkem 2^0; zbytek převedeme na jednotky nižší $2^0 + 25' = 145'$ a opět rozdělíme: $145' : 4 = \mathbf{36'}$ se zbytkem $1'$ atd. $1' + 16'' = 76''$; $76'' : 4 = \mathbf{19}$; $14^0\,25'\,16'' : 4 = 3^0\,36'\,19''$.

Přehlednější avšak pracnější jest převésti číslo vícejmenné na jednotky nejnižší a potom rozděliti a podíl opět rozvésti. na př.:

$$14^0\,25'\,16'' = 51916''\ |\ : 4 = 12979'' = 216'\,19''$$
$$\underline{840{,}865} \qquad\qquad = 3^0\,36'\,19''$$
$$51900$$

b) Měření; dělenec i dělitel jsou čísla stejnorodá, dají se tudíž uvésti na čísla stejnojmenná, na př.: 4 d. 9 h. : 12 h. 30 m. = ?

$$= 115 \times 60\text{ m.} : 720\text{ m.} + 30\text{ m.} = \overset{S}{6900} : \overset{S}{750} = \overset{J}{9{\cdot}2}$$
$$150$$
$$=$$

Cvičení: **1.** 140° 8′ : 3, 45° : 6.

2. 30 d. 15 h. 12 m. : 9, 4 roky 8 měs. 18 dní : 12

3. 13 *km* 695 *m* : 24. **4.** 20 *q* 3 *kg* : 8.

5. 84 zl. 50 kr. : 3 zl. 25 kr. **6.** 17 *q* 3 *kg* 85 *dkg* : 46 *kg* 5 *dkg*.

7. 1 *km* 732 *m* 4 *dm* : 3 *m* 5 *cm*.

8. Proběhne-li slunce za 24 hodin 360°, o kolik se pošine za 1. vteřinu.

9. Urazí-li nákladní vlak za 1 h. 45 m. 28 s. dráhu 60 *km* 116 *m*, jaká jest jeho průměrná rychlost za 1 s.?

10. Posel vyšel v 7 h. 30 m. a přišel do města 15 *km* 840 *m* vzdáleného v 10 h. 15 m. Kolik urazil průměrně za 1 s.?

11. Naplní-li se nádržka obsahující 20 *hl* 16 *l* rourou za *a*) 1 hodinu, *b*) 1 h. 24 m.; *α*) kolik vody vyteče rourou za 1 vteřinu, *β*) za kterou dobu vyteče rourou 1 *hl*?

12. Součet vnitřních úhlů v sedmiúhelníku jest pět přímých; jak veliký jest jeden ∢, jsou-li všechny stejné?

13. *Kg* cukru je za 40 kr.; kolik ušetříme na 1 *kg*, koupíme-li homoli vážící 13 *kg* za 4 zl 94 kr.?

14. Vinárník prodával *l* vína jednotlivě za 88 kr. Zač počítal *l*, prodal-li sud 78 *l* za 64 zl. 74 kr.?

15. Vinárník smíchal 43 *hl* 56 *l* vína, *l* po 48 kr. a 24 *hl* 7 *l* po 53 kr. Zač prodával *l* směsi, získal-li 150 zl. 17 kr.?

16. Kolik lunních měsíců (29 d. 12 h. 44 m. 3 s.) má obyčejný rok (365 d.)?

17. 11. února vrcholí slunce 14 m. 30 s. po občanském poledni, Kdy vychází a kdy zapadá, trvá-li den v tu dobu 9 hod. 52 m.? Oč jest dopoledne delší než odpoledne?

ČÁST TŘETÍ.

Dělitelnosť čísel.

Je-li číslo ve druhém beze zbytku obsaženo, říkáme, že druhé číslo jest prvým dělitelno*), na př.: 4 jest ve 20 obsaženo 5krát, ježto $5 \times 4 = 20$; 20 je dělitelno čtyřmi. Jmenujte jiné příklady. § 26.

Číslo, které jest v jiném beze zbytku obsaženo, zove se jeho dělitelem aneb měrou; 4 jest dělitelem či měrou 20ti.

Cvičení: **1.** Povězte, je-li číslo prvé dělitelno druhým? *a*) 56, 7 *b*) 121, 11, *c*) 999, 27, *d*) 999, 37, *e*) 7, 3, *f*) 513, 17.

2. Jmenujte některé dělitele čísel: 12, 15, 20, 100, 120, 36, 72 atd.

3. Jmenujte několik čísel, jež jsou dělitelná *a*) 7mi, *b*) 12ti, *c*) 15ti, *d*) 25ti, *e*) 125ti, *f*) 8mi i 4mi, *g*) 5ti i 12ti.

4. Jest odůvodniti tyto poučky: Každé číslo jest dělitelno jednotkou a samo sebou. Nulla jest dělitelna každým číslem. Součin (násobek) jest dělitelen každým svým činitelem. Činitel jest měrou (dělitelem) součinu.

5. Jmenujte všecky dělitele součinu *a*) 3×2, *b*) $2 \times 3 \times 5$, *c*) 3×4, *d*) 9×2, *e*) 9×4, *f*) 3×10, *g*) 7×100.

6. Jest 3×10, 5×10, 7×10, 18×10, 19×10 . . . dělitelno 2ma neb 5ti? Kolikrát jest tu 2 neb 5 obsaženo?

7. Jest 3×100, 5×100, 7×100, 13×100, 17×100 . . . dělitelno 4mi neb 25ti? Kolikrát jsou tu 4 neb 25 obsaženy?

8. Jest 1000 dělitelný 8mi?

Znaky dělitelnosti. Často lze poznati dle některých známek rázem**), kterým číslem jest dané číslo dělitelno. Takové známky zoveme znaky dělitelnosti. § 27.

a) **2ma.** Jest 569 dvěma dělitelno? Kdybychom číslo to dělili po částech, shledali bychom, že

ve *S* jest 2 obsaženo 50krát, v 5 *S* tedy 5×50krát,
v *D* „ 2 „ 5 „ v 6 *D* „ 6×5 „

zkrátka: ať má číslo jakýkoliv počet *D*, *S* . . ., jest tato část vždy dělitelna 2ma, takže dělitelnosť bude záviseti pouze na jednotkách.

Aneb: Číslo 569 lze rozděliti na dvě části $56\,D + 9\,J$.

V 1 *D* jest 2 obsaženo 5krát, ve 2 *D* 10krát, ve 3 *D* 15krát atd., v 56 *D* 56×5krát, zkrátka: Prvá část jest vždy dělitelna 2ma; záleží tudíž jen na části druhé.

Má-li číslo na místě jednotek 0, 2, 4, 6, 8, jest dvěma

*) Viz § 15 *a*) a urči rozdíl mezi „dělitebný“ a „dělitelný“.

**) T. j. aniž by bylo třeba teprv dělením se o tom dozvídati.

dělitelno. Číslo dvěma dělitelné zoveme též sudé; není-li sudé, zove se liché.

Jaké cifry má číslo liché na místě jednotek? Jaký zbytek dá číslo liché, děleno jsouc dvěma?

b) **5ti.** Číslo jest 5ti dělitelno, má-li na místě jednotek 5 neb 0. Odůvodnění jako v *a*)

c) **10ti.** Číslo jest 10ti dělitelno, má-li na místě jednotek 0. Jako v *a*).

d) **4mi.** Číslo dvouciferné rozložíme snadno v hlavě na násobky čísla 4 a seznáme tudíž lehce, je-li čtyřmi dělitelno čili ne, na př.: $72 = 40 + 32 = 10 \times 4 + 8 \times 4$, $94 = 80 + 14 = 20 \times 4 + 3 \times 4 + \mathbf{2}$; dá zbytek 2; není tudíž dělitelno čtyřmi.

Řekněte, která z čísel 58, 62, 68, 76, 90, 78, 94 jsou dělitelna 4mi?

Číslo větší na př. 4372 rozložme na sta (43 *S*) a zbytek (dvouciferné jednotky 72); $4372 = 43\,S + 72$ a dělme po částech: 4 ve *S* obsaženo 25krát, ve $2\,S$ 50krát, ve $3\,S$ 75krát atd., ve $43\,S$ tedy 43×25krát; ať je set cokoliv, 4 jsou v nich vždy beze zbytku obsaženy. Bude záležeti tedy jen na poslední dvojciferné skupině.

Číslo jest dělitelno čtyřmi, je-li poslední dvojskupina (dvouciferné jednotky) čtyřmi dělitelna.

e) **25ti.** Číslo jest dělitelno 25ti, je-li poslední dvojskupina násobkem 25ti (25, 50, 75, (1)00). Odůvodnění jako v *a*).

f) **100.** Číslo jest stem dělitelno, je-li poslední dvojskupina 00. (Jako v *a*).

g) **8mi, 125ti, 1000em.** Zda-li čísla < 1000 jsou 8mi dělitelna, rozhodne se dělením. Číslo větší možno rozložiti na *T* a tříciferné jednotky*) na př.: $13162 = 13\,T + 162$; 8 v *T* jest obsaženo 125krát, ve $2\,T$ 250krát, ve $3\,T$ 375krát . . ., ve $13\,T$ 13×125krát; ať jest tedy *T* cokoliv, jsou vždy 8mi dělitelny. Závisí tedy dělitelnosť toliko na poslední trojskupině. Podobně vyvodíme znak dělitelnosti pro 125 a 1000.

Je-li poslední trojskupina 8mi, 125ti, 1000em dělitelna, jest i celé číslo.

h) **3mi.** Jest 7452 dělitelno 3mi?

$$\begin{array}{rll} 10 : 3 \text{ dá zbytek } 1; & 5\,D : 3 \text{ dá zbytek } & 1 \times 5 = 5, \\ 100 : 3 \quad „ \quad „ \quad 1; & 4\,S : 3 \quad „ \quad „ & 1 \times 4 = 4, \\ 1000 : 3 \quad „ \quad „ \quad 1; & 7\,T : 3 \quad „ \quad „ & 1 \times 7 = 7. \end{array}$$

Rozdělujíce takto číslo 7452 třemi, obdrželi bychom zbytek $7 + 4 + 5 + 2 = 18$, kterýž jest 3mi dělitelen a proto jest i číslo 7452

*) Poslední trojskupina.

3mi dělitelno. Hledaný zbytek, který rozhoduje o dělitelnosti čísla, obdržíme, sečteme-li počet dekadických jednotek, čili utvoříme-li t. zv. ciferný součet.

Číslo jest třemi dělitelno, je-li ciferný součet třemi dělitelen.

i) **9ti.** Číslo jest dělitelno 9ti, je-li ciferný součet 9ti dělitelen. (Jako v *h*).

k) **11ti.** Jest 23254 dělitelno 11ti? Dané číslo lze rozděliti na dvojskupiny sudých řádů: $23254 = 2\,Dt + 32\,S + 54\,J$.

Rozdělujíce číslo po dvojskupinách, shledáme, že

$S : 11$ dá zbytek 1; tedy $32\,S : 11$ dá zbytek 32,
$Dt : 11$ „ „ 1; „ $2\,Dt : 11$ „ „ 2,

tak že v celku bude zbytek $54 + 32 + 2 = 88$, a ten rozhodne o tom, zda-li číslo dané jest 11 dělitelno čili nic. Ježto $88 : 11$ dá zbytek 0, jest 23254 11ti dělitelno.

Číslo jest 11ti dělitelno, je li součet dvojskupin řádů sudých 11ti dělitelen.

l) **6ti.** Sudá čísla 3mi dělitelná, jsou dělitelná též 6ti. (Odůvodnění viz v § 29. *a*).

Cvičení: **1.** Která z těchto čísel 60, 64, 75, 900, 810, 1040, 5427, 84375, 199800, 7434216, 8118000 jsou dělitelna *a*) 2ma, *b*) 3mi, *c*) 4mi, *d*) 5ti, *e*) 8mi, *f*) 9ti, *g*) 10ti, *h*) 11ti, *i*) 25ti, *k*) 100, *l*) 125ti, *m*) 1000?

2. Jmenuj řadu čísel *a*) sudých, *b*) lichých větších než α) 1, β) 70.

3. Vytvoř řadu čísel sudých *a*) dělitelných 3mi, *b*) jež nejsou 4mi dělitelna.

4. Může býti liché číslo dělitelno 2ma, 4mi, 6ti, 8mi . . .?

5. Oprav jednotky v čísle 135823 tak, aby upravené číslo bylo dělitelno některým z čísel 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25.

6. Jest určiti dle znaků dělitelnosti zbytky, které bychom obdrželi, kdybychom čísla *a*) 2453, *b*) 35825, *c*) 138947, *d*) 4305248 dělili čísly 2, 3, 4, 5, 8, 9 a 11?

7. Roky, jež jsou čtyřmi dělitelny, jsou roky přestupné*); dle toho by všecky roky sté byly přestupné. Papež Řehoř XIII. však ustanovil r. 1582, aby z nich byly jen ty přestupné, jichž sta jsou 4mi dělitelna na př. 400, 800, 1200, nikoliv 100, 200, 300 . . .**)

8. *a*) Vyjmenuj 10 přestupných roků, jež po letošku budou následovati.

---

*) Tak ustanovil Julius Caesar r. 46 př. Kr. (Egypťané již r. 238 př. Kr.)

**) Rok přestupný jest tudíž dělitelný 4mi, nikoliv však stem, leč ty, jež jsou 4mi sty dělitelny. Rok 100 není přestupný; 400tý ano.

b) Vyjmenuj všecky roky slé od nar. Kr. P. až do r. 1600, jež měly býti přestupnými.

c) Kolik dní uplynulo od 13. ledna 1872 až do 3. března 1892?

§ 28. **Rozklad v kmenné činitele.** *a*) Číslo dělitelné toliko jednotkou a samo sebou zove se kmenné, na př.: 1, 2, 3, 5, 7 . . ., čísla ostatní zovou se složená, na př.: 4, 6, 12, 28 . . . Tato se dají vytvořiti násobením čísel kmenných, na př.:

$$6 = 2 \times 3, \quad 28 = 4 \times 7 = 2 \times 2 \times 7 \ldots$$

Činitel, jenž jest číslem kmenným, zove se kmenný činitel (také jednoduchý), ostatní činitele jsou složené, na př.: 7 jest kmenný činitel (též kmenný dělitel) čísla 28; 4 jest složený činitel (dělitel) 28mi.

b) Rozklad v činitele. Dáme-li číslu tvar součinu, roznásobili jsme je, čili rozložili v činitele. Činitel složený možno opět rozložiti, až konečně jsou všecky činitele kmennými. Tak možno každé složené číslo proměniti v činitele kmenné; na př.:

$$60 = 6 \times 10, \quad 6 = 2 \times 3, \quad 10 = 2 \times 5, \quad \text{tudíž} \quad 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$$

U větších čísel (aneb činitelů), kde nepoznáváme rázem činitele další, počítáme písemně dle „čáry“ a rovnáme činitele, možno-li hned, dle jich velikosti. Nejprve dělením číslo rozložíme v nejmenší kmenný činitel, který napíšeme v pravo a složený činitel v levo; ten pak rozkládáme dále jak vedle vyznačeno; $16830 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 17$ *).

16830	2×5
1683	3×3
183	11
17	17

Cvičení: **1.** Vypiš z přirozené řady všechna čísla kmenná až do 100.

2. Napiš řadu číselnou a črtni všecka čísla, jež jsou dělitelná 2ma, 3mi, 5ti a 7mi a zbylá srovnej s čísly 1). (Síto Eratosthenovo; žil ve 3. století před Kr.)

3. Z činitelů *a*) 2 a 3, *b*) 2 a 5, *c*) 3 a 5, *d*) 2, 3 a 5 utvoř všecka možná čísla od 1 až do 100, na př.: $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$.

4. Která čísla od 1 do 100 jsou složená ze stejných činitelů kmenných?

5. Vyjmenuj všecka čísla od 1 do 100, jež jsou dělitelna (t. j. jež mají kmenný činitel) *a*) 7, *b*) 11, *c*) 13, *d*) 17, *e*) 19, *f*) 23, *g*) 29, *h*) 31.

6. Rozlož rázem v kmenné činitele *a*) 6, 8, 16, 24, 28, 34, 36, 40. *b*) 12, 18, 20, 26, 32, 38, 44, 46, 50. *c*) 42, 45, 48, 51, 56, 58. *d*) 52, 54, 60, 63, 68, 72, 78. *e*) 70, 73, 81, 84, 96.

7. Rozlož dělením v kmenné činitele *a*) 1692, 5472, 14310, *b*) 21240, 723600, 452925.

---

*) Číslo složené z činitelů 7, 13, 17, 19 atd., pro něž nemáme znaků dělitelnosti, nedovedeme tímto způsobem rozložiti.

Kterak se určí všecky dělitele daného čísla? *a*) Rozložíme-li § 29.
číslo v kmenné činitele, jsou tyto jeho k m e n n ý m i děliteli. Jejich součiny pak jsou s l o ž e n ý m i děliteli. Na př.: $12 = 2 \times 2 \times 3$.

Jest tudíž 12 dělitelno čísly: 2, 3, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$.

Aneb: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$; jest tudíž 60 dělitelno čísly: **2**, **3**, **5**, $2 \times 2 =$ **4**, $2 \times 3 =$ **6**, $2 \times 5 =$ **10**, $3 \times 5 =$ **15**, $2 \times 2 \times 3 =$ **12**, $2 \times 2 \times 5 =$ **20**, $2 \times 3 \times 5 =$ **30**.

Způsob tento má zároveň tu výhodu, že poznáme nejen dělitel, ale i quotient t. j. kolikrát jest dělitel obsažen; na př. v čísle $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ jest 7 obsaženo $2 \times 2 \times 3 = 12$krát; $21 = 3 \times 7$ jest obsaženo $2 \times 2 = 4$krát atd.

Z toho plyne, že číslo obsahující dělitele 2 a 3 jest dělitelno 6ti (viz § 27. *l*). Lze s pravdou tvrditi, že číslo dělitelné 2ma a 4mi jest dělitelno 8mi? Jest 4 kmenný dělitel?

60	
30	2
20	3
15	4
12	5
10	6

b) Běží-li o to, určiti *všecky* dělitele, nalezneme je bezpečněji a rychleji takto: Dělme číslo dle „čáry“ v š e m i děliteli*) (nejen kmennými) až dojdeme k podílu, jenž ještě není obsažen mezi děliteli. Dělitele i podíly jsou hledanými děliteli daného čísla. Úpravu početní viz vedle znázorněnou na čísle 60.

C v i č e n í: **1.** Jmenuj některé dělitele čísel *a*) $2 \times 2 \times 3 \times 5$, *b*) $2 \times 3 \times 3 \times 7$, *c*) 4×9, *d*) $4 \times 9 \times 7 \times 11$ a pověz, kolikrát jsou obsaženy.

2. Učiň totéž s čísly 72, 108, 2475.

3. Která z čísel 738, 512, 423, 5256 jsou dělitelna 6ti? Napiš 4 3- až 5ticiferná čísla, jež by byla 6ti dělitelna.

4. Jest určiti všecky dělitele čísel: 18, 24, 56, 96.

ČÁST ČTVRTÁ.

Průprava k nauce o zlomcích obyčejných.

Největší společný dělitel. *a*) Číslo 4 jest dělitelno 2ma a 6 § 30.
též. Jest tudíž 2 *společným* d ě l i t e l e m (společnou měrou) čísel 4 a 6.

S p o l e č n ý d ě l i t e l j e s t č í s l o, j e ž j e s t v e d v o u n e b v í c e č í s l e c h b e z e z b y t k u o b s a ž e n o. Nepočítáme-li jednotku, mají čísla 4 a 6 jediný společný dělitel. Avšak čísla 24 a 36 mají v í c e společných dělitelů, na př.: 2, 3, 4, 6, 12; největší z nich zove se n e j v ě t š í s p o l e č n ý d ě l i t e l, aneb nejv. spol míra**).

b) Kterak nalezneme *M*?

---

*) Ne však p o s l o u p n ě.

**) Největší společnou míru čísel 24 a 36 budeme značiti pro krátkost *M* (24, 36) = ?

α) Často se stává, že menší z obou čísel jest společnou měrou na př.: 8 a 16 mají $M = 8$. O tom se přesvědčíme, dělíme-li číslo větší menším.

β) Není-li tomu tak, vyhledáme si největší dělitel čísla menšího a zkoumáme, zda-li jest v čísle větším obsažen na př.: M (24, 36) = ? Nejv. dělitel 24ti jest 12 a ježto 36 : 12 = 3, jest M (24, 36) = 12.

γ) Není-li největší dělitel menšího čísla společným, zkoumáme, zda-li nejbližší jeho dělitel jest společným, na př.: M (24, 32) = ? Ježto 12 není dělitelem 32ti, zkoumáme, zda-li 8 jest ve 32 (beze zbytku) obsaženo, i shledáme, že M (24, 32) = 8 atd.

Podobně si vedeme, je-li hledati společný dělitel více čísel.

Čísla mající společný dělitel slují soudělná, jinak nesoudělná.

Mohou býti 2 čísla kmenná soudělnými? A naopak?

Cvičení: Jest nalézti největší společný dělitel, (pokud možno z hlavy), čísel:

1. *a*) 4, 6, *b*) 4, 8, *c*) 6, 9, *d*) 18, 27, *e*) 21, 35.
2. *a*) 12, 18, *b*) 8, 20, *c*) 16, 24, *d*) 18, 45, *e*) 24, 36.
3. *a*) 36, 54, *b*) 24, 60, *c*) 28, 42, *d*) 26, 65, *e*) 34, 51.
4. *a*) 33, 77, *b*) 30, 45, *c*) 63, 105, *d*) 17, 85, *e*) 38, 57.
5. *a*) 12, 25, *b*) 19, 40, *c*) 39, 78, *d*) 18, 35, *e*) 25, 75.
6. *a*) 6, 8, 10, *b*) 9, 12, 18, *c*) 24, 36, 60.
7. *a*) 10, 15, 30, *b*) 16, 24, 15, *c*) 16, 24, 32.

§ 31. **Nejmenší společný násobek.** *a*) Společný násobek jest číslo, ve kterém jsou dvě nebo více čísel beze zbytku obsažena; na př. 12 jest společný násobek čísel 3 a 4.

Takových společných násobků jest nekonečně mnoho (∞); tak každý násobek 12ti, na př.: 24, 36, 48 . . ., až do ∞. Jeden z nich jest nejmenší, a ten zoveme nejmenší společný násobek a značíme n (. . .) = ?

b) Kterak nalezneme n? α) na př. n (4, 8) = ? Zkoumejme nejprve, zda-li číslo větší není násobkem menšího; pak jest samo společným násobkem; ježto 8 : 4 = 2, jest n (4, 8) = 8.

β) Není-li tomu tak, na př.: n (4, 6) = ? vytvořme 2-násobek čísla většího a zkoumejme, zda-li jest současně násobkem čísla menšího. Ježto $6 \times 2 = 12$ jest násobkem čtyř, jest 12 násobkem společným; n (4, 6) = 12.

γ) Není-li dvojnásobek společným násobkem, zkoumejme troj-, čtyřnásobek atd., až dojdeme cíle, na př.: n (4, 7) = ?

Tu shledáme, že teprv čtyřnásobek 7mi, t. j. součin obou daných čísel jest násobkem společným.

Součin jest vždy společným násobkem svých činitelů, ale ne vždy nejmenším, na př.: $n\,(6,\ 8) = ?$

Součin $6 \times 8 = 48$ jest společným násobkem (6, 8), ale nikoliv nejmenším: $48 > n\,(6,\ 8) = 24$.

Tomuto způsobu hledati M a n říkáme „zkusmo“.

Podobně si vedeme, je-li hledati násobek tří a více čísel.

Cvičení: Jest vyhledati nejmenší společný násobek čísel:

1. *a*) 3, 6, *b*) 2, 8, 16, *c*) 3, 24, *d*) 12, 36.
2. *a*) 8, 12, *b*) 4, 7, *c*) 6, 8, *d*) 6, 9.
3. *a*) 15, 20, *b*) 12, 18, *c*) 40, 50, *d*) 7, 9.
4. *a*) 2, 3, 4, *b*) 3, 4, 6, *c*) 4, 5, 8, *d*) 6, 9, 12.
5. *a*) 2, 3, 5, *b*) 3, 4, 5, *c*) 4, 5, 6, *d*) 2, 5, 7.

Zlomky obyčejné. *a*) Aby bylo možno vykonati i takové dělení, kde dělenec není násobkem dělitele, na př. 1 : 3, jest nutno zavésti nová čísla t. zv. lomená či zlomky. § 32.

Rozdělíme-li 1 (na př. m) na 2, 3, 4 . . . stejné díly, možno tyto nové díly považovati opět za samostatné jednotky (t. zv. zlomkové) a označiti je zvláštním jménem polovina, třetina, čtvrtina . . ., což v arithmetice značíme zvláštními tvary $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ . . .

$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ . . . značí tedy zlomkovou jednotku*), jež povstala z jednotky celkové tím, že tato rozdělena byla na 2, 5, 6, 7 . . . stejných dílů.

Jako z jednotek celkových tak i z jednotek zlomkových (na př. $\frac{1}{7}$) možno čítáním vytvořiti celou řadu čísel zlomkových či lomených. Tak jest $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} =$ dvě sedminy, což značíme krátce $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$; $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$ atd., řada ta nemá konce podobně jako řada čísel přirozených.

$\frac{4}{7}$ tedy značí $\frac{1}{7}$ čtyřikráte sčetně položenou. Každý zlomek možno rozložiti v součet zlomkových jednotek; $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, podobně jako $3\,m = 1\,m + 1\,m + 1\,m$.

Zlomek možno považovati za číslo pojmenované: $\frac{3}{5} = 3$ pětiny, $\frac{6}{7} = 6$ sedmin a počítati jimi jako čísly pojmenovanými. Tudíž sčítati: $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ jako $3\,m + 2\,m = 5\,m$; odčítati: $\frac{6}{11} - \frac{5}{11} = \frac{1}{11}$; násobiti: $\frac{5}{6} \times 3 = \frac{15}{6}$ a děliti, je-li počet jednotek zlomkových dělitelný, na př.: $\frac{9}{7} : 3 = \frac{3}{7}$; jinak toliko neúplně: $\frac{10}{7} : 3 = \frac{3}{7}$ se zbytkem $\frac{1}{7}$, který se má rozděliti ještě na 3 díly.

K vyznačení zlomků užíváme dvou čísel, jež píšeme v sloupec, oddělujíce je přímkou t. zv. lomítkem. Číslo dolení určuje jméno zlomkové jednotky a zove se jmenovatel; číslo hoření čítá počet těchto

*) Jinak zlomek kmenný.

jednotek a zove se **č i t a t e l.** $\frac{3}{5}$ tedy značí, že celek byl rozdělen na 5 stejných dílů a 3 díly (pětiny) vzaty sčetně do počtu. Zlomek jest tudíž číslo složené z několika jednotek zlomkových a sluje **o b y č e j n ý** na rozdíl od zlomků **d e s e t i n n ý c h**, jež jsme obdrželi z 1 tím, že jsme ji rozdělili na 10, 100, 1000 . . . dílů a jež mají tu výhodu, že se dají pohodlněji napisovati jako 0·1, 0·41, 0·064 . . ., t. j. tvarem čísla celého místo $\frac{1}{10}, \frac{41}{100}, \frac{64}{1000} \dots$ V podstatě liší se zlomky desetinné od obyčejných jen tím, že mají za jmenovatele dekadické jednotky 10, 100, 1000, kdežto zlomky obyčejné číslo jakékoliv.

b) Stopujeme-li řadu zlomkovou, na př.: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4} \dots$, shledáme, že některé zlomky $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{8}{4} = 2$ značí čísla celá, arciť tvarem zlomkovým. Ježto potřeba zlomku povstala zmenšením jednotky v aliquotní díly, zoveme zlomky $\frac{4}{4}, \frac{8}{4}, \frac{12}{3}$ **n e v l a s t n í**: majíť pouze **t v a r** zlomků, ale velikost čísel celých.

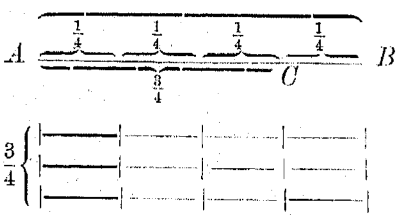
Ježto $\frac{4}{4} = 1$, jest $\frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4} \dots > 1$; zlomky takové, jejichž hodnota jest > 1, zovou se **n e r y z í** (nepravé), kdežto zlomky, jejichž hodnota < 1, jsou zlomky **r y z í.**

Z l o m k y r y z í m a j í č i t a t e l $<$ j m e n o v a t e l e.
„ n e r y z í „ „ $>$ „
„ n e v l a s t n í „ „ $=$ násobku jmenovatele. (Proč?)

c) Ježto se celky dají proměniti ve zlomky, možno je s nimi slučovati v jednotu, na př.: $2 + \frac{3}{4}$, což píšeme krátce $2\frac{3}{4}$; číslo takové zove se **s m í š e n é.**

d) V § 14. *e*) jsme napsali $23 : 4 = 5 + \frac{3}{4}$, píšíce $3 : 4 = \frac{3}{4}$; jakým právem? $3 : 4$ značí, že jest **3** celky rozděliti na 4 stejné díly a do počtu vzíti 1 takový díl, kdežto $\frac{3}{4}$ značí, že jest rozděliti **1** na 4 stejné díly a do počtu vzíti 3 díly.

Přesvědčíme se však rysem lehko, že tyto dva různé tvary číselné mají stejnou hodnotu.



Obr. 7.

Budiž $AB = 1$ rozděleno na $\frac{1}{4}$tiny; $AC = \frac{3}{4}$. Majíce $3 : 4$ narýsujme přímku AB třikrát v sloupec a beřme 4tý díl z každé jednotky; i obdržíme v celku $\frac{3}{4}$: tedy $3 : 4 = \frac{3}{4}$.

Arithmetickými značkami bude úvaha psána takto:

$$3 : 4 = 12 \text{ čtvrtin} : 4 = 3 \text{ čtvrtiny} = \frac{3}{4}.$$

$3 : 4$ jest naznačený podíl, $\frac{3}{4}$ vypočtený podíl, arciť ve formě zlomkové. Ještě jiný tvar by obdržel tento podíl proměnou na desetinné číslo 0·75

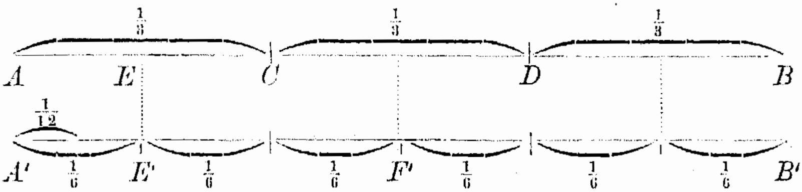
Z toho plyne:

N e n í - l i d ě l e n e c n á s o b k e m d ě l i t e l e, j e s t ú p l n ý p o d í l č í s l e m s m í š e n ý m.

$5:3=1\frac{2}{3}$; $19:5=3\frac{4}{5}$; $5:3$ jest naznačený podíl; $1\frac{2}{3}$ vypočtený.

Proměna zlomků. *a*) Rozdělíme-li každou $\frac{1}{3}$ na 2 stejné díly, rozpadne se celek na 6 stejných dílů, tedy na šestiny. § 33.

Z toho plyne, že 1) $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$; $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; $\frac{3}{3}=\frac{6}{6}$. (Viz obr. 8., $AB=A'B'=1$; $AC=CD=DB=\frac{1}{3}$; $AE=EC=\ldots=\frac{1}{6}$).



Obr. 8.

2) že $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}\times 2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$;

3) že $\frac{1}{6}=\frac{1}{2}:3$; ($\frac{1}{6}=A'E'$; $\frac{1}{2}=A'F'$).

Rozdělíme-li každou $\frac{1}{3}$ na 3, 4, 5 . . . stejných dílů, rozpadne se celek na 9, 12, 15 . . . stejných dílů, tedy na 9tiny, 12tiny, 15tiny.

Z toho patrno, že $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=$ atd. Možno ze 3tin učiniti 30tiny? Jak? Možno ze 3tin učiniti 5tiny?

b) Rozdělíme-li celek ($A'B'$) na 12 stejných dílů (12tiny) a shrneme vždy 2, 3, 4, 6 dílů v jedek celek, obdržíme 6tiny, 4tiny, 3tiny, poloviny. Z toho patrno, že

$$1)\quad \frac{2}{12}=\frac{1}{6};\quad \frac{3}{12}=\frac{1}{4},\quad \frac{4}{12}=\frac{1}{3},\quad \frac{6}{12}=\frac{1}{2};$$

2) že ze 3tin možno učiniti 6tiny, 9tiny, 12tiny atd. a naopak ze 12tin 6tiny, 4tiny, 3tiny, poloviny.

Možno učiniti ze 3tin 4tiny? Z 5tin 3tiny?

C v i č e n í: **1.** Co značí *a*) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}\ldots$ *b*) $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{9}{10}\ldots$; $\frac{3}{4}$ značí $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$.

2. Jest vykonati, co jest naznačeno:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$, $\frac{8}{15}+\frac{4}{15}$. *b*) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$, $\frac{7}{9}-\frac{2}{9}$, $\frac{13}{4}-\frac{5}{4}$. *c*) $\frac{3}{4}\times 5$, $\frac{2}{3}\times 4$, $\frac{1}{2}\times 7$, $\frac{4}{5}\times 5$, $\frac{2}{7}\times 7$, $\frac{5}{6}\times 6$. *d*) $\frac{12}{5}:3$, $\frac{8}{7}:4$, $\frac{6}{9}:2$, $\frac{15}{4}:5$.

3. Vypište z těchto zlomků *a*) ryzí, *b*) neryzí, *c*) nevlastní: $\frac{3}{5}, \frac{5}{4}, \frac{8}{4}, \frac{7}{9}, \frac{13}{15}, \frac{12}{3}, \frac{9}{5}\ldots$

4. Napište několik čísel smíšených.

5. Jest proměniti poloviny ve 4tiny, 6tiny, 8iny atd. Ve které zlomky je nemožno proměniti? Podobně proměň 5tiny, 7iny, 10tiny. (Rys.)

6. Proměň *a*) 20tiny v 10tiny atd. *b*) 16tiny ve zlomky s menším jmenovatelem. (Rys.)

§ 34. Zlomky o jmenovateli 2, 3, 4, 5.

1) Jest vypočítati v *h*, (*cm*, *l*, *g*) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$ *K* (*m*, *hl*, *kg*).

2) Jest proměniti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ roku (měsíce, hodiny, minuty), na měsíce (hodiny, minuty, vteřiny).

3) Číslům 2, 3, 5, 7, 12 jest dáti tvar zlomků s jmenovateli hořeními; dle vzoru $1 = \frac{2}{2}$, tedy $2 = \frac{4}{2}$.

4) Jest proměniti v zlomky tato čísla smíšená: $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{5}$, $3\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $15\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{3}$, $7\frac{2}{3}$, $12\frac{1}{3}$, $20\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{4}$, $6\frac{3}{4}$, $15\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{5}$, $3\frac{2}{5}$, $4\frac{3}{5}$, $7\frac{4}{5}$ dle vzoru $3 = \frac{12}{4}$; $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

5) Jest proměniti v čísla smíšená neb celá: $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{49}{2}$, $\frac{51}{2}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{32}{3}$, $\frac{65}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{26}{4}$, $\frac{48}{4}$, $\frac{72}{4}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{23}{5}$, $\frac{66}{5}$, $\frac{75}{5}$ dle vzoru $\frac{11}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$.

6) Jest určiti úplný podíl číslem smíšeným: $7 : 2$, $11 : 3$, $9 : 4$, $11 : 5$, $39 : 2$, $29 : 3$, $39 : 4$, $22 : 5$, $43 : 5$, $54 : 5$.

7) Sečtěte: $2 + 1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2} + 4$, $7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$, $4 + \frac{3}{2}$, $5 + 2\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3} + 7$, $2\frac{2}{3} + 4\frac{2}{3}$, $7 + \frac{5}{3}$, $3 + 2\frac{1}{4}$, $5\frac{3}{4} + 6$, $4\frac{3}{4} + 7\frac{3}{4}$, $3 + \frac{14}{4}$, $4 + 2\frac{1}{5}$, $7\frac{2}{5} + 4$, $3\frac{4}{5} + 6\frac{3}{5}$, $2 + \frac{23}{5}$; dle vzoru: $4\frac{2}{5} + 2\frac{4}{5} = ?$ $4 + 2 = 6$; $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$, $4\frac{2}{5} + 2\frac{4}{5} = 7\frac{1}{5}$.

8) Odečtěte: $3\frac{1}{2} - 2$, $5 - \frac{1}{2}$, $4 - \frac{3}{2}$, $7 - 3\frac{1}{2}$, $7\frac{2}{3} - 4$, $4\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}$, $5 - \frac{2}{3}$, $7 - \frac{5}{3}$, $6 - 2\frac{2}{3}$, $8\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$, $12 - \frac{3}{4}$, $7 - \frac{7}{4}$, $8 - 2\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$, $5\frac{2}{4} - 3\frac{3}{4}$, $7\frac{3}{5} - 4\frac{2}{5}$, $6 - \frac{4}{5}$, $8 - \frac{16}{5}$, $7 - 4\frac{3}{5}$, $6\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$, $8\frac{2}{5} - 5\frac{3}{5}$; dle vzorů: $5 - 3\frac{2}{5} = 2 - \frac{2}{5} = 1\frac{3}{5}$; $7\frac{3}{5} - 4\frac{4}{5} = 6\frac{8}{5} - 4\frac{4}{5} = 2\frac{4}{5}$.

9) Násobte: $\frac{1}{2} \times 2$, $\frac{1}{2} \times 6$, $\frac{3}{2} \times 5$, $5\frac{1}{2} \times 7$, $17\frac{1}{2} \times 5$, $\frac{1}{3} \times 3$, $\frac{2}{3} \times 7$, $\frac{4}{3} \times 8$, $7\frac{1}{3} \times 3$, $5\frac{2}{3} \times 4$, $\frac{1}{4} \times 4$, $\frac{3}{4} \times 8$, $2\frac{3}{4} \times 3$, $\frac{9}{4} \times 5$, $7\frac{1}{4} \times 5$, $\frac{1}{5} \times 5$, $\frac{4}{5} \times 3$, $1\frac{3}{5} \times 2$, $\frac{7}{5} \times 6$, $3\frac{2}{5} \times 8$; dle vzorů: $\frac{5}{3} \times 4 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$; $3\frac{4}{5} \times 4 = 12 + \frac{16}{5} = 15\frac{1}{5}$.

10) Dělte: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ 2ma, 3mi, 4mi . . ., $\frac{3}{2} : 2$, $\frac{5}{3} : 2$, $\frac{3}{4} : 2$, $\frac{3}{5} : 2$, $\frac{5}{2} : 3$, $\frac{2}{3} : 3$, $\frac{5}{4} : 3$, $\frac{2}{5} : 3$, $\frac{3}{2} : 4$, $\frac{2}{3} : 4$, $\frac{3}{4} : 4$, $\frac{3}{5} : 4$, $\frac{4}{3} : 2$, $\frac{6}{5} : 2$, $\frac{3}{2} : 3$, $\frac{3}{4} : 3$, $\frac{6}{5} : 3$, $\frac{35}{3} : 5$, $\frac{48}{5} : 6$, $\frac{45}{4} : 3$, $6\frac{3}{5} : 3$, $1\frac{1}{3} : 2$, $1\frac{4}{5} : 3$, $2\frac{3}{4} : 5$, $2\frac{2}{5} : 3$, $4\frac{1}{3} : 4$; dle vzorů: $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$ (§ 33. *a*), $\frac{5}{2} : 3 = \frac{5}{6}$, $\frac{12}{5} : 3 = \frac{4}{5}$ (čísl. pojm.); $3\frac{2}{3} : 2 = \frac{11}{3} : 2 = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$.

§ 35. Násobení a dělení zlomkem.

a) Je-li 1 *m* za 5 zl.
jsou 2 *m* za 5 zl. $\times$ 2
3 *m* za 5 zl. $\times$ 3
. . .

Známe-li cenu jednotky (1 *m*), vypočítáme cenu mnohosti (na př. 8 *m*), násobíme-li cenu jednotky (5 zl.) počtem jednotek (8), t. j.
8 *m* je za 5 zl $\times$ 8.

Platí-li tato poučka vůbec, pak $\frac{1}{4}m$ je za 5 zl. $\times \frac{1}{4}$; nevědouce však, co to znamená $\frac{1}{4}$nou násobiti, nelze součin 5 zl. $\times \frac{1}{4}$ vypočítati.

Avšak úvaha jiná vede nás k cíli: $\frac{1}{4}m$ jest 4krát menší než 1 m a proto bude $\frac{1}{4}m$ za 5 zl. $: 4 = \frac{5}{4}$ zl. Dle toho jest $5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, t. j. čtvrtinou násobiti jest tolik co 4mi děliti, čili vyhledati z násobence čtvrtý díl ($\frac{1}{4}$tinu). A naopak vyhledati $\frac{1}{4}$tinu čísla jest tolik, co 4mi děliti či $\frac{1}{4}$nou násobiti.

Ještě jiná úvaha stvrzuje hoření závěr:

$5 \times 16 = 80$
$5 \times 4 = 20$
$5 \times 1 = 5$

Srovnáme-li tyto součiny, vidíme, že každý následující násobitel jest 4krát menší a tím i součin. Zvolíme místo násobitele 1 jiný čtyřikrát menší, t. j. $\frac{1}{4}$, bude dle obdoby i součin 4krát menší předešlého, tedy $5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$nou ... násobiti jest tolik, co 2, 3, 4mi ... děliti (viz § 17. *a*).

Dle toho jest $\frac{1}{10}$ násobiti tolik, co 10 děliti.

b) Je-li 1 m za 5 zl., jsou $\frac{3}{4}m$ za 5 zl. $\times \frac{3}{4}$*) $= ?$

Soudíme-li takto: $\frac{1}{4}m$ je za $\frac{5}{4}$ zl., tedy 3 čtvrtiny [jsouce 3krát větší] mají cenu 3krát větší, t. j. $\frac{5}{4}$ zl. $\times 3$, shledáváme, že 5 zl. $\times \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ zl. $\times 3$, t. j. násobiti $\frac{3}{4}$mi jsou výkony dva: 4mi děliti a 3mi násobiti (viz § 17. *b*).

Dle toho jest $4 \times \frac{3}{10} = \frac{4}{10} \times 3 = 0{\cdot}4 \times 3 = 1{\cdot}2$.

c) Je-li $5 : \frac{1}{2}$, vzniká otázka, kolikrát jest $\frac{1}{2}$ v 5 celých obsažena (měření)?

I soudíme $\frac{1}{2}$ v 1 jest obsažena 2krát, v 5ti 10krát, tedy $5 : \frac{1}{2} = 10$; podobně $4 : \frac{1}{3} = 12$. Aneb: Považujeme-li dělení $4 : \frac{2}{3}$ za měření, jest nutno dělenec (4) proměniti též na třetiny; i bude

$4 : \frac{2}{3} = \frac{12}{3} : \frac{2}{3} = 12$ třetin : 2 třetiny $= 12 : 2$**) $= 6$.

Dle toho $4\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{13}{3} : \frac{2}{3} = 13 : 2 = 6\frac{1}{2}$.

Cvičení: **1.** Jakou chybu učiní ten, kdo maje 15 násobiti 3mi pětinami, násobil by pouze 15×3? Návod: Jaký vzal násobitel? Jaký měl vzíti? Jak se tím změnil součin? Jak možno chybu napraviti?

2. Jest vykonati, co jest naznačeno:

$6 \times \frac{1}{2}$, $6 \times \frac{1}{3}$, $4 \times \frac{1}{4}$, $10 \times \frac{1}{5}$, $9 \times \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$, $7 \times \frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}$, $2\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}$, $9 \times \frac{2}{3}$, $5 \times \frac{2}{3}$, $4 \times \frac{3}{5}$, $\frac{5}{8} \times \frac{3}{5}$, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$, $3\frac{2}{5} \times 2\frac{1}{3}$***), $4\frac{4}{5} \times 3\frac{1}{3}$.

3. Jest vykonati dělení dle *c*), pokud možno beze psaní.

---

*) Dle *a*).

**) Společné jméno možno v podílu vynechati.

***) Číslem smíšeným násobiti dosud nedovedeme; převedeme-li je však na zlomek, jest úloha známou.

$7 : \frac{1}{2}$, $4 : \frac{1}{3}$, $8 : \frac{1}{4}$, $8 : \frac{1}{5}$, $\frac{9}{2} : \frac{3}{2}$, $\frac{12}{5} : \frac{4}{5}$, $\frac{7}{4} : \frac{3}{4}$, $9 : \frac{2}{3}$, $9 : \frac{3}{4}$, $9 : \frac{3}{5}$, $4\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3} : 1\frac{2}{3}$, $4\frac{2}{5} : 1\frac{3}{5}$, $8\frac{1}{4} : 2\frac{3}{4}$, $7\frac{3}{4} : 3\frac{1}{4}$.

36. **Zlomky o jmenovateli** 6, 9, 12, 10, 15, 20, 25.

1) Jest proměniti $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{15}{25}$ *K* (*m*, *hl*, *kg*) v *h* (*cm*, *l*, *g*)

2) Taktéž $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{13}{20}$ stupně v minuty.

3) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ roku (dne) $=$? dní (hodin).

4) Jest proměniti smíšená čísla $2\frac{1}{6}$, $3\frac{4}{9}$, $5\frac{7}{12}$, $7\frac{9}{10}$, $2\frac{8}{15}$, $8\frac{11}{20}$, $3\frac{4}{25}$ ve zlomky.

5) Jest proměniti zlomky $\frac{31}{6}$, $\frac{30}{9}$, $\frac{65}{12}$, $\frac{72}{12}$, $\frac{73}{10}$, $\frac{93}{15}$, $\frac{127}{20}$, $\frac{80}{25}$, $\frac{300}{25}$ v čísla smíšená neb celá.

6) Jest určiti úplný podíl číslem smíšeným $21 : 6$, $75 : 9$, $40 : 12$, $87 : 10$, $64 : 15$, $166 : 20$, $108 : 25$.

7) Jest proměniti $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $3\frac{1}{2}$ ve čtvrtiny, šestiny, 10tiny, 12tiny; $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{3}$ v 6tiny, 9tiny, 12tiny, 15tiny; $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $3\frac{2}{5}$ v 10tiny, 15tiny, 20tiny, 25tiny dle § 33. *b*), na př.: z 3tin učiníme 12tiny, rozdělíme-li každou 3tinu na 4 díly; $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; tedy $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$.

8) Jest napsati zlomky menšími čísly (aniž by tím hodnota zlomku se změnila), t. j. zjednodušiti: $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{12}{9}$, $1\frac{6}{9}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{12}{20}$, $\frac{10}{25}$, $\frac{30}{25}$ dle § 33. *b*), na př.: shrneme-li vždy 5 patnáctin v 1 díl, bude míti celek těchto nových dílů 3 (t. j. $15 : 5$). I povstanou třetiny. $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; tedy $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Aneb $\frac{12}{15} = ?$

12 i 15 možno rozvrci ve skupiny po 3, (3 je společný dělitel): tím se z 15tin stanou 5tiny a ze $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, ježto $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

9) Jest vykonati, co jest naznačeno: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{5} + \frac{7}{10}$, $\frac{1}{6} + \frac{5}{12}$, $\frac{1}{10} + \frac{3}{20}$, $2\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$, $1\frac{5}{6} + 2\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{5} + 7\frac{3}{10}$, $\frac{7}{6} + \frac{11}{12}$, $8\frac{3}{10} + 7\frac{9}{20}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} + \frac{7}{9}$, $\frac{1}{4} + \frac{5}{12}$, $\frac{1}{5} + \frac{4}{15}$, $\frac{4}{5} + 1\frac{7}{15}$, $3\frac{1}{2} + 1\frac{5}{6}$, $4\frac{2}{3} + 3\frac{5}{9}$, $5\frac{3}{4} + \frac{7}{12}$, $\frac{4}{5} + 3\frac{8}{15}$, $\frac{7}{10} + 13\frac{9}{20}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, $\frac{1}{3} + \frac{4}{15}$, $\frac{1}{4} + \frac{3}{20}$, $\frac{1}{5} + \frac{7}{25}$, $1\frac{1}{2} + 4\frac{7}{10}$, $2\frac{2}{3} + 3\frac{4}{15}$, $\frac{7}{3} + 2\frac{1}{15}$, $5\frac{3}{4} + \frac{3}{20}$, $\frac{4}{5} + \frac{23}{25}$, $2\frac{3}{5} + \frac{11}{25}$; dle vzoru: $\frac{4}{5} + \frac{2}{15} = \frac{12}{15} + \frac{2}{15} = \frac{14}{15}$.

10) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{10}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{9}$, $\frac{1}{4} + \frac{7}{9}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{15}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{15}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{25}$, $2\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$, $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$, $\frac{3}{4} + \frac{5}{9}$, $1\frac{1}{2} + \frac{4}{15}$, $1\frac{1}{4} + \frac{7}{15}$, $2\frac{1}{3} + 4\frac{7}{10}$; dle vzoru: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$; $12 = n\ (3, 4)$; $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}$; $20 = n\ (4, 5)$.

11) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{10}$, $\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$, $\frac{1}{9} + \frac{1}{12}$, $\frac{3}{10} + \frac{2}{15}$, $\frac{2}{15} + \frac{1}{20}$, $\frac{5}{12} + \frac{1}{10}$, $\frac{2}{15} + \frac{1}{25}$, $2\frac{3}{4} + \frac{7}{10}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12}$, $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{15}$; dle vzorů: $\frac{1}{6} + \frac{5}{9} = \frac{3}{18} + \frac{10}{18} = \frac{13}{18}$; $18 = n\ (6, 9)$;

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$; $n\ (2, 4, 6) = 12$.

12) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{3}{5} - \frac{1}{10}$, $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} - \frac{7}{12}$, $\frac{2}{3} - \frac{4}{9}$, $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$, $\frac{7}{5} - \frac{2}{15}$, $\frac{7}{10} - \frac{4}{15}$, $3 - \frac{19}{25}$, $4\frac{2}{3} - \frac{5}{9}$, $3\frac{1}{4} - \frac{5}{12}$,

$3\frac{5}{6} - 1\frac{7}{10}$, $7\frac{4}{5} - 3\frac{24}{25}$, $\frac{11}{15} - \frac{7}{25}$, $7\frac{1}{6} - 2\frac{5}{9}$, $4\frac{5}{12} - 2\frac{7}{9}$, $5\frac{11}{20} - 1\frac{7}{15}$; dle vzorů: $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$; $4\frac{7}{10} - 1\frac{3}{4} = 4\frac{14}{20} - 1\frac{15}{20} = 2\frac{19}{20}$.

13) $\frac{5}{6} \times 4$, $\frac{2}{9} \times 3$, $\frac{3}{10} \times 7$, $\frac{5}{12} \times 4$, $\frac{2}{15} \times 11$, $\frac{3}{20} \times 5$, $\frac{4}{25} \times 10$, $1\frac{1}{6} \times 3$, $5\frac{4}{9} \times 2$, $2\frac{7}{10} \times 10$, $1\frac{5}{12} \times 5$, $2\frac{4}{15} \times 3$, $5\frac{7}{20} \times 3$, $4\frac{13}{25} \times 2$.

14) *a*) Jest děliti $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$ dvěma a $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$ třemi.

b) $\frac{4}{9} : 2$, $1\frac{1}{6} : 7$, $2\frac{2}{9} : 5$, $2\frac{7}{10} : 3$, $1\frac{1}{12} : 2$, $3\frac{4}{15} : 7$, $3\frac{9}{20} : 3$, $1\frac{3}{25} : 4$.

15) $3 \times \frac{1}{6}$, $27 \times \frac{1}{9}$, $24 \times \frac{1}{12}$, $5 \times \frac{1}{10}$, $30 \times \frac{1}{15}$, $4 \times \frac{1}{20}$, $50 \times \frac{1}{25}$, $2 \times \frac{5}{6}$, $3 \times \frac{4}{9}$, $15 \times \frac{3}{10}$, $4 \times \frac{5}{12}$, $10 \times \frac{2}{15}$, $8 \times \frac{3}{20}$, $75 \times \frac{2}{25}$, $1\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$, $3\frac{1}{2} \times \frac{2}{9}$, $2\frac{1}{3} \times \frac{5}{12}$.

16) *a*) Jest děliti 1 a 2 zlomky $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$.

b) $4 : \frac{4}{9}$, $3 : \frac{7}{10}$, $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$, $\frac{2}{5} : \frac{1}{10}$, $\frac{1}{3} : \frac{1}{9}$, $\frac{5}{6} : \frac{1}{12}$, $\frac{3}{10} : \frac{1}{20}$, $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$, $4\frac{1}{6} : 1\frac{2}{3}$, $\frac{9}{15} : \frac{3}{10}$.

Zlomky o jmenovateli 8, 16, 24 . . ., 18, 27 . . . § 37.

1) Kolik stupňů má $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{17}{30}$, $\frac{8}{45}$ úhlu pravého?

2) Jest proměniti smíšená čísla ve zlomky: $5\frac{3}{8}$, $2\frac{3}{16}$, $1\frac{1}{24}$, $2\frac{5}{18}$, $1\frac{5}{27}$, $4\frac{7}{30}$, $3\frac{9}{32}$, $4\frac{11}{45}$.

3) Jest proměniti zlomky v čísla smíšená: $\frac{30}{8}$, $\frac{35}{16}$, $\frac{50}{24}$, $\frac{96}{18}$, $\frac{110}{27}$, $\frac{96}{30}$, $\frac{120}{45}$, $\frac{180}{50}$.

4) Jest určiti podíly 61 : 8, 83 : 16, 59 : 18, 107 : 24, 35 : 27, 187 : 30, 74 : 35 číslem smíšeným.

5) Jest proměniti *a*) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{11}{12}$ ve 24tiny, 48tiny a možno-li v 36tiny, 40tiny a 60tiny.

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$ ve 20tiny, 40tiny, 60tiny, 80tiny, 100tiny.

6) Jest zjednodušiti: $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{3}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{9}{27}$, $\frac{15}{27}$, $\frac{7}{28}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{24}{32}$, $\frac{27}{36}$, $\frac{12}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{35}{50}$, $\frac{75}{100}$.

7) Jest vykonati, co jest naznačeno: $\frac{1}{2} + \frac{5}{8}$, $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$, $\frac{5}{6} + \frac{7}{30}$, $\frac{1}{16} + \frac{5}{32}$, $\frac{3}{8} + \frac{7}{24}$, $\frac{2}{9} + \frac{5}{18}$, $\frac{4}{9} + \frac{16}{27}$, $\frac{5}{9} + \frac{37}{45}$, $2\frac{3}{5} + \frac{31}{60}$, $5\frac{9}{20} + \frac{17}{100}$, $\frac{4}{25} + \frac{9}{100}$, $\frac{13}{50} + \frac{27}{100}$, $\frac{3}{8} + \frac{5}{12}$, $1\frac{5}{8} + \frac{5}{6}$, $\frac{7}{8} + \frac{9}{10}$, $\frac{15}{16} + \frac{5}{24}$, $\frac{3}{18} + \frac{7}{45}$, $2\frac{5}{8} + \frac{2}{3}$, $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$.

8) $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}$, $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$, $2\frac{1}{5} - \frac{9}{30}$, $3\frac{3}{24} - \frac{5}{6}$, $4 - 1\frac{5}{18}$, $2\frac{3}{10} - \frac{47}{100}$, $1\frac{13}{60} - \frac{5}{6}$, $\frac{3}{8} - \frac{1}{6}$, $\frac{11}{12} - \frac{7}{8}$, $1\frac{1}{9} - \frac{5}{24}$, $1\frac{3}{20} - \frac{7}{30}$, $\frac{7}{12} - \frac{5}{18}$, $\frac{2}{3} - \frac{5}{8}$, $\frac{7}{8} - \frac{2}{5}$, $1\frac{1}{3} - \frac{9}{10}$, $\frac{4}{5} - \frac{5}{12}$.

9) $\frac{1}{8} \times 4$, $\frac{3}{8} \times 4$, $\frac{15}{16} \times 8$, $\frac{5}{18} \times 6$, $\frac{7}{24} \times 3$, $\frac{4}{27} \times 9$, $\frac{7}{8} \times 24$, $\frac{9}{16} \times 24$, $\frac{5}{8} \times 3$, $\frac{13}{18} \times 5$, $\frac{17}{100} \times 10$, $\frac{43}{100} \times 100$.

10) Jest děliti: *a*) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{30}$ . . . 2ma, 3mi . . .

b) $\frac{3}{8} : 4$, $\frac{5}{16} : 3$, $\frac{11}{18} : 2$, $\frac{7}{30} : 5$, $\frac{9}{50} : 2$, $\frac{9}{8} : 3$, $\frac{21}{16} : 7$, $\frac{25}{18} : 5$, $1\frac{1}{27} : 7$, $1\frac{19}{30} : 7$.

11) $24 \times \frac{1}{8}$, $120 \times \frac{1}{30}$, $100 \times \frac{3}{50}$, $200 \times \frac{7}{100}$, $33 \times \frac{3}{100}$, $5 \times \frac{7}{8}$, $12 \times \frac{5}{8}$, $24 \times \frac{3}{16}$, $15 \times \frac{7}{30}$, $3 \times \frac{5}{16}$.

12) Jest děliti: *a*) 1, 2 . . . čísly $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{45}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$.

b) $\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$, $\frac{1}{4} : \frac{1}{16}$, $\frac{1}{10} : \frac{1}{100}$, $\frac{2}{3} : \frac{1}{8}$, $4\frac{1}{5} : \frac{7}{8}$, $2\frac{1}{3} : \frac{7}{100}$, $6\frac{3}{10} : \frac{9}{100}$, $\frac{7}{10} : \frac{9}{100}$.

§ 38. **Zlomky se jmenovateli** 7, 11, 13 . . .

1) Jest proměniti ve zlomky: $5\frac{1}{7}$, $2\frac{3}{11}$, $5\frac{5}{13}$, $3\frac{3}{14}$.

2) Jest proměniti v smíšená čísla: $\frac{60}{7}$, $\frac{50}{11}$, $\frac{40}{13}$, $\frac{30}{22}$, $\frac{45}{21}$.

3. Jest proměniti: *a*) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$ ve 14tiny a 28tiny.

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{11}$ ve 44tiny.

c) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{5}{21}$ ve 42tiny.

4) Jest zjednodušiti: $\frac{6}{14}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{10}{22}$, $\frac{11}{22}$, $\frac{12}{26}$, $\frac{14}{21}$, $\frac{9}{21}$, $\frac{7}{28}$, $\frac{32}{28}$, $\frac{14}{42}$, $\frac{15}{42}$, $\frac{21}{42}$.

5) $\frac{1}{2} + \frac{1}{7}$, $\frac{2}{3} + 1\frac{2}{7}$, $\frac{3}{5} + 1\frac{4}{11}$, $\frac{3}{4} + \frac{5}{13}$, $\frac{13}{11} + \frac{27}{44}$.

6) $4 - \frac{3}{7}$, $4\frac{1}{7} - \frac{5}{7}$, $\frac{3}{7} - \frac{3}{14}$, $1\frac{8}{11} - \frac{17}{22}$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{7}$, $2\frac{3}{4} - \frac{6}{7}$, $3\frac{4}{5} - \frac{7}{11}$, $\frac{11}{13} - \frac{1}{2}$.

7) $\frac{3}{7} \times 7$, $1\frac{3}{7} \times 4$, $\frac{3}{11} \times 5$, $2\frac{5}{13} \times 8$, $\frac{5}{14} \times 6$.

8) Jest děliti: *a*) $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$ . . . 2ma, 3mi, 4mi . . .

b) $\frac{3}{7} : 4$, $\frac{2}{11} : 3$, $\frac{5}{13} : 2$, $\frac{8}{11} : 4$, $1\frac{5}{7} : 3$.

9) $21 \times \frac{1}{7}$, $22 \times \frac{1}{11}$, $4 \times \frac{3}{7}$, $5 \times \frac{7}{11}$, $4 \times \frac{9}{13}$, $\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}$, $1\frac{3}{7} \times \frac{3}{10}$, $2\frac{3}{4} \times \frac{5}{11}$, $5\frac{1}{5} \times \frac{7}{13}$, $1\frac{5}{7} \times 1\frac{1}{6}$.

10) Jest děliti: *a*) 1, 2, 3 . . . čísly $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$ . . .

b) $5 : \frac{2}{7}$, $4\frac{1}{2} : \frac{9}{7}$, $2\frac{1}{2} : \frac{5}{11}$, $\frac{6}{7} : \frac{3}{14}$, $1\frac{5}{13} : 1\frac{1}{2}$.

ČÁSŤ PÁTÁ.

Počítání obyčejnými zlomky.

§ 39. **Kterak se hledá největší společná míra?** Hledati M zkusmo lze s prospěchem jen u čísel malých. Jinak počítáme takto: Rozložme daná čísla v kmenné činitele a součin činitelů společných*) jest M. Na př. M (84, 252, 392) = ?

84	**2**	252	**2**	392	**2**
42	**2**	126	**2**	196	**2**
21	3	63	3	98	2
	7		3	49	**7**
			7		7

$M = 2 \times 2 \times 7 = 28.$

Cvičení. Jest vypočítati M čísel:

1. *a*) 63, 35; *b*) 85, 115; *c*) 210, 165; *d*) 341, 572.

---

*) U čísel, jež nedovedeme rozložiti v činitele, neznajíce znaky dělitelnosti (na př. pro 7, 13, 17 . . .), způsob tento arciť nedostačí.

2. *a*) 420, 1020; *b*) 28, 104; *c*) 126, 153; *d*) 570, 680.
3. *a*) 168, 408; *b*) 416, 608; *c*) 468, 1044; *d*) 3780, 5670.
4. *a*) 28, 32, 36; *b*) 72, 126, 165; *c*) 90, 210, 315.
5. *a*) 102, 138, 378; *b*) 144, 336, 528; *c*) 1088, 1584, 1980.
6. *a*) 153, 248, 253; *b*) 148, 153, 174; *c*) 111, 185, 407.

Kterak se hledá nejmenší společný násobek? § 40.

Na př.: n (12, 9) = ? Rozložme 12 a 9 v kmenné činitele $12 = 2 \times 2 \times 3$; $9 = 3 \times 3$. Má-li číslo n býti 12ti dělitelno, musí obsahovati v sobě kmenné činitele 12ti, tedy $n = 2 \times 2 \times 3 \times \ldots$ a má-li býti současně dělitelno 9ti, musí obsahovati i kmenné činitele 3×3. Ježto činitel 3 jest tam již jednou napsán, třeba připsati toliko druhý, takže $n = 2 \times 2 \times 3 \times 3$; 12 je v n obsaženo 3krát a 9 jest obsaženo $2 \times 2 = 4$krát. n tudíž nalezneme, rozložíme-li daná čísla v kmenné činitele a k součinu kmenných činitelů čísla jednoho připíšeme z ostatních čísel ještě jen scházející činitele.

Výhodno jest začíti číslem největším.

Úprava bude tato: Jest hledati n (45, 60, 210) = ?

210	2	60	2	45	3
21	5		3		3
	3		2		5
	7		5		

$n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 1260$

210 jest obsaženo $2 \times 3 = 6$krát,
60 „ „ $3 \times 7 = 21$krát.
45 „ „ $2 \times 2 \times 7 = 28$krát.

Je-li některé z daných čísel v jiném obsaženo, možno je z počtu vynechati, neboť n (8, 24, 45) = n (24, 45).

Cvičení. Jest určiti n čísel:

1. *a*) 12, 30; *b*) 18, 24; *c*) 28, 42; *d*) 36, 45.
2. *a*) 148, 185; *b*) 468, 312; *c*) 252, 420; *d*) 260, 312.
3. *a*) 6, 8, 10; *b*) 8, 12, 18; *c*) 18, 36, 45.
4. *a*) 45, 60, 210; *b*) 24, 36, 56; *c*) 15, 25, 45.
5. *a*) 6, 12, 18, 20; *b*) 12, 20, 24, 36; *c*) 21, 35, 55, 105 a naznačiti, kolikrát jest každé číslo v n obsaženo.
6. Jest děliti součin *a*) 24×32, *b*) 204×255 nejmenším společným násobkem obou činitelů, a určiti, kolikrát jest podíl v každém činiteli obsažen.

Proměna zlomků[*]). *a*) Kterak se promění ryzí zlomek v číslo smíšené. Čitatel neryzího zlomku dá se rozvrci ve dva § 41.

*) Číslo (veličinu, geom. obrazec) proměniti, znamená vyjádřiti je jiným tvarem, jinými čísly, ale hodnoty nezměniti.

sčítance, z nichž prvý jest násobek jmenovatele a druhý menší jmenovatele, na př.:

$$\tfrac{23}{4} = \tfrac{20+3}{4} = \tfrac{20}{4} + \tfrac{3}{4} = 5 + \tfrac{3}{4}.$$

Kratšeji počítáme takto: 4 v 23 obsaženy 5krát a zbudou 3 (rozuměj všady čtvrtiny) $23 : 4 = 5\tfrac{3}{4}$; považujeme-li tudíž neryzí zlomek za naznačený podíl, jest vypočtený podíl číslem smíšeným.

Neryzí zlomek promění se ve smíšené číslo, dělíme-li jeho čitatel jmenovatelem; neúplný podíl jest *celkem* a zbytek lomený jmenovatelem jest *zlomkem* smíšeného čísla.

b) Kterak se promění smíšené číslo v [neryzí] zlomek. Na př.: $4\tfrac{2}{3} = \tfrac{?}{3}$.

Proměníme-li celky na [nevlastní] zlomek s týmž jmenovatelem, možno oba zlomky sloučiti v jeden. $4 = \tfrac{3 \times 4}{3} = \tfrac{12}{3}$; $\tfrac{12}{3} + \tfrac{2}{3} = \tfrac{14}{3}$, aneb kratšeji $4\tfrac{2}{3} = \tfrac{3 \times 4 + 2}{3} = \tfrac{14}{3}$.

Smíšené číslo promění se v [neryzí] zlomek, násobíme-li celky jmenovatelem a k součinu přičteme čitatel. Součet ten jest hledaným čitatelem a jmenovatel zlomku ryzího hledaným jmenovatelem.

c) Rozšíření zlomku. Bylo vyloženo (v §§ 33. *a*), 36. 7), proč $\tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{6} = \tfrac{6}{9} = \tfrac{8}{12} \ldots$; $\tfrac{3}{5} = \tfrac{6}{10} = \tfrac{9}{15} = \tfrac{12}{20} = \ldots$

Srovnáme-li čitatele i jmenovatele všech zlomků následujících s prvým, vidíme, že vznikají *násobením týmž* číslem.

$$\tfrac{2}{3} = \tfrac{2 \times 2}{3 \times 2} = \tfrac{2 \times 3}{3 \times 3} = \tfrac{2 \times 4}{3 \times 4} = \ldots$$

$$\tfrac{3}{5} = \tfrac{3 \times 2}{5 \times 2} = \tfrac{3 \times 3}{5 \times 3} = \tfrac{3 \times 4}{5 \times 4} = \ldots$$

Hodnota zlomku se nemění, násobíme-li čitatel i jmenovatel týmž číslem. Tato úprava zlomku (resp. čitatele a jmenovatele) zove se rozšíření zlomku.

d) Zjednodušení zlomků. Napíšeme-li řadu zlomků v *c*) zvratně $\tfrac{8}{12} = \tfrac{6}{9} = \tfrac{4}{6} = \tfrac{2}{3}$, seznáme 1) že zlomek poslední jest nejjednodušší, t. j. čitatel i jmenovatel jest nejmenší a 2) že jeho čitatel i jmenovatel vzniknou z předcházejících dělením týmž číslem.

$$\tfrac{8 : 4}{12 : 4} = \tfrac{6 : 3}{9 : 3} = \tfrac{4 : 2}{6 : 2} = \tfrac{2}{3}.$$

Hodnota zlomku se nemění, dělíme-li čitatel i jmenovatel týmž číslem. Výkon ten zove se zjednodušením zlomku, (arciť je-li čitatel i jmenovatel soudělný).

Cvičení: **1.** Proměňte v čísla smíšená:

a) $\tfrac{24}{5}$, $\tfrac{38}{7}$, $\tfrac{73}{10}$, $\tfrac{97}{12}$, $\tfrac{63}{17}$, $\tfrac{255}{24}$, $\tfrac{123}{50}$.

b) $\tfrac{437}{100}$, $\tfrac{854}{125}$, $\tfrac{1324}{212}$, $\tfrac{7540}{1000}$, $\tfrac{14573}{4500}$.

2. Urči podíly číslem smíšeným:

65 : 7 *). 351 : 27, 895 : 120, 7432 : 1000, 18453 : 1734.

3. Jest proměniti v [nerýzí] zlomky: *a*) $6\frac{4}{5}$, $28\frac{3}{7}$, $42\frac{3}{8}$, $36\frac{4}{9}$, $12\frac{3}{10}$; *b*) $23\frac{5}{12}$, $37\frac{4}{25}$, $39\frac{13}{42}$, $56\frac{7}{60}$, $134\frac{43}{100}$; *c*) $345\frac{36}{125}$, $583\frac{47}{132}$, $407\frac{571}{623}$, $834\frac{73}{1000}$.

4. Jest rozšířiti zlomky:

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{18}$ na 12tiny neb 36tiny; *b*) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{13}{30}$ na 60tiny; *c*) $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{17}{10}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{13}{36}$, $\frac{36}{40}$, $\frac{73}{50}$ v 72tiny neb 100tiny.

Úlohu 4) naznačíme takto: $\frac{5}{8} = \frac{?}{24}$ a řešíme: $\frac{5}{8} = \frac{5|\cdot}{8|\cdot}$ a nyní zkoumáme, jaký činitel může z 8 učiniti 24. I seznáme, že 3; činitel ten vepíšeme do čitatele i jmenovatele; pokračujeme tedy $= \frac{5|3}{8|3}$**) $= \frac{15}{24}$. Nepoznáme-li rázem činitel, kterým násobiti jest, rozložíme nový jmenovatel na činitele, aneb dělíme jej jmenovatelem daným; na př.:

$\frac{5}{8} = \frac{?}{456}$ ¹) $= \frac{5|57}{8|57} = \frac{285}{456}$ ¹) 456 : 8 = 57 (též bez psaní).

5. Jest rozšířiti na nejmenší společný jmenovatel tyto zlomky:

a) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$; *b*) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$; *c*) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$; *d*) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$; *e*) $\frac{7}{18}$, $\frac{11}{24}$; *f*) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$; *g*) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$; *h*) $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{19}{24}$; *i*) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{24}$; *j*) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{19}{27}$; *k*) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$; *l*) $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{13}{20}$; *m*) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{40}$ dle vzoru: Jest rozšířiti zlomky $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{13}{24}$ na nejmenší společný jmenovatel.

$$n\,(6,\ 9,\ 24) = n\,(9,\ 24) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3.$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5|12}{6|2 \times 2 \times 3} = \frac{60}{72}.$$
$$\frac{2}{9} = \frac{2|8}{9|2 \times 2 \times 2} = \frac{16}{72}$$
$$\frac{13}{24} = \frac{13|3}{24|3} = \frac{39}{72}$$

Že společný jmenovatel musí býti společným násobkem daných jmenovatelů, patrno z toho, že jmenovatel se dá rozšířiti pouze v násobek.

6. Jest zjednodušiti tyto zlomky:

a) $\frac{18}{24}$, $\frac{35}{28}$, $\frac{24}{36}$, $\frac{26}{39}$, $\frac{18}{42}$, $\frac{75}{45}$, $\frac{48}{54}$, $\frac{105}{63}$; *b*) $\frac{165}{210}$, $\frac{308}{396}$, $\frac{360}{144}$, $\frac{216}{360}$, $\frac{385}{440}$, $\frac{468}{792}$, $\frac{715}{1045}$; *c*) $\frac{198}{308}$, $\frac{197}{408}$, $\frac{152}{209}$, $\frac{253}{552}$, $\frac{174}{319}$, $\frac{186}{341}$, dle vzoru: $\frac{756}{936} \overset{4}{=} \frac{189}{234} \overset{9}{=} \frac{21}{26}$, t. j. dělíme čitatel i jmenovatel společným dělitelem (čím větším tím lépe), což se opakuje tak dlouho, až jsou obě čísla nesoudělná***).

Kratší úprava a mnohdy výhodnější jest tato:

$$\frac{756}{936}\,\Big|\,\overset{4}{\frac{189}{234}}\,\Big|\,\overset{9}{\frac{21}{26}}$$ (čísla dělená se přečrtnou).

Srovnávání zlomků. § 42.

a) V přirozené řadě zlomků $\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7} \ldots$ jest každý následující o jednotku zlomkovou větší.

---

*) Lze psáti 0·8 : 3 = $0{\cdot}2\frac{2}{3}$, tak jako 8 : 3 = $2\frac{2}{3}$? Proč ne?

**) Kolmice tato zastupuje znak násobení tak, že 5, 3 jsou činitele

***) Znajíce jen některé znaky dělitelnosti, nepoznáme často dělitel 7, 13, 17 . . Tu vede často tento způsob k cíli:

$$\frac{18315}{21978} \overset{9}{=} \frac{2035}{2442} \overset{11}{=} \frac{185}{222} = \frac{5 \times 37}{6 \times 37} = \frac{5}{6}.$$

Ze dvou zlomků o společném jmenovateli je ten ***větší,*** který má ***větší*** čitatel.

b) V řadě jednotek zlomkových $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} \ldots$ jest každá následující menší, ježto povstala tím, že celek byl rozdělen na více dílů; čím > dílů v celku, tím < každý. Tak bude i $\frac{5}{2} > \frac{5}{3} > \frac{5}{4} \ldots$

Ze dvou zlomků o stejném čitateli jest ten ***větší,*** který má ***menší*** jmenovatel.

c) Je-li srovnati 2 zlomky, které nemají ani v čitateli ani ve jmenovateli stejného čísla, uvedeme je na společný jmenovatel (neb čitatel) a soudíme pak dle *a*) neb *b*); na př.: $\frac{3}{4}$ a $\frac{4}{5}$, $n\,(4.\ 5) = 20$. $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$, tedy $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$*). Aneb $\frac{3}{121}$ a $\frac{4}{161}$; $\frac{3}{121} = \frac{12}{484}$. $\frac{4}{161} = \frac{12}{483}$. tedy $\frac{3}{121} < \frac{4}{161}$.

d) V řadě zlomkové $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7} \ldots$ jest vyhledati vždy 2 zlomky. jejichž čitatele jsou navzájem násobky a určiti *a*) oč, *b*) kolikrát jest jeden > druhého; na př.: $\frac{6}{7} > \frac{2}{7}$, *a*) o $\frac{4}{7}$, *b*) 3krát.

Jest učiniti totéž s jinou řadou zlomkovou.

Kolikrát se zvětší (zmenší) čitatel zlomku, tolikrát se zvětší (zmenší) i zlomek (jeho hodnota).

e) V řadě jednotek zlomkových $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$ jest vyhledati vždy dvě, jejichž jmenovatele jsou navzájem násobky a určiti kolikrát jest jedna > druhé, na př.: $\frac{1}{4}$ jest 2krát, $\frac{1}{6}$ 3krát . . . $< \frac{1}{2}$. Možno také říci rázem oč? Možno srovnati rázem i ty jednotky zlomkové, jejichž jmenovatele nejsou násobky?

Platí totéž i o zlomcích s jinými avšak stejnými čitateli?

Kolikrát se zvětší (zmenší) jmenovatel zlomku. tolikrát se zmenší (zvětší) zlomek (jeho hodnota).

Cvičení: **1**. Který ze zlomků jest větší? *a*) $\frac{7}{11}, \frac{10}{11}$; *b*) $\frac{5}{8}, \frac{5}{12}$; *c*) $\frac{6}{7}, \frac{7}{8}$; *d*) $\frac{7}{9}, \frac{9}{11}$; *e*) $\frac{17}{20}, \frac{19}{24}$; *f*) $\frac{18}{35}, \frac{37}{72}$; *g*) $\frac{35}{64}, \frac{54}{99}$; *h*) $\frac{5}{251}, \frac{7}{352}$; *i*) $\frac{16}{379}, \frac{24}{569}$.

2. Který ze zlomků jest největší, který nejmenší? (Možno-li rázem.) *a*) $\frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}$; *b*) $\frac{3}{4}, \frac{8}{11}, \frac{11}{16}$; *c*) $\frac{5}{9}, \frac{11}{18}, \frac{15}{28}$; *d*) $\frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{12}{19}$.

Někdy netřeba uváděti na společný jmenovatel, na př.: $\frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{19}{25}$; $\frac{4}{5} = \frac{16}{20} < \frac{16}{19}$; $\frac{4}{5} = \frac{20}{25} > \frac{19}{25}$; tedy $\frac{16}{19} > \frac{4}{5} > \frac{19}{25}$.

3. Srovnejte možno-li otázkou „oč“ i „kolikrát“ tyto zlomky: *a*) $\frac{7}{4}, \frac{21}{4}$; *b*) $\frac{7}{3}, \frac{7}{18}$; *c*) $\frac{3}{5}, \frac{9}{5}, \frac{18}{5}$; *d*) $\frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{12}$.

---

*) Zde jest kratší tato úvaha: 3 čtvrtinám schází do celku $\frac{1}{4}$; $\frac{4}{5}$ám $\frac{1}{5}$; ježto $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$, jest $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$; beze slov psáno:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$
$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}.$$

Přidej slova.

Sčítání zlomků. $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$. Stejnojmenné zlomky se sčítají, sečteme-li čitatele a společný jmenovatel vytkneme*). § 43.

Mají-li zlomky nestejné jmenovatele, uvedeme je na nejmenší společný jmenovatel a sčítáme dle uvedené poučky, na př.:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{8 + 9 + 10}{12} = \frac{27}{12} = 2\frac{1}{4}.$$

Složenější příklady upravujeme takto:

$$\frac{7}{15} + \frac{4}{21} + \frac{5}{9} = ? = 1\frac{67}{315}.$$

$$\begin{array}{l|l} 21 = 3 \times 7 & \left.\begin{array}{l} \frac{4}{21} = \frac{4}{21}\Big|\frac{15}{5 \times 3} = \frac{60}{315} \\ \frac{7}{15} = \frac{7}{15}\Big|\frac{21}{3 \times 7} = \frac{147}{315} \\ \frac{5}{9} = \frac{5}{9}\Big|\frac{35}{5 \times 7} = \frac{175}{315} \end{array}\right\} \frac{382}{315} \\ 15 = 3 \times 5 & \\ 9 = 3 \times 3 & \\ n = 3 \times 7 \times 5 \times 3 = 315 & \end{array}$$

Je-li sčítati smíšená čísla, sečteme zlomky i celky zvlášť a součty sloučíme, na př.: $3\frac{5}{6} + 5\frac{7}{9} = 8 + \frac{15 + 14}{18} = 8 + \frac{29}{18} = 9\frac{11}{18}$.

Cvičení. **1.** *a)* $\frac{17}{24} + 13\frac{9}{24} + 5\frac{11}{24}$, *b)* $25\frac{15}{38} + 4\frac{27}{38} + 12\frac{5}{38}$.

2. *a)* $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10}$, *b)* $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{7}{10} + \frac{9}{12} + \frac{13}{30}$.

3. *a)* $\frac{7}{24} + \frac{14}{27} + \frac{5}{24} + \frac{4}{27}$ **), *b)* $\frac{25}{36} + \frac{6}{56} + \frac{2}{36} + \frac{15}{56}$.

4. *a)* $\frac{5}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{12}$, *b)* $7\frac{3}{10} + \frac{5}{12} + 5\frac{9}{14}$, *c)* $3\frac{5}{12} + 4\frac{3}{8} + \frac{11}{15}$.

5. *a)* $\frac{5}{6} + 3\frac{8}{15} + 4\frac{7}{12}$, *b)* $\frac{3}{24} + \frac{10}{45} + \frac{15}{40} + \frac{49}{63}$ ***).

6. *a)* $\frac{2}{5} + \frac{4}{9} + \frac{5}{12} + \frac{7}{15}$, *b)* $\frac{1}{6} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9} + \frac{11}{28} + \frac{31}{72}$.

7. *a)* $\frac{35}{204} + \frac{42}{276}$, *b)* $\frac{141}{6840} + \frac{203}{7920} + \frac{217}{17100}$.

8. Kdosi přijal $8\frac{1}{2}$ *K*, $11\frac{3}{4}$ *K*, $7\frac{2}{5}$ *K* a $10\frac{3}{10}$ *K*. Kolik přijal celkem?

9. Nádržka, do níž vedou 3 roury, naplní se první rourou za 4 hodiny, druhou za 5 a třetí za 9 hodin; koliká část naplní se za 1 hodinu, *a)* každou rourou, *b)* teče-li voda současně všemi rourami?

10. Kupec platil $137\frac{1}{2}$ *K* za zboží, $2\frac{3}{4}$ *K* za dovoz a $3\frac{7}{20}$ *K* jiných výloh. Zač prodá zboží, chce-li $21\frac{3}{5}$ *K* získati?

11. Při kopání studně 6 *m* hluboké bylo smluveno za 1 *m* $1\frac{4}{5}$ zl. mzdy; za každý další *m* o $1\frac{3}{4}$ zl. více. Za kolik zl. byla vykopána celá studně?

Odčítání zlomků. $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$. Stejnojmenné zlomky odčítáme, odečteme-li čitatele a společný jmenovatel vytkneme†). § 44.

Mají-li zlomky nestejné jmenovatele, uvedeme je na nejmenší

---

*) Vytknouti čitatel, jmenovatel, činitel . . . znamená napsati čitatel, jmenovatel, činitel . . . znova v téže vlastnosti. Přesněji zní poučka hoření takto: Stejnojmenné zlomky se sčítají, lomíme-li součet čitatelů společným jmenovatelem.

**) $= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{6}$.

***) Zjednoduš dříve.

†) Zlomky stejnojmenné se odčítají, lomíme-li rozdíl čitatelů jmenovatelem.

společný jmenovatel a pak odčítáme, na př.: $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$. U čísel smíšených odčítáme zlomky zvlášť a celky zvlášť. Je-li zlomek menšence $<$ zlomku menšitele, zvětší se zlomek menšence a celky menšitele o 1, na př.: $5\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6} = 5\frac{15}{12} - 3\frac{10}{12} = 2\frac{5}{12}$. Při větších číslech upravujeme jako při sčítání.

Cvičení: **1.** *a*) $13\frac{3}{8} - 7\frac{5}{8}$, *b*) $15 - 13\frac{7}{24}$, *c*) $23\frac{5}{9} - 15\frac{7}{9}$.
2. *a*) $\frac{23}{24} - \frac{7}{16}$, *b*) $1\frac{9}{28} - \frac{8}{21}$, *c*) $5\frac{51}{143} - \frac{33}{78}$.
3. *a*) $4\frac{45}{1044} - 1\frac{31}{696}$, *b*) $17\frac{143}{792} - 2\frac{143}{440}$, *c*) $\frac{353}{2310} - \frac{347}{3465}$.

4. Jest zvětšiti čitatel i jmenovatel zlomku $\frac{3}{7}$, *a*) o 1, *b*) o 3, *c*) o 5 a určiti, oč se liší vzniklé zlomky od daného.

5. Jest rozšířiti zlomek $\frac{2}{3}$ na 6tiny, 9tiny, 12tiny a ze vzniklých zlomků utvořiti nové sečtením čitatelů a jmenovatelů, (na př.: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2+4}{3+6}$). Zlomky součtové jest srovnati se zlomkem daným.

6. Který ze zlomků jest větší a oč, *a*) $\frac{17}{468}$, $\frac{19}{520}$, *b*) $\frac{27}{850}$, $\frac{24}{765}$?

7. Oč jest součet $(35\frac{4}{21} + 8\frac{7}{15}) >$ rozdílu $(35\frac{4}{21} - 8\frac{7}{9})$?

8. Oč jest rozdíl $(1884 - 997\frac{59}{75}) >$ rozdílu $528\frac{8}{25} - 13\frac{14}{15}$?

9. Oč jest *a*) součet $19\frac{2}{3} + 27\frac{5}{12} + 345\frac{4}{15} < 400$? *b*) větší rozdílu $576\frac{5}{12} - 387\frac{17}{21}$?

10. Strana trojúhelníka jest $8\frac{1}{2}\,m$, druhá o $5\frac{1}{8}\,m$ větší, třetí o $3\frac{3}{4}\,m$ menší prvé; jak veliký jest součet všech tří stran?

11. Čtyři dělníci dělili se o mzdu; prvý obdržel $\frac{1}{3}$, druhý $\frac{1}{4}$, třetí $\frac{1}{5}$, čtvrtý $\frac{1}{6}$; kolik ještě zbylo? (Zkoušku pro mzdu = 120 zl.)

12. Obchodník obilím měl 52 *hl* obilí; z toho prodal $14\frac{3}{4}$ *hl* a $27\frac{2}{5}$ *hl*, přikoupil $35\frac{5}{8}$ *hl* a opět odprodal $39\frac{7}{10}$ *hl*. Kolik *hl* mu zbylo?

13. Sklenář obdržel bednu zboží vážící $53\frac{17}{40}$ *kg*; zboží samo vážilo $41\frac{93}{125}$ *kg*; kolik vážil obal (tára)?

§ 45. Násobení zlomku číslem celým.

$\frac{4}{5} \times 3$ značí $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{4+4+4}{5} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$;
zkrátka tedy $\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4 \times 3}{5}$; a zvratně psáno: $\frac{4 \times 3}{5} = \frac{4}{5} \times 3$.

Zlomek se násobí, násobíme-li čitatel a jmenovatel vytkneme*).

Násobíme-li ve zlomku čitatel, znásobí se tím hodnota zlomku.

Činitel zlomku možno napsati co činitel čitatele. Činitel čitatele možno vytknouti před zlomek (zlomek roznásobiti). Dle této poučky možno násobení zlomku zjednodušiti, je-li násobitel a jmenovatel soudělný, na př.: $\frac{5}{12} \times 8 = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Důležity jsou tyto zvláštní případy: Je-li násobitel *a*) roven jme-

*) Zlomek se násobí, lomíme-li součin čitatele a násobitele jmenovatelem.

novateli, *b*) je-li násobkem jmenovatele, *c*) je-li dělitelem jmenovatele.

a) $\frac{3}{5} \times 5 = 3$; *b*) $\frac{2}{3} \times 9 = 2 \times 3 = 6$; *c*) $\frac{5}{12} \times 4 = \frac{5}{3} = \frac{5}{12:4}$.

a) Zlomek násoben jsa jmenovatelem, dá [za součin] čitatel (= číslo celé), aneb: číslo děleno a násobeno jsouc posloupně týmž číslem, nemění se (srovnej § 14. *h*).

b) Zlomek, násoben jsa násobkem jmenovatele, dá číslo celé.

c) Je-li násobiti zlomek dělitelem čitatele, dělíme jmenovatel.

Kterak lze ze zlomku učiniti číslo celé? Jakému výkonu rovná se črtnutí jmenovatele? Kterak změní se hodnota zlomku, dělíme-li jeho jmenovatel?

$4\frac{2}{5} \times 3$ značí $4\frac{2}{5} + 4\frac{2}{5} + 4\frac{2}{5} = 4 + 4 + 4 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 4 \times 3 + \frac{2}{5} \times 3$
$$= 12 + \frac{6}{5} = 13\frac{1}{5}.$$

Číslo smíšené se násobí, násobíme-li celky i zlomek a součiny sloučíme.

Avšak možno též smíšené číslo proměniti ve zlomek a ten násobiti; tedy $4\frac{2}{5} \times 3 = \frac{22}{5} \times 3 = \frac{66}{5} = 13\frac{1}{5}$ *); který z obou způsobů jest výhodnější?

Cvičení: **1.** $\frac{5}{7} \times 23$, $\frac{4}{15} \times 28$, $5\frac{4}{13} \times 9$, $25\frac{5}{9} \times 23$

2. Zlomky $\frac{12}{5}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{24}{25}$ jest roznásobiti**), t. j. dáti jim tvar součinu.

3. $17\frac{3}{8} \times 8$, $\frac{17}{24} \times 3 \times 8$, $2\frac{7}{12} \times 24$, $16\frac{13}{27} \times 91$.

4. $\frac{7}{15} \times 5$, $1\frac{23}{28} \times 7$, $5\frac{13}{36} \times 45$, $1\frac{7}{72} \times 15 \times 40$.

5. $\frac{147}{100} \times 10$, $\frac{147}{100} \times 30$, $\frac{147}{100} \times 100$, $\frac{147}{100} \times 1000$, $\frac{23}{1000} \times 10$.

6. Oč jest součin $467\frac{5}{12} \times 305 >$ součinu $24\frac{4}{9} \times 513$?

7. Kolik zl. vyplatí celkem rolník 10 dělníkům, má-li každý $\frac{4}{5}$ zl. denní mzdy?

8. Jak veliký součet obdržíme, přičteme-li k číslu $234\frac{5}{6}$ číslo $24\frac{7}{51}$ posloupně 34krát?

9. 1 *kg* $\doteq 1\frac{4}{5}$ víd. libry. Kolik liber má *a*) 5 *kg*, *b*) metr. cent?

10. Spotřebuje-li kůň denně $6\frac{5}{12}$ *kg* sena a $\frac{2}{25}$ *hl* ovsa; kolik sena a ovsa spotřebuje 18 koní za měsíc?

11. Obchodník koupil 35 *m* sukna po $3\frac{3}{4}$ zl. ($3\frac{2}{3}$); kolik utržil za veškeré sukno, získal-li na *m* $\frac{7}{20}$ zl. ($\frac{8}{21}$)?

12. Kupec koupil 135 *kg* zboží za $168\frac{1}{2}$ zl.; za dovoz zaplatil $5\frac{3}{20}$ zl.; kolik získal, prodával-li *kg* za $2\frac{3}{4}$ *K*?

Dělení zlomku celým číslem. *a*) Považujeme-li dělení $\frac{13}{5} : 4$ **§ 46.**

---

*) U čísel menších jest vždy počítati takto.

**) dle vzoru: $\frac{15}{16} = \frac{5 \times 3}{16} = \frac{5}{16} \times 3 = \frac{3}{16} \times 5$.

za rozdělování, nutno rozděliti 1 pětinu na 4 díly, čímž obdržíme $\frac{1}{20}$; ze 13 pětin 4tý díl bude 13 dvacetin, tedy $\frac{13}{5} : 4 = \frac{13}{5 \times 4}$.

Považujeme-li $\frac{13}{5} : 4$ za měření, nutno z dělitele 4 učiniti pětiny a psáti: $\frac{13}{5} : 4 = \frac{13}{5} : \frac{20}{5} = \frac{13}{20} = \frac{13}{5 \times 4}$.

Z toho vidno, že: Zlomek se dělí, *násobíme-li* jmenovatel a čitatel vytkneme*). (Viz § 42. *e*).

b) Zvláštním případem jest, je-li čitatel násobkem dělitele, na př.: $\frac{12}{5} : 4$; ježto lze 12 na 4 díly rozděliti, lze psáti přímo $\frac{12}{5} : 4 = \frac{3}{5} = \frac{12 : 4}{5}$.

Je-li děliti zlomek, jehož čitatel jest násobkem dělitele, dělíme čitatel a jmenovatel vytkneme. Na tento zvláštní případ lze převésti každý jiný, na př.; *a*) $\frac{13}{5} : 4 = \frac{13 \times 4}{5 \times 4} : 4 = \frac{13 \times 4 : 4}{5 \times 4} = \frac{13}{5 \times 4}$, čímž poučka *a*) znova stvrzena.

c) Je-li čitatel a dělitel soudělný, na př. $\frac{3}{7} : 6$ počítáme dle *a*)

$$= \frac{3}{7 \times 6} = \frac{1}{7 \times 2} = \frac{1}{14}$$

aneb dle poučky: „Podíl se nemění, dělíme-li dělenec i dělitel stejným číslem“ $\frac{12}{7} : 15 = \frac{4}{7} : 5$**$) = \frac{4}{35}$.

d) Máme-li děliti číslo smíšené, jehož celky nejsou dělitebné, na př. $3\frac{3}{5} : 6$, proměníme je ve zlomek a dělíme; tedy $= \frac{18}{5} : 6 = \frac{3}{5}$.

Jsou-li celky větší než dělitel, lze též takto děliti; avšak bývá výhodnější rozděliti celky zvlášť a zbytek se zlomkem též zvlášť, na př. $273\frac{6}{7} : 18 = 15\frac{3}{14}$ neboť $273\frac{6}{7} : 18 = 15$ se zbytkem $3\frac{6}{7}$, t. j. $\frac{27}{7}$ a $\frac{27}{7} : 18 = \frac{3}{7} : 2 = \frac{3}{14}$.

Cvičení: **1.** Jest naznačiti graficky podíly $\frac{1}{2} : 3$, $\frac{1}{3} : 2$, $\frac{4}{5} : 2$, $\frac{3}{8} : 3$, $1\frac{1}{3} : 2$.

2. $\frac{7}{12} : 3$, $5\frac{1}{6} : 9$, $2751\frac{2}{5} : 6$, $9384\frac{1}{3} : 13$.

3. $\frac{65}{72} : 5$, $\frac{120}{37} : 8$, $9\frac{4}{13} : 11$, $80\frac{6}{37} : 12$.

4. $\frac{32}{35} : 40$, $\frac{21}{4} : 15$, $19\frac{2}{25} : 27$, $2339\frac{13}{17} : 32$.

5. $\frac{1}{10} : 10$, $\frac{3}{100} : 10$, $\frac{1}{10} : 100$, $\frac{9}{100} : 30$, $\frac{21}{10} : 700$***).

6. Jest vypočítati 12tinu z $\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{2}$, $17\frac{1}{7}$.

7. Třem osobám jest rozděliti $27\frac{1}{3}$ zl. tak, aby první dostal $\frac{1}{2}$, druhý $\frac{1}{3}$, třetí $\frac{1}{4}$; je to možno? Kolik by měl každý dostati? Kolik zl. se nedostává?

8. Oč jest $\frac{1}{10}$ čísla $27\frac{1}{7} > \frac{1}{15}$ téhož čísla?

9. Je-li *m* sukna za 5 zl., kolik *m* lze koupiti za $24\frac{1}{4}$ zl.? (Určte délku v *m* a *cm*.)

---

*) Zlomek se dělí, lomíme-li čitatel součinem jmenovatele a dělitele.

**) Zove se též krácení.

***) Které poučky o zlomcích desetinných jsou zde vyznačeny?

10. Kupec koupil 79 *kg* cukru za 32 zl. $58\frac{3}{4}$ kr. Zač prodal 1 *kg*, získal-li v celku 3 zl. $35\frac{3}{4}$ kr.?

11. Jest vypočítati vteřinovou rychlost*) vlaku, který vykonal za 7 minut 5 *km* $515\frac{2}{3}$ *m*.

12. Prodává-li se $\frac{4}{5}$ *q* cukru za $34\frac{2}{3}$ zl, zač se prodá 20 *kg* ($=\frac{1}{5}$ *q*)?

13. 1 hod. = ? měsíců, 1 vteřina = ? dní, 1'' = ? °.

14. Jest uvésti na nejvyšší rod: *a*) 43° 22' 30'', *b*) 3 měs. 15 d. 8 h., *c*) 2 d. 9 h. 24 m.

Násobení zlomkem. V § 35. vyloženo, že $5 \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{4}$, z čehož plyne poučka: ***Násobiti zlomkem jsou 2 posloupné výkony: násobiti čitatelem a děliti jmenovatelem*****) (sled výkonů jest libovolný). § 47.

A ježto $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4}$ jest $5 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 5$ t. j.

Činitele lze zaměniti i tehdy, je-li jeden z nich zlomkem.

Někdy bývá s výhodou dříve jmenovatelem děliti a pak čitatelem násobiti, na př.: $8 \times \frac{3}{4} = \frac{8}{4} \times 3 = 6$.

b) Poučka *a*) platí i tehdy, je-li zlomek násobiti zlomkem, na př. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = ?$ Vykonáme-li nejprve násobení čitatelem $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{2 \times 3}{5}$, a na to dělení jmenovatelem $\frac{2 \times 3}{5} \,.\, 4 = \frac{2 \times 3}{5 \times 4}$, obdržíme $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4}$ t. j.: Zlomek zlomkem se násobí, lomíme-li součin čitatelů součinem jmenovatelů.

Dle této poučky možno násobiti i celé číslo zlomkem, proměníme-li je ve tvar zlomkový, na př.:

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{4}; \quad \frac{5}{6} \times 7 = \frac{5}{6} \times \frac{7}{1} = \frac{5 \times 7}{6} \text{***)}.$$

c) Čteme-li větu *a*) zvratně, obdržíme novou poučku: 3mi násobiti a výsledek 4mi děliti jest tolik jako $\frac{3}{4}$mi násobiti. Toho možno někdy s výhodou použiti. Na př.: 37×36ti a součin : 9ti $= 37 \times \frac{36}{9} = 37 \times 4$.

Násobení a dělení ruší se co výkony protivné, buď zcela, neb částečně, dle toho, jestli násobenec = děliteli čili ne.

d) Majíce číslem smíšeným násobiti, násobíme celky zvlášť a zlomkem zvlášť a součiny sloučíme, na př.:

$$3 \times 2\tfrac{4}{5} = 3 \times 2 + 3 \times \tfrac{4}{5} = 6 + \tfrac{12}{5} = 8\tfrac{2}{5}.$$

Někdy bývá výhodnější proměniti číslo smíšené ve zlomek, na př.: $3 \times 2\frac{4}{5} = 3 \times \frac{14}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$.

Číslo smíšené číslem smíšeným nenásobíme pro složitost, nýbrž

---

*) Dráhu za 1 vteřinu.

**) Zlomkem se násobí, lomíme-li součin násobence a čitatele jmenovatelem.

***) Dle toho vystačí pravidlo toto pro všechny případy násobení zlomků.

uvádíme je na zlomky, na př.: $3\frac{4}{7} \times 8\frac{2}{5}$ (značí především výkony **dva**) $3\frac{4}{7} \times 8 + 3\frac{4}{7} \times \frac{2}{5}$, z nichž každý se rozpadá opět ve **dva**:

$$3 \times 8 + \tfrac{4}{7} \times 8 + 3 \times \tfrac{2}{5} + \tfrac{4}{7} \times \tfrac{2}{5}$$

tedy v celku 4 výkony); proto počítáme takto: $3\frac{4}{7} \times 8\frac{2}{5} = \frac{25}{7} \times \frac{42}{5} = \ldots$

e) **Skracování početních výkonů** seznáme snadno z těchto příkladů:

1) $\frac{25}{7} \times \frac{42}{5} = \frac{25 \times 42}{7 \times 5}\Big|\frac{5}{1}\Big|\frac{6}{1} = 30$.*) Aneb črtáme hned v úloze

$$\tfrac{25}{7} \times \tfrac{42}{5}\Big|\tfrac{5}{1}\Big|\tfrac{6}{1} = 30.$$

2) $370 \times 6\frac{3}{4} = \left.\begin{array}{r} 370 \times 7 \\ -\ 370 \times \frac{1}{4} \end{array}\right\} \begin{array}{r} = 2590 \\ -\quad 92\frac{1}{2} \\ \hline 2497\frac{1}{2} \end{array}$

3) $573 \times \frac{5}{8} = \left.\begin{array}{r} 573 \times \frac{1}{2} \\ +\ 573 \times \frac{1}{8} \end{array}\right\} \begin{array}{r} = 286\frac{1}{2} \\ +\quad 71\frac{5}{8} \\ \hline 358\frac{1}{8} \end{array}$

Dodatek. 24 : 6 se vyslovuje též: ze 24 vzíti 6tý díl čili $\frac{1}{6}$, což opět arithmeticky značíme $24 \times \frac{1}{6}$.

Podobně místo vzíti ze 24ti 6tý díl 5krát, říká se kratšeji. vzíti ze 24ti $\frac{5}{6}$ a značí $24 \times \frac{5}{6}$.

Dle toho: vzíti $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7} \ldots$ z čísla značí číslo $\times \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7} \ldots$

Může býti součin $<$ násobence? Kdy?

Cvičení (jest opakovati příklady z §§ 35—38.): **1.** $15 \times \frac{1}{3}$, $24 \times \frac{1}{8}$, $16 \times \frac{1}{6}$, $18 \times \frac{1}{4}$, $27 \times \frac{1}{12}$.

2. $13 \times \frac{1}{10}$, $13 \times \frac{1}{100}$, $13 \times \frac{1}{1000}$, $13 \times \frac{7}{10}$, $13 \times \frac{7}{100} \ldots$ **).

3. $5 \times \frac{4}{8}$, $12 \times \frac{3}{4}$, $6 \times \frac{5}{6}$, $10 \times \frac{7}{15}$, $7 \times 1\frac{4}{5}$.

4. $\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$, $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4}$, $\frac{3}{5} \times \frac{5}{7}$, $\frac{6}{7} \times \frac{5}{6}$.

5. *a*) $13 \times 2\frac{1}{5}$, $15 \times 24\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{5} \times 2\frac{3}{4}$, $6\frac{3}{8} \times 5\frac{1}{3}$.

b) $197 \times \frac{1}{17}$, $19 \times \frac{3}{145}$, $126 \times \frac{11}{936}$, $210 \times \frac{8}{315}$.

c) $\frac{3}{7} \times \frac{28}{15} \times \frac{11}{20}$, $\frac{7}{72} \times \frac{27}{25}$, $24\frac{1}{5} \times 13\frac{2}{11}$.

d) $\frac{5}{56} \times 2\frac{2}{3} \times 7$, $108\frac{4}{7} \times 2\frac{4}{5}$, $3852 \times 4\frac{5}{6}$, $54678 \times \frac{9}{14}$ ***).

e) $7836 \times \frac{7}{18}$ ***), $247\frac{23}{88} \times 348\frac{20}{27}$.

6. Tyto 2 **posloupné** výkony $73 \times 48 : 6$, $73 : 6 \times 48$, $105 \times 18 : 45$, $91 : 56 \times 24$ jest vyznačiti výkonem jediným.

7. Jest vypočítati $5\frac{1}{2}$násobek rozdílu $(73 - 14\frac{2}{3})$.

8. Oč jest $\frac{7}{8}$ čísla 254 menší čísla samého?

9. Oč jsou $\frac{3}{4}$ čísla $79\frac{2}{3} > \frac{5}{6}$ čísla $63\frac{3}{4}$?

10. Je-li 1 m látky za 5 zl., zač je *a*) $\frac{1}{8}$ m, *b*) $\frac{3}{8}$ m, *c*) $4\frac{3}{8}$ m? ($\frac{1}{8}$ m je za 5 zl. : 8 = 5 zl. $\times \frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$ m jsou za $\frac{5}{8}$ zl. $\times 3 = 5$ zl. $\times \frac{3}{8}$;

*) Kolmice zastupuje znamení $\times$; črtnuté činitele nepatří více do počtu. V tisku nebylo lze črtnutí vyznačiti; črtněte sami!

**) Která poučka o desetinných zlomcích je tu vyznačena?

***) $\frac{9}{14} = \frac{1}{2} + ?$ $\frac{7}{18} = \frac{1}{2} - ?$

$4\,m$ jsou za 5 zl. $\times 4$; $4\frac{3}{8}\,m$ jsou za 5 zl. $\times 4 + 5$ zl. $\times \frac{3}{8} = 5$ zl. $\times 4\frac{3}{8}$. (Cenu mnohosti vypočteme, násobíme-li cenu jednotky mnohostí.)

11. Je-li $\frac{1}{4}$ *kg* za $23\frac{1}{2}$ kr., zač je *a*) 1 *kg* ($= \frac{4}{4}$)? *b*) 5 *kg* ($= \frac{20}{4}$).

12. Rolník prodal $9\frac{3}{4}$ *q* pšenice po $12\frac{1}{3}$ zl., 12 *q* žita po $9\frac{3}{8}$ zl. a $28\frac{3}{5}$ *q* ovsa po $7\frac{2}{11}$ zl. Jest vypočítati čistý příjem, měl-li při prodeji $15\frac{11}{12}$ zl. výloh.

13. Kupec koupil $35\frac{4}{5}$ *q* zboží po $24\frac{3}{4}$ zl. a prodával 1 *kg* za $30\frac{2}{5}$ kr.; kolik získal na zboží tom?

14. Jest rozvésti *a*) $\frac{11}{72}$, *b*) $\frac{13}{60}$, *c*) $2\frac{2}{5}$ roku (v celky nižšího jména).

15. Jest rozvésti *a*) $42\frac{274}{625}$ *ha*, *b*) $\frac{3}{5}$ měsíce, *c*) $7\frac{5}{8}$ *m*, *d*) $43\frac{2}{5}$ zl. v celky nižších rodů.

16. 3 bratři se měli rozděliti o 17 koní tak, aby první obdržel $\frac{1}{2}$, druhý $\frac{1}{3}$ a třetí $\frac{1}{9}$; ježto se nemohli dohodnouti, půjčil jim rozsudí 1 koně. Rozdělivše se o 18 koní, vrátili mu zbylého. Bylo rozsouzení spravedlivé?

17. Rolník prodal na trhu $12\frac{3}{4}$ *hl* žita po $8\frac{5}{9}$ zl.; kolik mu zbylo, vydal-li $5\frac{1}{3}$ zl. za dovoz a $7\frac{3}{5}$ zl. za různé potřeby?

Dělení zlomkem. *a*) Dvě čísla, jichž součin $= 1$, zovou se navzájem zvratná (reciproká), na př.: § 48.

$$3 \times \tfrac{1}{3} = 1;\ \tfrac{1}{3} \text{ jest zvratná hodnota čísla } 3;$$
$$3 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \tfrac{1}{3};$$

$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$; $\frac{5}{4}$ ($\frac{4}{5}$) jest zvratnou hodnotou čísla $\frac{4}{5}$ ($\frac{5}{4}$).

Zvratnou hodnotu zlomku nalezneme, přemístíme-li čitatel se jmenovatelem; tak jsou $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{5}$ a $\frac{5}{1}$ zvratné hodnoty navzájem. Podobně zvratnou hodnotu ku číslu celému na př. 7 nalezneme; neboť možno je psáti $\frac{7}{1}$ a zvratná hodnota tedy jest $\frac{1}{7}$.

b) Dělení $4 : \frac{3}{5}$ možno považovati za měření, proměníme-li 4 celky na pětiny; tu jsme (v § 35. *c*) uvažovali:

$$\left.\begin{array}{ll} & 4 : \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{5} : \frac{3}{5} = 4 \times 5 : 3 = \frac{4 \times 5}{3} \\ \text{a ježto} & 4 \times \frac{5}{3} \ \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{4 \times 5}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{jest } 4 : \frac{3}{5} \\ = 4 \times \frac{5}{3} \end{array}$$

Podobně:

$$\left.\begin{array}{ll} & \frac{7}{8} : \frac{3}{5} = \frac{7 \times 5}{8 \times 5} : \frac{3 \times 8}{5 \times 8} = 7 \times 5 : 3 \times 8 = \frac{7 \times 5}{3 \times 8} \\ \text{a ježto} & \frac{7}{8} \times \frac{5}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{7 \times 5}{8 \times 3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{jest } \frac{7}{8} : \frac{3}{5} \\ = \frac{7}{8} \times \frac{5}{3} \end{array}$$

Zlomkem děliti jest tolik, co zvratnou hodnotou násobiti*).

Děliti zlomkem jsou výkony dva, 1) děliti čitatelem a 2) násobiti jmenovatelem.

c) Číslem smíšeným nedělíme, nýbrž proměňujeme je ve zlomek a tím dělíme.

---

*) Tím převádíme obtížnější výkon (dělení) na snadnější (násobení).

Možno-li výkony protivné krátiti, ihned tak činíme, na př.:

$$\frac{8}{15} : \frac{24}{25} = \frac{8}{15} \times \frac{25}{24} = \frac{5}{9}; \quad \frac{5}{6} : 2\frac{1}{2} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}.\ ^{*)}$$

Může býti podíl > dělence? Kdy?

Cvičení: **1** Vyhledej zvratné hodnoty ku číslům 4, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{5}$, $5\frac{1}{3}$.

2. Opakujte příklady z § 35. 3), § 36. 16), § 37. 12) a § 38. 10).

3. Jest děliti číslo 45 zlomky $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.

4. Taktéž $\frac{3}{5}$, $2\frac{1}{6}$, $\frac{11}{12}$, $5\frac{4}{15}$, $\frac{13}{30}$ zlomkem $\frac{1}{60}$.

5 Kolikrát jest $\frac{1}{252}$ obsažena v $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{13}{28}$, $\frac{25}{36}$, $\frac{28}{63}$, $\frac{37}{84}$?

6. $21 : \frac{5}{13}$, $308 : \frac{11}{7}$, $65 : \frac{13}{24}$, $63 : \frac{84}{125}$, $2881 : \frac{67}{10}$, $2881 : \frac{67}{100}$, $2881 : \frac{67}{1000}$.

7. $\frac{16}{27} : \frac{21}{40}$, $\frac{13}{17} : \frac{8}{17}$, $\frac{12}{19} : \frac{4}{19}$, $\frac{4}{7} : \frac{4}{63}$, $\frac{12}{35} : \frac{20}{21}$.

8. $\frac{39}{56} : \frac{117}{140}$, $\frac{45}{143} : \frac{63}{154}$, $\frac{216}{175} : \frac{540}{325}$, $\frac{252}{125} : \frac{406}{715}$, $\frac{27}{100} : \frac{3}{1000}$.

9. $48 : 3\frac{1}{5}$, $63 : 4\frac{2}{3}$, $\frac{45}{56} : 5\frac{1}{7}$, $\frac{15}{27} : 2\frac{1}{12}$, $\frac{28}{25} : 4\frac{4}{13}$.

10. $8\frac{2}{5} : 2\frac{1}{3}$, $8\frac{1}{10} : \frac{9}{100}$, $1\frac{44}{100} : \frac{12}{100}$, $7\frac{1}{9} : 3\frac{1}{5}$, $9\frac{3}{28} : 10\frac{5}{16}$, $12\frac{1}{27} : 7\frac{71}{72}$.

11. Podíly *a*) 753 : 36, *b*) 1893 : 35, *c*) 6675 : 72, *d*) 7843 : 100 jest určiti smíšeným číslem a vykonati zkoušku násobením i dělením.

12. Co naznačeno $5\frac{5}{8} : 4\frac{1}{6} \times 2\frac{2}{9}$, $8\frac{7}{16} \times 11\frac{2}{3} : 1\frac{2}{25}$, *a*) vykonej posloupně, *b*) posloupně, ale ve zvratném pořádku a srovnej výsledky, *c*) nahraď dělení násobením.

13. Kterým číslem jest děliti $23\frac{4}{7}$, aby podíl byl $13\frac{1}{3}$?

14. Kterým číslem jest násobiti $7\frac{1}{5}$, aby součin byl 48?

15. Které číslo jest ve 12 obsaženo $5\frac{1}{4}$krát?

16. Kterého čísla *a*) $\frac{1}{3}$, *b*) $\frac{1}{4}$, *c*) $\frac{2}{3}$, *d*) $\frac{3}{4}$ jest 15?

17. Kterého čísla $\frac{5}{18}$ jest o $138\frac{4}{9}$ menší než $\frac{15}{24}$ z $350\frac{2}{5}$?

18. Ze tří činitelů, jichž součin jest 100, jest prvý $12\frac{2}{3}$, druhý $9\frac{3}{5}$; jak veliký jest třetí?

19 Při prodeji domu bylo $\frac{5}{7}$ kupní ceny vyplaceno hned a zbytek 3450 zl. pojištěn na domě. Zač byl dům prodán?

20. Kdosi vydá z ročního služného $\frac{1}{2}$ na stravu, $\frac{1}{9}$ na byt, $\frac{1}{15}$ na šatstvo a $\frac{1}{6}$ na ostatní potřeby. Ušetří-li tím 375 *K*, jak veliké jest jeho služné?

21. Kdosi získal denně $\frac{5}{4}$ zl.; za kolik dní získal $22\frac{1}{2}$ zl.?

22. Za kterou dobu urazí zvuk dráhu 29 *km*, rozšíří-li se za 1 vteřinu o $333\frac{1}{3}$ *m*?

23. 5 *kg* je za $3\frac{1}{2}$ zl; 1 *kg* za $3\frac{1}{2}$ zl. : 5 = $\frac{7}{10}$ zl. C e n a j e d n o t k y s e v y p o č í t á, d ě l í m e-l i c e n u v e š k e r o u p o č t e m j e d n o t e k. Platí poučka tato i když počet jednotek jest lomený? Na př.: Je-li $\frac{5}{7}$ *m* za 10 zl., je 1 *m* za $10 : \frac{5}{7} = \frac{10 \times 7}{5} = 14$ zl.? Počítejme bez poučky takto: $\frac{1}{7}$ *m* je za 10 zl. : 5 = 2 zl.; 1 *m* ($= \frac{7}{7}$) za 2 zl. × 7 = 14 zl.

24. Vypočítej oběma způsoby. Je-li *a*) $5\frac{3}{4}$ *kg* kávy za $10\frac{7}{20}$ zl., *b*) $12\frac{4}{5}$ *kg* za $21\frac{1}{3}$ zl.; zač je 1 *kg*?

---

*) Črtněte zkrácená čísla!

25. Jak brzy dojde posel do města, vzdáleného 11 *km*, urazí-li za hodinu $4\frac{2}{5}$ *km*?

26. Je-li dukát za $5\frac{7}{10}$ zl., kolika dukáty možno zaplatiti $427\frac{1}{2}$ zl.?

27. Stavební místo bylo prodáno za $12086\frac{1}{5}$ zl. Jakou výměru mělo, byl-li 1 m^2 za $18\frac{7}{8}$ zl.?

28. Obchodník koupil *a*) $12\frac{2}{5}$ *m*, *b*) $54\frac{2}{3}$ *m* sukna po $3\frac{3}{4}$ zl.; zač bude prodávati 1 *m*, chce-li při veškerém sukně získati *a*) $3\frac{1}{10}$ zl., *b*) $24\frac{3}{5}$ zl.?

29. Vinárník koupil $54\frac{1}{2}$ *hl* vína po $26\frac{3}{4}$ zl. Z toho prodal $27\frac{3}{5}$ *hl* po $30\frac{1}{2}$ zl.; po čem bude prodávati 1 *hl* ostatního vína, chce-li celkem 96 zl. $77\frac{1}{2}$ kr. získati?

Zlomky složené. Je-li v čitateli neb jmenovateli zlomku číslo lomené, zoveme zlomek takový **složeným**, na př.: $\frac{2\frac{1}{3}}{4}$, $\frac{3}{1\frac{1}{2}}$, $\frac{3\frac{1}{4}}{2\frac{3}{5}}$, $\frac{\frac{2}{3}}{4}$ atd. **§ 49.**

Zlomky těmi z pravidla nepočítáme, nýbrž uvádíme je na zlomky jednoduché. Lomítko patřící zlomku vyznačujeme silněji a píšeme ku $=$; na př.

a) $\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5}$. Majíce tudíž $\frac{3}{4}$ lomiti 5ti, píšeme 5 ihned jako činitel do jmenovatele.

b) $\frac{3}{\frac{4}{5}} = 3 : \frac{4}{5} = \frac{3 \times 5}{4}$. Majíce číslo (3) lomiti zlomkem, lomíme je čitatelem (4) a násobíme jmenovatelem (5).

c) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5}$; jako v *b*).

Podobně $\frac{2\frac{1}{3}}{4} = \frac{7}{3 \times 4}$; $\frac{3}{2\frac{3}{4}} = \frac{3 \times 4}{11}$; $\frac{3\frac{1}{5}}{4\frac{2}{3}} = \frac{16 \times 3 \mid 8}{5 \times 14 \mid 7}$ *)

Cvičení: **1.** Jest napsati tvarem jednoduchého zlomku, zkrátiti a teprv vyčísliti:

$\frac{\frac{6}{5}}{9}$, $\frac{3\frac{3}{4}}{5}$, $\frac{12}{\frac{4}{5}}$, $\frac{26}{4\frac{1}{3}}$, $\frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{5}}$, $\frac{7\frac{1}{3}}{2\frac{4}{7}}$, $\frac{\frac{4}{5} \times \frac{5}{6}}{\frac{3}{4}}$, $\frac{4\frac{1}{5} \times \frac{1}{7}}{1\frac{1}{5}}$, $\frac{6\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{3}}{1\frac{1}{4}}$, $\frac{11\frac{1}{3}}{4} : 3\frac{2}{5}$,

$2\frac{3}{7} : \frac{4}{2\frac{2}{5}}$, $\frac{3}{3\frac{1}{5}} : \frac{2}{4\frac{2}{3}}$;

dle vzoru: $\frac{2\frac{1}{4} \times 2\frac{2}{3}}{3\frac{3}{5}} = \frac{9 \times 8 \times 5 \mid 1}{4 \times 3 \times 18 \mid 2} = \frac{5}{8}$. **)

2. Jaký výkon početní značí *a*) připsání činitele, *α*) do čitatele, na př.: $\frac{3 \times 7}{4}$, *β*) do jmenovatele, na př.: $\frac{3}{4 \times 7}$ *b*) črtnutí, *α*) jmenovatele, na př.: $\frac{3}{4}$, *β*) čitatele na př.: $\frac{3}{4} \mid 1$ (proč nutno psáti po črtnutí 1?) *c*) Jaké poučky z toho plynou pro rychlé počítání?

Proměna zlomků obyčejných v desetinné. **§ 50.**

a) $\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0{\cdot}625$.

Zlomek obyčejný proměníme v desetinný, dělíme-li

*) Črtněte 16 a 14!

**) Črtněte čísla krácená!

čitatel jmenovatelem, [rozdělujíce stále zbytky na desetinné jednotky nižší, až dospějeme ku zbytku $= 0$].

b) Proměňujeme-li dle toho

$\frac{4}{11} = 4_0 : 11 = 0·3636\ldots$ vidíme, že se zbytky 7, 4 stále opakují,

$\phantom{\frac{4}{11} = {}}70 \quad = 0·\dot{3}\dot{6}$ | že tedy nedospějeme nikdy k cíli: zlomek
$\phantom{\frac{4}{11} = {}}\;\;40$ | desetinný $0·3636\ldots$ vyjadřuje podíl $\frac{4}{11}$ neúplně, (což vyznačeno tečkami ...), tak že
$\phantom{\frac{4}{11} = {}}\;\;\;70$ | lze psáti toliko $\frac{4}{11} \doteq 0·3636\ldots$
$\phantom{\frac{4}{11} = {}}\;\;\;\;4$

V případě *a)* má zlomek konečný počet míst a proto se zove ukončený zlomek desetinný, v *b)* jest počet míst nekonečný a proto se zove zlomek nekonečným (t. j. ***řada*** jednotek desetinných jest bez konce.

c) Jak možno seznati již předem, zda-li zlomek obyčejný dá se proměniti v ukončený neb nekonečný, poznáme rozšiřováním zlomku. Z vedlejších příkladů patrno, že skládá-li se jmenovatel z kmenných činitelů 2 neb 5, lze obyčejný zlomek proměniti v ukončený zlomek desetinný.

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5}\Big|\frac{2}{2} = 0·6$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Big|\frac{5}{5} = 0·5$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2 \times 2}\Big|\frac{25}{5 \times 5} = 0·75$$
$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2 \times 10}\Big|\frac{5}{5} = 0·35$$
$$\frac{5}{6} = \frac{5}{2 \times 3}\Big|\frac{5}{5}\Big|? = \text{nelze.}$$

Má-li jiné činitele — v nekonečný*). Na př.:

α) $\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0·833\ldots = 0·8\dot{3}$; *β)* $7_0 : 27 = 0·2592\ldots = 0·\dot{2}5\dot{9}$

$$\begin{array}{r} 160 \\ 250 \\ 70 \\ 16 \end{array}$$

Ježto zbytek jest $<$ dělitele a řada zbytků nekonečná, budou se zbytky a tedy i cifry v podílu opakovati; tak v *α)* opakuje se cifra 3, což značíme tečkou nad cifrou, v *β)* se opakuje skupina cifer 259, což značíme tečkami nad krajními ciframi. Zlomek takový zove se periodický a skupina cifer se opakujících perioda. Začíná-li perioda hned za desetinnou tečkou na př. *β)*, jest zlomek ryze periodický, jinak neryze periodický, na př. *α)*.

Perioda zlomku $\frac{3}{7}$ může (či musí?) býti nejvýš 6ticiferná; zlomku $\frac{23}{37}$ nejvýš 36ticiferná; (jest se o tom přesvědčiti; kolikaciferná jest?)

Cvičení: **1.** Jest proměniti zlomky $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{20} \ldots \frac{19}{20}, \frac{1}{50} \ldots \frac{49}{50}$ ve zlomky desetinné (rázem).

2. Rovněž $\frac{1}{4}, \frac{1}{25} \ldots \frac{24}{25}, \frac{1}{40} \ldots \frac{9}{40}, \frac{1}{250} \ldots \frac{99}{250}, \frac{1}{125} \ldots \frac{99}{125}$.

3. Urči předem, který z těchto zlomků se dá proměniti v ukončený zlomek desetinný $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{5}{12}, \frac{9}{12}, \frac{3}{24}, \frac{7}{40}, \frac{6}{75}$.

---

*) Platí o zlomku ve tvaru nejjednodušším (je-li čitatel i jmenovatel nesoudělný) $\frac{3}{6}\ (= \frac{1}{2})$, $\frac{9}{15}\ (= \frac{3}{5})$ lze prom. v ukončený zl. des.

4. Ve zlomcích $0{\cdot}\dot{5}$, $0{\cdot}0\dot{2}\dot{7}$, $0{\cdot}35\dot{7}0\dot{4}$, $3{\cdot}2\dot{0}\dot{5}$, $5{\cdot}\dot{3}4\dot{5}$; *a*) vyznač 8 desetinných míst a *b*) podčrtni zlomky neryze periodické.

5. Zlomky $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{31}{80}$, $\frac{17}{160}$, $\frac{37}{250}$, $\frac{53}{320}$, $\frac{97}{125}$ jest proměniti v desetinné, *a*) rozšířením, *b*) dělením.

6. Jest proměniti v zlomky desetinné *a*) $\frac{17}{64}$, $\frac{75}{192}$, $\frac{315}{1280}$, $\frac{3784}{512}$, $\frac{720}{1250}$, *b*) $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{3}{37}$, $\frac{15}{74}$, $\frac{35}{404}$, $\frac{47}{108}$, $\frac{271}{1111}$.

7. Jest vypočítati součiny $27{\cdot}2 \times \frac{7}{4}$, $43{\cdot}67 \times \frac{4}{5}$, $6{\cdot}48 \times \frac{17}{32}$, $0{\cdot}357 \times \frac{43}{125}$, *a*) jakž jest naznačeno, *b*) jako zlomky desetinné.

8. Jest vyčísliti desetinnými zlomky: *a*) 1 vteřina = ? dne; *b*) den = ? roku.

Proměna zlomků desetinných v obyčejné. *a*) Zlomkům ukončeným dáme prostě tvar zlomku obyčejného a zjednodušíme možno-li děliteli 2 neb 5, na př.: $0{\cdot}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$. **§ 51.**

b) Zlomky ryze periodické. U zlomků periodických tak učiniti nelze, ježto by čitatel i jmenovatel byl nekončeným $0{\cdot}\dot{4}\dot{2} = \frac{42}{100} \ldots$

Násobíme-li však zlomek ryze periodický 10ti, 100, 1000 ... dle toho, je-li perioda 1, 2, 3 ... ciferná a odečteme-li od 10, 100, 1000-násobku daný zlomek, zruší se nekonečnost, na př.:

$$\begin{aligned} \text{Daný zlomek} &= 0{\cdot}424242\ldots \\ \text{100násobný zlomek} &= 42{\cdot}424242\ldots \\ \hline \text{99násobný zlomek} &= 42. \\ \text{Jednoduchý zlomek} &= \tfrac{42}{99} = \tfrac{14}{33}. \end{aligned}$$

Tedy $0{\cdot}\dot{4}\dot{2} = \frac{42}{99}$, kdežto $0{\cdot}42 = \frac{42}{100}$.

c) Zlomky neryze periodické násobíme dříve 10ti, 100, 1000 ... dle toho, je-li před periodou, 1, 2, 3 ... místa a pak si vedeme jako v *b*), na př. $6{\cdot}3\dot{8}\dot{1}$ = ? (rozděl v celky a zlomek)

$$\begin{aligned} \text{10násobný zlomek} &= 3{\cdot}818181\ldots \\ \text{1000násobný zlomek} &= 381{\cdot}818181\ldots \\ \hline \text{990násobný zlomek} &= 378. \end{aligned}$$

Daný zlomek $= \frac{378}{990} = \frac{42}{110} = \frac{21}{55}$; $6{\cdot}3\dot{8}\dot{1} = 6\frac{21}{55}$.

Cvičení: **1.** Jest proměniti v zlomky obyčejné: 0·5, 0·2, 0·4, 0·6, 0·8, 0·3, 0·01, 0·02, 0·05, 0·15, 0·25, 0·75.

2. Jest vypočítati součiny $358 \times 0{\cdot}5$, $372 \times 0{\cdot}25$, $124 \times 3{\cdot}75$, $736 \times 0{\cdot}125$, *a*) jak jest vyznačeno, *b*) jako zlomky obyčejné.

3. Jest proměniti v zlomky obyčejné: *a*) 0·056, 2·65, 1·032, 0·625, 0·4096, 3·5125; *b*) $0{\cdot}\dot{1}$, $0{\cdot}\dot{3}$, $0{\cdot}\dot{6}$, $3{\cdot}\dot{1}\dot{8}$, $5{\cdot}\dot{0}\dot{9}$, $0{\cdot}\dot{3}\dot{0}$; *c*) $0{\cdot}\dot{5}9\dot{4}$, $0{\cdot}\dot{0}2\dot{7}$, $4{\cdot}\dot{7}0\dot{2}$, $3{\cdot}\dot{0}6\dot{0}$, $0{\cdot}\dot{4}73\dot{5}$; *d*) $0{\cdot}7\dot{5}$, $3{\cdot}0\dot{2}\dot{7}$, $0{\cdot}2\dot{6}5\dot{7}$, $4{\cdot}5\dot{1}\dot{6}$, $0{\cdot}245\dot{7}\dot{0}$.

4. Jest odůvodniti tyto rovnice: $0{\cdot}\dot{9} = 1$, $0{\cdot}0\dot{9} = 0{\cdot}1$, $0{\cdot}00\dot{9} = 0{\cdot}01$, $0{\cdot}1\dot{9} = 0{\cdot}2$, $0{\cdot}4\dot{9} = \frac{1}{2}$, $0{\cdot}\dot{0}\dot{9}$ = ? $0{\cdot}\dot{1}$, $0{\cdot}\dot{8} + 0{\cdot}\dot{1} = 1$, $0{\cdot}\dot{7} + 0{\cdot}\dot{2} = 1\ldots$

5. Co naznačeno, jest vypočítati proměnou ve zlomky obyčejné, a výsledek jest proměniti ve zlomek desetinný. *α*) $7{\cdot}3 + \frac{5}{6}$, $0{\cdot}4\dot{3} + \frac{4}{9}$, $\frac{2\frac{1}{3}}{5\frac{5}{6}} + 3{\cdot}\dot{4}\dot{5}$, $0{\cdot}\dot{4} + \frac{2\frac{1}{3}}{5} + \frac{\frac{5}{7}}{1\frac{5}{7}}$, $2{\cdot}\dot{4}\dot{8} + 5{\cdot}2\dot{7} + 7{\cdot}6 + 4\frac{1}{2}$, *β*) $7{\cdot}3 \times 4{\cdot}\dot{2}\dot{7}$, $1{\cdot}\dot{4}\dot{5} \times 8{\cdot}4\dot{6}$, $6{\cdot}\dot{2} : 0{\cdot}\dot{2}\dot{7}$, $2{\cdot}\dot{4} : 0{\cdot}1\dot{4}\dot{9}$.

ČÁSŤ ŠESTÁ.

Poměry a úměry.

§ 52. **O poměrech.** *a*) Dvě stejnorodé veličiny možno srovnati otázkou, kolikrát jest jedna větší druhé, aneb oč jest jedna větší druhé. Na př.: $6\,m$ jest 3krát větší $2\,m$, což se dovídáme dělením

$$6\,m : 2\,m = 3.$$

Aneb: $6\,m$ jest o $4\,m$ větší $2\,m$, což se dovídáme odčítáním

$$6\,m - 2\,m = 4\,m.$$

Výsledek prvého srovnání, jímž se budeme výhradně zabývati, jest 1) naznačený podíl ($6 : 2$*), jenž se zove poměr a 2) vypočítaný podíl (quotient $= 3$), jenž určuje velikost poměru.

Vyhledati poměr dvou veličin jest určiti, kolikrát jest druhé číslo v prvém obsaženo, což se rázem vyznačí podílem.

	Otázka:	Odpověď:
Kolikrát jest	12 větší 4	$12 : 4 = 3$krát
	12 „ 8	$12 : 8 = \frac{3}{2}$ „
	5 „ 3	$5 : 3 = \frac{5}{3}$ „
	3 „ $1\frac{1}{2}$	$3 : 1\frac{1}{2} = 2$ „
	$\frac{5}{6}$ „ $\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6} : \frac{2}{3} = \frac{5}{4}$ „
	4 „ 12	$4 : 12 = \frac{1}{3}$ „
	8 „ 12	$8 : 12 = \frac{2}{3}$ „
	3 „ 5	$3 : 5 = \frac{3}{5}$ „
	a „ 2	$a : 2 = \frac{a}{2}$ „
	a „ b	$a : b = \frac{a}{b}$ „

Veličiny, jež srovnáváme, zovou se členy poměru a to dělenec člen prvý (přední), dělitel člen druhý (zadní)

Členy poměru mohou se státi jen čísla stejnojmenná (poměr veličin), na př.: $4\,kg : 3\,kg$, aneb bezejmenná (poměr číselný), na př. $4 : 3$.

b) Je-li prvý člen větší druhého, zove se poměr sestupný, na př.:

*) Čti: 6 se má ku 2.

$12 : 4$, (jeho podíl jest > 1); je-li menší druhého — vzestupný, na př. $4 : 12$ (jeho podíl jest < 1). Je li podíl poměru $= 1$, jest prvý člen $=$ druhému.

c) Dva poměry jsou rovné (nikoliv stejné), mají-li rovné podíly; na př.: $24\,l : 8\,l = 3$ a $15 : 5 = 3$; tudíž $24\,l : 3\,l = 15 : 5$.

Podobně $12\,m : 9\,m = 12 : 9$, z čehož patrno, že společné jméno členů možno vynechati, t. j. poměr veličin možno proměniti v poměr číselný.

d) Členy a quotient poměru nejsou libovolny, nýbrž na sobě závisly; dvě z nich určují třetí.

Možno napsati 2, 6, 8 jako členy a quotient téhož poměru? Jest na př. $8 : 2 = 6$?

α) Je-li v poměru $5\frac{1}{3} : 2\frac{2}{3}$ určiti quotient, píšeme $5\frac{1}{3} : 2\frac{2}{3} = x$; odpověď jest $x = 2$ čili $5\frac{1}{3} : 2\frac{2}{3} = 2$.

β) Je-li v poměru určiti prvý člen, označujeme to $y : 4 = 3$ a čteme: které číslo jest 3krát větší 4? odpověď: $y = 4 \times 3 = 12$, t. j. prvý člen $=$ druhému $\times$ quotientem. Zkouška: $12 : 4 = 3$.

Podobně $z : 9 = \frac{1}{3}$ t. j. které číslo jest $\frac{1}{3}$krát větší 9? $z = 9 \times \frac{1}{3} = 3$. Zkouška: $3 : 9 = \frac{1}{3}$.

γ) Je-li v poměru určiti druhý člen, píšeme $15 : u = 5$ a čteme: Které číslo jest v 15 obsaženo 5krát? Odpověď: $u = 15 : 5 = 3$ t. j. druhý člen $=$ prvému : quotientem. Zkouška: $15 : 3 = 5$.

Podobně: $4 : v = \frac{1}{2}$; které číslo jest ve 4 obsaženo $\frac{1}{2}$krát? $v = 4 : \frac{1}{2} = 8$. Zkouška: $4 : 8 = \frac{1}{2}$.

Cvičení: **1.** Jest vypočítati quotient těchto poměrů: *a*) $17 : 68$, *b*) $7 : 3\frac{1}{2}$, *c*) $\frac{6}{5} : 0{\cdot}3$, *d*) $\frac{7}{3} : \frac{21}{6}$, *e*) $12\,kg : 1\frac{1}{2}\,kg$, *f*) $4\frac{1}{3}\,m : 28\,m$.

2. Které z předešlých poměrů jsou sestupné a které vzestupné?

3. Jest vypočítati prvý člen poměru, je-li člen druhý a quotient, *a*) $6\,m$, 4, *b*) $\frac{2}{3}\,kg$, 6, *c*) 7, $\frac{3}{7}$, *d*) 1·2, 0·5, *e*) $4\frac{1}{2}\,l$, 3, *f*) $4\frac{1}{3}$, $2\frac{5}{6}$.

4 Jest vypočítati člen druhý ze členu prvého a quotientu, *a*) $35\,kg$, 7, *b*) 9, $\frac{1}{3}$, *c*) $14\,m$, 4, *d*) $13\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, *e*) 7, 0·14, *f*) $17\,l$, 2·5.

Kterak možno hodnotu poměru měniti? § 53.

$$\begin{array}{l|l}
6 : 3 = 2 & 24 : 2 = 12 \\
2 \times 6 : 3 = 2 \times 2 & \frac{24}{2} : 2 = \frac{12}{2} \\
3 \times 6 : 3 = 2 \times 3 & \frac{24}{3} : 2 = \frac{12}{3} \\
4 \times 6 : 3 = 2 \times 4 & \frac{24}{n} : 2 = \frac{12}{n} \\
n \times 6 : 3 = 2 \times n &
\end{array}$$

Z příkladů těchto patrno: Kolikrát se zvětší (zmenší) v poměru prvý člen, tolikrát se též zvětší (zmenší) jeho quotient, t. j. jeho hodnota (velikosť).

Hodnota poměru jest přímo (a jednoduše) závisla na prvém členu.

Hodnota poměru (kratšeji: poměr) se násobí (dělí), násobíme-li (dělíme-li) jeho prvý člen. (I).

b) $6 : 3 = 2$	$24 : 12 = 2$
$6 : (3 \times 2) = \frac{2}{2}$	$24 : \frac{12}{2} = 2 \times 2$
$6 : (3 \times 3) = \frac{2}{3}$	$24 : \frac{12}{3} = 2 \times 3$
$6 : (3 \times 4) = \frac{2}{4}$	$24 : \frac{12}{4} = 2 \times 4$
$6 : (3 \times n) = \frac{2}{n}$	$24 : \frac{12}{n} = 2 \times n$

Kolikrát se zvětší (zmenší) v poměru člen ***druhý,*** tolikrát se zmenší (zvětší) jeho quotient t. j. jeho hodnota.

Hodnota poměru jest zvratně závislá na druhém členu svém.

Poměr se násobí (dělí), dělíme-li (násobíme-li) jeho druhý člen. (II).

Pravidlo (I). z *a*) a (II). z *b*) možno vysloviti též takto:

Poměr se násobí, násobíme-li člen prvý, aneb dělíme-li člen druhý.

Poměr se dělí, dělíme-li člen prvý, aneb násobíme-li člen druhý.

Přemístíme-li v poměru členy, obdržíme poměr nový, jejž zoveme zvratný vzhledem k danému. Na př.: $4 : 8$ jest poměr zvratný ku $8 : 4$. Quotienty zvratných poměrů jsou zvratné hodnoty.

$8 : 4 = 2$	$3 : 15 = \frac{1}{5}$	$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$
$4 : 8 = \frac{1}{2}$	$15 : 3 = 5$	$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{6}{5}$

Cvičení: **1.** Měňte tyto poměry jakž naznačeno a vypočtěte jejich velikost *a*) $(12 : 4) \times 2$, *b*) $(12 : 3) \times 3$, *c*) $(3 : 15) \times 5$, *d*) $(\frac{4}{5} : 3) \times 5$, *e*) $(\frac{3}{7} : 1) \times 7$, *f*) $(\frac{3}{8} : \frac{12}{4}) \times 4$.

2. Totéž: *a*) $(12 : 4) : 3$, *b*) $(8 : 2) : 6$, *c*) $(1 : \frac{4}{5}) : 5$, *d*) $(\frac{9}{5} : 0{\cdot}1) : 3$, *e*) $(\frac{2}{3} : \frac{4}{15}) : 5$.

§ 54. **Zjednodušování poměru.** Násobíme-li (dělíme-li) oba členy poměru týmž číslem, nezmění se jeho hodnota. Na př.: $3 : 1 = 6 : 2 = 9 : 3 = 12 : 4 = \ldots$

Této poučky možno použiti *a*) k odstranění zlomku z poměru, na př.:

$1 : \frac{1}{3} = 3 : 1$; zde byly oba členy násobeny jmenovatelem 3
aneb: $\frac{5}{6} : \frac{4}{9} = 15 : 8$; „ „ „ „ „ „ 18ti
t. j. nejmenším společným jmenovatelem. Poměr $15 : 8$ jest jednodušší než $\frac{5}{6} : \frac{4}{9}$, ač se mu rovná.

b) Ku zmenšení členů, mají-li oba společnou míru, na př.: 720 : 300 = 72 : 30 = 12 : 5. V prvém poměru byly oba členy děleny 10ti, v druhém 6ti a tím jsme obdrželi jednodušší, avšak rovný poměr 12 : 5.

Poměr zjednodušiti znamená členy poměru vyjádřiti nejmenšími čísly celými, aniž by se však hodnota poměru změnila.

Cvičení: **1.** Jest zjednodušiti tyto poměry co nejvíce, t. j. tak, aby členové jejich byly nejmenší čísla celá. *a)* 75 : 25, *b)* 168 : 120, *c)* 273 : 105, *d)* 135 : 153, *e)* $\frac{3}{4} : 2\frac{1}{4}$, *f)* $2\frac{1}{5} : 33$, *g)* $\frac{4}{5} : \frac{5}{6}$, *h)* $\frac{3}{8} : \frac{5}{12}$, *i)* $7\frac{2}{9} : 4\frac{1}{6}$, *j)* 0·5 : 0·15, *k)* $\frac{2}{3} : 0{\cdot}4$, *l)* $\frac{1}{9} : 0{\cdot}\dot{3}$, *m)* $0{\cdot}4 : 0{\cdot}\dot{4}$, *n)* $0{\cdot}\dot{5} : 0{\cdot}1\dot{6}$.

2. Jest proměniti tyto poměry v nejjednodušší poměry číselné: *a)* 3 *m* : 1·8 *m*, *b)* 1 zl. : 1 kr., *c)* 1 zl. : 25 kr., *d)* 2 *kg* : 24 *dkg*, *e)* $\sphericalangle 3^0 : \sphericalangle 1^0 15'$, *f)* 7 *m* : 175 *cm*, *g)* 3 roky 4 měs. : 2 r. 6 m.

3. Jest proměniti tyto poměry v rovné, jejichž první člen = 1; *a)* 21 : 14, *b)* 45 : 63, *c)* $3\frac{1}{5} : 7$, *d)* $0{\cdot}7 : 0{\cdot}2\dot{2}\dot{6}$.

4. Přičti ku každému členu poměru 3 : 5 tři a srovnej oba poměry.

5. Přičti ku prvému členu poměru 4 : 5 osm (násobek jeho) a ku druhému deset (týž násobek) a srovnej oba poměry.

6. Chodec vykoná za vteřinu 1·6 *m*, velocipedista 10 *m*, vlak 25 *m*; v jakém poměru jsou jejich rychlosti, t. j. za 1 vteřinu vykonané dráhy?

7. Jak se má dukát ku 20fr., platí-li tento 9 zl. 63 kr. a onen 5 zl. 76 kr.?

8. Měsíc otočí se za $27\frac{3}{10}$ dne kolem své osy; Jupiter za $9\frac{9}{10}$ hodin; jest určiti poměr oběžných dob.

9. Světnice je $7\frac{1}{2}$ *m* dlouhá a $6\frac{2}{3}$ *m* široká; jak se má její délka k šířce?

10. Jest určiti poměr ceny stříbra a zlata, razí-li se z $\frac{1}{2}$ *kg* stříbra 45 zl. a z 1 *kg* zlata 164 20 *K*.

11. V jakém poměru jest cena pšenice ku ceně vína, stojí-li *hl* prvé 12 zl. 60 kr. a *l* druhého 54 kr.

12. Jaký svah má 444 *m* dlouhá přepona pravoúhlého △ ku prvé odvěsně, je-li druhá 12 *m* dlouhá*)?

13. V jakém měřítku jest kreslen polohopisný plán města, je-li délka náměstí 225 *m* dlouhého na plánu $2\frac{1}{4}$ *dm*?

O úměrách. *a)* Dva rovné poměry spojené znamením rovnosti tvoří úměru, na př.: 12 : 3 = 8 : 2; i čteme 12 (se má) ku 3 jako 8 ku 2, aneb kolikrát jest 12 větší 3, tolikrát jest 8 větší 2. **§ 55.**

Možno každé dva poměry spojiti v úměru? 12 : 3 = 6 : 2 má

*) Svah (spád) přepony k jedné odvěsně měří se poměrem druhé odvěsny ku přeponě; poměr ten mívá v prvém členu 1; na př.: kráčím-li po svahu 1 : 50, znamená to, že vykonav cestu 50 *m* dlouhou octnu se o 1 *m* výše.

sice **tvar** úměry, ale neprávem, ježto poměry nejsou rovné. I pravíme, že úměra ta jest nesprávná. Dle čeho poznáme **správnou** úměru? Jest úměra $12 : 8 = 21 : 14$ správnou?

b) Úměra skládá se ze 2 poměrů, jež zoveme prvý (levý) a druhý (pravý) a ze 4 členů, které se zovou dle řady 1., 2., 3., 4tý. Členy 1. a 4. zovou se vnější, 2. a 3. vnitřní. Členy 1. a 3. zovou se přední (stejnolehlé), 2. a 4. zadní.

c) Jakož členy poměru, tak i členy úměry mohou býti pojmenované neb bezejmenné, na př.: $8\,m : 6\,m = 12 : 9$ aneb $20\,l : 16\,l = 5$ zl. : 4 zl. a ježto poměr veličin možno nahraditi poměrem číselným, možno hoření úměru nahraditi číselnou $20 : 16 = 5 : 4$.

d) Patrno, že všecky členy úměry nemohou býti libovolně voleny; ježto poměr prvý stanoví quotient poměru druhého, možno z tohoto voliti nejvýš 3. člen, tak že 4tý jest na prvých třech závislý. I zove se 4tou **geometricky úměrnou** ku prvým třem. Tak jest 5 čtvrtou geom. úměrnou ku číslům 6, 2, 15, ježto $6 : 2 = 15 : 5$.

e) Jsou-li vnitřní členy úměry stejné, zove se úměra **spojitou**, na př.: $8 : 4 = 4 : 2$. Úměra spojitá má jen 3 **různé** členy. Vnitřní člen spojité úměry zove se **střední** geometricky úměrná čili geometr. průměr členů vnějších; tak jest 4 geom. průměr čísel 8 a 2, t. j.: 4 jest tolikrát **menší** 8, kolikrát jest **větší** 2.

Třetí člen úměry spojité zove se třetí spojitě úměrnou prvých dvou členů; tak jest 2 třetí spojitě úměrnou čísel 8 a 4.

f) Arithmetický průměr 2, 3, 4 . . . čísel jest $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ . . . jejich součtu; na př.: arithmetický průměr čísel 9 a 5 jest $\frac{9+5}{2} = 7$ čísel 8, 12 a 19 jest $\frac{8+12+19}{3} = 13$ atd.

Cvičení: 1. Jest utvořiti úměry, jejichž poměry by měly quotienty *a*) 3, *b*) $\frac{1}{2}$, *c*) $2\frac{1}{4}$, *d*) 0·4.

2. Jest rozšířiti tyto poměry novým poměrem v úměru: *a*) $3 : 4$, *b*) $2\frac{1}{3}\,m : 7\,m$, *c*) $8\,kg : 3\frac{1}{5}\,kg$, *d*) $13·33 : 4·3$.

3. Jest rozšířiti tyto poměry ve spojitou úměru: *a*) $16 : 8$, *b*) $24 : 8$, *c*) $4\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$, *d*) $9 : 6$.

4. 20. července 1893 byla pozorována teplota v 6 hod. ráno 15·6° *C*, ve 2 hod. odpol. 26·6° *C* a v 10 hod. večer 17·9° *C*. Jaká byla průměrná teplota toho dne?

§ 56. **Řešení úměr** (trojčlenka). *a*) Úměru řešiti znamená, ze tří známých členů úměry určiti čtvrtý. Na př.: Jest nalézti prvý člen úměry, jejíž členy ostatní po řadě jsou 6, 10, 4.

Označíme-li hledaný člen x, možno psáti $x : 6 = 10 : 4$; pravý poměr má quotient $\frac{10}{4}$ a ježto levý poměr jest mu roven dle § 52: *d*) β), jest $x = 6 \times \frac{10}{4} = \frac{6 \times 10}{4}$.

Podobně rozřešíme úměru $9:6=15:y$; quotient levého poměru jest $\frac{9}{6}$ a tudíž dle § 52. *d*) γ) $y=15:\frac{9}{6}=\frac{15\times 6}{9}$.

Tak obdržíme z úměry $8:z=4:5$, $z=\frac{8\times 5}{4}$

a z úměry $8:3=u:9$, $u=\frac{8\times 9}{3}$.

b) Napíšeme-li úměru $15:6=10:4$

ve formě zlomkové $\frac{15}{6}=\frac{10}{4}$

a násobíme-li obě strany*) součinem jmenovatelů, bude

$$4\times 15=6\times 10,$$

t. j: V úměře jest součin členů vnějších = součinu členů vnitřních.

Ježto pojmenované veličiny nelze vespolek násobiti, platí poučka tato jen pro úměry číselné, aneb takové, v nichž aspoň jeden poměr jest číselný, na př.:

12 zl. : 9 zl. $=4:3$; 12 zl. $\times 3=$ 9 zl. $\times 4=$ 36 zl.

c) Napíšeme-li dva rovné součiny

$$12\times 3=4\times 9$$

a dělíme-li obě strany rovnice nejprvé 3mi a pak 4mi, obdržíme 2 rovné zlomky $\frac{12}{4}=\frac{9}{3}$, jež možno psáti ve formě úměry

$$12:4=9:3 \quad \text{aneb} \quad 9:3=12:4.$$

Kdybychom dělili nejprve 12ti a pak 9ti, obdrželi bychom

$$3:9=4:12 \quad \text{aneb} \quad 4:12=3:9.$$

Ze dvou rovných součinů lze vytvořiti úměru tím, že činitele téhož součinu učiníme členy vnitřními neb vnějšími.

Je-li v úměře součin členů vnitřních = součinu vnějších, jest úměra ***správnou.***

d) Vrátíme-li se k úměrám v *a*) a užijeme-li pouček zde vyslovených, obdržíme:

$$x:6=10:4;\quad x\times 4=6\times 10;\quad x=\frac{6\times 10}{4}=\frac{\text{součin čl. vnitř.}}{\text{vnější člen}};$$

$$9:6=15:y;\quad 9\times y=6\times 15;\quad y=\frac{6\times 15}{9}=\frac{\text{součin čl. vnitř.}}{\text{vnější člen}};$$

$$8:z=4:5;\quad z\times 4=8\times 5;\quad z=\frac{8\times 5}{4}=\frac{\text{součin čl. vnějš.}}{\text{vnitřní člen}};$$

$$8:3=u:9;\quad 3\times u=8\times 9;\quad u=\frac{8\times 9}{3}=\frac{\text{součin čl. vnějš}}{\text{vnitřní člen.}}$$

Vnější člen úměry = součinu členů vnitřních, dělenému druhým členem ***vnějším.***

---

*) Rovnost čísel se neporuší, násobíme-li obě strany týmž číslem.

Vnitřní člen úměry = součinu členů vnějších, dělenému druhým *vnitřním*.

Cvičení: **1.** Jest rozřešiti tyto úměry pomocí quotientu poměru známého; viz *a*) (se zkouškou *):

a) $x : 2$ zl. $= 7 : 4$, *b*) $5 : y = 8 : 7$, *c*) $12 : 5 = z : 1\frac{2}{3}$,
d) 6 zl. $: 8$ zl. $= 1\frac{1}{2} : u$, *e*) $x : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, *f*) $\frac{3}{4} : y = \frac{5}{6} : \frac{8}{9}$.
g) $3\frac{1}{3} : 6\frac{1}{4} = z : 2\frac{1}{2}$, *h*) $1\frac{1}{5} : 4\frac{1}{5} = \frac{1}{7} : u$, *i*) $2\,m^2\,4\,dm^2 : x = 5\cdot\dot{3} : 1\cdot\dot{5}$.

2. Jest rozřešiti tyto úměry dle poučky *d*) (se zkouškou):
a) $x : 6 = 12 : 9$, *b*) $5 : 7 = 1 : y$, *c*) $\frac{2}{9} : 4 = z : 12$,
d) $\frac{4}{5} : u = 5\frac{3}{5} : 7$, *e*) $v : 8\frac{2}{3} = 2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{6}$, *f*) $x : 8\frac{5}{9} = 5\frac{8}{11} : 2\frac{1}{3}$,
g) $5\frac{1}{3} : x = 4\frac{4}{5} : 2\frac{3}{5}$, *h*) $3\frac{1}{2} : y = 2\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5}$, *i*) $1\frac{2}{3} : 5\frac{1}{3} = 2\frac{1}{2} : z$,
j) $12\frac{3}{5} : u = 3 : \frac{7}{12}$, *k*) $2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{6} = v : 8\frac{2}{3}$, *l*) $33\frac{3}{4} : 7\frac{1}{2} = x : 2\frac{2}{3}$,
m) $85\cdot5 : 72 = y : 57\cdot6$, *n*) $23\frac{1}{3} : 35 = z : 33\cdot6$,
o) $0\cdot8\dot{3} : 0\dot{6} = u : 0\cdot8$.

3. Jest vypočítati čtvrtou měřicky úměrnou k číslům:
a) 1, 2, 3, *b*) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, *c*) $3\,m$, $15\,m$, $20\,m$.

4. Jest nalézti třetí spojitě úměrnou k číslům:
a) 50, 20, *b*) 6, 9, *c*) $2\frac{2}{5}$, $1\frac{1}{5}$, *d*) $9\frac{1}{7}$, $5\frac{1}{3}$.

5. Je-li 12 měřickým průměrem čísel: *a*) 4 a 20, *b*) 4 a 36?

6. Jest vytvořiti ze dvou rovných součinů po jedné úměře:
a) $2 \times 12 = 3 \times 8$, *b*) $8 \times 6 = 4 \times 12$,
c) $9\,m \times 4 = 6\,m \times 6$, *d*) $\frac{3}{4} \times 3\frac{5}{9} = \frac{2}{3} \times 4$.

§ 57. **Přetvořování úměry.** *a*) Přemístěním členů:

α) Správnost úměry se neporuší, přemístíme-li v ní oba poměry; na př.: z úměry 1) $6 : 3 = 4 : 2$ obdržíme dle *α*),
2) $4 : 2 = 6 : 3$.

Důvod: Rovnost se neporuší přemístěním stran.

β) Úměra se neporuší, zvrátíme-li oba poměry.

Tak bude:	Důvod: Jsou-li dvě čísla sobě rovna, jsou i jejich zvratné hodnoty sobě rovny.
z 1) dle *β*) 3) $3 : 6 = 2 : 4$	
z 2) dle *β*) 4) $2 : 4 = 3 : 6$	

γ) Úměra se neporuší, přemístíme-li v ní členy vnitřní (aneb vnější).
Tak se stane:

z 1) úměra 5) $6 : 4 = 3 : 2$	Důvod: Viz § 56. *c*).
z 2) „ 6) $4 : 6 = 2 : 3$	
z 3) „ 7) $3 : 2 = 6 : 4$	
z 4) „ 8) $2 : 3 = 4 : 6$	

*) Je-li úměra správná, poznáme dle toho, jsou-li 1) quotienty obou poměrů stejné, 2) součiny vnitřních a vnějších členů stejné.

Z každé úměry možno vytvořiti jich 8 pouhým přemístěním členů.

Chtějíce přehledně všech osm úměr sestaviti, počneme úměru 1ní, 3tí, 5tou, 7mou členem 1ním, 2hým, 3tím, 4tým a úměru 2., 4., 6., 8. vytvořme tím, že v 1., 3., 5., 7. přemístíme členy vnitřní. Tedy

1) $6 : 3 = 4 : 2$ daná	5) $4 : 2 = 6 : 3$ z 1) dle α)
2) $6 : 4 = 3 : 2$ z 1) dle γ)	6) $4 : 6 = 2 : 3$ z 5) dle γ)
3) $3 : 6 = 2 : 4$ z 1) dle β)	7) $2 : 4 = 3 : 6$ z 1) dle β)
4) $3 : 2 = 6 : 4$ z 3) dle γ)	8) $2 : 3 = 4 : 6$ z 7) dle γ)

Každý člen dané úměry jest dvakrát na 1ním místě.

Možno též v úměře $6\,m : 3\,m = 4$ zl. : 2 zl. členy 8krát přemístiti?

b) Násobením a dělením členů.

α) Úměra se neporuší, násobíme-li (dělíme-li) jeden vnější a jeden vnitřní člen; na př.:

1) $12 : 6 = 8 : 4$; oba poměry mají quotient 2

2) $12 \times \mathbf{2} : 6 \times \mathbf{2} = 8 : 4$; quotient levého poměru se násobením tím nezměnil.

3) $12 \times \mathbf{2} : 6 = 8 \times \mathbf{2} : 4$; oba quotienty se stejněkráte zvětšily.

4) $12 : 6 = 8 \times \mathbf{3} : 4 \times \mathbf{3}$; quotient prav. poměru se nezměnil.

5) $12 : 6 \times \mathbf{2} = 8 : 4 \times \mathbf{2}$; oba quotienty se stejněkráte zmenšily.

β) Úměra se neporuší, jestli jeden vnitřní (vnější) člen ***násobíme*** a druhý ***dělíme.***

6) $12 : 6 \times \mathbf{2} = \frac{8}{\mathbf{2}} : 4$ oba quotienty se stejněkráte zmenšily.

7) $\frac{12}{\mathbf{4}} : 6 = 8 : 4 \times \mathbf{4}$ " " " " "

8) $12 : 6 \times \mathbf{2} = ?\ 8 \times \mathbf{2} : 4$
9) $12 \times \mathbf{2} : 6 = ?\ 8 : 4 \times \mathbf{2}$ } Jsou tyto úměry správné?

Dle poučky *b*) zjednodušujeme úměru, jsou-li v ní zlomky, aneb velká čísla. Na př.:

1) $x : 5\frac{1}{3} = 4\frac{1}{2} : 3\frac{3}{7}$	5) $x : \frac{2}{3} = 21 : 2$
2) $x : \frac{16}{3} = \frac{9}{2} : \frac{24}{7}$	6) $x : \frac{1}{3} = 21 : 1$
3) $x : \frac{2}{3} = \frac{9}{2} : \frac{3}{7}$	7) $x : 1 = 21 : 3$
4) $x : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} : \frac{1}{7}$	8) $x : 1 = 7 : 1$
	Aneb ze 6) dle β) rázem:
	9) $x : 1 = 7 : 1.$

Aneb odstraniti dříve zlomky a potom děliti:

1) $x : 5\frac{1}{3} = 4\frac{1}{2} : 3\frac{3}{7}$	4) $x : 16 = 9 \times 7 : 24 \times 2 \times 3$
2) $x : \frac{16}{3} = \frac{9}{2} : \frac{24}{7}$	5) $x : 16 = 7 : 8 \times 2$
3) $x : \frac{16}{3} = 9 \times 7 : 24 \times 2$	6) $x : 1 = 7 : 1.$

Z úměry 6) vypočteme lehce neznámou $x = 7$, kdežto z úměry 1) jest počet složitější:

$$x = 5\tfrac{1}{3} \times 4\tfrac{1}{2} : 3\tfrac{3}{7} = \tfrac{16}{3} \times \tfrac{9}{2} \times \tfrac{7\,|\,2}{24\,|\,3} = 7.$$

Dosadíme-li za x vypočtenou hodnotu, možno úměru, je-li správně počítáno, zjednodušiti na tvar $1 : 1 = 1 : 1$, na př.:

1) $7 : \frac{16}{3} = \frac{9}{2} : \frac{24}{7}$
2) $1 : \frac{8}{3} = 9 : 24$ dle $b)$ $\beta)$
3) $1 : 8 = 3 : 24$ dle $b)$ $\beta)$
4) $1 : 1 = 3 : 3$
5) $1 : 1 = 1 : 1$.

Cvičení: **1.** Vytvoř přemístěním členů všecky možné úměry z

a) $8 : 3 = 24 : 9$, *b)* $15\,m : 10\,m = 42\,m : 28\,m$,

a přesvědč se o jich správnosti a to u každé nejvhodnějším způsobem.

2. Tyto úměry jest α) rozřešiti rázem, β) dříve zjednodušiti a potom rozřešiti: *a)* $4\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} = x : 4\frac{2}{3}$, *b)* $2\frac{1}{6} : 2\frac{1}{2} = 8\frac{2}{3} : x$, *c)* $x : 35 = \frac{2}{9} : 1\frac{2}{3}$, *d)* $0{\cdot}9 : 0{\cdot}12 = 0{\cdot}96 : x$.

3. Jest se přesvědčiti o správnosti těchto úměr zjednodušením:

a) $1\frac{1}{5} : 4\frac{1}{5} = \frac{1}{7} : \frac{1}{2}$, *b)* $6\frac{1}{4} : 11\frac{2}{3} = 1\frac{1}{4} : 2\frac{1}{3}$, *c)* $3\frac{1}{4} : \frac{2}{7} = ?\ 4\frac{1}{5} : \frac{3}{4}$, *d)* $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6} : \frac{8}{9}$, *e)* $0{\cdot}63 : 3{\cdot}78 = 0\,78 : 4{\cdot}68$.

ČÁSŤ SEDMÁ.

Závislosť veličin.

8. **O úměrných veličinách.** Změníme-li množství zboží, změní se i jeho hodnota. Změna jedné veličiny má za následek změnu druhé.

I pravíme, že zboží a jeho cena jsou na sobě závisly.

Změníme-li počet dělníků, změní se tím i doba pracovní, jíž jest třeba k vykonání práce. Doba pracovní jest závislá na počtu dělníků.

Změníme-li stranu čtverce, změní se tím i jeho plocha. Plocha čtverce je tudíž závislá na délce strany.

Změníme-li $\left\{\begin{array}{l}\text{čitatel}\\ \text{jmenovatel}\end{array}\right\}$ zlomku při témže $\left\{\begin{array}{l}\text{jmenovateli,}\\ \text{čitateli,}\end{array}\right\}$ změní se tím i jeho hodnota.

Hodnota zlomku jest tudíž závislá, jednak na čitateli, jednak na jmenovateli.

Veličiny, jež spolu tak souvisí, že změna jedné má za následek změnu druhé, zovou se ***závislé***.

Závislosť může býti buď *a)* přímá, neb *b)* zvratná.

a) Souvisí-li veličiny tak, že $\left\{\begin{array}{l}\text{zvětšením}\\ \text{zmenšením}\end{array}\right\}$ jedné, $\left\{\begin{array}{l}\text{zvětší}\\ \text{zmenší}\end{array}\right\}$ se i druhá, zoveme takovou závislosť přímou; na př.: Je-li cena 1 *kg* kávy 2 zl., jest cena 2 *kg* 4 zl., 3 *kg* 6 zl., $\frac{1}{2}$ *kg* 1 zl., $\frac{1}{4}$ *kg* 50 kr. atd., aneb zvětšíme-li stranu čtverce 2krát, zvětší se plocha čtverce 4krát. Cena kávy a váha kávy, plocha a strana čtverce, jsou na sobě **přímo** závisly.

b) Souvisí-li dvě veličiny tak, že $\left\{\begin{matrix}\text{zvětšením}\\ \text{zmenšením}\end{matrix}\right\}$ jedné se druhá $\left\{\begin{matrix}\text{zmenší,}\\ \text{zvětší,}\end{matrix}\right\}$ pravíme, že jsou na sobě zvratně závisly; na př.: Zvětšíme-li počet dělníků, bude táž práce **dříve** hotova, t. j.: doba pracovní se zmenší. Počet dělníků a doba pracovní jsou zvratně závisly.

Zvětšíme-li jeden činitel součinu, nutno druhý zmenšiti, má-li hodnota součinu zůstati nezměněna; na př.: 3×8 a 6×4. Činitele téhož součinu jsou na sobě zvratně závisly. Čím dále se vzdalujeme od zvučícího zvonu, tím slabší jest jeho zvuk. Síla zvuku jest zvratně závislá na vzdálenosti zdroje zvučícího.

Závislost dále dělíme na

A) jednoduchou a *B*) složenou.

A) *a*) $\left\{\begin{matrix}\text{Zvětšíme-li}\\ \text{Zmenšíme-li}\end{matrix}\right\}$ jednu veličinu 2, 3, 4 . . . krát a druhá se tím **též** 2, 3, 4 . . . krát $\left\{\begin{matrix}\text{zvětší,}\\ \text{zmenší,}\end{matrix}\right\}$ pravíme, že veličiny jsou na sobě přímo a **jednoduše** závisly, či zkrátka přímo ***úměrny****), na př.: množství zboží a jeho cena; hodnota zlomku a jeho čitatel (při nezměněném jmenovateli), čitatel a jmenovatel zlomku při téže hodnotě zlomku; počet dělníků a vykonaná práce**); rychlost a vykonaná dráha (za touž dobu); náklad a dovozné (při stejné dráze); délka dráhy a dovozné (při témže nákladu); plocha obdélníka a jeho $\left\{\begin{matrix}\text{délka}\\ \text{šířka}\end{matrix}\right\}$ při stejné $\left\{\begin{matrix}\text{šířce}\\ \text{délce}\end{matrix}\right\}$; jmenujte jiné doklady.

b) $\left\{\begin{matrix}\text{Zvětšíme-li}\\ \text{Zmenšíme-li}\end{matrix}\right\}$ jednu veličinu 2, 3, 4 . . . krát a druhá se tím 2, 3, 4 . . . krát $\left\{\begin{matrix}\text{zmenší,}\\ \text{zvětší,}\end{matrix}\right\}$ jsou veličiny ty na sobě zvratně a **jednoduše** závisly či **zvratně úměrny**; na př.: počet dělníků a doba pracovní**); hodnota zlomku a jeho jmenovatel (při stejném čitateli);

---

*) Ježto možno z nich sestaviti úměru.

**) Ceteris paribus t. j. za stejných poměrů, na př. je-li jeden dělník pracovitý jako druhý; byla by vykonaná práce též dvakrát větší, kdyby místo 10 dělníků statných neb zručných vzato bylo 20 nedospělých neb liknavých?

Podobně bývá cena zboží *ve velkém* menší a nikoliv **úměrná** množství. (Proč?)

rychlosť a doba k vykonání téže dráhy potřebná, 2 činitelové téhož součinu; jmenujte jiné doklady.

B) Závislosť složená.

Není-li závislosť jednoduchá, jest složená. Sem patří na př.: 1) závislosť čtvercová a 2) krychlová.

1) Zvětšíme-li stranu čtverce, 2, 3, 4 . . . krát, zvětší se plocha $4 = 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $16 = 4 \times 4$ . . . krát. Takovou závislosť zoveme čtvercovou a pravíme, že plocha je úměrna se čtvercem strany, nikoliv se stranou.

2) Zvětšíme-li hranu krychle 2, 3, 4 . . . krát, zvětší se obsah krychle $8 = 2 \times 2 \times 2$, $27 = 3 \times 3 \times 3$, $64 = 4 \times 4 \times 4$ . . . krát; závislosť takovou zoveme krychlovou (kubickou) a pravíme, že obsah krychle jest úměrný s krychlí hrany.

§ 59. **Jednoduchá trojčlenka.**

Jsou-li 3 *kg* zboží za 5 zl. (podmínka),
je 6 *kg* zboží za *x* zl. (otázka).

Úlohy, v nichž se vyskytují veličiny závislé, píšeme pro přehled v řádky a sloupce a to podmínku do řádku jednoho a otázku do řádku druhého tak, aby veličiny stejnojmenné stály v sloupci.

Veličiny stojící v témže řádku zovou se příslušné.

Známe-li podmínku, možno k libovolné veličině druhu jednoho určiti příslušnou veličinu druhu závislého. Ježto ke třem daným veličinám hledáme čtvrtou závislou, zove se počet tento trojčlenným či zkrátka trojčlenkou [regula de tribus (membris)].

Úlohy tohoto rázu řešíme tak, že nejprve zkoumáme, jaká jest závislosť mezi oběma danými druhy

V úloze poslední jest závislosť přímá (jednoduchá*), což vyznačíme vhodným způsobem, na př.: obloučkem spojujícím oba druhy a na něm : (tedy $\overset{:}{\frown}$); závislosť nepřímou vyznač $\frac{1}{\cdot\cdot}$. I soudíme: Kolikrát jest veličina druhu prvého větší (neb menší) než druhá, tolikrát jest i příslušná veličina druhu druhého větší (neb menší) než druhá stejnojmenná. Tedy srovnáváme veličiny v sloupci stojící.

§ 60. **Řešení závěrem.** Možno-li veličiny ty lehko srovnati — (je-li na př. jedna násobkem neb dělitelem druhé), tu závěr na neznámou jest rázem učiněn a proto methodu tu zoveme řešení závěrem. Na př.: *a*) Závěr na násobek neb dělitel.

1) (Podm.)	Spotřebuje-li 5 koní za týden 3·5 *hl* ovsa,	čím > strávníků
(Otázka)	„ 15 „ „ „ x „ $= 3{\cdot}5 \times 3$	tím > stravy.

*) Omezujíce se zde na souvislosti jednoduché, nebudeme budoucně toho zvlášť vytýkati.

2) (Podm.) Vykonáme-li za 8 hodin cestu 36 *km*,
(Otázka.) „ při téže rychlosti za 2 „ „ y *km* = 36 : 4.

Čím < doba, tím < dráha.

Podobně při závislosti zvratné.

3) (Podm.) Vystaví-li 5 zedníků zeď za 4 dny,
(Otázka.) „ (cet. par.) 10 „ „ „ z dní = 4 : 2.

Čím > dělníků, tím < doba pracovní.

4) (Podm.) Teče-li rourou za hod. 20 *l*, naplní se nádoba za 5 hod.,
Otázka.) „ „ „ „ 4 *l*, „ „ „ $h = 5 \times 5 = 25$ hod.

Čím < rychlostí voda teče, tím > jest doba.

Z á v ě r z m n o h o s t i n a m n o h o s t nelze rázem vykonati, nýbrž nutno zvoliti si o t á z k u p o m o c n o u, v níž by místo mnohosti byl společný dělitel (třeba lomený) obou mnohostí, na př.:

1) (Podm.) Urodí-li se na 6 *ha* pole 244 *hl* pšenice, | čím > polí,
(Otázka.) urodí se na 15 „ „ x „ „ | tím > sklizeň.

(Pomocná otázka.) Na 3 *ha* pole urodí se $\frac{244}{2} = 122$ *hl* pšenice.
(Odpověď.) „ 15 „ „ „ „ $122 \times 5 = 610$ *hl* pšenice.

2) (Podm.) Obdržíme-li za 7 zl. $3\frac{1}{2}$ *m* sukna, | čím < peněz,
(Otázka.) „ „ 5 „ y „ „ | tím < látky.

(Pomocná otázka.) Za 1 zl. obdržíme $\frac{7}{2 \times 7} = \frac{1}{2}$ *m* sukna.
(Odpověď.) „ 5 „ „ $\frac{5}{2}$ *m* sukna.

3) Podm.) Za $4\frac{1}{2}$ $(=\frac{9}{2}$ *) dne upraví pole 6 dělníků | čím > doba pracovní,
(Otázka.) „ 3 dny upraví pole z „ | tím < dělníků.

(Pomocná otázka.) Za $\frac{1}{2}$ dne upraví pole 6×9 dělníků.
(Odpověď.) Za 3 $(= \frac{6}{2})$ „ „ „ $\frac{6 \times 9}{6} = 9$ dělníků.

4) (Podm.) Urazí-li jezdec za 1 hod. 12 min. $(= \frac{6}{5}$ hodin) 15 *km*,
(Otázka.) „ „ „ 1 „ x „

(Pomocná otázka.) Za $\frac{1}{5}$ hod. urazí $\frac{15}{6}$ *km* $= \frac{5}{2}$ *km*.
(Odpověď.) „ 1 $(= \frac{5}{5})$ hod. urazí $\frac{5 \times 5}{2} = 12\frac{1}{2}$ *km* **).

c) Není-li společná jednotka tak jednoduchá jako v posledním případě, přecházíme z jedné mnohosti na druhou celou řadou jednotek celých i lomených, na př.: Jakou cenu má $5\frac{1}{4}$ *kg* cukru, bylo-li za homoli, vážící $18\frac{2}{3}$ *kg* zaplaceno $9\frac{3}{5}$ zl.?

(Podm.) Za $\frac{56}{3}$ *kg* cukru zaplaceno $\frac{48}{5}$ zl.
(Otázka.) „ $\frac{21}{4}$ „ „ „ x „

---

*) $4\frac{1}{2}$ možno považovati za *a*) mnohost jednotek celých; těch jest $4\frac{1}{2}$, *b*) za mnohost jednotek lomených $(\frac{1}{2})$; těch je 9.

**) Vyhledej podíl 15 *km* : $\frac{6}{5}$ =

1) (Pomocná otázka.) Za $\frac{1}{5}$ *kg* cukru zaplaceno $\frac{48}{5 \times 56} \Big| \frac{6}{7}$ zl.

2) „ „ „ 1 „ „ „ $\frac{6 \times 3}{5 \times 7}$ zl.

3) „ „ „ $\frac{1}{4}$ „ „ „ $\frac{6 \times 3}{5 \times 7 \times 4} \Big| \frac{3}{2}$ zl.

(Odpověď.) „ $\frac{21}{4}$ „ „ „ $\frac{9 \times 21}{70} \Big| \frac{3}{10} = 2$ zl. 70 kr.

d) Obdržíme-li srovnáváním mnohosti a jednotek čísla veliká, bývá výhodnější mnohosť rozkládati na vhodné násobky neb míry. Methoda ta zove se počtem rozkladným (vlašská praktika), na př.:

1) (Podm.) Obdržíme-li za 100 zl. 3 *q* cukru,

(Otázka.) „ „ 1375 „ *y* „ .

(Pomocná otázka.) Za 1300 zl. obdržíme $3\,q \times 13 = 39\,q$ cukru.

„ „ „ 25 „ „ $\frac{3}{4}\,q$.

„ „ „ 75 „ „ $\frac{3 \times 3}{4}\,q = 2\frac{1}{4}\,q$ cukru.

(Odpověď.) Za 1375 zl. obdržíme $41\frac{1}{4}\,q$ cukru.

2) Zač jest 134 *kg* zboží po 60 kr.?

134 „ „ „ 50 „ ($\frac{1}{2}$ zl.) = 67 zl.

134 „ „ „ 10 „ = 13 „ 40 kr.

134 *kg* zboží po 60 kr. = 80 zl. 40 kr.

3) Zač jest 12 *m* 75 *cm* látky, platí-li se za 30 *m* 28 zl. 50 kr.

Je-li 30 *m* za 28 zl. 50 kr.

jest 10 ($= \frac{30}{3}$) *m* za 9 zl. 50 kr.

2 ($= \frac{10}{5}$) „ „ 1 „ 90 „

$\frac{1}{2}$ ($= \frac{2}{4}$) „ „ $47\frac{1}{2}$ „

$\frac{1}{4}$ ($= \frac{1}{2} : 2$) „ „ $23\frac{3}{4}$ „

$12\frac{3}{4}$ *m* jest za 12 zl. 11 kr.

Cvičení: **1.** Otočí-li se kolo za minutu 1000krát, *a*) kolikrát se otočí za 12 vteřin, *b*) za kolik vteřin se otočí 100krát?

2. Získá-li obchodník při 7 *kg* kávy 1 zl. 45 kr., *a*) kolik získá při 56 *kg*, *b*) kolik *kg* jest mu prodati, aby získal 100 zl.?

3. Vystačí-li 18 koní krmivem 14 měsíců, *a*) jak dlouho vystačí 72 koní, *b*) 3 koně, *c*) kolik koní vystačí rok týmž krmivem?

4. 12 zedníků vykoná určitou práci za 18 dní, *a*) kdy budou 4 zedníci s touže prací hotovi, *b*) kdy 36, *c*) kdy 8, *d*) kolik zedníků jest najati, aby práce byla za 3 dny hotova, *e*) za 12 dní?

5. Obdržíme-li za 10 zl. 80 kr. $4\frac{1}{2}$ *m* látky, kolik jest nám zaplatiti za $3\frac{1}{3}$ *m*?

6 Rukopis čítá 125 stránek po 45 řádcích; kolik stran bude míti, napíše-li se na stránku jen 25 řádků?

7. Urazíme-li denně $39\frac{3}{8}$ *km*, dojdeme do města za 16 dní; *a*) kdy tam dojdeme, vykonáme-li denně 35 *km*? *b*) Jak rychle bylo by nám kráčeti, chtějíce za $13\frac{1}{2}$ dne dojíti cíle? *c*) Jak daleko bylo do města?

8. Cestující spotřeboval za 10 dní 32 zl. 50 kr.; jak dlouho se může zdržeti ještě na svých cestách (při témže průměrném vydání), zbývá-li mu 68 zl. 25 kr.?

9. Zahradník vysázel ve své štěpnici 40 řad po 28 sazenicích; kolik sazenic jest mu dáti do 1 řady, chce-li učiniti toliko 32 řady?

10. Do nádoby $6\frac{1}{2}$ *dm* vysoké vejde se 240 *l* vody; *a*) jak veliký obsah má nádoba o stejném dnu, avšak $7\frac{4}{5}$ *dm* vysoká, *b*) jak vysokou jest učiniti nádobu tu, má-li pojati v sebe 300 *l*?

11. Nádržka, do níž přitéká první rourou za hodinu 5 *hl* 60 *l* vody, naplní se za $2\frac{3}{4}$ hodiny; *a*) kolik vody přitéká rourou druhou za hodinu, naplní-li se jí nádržka za $3\frac{1}{2}$ hodiny, *b*) za kolik hodin by se naplnila, kdyby skýtala roura jen 2 *hl* 10 *l*, *c*) jaký jest obsah nádržky?

12. Za kolik hodin vyteče 51 *hl* vody dvěma rourami, z nichž prvou vytéká za hodinu $\frac{2}{3}$ *hl* a druhou $\frac{3}{4}$ *hl*.

13. Kdosi koupil 6 *m* sukna po 3 zl. 60 kr.; kolik *m* by byl obdržel za tytéž peníze, kdyby *m* stál 4 zl. 80 kr.?

14. Pevnost s posádkou 12000 mužů jest opatřena potravou na 10 měsíců; jak dlouho vystačí táž zásoba vojsku zbývajícímu, odtáhne-li 2000 mužů?

15. Činí-li vojsko krok 75 *cm* dlouhý, dojde cíle po 1200 krocích; jak dlouhé kroky jest vojsku konati, má-li po 1000 krocích býti u cíle?

16. $5\frac{5}{6}$ jest první a $3\frac{3}{7}$ poslední činitel součinu; ve které číslo dlužno proměniti činitel poslední, jestli na místo prvního napíšeme $2\frac{2}{9}$ a nechceme velikost součinu porušiti?

17. Složený zlomek $\dfrac{1\frac{1}{3}}{12\frac{2}{3}}$ jest proměniti v jiný stejně veliký, mající *a*) jmenovatel 19, *b*) čitatel 8, *c*) jmenovatel $47\frac{1}{2}$, *d*) čitatel 3.

18. Vlak ujíždějící rychlostí (= dráha za 1 vteřinu) 20 *m* dojede do hlavního města za 4 hod. 12 min. *a*) Za kdy tam dojede při rychlosti $12\frac{3}{5}$ *m*? *b*) Jakou rychlostí jest jeti, chce-li dojeti cíle za 4 hodiny? *c*) Jakou vzdálenost projede?

e) Z á v ě r z j e d n o t k y (c e l é) n a m n o h o s t l o m e n o u.

Je-li 1 *m* za 5 zl.

„ 4 „ „ 5 „ $\times\, 4$

„ $\frac{1}{2}$ „ „ $\frac{5}{2}$ „ $= 5$ zl. $\times\, \frac{1}{2}$.

„ $\frac{1}{3}$ „ „ $\frac{5}{3}$ „ $= 5$ „ $\times\, \frac{1}{3}$.

„ $\frac{7}{2}$ „ „ $\frac{5}{2}$ „ $\times\, 7 = 5$ zl. $\times\, \frac{7}{2}$.

„ $\frac{4}{3}$ „ „ $\frac{5}{3}$ „ $\times\, 4 = 5$ „ $\times\, \frac{4}{3}$.

„ a „ „ 5 „ $\times\, a$.

Z příkladů těchto patrno, že cena m n o h o s t i se vypočítá, násobíme-li cenu jednotky počtem jednotek. (Viz § 47. cvič. 10.)

f) Závěr z mnohosti lomené na jednotku celou.

Je-li 7 *m* za 30 zl., je 1 *m* za $\frac{30}{7}$ zl. $= 30 : 7$.

„ $\frac{1}{2}$ „ „ 2 „ „ 1 „ „ 2 „ $\times 2 = 2$ zl. : $\frac{1}{2}$.

„ $\frac{1}{3}$ „ „ 2 „ „ 1 „ „ 2 „ $\times 3 = 2$ „ : $\frac{1}{3}$.

„ $\frac{3}{2}$ „ „ 5 „ „ 1 „ „ $\frac{5}{3}$ „ $\times 2 = 5$ „ : $\frac{3}{2}$.

„ $\frac{4}{3}$ „ „ 5 „ „ 1 „ „ $\frac{5}{4}$ „ $\times 3 = 5$ „ : $\frac{4}{3}$.

„ a „ „ 5 „ „ 1 „ 5 zl. : $a = \frac{5}{a}$ zl.

Cena jednotky z ceny mnohosti se vypočítá, dělíme-li cenu mnohosti počtem jednotek.

Jest počítati předešlá cvičení upotřebením těchto pouček, na př.:

Za 4·23 *kg* kávy placeno bylo 9 zl 54 kr.

„ 7·35 „ „ „ „ ?

Za 1 *kg* kávy placeno bylo $\frac{9\cdot54}{4\cdot23} \Big| \frac{106}{47}$ zl.

„ 7·35 „ „ „ „ $\frac{106}{47} \times 7\cdot35 = 16$ zl. $57\frac{1}{2}$ kr.

§ 61. **Řešení úměrou.** Nelze-li výsledek srovnání určiti malým číslem, řešíme počet trojčlenný *úměrou.*

Jest patrno, že i úlohy z § 60. možno řešiti úměrou, na př.:

a) Je-li 12 *kg* cukru za 9·6 *K*,

jsou 4 „ „ „ $9\cdot6 : 3 = 3\cdot2\ K$,

při čemž soudíme takto: Kolikrát jest 12 *kg* větší než 4 *kg* (což se vypočítá dělením $12 : 4 = 3$, aneb: rázem naznačí poměrem $12 : 4$), tolikrát jest příslušná cena 9·6 *K* větší než 3·2 *K*. (Závislosť přímá.) Soud ten naznačíme arithmetickými značkami takto:

$$12 : 4 = 9\cdot6 : 3\cdot2, \text{ aneb } \frac{12}{4} = \frac{9\cdot6}{3\cdot2}.$$

Jsou-li dva druhy veličin přímo úměrny*), jest poměr veličin druhu prvého roven poměru příslušných veličin druhu druhého.

Veličiny příslušné (z téhož řádku) stojí v úměře na místě předních neb na místě zadních členů.

Dle toho možno rozřešiti úlohu takto:

(Podmínka.) Jsou-li 4 *kg* cukru za 3·2 *K*.

(Otázka.) je 20 „ „ „ x „

$$\frac{20}{4} = \frac{x}{3\cdot2} \quad \Big| \quad x = \frac{3\cdot2 \times 20}{4}\Big|\frac{5}{1} = 16\ K,$$

b) Kráčíme-li rychlostí 8 *km* (za 1 h.), dojdeme cíle za 5 h.

„ „ 4 „ „ „ „ „ „ $5 \times 2 = 10$ h.

---

*) T. j. přímo a jednoduše závisly.

Zde soudíme: Kolikrát jest rychlosť menší (8 : 4), tolikrát jest doba větší (10 : 5); závislosť jest nepřímá a jednoduchá. Soud ten naznačíme úměrou: $8 : 4 = 10 : 5$, aneb $\frac{8}{4} = \frac{10}{5}$.

I zde jest rovnosť poměrů, avšak ne veličin příslušných; neboť poměr $8 : 4 = 2$ a poměr příslušných veličin $5 : 10 = \frac{1}{2}$; zvrátíme-li poměr druhý, je též exponent 2, t. j.: $10 : 5 = 2$.

Jsou-li dva druhy veličin zvratně úměrny, jest poměr veličin druhu jednoho roven zvratnému poměru příslušných veličin druhu druhého.

Veličiny příslušné stojí v úměře na místě vnitřních neb zevnějších členů.

Dle toho rozřešíme úlohu:

(Podmínka.) Dojde-li posel rychlostí 8 *km* cíle za 5 hodin,
(Otázka.) „ „ 10 „ „ „ x „

$10 : 8 = 5 : x$; $x = \frac{8 \times 5}{10} = 4$ hod.

Zkouška: Posel vykoná v obou případech cestu 40 *km*.

Cvičení. Viz úlohy předešlého §.

1. Osa zemská jest 1714 zeměpisných mil dlouhá a průměr rovníkový 1720 zem. mil. Kolik *mm* má osa zemská u globu, jehož rovníkový průměr má 5 *dm*?

2. Rolník přivezl na trh $12\frac{3}{4}$ *hl* pšenice, již prodal za 140 zl. 22 kr.; kolik pšenice ještě dodal, vyplatil-li mu obchodník celkem 500 zl. 14 kr.?

3. Kdosi potřebuje na oblek 3 *m* 24 *cm* sukna 1·84 *m* širokého; kolik látky bude třeba, je li šířka pouze 1·2 *m*?

4. Kdosi byl účastněn na společném podniku, který byl zařízen nákladem 150 tisíci zl., částkou 1650 zl.; kolik získal, byl-li celistvý zisk podniku 12750 zl.?

5. Dva přátelé spolčili se částkami 6540 zl. a 4160 zl. k společnému obchodu, který vynesl 2100 čistého zisku. Kolik připadlo zisku na prvého z nich?

6. 61 *ha* $\doteq$ (t. j. rovná se přibližně) 106 rak. jitrům, *a*) kolik jiter činí 579·5 *ha*; *b*) kolik *ha* činí 100 jiter?

7. Platilo-li se za 1 jitro orné půdy 485 zl., kolik se platilo za 1 *ha*? (Viz 6.)

8. *) Císařský dukát má jakosť 71 : 72; *a*) kolik drží v sobě ryzího zlata, váží-li 3·49 *g*?

---

*) Zlato a stříbro jsou tak měkké, že by peníze a skvosty z nich zhotovené se příliš opotřebovaly a proto slévají se kovy ty s mědí (zlato též se stříbrem), čímž nabývá slitina (směs) větší tvrdosti. Cena takového zlata (zlato mincovní) jest arciť menší než cena zlata ryzího. „Jakosť" jeho určuje se poměrem (zlomkem), jehož prvý člen (čitatel) značí zrno, t. j. váhu ryzího kovu a druhý člen (jmenovatel)

Jakosť 71 : 72 znamená, že váha ryzího kovu : ku váze celé mince $= 71 : 72$; tedy $x : 3\cdot49 = 71 : 72$.

Chtějíce úlohu tuto psáti v řádky a sloupce, jest úlohu stylisovati takto:

72 *g* dukátového zlata chová v sobě 71 *g* ryzího zlata,
3·49 „ „ „ „ „ „ *x* „ „ „

b) V kolika dukátech jest 1 *kg* ryzího zlata?

9. Jest určiti jakosť čís. dukátů, *a*) v tisícinách, *b*) v karatech.

10. Koruna má jakosť 835 : 1000; kolik chová v sobě stříbra, váží-li 5 *g* a kolik jich možno raziti z 1 *kg* ryzího stříbra?

11. *a*) Jaké jakosti jest stříbro 13tilotové? *b*) Kolik ryzího stříbra má v sobě skvost, zhotovený z 36 *dkg* stříbra 14tilotového?

12. Kolikalotové jest stříbro čísla 4ho?

13. Jest určiti jakosť slitiny: *a*) 10 *dkg* ryzího stříbra a 25 *g* mědi, *b*) 75 *g* zlata a $2\frac{1}{2}$ *dkg* stříbra.

14. Kolik ryzího stříbra chová v sobě *a*) 1 *kg*, *b*) 2 *kg*, *c*) 3 *kg* zlata jakosti 0·8?

15. Jakou jakosť má slitina z $3\frac{1}{2}$ *kg* stříbra jakosti 0·73 s $\frac{1}{4}$ *kg* ryzího stříbra?

16. Stříbrná mísa vážící 25 *dkg* jest jakosti $\frac{5}{8}$; kolik chová v sobě ryzího stříbra?

17. Kolik váží náramek, zhotovený z 5·3 *dkg* zlata č. 2.?

18. Skvost vážící 4·3 *dkg*, je zhotoven ze stříbra č. 1.; kolik má ryzího stříbra?

19. Z 1 *kg* ryzího stříbra razí se 90 stříbrných zlatníků jakosti $\frac{9}{10}$; kolik váží 1 zlatník?

20. Z 1 *kg* zlata 0·9 jakosti, razilo se 155 osmizlatníků; kolik ryzího zlata má 1 osmizlatník?

21. Z $\frac{1}{2}$ *kg* ryzího zlata razí se $69\frac{3}{4}$ dvacetimarek jakosti 0·9; kolik ryzího zlata drží v sobě 20timarka a kolik váží (jest počítati na *g*)?

22. Z 1 *kg* ryzího zlata razí se 164 20ti *K* jakosti 0·9; kolik chová ryzího zlata a kolik váží jedna 20ti *K*?

23. *a*) Kolika frankům, *b*) kolika markám rovná se 100 *K*?

24. Vzdálenosť dvou míst jest 64·8 *km*. Jak daleko budou od sebe vzdálena na mapě kreslené v měřítku 1 : 325000.

25. Na mapě kreslené v měřítku 1 : 275000 jest Řip od Prahy vzdálen 140 *mm*, Bezdězí 198, Milešovka 225, Ještěd 320, Vídeň 920; jest vypočítati skutečnou vzdálenosť těchto míst.

---

stříž, t. j. váhu slitiny (mince, skvostu) a určuje se v tisícinách. Je-li na př. v 1000 dílech (*g*, *dkg*, *kg*) slitiny 900 dílů (*g*, *dkg*, *kg*) ryzího kovu, má slitina ta jakosť $\frac{900}{1000} = 0\cdot900 = 0\cdot9$. Dříve určovala se jakosť zlata v „karatech", t. j. ve 24tinách a jakost stříbra v lotech, t. j. v 16tinách.

26. Jak daleko jest jeti po dráze se stoupáním 1 : 85, abychom se octli o 100 *m* výše?

27. Oč stoupl vlak na dráze se stoupáním 2 : 115, vykonav cestu 805 *m*?

28. V trojúhelníku má se prvá strana ke druhé jako 3 : 5 a druhá ke třetí jako 4 : 9. Jest vypočítati strany $\triangle$, je-li délka strany druhé 180 *mm*.

Počty procentové. Slovo „procento" označuje se v arithmetice značkou $^0/_0$ a znamená setinu; „promille" označuje se $^0/_{00}$ a znamená tisícinu. § 62.

$1^0/_0$, $2^0/_0$, $3^0/_0$ . . . znamená 1, 2, 3 setiny,
$1^0/_{00}$, $2^0/_{00}$, $3^0/_{00}$ . . . „ 1, 2, 3 tisíciny.

Na př.: $1^0/_0$ ze 100 t. j. setina ze sta $= 1$,
$1^0/_0$ „ 200 „ „ „ $200 = 2$,
$1^0/_0$ „ 300 „ „ „ $300 = 3$,
$1^0/_0$ „ 50 „ „ „ $50 = 0{\cdot}5 = \frac{1}{2}$,
$1^0/_0$ „ 245 „ „ „ $245 = 2{\cdot}45$,
$2^0/_0$ „ 400 „ 2 setiny ze $400 = 4 \times 2 = 8$,
$3^0/_0$ „ 700 „ 3 „ „ $700 = 7 \times 3 = 21$.

1 procento čísla jest stý díl čísla; 2, 3, $4^0/_0$ . . . jest 2, 3, 4násobek jednoho $^0/_0$.

Číslo	$4^0/_0$ část z čísla
100	4
200	4×2
300	4×3

Číslo a procentová část jsou přímo úměrny.

Řešení rozkladem, závěrem a úměrou. § 63.

Příklad 1) Jest vypočítati $4\frac{1}{2}{}^0/_0$ částku z 350.

a) $1^0/_0$ z 350 jest $3{\cdot}5$,
$4^0/_0$ „ 350 „ $14{\cdot}0$,
$\frac{1}{2}{}^0/_0$ „ 350 „ $1{\cdot}75$,

$4\frac{1}{2}{}^0/_0$ z 350 jest $15{\cdot}75$.

b) $4\frac{1}{2}{}^0/_0$ značí vzíti z čísla 100 částku $4\frac{1}{2}$.
Otázka: Z „ 350 „ x.

Z čísla 50 částku $\frac{9}{2 \times 2}$.
„ „ 350 „ $\frac{9 \times 7}{4} = 63 : 4 = 15{\cdot}75$.

c) Úměrou: Kolikrát jest 350 větší než 100 (350 : 100), tolikrát jest x větší než $4\frac{1}{2}$ ($x : 4\frac{1}{2}$).

$350 : 100 = x : 4\frac{1}{2}$; $x = \frac{350 \times 9}{100 \times 2} = 31{\cdot}5 : 2 = 15{\cdot}75$.

Příklad 2) Kolik $^0/_0$ činí část 25·5 vzatá z čísla 680?

a) (Podmínka.) Část 6·8 ze 680 činí 1%.
(Otázka.) „ 25·5 „ 680 „ x%.

Část 0·1 ze 680 činí $\frac{1}{68}$.
„ 25·5 „ 680 „ $\frac{255}{68} = 3·75$%.

b) (Podmínka.) Z čísla 680 vzato 25·5
(Otázka). „ „ 100 . y

Z čísla 20 vzato $\frac{25·5}{34}$

„ „ 100 „ $\frac{25·5 \times 5}{35} = 3·75$%.

c) Úměrou: $680 : 100 = 25·5 : y$, $y = \frac{2550}{680} = 3·75$%.

Příklad 3) Ze kterého čísla jest vzíti část 20·8, aby činila 4%?

a) Část 20·8 činí 1% z čísla 2080
a 4% „ „ 2080 : 4 = 520.

b) 4% značí, že jest 4 vzíti ze 100
tedy 20·8 „ „ x

20 vzíti ze 500
0·80 „ „ $\frac{100}{5} = 20$.

20·8 vzíti z 520.

c) Úměrou: $\frac{20·8}{4} = \frac{x}{100}$; $x = \frac{2080}{4} = 520$.

Z příkladů těch patrno, že procenta píšeme jako částku ze sta v řádek jeden a částku z čísla v řádek druhý. Jindy bývá výhodno upraviti si závěrem podmínku tak, aby v ní bylo 1%.

Cvičení: **1.** Jest vypočítati: *a*) 1%, *b*) 3%, *c*) 5%*), *d*) 10%**), *e*) 50%, *f*) 100%, *g*) 200% z čísel 1800, 350, 120, 80, 56.

2. Jest vypočítati: *a*) $\frac{1}{2}$%, *b*) $\frac{1}{3}$%, *c*) $3\frac{3}{4}$%, *d*) $5\frac{1}{2}$% z čísel 2400, 480, 3024, 86·4.

3. Jest vypočítati: *a*) 1‰, *b*) 4‰, *c*) $2\frac{1}{2}$‰ z 36000, 7300, 28520.

4. Kolik % činí: *a*) $\frac{1}{2}$, *b*) $\frac{1}{4}$, *c*) $\frac{1}{5}$, *d*) $\frac{1}{10}$, *e*) $\frac{2}{5}$, *f*) $\frac{5}{8}$ celého čísla?

5. Ze kterého čísla jest: *a*) 4% částka = 74, *b*) $3\frac{1}{2}$% částka = 35, *c*) 5·4% částka = 27.

6. Kolik % činí částka: *a*) 91·8 z 1530 vzatá, *b*) 35·53 ze 748, *c*) $2\frac{1}{4}$ ze $37\frac{1}{2}$, *d*) 25·86244 ze 354·28.

7. *a*) Kolik absolutního lihu jest v 135 *l* 65% lihu? Líh 70%-vý jest směs ze 70 dílů lihu a 30 dílů vody; ve 100 *l* směsi jest tedy 70 *l* abso-

---

*) $5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.
**) $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ atd.

lutního lihu). *b*) Kolika %ový líh obdržíme, smícháme-li 5 l absolutního lihu s 3 l vody? *c*) Kolika %ový líh obdržíme, přidáme-li ku 2 hl 78% lihu 8 l vody?

8. Dům vynáší čistého užitku 1240 zl., což činí 4% jeho kupní ceny; zač byl koupen?

9. Ze 150 kg vápence obdrží se pálením 84 kg vápna; kolik to činí %?

10. Obchodník ohlásil 1278 K čistého ročního příjmu; platí-li se z toho 8% daní, kolik mu zbývá?

Ze 100 K čistého příjmu zbude mu 92 K.
„ 1278 „ „ „ „ „ x „

11. Obchodník dluhuje různým věřitelům v celku 12500 zl.; nemoha platiti, ohlásil konkurs a soupis jmění vykázal toliko 7200 zl. Na kolik % se vyrovná se svými věřiteli (t. j. kolik zlatých obdrží každý věřitel za 100 zl. svého požadavku?)

12. Obchodník dluhující věřiteli A 564 zl. a věřiteli B 636 zl. upadl v konkurs; jak se s nimi vyrovná, zbývá-li mu 864 zl. jmění?

13. Zboží koupené za 857 zl. bylo prodáno za 959 zl. 84 kr.; kolik % činí zisk?

14. Za 324 kg kávy zaplaceno bylo 408 zl. 24 kr.; kolik % bylo získáno, byl-li 1 kg prodán za 1 zl. 45 kr.?

15. Zač bylo koupeno zboží, jež za 2484 zl. prodáno bylo se ztrátou 8%.

Zboží koupené za 100 zl. bylo prodáno za 92 zl.
„ „ „ x „ „ „ „ 2484 „

$$2484 : 92 = x : 100; \quad x = 2700.$$

Zkouška: Na 100 zl. kupní ceny byla ztráta 8 zl.
„ 2700 „ „ „ „ „ z „ $= 8$ zl. $\times 27$

ztráta 216
kupní cena 2700
prodejní cena 2484

16. Totéž s otázkou: Jak veliká jest ztráta?

Otázka: Při 2484 zl. ceny prodejní ztraceno z.
Podmínka: „ 92 *) „ „ „ „ 8 „

$$2484 : 92 = z : 8; \quad z = 216.$$

---

*) Ztráta 8% přísluší ku 100 zl. ceny kupní a tudíž ku 92 zl. ceny prodejní; počítáme zde ne ze sta, nýbrž ve stu. Zde jest výhodnější upravovati úlohu v řádky tak, že počneme otázkou; neboť počínajíce podmínkou lehko bychom marně začali takto:

Ke 100 zl. kupní ceny přísl. 8 zl. ztráty
„ 2484 „ prodejní „ ? „ „

Nemajíce zde však v prvém sloupci veličiny stejnorodé nemůžeme je srovnávati a tudíž nelze počítati úměrou.

17. Vzduch jest dle objemu směs z 21% kyslíku a 79% dusíku; kolik každého plynu jest obsaženo ve 178 m^3?

18. Kupec koupil 375 *kg* zboží za 495 zl. 75 kr. a prodal je se ziskem 8%*); zač prodával 1 *kg*?

19. 347 *m* látky bylo prodáno se ziskem 15% za 1063 zl. 29 kr.; zač byl koupen 1 *m*?

20. Je-li hrubá váha**) zboží 786 *kg*, tara 7%, *a*) jak veliká jest váha čistá? *b*) Kolik platil objednavatel, bylo-li dovozné 14 zl. 73 kr. a 1 *kg* netto za 97 kr.?

21. Kupec obdržel 9·4 *q* brutto cukru. Táry se čítalo 3%, dovozného platil 24 zl. 80 kr. a za *kg* netto 35 kr. Zač prodá 1 *kg*, chce-li 14% získati?

22. Kdosi koupil za 784 zl. zboží s úvěrem na 3 měsíce; zaplatí-li hned (hotovými), povolí se mu skonto***) $1\frac{1}{2}$%; kolik činí hotové placení?

23. Platil-li obchodník po srážce 2% skonta hotově 1384 zl., jak veliký byl původní dluh?

24. Platil-li kupec dluh 768 zl. 16 kr. hotovými 752 zl.; kolik % sconta mu bylo počítáno?

25. Kommissionář obstaral ve hlavním městě venkovskému kupci koupi různého zboží a získal tím 28·62 *K* provise†). Jak veliká byla kupní cena, počítá-li se $1\frac{4}{5}$‰ provise z ceny kupní?

26. Obchodník koupil 765 *kg* kávy za 1092 zl.; provise platil $1\frac{1}{4}$%; dovozné 41 zl. 85 kr. Zač prodá 1 *kg*, chce li získati při tomto obchodě 12%?

27. Rolník pojistiv obilí své proti krupobití, platil 79 zl. 35 kr. pojistného (premie). Na kolik byl pojištěn, čítá-li se premie 2·3%.

§ 64. **Počty úrokové.** Dá-li osoba *A* (věřitel) osobě *B* (dlužník) část peněz (jistina = kapitál) v užívání na určitý čas, jest dlužník povinen po uplynutí smluvené doby vrátiti nejen jistinu, nýbrž i přiměřenou odměnu (úroky) za přenechání jistiny. Úroky za 1 rok (*u*) počítají se v procentech (*p*) jistiny (*J*). Je-li na př. jistina půjčena aneb uložena na 5%, znamená to, že věřitel platí za každých 100 zl. jistiny 5 zl. ročních úroků.

---

*) Procenta zisku i ztráty se počítají ze 100 zl. ceny *kupní*.

**) Váha hrubá (brutto) jest váha zboží i obalu, ve kterém se zasýlá (na př. sudů, beden, láhví atd.) a váha čistá (netto) jest váha zboží bez obalu. Váha obalu zove se tára a určuje se v % váhy hrubé; zlomky táry se neberou v počet; na př. místo táry $5\frac{1}{4}$ *kg* počítá se jen 5 *kg*, místo táry 13·8 *kg* béře se 14 *kg*.

***) Zboží ve velkém prodává se obyčejně s několikaměsíčním úvěrem, t. j. neplatí se hotově (ihned), nýbrž až po smluvené době; zaplatí-li kupující zboží ihned, povoluje mu prodávající slevu, (proč?), jež se zove srážka (sconto) a počítá se ze sta prodejní ceny. Hotové = Dluhu — Skonto.

†) Provise = odměna za obstarání různých koupí neb prodejů.

1) Ze 200 zl. jistiny platí se ročně 5 zl. $\times$ 2.
„ 300 „ „ „ „ „ 5 „ $\times$ 3.
„ J „ „ „ „ „ $p \times \frac{J}{100}$.

Úroky jsou (při téže době a týchž procentech) **přímo** úměrny **s jistinou.**

2) Nese-li jistina 300 zl. při 4% za 1 rok 12 zl. úroků,
nese „ 2 „ 12 „ $\times$ 2 úroků,
„ 3 „ 12 „ $\times$ 3 „
„ r „ 12 „ $\times r$ „

Úroky jsou (při konstantní jistině a procentech) **přímo** úměrny **s dobou.**

3) Chceme-li obdržeti 80 zl. úroků při 4%, jest nám uložiti
2000 zl. na 1 rok,
aneb 1000 „ „ 2 „
„ 500 „ „ 4 „

Jistina a doba jsou spolu **zvratně** úměrny (při týchž úrocích a týchž procentech).

4) Vyhledejte závislosť mezi J a p, U a p, r a p (ceteris paribus, t. j. nemění-li se ostatní veličiny).

Počty úrokové řeší se rozkladem, závěrem aneb úměrou. **§ 65.**

Příklad 1) Jest vypočítati úroky z 1250 zl. za 2 roky a 4 měsíce*) při $4\frac{1}{2}$%.

a) Úroky 1% za 1 rok jsou 12·50 zl.
„ 4% „ 1 „ „ 50·— „
„ $\frac{1}{2}$% „ 1 „ „ 6·25 „
„ $4\frac{1}{2}$% „ 1 „ „ 56·25 „
„ $4\frac{1}{2}$% „ 2 „ „ 112·50 „
„ $4\frac{1}{2}$% „ $\frac{1}{3}$ „ „ 18·75 „

Úroky $4\frac{1}{2}$% za $2\frac{1}{3}$ roku jsou 131·25 zl.

b) Napíšeme-li úlohu v řádky a sloupce:
(Podmínka.) 100 zl. nese za 1 rok $4\frac{1}{2}$ zl. úroků.
(Otázka.) 1250 „ „ „ $2\frac{1}{3}$ „ U „ „
objeví se tu 3 druhy veličin, s nimiž dosud počítati nedovedeme. Avšak učiníme-li si otázku pomocnou: Kolik úroků vynese 1250 zl. při $4\frac{1}{2}$% za **1** rok**), rozpadne se nám úloha na dvě jednoduché α) a β).

---

*) Předpokládáme zde i v ostatních příkladech, že úroky koncem roku si věřitel vyzvedne (úrokování jednoduché) a ne-li, že úroky roku prvního nezvětší dluh v roce druhém, jakž se stává při složeném úrokování, o čemž viz § 152.

**) Otázka pomocná má týž neznámý druh co otázka daná, a ze známých druhů

α) (Podmínka.) 100 zl. nese za 1 rok $4\frac{1}{2}$ zl. úroků.
Pom. otázka.) 1250 „ „ „ 1 „ u „ „

1200 zl. nese za 1 rok $\frac{9 \times 12}{2} = 54$ zl. úroků,

50 „ „ „ 1 „ $\frac{9}{2 \times 2} = 2{\cdot}25$ zl. úroků.

β) 1250 zl. nese za 1 rok 56·25 zl. úroků.
(Daná otázka.) 1250 „ „ „ $2\frac{1}{3}$ „ U „ „

1250 zl. nese za 2 roky 112·50 zl. úroků,
1250 „ „ „ $\frac{1}{3}$ „ 18·75 „ „

1250 zl. nese za $2\frac{1}{3}$ roku 131·25 zl. úroků.

c) Úměrou:
(Podmínka.) 100 „ „ „ 1 rok $4\frac{1}{2}$ zl. úroků.
(Pomocná otázka.) 1250 „ „ „ 1 „ u „ „
(Daná otázka.) 1250 „ „ „ $2\frac{1}{3}$ „ U „ „

Z prvých dvou řádků plyne úměra:

$$1250 : 100 = u : 4\tfrac{1}{2}; \quad u = \frac{1250 \times 9}{100 \times 2} = 56{\cdot}25.$$

Z druhých dvou řádků plyne:

$$2\tfrac{1}{3} : 1 = U : 56{\cdot}25; \quad U = \frac{56{\cdot}25 \times 7}{3} = 131{\cdot}25.$$

Příklad 2) Na kolik % jest uložen kapitál 840 zl., nese-li za rok 35 zl. 70 kr. úroků?

a) Kdyby nesl kapitál 840 zl. za 1 rok
8·40 zl. úroků, byl by uložen na 1%,
„ $8{\cdot}40 \times 4 = 33{\cdot}60$ „ „ „ „ „ „ 4%.
Zbytek 2·10 „ „ činí $\frac{1}{4}$%.

Nese-li kapitál 840 zl. za 1 rok 35·7 zl. úroků, jest uložen na $4\frac{1}{4}$%.

b) Napíšeme-li úlohu v řádky a sloupce, obdržíme:
Otázka: 100 zl. jistiny nese za 1 rok p zl. úroků.
Podmínka: 840 „ „ „ „ 1 „ 35·7 zl. úroků.

Závěrem: 20 zl. jistiny nese za 1 rok $\frac{35{\cdot}7}{42}\Big|\frac{11{\cdot}9}{14}\Big|\frac{1{\cdot}7}{2}$ zl. úroků.

100 „ „ „ $\frac{1{\cdot}7 \times 5}{2} = 8{\cdot}5 : 2 = 4{\cdot}25$ zl. úroků.

---

jest jeden stejný s podmínkou (1 rok) a druhý stejný s danou otázkou (1250). V ostatních úlohách, v nichž se tážeme po jiném druhu než po úrocích, omezíme se jen na 2 druhy závislých veličin, odkazujíce úlohy ty do nauky o složené trojčlence (viz § 151.).

c) Úměrou: $840 : 100 = 35{\cdot}7 : p;\quad p = \frac{3570}{840} = \ldots = 4\frac{1}{4}$.

Příklad 3) Jak veliká jistina vynese při $5\frac{3}{4}\,\%$ za rok 141 zl. 45 kr. úroků?

a) Mají-li úroky rovnati se 141·45 zl.

jest při 1% třeba jistiny 14145 zl.,

„ $\frac{1}{4}\%$ „ „ 14145×4,

„ $\frac{23}{4}\%$ „ „ $\overset{Dt}{56580} : \overset{D}{23} = \overset{T}{\mathbf{2460}}$.

b) Napíšeme-li úlohu v řádky a sloupce, berouce za podmínku:

Aby úroky $=$ $5\frac{3}{4}$ zl., jest třeba jistiny 100 zl.

„ „ $=$ 141·45 „ „ „ „ J „

Úměrou: $141{\cdot}45 : 5{\cdot}75 = J : 100;\quad J = \overset{T}{\widehat{14145}} : \overset{J}{5{\cdot}75} = \overset{T}{\mathbf{2460}}$.

Příklad 4) Jak veliké jistiny jest třeba, aby vynesla při 4% tytéž úroky, co jistina 1260 zl. při 5% za touž dobu.

Úměrou: Při 5% nese jistina 1260 zl. určité úroky za určitou dobu.

„ 4% „ „ J tytéž „ „ touž „

$$\frac{5}{4} = \frac{J}{1260};\quad J = \frac{1260 \times 5}{4}\Big|\,315 = 1575.$$

Zkouška: Za rok na př. nese jistina 1260 zl. při 5% 63 zl. úroků,

a „ 1575 „ „ 4% též 63 zl. úroků.

Cvičení: **1.** Jest vypočítati roční úroky: a) z jistiny 800 zl. při 4%, b) 1450 K při $4\frac{1}{2}\,\%$, c) 2345 fr. při $5{\cdot}4\%$.

2. Jaké úroky vynese a) jistina 784 zl. při 5% za 4 roky, b) jistina 1760 zl. při 6% za 3 měsíce, c) jistina 3475 K při $4\frac{3}{4}\,\%$ za 72 dní*), d) jistina 3456 K při $5\frac{1}{2}\,\%$ za 2 roky 6 měs. 15 dní?

3. Na kolik $\%$ jest uložena a) jistina 740 zl., nese-li ročně 29 zl. 60 kr. úroků, b) jistina 3658 zl., nese-li ročně 192 zl. $14\frac{1}{2}$ kr., c) jistina 2562 K, nese-li ročně 111 K 2 h?

4. Jak veliká jistina nese ročně při 5% a) 63·90 zl., b) 174·30 K, c) 122·85 M?

5. Která jistina nese ročně 126 zl. úroků: a) při 4%, b) při $4\frac{1}{2}\,\%$, c) při 5%; d) srovnej jistinu a) s jistinou c).

6. Jak veliké úroky nese jistina 4680 K, je-li s jistinou 2520 K, nesoucí 56·70 K úroků, na stejné $\%$ a stejnou dobu uložena?

7. Úředník má 1800 zl. ročního služného a platí 15% daně z příjmu. Jak veliké jmění by musil míti, aby mu toto při 5% poskytlo týž příjem?

8. 57 zl. 80 kr. a 130 zl. 5 kr. jsou úroky dvou kapitálů na stejná

---

*) Při počtech úrokových čítá se rok $=$ 12 měs. $= 12 \times 30$ d. $=$ 360 dnům.

procenta i dobu uložených. Je-li prvý kapitál 1360 zl., *a*) jak veliký jest druhý z nich, *b*) a na kolik % jest uložen kapitál ten, jsou-li úroky ty roční?

9. Který kapitál nese při 5% tytéž úroky, co kapitál 758 zl. při $4\frac{1}{2}$% za touž dobu?

10. Jistiny 3528 zl. a 3192 zl. nesou v stejné době stejné úroky. Prvá z nich jest uložena na $4\frac{3}{4}$%; na kolik % druhá?

11. Jistina 3248 zl. uložena na 4% nese za $1\frac{1}{2}$ roku 194·88 zl. úroků; na kolik % jest ji uložiti, má-li za 2 roky nésti tytéž úroky?

12. Jistina uložena na 6%, nese 44·16 zl. úroků; na kolik % byla podruhé uložena, vynesla-li za touž dobu 40·48 zl. úroků?

13. Jistina 756 zl. vynáší při 8% za 8 měsíců 40 zl. 38 kr. Za kolik měsíců vynese totéž při 6%?

14. Ve které době vynese jistina 567 zl. tolikéž úroků co 729 zl. při týchž % za dobu 4 roků 8 měsíců?

15. Na kolik % jest uložiti jistinu, aby za rok a 9 měsíců vynesla tolikéž, co za 2 roky a 3 měsíce při 5%?

16. Dlužník vypůjčiv si 160 zl. (560 zl.), slíbil po $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$) létě odvésti 172 zl. (572·6 zl.). Jaká % tu nabízí?

Ze 160 zl. nabízí 12 zl. úroků za $\frac{1}{2}$ léta.
„ 100 „ „ x „ „ $\frac{1}{2}$ „

$$\frac{160}{100} = \frac{12}{x}; \quad x = \frac{100.12}{160} = \ldots = 7{\cdot}5 \text{ zl.}$$

Ze 100 zl. nabízí na 1 rok **15** zl.

17. Jistina 1240 zl. vzrostla s ročními úroky na 1308 zl. 10 kr.; na kolik % byla půjčena?

18. Kolik půjčil věřitel dlužníku, vrátil-li tento onomu po roce 825 zl. 10 kr. co jistinu se $4\frac{1}{2}$% úroky?

§ 66. **Některé lehčí příklady složené trojčlenky:**

Příklad 1) Na kolik % jest uložena jistina 750 zl., vynese-li za 2 roky 67 zl. 50 kr. úroků?

Napišme úlohu v řádky a sloupce a hleďme stylisovati tak, aby otázka přišla na konec.

(Podmínka.) 750 zl. vynese za 2 roky 67·5 zl. úroků.
(Otázka.) 100 „ „ „ 1 rok p „ „

Řešení:

(Pomocná otázka.) 750 zl. vynese za 1 rok $\frac{67{\cdot}5}{2}$ zl. úroků.

(Daná otázka.) 100 „ „ „ 1 „ p „ „

Příklad 2) Která jistina vynese při $4\frac{3}{4}\%$ za $1\frac{1}{2}$ roku 91 zl. 20 kr. úroků?

Uprav:

(Podm.) Abychom obdrželi $4\frac{3}{4}$ zl. úroků za 1 r., jest třeba jistiny 100 zl.
(Otázka.) „ „ 91·2 „ „ „ $1\frac{1}{2}$ „ „ „ „ J „

Převeďme úroky $1\frac{1}{2}$leté na roční.

Závěrem: Jistina J vynese za $\frac{1}{2}$ roku $\frac{91\cdot2}{3} = 30\cdot4$ zl. úroků.

„ J „ „ 1 „ $30\cdot4 \times 2 = 60\cdot8$ zl. úroků.

Tím obdržíme jednoduchou trojčlenku:

Abychom obdrželi $4\frac{3}{4}$ zl. úroků za 1 rok, je třeba jistiny 100 zl.
„ „ 60·8 „ „ „ 1 „ „ „ „ J „

Z toho $J = \ldots = 1280$ zl.

Z toho patrno, že, upravíme-li si úroky víceleté na dobu 1 roku, zamění se nám úloha v jednoduchou trojčlenku.

Aneb: Uprav podmínku tak, aby doba v ní byla táž co v otázce:

100 zl. jistiny nese za $1\frac{1}{2}$ roku 7·125 zl. úroků.

Tudíž:

Abychom obdrželi 7·125 zl. úroků za $1\frac{1}{2}$ roku, je třeba jistiny 100 zl.
„ „ 91·2 „ „ „ $1\frac{1}{2}$ „ „ „ „ J „

Jindy bývá výhodno upraviti podmínku aneb otázku jednoduchým závěrem tak, aby jeden druh veličin měl v obou řádcích stejné číslo a tím se úloha promění v jednoduchou trojčlenku.

Cvičení: **1.** Která jistina vynese při $4\frac{1}{2}\%$ za 2 roky 29 zl. 25 kr. (Zkoušku u všech cvičení.)

2. Na kolik $\%$ jest uložena jistina 4380 zl., vynese-li za $2\frac{3}{4}$ roku 682 zl. 55 kr. úroků?

3. Kdosi má za $\frac{1}{2}$ léta zaplatiti dluh 1030 zl. (dluh je za $\frac{1}{2}$ léta splatný), chce však zaplatiti hotovými (ihned); jak veliké bude hotové, počítá-li se 6% roční srážka*)?

Hotové 100 zl. vzroste při 6% za $\frac{1}{2}$ roku na 103 zl.
„ H „ „ „ 6% „ $\frac{1}{2}$ „ „ 1030 „

$1030 : 103 = H : 100;$ $H = \mathbf{1000}$.

---

*) Zaplatí-li se dluh dříve, je spravedlivo, aby věřitel poskytl dlužníku srážku (sconto) a to tak velikou, aby

hotové + srážka = dluhu,

neboť kdyby hotové uloženo bylo na úroky, vzroste za dobu, o kterou se dříve platilo, o úroky. Z toho patrno že:

Srážka = úrokům z hotového,

nikoliv z dluhu. Při malém dluhu a krátké době platební není rozdíl tak značný, počítá-li se srážka z dluhu místo z hotového; tak činí kupci, ježto počet je snazší.

4. Zaplatil-li kdosi hotově dluh 1275 zl., který po $7\frac{1}{2}$ měsíci byl splatný a obdržel 5% roční sconto, jak veliké bylo hotové placení a kolik činí srážka?

5. Dostal-li kdosi za dědictví, teprv po 4 letech splatné, hotově 1350 zl., jak veliké bylo toto dědictví při 6% ročním diskontu?

6. Jak veliké bylo hotové a kolik činil dluh za 8 měsíců splatný, srazilo-li se z něho při $3\frac{3}{4}$% ročním diskontu $67\frac{1}{2}$ zl.?

7. Kolik činilo roční diskonto, bylo-li z dluhu 731 zl. splatného za $1\frac{1}{2}$ roku při hotovém placení sraženo 51 zl.?

---

§ 67. Značí-li J jistinu, u úroky roční, U úroky víceleté, p procenta, r počet roků, možno řešiti počet úrokový všeobecně takto:

a) Vynese-li 100 zl. jistiny p zl. úroků za 1 rok.
„ J „ „ u „ „ „ 1 „

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{J}{100}=\dfrac{u}{p};\quad u=\dfrac{J\,.\,p}{100}\\ b)\qquad U=u\,.\,r\end{array}\right\}\quad U=\frac{J\,.\,p\,.\,r}{100}\ \text{čili}\quad 100\,U=J\,.\,p\,.\,r.$$

Příslušné veličiny v počtu úrokovém jsou na sobě tak závisly, že

$$100\times\text{Úroky}=\text{Jistina}\times\text{procent.}\times\text{roky.}$$

Závislosť tu možno lehko pamatovati a z ní vytvořiti tyto:

$$U=\frac{J\times p\times r}{100}\qquad p=\frac{100\,U}{J\times r}$$

$$J=\frac{100\,U}{p\times r}\qquad r=\frac{100\,U}{J\times p}$$

Rozřešte dle těchto vzorců předešlé úkoly.

ČÁSŤ OSMÁ.

Čísla neúplná. Zkrácené počítání úplnými i neúplnými čísly desetinnými.

§ 68. **Čísla zkrácená.** *a)* Jsou-li 4 *kg* za 2·25 kr., jest 1 *kg* za 0·5625 zl.; ježto desetiny a setiny kr. neexistují, nelze 0·0025 zl. vyplatiti, a proto se určuje cena 1 *kg* číslem 0·56.. zl.; číslo takové zove se zkrácené a připojené tečky značí, že z čísla toho 3tí, 4té atd. místo desetinné bylo vynecháno, čili že číslo bylo zkráceno na setiny.

Je-li ve městě 3514 obyvatelů a my počet ten určujeme okrouhle na 35_{00}, zkracujeme číslo celé 3514 na sta, což vyznačujeme připojenými malými nullami; 35_{00} je tedy číslo zkrácené, 3514 nezkrácené neb úplné.

b) Čísla neúplná. Při měření délek, ploch, váh, času atd. nedoděláme se pro nedokonalosť strojů a způsobů měřicích, jakož i smyslů našich, nikdy výsledků zcela přesných, takže čísla takto získaná, na př. 3·417 *m* nutno vyznačovati tak, jako čísla zkrácená 3·417 . . ., ježto přesnějším strojem měřicím možno změřiti i desetiny *mm* a tu by se snad ukázalo, že délka jest 3·4174 *m*. Čísla taková zoveme neúplná. Mezi nimi a zkrácenými jest jen ten rozdíl, že u zkrácených možno věděti, která čísla byla vynechána, u neúplných nikoliv. Průběhem dalších výkladů poznáváme, že velká část čísel jsou čísla neúplná (číslo Ludolfské).

c) Číslo zkrácené nevyjádřuje hodnotu veličiny přesně a proto jest chybné. Tak v *α*) byla učiněna chyba o $0{\cdot}5625 - 0{\cdot}56 = 0{\cdot}0025 < + 0{\cdot}005$ t. j. $< \frac{1}{2}$ setiny. Bylo-li by číslo 0·5684 zkrátiti na setiny, bude přesněji počítáno, píšeme-li číslo zkrácené *α*) $= 0{\cdot}57$ . . než *β*) $= 0{\cdot}56$ . .; neboť v *α*) činíme chybu $0{\cdot}57 - 0{\cdot}5684 = 0{\cdot}0016 < \frac{1}{2}$ setiny, kdežto v *β*) bychom učinili chybu $0{\cdot}5684 - 0{\cdot}56 = 0{\cdot}0084 > \frac{1}{2}$ setiny.

Chybou ($\varDelta$) čísla zkráceného zoveme rozdíl mezi číslem úplným a zkráceným, neb i naopak. Někdy jest číslo zkrácené větší, jindy menší než úplné.

Je-li při zkracování čísla první vynechaná cifra <5, zůstane poslední cifra čísla zkráceného beze změny, je-li > 5, opravujeme ji, t. j. zvyšujeme o 1, na př.:

3·14159 zkráceno na tisíciny dá 3·142 . . .,
3·14159 „ „ setiny „ 3·14. . .,
7·597 „ „ „ „ 7·60. . .,
745843 „ „ tisíce „ 746_{000}.

Tím docíleno, že chyba $\varDelta$ jest vždy $< \frac{1}{2}$ j. n., t. j jednotky nejnižšího řádu čísla zkráceného (jen v řídkých případech může $= \frac{1}{2}$ j. n.)

Že i u čísel neúplných možno z pravidla považovati chybu za $< \frac{1}{2}$ j. n., jest patrno z tohoto příkladu: Měříme-li délku, mající 346 celých *mm* a ještě část $> \frac{1}{2}$ *mm*, určujeme délku tu 0·347 . . . *m* a nikoliv 0·346 . . *m*.

Je-li nám dáno číslo neúplné 4·375 . . ., nevíme arciť, je-li číslo toto $>$ či $<$ čísla úplného; číslo úplné jest však jistě $< 4{\cdot}3755$ a $> 4{\cdot}3745$ t. j. $< 4{\cdot}375 + \frac{1}{2}$ j. n. a $> 4{\cdot}375 - \frac{1}{2}$ j. n.*)

d) Číslo 0·8 . . má možnou chybu $\varDelta_1 < \frac{1}{2}$ desetiny, „ 0·06 . . „ „ „ $\varDelta_2 < \frac{1}{2}$ setiny; ač $\varDelta_1 > \varDelta_2$ jest přece číslo 0·8 . . přesnější než 0·06, neboť u čísla 0·8 . . chy-

*) U čísel neúplných mluvíme tudíž toliko o možné chybě, kdežto u čísla zkráceného, možno mluviti o chybě skutečné.

beno nejvýš o $\frac{1}{16}$ celého čísla, kdežto u čísla 0·06.. jest možná chyba až $\frac{1}{12}$tina čísla. Podobně jest

2·145.. přesnější než 74·3, ježto 2145 > 743,
23·57.. „ „ 1·574 „ 2357 > 1574.

Ze dvou neúplných čísel jest ono přesnější, které má větší obraz číselný*). Proč jest číslo úplné přesnější než každé neúplné?

c) Číslo 4·5.. a 4·50.. neznačí totéž, neboť číslo 4·50.. určuje hodnotu správně až do setin, kdežto číslo 4·5.. toliko do desetin. 4·50.. jest přesnější než 4·5... Vynecháním nully na posledním místě čísla neúplného by se tudíž přesnosť zmenšila. Rovněž není dovoleno v neúplném čísle místo teček psáti nully, neboť cifry tečkami zastoupené jsou neznámé a všeobecně od 0 nully rozdílné.

Cvičení: **1.** Zkraťte čísla: *a*) 7·384 na 2 a 1 des. místo, *b*) 0·2596 na 2 a 3 des. místa, *c*) 3491 na desítky a sta a určte chyby tím povstalé.

2. Jest určiti možné chyby čísla: *a*) 3·4.., *b*) 0·427.., *c*) 4.., *d*) 184_0.

3. Proměň zlomky: *a*) $\frac{166}{225}$, *b*) $\frac{133}{180}$ ve zlomky desetinné správně až do setin, (t. j. aby $\varDelta < \frac{1}{2}$ setiny) a srovnej výsledky.

4. Jest proměniti zlomky: *a*) $\frac{5}{7}$, *b*) $\frac{2}{3}$, *c*) $\frac{5}{18}$ v desetinné správně až do tisícin a sestaviti je dle přesnosti.

5. Jest seřaditi čísla 0·4.., 0·0729, 650_{00}, $0·\dot{4}$, 72·90.., 0·0065.., dle přesnosti.

6. Urči dle přídavku (na konci knihy): *a*) kolik *cm* má 1 stopa víd. a kolik anglická, *b*) kolik *dkg* má 1 víd. libra, *c*) kolik *h* 1 fr., 1 *M*?

§ 69. **Zkrácené počítání.** *a*) Sčítajíce, násobíce atd. čísla, určujeme často i takové řády, o něž neběží a konáme tím marnou práci; na př.: Je-li 1 *kg* za 1·44 zl., jest 2·16 *kg* za 3·1104 zl., při čemž zbytečně jsou počítány, ne-li *t*, *dt* jistě. Abychom si práce ušetřili, počítáme tak, aby v součinu objevily se jen ty řády, o něž běží; takovému počítání říkáme zkrácené.

b) U čísel neúplných a zkrácených nás jiný ohled přímo nutí zkráceně počítati, na př.: Z podmínky 1 jitro = 0·58.. *ha* určíme obyčejným způsobem, že 100 jiter = 58 *ha*, kdežto z přesnější podmínky 1 jitro = 0·575464 *ha* plyne, že 100 jiter = 57·55... *ha*, čímž bychom tedy o 45 *a* chybili. Jest tudíž třeba věděti, kterak jest čísly ne-

*) Číslo 34500 má obraz číselný 345 a číslo 3450_0 však 3450; podobně 0·034500... má obraz číselný 34500, neboť chtějíce určiti číslo toto nejnižšími jednotkami, nelze říci 345 *dt*, nýbrž 34500 millionin.

úplnými počítati, aby výsledek byl až do posledního místa spolehlivý.

Zkrácené sčítání a odčítání. *a*) Majíce sčítati čísla, jež mají více míst desetinných než jich v součtu žádáme, zanedbáme všechny řády nižší žádaných. Ze ***součtu***, nikoliv z jednotlivých sčítanců prvního zanedbaného řádu, vezmeme opravu a řády žádané sčítáme. Součet jest číslem neúplným s $\Delta < \frac{1}{2}$ n. j., na př.: Jest určiti součet 1) na 2 des. místa. (Řády žádané od zanedbaných oddělujeme čarou.) **§ 70.**

1)			2)			3)			5)	
0·72	34		7·54	58		4·35	75		4·35	96
3·45			0·24	..		— 0·82	46		— 0·82	42
0·56	82		2·58	64		3·53	..		3·54	..
2·8			3·4							
7·54	..		13·7(7)	..						

4)			6)	
4·35	46		7·47	..
— 0·82	75		— 4·62	783
3·53	..		2·84	..

b) Běží-li o součet čísel neúplných, (byť i jen jediný sčítanec byl neúplný), nelze si n. j. (= nejnižší jednotky) součtu libovolně stanoviti. Tak nelze v př. 2) určiti součet na tisíciny, ježto na 3tím des. místě jest tečka; na setiny, desetiny... ano; nejpřesnější bude součet, počneme-li sčítati ty n. j., ***ve kterých není tečky*** a ze ***součtu*** (nikoliv z jednotlivých sčítanců) 1. zanedbaného řádu vezmeme opravu. Součet jest číslem neúplným, avšak n. j. jsou nespolehlivy a to tím více, čím více teček má první zanedbaný řád. (Proč)?*)

Součet 2) $= 13·8 \ldots \Delta < \frac{1}{2}$ n. j., aneb $= 13·77 \ldots \Delta > \frac{1}{2}$ n. j.

Jednotky nespolehlivé budeme označovati závorkou.

Bylo-li by určiti součet 2) na desetiny, počítali bychom jako v př. 1) a součet by byl správný až do n. j.

Kdyby jeden sčítanec na př. 4tý byl periodický $3·\dot{4}$, bylo by nutno potřebná místa desetinná vypsati (učiň tak).

c) Odčítání děje se na základě týchž úvah, jakž z příkladů 3), 4), 5) a 6) patrno. Opravu nebéřeme z menšence a menšitele, nýbrž z rozdílu.

Cvičení: **1.** Součet 387142 + 93681 + 729·39 + 184798 + 5347 jest určiti: *a*) do set; *α*) beze vší opravy, *β*) opravivše každý sčítanec, *γ*) s opravou ze součtu desítek; *b*) jest určiti součet až do jednotek a seřaditi výsledky *α*, *β*, *γ*, *b*) dle přesnosti.

*) Urči možnou chybu.

2. Jest určiti $0{\cdot}746.. + 3{\cdot}2 + 0{\cdot}57557 + 0{\cdot}456.. + 2{\cdot}7454..$ α) na 2 des. místa, b) co nejpřesněji.

3. Jest vypočítati příklad 5) α) § 51. zlomky desetinnými na 4 des. místa.

4. Jest určiti co nejpřesněji:

$$3{\cdot}\dot{7}\dot{4} + 0{\cdot}65 + 0{\cdot}23756 + 3{\cdot}4\dot{7} + 0{\cdot}746\,..$$

5. $2745 + 34_{0} + 72_{00} + 4{\cdot}5\,.. + \frac{5}{6}$.

6. $3{\cdot}457 - 1{\cdot}28\,..$ **7.** $27{\cdot}43\,.. - 5{\cdot}\dot{7}\dot{4}$.

8. $6{\cdot}458\,.. - 0{\cdot}47$. **9.** $3{\cdot}8\dot{7} - 1{\cdot}244\,..$ (též na 2 des. místa).

10. Jest sečísti tyto rozdíly co nejpřesněji:
$0{\cdot}5867.. - 0{\cdot}25..$, $0{\cdot}5867.. - 0{\cdot}25$, $0{\cdot}5867 - 0{\cdot}25..$, $0{\cdot}58 - 0{\cdot}2574...$

11. Rozdíly α) $\frac{7}{60} - \frac{5}{72}$, b) $\frac{5}{63} - \frac{6}{91}$, c) $\frac{9}{74} - \frac{13}{111}$ jest určiti α) obyčejnými zlomky, β) desetinnými zlomky na 5 deset. míst a srovnati výsledky.

12. Taktéž $4{\cdot}3\dot{2}\dot{7} + 3{\cdot}\dot{7} + 5{\cdot}04 + \frac{2}{5}$.

§ 71. **Zkrácené násobení čísel úplných.** a) Je-li násobiti $2{\cdot}4578$ číslem α) 60, β) 6, γ) 0·6, δ) 0·06, ε) 0·006 a určiti součin do tisícin, nutno násobiti v α) celý násobenec, v β) jen 2·457, v γ) jen 2·45 atd. (proč?); to budeme vyznačovati tím, že násobitel (jednociferný) napíšeme pod ten nejnižší řád, který ještě násobiti dlužno, tedy

α)	β)	γ)	δ)	ε)
2·4578	2·4578	2·4578	2·4578	2·4578
6	6	6	6	6
147·468.	14·747.	1·474.	0·147.	0·014.

Zanedbávajíce řády nižší (v pravo od násobitele stojící), činíme chybu v β) $6 \times 8\,dt = 48\,dt \doteq 5\,t$, v γ) $6\,d \times 7\,t = 42\,dt \doteq 4\,t$*), v δ) $6\,s \times 5\,s = 30\,dt = 3\,t$, v ε) $6\,t \times 4\,d = 24\,dt \doteq 2\,t$. I byly by tisíciny nesprávny a proto jest vzíti z 1. zanedbaného řádu opravu**). Jako vždy, píšeme i zde tisíciny hned na příslušné místo pod násobenec.

Součiny ty jsou z pravidla (ne vždy) správny až na $\frac{1}{2}$ n. j. Vyslovovati budeme na př. v δ) takto: 30, oprava 3, 24, **27**; 12, **14**.

Je-li určiti součin $82{\cdot}4372 \times 5{\cdot}42637$ na 2 desetinná místa, napíšeme jednotky násobitelovy pod s násobencovy, d pod d, s pod j, t pod D atd., tak že násobitel bude napsán v opačném pořádku ***(jednotky pod žádané místo)*** a násobíme, jakž v a) vyloženo; částečné součiny sečteme.

---

*) Přesněji $6\,d \times 78\,dt = 468\,st \doteq 5\,t$, aneb kratšeji: $6\,d \times 8\,t = 48\,dt \doteq 5\,t$.

**) Že oprava ta není dokonalá, vysvitne srovnáním součinu γ) s α) a ε) s α); γ) má býti $= 1{\cdot}475...$ a ε) $0{\cdot}015...$ (důvod?)

$_{4}82{\cdot}4372$		
$7362\,4{\cdot}5$	příbližné chyby,	možné chyby:
412 19 . . .	$+\,5t$	$\Delta < \frac{1}{2}s$
32 97 .	$-\,2t$	"
1 65 . . .	$+\,2t$	"
49 . .	$-\,2t$	"
3 . . .	$+\,2t$	"
477·33 . .	$1t$	$\Delta < 2\frac{1}{2}s$

Úplně násobeno:

$82{\cdot}4372 \times 5{\cdot}42637$	
412 18	60
32 97	488
1 64	8744
49	46232
2	473116
	5770604
447·33	4748964

V násobenci se *dt* (2) zanedbávají úplně; kdyby jich bylo $\geqq 5$, vzala by se z nich oprava a tisícin by bylo 8.

V násobiteli se zanedbávají *st* úplně a ježto jich jest 7, jsou *dt* (3) v počtu opraveny; 73 nechť žák přečrtne!

V každém částečném součinu jest možná chyba až $\frac{1}{2}s$, v součinu tedy až $2\frac{1}{2}s$ a proto ***n. j. součinu zkráceného jsou nespolehlivy*** a co takové se závorkují; sloužíť pouze k opravě. Ve skutečnosti se však chyby z ***nedokonalých*** oprav navzájem částečně ruší, takže skutečná chyba bývá z pravidla $<$ možné chyby.

Tak na př. v *b*) příbližným vyšetřením chyb ukázala se $\Delta \doteq 1\,t$ a úplným násobením $\Delta < \frac{1}{2}s$ tak, že zkrácený součin $= 447{\cdot}33\ldots$

Bez vyšetřování chyb budeme počítati takto:

Jest určiti: *a*) 23874×6405 na sta, *b*) $25{\cdot}408 \times 816{\cdot}2473$ správně na desetiny, *c*) $6{\cdot}4256 \times 2{\cdot}43782$ též, *d*) $3{\cdot}126 \times 4{\cdot}238$ na set.

a)	*b*)	*c*)	*d*)
$\overset{V}{2}3874{\cdot}0$	$\overset{V}{8}16{\cdot}2473$	$\overset{V}{6}{\cdot}426$	$\overset{V}{3}{\cdot}126$
5046	80 4·52	834·2	83 24
1432440 . .	16324 95	1285	$12\,50_4$
95496	4081 24	257	62_4
1194	326 50	19	9_3
$152913(0)_{00}$	6 53	5	2_4
	20739·2(2) . .	15·6(6)	13·25 . .

a) $= 152913_{000}$ *b*) $= 20739{\cdot}2\,. .$ *c*) $= 15{\cdot}6(6)$

v *c*) nelze — přísně vzato — psáti bez vyšetření chyb, že součin $= 15{\cdot}7\ldots\ \Delta < \frac{1}{2}$ n. j. (proč?) ač v 90% případů podobných nechybíme, řídíce se hořením pravidlem. Chceme-li dosíci větší přesnosti v n. j., pišme zanedbaný řád malými ciframi (viz *d*) a vezměme z něho opravu teprv při součtu.

§ 72. Zkrácené násobení čísel zkrácených a neúplných.

Zkrátíme-li 3·5849 na 3·58... jest chyba $= 0{\cdot}0049 \doteq \frac{1}{2} s$. Avšak při součinu $3{\cdot}58.. \times 10$ jest $\Delta \doteq 5\,s$, při $3{\cdot}58.. \times 100$ jest $\Delta \doteq 5\,d$ a při $3{\cdot}58.. \times 1000$ jest $\Delta \doteq 5\,J$. *Násobíme-li* zkrácené číslo místo úplného obyčejným způsobem, jsou nižší jednotky nesprávné a marně tudíž počítány; protož *násobíme čísla zkrácená i neúplná zkráceně* a stanovíme předem, který nejnižší řád součinu jest ještě spolehlivý.

$$a)\quad 24{\cdot}3518.. \times 3{\cdot}514.. = ?$$

Součin a) nelze počítati na tisíciny a psáti

$$\alpha)\ \begin{array}{r} V \\ 3{\cdot}514?? \\ 81\,5342 \end{array} \qquad \text{též ne} \qquad \beta)\ \begin{array}{r} V \\ 24{\cdot}3518 \\ ??4\,153 \end{array}$$

ježto určujíce prvý částečný součin $2 \times ?$ neznáme druhý činitel. *Při zkráceném násobení čísel neúplných nesmí státi tečka jednoho činitele pod platnou cifrou*) druhého činitele.*

Kdybychom psali místo ? nullu, chybili bychom v součinu až o 10 n. j., ježto u zkráceného čísla může státi na prvním zanedbaném místě 1, 2, 3, 4 až 5. Bylo by tudíž zbytečno na tisíciny počítati.

I lze tudíž psáti nejvýše takto:

$$\alpha)\ \begin{array}{r} V \\ 3{\cdot}5\,14.. \\ ..25\,3{\cdot}42 \\ \hline 70\,28 \\ 14\,06 \\ 1\,05 \\ 18 \\ 1 \\ \hline 85{\cdot}5(8).. \end{array} \qquad \text{aneb:} \qquad \beta)\ \begin{array}{r} V \\ 24{\cdot}352.. \\ ..41\,5{\cdot}3 \\ \hline 73\,06 \\ 12\,18 \\ 24 \\ 10 \\ . \\ \hline 85{\cdot}5(8).. \end{array} \quad \text{(z nemožné opravy **)}.$$

$$\text{Součin } a) = 85{\cdot}6\ldots\ \Delta < \tfrac{1}{2}\,d.$$

Součin a) možno tudíž počítati *nejvýš* na setiny; n. j. však jsou nespolehlivy, (jakž možno zjistiti vyšetřením možných chyb) a hodí se pouze ku opravě. Součin a) lze tudíž zkráceným násobením určiti správně pouze do desetin.

---

*) Činitel 0·00457 považuje se za 3 *ciferný* a 0·00 nejsou tudíž platnými *ciframi činitele*; 0·04570... má obraz číselný 4570 a 0 poslední jest tudíž *platnou* cifrou.

**) V α) nelze učiniti v *prvém* a v β) v *posledním* částečném součinu opravu, ježto prvý zanedbaný řád jest neznámý. Chyba odtud plynoucí (t. j. *chyba z nemožné opravy*) může býti někdy dosti značná; viz b) α). Béřeme-li ze 16 s opravu 2 d, činíme chybu z *nedokonalé* opravy.

b) $74{\cdot}3528\ldots \times 3{\cdot}514\ldots = ?$ Ježto úprava i poučky jsou snazší, volíme vždy ***přesnější činitel za násobitel.***

Počítajíce dle *a*) obdržíme:

$$\begin{array}{lr}
\alpha) & \overset{V}{3}{\cdot}514\ldots \\
 & \ldots 35\,3{\cdot}47 \\
\hline
 & 245\,98 \\
 & 14\,06 \\
 & 1\,05 \\
 & 18 \\
 & 1 \\
\hline
 & 261{\cdot}(28)\ldots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lr}
\beta) & \overset{V}{3}{\cdot}514\ldots \\
 & \ldots 53\,47 \\
\hline
 & 246\,0 \\
 & 14\,0 \\
 & 1\,1 \\
 & 2 \\
\hline
 & 261{\cdot}(3)\ldots
\end{array}$$

Součin $= 261\ldots$

Vyšetřením chyb shledáme, že v α) jsou nejen n. j., nýbrž n. dvojskupina nespolehliva a proto ji dlužno závorkovati. Příčinou toho jest značná chyba *z nemožné opravy* v prvém částečném součinu; $7 \times ? < 4$ j. n. Proto píšeme v tom případě ihned násobitel o 1 místo výše, aby byla možná oprava (viz β).

c) $34{\cdot}725\ldots \times 876 = ?$ Dle téhož způsobu počítáme, je-li jeden činitel úplný.

$$\begin{array}{r}
3\overset{V}{4}{\cdot}725\ldots \\
6\,78 \\
\hline
27780 \\
2430 \\
208 \\
\hline
3041(8)\ldots
\end{array}
\qquad \text{dle } b)\ \alpha) \quad
\begin{array}{r}
3\overset{V}{4}{\cdot}725\ldots \\
678 \\
\hline
27780\,0 \\
2430\,8 \\
208\,3 \\
\hline
3041(9{\cdot}1)
\end{array}$$

Součin $= 3042_0 \quad \varDelta < \frac{1}{2}$ D.

Dle *b*) *a*) počítáme přesněji, ale za to jest n. dvojskupina nespolehliva.

I možno stanoviti toto pravidlo:

Čísla neúplná násobíme zkráceně; činitel přesnější volíme za násobitel. Jeho nejvyšší*) jednotky píší se pod n. j. násobencovy. Jsou-li větší než 2, píší se o místo výše. N. j. součinu jsou nespolehlivy, hodí se však ku opravě.

Cvičení: **1.** Jest násobiti zkráceně:

a) $2{\cdot}3576 \times 0{\cdot}6$ na 3 des. místa, *b*) $0{\cdot}8458 \times 8000$ na *D*,
c) $145{\cdot}2 \times 400$ (2 nejvyšší místa), *d*) $0{\cdot}8546 \times 7$ (3 nejv. místa).

*) Číslo 0·0274 má nejvyšší jednotky 2 *d*.

2. Jest násobiti zkráceně se zkouškou:

a) $2\cdot796 \times 0\cdot058438$ na *t*, *b*) $0\cdot0587 \times 238\cdot236$ na *dt*,
c) $6\cdot573 \times 3\cdot46\cdot$ na *s* správně, *d*) $15\cdot\dot{7} \times 0\cdot5\dot{8}\dot{7}$ na *s* správně,
e) $0\cdot35447 \times 0\cdot6172$ na *dt*, *f*) $4358\cdot2 \times 357\cdot4$ na *T*.

3. U těchto součinů jest učiniti zkoušku s obyčejnými zlomky:

a) $5\cdot2\dot{3} \times 4\cdot\dot{5}$ na *dt*, *b*) $0\cdot\dot{7}\dot{7} \times 1\cdot\dot{5}1\dot{3}$ na *m*.

4. $5\cdot407 \times 5\cdot407 \times 5\cdot407$ vždy na *s*.

5. Jest vypočítati co nejpřesněji:

a) $3\cdot54\,.. \times 1\cdot257\,..$, *b*) $24\cdot3478\,.. \times 0\cdot8574\,..$,
c) $835\cdot465\,.. \times 0\cdot02384\,..$, *d*) $12\cdot345\,.. \times 68$,
e) $14\cdot534 \times 345_0$, *f*) $27\cdot56\cdot \times 145\cdot78\,..$,
g) $5\frac{2}{3} \times 24\cdot52\,..$, *h*) $3\frac{5}{18} \times 846_{00}$.

6. *a*) $5\cdot17\,.. \times 5\cdot17\,..$, *b*) $6\cdot215\,.. \times 6\cdot215\,.. \times 6\cdot215\,..$

7. *a*) $6\cdot\dot{3}\dot{7} \times 0\cdot435\,.. \times 2\cdot3857\,..$, *b*) $4\cdot56\cdot \times 1\cdot3876\,.. \times 0\cdot532\,..$

8. 1 *ha* pole je za 657 zl. 54 kr.; zač je 5 *ha* 12 *a* 50 m^2? (Správně na kr.)

9. Řip vyniká 1436 stop nad hladinu mořskou; kolik jest to *m*, je-li 1 stopa $= 0\cdot316081$ *m*, *a*) správně na *dm*, *b*) co nejpřesněji, jsou-li obě čísla neúplná.

10. Je-li měřice žita za 5 zl. 80 kr., zač je 15 *hl*? 1 *hl* $= 1\cdot626365$ měřic; (správně na kr.)

11. Vinárník koupil vědro vína za 25 zl. $32\frac{1}{2}$ kr. Zač prodá 1 *l*, chce-li 20% získati? (1 *hl* $= 1\cdot767129$ věder); (správně na kr.)

12. Vypočítejte vnitřní hodnotu zlatého skvostu, vážícího $85\cdot61$ *dkg*, jakosti $0\cdot8$, je-li 1 *kg* zlata za 1640 zl.; (správně na kr.)

13. Jest vypočítati plochu obdélníka, jehož šířka jest $7\cdot213\,...$ *m* a délka $23\cdot457\,..$ *m*.

14. Jest vypočítati obvod kruhu, jehož poloměr jest $24\cdot57\,..$ *m* ($\pi = 3\cdot141592653589\,...$)

15. Jest vypočítati plochu lichoběžníka, jehož rovnoběžky jsou $5\cdot347\,..$, $13\cdot74\,..$ a výška $3\cdot748\,..$

16. Střední vzdálenost měsíce od země jest $60\cdot2778$ zemských poloměrů; kolik jest to *km*, má-li zemský poloměr 6378 *km*? (Na *Tkm*.)

17. Stupeň rovníku má 15 zem. mil; kolik jest to *km*, má-li 1 zem. míle $7\cdot4204\,..$ *km*.

§ 73. **Zkrácené dělení čísel úplných.** *a*) Počněme vyhledávati podíl:

Zkráceně

$$\begin{array}{rl} \overset{D}{\widehat{342\cdot1}} & :\ \overset{J}{6\cdot25} = \overset{D}{54\cdot7}\,.. \\ \hline 296 & \!\!|\,0 \\ \hline 46 & \!\!|\,00 \\ \hline & \!\!|\,85 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \overset{D}{\widehat{342\cdot1}}\ :\ \overset{J}{6\cdot_{|}2_{|}5} = \overset{D}{54\cdot7}\,.. \\ \hline 296 \\ \hline 46 \\ \hline 1 \end{array}$$

obyčejným způsobem; druhý částečný podíl (4) obdržíme z dělení 2960 : 625*); podíl se však nemění, dělíme-li dělenec i dělitel týmž číslem, i možno tudíž určiti druhou cifru podílu z dělení 296 : $62_{\llcorner}5$, při čemž arciť oddělenou cifru $_{\llcorner}5$ nezanedbáváme zúplna, nýbrž béřeme z ní při násobení (t. j. při vyhledávání zbytku) opravu. Podobně si vedeme se zbytkem 46, nerozšiřujeme jej v jednotky nižší, nýbrž zkrátíme dělitel o další místo $_{\llcorner}2$ a určujeme třetí cifru (7) podílu z dělení 46 : $6_{\llcorner}2$ místo z dělení 4600 : 625; dělenec i dělitel, jak patrno, byl stem dělen. Další místa podílu tímto způsobem arciť nalézti nelze; i určujeť se podíl pouze příbližně a jest n e ú p l n ý. Že poslední místo podílu může býti nesprávné (jest tedy nespolehlivé), vysvítá z nedokonalých oprav; chyba hromadí se právě v n. j. dělence resp. zbytků, ze kterých se určuje n. j. podílu; na př.:

$$\overset{D}{\widehat{1}18{\cdot}73} : \overset{d}{0{\cdot}3_{\llcorner}2_{\llcorner}7_{\llcorner}4} = \overset{S}{362{\cdot}(7)} \qquad 118{\cdot}73 : 0{\cdot}3274 = 362{\cdot}64\,..$$

	příbližné $\varDelta$	možné $\varDelta$
2051	. . . $4\,t$	$\frac{1}{2}\,s$ n. j.
87	. . . $4\,t$	$\frac{1}{2}\,s$ n. j.
22	$8\,t$	$1\,s$ n. j.

$$\begin{array}{r|l} 2051 & 0 \\ 86 & 60 \\ 21 & 120 \\ 1 & 476 \end{array}$$

Srovnáme-li dělení zkrácené a úplné seznáme, že n. j. podílu 362·7.. jsou nesprávné. Příbližným vyšetřením chyb už zřejmo, že poslední dělenec jest o $8\,t \doteq 1\,s$ větší, tak že správnější dělenec jest 21; a $21 : 3_{\llcorner}2 = 6$ ne 7**).

b) Z *a*) patrno, že p o d í l (t. j. číselný obraz) m á t o l i k c i f e r, c o d ě l i t e l. Má-li tedy podíl

$$\overset{D}{\widehat{1}96{\cdot}42|87} : \overset{S}{214{\cdot}7|56}$$

býti 4ciferný, jest třeba z dělitele podržeti toliko 4 místa; z e z a n e d b a n ý c h m í s t d ě l i t e l e v š a k s e v e z m e o p r a v a ***až při prvém násobení.*** (Proč? Zkoušku!)

Podobně jest zkrátiti dělenec, jakž toho zkrácený dělitel vyžaduje***) a ze zanedbaných míst vzíti opravu.

I bude počet tento:

---

*) Dělíme pouze obrazy číselné.

**) Kdyby nejvyšší jednotky dělitele byly značnější ($\geqq 5$) na př. 8, neměla by chyba ta vlivu na n. j. podílu, neboť $22 : 8_{\llcorner}2 = 2$ tak jako $21 : 8_{\llcorner}2 = 2$.

Čím $>$ nejvyšší jednotky dělitele, tím spolehlivější n. j. podílu.

***) Ježto nejvyššími jednotkami v dělenci je první dvojskupina, má dělenec zkrácený tolik jednotek dělitebných co dělitel. I možno tvrditi, že d ě l e n e c i d ě l i t e l m a j í s t e j n ý p o č e t m í s t (dělitebných).

$$\overset{D}{\widehat{1}96{\cdot}43} \ldots : \overset{S}{2_{\llcorner}1_{\llcorner}4{\cdot}_{\llcorner}7}\,6 \ldots = \overset{d}{0{\cdot}914(6)} \ldots$$

$$\begin{array}{r} \underline{315} \\ \underline{100} \\ \underline{14} \\ 1 \end{array}$$

c) Má-li podíl býti víceciferný než dělitel jest, nutno dělitel rozšířiti; na př.: Jest určiti podíl

$$\overset{J}{9{\cdot}64354} : 0{\cdot}0\overset{s}{4}37 = \overset{S}{2} \ldots$$ na 2 místa desetinná.

Ježto nejvyšší jednotky podílu jsou sta, vyžaduje se tu 5 míst v podílu, i třeba dělitel o 2 místa rozšířiti (připsati 2 nully).

Tudíž

$$\alpha)\ \underline{\overset{J}{9{\cdot}6435}} : 0{\cdot}0\overset{s}{4}_{\llcorner}3_{\llcorner}7_{\llcorner}0_{\llcorner}0 = \overset{S}{2}20{\cdot}6(7) \ldots \qquad \beta)\ \underline{9{\cdot}6435} : 0{\cdot}04_{\llcorner}3_{\llcorner}7 = 220{\cdot}68 \ldots$$

$$\begin{array}{r} \underline{9035} \\ \underline{295} \\ \underline{33} \\ 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \underline{903} \\ \underline{295} \\ \underline{33} \\ -1 \end{array}$$

Ježto zbytek (3) jest větší než polovice dělitele ($4_{\llcorner}3 : 2$) byla by další cifra podílu > 5 a tu by bylo nutno vzíti opravu; v tom případě zvyšujeme tedy n. j. podílu o 1 a do zbytku píšeme to, co se nedostává a to co menšitel (viz *β*).

Připisování null je zbytečné psaní a možno tudíž kratšeji počítati takto (viz *β*).

§ 74. Zkrácené dělení čísel neúplných.

a) Je-li určiti podíl $97{\cdot}5374 \ldots : 3{\cdot}524 \ldots$*) na 3 místa, dělíme dle § 73.

$$\overset{D}{97}5 \ldots : \overset{J}{3}{\cdot}52\,4 \ldots = \overset{D}{2} \ldots \text{ atd.}$$

Na 5 míst podíl ten určiti nelze, ježto jest dělitel 4ciferný a neúplné číslo rozšířiti nelze; podíl *a*) možno určiti nejvýš na 4 místa; tedy

$$\underline{97{\cdot}54} \ldots : 3{\cdot}_{\llcorner}5_{\llcorner}2_{\llcorner}4 \ldots = 27{\cdot}6(8) \ldots$$

	příbližné Δ	možné Δ	
$\underline{2706}$	$\ldots < 15\,t$	$5\,t$	
$\underline{239}$	$\ldots + \;2\,t$	$10\,t$	chyba z nemožné opravy.
$\underline{28}$	$\ldots - \;2\,t$	$5\,t$	
$=$	$\ldots\; 0$	$\underline{5\,t}$	
	$< 1{\cdot}5$ n. j.	$2{\cdot}5$ j. n.	

Že n. j. podílu jsou nespolehlivy, patrno z vyšetření chyb. Ježto

*) Dělenec přesnější dělitele.

dělitel jest neúplný, nelze vzíti při prvém částečném dělení opravu a tím činíme chybu (z nemožné opravy) někdy velmi značnou; v α) jest < 1 j. n.; kdyby však první cifra podílu byla 9, mohla by chyba dostoupnouti hodnoty 4·5 j. n.; chyby ostatní mohly by zvětšiti tuto až na 6 j. n., takže by poslední dělenec byl 32 neb 24 a tudíž n. j. podílu $32 : 3\cdot5 = 9$ neb $24 : 3\cdot5 = 7$.

Jsou-li tedy n. j. podílu při zkráceném dělení vůbec nespolehlivy, jsou tím nespolehlivější u čísel neúplných. K opravě se však z pravidla hodí.

b) Je-li dělitel přesnější dělence, na př.: 13·521 … : 247·542 . ., nutno jej zkrátiti tak, aby měl stejný počet cifer co dělenec*) a z 1. zanedbaného místa vzíti svým časem opravu: Tedy

Zkouška:

b) $\overset{J}{13}\cdot521 \,..\, : \overset{S}{2_{\llcorner}4_{\llcorner}7\cdot_{\llcorner}}\overset{s}{5}|4 = 0\cdot0546\,2)\,..,$

```
 13·521 . .
 1144
  154
    6
    1
```

c) $\overset{V}{0\cdot0546(2)}\,..$

```
    0·0546(2) . .
     . 45·742
    10 924
     2 185
       382
        27
         2
    13·520
    zbyt. 1
```

c) Je-li dělenec úplný a dělitel neúplný**), na př.:

α) 247·5786 : 3·521 . ., neb β) 19·6 : 8·147 …

jest třeba dělenec zkrátiti neb rozšířiti, jakž toho dělitel vyžaduje. Tedy:

α) $\overset{D}{247}\cdot58 : \overset{J}{3}\cdot_{\llcorner}5_{\llcorner}2_{\llcorner}1\,.. = \overset{D}{70}\cdot3(1)\,..,$

```
 247·58
  111   Δ < 3½ j. n. (z nemož. opravy)
  = 5
    1
```

β) $\overset{J}{19}\cdot600 : \overset{J}{8}\cdot147\,.. = \overset{J}{2}\cdot40(6)\,…$

```
 19·600
  3306  Δ < 1 j. n. (z nemož. opr.)
 atd.
```

α) Zkouška $\times$

```
  70·3(1) . .
 . 12 5·3
 210 93
  35 16
   1 41
      7
 247·57 + zbytek = dělenci,
```

β) Zkouška dělením:

$19\cdot600 : 2\cdot_{\llcorner}4_{\llcorner}0(_{\llcorner}6)\,.. = 8\cdot14(6)$

```
 19·600
   352
   111
    15
     1
```

n. j. se neshodují, ježto n. j. podílu byly nespolehlivy.

*) Nejsou-li jeho nejv. j. dělitelny, tedy o 1 cifru méně.

**) Tu jsou 2 zdroje chyb: 1) z nemožné opravy hned při prvém částečném *d*) Je li dělenec neúplný a dělitel úplný, na př.:

α) 485·23.. : 35·4, neb *β*) 19·64.. : 81·47,

tu jest třeba dělitel rozšířiti neb zkrátiti, jakž toho vyžaduje dělenec. Tedy:

```
     S        D       J                J         D        d
α) 485·23.. : 35·40|0 = 1·3707.., β. 19·64.. : 81·|47 = 0·241..
   131 23                            3 35
    atd.                             atd.
```

Zkouška: *α*) $\overset{V}{1.3707}$.. *β*) 0·241..

1) násobením: 453 7418

....

....

485·23 = dělenci 19·63 + zbytek = dělenci.

2) dělením: *α*) 485·23.. : 1·3707.. = 35·400..

β) 19·64.. : 0·241.. = 81·5..

Cvičení: **1.** Jest určiti postupným zkracováním dělitele tolik míst co možno a zkoušku vykonati násobením:

a) 8·52 : 3·17, *b*) 0·574 : 67, *c*) 723·9 : 0·473,

d) 1·73 : 74·58, *e*) $0{\cdot}4\dot{2}\dot{8}$: 0·03574, *f*) 1 : 1·785.

2. Jest určiti se zkouškou:

a) 245·07 : 34·58 (3 místa des.), *b*) 0·735 : 0·84364 (3 místa des.), *c*) 0·387 : 0·027567 (2 místa des.), *d*) 1374 : 65·3 (5 míst des.), *e*) 3·58 : $0{\cdot}3\dot{4}\dot{7}$ (4 místa des.), *f*) $6{\cdot}\dot{5}$: 73·5 (3 místa des.).

3. *a*) $5{\cdot}3\dot{7}$: $0{\cdot}06\dot{2}\dot{8}$ (3 místa des.), *b*) 4379 : 0·003264 (do *T*), *c*) 738 25 : 45 3 (2 místa des.), *d*) 374530 : 4·287 (do *S*).

4. Podíl $\frac{43}{55}$: $\frac{45}{74}$ jest určiti zlomky: *a*) obyčejnými, *b*) desetinnými a srovnati oba výsledky.

5. Jest určiti podíl co nejpřesněji a zkoušku vykonati dílem násobením, dílem dělením:

a) 63 27.. : 0·4752.., *b*) 3·754.. : 56·2.., *c*) 352·1.. : 473_0.

d) 547·365.. : 38·94.., *e*) 0·031741. : 0·672573...,

f) 7·14524.. : 0 04625, *g*) 143 : 3·14159.., *h*) 237·45.. : $9{\cdot}2\dot{6}$,

i) $14{\cdot}\dot{3}\dot{7}$: 0·8725.., *j*) 574_{000} : 2734.

6. Jest určiti co nejpřesněji: *a*) 0·325.. : $1\frac{5}{7}$, *b*) $\frac{11}{23}$: 2·357.. oběma způsoby.

7. *a*) Oč, *b*) kolikrát jest součet 0·8734.. + 3·572.. větší součinu týchž čísel.

---

dělení a 2) z nedokonalých oprav při dalším zkráceném dělení a proto n. j. podílu málo spolehlivy, zvláště jsou-li nejv. j. podílu značny a dělitele nepatrny. (Jaký vliv mají tyto jednotky na chybu při zkoušce násobením?,

8. *a*) Oč, *b*) kolikrát jest rozdíl $6{\cdot}2\dot{7} - 0{\cdot}543$... menší podílu menšence menšitelem.

9. Je-li *m* látky za 3·20 zl.; zač je český loket (1 *m* = 1·684.. českého lokte); (piš v sloupce a řádky:

1 *m* = 1·684.. českého lokte za 3·20 zl.

1 „ „ „ *x* „

10. Řip jest 1436′.. vysoký; jest určiti výšku jeho v *m*, je-li 1 *m* = 3·164′..

11. Kupec má na skladě 39 víd. liber čaje v ceně 270 zl., zač prodá 1 *dkg*, chce-li na 1 *kg* získati 10 zl. 80 kr. a je-li 1 *kg* = 1·7855.. víd. libry.

12. Koruna má 4·175 *g* ryzího stříbra; kolik korun možno raziti z 1 *kg* ryzího stříbra (1 místo des.).

13. 67 dukátů váží 233·87.. *g* a jsou jakosti $23\frac{2}{3}$ karatové ($\frac{71}{72}$). Jest vypočítati vnitřní hodnotu 1 dukátu, je li 1 *kg* zlata za 1640 zl. (Výkony početní nejprve vyznačiti a výsledek teprv vyčísliti.)

14. Na cestě 1·35 míle dlouhé má býti vysázeno stromořadí; kolik stromů bude třeba, je-li jeden od druhého $3\frac{1}{2}$ *m* vzdálen a je-li 1 *km* = 0·1318.. míle.

15. *a*) Čechy čítaly v roce 1890 5843_{000} obyvatelů; kolik žije průměrně obyvatelů na 1 km^2, prostírají-li se Čechy na 51956 *km*? *b*) Kolikrát jest Slezsko, jež se rozprostírá na ploše 5148.. km^2, menší Čech a kolik by mělo obyvatelů při stejné lidnatosti. (Má 605649).

ČÁSŤ DEVÁTÁ.

Arithmetika obecná (algebra).

Čísla obecná. Číslo jest souhrn jednotek (§ 1.). Dosud jsme brali v úvahu jen čísla, značící zcela určitý počet jednotek a značili je ciframi, na př.: 4, 13 zl. $\frac{3}{4}$. „Několik“ jednotek však jest též číslo (= souhrn jednotek), liší se však od 4, 13, $\frac{3}{4}$.. tím, že počet jednotek není zde přesně označen; čísla taková označujeme písmenami a to obyčejně malými latinskými písmenami *a*, *b*, *c*... *x*, *y*, *z* a nazýváme je čísly obecnými, kdežto čísla prvnější (4, 13, $\frac{3}{4}$...) zovou se zvláštní. Nauka o početních výkonech čísly obecnými zove se arithmetika obecná. Řekněte, kdy jsme již užili písmen k označení čísel? **§ 75.**

Značí-li *a*, *b*... čísla, co značí $a + b$, $a - b$, $a \times b$, $\frac{a}{b}$,

$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \cdot c}{b}$; $a : b = c : d$, $a \cdot d = b \cdot c$, $a = \frac{b \cdot c}{d}$; co značí rovnice $100\, U = K \cdot p \cdot r$ v § 67? atd.

Vyznač ještě jiné poučky čísly obecnými.

Vedle této výhody skytají čísla obecná ještě jiné. Možnoť jimi počítati všeobecně, t. j. poučky vyslovené o číslech obecných platí i o číslech zvláštních: majíť platnost všeobecnou. Při tom jest si pamatovati, že sice počet jednotek, jež a značí, není vytčen, že ale v celém průběhu početního výkonu značí a jedno a totéž číslo. Přisoudíme-li mu v některém počtu hodnotu 5, musí tuto hodnotu podržeti až do konce.

§ 76. Znaky početních výkonů, početní výrazy, závorky.

a) Výkony početní čísly obecnými vyznačují se týmiž znaky, jako u čísel zvláštních. Tak značí $a + b$ sčítání, $a - b$ odčítání, $a \times b$ nebo $a \cdot b$ násobení, $a : b$ neb $\frac{a}{b}$ dělení. Násobení vyznačujeme ještě tak, že čísla obecná píšeme prostě v řádek. Toho způsobu se užívá i tehdy, je-li jeden činitel obecný, druhý zvláštní, na př.: $ab = a \cdot b$; $2a = 2 \cdot a$. Možno také psáti $2 \times 4 = 24$?

b) Čísla napsaná čísly zvláštními neb obecnými, spojenými vespolek početními výkony, zovou se ***výrazy početní*** (krátce ***výrazy***). Tím by $a + b$ značilo sčítání i součet. Chceme-li rozlišiti výrazy početní od výkonů početních, klademe je do závorek. Nejjednodušší výrazy jsou součet $(a + b)$, rozdíl $(a - b)$, součin (ab), podíl $(a : b)$, zlomek $\left(\frac{a}{b}\right)$, jsouť to 2 čísla spojená jediným výkonem početním. Závorky píšeme kulaté též malé (. . .); hranaté též velké [. . .] a svorky { . . . }; závorky, nalézající se uvnitř jiných, zoveme vnitřní proti vnějším.

c) Závorek jest však nutně třeba bychom vyznačili, že výkon početní týká se celého výrazu a nikoliv jen toho čísla, vedle něhož stojí. Tak jest

$$7 - (5 - 2) = 7 - 3 = 4;$$
$$3 \cdot (6 + 2) = 3 \cdot 8 = 24; \quad 3 \cdot (6 - 2) = 3 \cdot 4 = 12;$$
$$(5 + 4) - (5 - 4) = 9 - 1 = 8; \quad (3 \cdot 4) - 2 = 12 - 2 = 10;$$
$$5 - [7 - (6 - 1)] = 5 - [7 - 5] = 5 - 2 = 3 \quad \text{atd.}$$

Jak z příkladů těchto patrno, možno ve výrazu zvláštním závorky odstraniti a to tím, že vykonáme, co jest v závorkách vyznačeno. Tím nahradí se výraz jediným číslem, jež se nezávorkuje. Znak násobení před závorkovaným výrazem se obyčejně vynechává, na př. místo $3 \cdot (6 + 2)$ píšeme:

$$3\,(6 + 2) = 3 \cdot 8 = 24; \quad \text{aneb} \quad (6 + 2)\,(6 - 2) = 8 \cdot 4 = 32.$$

d) Majíce posloupně *α*) sčítati čísla 4, 5, 6, 7, aneb *β*) odečítati tři 4krát od 15ti, bylo by dle *c*) nutno psáti:

α) $[(4+5)+6]+7=[9+6]+7=15+7=22;$

β) $\{[(15-3)-3]-3\}-3=\{[12-3]-3\}-3=\{9-3\}$
$-3=6-3=3.$

Aby tolik závorek se nehromadilo, bylo smluveno, že závorky lze vypustiti:

1) Mají-li se naznačiti posloupné výkony téhož stupně*). Tak výkony hoření se krátce naznačí takto: *α*) $4+5+6+7$; *β*) $15-3-3-3-3$ a konají se od levé ruky k pravé posloupně. Podobně se píše: $14+3-4$, místo $(14+3)-4$.

$5\times8\times3:4:6$ místo $\{[(5\times8)3]:4\}:6$.

Výjimku od tohoto pravidla tvoří v arithmetice obecné dělení součinem, na př.: $12:3\times2$ mělo by dle 1) býti $=4\times2=8$, jest však $=12:6=2$; nemělo by se tudíž psáti bez závorek, nýbrž $12:(3\times2)$.

2) Mají li výkony vyšší *před* nižšími býti vypočteny, netřeba výkony vyšší závorkovati. Na př.:

Je-li sečísti součiny 4×5 a 3×4, píšeme:

$4\times5+3\times4$, místo $(4\times5)+(3\times4)$.

Je-li od 9 odečísti podíl $4:3$, píšeme:

$9-4:3$, místo $9-(4:3)$.

A naopak lze tvrditi:

Je-li ve výraze početním bez závorek více znaků početních

1) téhož stupně, jest výkony od levé ruky k pravé posloupně konati (až na výjimku $12:3.2$).

2) různých stupňů, jest vykonati nejprve *vyšší* a pak posloupně od levé ruky k pravé výkony nižší.

Cvičení: **1.** Jest vysloviti, co naznačeno a vyčísliti početní výrazy:
a) $8+(5-3)$, *b*) $10-(7-3)$, *c*) $3(4+7)$,
d) $15-2(5-3)$, *e*) $(18-1)+(7-5)$.

2. *a*) $8+5-3$, *b*) $10-7-3$, *c*) $3.4+7$,
d) $15-2.5-3$, *e*) $18-1+7-5$.

3. *a*) $(12-6):3$, *b*) $12-(6:3)$, *c*) $12-6:3$,
d) $(4.5-2)3$, *e*) $4(5-2.3)$, *f*) $4(5-2)3$,
g) $4.5-2.3$, *h*) $45-23$, *i*) $14-2.3+7.5$.

4. *a*) $(3.4+6):2$, *b*) $3(4+6:2)$,
c) $3(4+6):2$, *d*) $3.4+6:2$.

---

*) Výkony téhož stupně jsou: sčítání a odčítání; násobení a dělení; výkony poslední jsou stupně vyššího než předcházející.

5. *a*) $(16 : 4 - 3) : 2$, *b*) $16 : (4 - 3 : 2)$,
c) $16 : (4 - 3) : 2$, *d*) $16 : 4 - 3 : 2$.

6. *a*) $4 \times 3 : 2$, *b*) $4 \times \frac{3}{2}$, *c*) $8 \times 7 : 4 : 2$,
d) $8 \times \frac{7}{4} : 2$, *e*) $4 \times 7 : 7 \times 5$, *f*) $4 \times 7 \times 5 : 7$,
g) $3 \times 4 \times 5 : 20$, *h*) $3 \times 4 \times \frac{5}{20}$.

7. *a*) $10 + 2 . 3 - 1$, *b*) $10 - 2 . 3 - 1$, *c*) $(10 - 2)(3 - 1)$,
d) $10 - 2(3 - 1)$, *e*) $(10 - 2) 3 - 1$, *f*) $(10 - 2 . 3) - 1$,
g) $10 - (2 . 3 - 1)$.

8. *a*) $20 - 2 . 7 - 3 . 2$, *b*) $(20 - 2) 7 - 3 . 2$,
c) $20 - 2 (7 - 3) 2$, *d*) $(20 - 2 . 7) - 3 . 2$,
e) $20 - 2 (7 - 3 . 2)$, *f*) $20 - (2 . 7 - 3 . 2)$,
g) $(20 - 2 . 7 - 3) 2$, *h*) $[20 - 2 (7 - 3)] 2$,
i) $[(20 - 2) 7 - 3] 2$, *j*) $30 - (2 . 7 - 3) 2$.

9. *a*) $2 . 7 - 5 + 3 . 4$, *b*) $2 7 - (5 + 3) 4$,
c) $2 7 - (5 + 3 . 4)$, *d*) $2 (7 - 5) + 3 . 4$,
e) $2 (7 - 5 + 3) . 4$, *f*) $(2 . 7 - 5) + 3 . 4$,
g) $2 . (7 - 5 + 3 . 4)$, *h*) $(2 . 7 - 5 + 3) 4$,
i) $[2 (7 - 5) + 3] 4$, *j*) $2 [(7 - 5) + 3 . 4]$.

10. *a*) $15 - 7 - 4 - 2$, *b*) $(15 - 7) - (4 - 2)$,
c) $15 - 7 - (4 - 2)$, *d*) $15 - (7 - 4) - 2$,
e) $15 - (7 - 4 - 2)$, *f*) $15 - [7 - (4 - 2)]$,
g) $[15 - (7 - 4)] - 2$, *h*) $[(15 - 7) - 4] - 2$.

11. Možno-li vypustiti závorky: *a*) v 9 *f*), 10 *h*) a *b*) ve výrazech $(a + b) c$, $a (b + c)$, $(a - b) : c$, $a : (b - c)$, $(a : b) : c$, $a : (b : c)$: ne-li, proč?

12. Jest čísti tyto výkony početní:
a) $a : b = c$, tedy $a = b c$, *b*) $a - b = r$, tedy $a = b + r$.

13. Jest napsati početní výrazy vyznačené těmito slovy: Rozdíl čísel 7 a 4 jest *a*) odečísti od 12, *b*) násobiti 4mi a odečísti od součtu čísel 12 a 4.

14. Kolikrát jest součin čísel 8 a 4 *a*) větší, *b*) menší než jich α) součet, β) rozdíl, γ) podíl?

15. Číslo 6 jest násobiti 4mi, součin zvětšiti o 9 a součet děliti 3mi.

16. Rozdíl čísel 8 a 5 jest násobiti 2ma a součin odečísti od 10 a nový rozdíl od 5.

17. Hráč měl na počátku 12 zl., prohrál-li polovici a na to 5 zl a vyhrál-li dvakrát tolik, co mu zbylo, kolik měl po hře?

§ 77. **Dosazování.** Píšeme-li do obecného výrazu početního místo čísel obecných zvláštní, (aneb i jiná obecná) a vzniklý výraz uvedeme na tvar nejjednodušší, dosazujeme. Výkon ten se zove substituce

Dosadíme-li na př. do výrazu $(a+b)c - ac$ za $a=4$, $b=3$, $c=2$, obdržíme: $(4+3)2 - 4 \,.\, 2 = 7 \,.\, 2 - 8 = 14 - 8 = 6$.

Cvičení: **1**. Do výrazu $a)$ $2n$, $b)$ $2n-1$, c $\frac{n(n-1)}{2}$ jest dosaditi za $n = 1, 2, 3 \ldots 10$.

2. Jest vyčísliti*) tyto výrazy pro $a=20$, $b=5$, $c=3$, $d=1$;
$a)$ $(a-b)(c-d)$, $b)$ $a-b(c-d)$, $c)$ $(a-b)c-d$,
$d)$ $(a-bc)-d$, $e)$ $a-(bc-d)$, $f)$ $a-bc-d$.

3. Rovněž pro $a=6$, $b=5$, $c=3$, $d=2$;
$a)$ $ab : c : d$. $b)$ $(ab : c) : d$, $c)$ $a(b : c) : d$,
$d)$ $ab : (c : d)$, $e)$ $a(b : c : d)$, $f)$ $ba : d : c$.

4. $a)$ $(a-2)3 - 2a$, $b)$ $3a-(2a-b)$, $c)$ $b \,.\, 4 - 2(a-3)$,
$d)$ $5a-(a-3)2$, $e)$ $2a - [3c - (2b-a)]$.

5. $a)$ $2a + [3b + (4c + 5d)]$, $b)$ $3a - [2b - (4c - 5d)]$.

6. Do výrazů $a+b$, $a-b$, ab, $a:b$, $2a-5b$, jest dosaditi: $a)$ za $a = x+y$, $b = x-y$, $b)$ $a=8$, $x=5$, $y=?$, $b=?$ a srovnati výsledky.

Sčítání a odčítání jednoduchých výrazů. § 78.

$$4+3=7;\quad 5-3=2.$$

Součet a rozdíl čísel zvláštních možno vyčísliti, t. j. určiti číslem jediným; součet a rozdíl čísel obecných, na př.: $a+b$, neb $a-b$ nelze všeobecně určiti tvarem jednodušším, leč v těchto případech:

$a)$ Jsou-li všechny sčítance stejné, možno místo součtu psáti součin, na př.:

$$a + a = a \,.\, 2 = 2a, \quad ab + ab + ab = 3ab, \quad \frac{n}{3} + \frac{n}{3} = 2\,\frac{n}{3}.$$

Součiny, jež mají všechny činitele až na jeden stejné, zovou se výrazy stejnojmenné. Činitel různý zove se (zvláště je-li číslem zvláštním) coefficientem (součinitel); tak jsou $3a$ a $4a$, $2ab$ a $3ab$ stejnojmenné; $2ax$ a $3bx$ nikoliv.

$b)$ Jsou-li všechny sčítance stejnojmenné, na př.:

$$3a + 2a = a + a + a + a + a = 5a, \text{ tak jako:}$$

$$3D + 2D = 5D, \text{ aneb } 3ab + ab^{**)} = 4ab, \text{ jako:}$$

$3 \,.\, 20 + 20 = 4 \,.\, 20$, [t. j.: $3(5 \times 4) + (5 \times 4) = 4(5 \times 4)$], čti 3 dvacítky + 1 dvacítka = 4 dvacítky. V rovnici $3a + 2a = 5a$ jest společný činitel sčítanců napsán *jednou* zase jako činitel. Výkon takový zoveme ***vytknouti*** společný činitel. (Viz § 43.)

*) Vyčísliti výraz znamená, určiti jeho hodnotu jediným číslem, na př.: $3 \times 15 = 45$; tím vyčíslen součin 3×15; $(a+b)(a-b)$, pro $a=5$, $b=3$ jest $=16$ atd.

**) $ab = 1 \,.\, ab$; $20 = 1 \,.\, 20$.

Stejnojmenné výrazy se sčítají, sečtou-li se jich coefficienty a společný činitel se vytkne. Výrazy, při nichž se coefficient nepíše, mají coefficient 1 *).

c) Je-li menšenec a menšitel stejnojmenný, na př.: $5a - 2a = 3a$, ježto $3a + 2a = 5a$, $5D - 2D = 3D$, $4ab - ab = 3ab$.

Stejnojmenné výrazy se odčítají, odečteme-li coefficienty a společný činitel vytkneme.

Zkouška koná se dosazováním α) do úlohy, β) do výsledku a srovnáním α) s β), na př.: $5x - (7x - 4x) = ?$ (Zkouška pro $x = 2$). Výkon: $5x - (7x - 4x) = 5x - 3x = 2x$. Zkouška:

α) $5 \,.\, 2 - (7 \,.\, 2 - 4 \,.\, 2) = 10 - (14 - 8) = 10 - 6 = 4$,

β) $2 \,.\, 2 = 4$; $\alpha) = \beta)$.

Cvičení: **1.** Jest zjednodušiti výrazy:

a) $3a + a + 2a + 5a$, b) $9a - 2a - 3a$.

2. a) $8a - 3a + 2a$, b) $5a - 4a + 7a - 3a - 2a$; (zkouška pro $a = 3$).

3. a) $2b + (3b + b)$, b) $5b + (4b - 3b)$; $b = 2$.

4. a) $6b - (2b + b)$, b) $5b - (6b - 4b)$; $b = 3$.

5. $4x + 2x - (5y - 2y)$; $x = 3$, $y = 2$.

6. $7y - [5y - (4y - 3y)]$; $y = 2$.

7. $3ab + 4ab + ab + 12ab$; $a = 2$, $b = 5$.

8. a) $15xy - 2xy - xy - 7xy$,

b) $8xy - 5xy + 7xy - 3xy - 4xy$.

9. Přesvědč se o správnosti rovnic:

$a + b = b + a$, $(a - b) + b = a$, $(a + b) - b = a$

dosazením libovolných čísel. Vyslov poučky v rovnicích těch obsažené.

10. V součtu $a + b + c$ jest sčítance přemístiti kolikrát možno a součty vyčísliti pro $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. (Poučku?)

11. Čísla $n + 1$, $n + 2$, $n - 2$, $n - 1$ seřaď dle velikosti.

12. $a + 1 + 2a + 2 + 3a + 3 - 4a - 4 = ?$

13. $a + 2b + 3c + 2a - b + 2c - 3a + b + c = ?$

14. $2ab + 3ac - ab + 2ac + 4ab + 3bc = ?$

15. $3(a + b) + 2(a + b) + 3(a - b) + 2(a - b)$ **).

§ 79. Přičítání a odčítání součtu a rozdílu.

Je-li ku číslu a přičísti, neb od a odečísti součet $(b + c)$, píšeme: $a + (b + c)$, $a - (b + c)$ ***).

---

*) $ab = 1 \,.\, ab$; $20 = 1 \,.\, 20$.

**) 3 součty + 2 součty (stejné) + ...

***) Znakem sčítání jest u tvarů složených tudíž + (. . .), znakem odčítání — (. . .).

Ježto však $9 + (5 + 2) = 9 + 5 + 2$ a $9 - (5 + 2) = 9 - 5 - 2$, lze též psáti:

$a)$ $a + (b + c) = a + b + c$,
$b)$ $a - (b + c) = a - b - c$. | Vylož na ose číselné.

Součet se přičítá (odčítá), přičteme-li (odečteme-li) posloupně jeho sčítance.

Je-li ku a přičísti neb od a odečísti rozdíl $(b - c)$, píšeme: $a + (b - c)$, $a - (b - c)$ a počítáme, na př.: $9 + (5 - 2) = 9 + 3 = 12$.

Počítajíce však na ose číselné posloupně $9 + 5$, přičítáme o 2 více; abychom chybu napravili, jest ještě 2 odečísti; tedy

$$9 + (5 - 2) = 9 + 5 - 2, \text{ čili:}$$

$c)$ $a + (b - c) = a + b - c$. | Vyznač na ose číselné.

Rozdíl se přičítá, přičteme-li menšenec a odečteme menšitel. Přičítati rozdíl jsou 2 posloupné výkony: přičísti menšenec a odečísti menšitel.

$d)$ $9 - (5 - 2) = 9 - 3 = 6$; počítáno na ose číselné posloupně, dá především $9 - 5$, čímž odečteno o 2 více; přičtením 2 se chyba napraví, takže $9 - (5 - 2) = 9 - 5 + 2$, čili: $a - (b - c) = a - b + c$. Rozdíl se odčítá, odečteme-li menšenec a přičteme menšitel. Odečítati rozdíl jsou 2 posloupné výkony: odečítati menšenec a přičítati menšitel.

Cvičení: 1. Jest vykonati, co naznačeno: $a)$ rázem (možno-li), $b)$ posloupně: $a)$ $4a + (3a + 2a)$, $b)$ $3a + (5a + 4)$, $c)$ $7 + (2a + 3)$, $d)$ $8 + (3 + 2a)$.

2. $a)$ $4x + (5x - 2x)$, $b)$ $4x + (3x - 5)$, $c)$ $7 + (2x - 4)$, $d)$ $2 + (3 - 4x)$.

3. $a)$ $9b - (2b + 3b)$, $b)$ $5x - (3x + 3)$, $c)$ $8 - (y + 5)$, $d)$ $7 - (4 + 2c)$.

4. $a)$ $5c - (4c - 3c)$, $b)$ $7y - (2y - 5)$, $c)$ $2 - (4b - 5)$, $d)$ $13 - (7 - 4c)$, $e)$ $5x + 6 - (2x - 4)$.

Čísla vztažná (algebraická).

$4 - 7 = ?$ má tvar rozdílu, ale vyčísliti rozdíl nelze, neboť § 80.
$4 < 7$; ježto však $7 = 4 + 3$, možno dle § 79. $a)$ odečítati aspoň částečně takto:

$$4 - 7 = 4 - (4 + 3) = 4 - 4 - 3 = 0 - 3;$$

podobně:

$3 - 5 = 3 - 3 - 2 = 0 - 2$; $a - (a + r) = a - a - r = 0 - r$.

Nepíšeme-li 0, bude $4 - 7 = -3$, $3 - 5 = -2$; takže tvar „-3“ (zkrácený rozdíl $0 - 3$) stojí na místě zbytku. Chceme-li -3

považovati za *číslo*, možno vykonati pak i takové odčítání, kde menšenec $<$ menšitele.

A co značí „-3“ co číslo? Jsou to tři jednotky, které jest ještě odčítati, jsou to tři odčetné čili záporné (negativní) jednotky. Dle toho značí -5 pět jednotek, které jest odčítati; i možno -5 vyznačiti jakýmkoliv rozdílem, v němž menšenec jest o $5 <$ menšitele, na př.: $-5 = 5 - 10 = 4 - 9 = 3 - 8 = \dots$

Nejjednodušším takovým rozdílem jest $0 - 5$ a proto volíme ten k vyznačení $-5 = 0 - 5$; $-a = 0 - a$.

Týmž právem možno čísla, o nichž jsme dosud mluvili, označovati jako čísla sčetná, t. j.: $3 = 0 + 3$ a psáti $3 = +3$. Čísla taková zoveme kladná (positivní). Oboje dohromady zovou se čísla vztažná, čili algebraická, kdežto čísla, jimiž jsme dosud počítali, slují prostá (absolutní). Číslo algebraické skládá se tudíž ze dvou dílů, 1) z čísla absolutního, určujícího počet jednotek a 2) znaménka vztahu ($+$, $-$), značícího qualitu, t. j. jaké jsou ty jednotky. Proto nutno je závorkovati jako tvary (výrazy) číselné*), chceme-li jimi počítati; tak $(+3) + (-2)$ značí součet čísel $+3$ a -2.

Mají li čísla vztažná týž počet jednotek ($=$ touže absolutní hodnotu) a jen znaménka protivná, slují protivou rovná, na př.: $+5$ a -5, $+b$ a $-b$.

Patrno, že jako $3 = 1 + 1 + 1$
jest i $+3 = (+1) + (+1) + (+1)$
a $-3 = (-1) + (-1) + (-1)$

Počet jednotek jest všude stejný, jen jméno (jakost, qualita) jednotek jest různá.

Cvičení: Jest vyčísliti tyto výrazy dle § 9. *h*)

$0 - 5 + 3$, $-5 + 3$, $0 - 3 - 2$, $-3 - 2$.

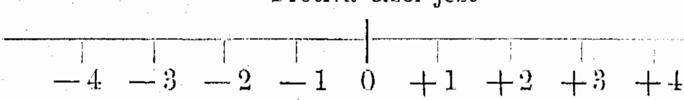
§ 81. **Znázornění čísel záporných na ose číselné.**

$4 - 1 = 3$
$4 - 2 = 2$
$4 - 3 = 1$
$4 - 4 = 0$
$4 - 5 = -1$
$4 - 6 = -2$
$4 - 7 = -3$

Chtějíce tyto rozdíly znázorniti na ose číselné, postupujeme k číslům stále menším od pravé ruky k levé.

Chtějíce znázorniti -1, -2, $-3\dots$, nutno osu číselnou prodloužiti na levo o $1, 2, 3\dots$ délky, tak že obdržíme obrazec 9.

Protiva čísel jest



Obr. 9.

zde vyznačena protivným směrem a absolutní hodnota počtem dílků.

*) Součet, rozdíl atd.

Tím rozšířena i přirozená řada čísel v řadu čísel vztažných; z hořeních rozdílů patrno, že

$$-4 < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < \ldots$$

Cvičení. Urči na ose číselné rozdíly:

$$2-3,\ 3-5,\ 2-6,\ 2-7\ \ldots$$

Sčítání čísel vztažných.

a) **Sčítání čísel souhlasných**. Čísla kladná vespolek a záporná vespolek zovou se čísla souhlasná, kdežto kladná a záporná vespolek slují protivná neb nesouhlasná. § 82.

Souhlasná čísla se sčítají, sečteme-li jich absolutní hodnoty a společné znamení [vztahu] vytkneme; na př.:

α) $(+3)+(+2)=+(3+2)=+5$ | Slovy: 3 kladné $J+2$ kladné $J=5$ kladných J; 3 záporné $J+2$ záporné $J=5$ záporných J, jako 3 zl. $+2$ zl. $=5$ zl.

β) $(-3)+(-2)=-(3+2)=-5.$

Čteme-li rovnice α) β) zvratně, bude γ) $+5=(+3)+(+2)$; $-5=(-3)+(-2)$.

Číslo vztažné možno rozvésti na 2 souhlasné sčítance.

b) Sčítání protivných čísel:

α) $(+5)+(-5)=0$; $(+a)+(-a)=0$.

Součet čísel protivou rovných se $=0$.

Čísla protivou rovná se v součtu ruší.

β) $(+5)+(-3)=\underbrace{(+2)+(+3)}_{+5}+(-3)=+2=+(5-3)$.

$5+J$ možno rozvésti na $2+J$ a $3+J$; $3+J$ a $3-J$ se ruší a zbudou $2+J$. Podobně odůvodníme:

γ) $(-5)+(+3)=(-2)+(-3)+(+3)=-2=-(5-3)$.

Aneb:

$(+5)+(-3)=0+5+(0-3)=+5+0-3\ \ =5-3=2,$

$(-5)+(+3)=0-5+(0+3)=-5+0+3$*$)=3-5=-2.$

Čísla protivná se sčítají, odečteme-li jich prosté hodnoty**) a rozdílu dáme znamení čísla většího. Čísla protivná se v součtu částečně ruší.

Zvratným čtením rovnic *b* α), β), γ) obdržíme:

Číslo se nemění, přidáme-li k němu součet protivou rovných čísel.

---

*) Viz § 9 *h*).

**) Větší — menší.

Číslo vztažné možno rozvésti na součet dvou čísel protivných: $+2=(+5)+(-3)$, $-2=(-5)+(+3)$; aneb: $+2=(+6)+(-4)$, $-2=(-6)+(+4)$.

Součet vztažných čísel se zove součet algebraický.

Odčítání čísel vztažných.

§ 83. *a*) **Odčítání čísel souhlasných.**

1) Menšenec $>$ menšitele, na př.:

α) $(+5)-(+3)=+(5-3)=+2,$

β) $(-5)-(-3)=-(5-3)=-2,$

slovy: 5 kladných J bez 3 kladných $J=2$ kladným J,
5 záporných J „ 3 záporných $J=2$ záporným J,
jako: 5 zl. — 3 zl. = 2 zl.,

tudíž:

$(+5)-(+5)=0$; $(-5)-(-5)=0$; $(+a)-(+a)=0$; $(-a)-(-a)=0.$

2) Menšenec $<$ menšitele:

α) $(+3)-(+5)=\underbrace{(-2)+(+5)}_{+3}-(+5)=-2,$

slovy: $+3$ možno rozvésti na $2-J$ a $5+J$; odečteme-li $5+J$ zbudou $2-J$.

β) $(-3)-(-5)=(+2)+(-5)-(-5)=+2.$

-3 možno rozvésti na $5-J$ a $2+J$; odečteme-li $5-J$ zbudou $2+J$.

Vykonej zkoušku sčítáním.

Aneb částečným odčítáním dle vzoru: $3-5=3-3-2$ a dle § 79.:

$(+3)-(+5)=(+3)-(+3)-(+2)=-(0+2)=-0-2=-2,$
$(-3)-(-5)=(-3)-(-3)-(-2)=-(0-2)=-0+2=+2.$

Rozdíl souhlasných čísel rovná se rozdílu prostých hodnot (větší — menší) s týmž znamením neb protivným, dle toho je-li menšenec $>$ neb $<$ menšitele.

b) Odčítání čísel protivných:

α) $(+5)-(-3)=\underbrace{(+8)+(-3)}_{+5}-(-3)=+8$; slovy:

$+5$ možno rozvésti na $8+J$ a $3-J$; odečteme-li $3-J$ zbude $8+J$.

β) $(-5)-(+3)=(-8)+(+3)-(+3)=-8$; -5 možno rozvésti na -8 a $+3$; odečteme-li $+3$, zbude -8.

Vykonej zkoušku sčítáním a vyznač na ose číselné 1) absolutní rozdíl, 2) směr, kterým dlužno postupovati od menšitele k menšenci.

Dle §§ 80. a 79. *b*) *d*) možno počítati též takto:

$(+5)-(-3)=+5-(0-3)=+5-0+3=+8,$
$(-5)-(+3)=-5-(0+3)=-5-0-3=-8.$

Rozdíl protivných čísel se rovná součtu prostých hodnot se znamením menšence.

Cvičení: **1.** Jest vykonati, co jest naznačeno:
a) $(+4)+(+5)$, *b*) $(+2a)+(+3a)$, *c*) $(-4)+(-3)$,
d) $(-3)+(-5)$, *e*) $(-3a)+(-4a)$, *f*) $(+3a)+(+4)$,
g) $(-2a)+(-5)$.

2. *a*) $(-4)+(+4)$, *b*) $(+2)+(-5)$, *c*) $(+4a)+(-3a)$,
d) $(-2x)+(+5x)$, *e*) $(+3x)+(-5x)$, *f*) $(-7y)+(+4y)$.

3. Jest rozvésti ve 2 sčítance, z nichž prvý jest vedle napsán, na př.: $+5$, $+8$. Výkon: $+5=(+8)+(-3)$;
a) $+7$, $+3$, *b*) -5, -3, *c*) $+4$, -3, *d*) -2, $+5$,
e) $+1$, $+3$, *f*) -3, -4, *g*) $+3a$, $+2a$,
h) $-5a$, $-4a$, *i*) $+3a$, $+5a$, *j*) $-2a$, $-3a$,
k) $+4a$, $-7a$, *l*) $-5a$, $+3a$, *m*) 0, $+3a$, *n*) 0, $-2a$.

4. Jest vykonati, co jest naznačeno:
a) $(+7)-(+5)$, *b*) $+5-(+7)$, *c*) $(-4)-(-3)$,
d) $(-3)-(-4)$, *e*) $(+3)-(-4)$, *f*) $(-4)-(+3)$,
g) $(+4a)-(+2a)$, *h*) $(+3a)-(+5a)$, *i*) $(-6a)-(-4a)$,
j) $(-7a)-(-9a)$, *k*) $(+2a)-(-3a)$, *l*) $(-3a)-(+4a)$.

5. *a*) $[(+7)+(-3)]-[(-5)+(+2)]$,
b) $[(-3)-(+4)]+[(-5)-(-3)]$.

6. *a*) $[(+2x)+(-5x)]-[(-3x)+(+7x)]$,
b) $[(-4x)-(+3x)]-[(-2x)-(-6x)]$.

Pravidla ku mechanickému sčítání a odčítání čísel vztažných.

Vyznačme výsledky úkolů § 82. absolutními hodnotami čísel daných. **§ 84.**

	Čísly obecnými vyznačeno:
a) *α*) $(+3)+(+2)=+5=\ \ 3+2,$	$(+a)+(+b)=+a+b,$*)
b) *γ*) $(-5)+(+3)=-2=-5+3,$	$(-a)+(+b)=-a+b,$
a) *β*) $(-3)+(-2)=-5=-3-2,$	$(+a)+(-b)=+a-b,$
b) *β*) $(+5)+(-3)=+2=\ \ 5-3.$	$(-a)+(-b)=-a-b$

Z přehledu toho plyne: 1) Přičísti číslo kladné jest tolik, co přičísti jeho prostou hodnotu. Přičísti číslo záporné jest tolik, co odečísti jeho prostou hodnotu. Vykonávajíce

*) Plyne přímo z § 79. takto: $a+(+b)=a+(0+b)=a+0+b=a+b$; $a+(-b)=a+(0-b)=a+0-b=a-b$.

sčítání na ose číselné, postupujeme směrem sčítance (v pravo neb v levo dle toho, je-li sčítanec $+$ neb $-$).

2) Znaky sčítání $+(\ldots)$ u čísel vztažných možno prostě vynechati, t. j.: $+(+b)=+b$; $+(-b)=-b$.

3) Závorky, značící k čemu jest přičítati, možno vynechati.

4) Dvě souhlasná (protivná) znamení, z nichž jedno jest znak výkonu a druhé znakem quality, lze nahraditi jediným znamením kladným (záporným). Čteme-li 1) a 3) zvratně, shledáme, že nejen součet, ale i rozdíl prostých čísel možno psáti jako součet algebraický.

Tím převeden rozdíl na součet, odčítání prostých čísel na přičítání záporných čísel. Zavedením čísel záporných ušetříme odčítání.

§ 85. Vyznačme výsledky úkolů § 83. absolutními hodnotami čísel daných:

1) α) $(+5)-(+3)=+2=\ \ 5-3$,	Čísly obecnými vyznačeno:
2) α) $(+3)-(+5)=-2=\ \ 3-5$,	$(+a)-(+b)=+a-b$,
b) β) $(-5)-(+3)=-8=-5-3$,	$(-a)-(+b)=-a-b$,
1) β) $(-5)-(-3)=-2=-5+3$,	$(+a)-(-b)=+a+b$,
2) β) $(-3)-(-5)=+2=-3+5$,	$(-a)-(-b)=-a+b$.
b) β) $(+5)-(-3)=+8=\ \ 5+3$.	Z přehledu toho plyne:

1) Odečísti číslo kladné jest tolik, co odečísti jeho prostou hodnotu; odečísti číslo záporné jest tolik, co přičísti jeho prostou hodnotu. Odůvodnění plyne z § 79.:

$$a-(+b)=a-(0+b)=a-0-b=a-b,$$
$$a-(-b)=a-(0-b)=a-0+b=a+b.$$

Z §§ 85. a 84. plyne: Čísla kladná se přičítají a odčítají jako prostá; čísla záporná však opakem čísel prostých.

2) Znaky odčítání $-(\ldots.)$ nelze prostě vynechati, leč proměníme-li znaménko menšitele v protivné.

3) Závorky, značící od čeho jest odčítati, možno vynechati.

4) Viz § 84. 4).

§ 86. **Monom, binom, trinom . . ., polynom.** Výraz, který povstal sčítáním neb odčítáním více čísel (aneb výrazů), zove se mnohočlen (polynom). Čísla (výrazy), ze kterých polynom sčítáním neb odčítáním povstal, se svými znaménky výkonu, zovou se členy polynomu. Ku členu prvnímu, nemá-li znaku výkonného, přísluší znamení $+$. Dle počtu členů rozeznáváme: jednočlen (monom), dvoučlen (binom), tříčlen (trinom) atd.

Monomem může býti jednotlivé číslo (3, 15 . . .), aneb výraz povstalý výkonem stupně druhého, na př.: 4.5, $2a$, $6:5$, $a:3$ . . . Tak jsou výrazy:

α) $3 + 4$, $7 - 5a$, $8 + 3 . 4$, $5a - 3b$, $9 - 6 : 4$, $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$;
β) $3 + (4 - 1)$, $(7 - 2) - (5 - 3)$, $5a + (4a - 3)$, $7x - (5 - 3x)$, $(8 - 5x) - (4x - 7)$, vesměs dvoučleny.

Jak vidno, mohou býti členy polynomu monomy (jednoduché), aneb opět polynomy (složené). Polynom, jehož členy jsou jednoduché monomy, zove se jednoduchý, na př.: $2a - b + 4{\cdot}9 - \frac{3}{5}$, jinak složený, na př.: $(2a - b) + (49 - \frac{3}{5})$.

Slučování. Vyjádříme-li dva neb více členů polynomu jediným výrazem, pravíme, že jsme členy ty sloučili. Dle §§ 85. a 84. možno psáti rozdíl $5 - 3$ co algebraický součet $(+5) + (-3)$; rovněž $-5 - 3 = (-5) + (-3)$. Podobně možno i každý polynom psáti co algebraický součet. Na př.: **§ 87.**

$$7 - 5 + 13 - 4 - 6 = (17) + (-5) + (+13) + (-4) + (-6).$$

Členy polynomu možno považovati za sčítance alg. součtu. Chceme-li, aby sčítance ty už v polynomu samém začátečníku zvláště vynikly a aby znaky výkonu se nemísily se znaménky quality, oddělme je dělicí čárkou : na př.:

$$\underbrace{7 - 5 + 13 - 4 - 6}_{\text{polynom}} = \underbrace{+7, \ -5, \ +13, \ -4, \ -6,}_{\text{alg. součet bez znaků sčítání*)}}$$

Ježto pořádek sčítanců jest libovolný, bude sčítání snadnější, vytvoříme-li součet kladných i záporných sčítanců zvlášť a součty sečteme. I bude: $7 - 5 + 13 - 4 - 6 = 20 - 15 = 5$.

Že možno polynom vyčísliti i posloupně, jest známo. Tu vyslovujeme $+2$, $+15$, $+11$, $+$ **5**.

Cvičení: **1.** Vykonejte dle pravidel v §§ 85. a 84. vytčených cvičení § 83. na př.: $(+3x) - (-4x) = 3x + 4x = 7x$.

2. $(+24) + (-13) + (-12) + (+15)$**) dvěma způsoby.

3. $(+0{\cdot}2) + (-0{\cdot}15) + (+0{\cdot}17) + (-0{\cdot}1)$.

4. $(+2) + (-\frac{1}{2}) + (+\frac{3}{4}) + (-1\frac{1}{4})$.

5. $(+6x) + (-7x) + (-3x) + (+5x) + (+9x)$.

6. a) $(-12a) + (-3a) + (+4a) + (+5a)$,
b) $(-b) - (+2) - (-2b) + (-3) + (+3b)$.

7. $(-3ax) + (-8ax) + (+5ax) + (-3ay)$.

8. $(-5a) + (-3 . 4) + (+3 . 5) + (+3a) + (+3 - 2)$.

9. $(+3x) + (-5x) + [(7y) + (-4y)] + (+2y)$ (dos. $x = 2$, $y = 3$).

---

*) Ježto v polynomu poznáváme rázem sčítance algebr. součtu, nečiníme mezi polynomem a alg. součtem rozdílu.

**) Dle vzoru:
$(-12) + (+7) + (-5) - (-9) - (+9) = -12 + 7 - 5 + 3 - 9 = \alpha) -5, -10, -7, -16$, $\beta) = 10 - 26 = -16$.

10. $[(+5x)+(-3x)]+[(-4x)+(-2x)]+[(+4x)+(-7x)]$.

11. *a*) $(-25)-(+13)-(-10)$,

b) $(-12)-(-7)+(+3)+(-5)-(+2)$.

12. *a*) $(+7a)-(+3a)-(-2a)$,

b) $(-3a)-(-4a)+(-4a)-(+5a)+(-5a)$.

13. $(+5x)-[(+4x)-(-3x)]+[(+2x)-(+5x)]-[(3y)-(-4y)]$; $x=2$, $y=3$.

14. $(+3a)-(+2b)-(-c)+(-4d)$.

15. Kolik členů mají tyto výrazy:

a) $4+3(2a-5)$, *b*) $(2b-3)(5-4a)$, *c*) $3a-\{2b-(3+4a)\}$, *d*) $3a-2b-(3+4a)$.

16. Oč jest $+7$ větší *a*) $+2$, *b*) 0, *c*) -2; oč jest *d*) -2 větší -10?

17. Teploměr klesl z 9^0 C nad bodem mrazu přes noc o 17^0. Jakou teplotu ukazoval ráno?

18. Jaký rozdíl jest mezi 12^0 nad nullou a 8^0 pod nullou? Proč možno stupně nad nullou značiti $+$ a pod nullou $-$?

19. Oč jest teplota $+18^0$ C $>-14^0$ C?

20. Jest vypočítati průměrnou teplotu dne, známo-li, že ráno byla teplota -10^0 C, v poledne $+1^0$ C a večer -6^0 C.

21. Získal-li kupec 60 zl. a jindy měl 80 zl. ztráty, měl v celku 20 zl. ztráty. Zisk a ztráta se částečně ruší. Jsou tudíž veličiny protivné. 60 zl. zisku $+$ 80 zl. ztráty $=$ 20 zl. ztráty, souhlasí úplně s počtem: $(+60$ zl.$)+(-80$ zl.$)=-20$ zl.; tu vyznačen zisk čísly kladnými a ztráta zápornými. Jest jmenovati jiné protivné veličiny. Co znamená rčení: Obchodník získal -15 zl.?

22. Obchodník měl při svých obchodech 125 zl. zisku, 257 zl. ztráty, 185 zl. ztráty, 264 zl. zisku. Kolik zl. získal v celku?

23. Pokladník zaznamenal v jistý den 185 zl. příjmů, 138 zl., 237 zl. a 356 zl. výdejů a 458 zl. příjmů. Oč má ten den v pokladně více?

24. Na statku bylo 15.328 zl. dluhů knihovních a 13.284 zl. dluhů mimoknihovních; kolik zbylo majiteli, byl-li statek prodán za 20.000 zl.?

25. Kupec koupil zboží za a zl. a prodal je za b zl. Získal, či měl škodu?

26. Císař Augustus narodil se roku 64. před Kr.; kdy zemřel, dosáhl-li věku 77 let?

27. Na základě § 7. dod. a § 10. dod. jest přeměniti tyto rovnice tak, aby v nich nebylo záporných členů: $x-3=4$, $-5=7-x$, $x-3=6-2x$, $-b+x=a-2x$.

28. V těchto rovnicích jest isolovati člen „x-ový“, t. j. rovnici přetvořiti tak, aby člen „x-ový“ byl toliko na jedné straně, (obyčejně levé)

$x + 3 = 7,\quad 4 = 5 - x,\quad 3 - x = 7 - 2x,$
$a - x = b,\quad a - 3 - x = -2a.$

29. Jest isolovati pokaždé jinou veličinu z rovnice $k + z = p$ a vysloviti pro $k =$ kupní cena, $z =$ zisk, $p =$ prodejní cena.

Sčítání a odčítání polynomu. *a*) Je-li polynom $b - c - d + e$ ku číslu a přičítati neb odečítati, dlužno polynom závorkovati (§ 76. *c*). § 88.

I píšeme:

$\alpha)\ a + (b - c - d + e) = ?\quad \beta)\ a - (b - c - d + e) = ?$

Tím úloha vyznačena. Ježto polynom možno považovati za součet (alg.), jest lhostejno, přičteme-li (odečteme-li) jej rázem, neb po sčítancích (§ 79.). I bude:

$$\alpha)\ a + (b - c - d + e) = a + (+b) + (-c) + (-d) + (+e)$$
$$= a + b - c - d + e,$$
$$\beta)\ a - (b - c - d + e) = a - (+b) - (-c) - (-d) - (+e)$$
$$= a - b + c + d - e.$$

Polynom se přičítá (odčítá), přičte-li (odečte-li) se každý jeho člen.

b) Srovnáme-li naznačené sčítání (odčítání) s vykonaným [viz α) a β)], vidíme, že 1) znaky sčítání lze prostě vynechati, 2) znaky odčítání nelze prostě vynechati, leč proměníme-li znaménka všech členů v protivná. Z toho tvoříme nové pravidlo k rychlému (mechanickému) počítání: Polynom se přičítá, připíšeme-li jeho členy k číslu beze všech znaků sčítání*). Polynom se odčítá, připíšeme-li jeho členy k menšenci s protivnými znaménky; že sloučíme, co lze, rozumí se samo sebou.

Je-li na př. 1) ku polynomu $-3a - 4b + 2$, α) přičísti, β) odečísti polynom $+5a + 3b - 4$ bez vyznačení, píšeme:

$$\alpha)\quad -3a - 4b + 2 + 5a + 3b - 4 = 2a - b - 2,$$
$$\beta)\quad -3a - 4b + 2 - 5a - 3b + 4 = -8a - 7b + 6,$$

aneb: ježto stejnojmenné výrazy se slučují, píšeme v sloupec místo v řádek takto:

$$\alpha)\ \begin{array}{r} -3a - 4b + 2 \\ +5a + 3b - 4 \\ \hline 2a - \ b - 2 \end{array}\qquad \beta)\ \begin{array}{r} -3a - 4b + 2 \\ -5a - 3b + 4 \\ \hline -8a - 7b + 6. \end{array}$$

2) α) Výraz $6a + \{4a - [8b - (2a + 4b) + 5a] - 7b\}$ značí, že jest ku $6a$ přičísti trojčlen $4a$, $-[\ldots]$, $-7b$ a protož možno svorky vynechati a psáti: $6a + 4a - [8b - (2a + 4b) + 5a] - 7b$; — před $[\ldots]$ značí, že jest odčítati trojčlen $8b$, $-(\ldots)$, $+5a$, což vykonáme

*) Jest pamatovati dle § 86., že ke každému členu přísluší znaménko a že ku členu prvému, je-li bez znamení, přísluší vždy $+$.

takto: $6a + 4a - 8b + (2a + 4b) - 5a - 7b$ a ježto $+ (\ldots)$ možno prostě vypustiti, jest daný výraz

$$= 6a + 4a - 8b + 2a + 4b - 5a - 7b$$

a sloučíme-li $= \mathbf{7}a - \mathbf{11}b$; že možno i průběhem výpočtu slučovati, je zřejmo.

β) Výraz α) možno však zjednodušovati též od vnitřních závorek takto:

$$\begin{aligned}\text{Polynom} &= 6a + \{4a - [8b - 2a - 4b + 5a] - 7b\}\\ &= 6a + \{4a - [4b + 3a] - 7b\}\\ &= 6a + \{4a - 4b - 3a - 7b\}\\ &= 6a + \{a - 11b\} = 6a + a - 11b = \mathbf{7}a - \mathbf{11}b.\end{aligned}$$

Zjednodušování α) liší se od β) tím, že při α) počaly se odstraňovati závorky vnější, při β) však vnitřní. Pochod β) je snadnější, avšak zdlouhavější. Žák bystřejší píše při α) takto:

$$6a + \{4a - [8b - (2a + 4b) + 5a] - 7b\}$$
$$- \quad + \qquad -$$
$$= 6a + 4a - 8b + 2a + 4b - 5a - 7b = 7a - 11b$$

a odůvodní takto: $+ \{\ldots\}$ lze prostě vynechati; $- [\ldots]$ možno vynechati, zaměníme-li znamení ***členů*** v protivná, což hned v polynomu vyznačí; tím se $- (\ldots.)$ promění v $+ (\ldots.)$, jež lze prostě vynechati.

Cvičení: **1.** a) $(a + b) + (a - b) = ?$, b) $(a + b) - (a - b) = ?$ **Vyslov úlohu i výsledek slovy. Výrazy další jest uvésti na nejjednodušší tvar a zkoušku vykonati dosazením libovolným.**

2. a) $3a - 2b - 4 + (2a - 3 + b)$,
b) $5a - 2b - 3 - (a - 4 - 2b$, c) $8a + 14 - (7 + 3a + 4 + 2a)$.

3. a) $4x + (2 - 3x) - (2x - 3)$, b) $3 - (2x + 1) + (5 - x)$,
c) $3 - 2a + (a - 2) - (2a - 3 - a)$,
d) $2a + (-5 + a) + (-3a - 4) - (a + 2) - (2a - 1)$.

4. a) $a - [b + (c - d)]$, b) $a + [3a - (2 - 3a)]$,
c) $2x - [3 + (x - 3)]$, $x = 2$, d) $3 - [5 - (a - 2) - a]$.

5. a) $x - [y - (2x - y)] + [x - 2y]$, $x = 3$, $y = 2$,
b) $x - [4 - (2x - y) + x - 2y] - 2$, $x = 1$, $y = 3$.

6. $6 - [5 - (3 - a) + (2 - a) - a] + (-1 - 2a) - 5 - 2$.

7. $2x - y - \{2x - [2x - 3y + (2x + 3y)]\}$.

8. $2x - [3y + (3x - 2y) - 2x] + [x - (2y - 3x)]$, $x = 4$, $y = 5$.

9. $a - \{2b - [a - (3b - a)]\}$.

10. $2x - \{2y - [-3x + (2y - x)] - 3x\}$.

11. $n + \{(2n - p) - (n - (3n + p)]\}$.

12. $-2x+y-\{-5x-[4+(3-2x)-3y]-y\}-2.$

13. $3a-[4b-2c+(3a-c)-4a]+(-a-b)-(-b+2a)-(-2b)$, $a=2$, $b=3$.

14. $4n-\{3p+n-[2n+3p-(2n-3p)]\}+2p.$

15. Který výraz jest přičísti: *a)* ku $-3a+4b+5$, aby součet byl $2a-3b-4$, *b)* ku $11x-2y-[4x+5y-7z-(9x-4y+3z)]$, aby součet byl $x+y+z$. (Zkoušku sčítáním.)

Násobení výrazů algebraických číslem prostým.

a) Dle § 11. *a)*: Násobiti číslo a číslem b, jest položiti a tolikrát co sčítanec, kolik má b jednotek. Tedy: **§ 89.**

1) $a \,.\, 4 = a+a+a+a=4a$,

2) $(+a)$*) $.4=(+a)+(+a)+(+a)+(+a)=+a+a+a+a=+4a$,

3) $(-a).4=(-a)+(-a)+(-a)+(-a)=-a-a-a-a=-4a$.

Bez vyznačování píšeme tudíž:

$$(+b)\,.\,3=+b+b+b=+3b,$$
$$(-b)\,.\,3=-b-b-b=-3b.$$

Dle toho, co řečeno, jest:

$a\times 1=a$, $0\times a=0$, $(+1)\,.\,a=+a$, $(-1)\,.\,a=-a$. Čteme-li zvratně, jest: $+a=(+1)\,a$, $-a=(-1)\,a$, t. j.: $+a$ jest a kladných jednotek, $-a$ jest $a-J$.

Číslo kladné (záporné) lze roznásobiti v číslo prosté a kladnou (zápornou) jednotku.

$$4\,.\,a=4+4+4+\ldots+4\ (a\text{ krát}).$$

Že $a\,.\,4=4\,.\,a$ možno odůvodniti takto:

Píšeme-li a co řadu (souhrn) jednotek $a=1\ 1\ 1\ldots 1$, jest:

$$\begin{array}{rccccl} a\,.\,4= & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\ (a\text{ krát}) \\ & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \hline & \multicolumn{5}{l}{4+4+4+\ldots+4=4\,.\,a.} \end{array}$$

Sčítáme-li jednotky po sloupcích, dá každý sloupec 4 jednotky, a sloupců dá 4 jednotky a krát.

4) Podobně možno ukázati, že $a\,.\,b=b\,.\,a$. Pořádek 2 činitelů jest libovolný (§ 11. *b*). Číslo obecné (a) možno znázorniti řadou jednotek; součet $(a+b)$ řadou prodlouženou, součin ab obdélníkem jednotek, v němž jednotky jednoho činitele tvoří délku druhého činitele šířku. Proto jest a, $2a$, $3b$ výraz o jednom rozměru, $a\,b$, $(a+b)\,.\,c$ výraz o dvou rozměrech.

---

*) Je-li násobiti tvar číselný různý od prostého čísla, dlužno závorkovati. (§ 76. *c*).

b) Násobení dvojčlenu. Je-li násobiti součet neb rozdíl, dlužno jej závorkovati.

1) $(a + b) \,.\, 3 = (a + b) + (a + b) + (a + b) =$*$) \ldots = 3a + 3b$,

2) $(a - b) \,.\, 3 = (a - b) + (a - b) + (a - b) = \ldots = 3a - 3b$.

Vyslovte obě poučky; považujeme-li součet i rozdíl za dvojčlen, možno obě poučky shrnouti v jedinou (výhoda záporných čísel): Dvojčlen se násobí, násobíme-li každý člen a částečné součiny sloučíme.

Čteme-li rovnice 1) a 2) zvratně, bude:

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ 3a + 3b = 3\,(a + b), \\ 4)\ 3a - 3b = 3\,(a - b). \end{array}\right\} \quad \text{Viz § 78. } b) \text{ a } c).$$

Podobně bude:

$$\begin{array}{l|l} (a + b)\, c = ac + bc & ac + bc = (a + b)\, c \\ (a - b)\, c = ac - bc & ac - bc = (a - b)\, c. \end{array}$$

Dvojčlenu, jehož členy mají společný činitel, možno dáti tvar součinu (= roznásobiti dvojčlen) tím, že**) různé činitele sloučíme a společný činitel vytkneme. Výkon ten zoveme krátce: vytknouti společný činitel;

$$ab + a = (b + 1)\, a. \quad \text{(Zkouška.)}$$

c) Násobení součinu. Jest násobiti součin $3a$ pěti.

1) $(3a) \times 5 = 3a + 3a + 3a + 3a + 3a = 15a = 3 \,.\, 5 \,.\, a$

aneb: 2) $= (a + a + a)\, 5 = 5a + 5a + 5a$***$) = (5a) \,.\, 3$.

3) Dle 2) jest:

$(ab)\, c = (a + a + a + \ldots b \text{ krát})\, c = ac + ac + ac + \ldots b \text{ krát} = (ac)\, b$.

4) Aneb:

$(ab)\, c = (b + b + b + \ldots a \text{ krát})\, c = bc + bc + bc + \ldots a \text{ krát} = (bc)\, a$.

Součin se násobí, násobíme-li jeden (kterýkoliv) činitel [a druhý vytkneme]. Součin netřeba závorkovati, má-li se násobiti. (Kdy ještě?) Dle 3) a 4) jest $a\,b \,.\, c = a\,c \,.\, b = b\,c \,.\, a$, a přetvoříme-li dle *a*) 4) první činitel $ab = ba$, bude i

$$b\,a \,.\, c = c\,a \,.\, b = c\,b \,.\, a.$$

Pořádek činitelů jest libovolný. Jaká plyne z toho výhoda pro vyčíslení součinu $2 \times 17 \times 5$? Jsou závorky ve výrazu $(2a \times 5) \times 3$ chybné neb jen zbytečné?

Možno-li ab znázorniti obdélníkem jednotek, možno $ab \,.\, c$ znázorniti sloupem (hranolem) jednotek (jak?) Součin ze tří obecných činitelů zove se výrazem třírozměrným.

---

*) Žáci sami doplní a odůvodní.

**) Společným činitelem násobíme součet různých činitelů.

***) Součet stejných sčítanců lze psáti co součin.

d) Násobení součinem. Ježto

$$c\,(ab) = (ab)\,c = acb = bac = bca = \mathbf{cab} = cba,$$

netřeba součin ani jako násobitel závorkovati. Součin co činitel netřeba závorkovati. Co značí $(3x)\,(2y)$? lze psáti bez závorek $= 3x \,.\, 2y = 3 \,.\, 2 \,.\, xy = 6xy$?

Mocnina. *a*) Jsou-li všechny činitele součinu stejné, možno jej psáti kratším tvarem; na př.: $a \,.\, a = a^2$, $aaa = a^3$, $aaaa = a^4 \ldots$, t. j. společný činitel se píše jednou a nazývá se mocněnec = základ = basis a počet činitelů se píše v pravo nahoře co mocnitel (exponent). § 90.

Nový tento tvar zove se mocnina. Součin stejných činitelů dá se psáti tvarem mocniny. a^4 jest čtvrtá mocnina čísla a; 4 jest mocnitel, a jest mocněnec. Čte se: a na čtvrtou [mocninu povýšeno]; podobně a^2 čte se: a na druhou, a na čtverec, čtverec čísla a; a^3 čte se: a na třetí, a na krychli, krychle čísla a; a^4, $a^5 \ldots$ čte se: a na čtvrtou, na pátou atd. $a^1 = a$ a proto jednotka co mocnitel se nepíše. Každé číslo možno považovati za mocninu s mocnitelem 1. Mocnitel 1 možno připsati ke každému číslu.

b) Sčítání a odčítání mocnin. Mocniny mohou míti společný základ, na př.: a^2, a^3, aneb společný mocnitel a^2, b^2, aneb oboje, na př.: a^2 a a^2, b^3 a b^3 a tyto zovou se stejnojmenné. Mocniny jsou tvary násobením povstalé a proto jsouce přičítány neb odčítány, se nezávorkují; tedy $a^2 + a^3$, $a^2 + b^2$, $a^2 + a^2 = 2a^2$; kratším tvarem napsati (sloučiti) lze jen součet mocnin stejnojmenných

$$a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2, \quad 3a^2 + 2a^2 = 5a^2, \quad 7a^2 = 4a^2 + 3a^2.$$

Podobně lze toliko rozdíl mocnin stejnojmenných zjednodušiti $7a^2 - 4a^2 = 3a^2$.

c) Násobení mocnin. Je-li násobiti součiny, nezávorkují se; tak i mocniny; na př.: $a^2 \,.\, a^3$, $a^2.\, b^2$, $a^2 \,.\, b^5$; z těch součinů dají se zjednodušiti především ty, jichž činitele mají společný základ, neboť $a^2 \,.\, a^3 = aa \,.\, aaa = a^5 = a^{2+3}$; podobně: $b^3 \,.\, b^4 \,.\, b = b^{3+4+1} = b^8$. Mocniny o společném základě se násobí, zmocníme-li společný základ součtem mocnitelů. Naopak možno mocninu roznásobiti, na př.:

$$a^5 = a^2 \,.\, a^3, \text{ neb } = a^4 \,.\, a^1; \quad a^3 + a = a^2 \,.\, a + 1 \,.\, a = (a^2 + 1)\,a.$$

d) Mocnění. Číslo zmocniti 2ma, 3mi, 4mi... znamená, položiti je 2, 3, 4krát co činitel.

α) Je-li součin ab zmocniti dvěma, píšeme:

$$(ab)^2 = ab \,.\, ab = aa \,.\, bb = a^2 \,.\, b^2, \text{ aneb:}$$
$$(ab)^3 = ab \,.\, ab \,.\, ab = aaa \,.\, bbb = a^3 b^3 \text{ atd.}$$

Součin se zmocňuje, zmocníme-li každý jeho činitel [a mocniny znásobíme].

Čteme li zvratně, bude: $a^2 . b^2 = (ab)^2$, $a^3 . b^3 = (ab)^3$ *).

Součinu, jehož činitele mají společný mocnitel, možno dáti tvar mocniny tím, že společný mocnitel vytkneme. Mocniny o společném mocniteli se násobí, násobíme-li, základy a součin zmocníme společným mocnitelem.

Co znamená: α) $2a^3$, $(2a)^3$, b) $3a^2$, $(3a)^2$?

β) Je-li mocninu a^3 zmocniti dvěma, píšeme:

$$(a^3)^2 = a^3 . a^3 = a^6 = a^{3 \cdot 2}, \quad (a^2)^3 = a^2 . a^2 . a^2 = a^6 = a^{2 \cdot 3}.$$

Mocnina se zmocní, zmocníme-li základ součinem mocnitelů.

Dodatek: 1) Vyskytují-li se v mnohočlenu mocniny s týmž základem, *upravujeme* jej, t. j. řadíme členy tak, aby každý následující měl větší (neb menší) mocnitel; i zove se pak mnohočlen upravený dle mocnitelů vzestupně neb sestupně. Není-li takových mocnin v mnohočlenu, upravujeme jej dle abecedy, na př. mnohočlen

1) $a^4 - 5a^3 - 3a^2 + 2a + 4$ jest upraven sestupně,

2) $4 + 2a - 3a^2 - 5a^3 + a^4$ jest upraven vzestupně,

3) $5a + 3b - 2c$ jest upraven dle abecedy.

2) Abychom i slovy různili $2a^3$ od $(2a)^3$ čteme: 2krát a třetí, a $(2a)^3$ čteme: součin $2a$ na třetí.

Cvičení: **1.** Jest znázorniti součet $a + b$, součiny $a . b$, $a . a$ souhrnem jednotek; kdy jest těch jednotek čtverec?

2. Slučte: a) $(+3) . 5 + (-2) . 3$, b) $(-5) . 2 + (-5) . 3$, c) $(-4) . 3 - (+2) . 5$, d) $(+5) . 2 - (-2) 5$.

3. $(+a) 2 - (+a) 3 + (-a) 4 - (-a) 5 + (+a) 4 = ?$

4. Jest vysloviti, co naznačeno a sloučiti: a) $2x + (x + y) . 5$, b) $5y + (x - y) 2$, c) $4x - (x + y) 3$, d) $7y - (x - y) 4$.

5. a) $5 + (a - 2) . 3$, b) $7 - (3 + a) 2$, c) $9 - (-a + 4) 5$, d) $7 + (-4 - a) . 3$.

6. a) $(a - 2) 3 - 2a$, b) $(-7 - a) 4 + 3$, c) $(-3 + a) 5 - (-a + 2) 4$.

7. $(3 - a) 2 + (-5 - a) 3 - (-a + 4) 5 - (a - 2) 4 = ?$
1) $a = 2$, 2) $a = -2$.

8. a) $(2a) 5 + 3a . 4 - (5a) 3 - 4a . 2$, b) $(+3a) 2 + (-2a) 3$, c) $(-2x) 3 - (+3x) 4$, d) $(4x) 3 - (-2x) 2$.

9. a) $(+3a) . 4 - (-2a) 3 + (-3a) . 3 - (+4a) . 2$,
b) $(-2a) b + (+3b) a - (+4a) b - (-2b) a$,
c) $5a . a + 2b . b - 3a . a + (-5b) b$.

---

*) Čtěte rovnici a) dle výkonů, b) dle tvarů.

10. Jest srovnati součiny dle velikosti:
$2 . 3 . 4$, $2 . 4 . 3$, $3 . 2 . 4$, $3 . 4 . 2$, $4 . 2 . 3$, $4 . 3 . 2$.

11. Jaký rozdíl *a*) co do velikosti, *b*) co do výkonu jest mezi $(4 . 7) . 5$ a $4 . 7 . 5$. Jest $5 \times 12 = ?$ $5 \times 4 \times 3$.

12. Součiny $25 \times 7 \times 4$, $(+ 15) \times 13 \times 4$, $(- 12) \times 17 \times 5$, $125 \times 9 \times 2 \times 4$, $75 \times 27 \times 2 \times 2$ jest počítati co nejvýhodněji.

13. Jest uvésti na nejjednodušší tvar: $2x . 3y$, $3xy . 4x$, $3ax . 2bx . 4a$, $(+ 5x^2) 3x . 4x^3$, $(- 2a^2) 4ab . 3ab^2$, $3ab^2 2a^2 b : 8$.

14. Co znamená 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, $(\frac{3}{4})^2$, a^3, x^5? Jaký rozdíl jest mezi a^4 a $a . 4$?

15. Jest vyčísliti: *a*) $a + a . 2$, *b*) $a + a . 3$, *c*) $3a^2$ pro $a = 1, 2, 3 \ldots 10$.

16. Rovněž $2a^3 + 7a^2 + 4a + 3$ pro $a = 10$.

17. Jest rozložiti v nejjednodušší činitele: $a^2 x^3$, $4xy^3$, $3^2 b^3 cy^4$.

18. Jest sloučiti $5x^2 + 2x^3 - 4x - 2x^2 + x - x^3$ a výsledek upraviti dle klesajících mocnitelů (sestupně).

19. *a*) $(2a^2 - 3a + 5) + (- a^2 + 2a - 3) - (- 3a^2 - 2a + 4)$,
b) $(2a + b) a - (3b - a) a + (- 2a + b) b - (- b + 3a) a$.

20. *a*) $(3a^2 - 5a) 2 - (a^2 - 6) 3 - [8 - 2(a - 3)]$, $a = 3$,
b) $(2x - 3) 3x - (3x^2 - 4x) 2x - (- 4x^2 + 2) 3x$, $x = 2$.

21. $(2x^2 y - 3xy^2) 2xy - (- 3x^2 + 2xy) xy^2$, $x = 1$, $y = 2$.

22. $(a - 4) 2a . 3 + (- 3a + 12) a - (1 - a) 4 - (- 3) . 2$, $a = 3$.

23. $2a^2 - [a^2 + a - (4a + a^2) - 5a]$, $a = 1$.

24. *a*) $4x - \{- 2 - (3x^2 - 4) 3 + x\}$,
b) $(2x)^3 - 2x^3 + (3x)^2 - 3x^2$, $x = 2$.

25. *a*) $5a - \{2a^2 - [2 - (3a - 4)] - 3a^2\}$ $a = 3$,
b) $(a^3 - 2a) (2a)^2 + 3 (a^2)^3 - (4 - a) (2a)^3$, $a = 3$.

26. *a*) $3a - [2 - (3 - 2a)^2 + \{4a - (3a^2 - a) + 5\} - a]$, $a = 3$
b) $(2b)^2 - [(5 - 2b)^2 3b - (2b - 3) 3b]^2$, $b = 2$.

27. Jest upraviti polynom $2x^2 - 3x^4 + 5x^3 - 4x + 7$ dle stoupajících mocnitelů (vzestupně).

28. Jest upraviti $x^3 - 3xy^2 - 5y^3 + 3x^2 y$, *a*) sestupně dle mocnitelů x, a *b*) vzestupně dle mocnitelů y.

29. Jest roznásobiti dvoučleny: $3x - 3y$, $ab - ac$, $12 - 3b$, $xy - y$, $2x^2 - 6$, $6a^2 - 9ab$.

30. Jest dosaditi do rovnic za x číslo, jež by rovnost nerušilo: $2 . x = 0$, $(x - 3) 4 = 0$.

Násobení čísly vztažnými.

§ 91. *a*) Násobení číslem kladným. Ježto $+3 = 3$, jest:

$a \,.\, (+3) = a \,.\, 3 = 3a$	A všeobecně:
$(+a) \,.\, (+3) = (+a) \,.\, 3 = +3a$	$(+a)(+b) = +ab$
$(-a) \,.\, (+3) = (-a) \,.\, 3 = -3a.$	$(-a)(+b) = -ab.$

b) Násobení číslem záporným nemá dle § 11. významu, na př. $4 \,.\, (-3)$ značilo by 4 položiti (-3)krát co sčítanec.

Uvažujme však takto:

$(+4) \,.\, (+3) = +12$	$(-4) \,.\, (+3) = -12$
$(+4) \,.\, (+2) = +\ 8$	$(-4) \,.\, (+2) = -\ 8$
$(+4) \,.\, (+1) = +\ 4$	$(-4) \,.\, (+1) = -\ 4$
$(+4) \,.\ \ 0 = \ 0$	$(-4) \,.\ \ 0 = \ 0.$

V obou sloupcích se zmenšují násobitele o 1 a součiny o násobenec:

$$-12 - (-4) = -8; \quad -8 - (-4) = -4 \quad \text{atd.}$$

Má-li se tak díti neobmezeně, (t. j. bude-li násobitel i dále se po 1 zmenšovati), bude:

$(+4) \,.\, (-1) = -\ 4 = -4 \,.\, 1$	$(-4) \,.\, (-1) = +\ 4 = +4 \,.\, 1$
$(+4) \,.\, (-2) = -\ 8 = -4 \,.\, 2$	$(-4)\ (-2) = +\ 8 = +4 \,.\, 2$
$(+4) \,.\, (-3) = -12 = -4 \,.\, 3$	$(-4)\ (-3) = +12 = +4 \,.\, 3,$

všeobecně: $(+a)(-b) = -ab$; $(-a)(-b) = +ab$.

Součin dvou vztažných čísel rovná se součinu prostých hodnot a jest buď $+$, neb $-$ dle toho, jsou-li oba činitele souhlasné neb protivné. (Srovnej § 84. 4).

Důsledky: 1)

$$(+4)(+3) = +12 = +4+4+4 = +(+4)+(+4)+(+4) = +(+4) \,.\, 3,$$
$$(-4)(+3) = -12 = -4-4-4 = +(-4)+(-4)+(-4) = +(-4) \,.\, 3,$$
$$(+4)(-3) = -12 = -4-4-4 = -(+4)-(+4)-(+4) = -(+4) \,.\, 3,$$
$$(-4)(-3) = +12 = +4+4+4 = -(-4)-(-4)-(-4) = -(-4) \,.\, 3.$$

Násobiti číslem kladným (záporným) znamená násobenec položiti tolikrát sčetně, t. j. co sčítanec, (odčetně. t. j. co menšitel), kolik (prostých) jednotek má násobitel.

Násobiti číslem kladným (záporným) jsou výkony dva: 1) násobiti prostou hodnotou a 2) součin přičísti (odčísti).

2) Že násobení jest výkonem záměnným, platí i o vztažných činitelích, na př.:

$$(+4)\ (-3) = (-3)\ (+4); \quad (-4)\ (-3) = (-3)\ (-4).$$

3) Číslo kladné lze rozložiti na dva souhlasné a číslo záporné na dva protivné činitele, na př.:
$8 = (+4)(+2) = (-4)(-2)$; $\quad -8 = (-4)(+2) = (+4)(+2)$;
$3 = (+3)(+1) = (-3)(-1)$; $\quad -3 = (+3)(-1) = (-3)(+1)$.

c) Součin více vztažných činitelů, na př.: 1) $(+4)(-3)(+2)$ možno vyčísliti posloupně
$= (-12)(+2) = -24$, 2) $(+4)(-3)(-2) = (-12)(-2) = +24$ atd. Je-li záporných činitelů *lichý* (sudý) počet, jest součin záporný (kladný).

Důsledek:

$(+a)^2 = (+a)(+a) = +a^2$; $\quad (-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$,
$(+a)^3 = (+a)(+a)(+a) = +a^3$; $\quad (-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -a^3$

atd. Číslo záporné, zmocněno sudým (lichým) mocnitelem, dá mocninu kladnou (zápornou).

Co znamená $(-2a)^2$, $(-2a)^3$, $(-a^2b)^3$, $(-ab^3)^2$.

d) Násobení dvoučlenem. α) Je-li $\pm a$ násobiti součtem $(b+3)$, jest $\pm a$ položiti $(b+3)$krát co sčítanec, tedy:

1) $(\pm a)(b+3) = \pm a \pm a \pm a \ldots (b\text{krát}) \pm a \pm a \pm a = \pm ab \pm a3$.

Všeobecně $(\pm a)(b+c) = \pm ab \pm ac$.

β) Je-li $+a$ násobiti rozdílem $(b-3)$ a položíme-li $+a$ *b*krát co sčítanec, nutno od součtu toho $a + a + a = 3a$ odečísti, tedy:

2) $(+a)(b-3) = +ab - a \,.\, 3$; podobně:

3) $(-a)(b-3) = -ab - (-a)3 = -ab + a \,.\, 3$.

Všeobecně: $(+a)(b-c) = +ab - ac$; $\quad (-a)(b-c) = -ab + ac$.

Vyslov pravidla zde obsažená.

Považujeme-li $b+c$, i $b-c$ za dvoučlen, možno obě pravidla vysloviti rázem: Dvoučlenem se násobí, násobíme-li každým členem [a částečné součiny slučíme].

Píšeme-li v 2) a 3) $b = 0$, bude $(+a)(0-3) + a \,.\, 0 - a \,.\, 3$, t. j.: $(+a)(-3) = -3a$; $(-a)(0-3) = -a \,.\, 0 - (-a) \,.\, 3$, t. j.: $(-a)(-3) = +3a$, čímž opět poučka *b*) § 91. stvrzena.

Přemístíme-li činitele v *d*), bude:

1) $(b+c)(\pm a) = \pm ab \pm ac = (\pm a)(b+c)$,
2) $(b-c)(+a) = +ab - ac = (+a)(b-c)$,
3) $(b-c)(-a) = -ab + ac = (-a)(b-c)$.

Ve vzorcích těch jest obsaženo: α) Násobení je výkonem záměnným i tehdy, je-li jeden činitel monom, druhý binom, proto píšeme vždy místo $(a+b) \,.\, 3 = 3(a+b)$.

β) Vytčení společného činitele ať kladného, ať záporného;

$$\left.\begin{aligned} -(a+b) &= -a-b \\ (-1)(a+b) &= -a-b \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}&-(\ldots)\text{ značí odčítání, a jest}\\ &\text{tolik co násobení zápornou jednotkou.}\end{aligned}$$

Výkonu: $-a-b=(-1)(a+b)$, aneb kratšeji $-(a+b)$ říkáme vytčení záporné jednotky, aneb krátce vytčení „minus“.

Cvičení: **1.** Jest vysloviti, co naznačeno a zjednodušiti:
$(-5)(-1)$, $(+5)(-1)$, $(-5)(+4)(+3)$, $(-5)(+4)(-3)$, $(-5)(-4)(-3)$.

2. $(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5$.

3. $(+3a)(-2)+(+3)(-5a)-(+2)(-4a)$.

4. $(+2a)(-3a)(-4)$, $(-2a)(+3)(+a)$, $3a^2(-2a)^3$, $(-2xy)^2(-4x^2y)$.

5. $2x(-3y)-(+2y)(-3x)-(-4x)(-2y)5$, $x=2$, $y=-3$.

6. $(-2x)(+3xy)-4x(-3y)+(2y)(-3xy)$, $x=-3$, $y=4$.

7. $(2a-3)(-4)$, $3-(a-2)(+4)$, $2a^2-(3-4a)(+5)$.

8. $8-(3a^2-5)(+2)$, $12-(4a^2-a)(-2)$, $(3x^2-2y^3)(-2xy)^2$.

9. $(3x)^2$, $(-3x)^3$, $(2xy)^3$, $(-2ab^2)^3$.

10. $(-2a)^2-2a^2+(3b)^3-3b^3+(-2b)^3$.

11. $(a^2b)^3-(2a^3)^2+(-a^2b)^3-(-3a^2)^3$.

12. $x^2-x^2y+3x^2+y^2-x^2y-2y^2+xy+4xy$, $x=2$; $y=3$.

13. $7-(+3)(x-4)+(-4)(-3x+5)$, $x=1$.

14. $7 \quad [2a \quad 3(4-a)]$, $15-3(2a^2-3a)+2(-4+a)^2$.

15. $2b-3(b-5)-[7-3(b-1+b]$, $b=3$.

16. $6a(-3+2a)$, $10+2(3-a)(-4)$, $8-2(a-2)a$. $4-(-2)(3-a)(3a)$.

17. $3(a-5)4-3a+2(-a+6)$, $a=3$.

18. $2(5a+2b)-(a-2b)4+3(4b-3a)$.

19. $(x-y)4-3(x+y)-5(x-y)$.

20. $(a+b)a-b(a-b)+2a(a-3b)$.

21. $2(x+2y)-3[-x+2(y-3x)-y]$.

22. Jest roznásobiti tak, aby jedním činitelem bylo číslo na druhém místě stojící; [na př.: $6a$, 2; $6a=2\,.\,3a$]; a, -1; $-a$, $+1$; $-a$, -1; $-a$, $+a$; $+2a$, $-2a$; $3a$, -1; $-3a$, -1; $8a$, -2; $-3a^2$, $3a$; $9a^3$, $-3a^2$; $8x^2y^3$, $-4xy$; $a+b$, -1; $a-b$, -1; $3a-3$, -3; x^2-x, $-x$.

23. Jest roznásobiti: $6x-10$, $-9x^2+12x$, $6x^3y-4x^2y^2$.

Násobení výrazů mnohočlenných.

§ 92. *a*) Mnohočlen jednočlenem.

$(a-b+c)\,.\,3=(a-b+c)+(a-b+c)+(a-b+c)=3a-3b+3c.$

Je-li monom záporný, mají částečné součiny protivná znamení:

$$(a-b+c)\,.\,(-3)=-3a+3b-3c.$$

Všeobecně: $(a-b+c)\,d=ad-bd+cd$,
$(a-b+c)(-d)=-ad+bd-cd$.

Polynom násobí se monomem, násobíme-li jím každý člen [a částečné součiny sloučíme].

b) Jednočlen mnohočlenem. Dle § 91. *d*) jest

$$a(b - c + d) = ab - ac + ad = (b - c + d)\,a.$$

Mnohočlenem se násobí, násobíme-li každým členem [a částečné součiny sloučíme]. Který mnohočlen lze roznásobiti?

c) Mnohočlen mnohočlenem. Považujeme-li tříčlen za jednotlivé číslo, bude: $(a-b)(c-d+e) = a(c-d+e) - b(c-d+e) = ac - ad + ae - bc + bd - be$. Aneb považujeme-li násobenec za jednotlivé číslo, bude:
$(a - b)\,c - (a - b)\,d + (a - b)\,e = ac - bc - ad + bd + ae - be$.

Mnohočlen násobí se mnohočlenem, násobíme-li každý člen násobence, každým členem násobitele [a částečné součiny sloučíme].

Pro snazší přehled se mnohočleny — možno-li — upraví. Jsou-li upraveny dle mocnitelů téhož základu, píší se částečné součiny stejnojmenné v sloupec, na př.:

$$\begin{array}{l}
(2a^2 + a - 3)\,(a^2 - 4a + 3) = \\
\hline
2a^4 + a^3 - 3a^2 \\
\qquad - 8a^3 - 4a^2 + 12a \\
\qquad\qquad + 6a^2 + 3a - 9 \\
\hline
2a^4 - 7a^3 - a^2 + 15a - 9.
\end{array}$$

Součin jest opět upravený dle mocnitelů téhož základu. Jak určíme člen nejvyšší? Jak nejnižší?

d) Pamětihodny jsou tyto výsledky:

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = (a - b)\,(a - b) = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2.$$

Čtverec binomu rovná se součtu čtvercovaných členů, zvětšenému o dvojnásobný součin obou členů. Upravujeme však takto: čtverec 1. členu, + 2násobný součin obou členů, + čtverec 2. členu.

Součet dvou čísel, násoben jich rozdílem, dá rozdíl čtverců týchž čísel, a zvratným čtením: rozdíl čtverců dá se roznásobiti na součet a rozdíl základů.

Srovnej čtverec monomu se čtvercem binomu

$$a^2 = a^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Přiroste-li v základu čtverce člen jeden, přirostou ve čtverci členy dva: dvojnásobný součin toho, co už zmocněno bylo krát člen nový, a čtverec členu nového. Tyto dva členy zovou se krátce čtvercový přírůstek. (Jest znázorniti rysem tento přírůstek)*).

*) Kdyby toho látka geometrická vyžadovala, lze probrati již nyní část X.

Cvičení: **1.** $a)$ $(3a - 2b + 4)\,5c$, $b)$ $(2x^2 + 3x - 1)(-3x)$, $c)$ $-3x(2x^2 + 3x - 1)$, $d)$ $-1(a - b + c - d)$.
2. $(2x^2y - 3xy^2 - 4y^3)(-3x^2y^3)$.
3. $a)$ $(4x^2 + 3)(2x - 1)$, $b)$ $(3x - 4y)(-2x + 3y)$.
4. $a)$ $(3 - 2a)(3 + 2a)$, $b)$ $(2a - 3)(2a + 3)$, $c)$ $-(2a - 3b)(-4a + b)$, $d)$ $(a + 1)(a - 1)$, $e)$ $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$, $f)$ $(a^2 + 1)(a^2 - 1)$.
5. $a)$ $(2a + 3)(2a + 3)$, $b)$ $(2a - 3)(2a - 3)$, $c)$ $(2a + 3b)(2a + 3b)$, $d)$ $(2a + 3b)(2a - 3b)$.
6. $a)$ $(2a^2 - 5a - 6)(-3a + 2)$, $b)$ $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$, $c)$ $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$, $d)$ $(9x^2 - 24x + 16)(3x - 4)$.
7. $a)$ $(4a^2 - 12ab + 9b^2)(2a - 3b)$, $b)$ $(x^2 - 3xy + 9y^2)(x + 3y)$.
8. $a)$ $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$,
$b)$ $(a^2 + 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2)$,
$c)$ $(x^3 - 2x^2 + 4x - 5)(x^2 + 3x - 2)$; $x = 3$,
$d)$ $(4x + 3)^2(3x - 4y)^2$.
9. $a)$ $7 - 3(5x - 2)(-5 + 2x)$, $b)$ $12x^2 - (2x - 1)(2x + 1)3$, $c)$ $(a - 2)(a + 3)(a - 4)$, $d)$ $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$.
10. $[(2x - 3)5 - 4x]\,x$, $(3a - 2)(-5a + 3)\,a$.
11. $(2b)^2 - [3b(5 - 2b)^2 - (2b + 3)(3b^2 - 2)]$.
12. $2x^3 - 3y[x^2 - y(2x - y)]$, $x = 2$, $y = -3$.
13. $2x(3x^2 - 1) + (-3)(x + 2)^2 - (3x - 2)(x - 3) + x(x - 4)^2$.
14. $3x \,.\, 5x^2y - (3x - 2y)^2 - (2y - 3x)\,2x + (-3x)^2$.
15. $(-3a)^2 - (2a + 3)^2 - 3(a - 4)(3 - a)$.
16. $4x^2(x - y) - y(y - 2x)(y + 2x) + 6xy(2x - y)$.
17. $(x + y)^2 - (x + y)(x - y) + (xy)^2 + 2y^2 - (2y)^2 + (-y)^2 + y^2 \,.\, 3y$, $x = 2$, $y = 3$.
18. $3x^3 - 3x(1 - 2x + x^2) - (2x + 1)(x^2 + x - 1) - (x^2 + 2)(-4x)$.
19. $2a^2(a^2 - 2b^2) - (5a - 3b)^2 + (2ab)^2 + 2a^3 \,.\, a^2 + (2a)^3$.
20. Jest vytknouti z $-am + bm - m$ činitel $a)$ $+m$, $b)$ $-m$.
21. Jest roznásobiti: $x^2 - x$, $2x^2 - 5x$, $6y - 15xy$, $-2x^2y + 6xy - 8y$, $25 - 4x^2$, $2x^2 - 8$, $a^2 + 6a + 9$.

Dělení jednoduchých výrazů.

§ 93. $a)$ Děliti jest ze součinu a jednoho činitele vyhledati činitel druhý (§ 14.). Proto lze podíl $2 : 3$ pouze naznačiti číslem lomeným $\frac{2}{3}$; podobně $a : b = \dfrac{a}{b}$; $2ab : 3cd = \dfrac{2ab}{3cd}$. Avšak celým číslem určiti lze tyto podíly:

1) Je-li dělenec součin a dělitel jeho činitel, na př.: $2a : a = 2$; $2a : 2 = a$; $abc : c = ab$; $abc : bc$*) $= a$; $(x - 2) . 3 : 3 = x - 2$.
Součin dělen činitelem, dá druhý činitel za podíl.

Ježto $\left.\begin{array}{l} abc : bc = a, \\ (abc : b) : c = a, \end{array}\right\}$ jest $abc : bc = abc : b : c$.

Součinem se dělí, dělíme-li posloupně každým činitelem.

2) Možno-li dělenec uvésti na součin, v němž by dělitel byl činitelem, na př.: α) $15a : 3 = 3 . 5a : 3 = 5a = (15 : 3)a$. Součin se dělí, dělíme-li jeden jeho činitel [a druhý vytkneme].

$$(6a - 3b) : 3 = 3(2a - b) : 3 = 2a - b = \frac{6a}{3} - \frac{3b}{3}.$$

Dvoučlen se dělí, dělíme-li každý jeho člen [a částečné podíly se sloučí].

β) $a^5 : a^3 = a^3 . a^2 : a^3 = a^2 = a^{5-3}$. Mocniny o společném základě se dělí, zmocníme-li společný základ rozdílem mocnitelů.

$$(a + b)^3 : (a + b)^2 = a + b.$$

b) Podíl zjednodušiti lze, je-li dělenec i dělitel soudělný; na př.: $4ab : 12ac = 4a . b : 4a . 3c = b : 3c = \frac{b}{3c}$, aneb kratšeji:

$\dfrac{4ab}{12ac}\Big|\begin{matrix}1\\3\end{matrix} = \dfrac{b}{3c}$. Společný činitel dělence a dělitele možno prostě vynechati (črtnouti).

Dále $\quad a^3 : a^5 = a^3 : a^3 . a^2 = 1 : a^2 = \frac{1}{a^2}$;

$$9a^2b^2 : 12a^3b = 3 . 3 . a^2 . b . b : 3 . 4 . a^2 . a . b = 3b : 4a = \frac{3b}{4a};$$

$$2(a + b) : 3(a + b)^2 = \frac{2}{3(a + b)}.$$

Hodnota podílu se nemění, dělíme-li dělenec i dělitel týmž číslem.

Cvičení: **1.** Jest určiti podíly (zkoušku násobením):
$8ab : 2a$, $24xy : 8xy$, $6^6 : 6^3$, $a^5 : a^3$.
2. $8x^3 : 2x$, $18x^4y^3 : 6xy^2$, $20(x-2)^3 : 4(x-2)$, $16(xy)^3 : 4xy$.
3. $15(a-3) : 5$, $(15a - 45) : 5$, $(2x^2 + 5x) : x$, $(6y^2 - 9y^3) : 3y^2$.
4. $(a^2 - b^2) : (a - b)$, $(6x^3y^3 + 9x^2y^4) : 3xy^2 : xy$,
$9x^2y : 3x - 48x^2y^3 : 6xy^2$.
5. Jest zjednodušiti:
$12a : 4b$, $\quad 8a : 12ay$, $\quad 5a^2x^3 : 15a^3x^2$.

---

*) Viz: § 76. d) 1).

6. Jest srovnati:

a) $12x^3y^4 : 4x^2y : 4x^2y^2$ a $12x^3y^4 : 4x^2y \,.\, 4x^2y^2$,

b) $18a^3 : 6a^3 : 2a$ a $18a^3 : (6a^3 : 2a)$,

c) $32x^6 : (4x^4 : 2x)$ a $32x^6 : 4x^4 : 2x$.

Dělení čísel vztažných.

§ 94. Dělenec jest součin z dělitele a podílu. Je-li tudíž dělenec kladný, má dělitel a podíl souhlasná znamení, je-li dělenec záporný, má dělitel a podíl protivná znamení, na př.:

$(+ab) : (+a) = +b$	$(+6) : (+2) = +3$
$(+ab) : (-a) = -b$	$(+6) : (-2) = -3$
$(-ab) : (+a) = -b$	$(-6) : (+2) = -3$
$(-ab) : (-a) = +b$	$(-6) : (-2) = +3$.

Podíl dvou vztažných čísel rovná se podílu prostých hodnot a jest buď kladný neb záporný, dle toho, jsou-li obě čísla souhlasná neb protivná.

Cvičení: **1.** $(+12) : (-4)$, $(-12) : (-4)$, $12 : (-4)$, $3 : (-1)$, $(-3) : (-1)$, $(-9)(-a^2) : (-3)$, $(+a^5) : (-a^2)$, $(-8x^3) : (+4x^2)$, $(-36x^6) : [(+24x^5) : (-8x^4)]$.

2. $(-6a+18) : (-6)$, $(9x^2 - 3x) : (-3x)$,

$(-4ax) \,.\, (+3by) : (12abxy)$,

$(-3x^2y) : (-3x) : xy + (+8ab^2x) : (-4bx) - (-9a^3b^2y) : (+3ay)$.

Dělení mnohočlenů.

§ 95. *a*) **Mnohočlen jednočlenem** se dělí, dělíme-li jím každý člen [a částečné podíly sloučíme].

Z rovnice $(a - b + c)\,m = am - bm + cm$ plyne:

$$(am - bm + cm) : m = a - b + c = \frac{+am}{m} + \frac{-bm}{m} + \frac{+cm}{m}.$$

Tak i $(am - bm + cm) : (-m) = \dfrac{am}{-m} + \dfrac{-bm}{-m} + \dfrac{+cm}{-m} = -a + b - c$,

$(3x^3 - 2x^2 - x) : (-x) = -3x^2 + 2x + 1$ (bez vyznačení).

Mnohočlen jest dělitelný číslem a, je-li a činitelem každého členu; a ježto dělenec se rovná součinu z dělitele a podílu, možno takový mnohočlen roznásobiti; na př.: $am - bm + cm = (-m)(-a + b - c)$.

Roznásobení toto děje se buď 1) vyznačením (vytknutím) společného činitele, na př.:

$am - bm + cm = (-a)(-m) + (+b)(-m) + (-c)(-m) = (-m)(-a + b - c)$, aneb 2) dělením dle poučky: hodnota čísla se nezmění, násobíme-li je a dělíme postupně týmž číslem;

$$am - bm + cm = -m\left(\frac{+am}{-m} + \frac{-bm}{-m} + \frac{+cm}{-m}\right) = -m(-a+b-c).$$

b) Dělení mnohočlenem. Tyto podíly lze toliko vyznačiti

$$a : (m+n) = \frac{a}{m+n}; \quad (a+b) : (m+n+p) = \frac{a+b}{m+n+p}.$$

Je-li mnohočlen dělitelný mnohočlenem, vznikl násobením.

Připravme si tudíž dělitelný mnohočlen:

$$\begin{array}{l}
(2x^2 + 3x - 4)(x-2) = \\
\underline{2x^3 + 3x^2 - 4x \qquad\qquad} \\
\underline{\qquad\quad - 4x^2 - 6x + 8} \\
(2x^3 - 7^2 - 10x + 8) : (2x^2 + 3x - 4) = x - 2 \\
\quad 2x^3 + 3x^2 - 4x \\
\underline{-\qquad -\qquad +\qquad\qquad} \\
\qquad\quad - 4x^2 - 6x + 8 \\
\qquad\quad - 4x^2 - 6x + 8 \\
\underline{\qquad\quad +\qquad +\qquad -} \\
\qquad\quad = \qquad = \qquad =
\end{array}$$

Víme arciť předem, že podíl $= x - 2$; zkoumejme však, kterak bychom podíl samostatně vyhledali. Prvý člen dělence vznikl násobením prvého členu dělitele a podílu, t. j.: $2x^3 = 2x^2 \,.\, x$, nalezneme tudíž prvý částečný podíl dělením $2x^3 : 2x^2 = x$; násobíme-li dělitel (celý) částečným podílem a součin odečteme, obdržíme zbytek $-4x^2 - 6x + 8$, jenž jest součin dělitele a druhého členu podílu; i pokračujeme dále, až zbytek $= 0$ neb $<$ dělitele. Návod ten vede k cíli, je-li dělenec i dělitel upraven. Proto jest mnohočleny před dělením upraviti a možno-li zjednodušiti, na př.: $(x^4y + xy^4) : (xy^2 + x^2y) = xy(x^3 + y^3) : xy(y + x) = (x^3 + y^3) : (x + y)$ a nikoliv: $(y + x)$.

Cvičení: **1.** Jest vykonati, co naznačeno, (zkoušku násobením): $(5a^2b - 20b^2) : (-5b)$, $\quad (9x^5y^3 + 6x^3y^6) : (-3x^3y^3)$.

2. $(9x^4 - 3x^2 - 6x) : 3x$, týž dělenec: $(-3x)$.

3. Zkoušku dělením:

$(9x^2 - 30x + 25) : (3x - 5)$, $\quad (a - a^2 + 12) : (a + 3)$,
$(19a - 15 + 2a^3 - 9a^2) : (2a - 3)$.

4. $(3x - 7xy + 2y^2) : (x - 2y)$, $\quad (a^3 + b^3) : (a + b)$.

5. $(a^3 - b^3) : (a - b)$, $\quad (27x^3 - 64y^3) : (3x - 4y)$,
$(x^4 - y^4) : (x - y)$, $\quad (x^4 - y^4) : (x + y$, $\quad (x^5 - 1) : (x - 1)$, $\quad x = 2$.

6. Jest dělence úkolů 1 — 5 roznásobiti dle poučky dělenec $=$ děliteli $\times$ podíl.

7. Jest vytknouti činitel vedle napsaný:
$a + b - c, -1$; $6x - 8y, -2$; $-6ab + 9b, 3b$; $12a^2 - 8ab + 4ac, -4a$.

8. Jest roznásobiti: $a^2 - a$, $3x - 3$, $6a^2 + 3a - 12$, $15a^3b - 12a^2bx + 18abx^2$, $-a^2 + 2a^3x - 3a^2x^2$, $6x^3y - 3x^2y^2 - 15x^2y$, $a^2(x+y) - b^2(x+y)$, $x^2(a-1) + (a-1)$.

9. Jest vykonati, co naznačeno: $(8a^2 + 2ab - 10b^2) : (4a - 5b)$.

10. $(a^4 - 3a^3 + 2a^2 - a + 5) : (a^2 - 3)$.

11. $1 : (1+a)$, $1 : (1-a)$, $a : (1-a)$; $a = \frac{1}{2}$, $a : (1-x)$; $x = \frac{1}{2}$.

12. $[(3a + b)(2a - 4b) - a(3a - 14b)] : (3a - 2b)$.

13. $(x^2 - 6x + 8)(x + 3) : (x - 2) : (x - 4)$; $x = 1$.

§ 96. **Dělení a násobení rovnic.** *a*) S použitím pouček § 14. dod. a § 11. dod. jest isolovati v těchto rovnicích x.

$3 . x = 12$, $x . 4 = 20$, $2x = 12$, $15 = 5x$,
$a . x = b$, $x . b = c$, $ax = ab$, $c^2 = cx$,
$x : 3$*) $= 4$, $15 : x = 3$, $x : a = b$, $a : x = b$,
$x . 2a = 3b$.

b) V těchto rovnicích jest isolovati kterékoliv obecné číslo: $ad = bc$, $v = 0 . s$, $2\Delta = z . v$, $k = 2\pi r$, $2p = k . r$, $100u = k . p . r$.

ČÁSŤ DESÁTÁ.

Zmocňování a odmocňování dvěma.

Zmocňování čísel dekadických dvěma.

§ 97. **Mocnilka místních hodnot.** *a*) Číslo zmocniti dvěma jest položiti je dvakrát co činitel; může se tudíž mocnina vyhledati násobením. Jest třeba však znáti ještě jiný způsob vypočítati mocniny, který se zove zmocňování. Zmocňování liší se od násobení pouze způsobem, nikoliv podstatou.

Čísla 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 nazývají se prostě čtverce; vzniklať čtvercováním řady přirozených čísel. Čtverce tyto nutno zapamatovati, jakož i čtverce dekadických jednotek:

b) $J^2 = J$; $D^2 = S$, $S^2 = Dt$; $T^2 = M$ atd., $d^2 = s$, $s^2 = dt$, $t^2 = m$ atd. (jest vyznačiti čísly). Zmocníme-li řád dvěma, zdvojnásobí se jeho stupeň, na př.: třetí řád desetinný (t) zmocněn dvěma, dá šestý řád desetinný (m).

c) $(2 . J)^2 = 4J$, $(3D)^2 = 9S$, $(4S)^2 = 16Dt$, $(5T)^2 = 25M$ atd., $(2d)^2 = 4s$, $(3s)^2 = 9t$, $(4t)^2 = 16m$ atd. (Vyznač čísly.)

Čtvercovati několik (n) jednotek dekadických jest výkon dvojí: 1) čtvercovati jich počet, 2) násobiti stupeň řádu dvěma.

---

*) $x : 3 \times 3 = x$; $15 : x . x = 15$.

Cvičení: Jest určiti (rázem) čtverce čísel:

1. 5, 4, 6, 3, 7, 2, 8, 1, 9, 10.
2. 10, 0·1, 100, 0·01, 1000, 0·001 atd.
3. 20, 0·3, 0·7, 400, 0·02, 0·08, 5000, 0·003, 0·004 atd.

Čtvercování čísel dvouciferných. *a*) Na př.: § 98.

$34^2 = (30+4)(30+4) = 30^2 + 4 \,.\, 30 + 30 \,.\, 4 + 4^2 =$
$30^2 + 2 \,.\, 30 \,.\, 4 + 4^2 = (3D)^2 + 2 \,.\, 3D \,.\, 4 + 4^2.$

Všeobecně: Čtverec čísla dvouciferného rovná se čtverci desítek, dvojnásobnému součinu desítek a jednotek a čtverci jednotek. I píšeme:

$$\begin{array}{lr} 34^2 = & \\ \hline 30^2 & 900 \\ 2\,.\,30\,.\,4 & 240 \\ 4^2 & 16 \\ \hline & = \mathbf{1156} \end{array} \qquad \text{aneb kratšeji:} \qquad \begin{array}{lr} 34^2 = & \\ \hline 3^2 & 9\,.\,. \\ 2\,.\,3\,.\,4 & 24\,. \\ 4^2 & 16 \\ \hline & = \mathbf{1156} \end{array}$$

Po malém cviku netřeba řády vyznačovati nullami, nýbrž psáti každý další člen urovnaného trojčlenu $3^2D^2 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, D + 4$ o stupeň níže; vysloviti jest: $3D$ na druhou jest $9S$; 2krát $3D$ krát $4J$ jest $24D$; $4J$ na druhou jest $16J$.

b) Hbitý počtář počítá též z paměti takto: Obrátí sled

$34^2 = 4^2 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4D + (3D)^2$ a vyslovuje $4^2 = \mathbf{16}$; $6 \,.\, 4 = 24$ a 1 [jest] **25**; $3^2 = 9$ a 2 [jest] **11**; tím napíše rázem $34^2 = 1156$.

c) Kratšeji počítáme tak, že poslední dva členy (čtvercový přírůstek) slučujeme v jedno, na př.:

$$34^2 = (30)^2 + 60 \,.\, 4 + 4 \,.\, 4 = 30^2 + (60+4)\, 4.$$

Sloučení se tedy děje tak, že ku dvojnásobným D se přičtou J a součet se násobí jednotkami, což krátce se píše tak, že vedle dvojnásobných desítek napíšeme jednotky a číslo tak povstalé násobíme jednotkami.

$$\begin{array}{lr} 34^2 & \\ \hline 3^2 & 9\,.\,. \\ 64\,.\,4 & 256 \\ \hline & 1156 \end{array}$$

d) Týmž způsobem lze čtvercovati každé číslo, jehož obraz číselný jest dvouciferný, na př.:

$340 = 34D$, $3400 = 34S$, $3·4 = 34d$, $0·34 = 34s$ atd.

$$\begin{array}{lr} 0{\cdot}27^2 = (27s)^2 = & \\ \hline 2^2 & 4\,.\,. \\ 47\,.\,7 & 329 \\ \hline & = 0{\cdot}0729 \end{array}$$

Číslo desetinné povýšeno byvši na druhou má dvojnásobný počet desetinných míst.

e) Každé číslo, jež lze rozvésti na 2 „jednociferné" *) sčítance,

*) T. j. číselný obraz sčítance jest jednociferný.

možno též dle *a*) neb dle *d*) čtvercovati, na př.:

$703 = 7S + 3$, $5080 = 5T + 8D$, $6{\cdot}07 = 6J + 7s$ atd.

Označíme-li prvý sčítanec a, druhý b, bude $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Dle *a*) 703^2		Dle *d*) 703^2	
$(7S)^2$	49....	$(7S)^2$	49....
$2.7S.3$	42..	1403.3	..4209
3^2	9		494209
	494209		

Zde jest čtvercový přírůstek sloučen: $2ab + b^2 = (2a + b)\,b$.

I počítáme bez vyznačování řádu, (jež však vyslovujeme) takto:

$3{\cdot}05^2$		$700{\cdot}4^2$	
3^2	9....	7^2	49......
605·5	3025	14004·4	56016
	9·3025		490560·16

Cvičení: Jest vypočítati čtverce čísel:

1. Dle *a*) 12, 15, 18, 21, 37, 58, 63, 78, 92.

2. Dle *b*) 13, 16, 24, 36, 48, 53, 65, 84, 97.

3. Dle *c*) 17, 19, 27, 39, 46, 57, 68, 74, 86.

4. Dle *d*) 140, 4700, 75000, 3·8, 0·23, 0·054.

5. 107, 30·8, 9·02, 40700, 0·506, 0·0207. **6.** 7003, 20·08, 7·009.

7. Jest čtvercovati dle *a*) čísla 35, 45, 55, 95 a odůvodniti toto pravidlo. Má-li dvouciferné číslo na konci 5, vypočítáme jeho čtverec takto: desítky násobme číslem o 1 větším a k součinu připišme 25, na př.: $65^2 = 4225$, neboť $6 . 7 = 42$ a k tomu 25.

§ 99. **Čtvercování čísel tří- a víceciferných.** *a*) $347^2 = ?$ Rozvedeme-li 347 ve dva sčítance $34D + 7$, možno rázem čtvercovati dle § 98. takto: $(34D + 7)^2 = (34D)^2 + 2 . 34D . 7 + 7^2$, t. j. přidati ke čtverci prvé dvojskupiny čtvercový přírůstek nově přibylého čísla.

347^2		aneb: 347^2	
34^2	1156..	34^2	1156..
2.34.7	476.	687.7	4809
7^2	49		120409
	120409		

Při tom však by bylo třeba stranou počítati 34^2. Píšeme-li však vše v jednotě, bude:

	347^2	
34^2 {	3^2	9..
	64.4	256..
	687.7	4809
		120409

b) Podobně u čísla čtyřciferného 3478 bychom počítali

$$3478^2 = (347\,D + 8)^2 = (347\,D)^2 + 2\,.\,347\,D\,.\,8 + 8^2,$$

aneb dle § 98. *c*)

3478^2	
347^2	120409..
6948.8	55584
	12096484

při čemž bychom opět 347^2 stranou vypočítali dle *a*). V jednotě psáno a dle § 98. *c*) počítáno, bude

	3478^2		
347^2	3^2	34^2	9..
	64.4		256..
	687.7		4809..
	6948.8		55584
			12096484

Nejprve čtvercujeme nejvyšší jednotky; postupujíce k jednotkám nižším přidáváme čtvercový jejich přírůstek, při čemž dle § 98. *c*) píšeme o 2 stupně níže.

Nejvyšší jednotky dají skupinu jedno- neb dvoucifernou (dle velikosti), každá další jednotka dá dvojskupinu. I má čtverec tolik ***dvojskupin***, co základ řádů, (nejvyšší dvojskupina může arciť býti neúplná).

c) Čísla neúplná čtvercujeme toliko zkráceným násobením, ježto zmocňováním bychom zbytečně vyvinovali čísla nespolehlivá; na př.: $0{\cdot}3478\,.\,.^2 = 0{\cdot}1209(5)\,.\,.$, a čtvercováním bychom obdrželi číslo $0{\cdot}12096484$, při němž poslední čtyřskupina jest nespolehlivá.

Cvičení: Jest čtvercovati tato čísla:

1. 372, 0·372, 37·2, 3·72, 3720*).

2. *a*) 458, *b*) 7·19, *c*) 604·3, *d*) 92·007, *e*) 8240.

3. *a*) 1111, *b*) 27·053, *c*) 304·07, *d*) 35460.

4. *a*) 12·453 . ., *b*) 3·14159 . ., *c*) $0{\cdot}5\dot{4}\dot{8}$ na 5 des. míst.

5. *a*) $0{\cdot}3^4 = (0{\cdot}3^2)^2 = ?$ *b*) $27^4 = ?$

c) $0{\cdot}2743\,.\,.^4 = 0{\cdot}2743\,.\,.^2 \times 0{\cdot}2743\,.\,.^2 = ?$

6. Jakou cifru může míti úplný čtverec na místě nejnižších jednotek?

Čtvercování obecných výrazů. *a*) Vzorce tyto byly již odvozeny: $(-a)^2 = +a^2$; $(abc)^2 = a^2b^2c^2$; $(a^3)^2 = a^6$. Vyslovte poučky v rovnicích těch obsažené, čtouce je přímo i zvratně. **§ 100.**

b) $(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2$. Tím stvrzeno pravidlo o čtvercovém přírůstku, vysloveném v § 92. *d*). Podobně bychom odvodili:

$$\begin{aligned}(a - b + c - d)^2 &= \\ (a - b + c)^2 &= \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a^2 \\ -2ab + b^2 \end{array}\right\} = (a-b)^2 \\ +2\,(a - b)\,c + c^2 \end{array}\right. \\ & \quad -2\,(a - b + c)\,d + d^2.\end{aligned}$$

---

*) Mají-li základy stejný obraz číselný, mají i čtverce týž obraz.

Odstraníme-li konečně závorky ve dvojnásobných součinech, obdržíme jednoduchý mnohočlen.

Cvičení: Jest čtvercovati tyto výrazy:
1. $3x^2 - 2x$. **2.** $x^2 - y^2$. **3.** $-0{\cdot}5a$. **4.** $2a - 0{\cdot}8$.
5. $3x + 2y + z$. **6.** $x^2 - x + 1$. **7.** $a^2 - 2ab + b^2$.
8. $2a^2 - 0{\cdot}3a - 5$. **9.** $2a^2 - 0{\cdot}3a + 0{\cdot}21$.
10. Jest zjednodušiti:
$3a^2(2a^3 + 3) - 0{\cdot}3(5a - 0{\cdot}2)^2 + 0{\cdot}75a^2(-2a)^3 + (-0{\cdot}12)^2$.

Odmocňování dvěma.

§ 101. **Odmocnina jedno- a dvouciferná.** *a*) Odmocniti číslo na př. 25 dvěma, znamená nalézti číslo, jehož čtverec se rovná číslu danému. Výkon ten lze vyznačiti tedy takto: $x^2 = 25$; aby však obě daná čísla byla na levé straně, vyznačujeme odmocnění takto: $\sqrt[2]{25} = ?$ a ježto 2 pro krátkost se vynechává, $\sqrt{25} = ?$ Číslo hledané jest 5, neboť $5^2 = 25$. Dané číslo (25), jež jest odmocniti, zove se odmocněnec (radicand), číslo (2), kterým jest odmocniti, odmocnitel, a číslo hledané ($\sqrt{25}$) odmocnina (radix). Znak odmocnění $\sqrt{}$ jest zbytek písmena R, začátečního to písmena slova radix (= odmocnina). 5 jest též odmocnina, nemá však tvaru odmocniny a zove se proto vypočtenou odmocninou, kdežto $\sqrt{25}$ naznačenou. Dle toho znamená $\sqrt{81}$ hledati číslo, jehož čtverec jest 81; tedy $\sqrt{81} = 9$, ježto $9^2 = 81$.

b) Z toho patrno, že odmocniti dvěma lze pouze čtverce 1, 4, 9... Je-li $\sqrt{7}$ též číslem nějakým, musí $\sqrt{7} > 2$ (ježto $2^2 = 4 < 7$) a < 3, ježto $3^2 = 9 > 7$. Z toho patrno, že $3 > \sqrt{7} > 2$, t. j. $\sqrt{7}$ není číslem celým. Je-li číslem desetinným, lze tudíž psáti $\sqrt{7} = 2{\cdot}\ldots$, čímž určen alespoň nejvyšší řád odmocniny. Jest to odmocnění částečné.

Podobně jest $\sqrt{90} > 9$ a < 10, tudíž $\sqrt{90} = 9{\cdot}\ldots$ a $\sqrt{0{\cdot}4} = 0{\cdot}6\ldots$

c) $\sqrt{M} = T$, ježto $T^2 = M$; $\sqrt{s} = d$, ježto $d^2 = s$ atd. $\sqrt{T} = ?$ $\sqrt{t} = ?$ Řády liché odmocniti nelze.

d) $\sqrt{900} = \sqrt{9S} = 3D = 30$, ježto $30^2 = 900$,
$\sqrt{0{\cdot}25} = \sqrt{25s} = 5d = 0{\cdot}5$, ježto $0{\cdot}5^2 = 0{\cdot}25$ atd.
$\sqrt{40} = 6{\cdot}\ldots$, $\sqrt{560} = 2_0{\cdot}\ldots$, $\sqrt{0{\cdot}009_0} = 0{\cdot}09\ldots$ atd.

Odmocniti lze jen řády sudé: je-li počet jich čtvercem, — úplně, není-li čtvercem, jen částečně. Ku snadnějšímu přehledu vyznačujeme řády sudé kolmými čarami, na př.:

$$\sqrt{8\,|\,75\,|\,00{\cdot}3} = 2_{00}{\cdot}\ldots,\quad \sqrt{0{\cdot}00\,|\,09\,|\,7} = 0{\cdot}03\ldots,$$

t. j. dělíme číslo na dvojskupiny sudých řádů.

Cvičení: Jest odmocniti dvěma: **1.** 1, 81, 4, 64, 9, 49, 16, 36, 25, 100, (odmocniny jest si zapamatovati).

2. $3^2 + 4^2$, $5^2 - 4^2$, $3^2 . 4^2$, $5^2 . 4^2$, 7^2, 9^2.

3. S, s, Dt, dt, M, m.

4. 400, 0·04, 250000, 0·0009, 36 M, 0·000049.

5. Jest vypočítati nejvyšší jednotky druhé odmocniny čísel:
4, 40, 400, 4000, 40000 . . ., 0·04, 0·4, 0·0004, 0·004 . . .

6. 3, 5, 10, 18, 27, 56, 250, 490, 810, 900, 9000, 1600, 2500, 3600, 16000, 25000, 64000, 81000 . . ., 0·9, 0·09, 0·016, 0·16.

7. 0·025, 0·0025, 0·036, 0·0036, 0·081, 0·009, 0.00016, 0·00025 . . .

Odmocnina dvouciferná. První cifru odmocniny možno dle § 101. nalézti rázem a to z jednotek nejvyššího **sudého** řádu; druhou nalezneme, sledujeme-li vznik odmocněnce. **§ 102.**

a) Vyčísleme na př. 43^2 a čtverec vzniklý odmocněme.

$$\begin{array}{lr|l|l}
\underline{43^2} & & \sqrt{18|49} = 43 & \sqrt{18|54} = 43\cdot\,.\,.\,. \\
4^2 & 16. & \underline{-16} & \underline{25_{\llcorner}4 : 83 . 3} \\
2.4.3 & 24. & 24_{\llcorner}9 : 83\cdot3 & = 5 \\
3^2 & \underline{9} & \underline{249} & \\
 & 1849 & = = &
\end{array}$$

Nejvyšší sudý řád jsou S a proto bude odmocnina míti nejvyšší řád D a to 4 (dle § 101.), neboť $(4D)^2 = 16S$. Odečteme-li $16S$, zbude 249. Ze zbytku toho soudíme, že odmocnina má mimo D i J. Uvažujíce že, přibude-li k základu $(4D)$ člen nový (xj), přibudou do čtverce členy dva $2 . 4D . x + x^2$, obdržíme rovnici

$$249 = 2 . 4 . x . D + x^2 = \text{čtvercový přírůstek.}$$

Zanedbáme-li jednotky, obdržíme přibližnou rovnici $24_{\llcorner}9 \doteq 8 . x$ a z toho $x = 24_{\llcorner}9 : 8 = 3$. Z toho patrno, že druhou částečnou odmocninu nalezneme, dělíme-li zbytek o následující řád rozšířený dvojnásobnou částečnou odmocninou. Abychom se však přesvědčili, že 249 jest skutečně čtvercový přírůstek, vyvineme jej $= 8D\,3 + 3^2$, aneb rázem dle § 98. *c*) $83 . 3 = 249$.

Že jest 43 hledaná odmocnina, dokáže rovnice $43^2 \overset{?}{=} 1849$.

b) Podobně nalezneme:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{46\cdot|24} = \quad 6\cdot8 \\
\underline{102_{\llcorner}4 : 128\cdot8} \\
= =
\end{array}$$

Nejvyšší sudý řád odmocněnce jsou J; i bude nejvyšší řád odmocniny J a sice 6 . .; druhou částečnou odmocninu nalezneme podobnou úvahou jako v *a*) $(6J)^2 = 36J$, zbude $10J$; ve zbytku $(1024s)$ jsou obsaženy d a to svým čtvercovým přírůstkem, tak že $1024\,s = 12\,y\,d + y^2 . d^2$; tedy v řádu nejblíže nižším $102\,d$ člen prvý $12 . y . d$, což dává rovnici $102 \doteq 12 . y$; $y \doteq 102 : 12 = 8$. Má-li tedy $4624 s = (68 d)^2$, musí $1024 s = 2 . 6 . 8 d + 8^2 d^2$, čili $= 128 . 8 = 1024$.

Zkouška: $(68 d)^2 = ?\ 4624 s$.

Určíme-li nejvyšší řád odmocniny, není v dalším odmocňování čísel celých a desetinných rozdílu.

Pokud obraz číselný zůstává týž i co do sudých řádů, má i druhá odmocnina týž obraz číselný; tak jest:

$\sqrt{0{\cdot}46|24} = 0{\cdot}68$, $\sqrt{46{\cdot}24} = 6{\cdot}8$, avšak $\sqrt{4{\cdot}624} = 2{\cdot}1 \ldots$

Tak možno určiti nejvyšší dvojskupinu druhé odmocniny jakékoliv.

Cvičení: **1.** Jest vyhledati ze čtverců čísel 17, 0·23, 46, 8·5, 0·92 druhou odmocninu.

2. Jest vyhledati druhou odmocninu (se zkouškou): *a*) 169, *b*) 0·0196, *c*) 8·41, *d*) 2116, *e*) 0·003364, *f*) 5184, *g*) 7225, *h*) 7921, *i*) 94·09.

3. Jest vyhledati 2 místa těchto odmocnin (se zkouškou):

a) $\sqrt{2340}$, *b*) $\sqrt{0{\cdot}452}$, *c*) $\sqrt{0{\cdot}0968}$, *d*) $\sqrt{0{\cdot}00968}$, *e*) $\sqrt{0{\cdot}000968}$.

4. Jest vyčísliti: *a*) $\sqrt{56^2 + 42^2}$, *b*) $\sqrt{65^2 - 16^2}$.

5. Kterého čísla čtverec jest o $75 > 37^2$?

6. Jakou cifru musí míti číslo > 100 na nejnižším místě, má-li býti úplným čtvercem? Nelze dle toho často úplnou druhou odmocninu dvojcifernou rázem pověděti? Na př.:

$\sqrt{441}$, $\sqrt{841}$, $\sqrt{1024}$, $\sqrt{1444}$, $\sqrt{6889}$, $\sqrt{7569}$, $\sqrt{4225}$.

7. Jest určiti stranu čtverce, jehož plocha jest $2704\ m^2$.

8. Jest určiti střední geom. úměrnou čísel: *a*) 9, 25, *b*) 8, 98.

§ 103. **Odmocnina tří- a víceciferná.** *a*) Jest vyhledati:

$$\begin{array}{l} \sqrt{53\,87|56} = 734 \\ \ \ 4\,87 \quad : 143 . 3 \\ \ \ \ \ 58\,56 \ : 1464 . 4 \end{array}$$

Nejvyšší sudý řád jsou *Dt*, proto bude nejvyšší řád odmocniny *S* a to 7 *S*, ježto $(7 S)^2 = 490000$. (Může býti odmocninou 8 *S* neb *T*?) V přebytku (4 *Dt*) a další dvojskupině 87 *S*, je obsažen čtvercový přírůstek $2 . 7 S . x D + x^2 D^2$, tak že obdržíme rovnici

$$48_{|}7 \doteq 14 . x; \quad x = 48_{|}7 : 14 = 3;$$

odečteme-li čtvercový přírůstek $2 . 7 . 3 T + 3^2 S$, čili $143 . 3 . S = 429 S$, obdržíme opět přebytek 58 *S*. V něm a další dvojskupině (5856) jest obsažen čtvercový přírůstek jednotek $2 . 73 . D . y + y^2$.

Z rovnice $585_{|}6 \doteq 146 y$ bude $y \doteq 585_{|}6 : 146 = 4$; vypočteme-li čtvercový přírůstek jednotek $1464 \cdot 4 = 5856$, shledáme, že odmocněnec jest úplným čtvercem, o čemž se přesvědčíme zmocněním

$$734^2 = ?\ 538756.$$

b) Jest vyhledati: Zkouška:

$\sqrt{7}$	$= 2{\cdot}645\,..$	$2{\cdot}645^2$	
300	46	2^2	4..
2400	524	46 . 6	276..
30400	5285	524 . 4	2096..
3975		5285 . 5	26425
			3975
			7·000000

Nejvyšší řád odmocniny jsou J; přebytek $3J$ ukazuje, že odmocnina $2J$ není úplná, že vedle $2J$ bude míti i několik d; d^2 dají s; proměníme-li tudíž $3J$ na s, (zkrátka: připíšeme další dvojskupinu) a dělíme dvojnásobnou částečnou odmocninou, soudíce jako dříve:

$$300s = 2 \,.\, 2xd + x^2d^2; \quad 30\llcorner 0 \doteq 4x; \quad x = 30\llcorner 0 : 4 \quad \text{atd.}$$

Že se odmocniny nedopočítáme, (proto sluje $\sqrt{7}$ číslo nedopočetné), vidno z toho, že každý následující zbytek (čtvercový přírůstek) má na konci **00**, čemuž odpovídá v odmocnině pouze 0, jež jest nemožna. (Viz § 102. cvič. 6.) Druhý důvod jest ten, že víceciferná odmocnina nemůže míti méněciferný odmocněnec.

Cvičení: **1.** Jest odmocniti čtverce těchto čísel:

237, 0·154, 306, 0·0508, 5493, 7·209, 5008.

2. Které číslo jest odmocniti, má li odmocnina býti 0·274 a zbytek *a*) 0·001; *b*) je možný zbytek 0·002?

3. Jest určiti nejvýš 4 místa těchto odmocnin (se zkouškou):

a) $\sqrt{19321}$, *b*) $\sqrt{0{\cdot}05374}$, *c*) $\sqrt{615{\cdot}04}$, *d*) $\sqrt{0{\cdot}61504}$, *e*) $\sqrt{1346{\cdot}89}$, *f*) $\sqrt{134{\cdot}689}$, *g*) $\sqrt{21511044}$.

4. *a*) $\sqrt{5026{\cdot}81}$, *b*) $\sqrt{502{\cdot}681}$, *c*) $\sqrt{50{\cdot}2681}$, *d*) $\sqrt{5{\cdot}02681}$, *e*) $\sqrt{0{\cdot}502681}$, *f*) $\sqrt{50268{\cdot}1}$.

5. *a*) $\sqrt{364816}$, *b*) $\sqrt{0{\cdot}00421201}$, *c*) $\sqrt{5745{\cdot}64}$, *d*) $\sqrt{453}$, *e*) $\sqrt{27}$, *f*) $\sqrt{61{\cdot}1524}$, *g*) $\sqrt{203{\cdot}9184}$.

6. $\sqrt{304^2 + 726^2}$, $\sqrt{901^2 - 60^2}$.

7. Jest vypočítati 3927^2, víme-li, že $392^2 = 153664$.

8. *a*) Jaká jest strana čtverce, jehož plocha $= 405769$? *b*) Jest proměniti obdélník, jehož délka jest $735\,m$ a výška $240\,m$ ve čtverec a určiti jeho stranu.

9. Jest určiti výšku $\triangle$ rovnostranného, jehož strana $= 206\,m$ (na 4 místa).

§ 104. Zkrácené odmocňování.

```
a) α) √2           = 1·414|21356
      100            2 4  |
        400          2·81 |
         11900       2 824|
     -----------------------------
          6040|0      2 828|2
           383|600    2 828|41
           100|75900  2 828|423
            15|9063100 2 828|4265
             1|7641775     |
```

Zkráceně:

```
               dt        J
β)   √2              = 1·414 |214 . . .
      100              24   |
        400            281  |
         11900         2824 |    dt
     ----------------------------------------
          6040   :  2⌞8⌞2⌞8|2 = 213 (6)
           384
           101
            16
             1
```

V α) jest určeno 9 míst $\sqrt{2}$ odmocňováním, v b) 4 místa odmocňováním a 3 místa zkráceným dělením. Jak z a) vidno, vyhledává se odmocnina dělením zbytků (čtvercových přírůstků), při čemž se dělitel stále mění. Tato změna týká se však jen míst nižších, místa vyšší zůstávají stejná. Dělitel 3tí shoduje se s následujícími děliteli ve 3 místech, 4tý ve 4, 5tý v 5 atd. Z toho patrno, že, zkrátíme-li 4tý dělitel na tato 4 shodná místa, lze další 4 místa určiti dělením a to *zkráceným,* ježto místo úplných dělitelů béřeme dělitel neúplný.

Možno tudíž určiti ještě 4 další místa odmocniny zkráceným dělením, z nichž arciť poslední bude nespolehlivo, ale k opravě se hodí, (nezanedbáváme-li opravy z místa pátého).

Ježto by se státi mohlo, že první místo podílu jest nulla (viz b) α), nutno při tomto zkráceném dělení určovati řád nejvyšší jednotky jako obyčejně.

Možno tudíž určiti n míst odmocňováním a n dalších míst zkráceným dělením. Spolehlivých míst jest

$$n + n - 1 = 2n - 1.$$

Je-li tudíž počítati 5 (6) spolehlivých míst druhé odmocniny, možno 3 (4) určiti odmocňováním a 3 (3) zkráceným dělením; poslední místo se odvrhne, když se z něho vzala oprava.

b) Jsou-li nejvyšší jednotky odmocniny $\gtreqless 5$, možno určiti zkráceným dělením o jedno místo více (než v *a*) $(n+1)$ní místo podílu slouží k opravě; na př.:

α) Jest určiti $\sqrt{17{\cdot}478}$ správně na 5 míst, *β*) $\sqrt{69{\cdot}87}$ správně na 6 míst.

$$\alpha)\ \sqrt{0{\cdot}17478} = 0{\cdot}418|07\ldots$$

$$\begin{array}{rl}
147 & \quad 81 \\
6680 & \quad 828 \\
560 : 8_{\llcorner}36 = 06(7) & \\
58 & \\
= &
\end{array}$$

$$\beta)\ \sqrt{69{\cdot}87} = 8{\cdot}35{,}883\ldots$$

$$\begin{array}{rl}
587 & \quad 163 \\
9800 & \quad 1665 \\
14750 : 16_{\llcorner}7_{\llcorner}0|8 = 882(9) & \\
1384 & \\
48 & \\
15 & \\
1 &
\end{array}$$

V *α*) jsou určena 3 místa odmocňováním a 2 místa (o 1 méně) zkráceným dělením. V *β*) bylo možno určiti zkráceným dělením o 1 místo více, ježto dělitel 1670 jest 4ciferný. Upozorněno budiž na opravu: dělitel 1670 . . jest neúplný i byla by chyba z nemožné opravy značná, ježto zde zanedbáváme 8; proto jest 8 vyznačeno k opravě.

Odmocňování čísel neúplných zasluhuje zmínky, děje-li se co nejpřesněji; jinak patří číslo neúplné mezi zkrácená. § 105.

$$a)\ \sqrt{21{\cdot}3475\ldots} = 4{\cdot}62|03\ldots$$

$$\begin{array}{rl}
534 & \quad 86.6 \\
1875 & \quad 922.2 \\
31_0\ldots : 9_{\llcorner}2|4 = 03(4) & \\
3_3 & \\
-_4 &
\end{array}$$

Zkouška:

$$\begin{array}{r}
4{\cdot}6203(4) \\
(4)3026{\cdot}4 \\
\hline
184814 \\
27722 \\
924 \\
14 \\
2 \\
\hline
21{\cdot}347(6)
\end{array}$$

Číslo neúplné odmocňujeme pokud možno (pokud nejsou vyčerpány všechny dvojskupiny) a další místa hledáme zkráceným dělením, (při čemž se řídíme poučkami § 74.) Je-li poslední dvojskupina neúplná, přidejme nullu (malou), mějme však na paměti, že zbytky nully té jsou nespolehlivé a slouží pouze ku opravě, na př.:

$$\sqrt{76{\cdot}54{,}6\ldots} = 8{\cdot}74|91\ldots$$

$$\begin{array}{rl}
1254 & \quad 16.6 \\
856_0 & \quad 174.4 \\
158_4 : 1_{\llcorner}7_{\llcorner}4|8 = 90(6) & \\
1_1 & \\
= &
\end{array}$$

Zkouška:

$$\begin{array}{r}
8{\cdot}7490(6) \\
(6)0\,9478 \\
\hline
69\,9925 \\
61243 \\
3500 \\
787 \\
5 \\
\hline
76{\cdot}546(0)
\end{array}$$

Jsou-li nejvyšší jednotky odmocniny $\gtreqless 5$, má odmocnina neúplného čísla tolik míst, co odmocněnec, jsou-li < 5 z pravidla*) o jedno méně.

b) Jest odmocniti Ludolfovo číslo ($\pi = 3{\cdot}14159265\,..$) dvěma (správně na 5 míst). Počítáme-li 3 místa odmocněním a 2 (3) zkráceným dělením, jest z čísla π podržeti 3 dvojskupiny (a jedno číslo k opravě). I bude:

$\sqrt{3{\cdot}14|15|9.} = 1{\cdot}77|25\,..$
$\quad 2\,14 \qquad 27.7$
$\quad 2515 \qquad 347.7$
$\quad 869 : 3_{\llcorner}5_{\llcorner}4_2 = 24(5)$
$\quad 161$
$\quad 19$
$\quad 1$

což se shoduje s přesnějším výpočtem, dle něhož jest $\sqrt{\pi} = 1{\cdot}772454\,...$

Cvičení: **1.** Jest počítati druhou odmocninu těchto čísel na 5 míst, *a*) zkráceně, *b*) nezkráceně: 3, 5, $0{\cdot}3\dot{2}\dot{6}$.

2. Jest počítati zkráceně druhou odmocninu těchto čísel (se zkouškou): *a*) 17 (3 místa), *b*) 72 (3 místa), *c*) 0·00573 (4 místa), *d*) 42 (6 míst), *e*) $0{\cdot}2\dot{3}0\dot{5}$ (6 míst).

3. Jest počítati zkráceně druhou odmocninu čísel: *a*) 72·14, *b*) 35821·75 na 2 desetinná místa.

4. Jest odmocniti dvěma co nejpřesněji (se zkouškou) tato čísla: *a*) 5·24 . ., *b*) 0·7425 . ., *c*) 831·5 . ., *d*) 43·213 . ., *e*) 732·4693 . ., *f*) $(43{\cdot}72^2\,.. + 5{\cdot}68^2\,..)$.

5. Jest odmocniti dvěma zlomky $\frac{4}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}$ dle vzoru $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{0{\cdot}6} = \,...$

§ 106. **Odmocňování početních výrazů.** *a*) Z pojmu druhé odmocniny plyne, že $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{a^4} = a^2$; (učiň všady zkoušku zmocněním).

Mocnění a odmocnění jsou výkony protivné. Zvratným čtením: $a = \sqrt{a^2}$; $3 = \sqrt{3^2}$. Každému číslu lze dáti tvar odmocniny.

b) $\sqrt{a^2b^2}$**) $= ab = \sqrt{a^2}\,.\,\sqrt{b^2}$. Součin se odmocní, odmocníme-li každý jeho činitel [a výsledky znásobíme]. Dle toho možno odmocniti částečně: $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, $\sqrt{12} = \sqrt{3\,.\,4} = 2\sqrt{3}$.

c) Zvratným čtením *b*) $\sqrt{a^2}\,.\,\sqrt{b^2} = \sqrt{a^2b^2}$ jest: Odmocniny téhož odmocnitele se násobí, vytkneme-li odmocnitel, (t. j. odmocníme-li součin odmocněnců).

$\sqrt{3}\,\sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$; $\quad \sqrt{a}\,.\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

*) Je-li totiž nejvyšší dvojskupina úplná; $\sqrt{1234{\cdot}56\,..} = 35{\cdot}136\,..$ $\sqrt{234{\cdot}56\,..} = 15{\cdot}315\,..$

**) Místo abychom výraz algebr. závorkovali, prodloužíme znamení $\sqrt{}$, tedy $\sqrt{a^2\,.\,b^2}$ místo $\sqrt{(a^2b^2)}$.

d) Je-li násobiti $a \cdot \sqrt{3}$, (čili uvésti součin $a\sqrt{3}$ na tvar odmocniny), dejme činiteli a tvar odmocniny ($a = \sqrt{a^2}$) a násobme dle *c*) $a\sqrt{3} = \sqrt{a^2}\sqrt{3} = \sqrt{3a^2}$.

e) Dle *c*) jest $\sqrt{a}\sqrt{a} = a$; a zvratným čtením $a = \sqrt{a}\sqrt{a}$. Každé číslo lze roznásobiti ve dvě odmocniny.

f) $(\sqrt{a})^3 = \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{aaa} = \sqrt{a^3}$. Odmocnina se zmocní, zmocníme-li její odmocněnec. Sled zmocnění a odmocnění jest libovolný. $(\sqrt[3]{2\sqrt{2}})^2 = \sqrt[3]{8} = 2$.

g) $\left.\begin{array}{r} x = 4 \\ x = 4 \end{array}\right\} \times$
$x^2 = 4^2 = 16$

α) Z rovnice $x = 4$ možno vytvořiti rovnici $x^2 = 4^2$ zmocněním obou stran dvěma.

Rovnost se neruší, zmocníme-li obě strany rovnice týmž číslem.

β) Z rovnice $x^2 = 16$ vytvoříme rovnici $x = 4$ odmocněním obou stran dvěma.

Rovnost se neporuší, odmocníme-li obě strany rovnice týmž číslem.

h) Ježto $(a^2)^2 = a^4$, možno psáti na př.:

$(a^2)^2 = 81$ | . . . . a dle *g*) β) | $a^2 = \sqrt{81}$; $a = \sqrt{\sqrt{81}}$
$a^4 = 81$ | . . . . | . . . . $a = \sqrt[4]{81}$ $\Big\}\ \sqrt[4]{81} = \sqrt{\sqrt{81}}$.

Číslo se odmocní čtyřmi, odmocníme-li je postupně dvakrát dvěma.

Cvičení: **1.** Jest zjednodušiti výrazy:
a) $\sqrt{b^2}$, *b*) $\sqrt{(ab)^2}$, *c*) $\sqrt{(a+b)^2}$, *d*) $\sqrt{(3a)^2}$, *e*) $\sqrt{(a:2)^2}$, *f*) $\sqrt{a} + \sqrt{a}$, *g*) $3\sqrt{a} - \sqrt{a}$, *h*) $a\sqrt{a} - 3\sqrt{a}$.

2. Jest dáti těmto číslům tvar druhé odmocniny: 2, 3, 10, 1, a, $2a$, $a + 2$, $5 + \sqrt{3}$

3. Jest zjednodušiti: $\sqrt{9 \cdot 4}$, $\sqrt{0{\cdot}04 \cdot 0{\cdot}25}$, $\sqrt{18 \cdot 2}$, $\sqrt{4a^2}$, $\sqrt{b^2x^4}$, $\sqrt{9(a+b)^2}$, $\sqrt{36a^2b^4c^8}$.

4. Jest částečně odmocniti:
$\sqrt{3b^2}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{ab^2}$, $\sqrt{4a} + \sqrt{9a}$, $\sqrt{25x} - \sqrt{x}$, $\sqrt{24} + \sqrt{54}$.

5. Jest uvésti na tvar jediné odmocniny a možno-li zjednodušiti:

$$\sqrt{a}\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}\sqrt{8}, \quad \sqrt{2x} \cdot \sqrt{2x}, \quad 3\sqrt{\frac{7}{3}}, \quad a\sqrt{\frac{3}{a}}.$$

6. Jest roznásobiti čísla a, 2 v odmocniny a zjednodušiti tvary:

$$a : \sqrt{a}, \qquad 2 : \sqrt{2}, \qquad (a\sqrt{2} + 2) : (a + \sqrt{2}).$$

7. $\sqrt[4]{2} = ?$ (5 míst).

8. Kolikrát jest

$\sqrt{9 \,.\, 4} > \sqrt{9} \,.\, 4$*), $\quad \sqrt{2 \,.\, 9^2} > \sqrt{2 \,.\, 9}$, $\quad \sqrt{2 a^2} > \sqrt{2 a}$.

9. Jest vyčísliti:

$\sqrt{16} + \sqrt{9}$, $\quad \sqrt{16 + 9}$, $\quad \sqrt{16} + 9$, $\quad \sqrt{25} - \sqrt{9}$,
$\sqrt{25} - \sqrt{9}$, $\quad \sqrt{25} - 9$, $\quad \sqrt{5^2 - 4^2}$.

10. Jest vykonati co naznačeno.

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})$, $\quad (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \,.\, (\sqrt{3} - \sqrt{2})$,
$(3 + \sqrt{2})\,(3 - \sqrt{2})$, $\quad (4 + \sqrt{3})\,(2 - \sqrt{3})$.

11. Jest isolovati x v rovnicích: $x^2 = 25$, $\quad x^2 = a^2 \pm b^2$,
$x^2 + a^2 = b^2$, $\quad x^2 = ab$, $\quad 6x^2 = p$, $\quad k = \pi x^2$, $\quad 4\sqrt{2x} = 3$.

107. **Odmocnění polynomu dvěma.** Je-li polynom urovnán, řídíme se při odmocňování týmiž úvahami, jako při odmocňování čísel dekadických, na př.:

$$
\alpha)\quad
\begin{array}{l}
\sqrt{4a^2 - 12a + 9} = 2a - 3 \\
\underline{-4a^2} \\
\qquad\quad -12a + 9 \;:\; (4a - 3)\,(-3) \\
\qquad\quad -12a + 9 \\
\qquad\quad \underline{\;+ \qquad\; -\;} \\
\qquad\quad\;\; = \qquad =
\end{array}
$$

$$
\beta)\quad
\begin{array}{l}
\sqrt{9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x + 1} = 3x^2 - 2x + 1 \\
\underline{-9x^4} \\
\qquad\quad -12x^3 + 10x^2 \;: \qquad\qquad : (6x^2 - 2x)\,(-2x) \\
\qquad\quad \underline{\mp 12x^3 \pm 4x^2} \\
\qquad\qquad\qquad + 6x^2 - 4x + 1 \;:\; (6x^2 - 4x + 1)\; 1 \\
\qquad\qquad\qquad + 6x^2 - 4x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;- \qquad + \qquad -\;} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; = \qquad = \qquad =
\end{array}
$$

se zkouškou.

Cvičení: Jest odmocniti dvěma tyto výrazy:

1. $9a^2 + 12ab + 4b^2$. **2.** $1 - 2a + a^2$. **3.** $a^4 - 8a^2b^2 + 16b^4$.
4. $4a^4 + 4a^3 - 11a^2 - 6a + 9$.
5. $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4x^2y^3 + y^4$.
6. $16a^2 - 8ab + b^2 + 24ac - 6bc + 9c^2$.

7. Jest $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$? (zkoušku); možno dvojčlen obecný odmocniti?

8. Z jakých členů musí se skládati trinom, má-li býti čtvercem binomu?

9. Jest roznásobiti:

$a)$ $x^2 - 6x + 9$, $\quad b)$ $a^2 - 2a + 1$, $\quad c)$ $4a^2 - 20a + 25$,
$d)$ $9a^2 + 6ab + b^2$ $\quad e)$ $a^4 - 2a^2 + 1$.

*) Piš vždy $4\sqrt{9}$ a ne $\sqrt{9} \,.\, 4$ (proč?)

ČÁSŤ JEDENÁCTÁ.

Zlomky obecné.

a) Rozdělíme-li celek (1) na n stejných dílů, zove se díl ten **§ 108** n-tina a značí se $\frac{1}{n}$; díl ten možno vzíti opět za jednotku (lomenou) a vytvořovati z ní čísla lomená; tak jest $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=2\,.\,\frac{1}{n}$ aneb dle § 32. *d*) $=\frac{2}{n}$. Podobně $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{3}{n}$; $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots(a\,\text{krát})=\frac{a}{n}$.

Číslo $\frac{a}{n}$ zove se lomené či zlomek a značí a n-tých dílů z jednotky. $\frac{1}{n}$ jest lomená jednotka či zlomek kmenný; a jest čitatel, n jmenovatel; pojem zlomku připouští v čitateli i jmenovateli pouze čísla prostá.

b) Rozdělíme-li kladnou (zápornou) jednotku na n-stejných dílů, obdržíme kmenný zlomek $\frac{+1}{n}\left(\frac{-1}{n}\right)$, tak že $\frac{+a}{n}$ značí a kladných, $\frac{-a}{n}$ značí a záporných zlomků kmenných.

Uvážíme-li dále, že $a:(-n)=\frac{a}{-n}$, vidíme, že i jmenovatel může býti číslem vztažným. Zlomky vztažné dají se však převésti na zlomky prosté takto:

$$\frac{+2}{+3}=(+2):(+3)=+\frac{2}{3}\qquad \frac{+a}{+n}=+\frac{a}{n}$$
$$\frac{-2}{+3}=(-2):(+3)=-\frac{2}{3}\qquad \frac{-a}{+n}=-\frac{a}{n}$$
$$\frac{+2}{-3}=(+2):(-3)=-\frac{2}{3}\qquad \frac{+a}{-n}=-\frac{a}{n}$$
$$\frac{-2}{-3}=(-2):(-3)=+\frac{2}{3}\qquad \frac{-a}{-n}=+\frac{a}{n}$$

Ježto však dle § 49. může čitatel i jmenovatel býti zlomkem aneb číslem smíšeným, jest ve zlomku obecném $\frac{a}{n}$ jak a tak n **číslem libovolným.**

c) Chceme-li číslo smíšené označiti tvarem obecným, nutno psáti $a+\frac{b}{n}$; proč nelze „plus“ vypustiti?

Zda-li je zlomek $\frac{a}{b}$ ryzí, neb neryzí atd., lze poznati jen ve zvláštních případech. Určete, proč jest zlomek $\frac{a}{a+3}$ ryzí, $\frac{a+1}{a}$ neryzí, $\frac{na}{a}$ nevlastní?

109. **Rozklad výrazů v činitele.** *a*) V monomu jsou činitele patrné až na čísla zvláštní; třeba jen tato rozložiti, na př.: $6ab^2 \doteq 2.3.a.b^2$; pokud a, b není určeno číslem zvláštním, nutno je považovati za činitel kmenný.

b) Polynomy dovedeme roznásobiti jen v některých případech.

1) Mají-li všechny členy společný činitel (§ 95. *a*) $(am - bm + cm) = m(a - b + c)$, aneb $15x^3y - 5x^2y^2 = 5x^2y(3x - y)$; činitele $(a - b + c)$, $(3x - y)$ nelze více roznásobiti a proto jsou kmenné.

2) Trinom lze mimo to roznásobiti, jsou-li jeho 2 členy čtverce a třetí člen dvojnásobným součinem jejich základů (§ 107.)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Někdy nabude trinom té vlastnosti teprv, vytkneme-li společný činitel, na př.: $2a^2 + 12a + 18 = 2(a^2 + 6a + 3^2) = 2(a + 3)^2$.

3) Rozdíl čtverců dá se roznásobiti na součet a rozdíl základů; $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Jindy třeba teprv čtverce upraviti, aneb vytknouti společný činitel, na př.: $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$, aneb $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x + 2)(x - 2)$.

Cvičení: Jest rozložiti v činitele:

1. $18a^2bc$, $360x^2y$, $300a^2(a^2 + 3)^2$.

2. $5a - 15$, $12ax^2 + 15a^2x$, $a^2 + a$, $a^2 + ab$; další viz v § 92. př. 21. a v § 95. př. 7., 8.

3. viz § 107. př. 9. $9x^2 - 6x + 1$, $3a^2 + 12a + 12$, $2x^2 - 12xy + 18y^2$, $50 - 20x + 2x^2$, $4 + 16x + 16x^2$.

4. $1 - x^2$, $x^2 - 1$, $4a^2 - 3b$, $0{\cdot}16a^2 - 9b^2$, $4a^2 - 25b^2$, $4x^2 - 9y^2$, $x - 4x^3$, $4x^3 - 9^4x$, $a^2x - 4x^3$, $x^4 - y^2$, $x^4 - 1$, $16 - 9a^4$.

110. **Nejmenší společný násobek** (n) se hledá jako u čísel zvláštních. Dlužno upozorniti pouze na toto: Jako 3 jest dělitelno $+3$ i -3mi (neboť $3 : (+3) = 1$, $3 : (-3) = -1$), tak jest i $a - b$ dělitelno výrazem $b - a$; jestiť $(a - b) : (b - a) = -1$, ježto $a - b = (-1)(b - a)$. Nalezneme-li tudíž násobek pro $a - b$, jest v něm i $b - a$ obsaženo; na př.: $n(3a,\ a - 3,\ 3 - a,\ a^2) = ? = 3a^2(a - 3)$; $3 - a$ obsaženo jest v $n - 3a^2$ krát.

111. **Rozšiřování a zjednodušování zlomků.** *a*) Zlomky α) $\frac{1}{4a}$, $\frac{7c}{18a^2b}$, $\frac{5}{6b^2}$, jest uvésti na nejmenší společný jmenovatel; pódobně zlomky β) $\frac{2x}{3x - 9}$, $\frac{3x}{3 - x}$, $\frac{4}{3x}$.

α) $4a = 2^2 a$
$18a^2 b = 2 \,.\, 3^2 \,.\, a^2 \,.\, b$
$6b^2 = 2 \,.\, 3 \,.\, b^2$
$n = 2^2 \,.\, a \,.\, 3^2 \,.\, a \quad b \,.\, b$
$= 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, a^2 b^2$

$$\frac{1}{4a}\Big|\frac{3^2 ab^2}{3^2 ab^2} = \frac{9ab^2}{36a^2b^2}$$
$$\frac{7c}{18a^2b}\Big|\frac{2b}{2b} = \frac{14bc}{36a^2b^2}$$
$$\frac{5}{6b^2}\Big|\frac{2 \,.\, 3 \,.\, a^2}{2 \,.\, 3 \,.\, a^2} = \frac{30a^2}{36a^2b^2}$$

β) $3x - 9 = 3(x-3)$
$3 - x = -(x-3)$
$3x = 3x$
$n = 3(x-3)x$

$$\frac{2x}{3x-9}\Big|\frac{x}{x} = \frac{2x^2}{3x^2 - 9x}$$
$$\frac{3x}{3-x}\Big|\frac{(-3x)}{(-3x)} = \frac{-9x^2}{3x^2 - 9x}$$
$$\frac{4}{3x}\Big|\frac{x-3}{x-3} = \frac{4x-12}{3x^2-9x}$$

D o č i t a t e l e a j m e n o v a t e l e m o ž n o p ř i p s a t i t ý ž č i n i t e l.

b) Dle § 40. d) možno zlomky zjednodušiti tím, že s p o l e č n ý *činitel* č i t a t e l e a j m e n o v a t e l e p r o s t ě v y n e c h á m e. (Jaký jest to výkon početní?) Na př.:

$$\frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \frac{9a^2b}{6ab^3} = \frac{3a}{2b^2}, \quad \frac{3x-6}{3x} = \frac{3(x-2)}{3x} = \frac{x-2}{x},$$
$$\frac{a^2 - b^2}{3a + 3b} = \frac{(a+b)(a-b)}{3(a+b)} = \frac{a-b}{3};$$
$$\frac{1-y^2}{2y-2} = \frac{(1+y)(1-y)}{2(y-1)} = \frac{(1+y)(1-y)}{-2(1-y)} = -\frac{1+y}{2}.$$

Možno vypustiti ve zlomku $\frac{a+1}{a}$ z čitatele i jmenovatele č í s l o a? ve $\frac{a+3}{3}$ č í s l o 3? Jaký výkon početní by to byl? Je dovolen?

C v i č e n í A): Jest uvésti tyto zlomky na nejmenší společný jmenovatel:

1. $\frac{5a}{6}, \ \frac{3}{8a}, \ \frac{2a}{15}, \ \frac{4}{9a}.$ **2.** $\frac{y}{x}, \ \frac{z}{y}, \ \frac{x}{z}.$

3. $\frac{b}{2a}, \ \frac{2c}{9ab}, \ \frac{5c}{6a^2}, \ \frac{c}{4a^2b}.$ **4.** $\frac{1}{a}, \ \frac{3}{2a^2}, \ \frac{5}{4a^3}.$

5. $\frac{2x}{3a}, \ \frac{5}{9ax}, \ \frac{a-x}{3a+9x}.$ **6.** $\frac{3}{ab}, \ \frac{a-b}{ab+b^2}.$

7. $\frac{2}{1+x}, \ \frac{3}{1-x}, \ \frac{1+2x}{1-x^2}.$ **8.** $\frac{1}{2x-1}, \ \frac{1}{4x^2-1}, \ \frac{1}{x+2}, \ \frac{4-x}{x^2-4}.$

9. $\frac{2}{2x+6}, \ \frac{3}{3x+9}, \ \frac{x-3}{x^2+6x+9}.$ **10.** $\frac{1}{4x}, \ \frac{2-x}{2-2x}, \ \frac{x^2-4}{4-8x-4y^2}.$

B) Jest zjednodušiti tyto zlomky:

1. $\frac{468a^2b^2}{612a^3c}.$ **2.** $\frac{315a^2b^3c}{360a^3bc^3}.$ **3.** $\frac{726(x+2)}{10892(x+4)}.$

4. $\frac{4x(x^2-4)}{5xy(4x+8)}$. 5. $\frac{a-b}{b-a}$. 6. $\frac{b-ab}{3a-3}$.

7. $\frac{a^2-ab}{ab+a^2}$. 8. $\frac{xy-y^2}{xy-x^2}$. 9. $\frac{x^2-y^2}{4x^2-4xy}$.

10. $\frac{a^2b^2}{ab-b^2}$. 11. $\frac{9x^2-16}{6x-8}$. 12. $\frac{x^2+2xy+y^2}{2x+2y}$.

13. $\frac{4x^2-12xy+9y^2}{4x^2-9y^2}$ a možno-li i tyto:

14. $\frac{5a+3}{15a}$, $\frac{a^2b}{ab-2}$, $\frac{3xy}{x-y}$.

12. **Sčítání a odčítání zlomků obecných.**

a) $\frac{a}{b}+\frac{a-3}{b}=\frac{a+a-3}{b}=\frac{2a-3}{b}$;

$$\frac{a}{b}-\frac{a-3}{b}=\frac{a-(a-3)}{b}=\frac{a-a+3}{b}=\frac{3}{b};$$

$$a\pm\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{ac\pm b}{c};\quad \frac{a}{b}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

Vyslov, co v rovnicích těch obsaženo.

b) $\frac{4}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{4-2(x+1)+4(x-1)}{x^2-1}=\frac{2x-2}{x^2-1}$

$=\frac{2(x-1)}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{2}{x+1}$; $(x=3)$, aneb příklady složitější:

$$\frac{a^2-2a}{2a^2-2}-\frac{a-3}{4a-4}+\frac{5}{6a+6}\text{*)}=\frac{a^2-2a}{2(a^2-1)}\bigg|\frac{6}{2\,.\,3}-\frac{a-3}{4(a-1)}\bigg|\frac{(3a+3)}{(a+1)\,.\,3}+$$

$$\frac{5}{6(a+1)}\bigg|\frac{2a-2}{(a-1)\,2}=\frac{6a^2-12a-(3a^2-9a+3a-9)+10a-10}{12(a^2-1)}$$

$$=\frac{3a^2+4a-1}{12(a^2-1)};\quad (a=2).$$

Cvičení:

1. $\frac{3}{2}+\frac{m-3}{4}$. 2. $\frac{2}{3}-\frac{a+1}{6}$. 3. $\frac{a}{2}-\frac{a+b}{4}-\frac{a-b}{6}$.

4. $\frac{x}{3}-\frac{x+1}{6}+\frac{x-2}{9}$. 5. $\frac{3}{m}+\frac{5-m}{2m}$. 6. $\frac{a-5}{b}+\frac{3}{ab}$.

7. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$, $a-\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}-1$, $\frac{x}{y}-x$.

8. $2-\frac{2}{a+3}$, $[a+b]+\frac{b^2}{a-b}$, $\frac{a}{b+1}-a$, $\frac{a^2+x^2}{a-x}+[a-x]$.

---

*) Stranou: $n=2(a+1)(a-1)\,.\,2\,.\,3$

9. $a)\ \frac{a+2b}{2}+\frac{3a-b}{3}$, $b)\ \frac{ab+1}{a^2b}+\frac{2-b}{ab}+\frac{1}{b}$.

10. $a)\ \frac{2a-1}{3}+\frac{2-a}{5}-\frac{2a-3}{15}$, $b)\ \frac{x}{6}+\frac{7x-6}{3}-\frac{4x+1}{12}$,

$c)\ \frac{5x}{6}-\frac{2x-3}{3}-\frac{4x^2-1}{12}$, $x=-3$, $d)\ \frac{a}{b}-\frac{ab-2}{2b^2}-\frac{b-a}{4b}$,

$e)\ \frac{3x-5}{5x}-\frac{1-x}{x^2}-\frac{x+5}{10x}$, $x=3$.

11. $a)\ \frac{4}{3}-\frac{1}{a}-\frac{a-3}{a+3}$, $a=2$, $b)\ x-\frac{x-y}{2+y}$,

$c)\ [x+1]-\frac{2x}{x+1}$, $d)\ \frac{a}{2a-2b}-\frac{b}{2b-2a}$.

12. $a)\ \frac{1}{x+y}+\frac{2y}{x^2-y^2}$, $b)\ \frac{x+2}{3x+3}-\frac{x+1}{6}+\frac{1}{x+1}$, $x=2$.

13. $a)\ \frac{a^2+2}{a^2-1}-\frac{a-1}{3a+3}-\frac{1}{6}$, $a=2$,

$b)\ \frac{3x^2-4}{9x^2-4}+\frac{5}{3x+2}-\frac{x-2}{6x-4}$.

14. $a)\ 2a-\frac{2a-3}{a^2-1}-\frac{3}{a-1}$, $b)\ \frac{2a}{x+3}-\left(\frac{2}{3x}+\frac{2+a}{3x+9}\right)$.

15. $a)\ \frac{x+1}{2x^2-2}+\frac{x-2}{2x+2}+\frac{1-x}{6x-6}$,

$b)\ \frac{x^2+1}{x-1}+\frac{1-2x}{x^2-1}-\frac{3}{x^2-2x+1}$.

16. $\frac{a^2-2a}{a^2-8a+16}-\frac{2a}{3a-12}-\frac{1}{3}$.

Násobení zlomků obecných. § 113.

$a)\ \frac{a}{b}\cdot 3=\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}=\frac{3a}{b}$; $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$, $\frac{a}{b}\cdot b=a$,

$\frac{a}{bc}\cdot c=\frac{a}{b}$, $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$, $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\cdot b$, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Vyslovte poučky v rovnicích těch obsažené (některé jest čísti i zvratně).

$b)\ \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)\cdot\frac{3}{a}=\frac{3}{2}-\frac{b}{a}=\frac{3a-2b}{2a}$, aneb $=\frac{3a-2b}{2\,.\,3}\cdot\frac{3}{a}=\frac{3a-2b}{2a}$.

Cvičení:

1. $\frac{3a}{b}\cdot 2a$, $\frac{5x}{6y^2}\cdot 6y^2$, $\frac{a}{4x}\cdot 4x^2$.

2. $\frac{2a}{9c}\cdot 3c$, $\frac{2}{a+b}\,(a+b)$, $\frac{a+b}{2c}\cdot 4c$.

3. $\frac{2ab}{15c}(-5m)$, $\qquad (-a)\cdot\frac{2}{3}$, $\qquad 12xy\cdot\frac{1}{4x}$.

4. $\frac{8x^2}{9y}\cdot\frac{3y^3}{4x}$, $24ab\cdot\frac{1}{9a^2}\cdot\frac{1}{8b^2}$. 5. $\frac{63ax^3}{32b^3y}\cdot\frac{176by}{189a^2x}$, $\frac{5y^2}{6x}\cdot\frac{7x}{15z}\cdot\frac{9z}{14y^3}$.

6. $\frac{x^2-1}{3a+6}\cdot\frac{a^2-4}{2x-2}$, $\quad \frac{2x^2-8}{xy-y^2}\cdot\frac{xy^2}{12x-24}$, $\quad \frac{4-8a}{5a+5}\cdot\frac{a^2-1}{2a-1}$.

7. $\frac{9x^2+6x+1}{4a^2-36}\cdot\frac{a-3}{12x+4}$. $\qquad \frac{x^2-a^2}{(x-a)^2}\cdot\frac{bx+ab}{3x-3a}$.

8. $\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}$, $\qquad \left(x-\frac{x}{1-x}\right)\left(x-\frac{1+x}{2}\right)$.

9. *a)* $\left(\frac{x+y}{x+y}-1\right)\left(\frac{x-y}{x+y}+1\right)$, $\quad$ *b)* $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{a^2-1}\right)\left(\frac{1}{a}-1\right)$.

10. *a)* $\frac{1-x^2}{2x^2}\left(1+\frac{x}{1-x}\right)$, $\qquad$ *b)* $(a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$,

c) $\left(\frac{x}{3}+3\right)\left(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{3x}\right)$.

11. *a)* $\left(x-\frac{xy-1}{y-1}\right)\left(x-\frac{xy-1}{y-1}\right)$. $\quad$ *b)* $\left(\frac{2}{3z}-\frac{3x}{y}\right)\left(\frac{z}{2}-\frac{x}{3x}\right)$.

c) $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right)$.

12. V těchto rovnicích jest osamotiti x:

$$\frac{x}{4}=3, \qquad \frac{x}{a}=b, \qquad \frac{a}{x}=b.$$

§ 114. Dělení zlomků obecných.

a) $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}$, $\qquad \frac{ac}{b}:c=\frac{a}{b}$, $\qquad a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$,

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Vyslovte poučky v rovnicích těchto obsažené.

b) $\left(\frac{x^2}{6}+\frac{5x}{12}-1\right):\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{2}+2$,

$$\begin{array}{l}
\frac{x^2}{6}-\frac{x}{4}\,\Big|\,\frac{3}{3} \\
\underline{-\quad +\qquad} \\
\qquad\frac{2x}{3}-1 \\
\qquad\frac{2x}{3}-1 \\
\qquad\underline{-\quad +} \\
\qquad = \; =
\end{array}
\qquad \text{aneb} = \frac{2x^2+5x-12}{12}:\frac{2x-3}{6}=\text{atd.}$$

Cvičení: 1. $\frac{3a}{4b} : 5c$, $\quad \frac{4a^2}{b} : 2a$, $\quad \left(+\frac{12ax}{5b}\right) : (-8a)$.

2. $\left(-\frac{6x^3}{7y}\right) : (-9xy)$, $\quad -x : \frac{1}{x}$, $\quad \frac{a^2b}{6c} : \frac{2b^2}{3c^2} : \frac{5ac}{4b}$.

3. $a^3 : \frac{3a}{2} \cdot \left(\frac{3}{a} : \frac{a}{2}\right)$, $\quad \frac{2a}{3} : \frac{5}{6x} : \left(\frac{2ax}{5} : \frac{5}{x}\right)$.

4. $\frac{x^2 - y^2}{2y^2} : \frac{x+y}{y}$, $\quad \frac{a^2x - x}{ay + y} : \frac{a^2 - 2a + 1}{2x - ax}$.

5. $\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) : \frac{1+x}{1-x}$, $\quad \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : (x+y)$.

6. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) : \frac{1}{x^2 - xy + y^2}$, $\quad \frac{a^2 - b^2}{2ab} : \left(1 + \frac{b}{a}\right)$.

7. $\frac{a^2 - 4a + 3}{a - 3} : (a - 1)$, $\quad \frac{1}{1+x} : \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)$

8. $\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) : (x^2 - xy + y^2)$. 9. $\left(-\frac{5x}{6} + 2 - \frac{2}{3x}\right) : \left(-\frac{2x}{3}\right)$.

10. $\left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{xy} - \frac{4}{y^2}\right) : \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y}\right)$.

Složené zlomky obecné převádějí se dělením ve zlomky jednoduché, na př.: § 115

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc};\quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b};\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc};\quad \frac{a + \frac{b}{c}}{d} = \frac{ac + b}{cd};$$

$$\frac{a}{b + \frac{c}{d}} = \frac{ad}{bd + c};\quad \frac{a + \frac{b}{c}}{m + \frac{n}{p}} = \frac{ac + b}{mp + n} \cdot \frac{p}{c}.$$

Cvičení: 1. $\frac{a + \frac{1}{3}}{2}$, $\quad \frac{a+1}{a - \frac{1}{a}}$, $\quad \frac{\frac{2a}{3b}}{1\frac{1}{3}} = ?$

2. $a + \frac{1}{\frac{2}{a-1}}$, $\quad \frac{1 + \frac{a}{a+b}}{1 - \frac{a}{a+b}}$. 3. $\frac{1 + \frac{a}{c}}{c - \frac{a^2}{c}}$, $\quad \frac{2x + \frac{1}{3}}{\frac{x}{4} - x} + \frac{\frac{x}{3}}{9}$.

4. a) $\dfrac{\frac{2a}{3}+1}{a+\frac{a}{3}}+\dfrac{a}{12}$, $a=2$, b) $3:\left[\left(a+\dfrac{\frac{1}{4}}{3-a}\right):\dfrac{a+1}{2}\right]$.

5. a) $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{x}}-\dfrac{3x^2+x+1}{4x^2-1}$, b) $\dfrac{\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}}{x-\frac{1}{x}}$.

6. $\dfrac{y+\frac{y}{2}}{a-2}-\dfrac{y+1}{a^2-4}-\dfrac{y}{a-\frac{a}{3}}$.

§ 116. Mocnění a odmocnění zlomků dvěma.

a) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2}{b^2}$. Zlomek se zmocní, zmocníme-li čitatel i jmenovatel [a mocniny lomíme]*); a naopak: Společný mocnitel čitatele a jmenovatele lze vytknouti, na př.:

$$\frac{12^2}{8^2}=\left(\frac{12}{8}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

b) $(a+\frac{1}{3})^2=a^2+\dfrac{2a}{3}+\frac{1}{9}$, aneb $=\left(\dfrac{3a+1}{3}\right)^2=\dfrac{9a^2+6a+1}{9}$.

c) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$, ježto $(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$; $\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{0{\cdot}375}=0{\cdot}612\ldots$, $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}}=\dfrac{a}{b}$.

Zlomek se odmocní, odmocníme-li čitatel i jmenovatel; $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$; čteme-li zvratně, t. j. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$: Společnou odmocninu čitatele a jmenovatele lze vytknouti před zlomek, na př.: $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{8}{2}}=2$; $\sqrt{\dfrac{2a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$; $\sqrt{\dfrac{a^2}{3}}\Big|\dfrac{3}{3}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

$\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\Big|\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; tím odstraněna nedopočetná odmocnina ze jmenovatele (výhoda?)

Cvičení: Jest vykonati, co naznačeno:

1. $\left(\dfrac{1}{10}\right)^2$, $\left(\dfrac{1}{100}\right)^2$, $\left(\dfrac{1}{1000}\right)^2$, $\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2$, $\left(\dfrac{2a^2x}{b^3}\right)^2$.

2. $\left(-\dfrac{4a^2}{5b^3}\right)^2\cdot\dfrac{5b^2}{8a}$, $\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{6x}{a^2}\right)^2$.

---

*) Zlomek se zmocní, lomíme-li mocninu čitatele mocninou jmenovatele.

3. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2$, $a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 : \left(\frac{-b}{2a}\right)^2$.

4. $\left(\frac{a-2}{3}\right)^2$, $\left(3 + \frac{1}{a}\right)^2$, $\left(\frac{3}{10} + 0{\cdot}3a\right)^2$, $\left(\frac{5a - 0{\cdot}2}{0{\cdot}5 - 2a}\right)^2$.

5. *a*) $\left(a - \frac{2}{3a}\right)\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a}{3}\right)^2$, *b*) $5 - 4\left(a - \frac{1}{2}\right)^2$.

6. $\sqrt{\frac{1}{100}}$, $\sqrt{\frac{1}{10^6}}$, $\sqrt{\frac{1}{0{\cdot}25}}$.

7. $\sqrt{\frac{4}{5}}$ (3 místa), $\sqrt{\frac{37}{49}}$ (4 místa), $\sqrt{\frac{3}{0{\cdot}7}}$ (5 míst), $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (3 místa).

8. $\frac{12}{\sqrt{3}}$ (5 míst), $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (4 místa), $\sqrt{\frac{a^2}{4}}$, $\sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$.

9. $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$, $\sqrt{\frac{5ax^2}{2b}}$, $\frac{3a}{\sqrt{3}}$.

10. $\frac{a}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{\frac{a^3}{a-x}}$, $\sqrt{\frac{2(a-x)}{a^2}}$, $\sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}}$, $\sqrt{\frac{(a-3)^2}{2}}$.

11. $\frac{1}{a}\sqrt{a^2b\left(\frac{a}{b} - 1\right)} - b\sqrt{\frac{4a}{b^2} - \frac{4}{b}}$.

12. $(3\sqrt{2})^2$, $(3+\sqrt{2})^2$, $(a-\sqrt{3})^2$, $(2+\sqrt{a})^2$, $(a-\sqrt{b})^2$.

ČÁST DVANÁCTÁ.

Zmocňování a odmocňování třemi.

Zmocňování čísel dekadických třemi. *a*) Číslo zmocniti **§ 117.**
třemi, též krychliti, znamená položiti je třikrát co činitel.

$a^3 = a \,.\, a \,.\, a$, též $= a^2 \,.\, a$. Násobiti čtverec základem, jest tolik co krychliti. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 zovou se krátce krychle; čísla tato nutno si pamatovati, jakož i krychle dekadických jednotek (mocnilka místních hodnot).

b) $J^3 = J$, $D^3 = T$, $S^3 = M$, $T^3 = Tm \ldots d^3 = t$, $s^3 = m$, $t^3 = tm \ldots$ (vyznač čísly). Zmocníme-li řád třemi, ztrojnásobí se [jeho stupeň], na př.: setiny zkrychleny dají millioniny, $(10^n)^3 = 10^{3n}$.

c) $(9J)^3 = 729J$, $(8D)^3 = 512T$. $(7S)^3 = 343M \ldots$, $(2d)^3 = 8t$, $(3s)^3 = 27m$, $(4t)^3 = 64tm \ldots$ (vyznač čísly). Krychliti několik jednotek dekadických jest výkon dvojí: 1) krychliti jich počet, 2) násobiti řád třemi.

Cvičení: Jest určiti (rázem) krychle čísel:

1. 5, 4, 6, 10, 1, 9, 2, 8, 3, 7, $\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{2}$.

2. 10, 0·1, $\frac{1}{10}$, 100, 0·01, $\frac{1}{100}$ . . .
3. 30, 90, 0·2, 0·5, $\frac{3}{10}$, 400, 0·02, 0·06, $\frac{7}{100}$ . . .

§ 118. Krychlení čísel binomických.

$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Krychle binomu se rovná krychli členu prvého + 3násobnému součinu ze čtverce téhož členu a členu druhého + 3násobnému součinu ze členu prvého a čtverce členu druhého + krychli členu druhého.

Krychli binomu lze proměniti v čtyřčlen upravený dle klesajících mocnitelů členu prvého a stoupajících mocnitelů členu druhého. Všecky členy jsou rozměru třetího.

Přibude-li v základu člen jeden (b), přibude v krychli členů tré, $(3a^2b + 3ab^2 + b^3)$, t. zv. krychlový přírůstek.

Podobně lze krychliti i číslo, jež možno rozvésti na dva jednociferné sčítance, na př.:

$\alpha)$ $42^3 = (4D + 2)^3 = 4^3 D^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot D^2 + 3 \cdot 4 \cdot 2^2 D + 2^3$ *).

Uvažujíce, že každý následující člen jest o stupeň nižší, netřeba řády *vyznačovati*, nýbrž psáti sčítance v sloupec, každý o místo níže.

$\alpha)$ 42^3		$\beta)$ $7{\cdot}05^3$	
4^3	64.	7^3	343..
$3 \cdot 4^2 \cdot 2$	296.	$3 \cdot 7^2 \cdot 5$	735..
$3 \cdot 4 \cdot 2^2$	48.	$3 \cdot 7 \cdot 5^2$	525..
2^3	8	5^3	125
	74088		350·402625

Aneb $\beta)$ $7{\cdot}05^3 = (7 + 5s)^3 = 7^3 + 3 \cdot 7^2 \cdot 5 \cdot s + 3 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot s^2 + 5^3 \cdot s^3$; ježto sčítanec druhý ($5s$) jest o 2 stupně nižší, jest každý člen krychlového čtyřčlenu též o 2 stupně nižší, tak že, nevyznačujeme-li řády, nutno psáti v sloupci každý člen o 2 místa dále. U čísel desetinných nutno určiti nejnižší řád mocniny. Krychle čísla desetinného má třikrát více desetinných míst než základ.

Cvičení: Jest určiti krychle čísel:

1. 17, 25, 5·3, 0·64, 72, 81.
2. 370, 4600, 50·9, 20·04, 8010, 0·0607.
3. $\frac{7}{12}$, $5\frac{3}{8}$, $2\frac{8}{13}$, $14\frac{2}{7}$, $23\frac{1}{9}$.

§ 119. Krychlení čísel víceciferných. Je-li krychliti číslo 427 dle § 118., rozvedeme je na sčítance $42D + 7$. I bude:

$427^3 = (42D + 7)^3 = 42^3 D^3 + 3 \cdot 42^2 \cdot 7 D^2 + 3 \cdot 42 \cdot 7^2 D + 7^3$

aneb ve sloupci $\alpha)$

*) Z čeho se skládá zde krychlový přírůstek?

$$\alpha)\quad \begin{array}{rr} \multicolumn{1}{c}{427^3} & \\ \hline 42^3 & 74088. \\ 3 \,.\, 42^2 \,.\, 7 & 37044. \\ 3 \,.\, 42 \,.\, 7^2 & 6174. \\ 7^3 & 343 \\ \hline & 77854483 \end{array}
\qquad\qquad
\beta)\quad \begin{array}{rlr} \multicolumn{1}{c}{427^3} & & \\ \hline 4^3 & \multirow{4}{*}{$\left.\right\} 42^3$} & 64. \\ 3 \,.\, 4^2 \,.\, 2 & & 96. \\ 3 \,.\, 4 \,.\, 2^2 & & 48. \\ 2^3 & & 8. \\ 3 \,.\, 42^2 \,.\, 7 & & 37044. \\ 3 \,.\, 42 \,.\, 7^2 & & 6174. \\ 7^3 & & 343 \\ \hline & & 77854483 \end{array}$$

při čemž arciť třeba 42^3 počítati dle § 118. stranou. Kterak možno v jednotě počítati, naznačeno ve vzorci β). Podobně lze krychliti čísla víceciferná.

Krychle čísel neúplných, jakož i zkrácených, počítá se z téže příčiny jako čtverec zkráceným násobením.

Cvičení: Jest vypočítati krychle čísel:

1. 125, 0·214, 3·61, 538, 6325.
2. 437, 0·437, 4·37, 43·7.
3. 4320, 6·037, 72900, 84·03 2·715.
4. $\frac{213}{305}$, $7\frac{11}{27}$, $43\frac{3}{5}$, 3·412 . ., 83·057 . ., $0·\dot{3}5\dot{2}$ na 5 deset. míst.
5. Kolik desetinných míst má krychle desetin, setin, tisícin . . .?
6. Jest zmocniti 27 šesti a) dle vzorce $(a^2)^3 = a^6$, b) dle vzorce $(a^3)^2 = a^6$.

Krychlení početních výrazů. **§ 120.**

a) $(-a)^3 = -a^3$; $(ab)^3 = ab \,.\, ab \,.\, ab = a^3b^3$; $a^3b^3 = (ab)^3$; $(a^4)^3 = a^4 . a^4 . a^4 = a^{12}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$; $\frac{14^3}{21^3} = \left(\frac{14}{21}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$; vyslovte poučky v rovnicích těch obsažené.

b) $(a-b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3.$$

Kolik jest zde krychlových přírůstků a jak jsou vytvořeny?

Cvičení: Jest krychliti tyto výrazy:

1. $5ab$, $\quad x^2y^3$, $\quad \frac{a}{2}$, $\quad -0·2 \,.\, a$, $\quad \frac{2x^2y^3}{3}$.
2. $x + 2y$, $\quad 2a - 3b$, $\quad 0·2a - 0·3b$, $\quad 0·3x + \frac{2}{3}$.
3. $a - b + c$. $\quad 3x^2 + 2x - 1$.
4. Jest vypočítati: $\frac{72^3}{8^3}$, $\frac{24^3}{28^3}$.

Odmocňování třemi. Odmocnina jednociferná. a) Odmocniti 64 třemi znamená nalézti číslo, jež třemi zmocněno rovná se 64; výkon **§ 121.**

ten značíme znamením $\sqrt[3]{}$; tedy $\sqrt[3]{64} = 4$, ježto $4^3 = 64$; 4 jest třetí odmocnina čísla 64 a to vypočtená, kdežto $\sqrt[3]{64}$ jest třetí odmocnina 64 už svým tvarem, tedy naznačená.

Které číslo jest odmocněnec, které odmocnitel? Jaký výkon značí rovnice $x^3 = 64$?

b) Patrno, že odmocniti třemi lze pouze krychle, na př. 1, 8, 27...; avšak též krychle řádů, na př.: $\sqrt[3]{T} = D$, ježto $D^3 = T$, $\sqrt[3]{t} = d$, ježto $d^3 = t$ atd.; $\sqrt[3]{D} = ?$ $\sqrt[3]{S} = ?$

Odmocniti třemi lze jen jednotky, tisíce, milliony..., tisíciny, millioniny..., vůbec řády trojnásobkové.

c) Dle toho jest $\sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{8T} = 2D = 20$, ježto $20^3 = 8000$,

$$\sqrt[3]{0{\cdot}008} = \sqrt[3]{8t} = 2d = 0{\cdot}2,\ \text{ježto}\ 0{\cdot}2^3 = 0{\cdot}008.$$

Je-li počet jednotek trojnásobkového řádu krychlí, možno číslo rázem odmocniti (úplně).

d) Je-li $\sqrt[3]{10}$ též číslem, jest > 2, ježto $2^3 = 8 < 10$ a < 3, ježto $3^3 = 27 > 10$. I jest $3 > \sqrt[3]{10} > 2$, t. j. $\sqrt[3]{10}$ nemůže býti číslem celým, nýbrž $\sqrt[3]{10} = 2{\cdot}\ldots$, čímž určen aspoň nejvyšší řád odmocniny. Podobně jest $\sqrt[3]{800} > 9$ a < 10, tudíž $\sqrt[3]{800} = 9{\cdot}\ldots$; tak i $\sqrt[3]{0{\cdot}08} = 0{\cdot}4\ldots$ (proč?). ***Částečně*** lze třemi odmocniti číslo každé, ***úplně*** jen krychli.

Cvičení: Jest odmocniti třemi:

1. 1, 729, 8, 512, 27, 343, 64, 216, 125, 1000. (Odmocniny jest si zapamatovati.)

2. $\frac{1}{8}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{27}{64}$, 5^3, $0{\cdot}2^3$, 40^3.

3. T, t, M, Tm, tm ......

4. 27 000, 0·008, 0·064, 0·729, 216 000 000, 0·000 001, 0·000 008, 0·000 343, 27 000 000 000 ....

5. Jest vypočítati nejvyšší jednotky třetí odmocniny čísel: 8, 80, 800, 8000, 80000 ...., 0·008, 0·08, 0·8, 0·000 008, 0·000 08, 0·000 8 ....

6. 3, 8, 12, 24, 27, 37, 56, 64, 80, 100, 125, 200, 216, 270, 343, 480, 512, 600, 640, 720, 800, 920, 1000.

7. 8·000, 2700, 6400, 12500, 21600, 27000, 51200, 64000, 72900, 12500, 8 000 000, 64 000 000.

8. 0·027, 0·064, 0·216, 0·27, 0·512, 0·64, 0·720, 0·000027, 0·000512, 0·00063, 0·00125, 0·0729.

§ 122. **Odmocnina dvou- a víceciferná.** První částečnou odmocninu (nejvyšší jednotky) lze dle § 121. rázem nalézti a to z počtu nejvyššího trojnásobkového řádu. — Aneb rozdělíme-li číslo na skupiny trojnásobkových řádů, — z nejvyšší trojskupiny, na př.:

$$
\alpha)\ \begin{array}{lll}
\sqrt[3]{74|088} = 42 & & \\
64 & & \\
\hline
100_{\llcorner}88 & : 48 & \\
\ 96\,. & \ 48\,.\,2 & \\
\ \ 48\,. & 3\,.\,4\,.\,2^2 & \\
\ \ \ \ 8 & \ \ 2^3 & \\
\hline
= \ \ = & &
\end{array}
\qquad
\beta)\ \begin{array}{llll}
\sqrt[3]{20570{\cdot}824} = 27{\cdot}4 & & & \\
8 & & & \\
\hline
125_{\llcorner}70 & : 12 & & \\
\ 84\,. & : 12\,.\,7 & & \\
\ 294\,. & 3\,.\,2\,.\,7^2 & & \\
\ \ 343 & \ \ 7^3 & 27^2 & \\
\hline
\ 8878_{\llcorner}24 : 2187 & & 2^2 & 4\,.\,. \\
\ 8748\,. & 2187\,.\,4 & 47\,.\,7 & 329 \\
\ \ 1296\,. & 3\,.\,27\,.\,4^2 & & 729 \\
\ \ \ \ 64 & \ \ 4^3 & 81 & \\
\hline
= \ = \ = & & 486 &
\end{array}
$$

$$\sqrt[3]{74_{000}} = 4_0{\cdot} \ldots$$

Druhou část odmocniny nalezneme, uvažujíce, že, přibude-li do základu ($4\,D$), člen nový ($x\,J$), přibudou do krychle členy tři: $3\,.\,4^2\,.\,x\,.\,D^2 + 3\,.\,4\,.\,x^2\,D + x^3$ (= krychlový přírůstek); z toho patrno, že neznámé jednotky jest hledati v další trojskupině (S, D, J); zanedbáme-li D a J, máme přibližnou rovnici $100_{\llcorner}88 \doteq 3{\cdot}4^2\,.\,x$, z níž plyne $x \doteq 100 : 48 \doteq 2$; zda-li jest **2** pravou další odmocninou, přesvědčíme se vývinem krychlového přírůstku $3\,.\,4^2\,.\,2D^2 + 3\,.\,4\,.\,2^2\,.\,D + 2^3$. Není-li zbytku, jest 42 úplnou třetí odmocninou.

β) Je-li zbytek jako v β) = 887, soudíme, že odmocnina má v sobě i desetiny, jež dle krychlového přírůstku $3\,.\,27^2\,.\,yd + 3\,.\,27\,.\,y^2d^2 + y^3d^3$ jest hledati v další trojskupině (d, s, t); zanedbáme-li dva nejnižší řády, máme přibližnou rovnici $8878_{\llcorner}24 \doteq 3\,.\,27^2\,.\,y$, z níž plyne, že $y \doteq 8878 : 2187 \doteq 4$, o čemž se přesvědčíme, vyvinuvše krychlový přírůstek $3\,.\,27^2\,.\,4d + 3\,.\,27\,.\,4^2d^2 + 4^3d^3$; zůstane-li opět zbytek, proměníme jej v jednotky další trojskupiny a postupujeme podobně dále. Jakmile počneme připisovati trojskupiny 000, jest odmocnina nedopočetná (proč?).

Podobně bychom nalezli nejvyšší dvojskupinu jakož i další místa třetí odmocniny jakéhokoliv čísla.

Cvičení: **1.** Jest odmocniti třemi krychli čísel: *a*) 24, *b*) 5·8, *c*) 0·32, *d*) 470, *e*) 8·07, *f*) 6280.

2. Jest odmocniti třemi: *a*) 21952, *b*) 0·042875, *c*) 185·193, *d*) 8 489 664, *e*) 34·645 976, *f*) 138 991 832, *g*) 0·519 718 464, *h*) $6^3 + 36^3 + 48^3$, *i*) $7^3 + 42^3 + 56^3$.

3. Jest vypočítati 3 nejvyšší místa třetí odmocniny čísel: *a*) 2, *b*) 80, 800, 80 000, 0·08, 0·000 8, 0·000 08, *c*) 3·7, *d*) 0·32, *e*) 0·5247, *f*) 24·3542, *g*) $2{\cdot}\dot{4}\dot{7}$, *h*) $0{\cdot}3\dot{5}\dot{4}$, *i*) $\frac{5}{8}$, *k*) $3\frac{2}{5}$.

4. Jest vypočítati $\sqrt[6]{262144}$ dle vzoru $\sqrt[6]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}$.

§ 123. Zkrácené počítání třetí odmocniny.

α) $\sqrt[3]{14435} = 24{\cdot}348..$

	8	
	6435	: 12
	48.	$3.2^2.4$
	96.	$3.2\,.4^2$
	64	4^3
	611000	: 1728
	5184.	$3.24^2.3$
	648.	$3.24\,.3^2$
	27	3^3
860	93000	: 177147
708	588.	$3.243^2.4$
1	1664.	$3.243\,.4^2$
	64	4^3
151	17496000	: 17773068
142	184544.	$3.2434^2.8$
	467328.	$3.2434\,.8^2$
	512	8^3
8	94367808	: 17774...

24^2	
2^2	4..
44.4	176
$24^2 =$	576..
483.3	1449
$243^2 =$	59049..
4864.4	19456
$2434^2 =$	5924356

β) $\sqrt{14435} = 24{\cdot}3|48(6)..$

6435	: 12
48.	$3.2^2.4$
96.	$3.2\,.4^2$
64	4^3
611000	: 1728
5184.	$3.24^2.3$
648.	$3\;24\,.3^2$
27	3^3

$$\overset{D}{860_{\llcorner}93} : \overset{T}{1_{\llcorner}7_{\llcorner}7\,147} = \overset{s}{48(6)}$$

153
11
1

Pozorujeme-li dělitele, jimiž posloupně odmocninu vyhledáváme, shledáme, že druhý dělitel shoduje se přibližně s následujícími v prvých dvou místech, třetí ve třech, čtvrtý ve čtyřech atd. Z toho patrno, že podržíme-li z třetího dělitele tři nejvyšší místa, (ze čtvrtého čtyři), a dělíme jím zkráceně, obdržíme táž čísla, jako dalším odmocňováním; místo poslední jest arciť nespolehlivé a to tím nespolehlivější než u druhé odmocniny, ježto zde nelze zkrácený dělitel tak pohodlně krychlovým přírůstkem doplniti v místě čtvrtém a chyba z nemožné opravy nedá se tudíž korrigovati. Z pravidla bývá poslední místo odmocniny příliš značné.

V y h l e d á m e - l i *n* m í s t o b y č e j n ý m o d m o c n ě n í m, m o ž n o z k r á c e n ý m d ě l e n í m v y h l e d a t i d a l š í (*n* — 1) m í s t o. Místo 2*n*-té hodí se nejvýš k opravě.

O číslech neúplných platí, co řečeno bylo při odmocňování dvěma.

Cvičení: Jest vypočítati třetí odmocninu čísel:

1. *a*) 6 (7 míst). *b*) 73 (5 míst), *c*) 5684 (4 místa).
2. *a*) 0·06452 (5 dec.), *b*) 3521 (3 dec.), *c*) $47\dot{8}$ (3 dec.), *d*) $\frac{45}{37}$ (4 dec.).
3. Co nejpřesněji: *a*) 27·325674.., *b*) 0·124846.., *c*) 75421·64..., *d*) 0.063278 . . .

Třetí odmocnina početních výrazů. (Viz § 106.) **§ 124.**

a) $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[3]{(2a)^3} = 2a$, $\sqrt[3]{(a+b)^3} = a + b$, čti zvratně, slova viz v § 106.

b) $\sqrt[3]{a^3b^3} = a.b$; $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\,.\,\sqrt[3]{y}$; $\sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$;
$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{4.8} = 2\sqrt[3]{4}$.

c) $\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{xy}$; $\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$;

d) $a\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{a^3}\,.\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2a^3}$.

e) $\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} = a$ (čti zvratně).

f) $(\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}$; $(\sqrt{2\sqrt[3]{2}})^3 = \sqrt{2^3.2} = 4$.

g) α) $\dfrac{x = 2}{x^3 = 8}$ β) $\dfrac{x^3 = 125}{x = 5}$.

h) Ježto $(x^2)^3 = (x^3)^2 = x^6 =$ na př. 64, možno psáti tři rovnice

$(x^2)^3 = 64$	dle *g*) β)	$x^2 = \sqrt[3]{64}$	$x = \sqrt{\sqrt[3]{64}}$	z čehož plyne:
$(x^3)^2 = 64$	a dle §	$x^3 = \sqrt{64}$	$x = \sqrt[3]{\sqrt{64}}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\sqrt{64}}$
$x^6 = 64$	106. *g*) β)	. . . .	$x = \sqrt[6]{64}$	$= \sqrt[6]{64}$

Číslo se odmocní šesti, odmocníme-li je postupně třemi a dvěma; pořádek jest libovolný. (Obrať!)

i) Slova k následujícímu (viz v § 116.)

$$\sqrt[3]{\frac{5a^3}{8}} = \frac{a}{2}\sqrt[3]{5};\quad \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}};\quad \frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{108}{4}} = \sqrt[3]{27} = 3;$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\Big|\frac{4}{2.2}} = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4};\qquad \frac{a}{\sqrt[3]{2}} = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}\Big|\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}\Big|\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Cvičení: 1. Jest zjednodušiti výrazy:

a) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}$, $5\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a}$, $n\sqrt[3]{a} - 5\sqrt[3]{a}$,

b) $\sqrt[3]{27a^3}$, $\sqrt[3]{8\,.\,343}$, $\sqrt[3]{8a^6}$, $\sqrt[3]{a^3x^6z^{12}}$.

2. Jest dáti tvar třetí odmocniny číslům: 1, 10, 2, 5, a, $4a$, $a+2$.

3. Jest částečně odmocniti:

$\sqrt[3]{64b^2}$, $\sqrt[3]{7b^3}$, $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{a^2b^3}$, $\sqrt[3]{8a} + \sqrt[3]{27a}$,
$\sqrt[3]{125x^2} - \sqrt[3]{64x^2}$, $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135}$.

4. Jest uvésti na tvar jediné odmocniny:

$\sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5a}\,.\,\sqrt[3]{5a}\,.\,\sqrt[3]{5a}$, $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$,

$$a\sqrt[3]{\frac{5}{a^2}},\quad 3\sqrt[3]{\frac{5}{108}},\quad \frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}},\quad \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a}},\quad \frac{\sqrt[3]{2a^5}}{\sqrt[3]{16a^2}}.$$

5. Jest roznásobiti čísla a, 2 v třetí odmocniny a zjednodušiti tvary:

$$a : \sqrt[3]{a},\quad a : \sqrt[3]{a^2},\quad 2 : \sqrt[3]{4},\quad (5\sqrt[3]{a} + a) : (5 + \sqrt[3]{a^2}),$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a}},\quad \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}},\quad \frac{2x}{\sqrt[3]{2}},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

6. Jest vykonati, co naznačeno:

$$(3 + \sqrt[3]{2})\,(3 - \sqrt[3]{2}),\qquad (2 + \sqrt[3]{5})\,(3 - \sqrt[3]{25}).$$

7. Jest isolovati x v rovnicích: $x^3 = 343$, $x^3 = 2^3 + 12^3 + 16^3$,

$$2x^3 = 128,\quad \frac{x^3}{3} = 9,\quad \frac{4\pi x^3}{3} = k\quad \left(\frac{x}{2}\right)^3 = 125.$$

§ 125. **Odmocnění polynomu třemi**, je-li upraven, děje se podobně, jako odmocnění čísel dekadických, na př.:

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{(64x^3 - 240x^2 + 300x - 125)} = 4x - 5 \\
-\,64x^3 \\
\hline
\quad -\,240x^2 + 300x - 125 \quad 48x^2 \,.\, (-5) + 3 \,.\, 4x \,.\, 25 - 5^3 \\
\quad -\,240x^2 + 300x - 125 \\
\quad \;\; + \qquad\quad - \qquad\quad + \\
\hline
\qquad\qquad =
\end{array}$$

Cvičení: Jest odmocniti třemi tyto mnohočleny:

1. $8 - 72x + 216x^2 - 216x^3$.
2. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$.
3. $a^6 - 27a^4 + 2187a^2 - 729$.
4. $8x^6 - 36x^5 + 102x^4 - 171x^3 + 204x^2 - 144x + 64$.

ČÁST TŘINÁCTÁ.

Rovnice.

§ 126. Dva početní výrazy, znamením rovnosti spojené, tvoří rovnici. Početní výrazy na roveň položené zovou se strany rovnice; na př.:

$$2a + 3a = 5a,\quad 2x - 3 = 5,\quad 3 + 4 = 4 + 3.$$

Kolikačlenné jsou strany těchto rovnic? $5 = 3$ jest rovnice sporná, ježto $5 > 3$.

Rovnice sporné mají pouze tvar rovnic, avšak strany jejich jsou nerovné. Spor ten nebývá vždy patrný, na př.: $(3x + 1) : (2x - 3) = 3 : 2$; spor vynikne, přesvědčíme-li se, zda-li součin členů vnitřních rovná se součinu členů vnějších.

Strany rovnic, v nichž se nalézají pouze čísla zvláštní, mohou se lišiti toliko svým tvarem, na př.: $3 \,.\, 4 = 12$, $3 \,.\, 4 = 4 \,.\, 3$, $4^2 = 4 \,.\, 4$;

i užívá se jich k naznačování rovnosti dvou početních výkonů. Tak možno poučky početní čísel obecných vyznačiti též rovnicemi, na př.: $abc = cba$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

Rovnosť v těchto rovnicích se neporuší, ať dosadíme za obecné číslo kterékoliv zvláštní. I říkáme, že rovnicím těm vyhoví každé číslo zvláštní; na př.: rovnici poslední vyhoví

$$x = 0, 1, 2 \ldots -1, -2 \ldots \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3} \ldots$$

Rovnice takové zovou se identické*). Rovnicím sporným nevyhoví žádné číslo zvláštní: na př.: $(x+3)(x-3) = x^2 + 9$.

Rovnice určovací. *a*) Do rovnice $x + 2 = 5$ možno za obecné číslo (x) dosaditi toliko jedinou hodnotu (3), nemá-li rovnosť býti porušena. I pravíme, že rovnici té vyhovuje jediné číslo a to zoveme kořen rovnice. Podobně rovnici $x^2 = 4$ vyhovují toliko dvě hodnoty, a to $x = +2$ a $x = -2$; i pravíme, že rovnice $x^2 = 4$ má dva kořeny. **§ 127.**

Rovnicemi těmi jest tudíž obecné číslo (x) určeno a to buď jednoznačně ($x + 2 = 5$), neb dvou- ($x^2 = 4$) a víceznačně; proto zoveme rovnice ty určovací, aneb zkrátka rovnice. Další nauka o rovnicích bude se týkati toliko rovnic určovacích.

Možno-li za obecné číslo do rovnice dosaditi toliko číslo určité, jest rovnice určovací, možno-li však dosaditi čísla libovolná, jest rovnice identickou.

b) Obecné číslo, jež rovnicí má býti určeno, zove se neznámá a značí se z pravidla posledními písmenami abecedy $x\ y\ z\ x\ u\ v$. Vypočtená hodnota neznámé zove se kořen rovnice. Neznámou vypočítati jest rovnici rozřešiti**). Má-li rovnice mimo neznámé ještě více čísel obecných, jež určeny býti nemají, označujeme tato čísla předními písmenami abecedy, na př.: $a + x = b$. Rovnice mající mimo neznámé ještě jiná čísla obecná, zovou se rovnice obecné (litteralní), proti rovnicím numerickým, jež vedle neznámé mají toliko čísla zvláštní; na př.: $3x = 12$. Stává se však často, že v rovnici obecné není neznámá vyznačena a že kterákoliv obecná veličina za neznámou považována býti může. I jest pak určiti „dle které veličiny" rovnice rozřešena býti má; na př.: značí-li a délku, b výšku obdélníka a p plochu, jest $p = a \, . \, b$; v rovnici té může býti kterákoliv veličina neznámou; i možno ji rozřešiti na př. dle a.

c) Dle počtu neznámých rozeznáváme rovnice o 1, 2, 3 a více neznámých; na př.: $3x = 12 - x$ jest rovnice o 1 neznámé, $2x + 3y = 9$

---

*) Stejniny.

**) Slovo „Algebra", z arabštiny pochodící, značilo původně řešení rovnic; přikládá se však nyní nauce o číslech obecných vůbec.

jest rovnice o dvou neznámých, $x + 2y = 8 - 3z$ jest rovnice o třech neznámých.

Rovnice tyto upravujeme, t. j. dáváme jim tak zv. normální tvar: $ax = b$; $ax + by = c$; $ax + by + cz = d$; při němž členy neznámé (t. j. členy, v nichž se vyskytuje neznámá) jsou na straně levé a člen prostý (člen neznámé prostý) na straně pravé.

Rozměr členů rovnicových čítá se toliko dle rozměru neznámých; tak jest člen ax rozměru 1ho, axy, by^2 rozměru 2ho. Dle rozměru členů rovnice upravené rozeznáváme rovnice stupně 1ho, 2ho, 3ho. Tak jest $ax + by = 0$ rovnice stupně 1ho, $ax^2 + bx = c$, $axy = b$ stupně 2ho, $ax^3 = b$ stupně 3ho.

Z rovnic stupně 2ho a 3ho všímati si budeme toliko rovnic tvaru $ax^2 = b$, $ax^3 = b$.

Rovnice o 1 neznámé.

§ 128. **Přetvořování (transformace) rovnic.** Rovnice 1) $x + 2 = 5$, 2) $x = 3$, 3) $x - 2 = 1$, 4) $4x = 12$ mají všecky jeden a týž kořen, určují tudíž touž neznámou a proto možno je považovati za různé tvary rovnice jediné, zkrátka za jedinou rovnici. Jest tedy dovoleno, dáti rovnici jiný tvar, t. j. přetvořiti ji, pokud se kořen její nemění.

Rovnice přetvořujeme (upravujeme) proto, abychom ji snáze rozřešili. Při tom jest třeba míti zření k tomu, aby 1) rovnosť se neporušila a 2) kořen rovnice se nezměnil.

Dovolené změny rovnic jsou tyto:

a) K oběma stranám rovnice lze ***přičísti*** totéž číslo, na př.

$$\begin{array}{rcl} x - a &=& b - a \\ +a &=& +a \\ \hline x &=& b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x - a &=& b \\ +a &=& +a \\ \hline x &=& b + a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2x &=& a - x \\ +x &=& +x \\ \hline 3x &=& a \end{array}$$

b) Od obou stran rovnice lze ***odečísti*** totéž číslo, na př.

$$\begin{array}{rcl} x + a &=& b + a \\ -a &=& -a \\ \hline x &=& b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x + a &=& b \\ -a &=& -a \\ \hline x &=& b - a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3x &=& a + x \\ -x &=& -x \\ \hline 2x &=& a \end{array}$$

Z *a*) a *b*) plyne: 1) Mají-li obě strany rovnice týž člen*), možno jej prostě vynechati. 2) Člen rovnice možno s opačným znamením převésti na stranu druhou.

c) Obě strany rovnice lze násobiti týmž číslem určitým. Vyznačovati změnu tu budeme tím, že činitel napíšeme vedle strany rovnice a oddělíme jej přímkou.

---

*) Ke každému členu přísluší znamení vztahu!

$$a.\left|\frac{x}{a}+3=b\right|.a;\quad 6.\left|\frac{x}{2}+\frac{1}{6}=\frac{x}{3}-4\right|.6;\quad -1.\left|-x=-a+3\right|-1$$

$$x+3a=ab \qquad 3x+1=2x-24 \qquad x=a-3$$

Výkonu toho užívá se, aby rovnice zbavena byla zlomků. Je-li zlomků více, násobíme nejmenším společným jmenovatelem. Často se zbavují jen členy neznámé svých jmenovatelů. V rovnici možno znamení všech členů proměniti v opačná. Jmenovatel členu jednoho lze převésti jako činitel do všech členů ostatních.

d) Obě strany rovnice lze děliti týmž číslem (nulla a výraz, v němž jest neznámá, jest vyloučen*).

$$\frac{1}{a}\left|ax-3=b\right|\frac{1}{a};\quad \tfrac{1}{3}\left|3x=15\right|\tfrac{1}{3};\quad \tfrac{1}{2}\left|2(x+3)=8\right|\tfrac{1}{2}$$

$$x-\frac{3}{a}=\frac{b}{a} \qquad x=5 \qquad x+3=4$$

Činitel členu neznámého lze převésti do jmenovatele všech ostatních členů. Společný činitel všech členů možno prostě vynechati. (Zjednodušení.)

e) Obě strany rovnice lze zmocniti týmž číslem; na př.:

$$\sqrt{x}=a-3 \qquad \sqrt{x^2-16}=3 \qquad \sqrt[3]{y}=a$$

$$x=(a-3)^3 \qquad x^2-16=9 \qquad y=a^3$$

f) Obě strany rovnice možno týmž číslem odmocniti; na př.:

$$x^2=25 \qquad x^2=a \qquad x^3=b$$

$$x=\pm 5 \qquad x=\pm\sqrt{a} \qquad x=\sqrt[3]{b}.$$

Řešení rovnic. Převedeme-li členy neznámé na stranu jednu a známé na druhou, možno dáti rovnici sloučením členů stejnojmenných tvar normální $ax=b$, z něhož dle *d*) plyne $x=\frac{b}{a}$, a tím rovnice rozřešena. Dáme-li tedy rovnici tvar $x=c$, rozřešili jsme ji. Zkoušku vykonáme tím, že dosadíme kořen c za x do původní rovnice; vyhoví-li rovnici, byl kořen správně nalezen. § 129.

Aby rovnici bylo možno upraviti, t. j. uvésti ji na normální tvar $ax=b$, bývá nutno:

1) odstraniti z rovnice zlomky (proč?)

2) uvolniti členy neznámé, jsou-li v závorkách, (jiné závorky odstraňovati třeba není),

*) $3.0=4.0$; děleno nullou dá $3=4$? Jest $0:0=1$? Výraz, v němž jest neznámá, může se též $=0$ a proto není dovoleno výrazem takovým rovnici děliti, na př.: $4x-4=5x-5$.; $4(x-1)=5(x-1)$ a dělíme-li binomem $x-1$, jest $4=5$? Chyba je v tom, že $x-1=0$, neboť rovnice daná vyžaduje, aby $x=1$.

3) členy neznámé převésti na jednu a známé na druhou stranu,
4) sloučiti.

Někdy odpadne některá z těchto změn, jindy je třeba sled těchto změn přeměniti, aby rovnice byla upravena co nejrychleji. Nejlepším rádcem jest tu cvik.

Někdy se stává, že správným řešením obdržíme na konec rovnici spornou; viz př. z § 126. $(3x+1):2x-3=3:2$; z toho $(2x-3)\,3=(3x+1)\,2$, t. j. $6x-9=6x+2$, čili $-9=2$. Spor je v tom, že v rovnici se žádá, aby trojnásobek čísla zvětšený o 1 měl se ku dvojnásobku čísla zmenšenému o 3 jako $3:2$, čili jako trojnásobek ($3x$) ku dvojnásobku ($2x$), což jest nemožno.

Kdybychom opravili pravou stranu, na př. takto:

$$(3x+1):(2x-3)=5:2, \quad \text{mizí spor.}$$

Ve cvičeních bude každá rovnice sporná označena znamením † a žáku jest určiti, co jest v rovnici sporno a kterak by spor se mohl odstraniti. Bylo-li chybně počítáno, může arciť též na konec se objeviti rovnice sporná.

a) Převádění členů. Na př.:

$9-4x=3-x$	Aneb:	$ax-b=cx-d$
$x-4x=3-9$	$9-4x=3-x$	$ax-cx=b-d$
$-3x=-6$	$9-3=4x-x$	$x\,(a-c)=b-d$
$x=2$	$6=3x$	$x=\dfrac{b-d}{a-c}$.
Zkouška: $9-8=?\,3-2$	$2=x$	
$1=1$		

Cvičení: **1.** $2x+6=22$. **2.** $17-3y=5$.
3. $27=4z+3$. **4.** $13-3u=6+4u$.
5. $5v-3=3v+13$.
6. $2x+8-5x-7-6=-7x+4+2x$.
7. $138-13y+35-17y=155-3y-27$.
8. $1{\cdot}8x-2{\cdot}6-1{\cdot}2x=0{\cdot}4x-1{\cdot}4$, $a-x=x-b$.
9. $x-2a=4-3x$. **10.** $2ay-b=ay+b$.
11. $az=a-bz$. **12.** $ax-a=a^2-x$. **13.** $ay+a=b+by$.
14. $az+a^2=z+1$. **15.** $ay+1=a^2+y$.
16. $ax=b\,(a+3)-3x$. **17.** $x\,(a-2)=3b+3x$.
18. $3\,(x+2)+2\,(x+2)=10$. **19.** $\dfrac{3x}{2}-5=\dfrac{x}{2}-1$.
20. † $x-a=x+b$.

b) Odstraňování závorek. Na př.:

$$\begin{aligned} 3(x-2) &= 6-(2-x) \\ 3x-6 &= 6-2+x \\ 3x-x &= 6+4 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x : a &= (x-2) : 3 \\ a(x-2) &= 3x \\ ax-2a &= 3x \\ ax-3x &= 2a \\ x(a-3) &= 2a \\ x &= \frac{2a}{a-3}. \end{aligned}$$

1. $12(x+1) = 3x+24$. **2.** $20-(y-4) = 2y$.
3. $3x+1+(2-x)+(2x-1) = 10$.
4. $20+3(y-5) = 7y-(2y-3)$.
5. $7-(3-4z) = 5(2-z)-3(z-5)$
6. $4-3(u-2)-2(4-3u) = 0$.
7. $17+3[2-(7-2v)] = 4v+2(3v-5)$.
8. $3x-[-5-2(x-3)] = x-6$.
9. $2x-3(5-x)+1 = x-[2+(2x-6)]$.
10. $5-3[y-4(3-y)]+1 = 14-(4y-6)$.
11. $3y-5(y-2) = 5-3y-[-5-(3-y)+y]$.
12. $4[2z-(5+2z-1)-z] = z-(2+3z)-4$.
13. $7(u-5)-3[u-4(2-u)]-1 = 5[3+2(u-\frac{7}{2})]+56$.
14. $12-3v(2-2v) = (2v-3)(3v-1)$.
15. $x^2-(x+3)(x-3) = 7-3(5-2x)$.
16. $3(x-2)(x+1) = (3x-2)(x-3)$.
17. $(3-2y)^2 = 6-2(2y+3)(2-y)$.
18. $(2z-1)^2-3(2-z)^2 = 9-(3-z)(z+2)$.
19. $x : 3 = (x-3) : 2$. **20.** $(3x+3) : (2x-3) = 2 : 3$.
21. $(2y-3) : (5-y) = 2y : (y+3)$. **22.** $4z : (a+b) = (a-b) : b$.
23. $(x+a) : (x-a) = b : c$. **24.** $a : b = (a-y) : y$.
25. $a(a-x) = b(b-x)$. **26.** $b-2(a-z) = a-3(z-b)$.
27. $6a-a(3x-2) = (2-x)(a-3)+3$.
28. $(a+y)^2-(a-y)^2 = 2a^2$. **29.** $(x-1)^2 = x^2+2x+1$.
30. † $(x-3)(x+3) = x^2+9$.

c) Odstraňování zlomků. Na př.:

$$\left|\frac{x}{2}-\frac{5-2x}{3} = 3\right| \times 6;$$

$$\begin{aligned} 3x-2(5-2x) &= 18 \\ 3x-10+4x &= 18 \\ 7x &= 28 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$n.\left|\frac{x}{a}+\frac{x}{3a+3}-\frac{x-1}{a+1} = 1\right| \begin{aligned} n &= a\,3(a+1) \\ &= 3a(a+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(3a+3)+x\,.\,a-(x-1)\,.\,3a &= 3a(a+1) \\ 3ax+3x+ax-3ax+3a &= 3a^2+3a \\ x(a+3) &= 3a^2 \\ x &= \frac{3a^2}{a+3} \end{aligned}$$

1. $\frac{x}{3} = 2.$ **2.** $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}.$ **3.** $\frac{9}{y} = 2.$ **4.** $\frac{8}{z-1} = 2.$

5. $\frac{5}{3x+2} = 1.$ **6.** $3z - \frac{3-z}{5} = 4(3-z).$

7. $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} = 5.$ **8.** $\frac{y+3}{6} - \frac{7-3}{9} = 2.$ **9.** $\frac{9+z}{z} - 5 = \frac{6}{z}.$

10. $4x - \frac{19+2x}{4} = 15 - \frac{7x+11}{4}.$ **11.** $x - \frac{2x+1}{3} = \frac{x+3}{4}.$

12. $2y - \frac{4+y}{3} = 2\tfrac{1}{2} - \frac{3-y}{2}.$ **13.** $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{3x+7}{10}.$

14. $\frac{x+2}{3} - \frac{4x+5}{6} + \frac{7x-8}{9} = x - 3.$

15. $\frac{2x}{3} - \frac{1-\frac{x}{2}}{4x} = \frac{x-1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{7}{12}.$

16. $x - \tfrac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{3}(x+4)\right] = 2.$ **17.** $\frac{3+x}{2x-4} = \frac{5}{6}.$

18. $2 - \frac{x-3}{5} = \frac{26}{15+5x} - \frac{x}{5}.$ **19.** $\frac{3+x}{3-x} - 1 = 1 + \frac{3}{3-x}.$

20. $\frac{34}{3+\frac{3x}{2}} - \frac{x}{3} = 4 - \frac{x-5}{3}.$ **21.** † $\frac{3+x}{4+x} = 1.$

22. † $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x-1} = 1.$ **23.** $\frac{3}{2x} - \frac{3}{2x+4} = \frac{1}{4x}.$

24. $\frac{x}{x-1} - \frac{5-x}{x^2-1}$ *) $= 1.$ **25.** $\frac{3-y}{y-2} - \frac{1-y}{y^2-4} = -1.$

26. $\frac{4}{3z+3} - \frac{5}{6z-6} = \frac{1}{z^2-1}.$ **27.** $\frac{2-a}{a-3} - \frac{6-3a}{a^2-6a+9} = 2.$

28. $\frac{4}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{3}{x^2+2y+1}.$

29. $\frac{2}{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1.$ **30.** $x - \frac{2}{\frac{3}{1+x}} = 1.$

31. $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} : \frac{1}{1+\frac{2}{x}} = 4 : 3.$ **32.** $\frac{1}{1+\frac{3}{x}} : \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = 3 : 5.$

---

*) Piš $5 + x$ místo $5 - x$ a ukaž, proč se stane tím rovnice spornou.

33. $\frac{2a}{x} = 3.$ **34.** $\frac{4a}{x} = a - 3.$ **35.** $\frac{z}{a} + \frac{z}{b} = a + b.$

36. $\frac{ax}{b} - \frac{bx - 1}{a} = \frac{1}{b}.$ **37.** $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = a + b.$

38. $\frac{a+b}{y} - \frac{b-c}{y} = a - c.$ **39.** $\frac{a^2 + x^2}{ax} = \frac{x}{a} + b.$

40. $z + \frac{2z}{3} + \frac{4(a-z)}{3a} = \frac{z-1}{6}.$ **41.** $x + \frac{x(p+1)r}{100} = k.$

42. $\frac{a}{b - \frac{c}{x}} = b.$ **43.** $\frac{ab}{a - \frac{b}{y}} = \frac{a}{y} + b.$

44. $1 + \frac{b}{a} : x = a + b : 1 - \frac{b}{a}.$ **45.** $\frac{9-x}{2a} - \frac{2-x}{4} = \frac{3-x}{a+2}.$

46. $\frac{4}{a+b} - \frac{a-b}{x} = \frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x}.$

47. $ax - \frac{1}{a+b} - bx + \frac{1}{a-b} = \frac{2a}{a^2 - b^2}.$

48. $\frac{x}{3a+6} - \frac{2}{a^2-4} = \frac{3}{3a}.$ **49.** $\frac{x}{a} + \frac{x + \frac{x}{2}}{\frac{3a+3}{2}} - \frac{x-1}{a+1} = 3.$

50. $\frac{3y}{4c-2} - \frac{y-1}{4c^2-1} = \frac{y - \frac{2}{3}}{\frac{4c}{3}}.$ **51.** $\frac{x + \frac{x}{2}}{a-2} - \frac{x+1}{a^2-4} = \frac{x}{\frac{2a}{3}}.$

52. $\frac{\frac{1}{z}}{a + \frac{a}{z}} - \frac{a-1}{\frac{4a}{3}} = \frac{z-1}{z^2-1} - 1.$ **53.** $1 + \frac{1 - \frac{a+x}{a-x}}{1 - \frac{a-x}{a} - \frac{a+x}{a}} = 2.$

54. $\frac{x\sqrt{2}}{x^2-2} = \frac{1}{x - \sqrt{2}} - \frac{1}{x + \sqrt{2}}.$

d) Rovnice druhého a třetího stupně. Na př.:

$\frac{6x}{x-2} = x + 8;\quad 6x = x^2 - 2x + 8x - 16;\quad x^2 = 16;\quad x = \pm 4.$

Zkouška 1) $\frac{24}{2} = 4 + 8;$ 2) $\frac{-24}{-6} = -4 + 8.$

1. $\frac{48}{x^2} = 3.$ **2.** $12 : x = x : 3.$ **3.** $x + 3 : 4 = 4 : x - 3.$

4. $\frac{x+2}{2x+9}=\frac{1}{x}$. **5.** $(x+1)^2=2x+1$.

6. $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=1$. **7.** $\frac{x+\sqrt{2}}{x}-\frac{x}{x+\sqrt{2}}=2$.

8. $\frac{x}{1+\frac{1}{x}}-\frac{x}{1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}=0$. **9.** $(x+3)^2=16$.

10. $(2x-3)^2=25$. **11.** $k=\pi\,.\,x^2$. **12.** $P=4\pi x^2$.

13. $x^2=v+\left(\frac{x}{2}\right)^2$. **14.** $\varDelta=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. **15.** $\frac{54}{x^3}=8$.

16. $K=\frac{4\pi x^3}{3}$. **17.** $R^2:x=x:r^2$. **18.** $(x-a)^2=b$.

19. $(a+x)^2-(a-x)^2=2x^2$. **20.** $\frac{a}{1+2x}+\frac{a}{1-2x}=2b^2$.

21. $\frac{a-x^2}{x^2-b}=\frac{a}{b}$. **22.** $\frac{a}{bx^3}-\frac{b}{ax^3}=a+b$.

23. $\frac{x^3-a}{b}+\frac{x^3}{a}=1$.

e) Odstraňování odmocnin. Odmocniny nutno odstraniti tehdy, je-li odmocněnec neznámou. (Odmocniny čísel známých netřeba odstraňovati.)

Odmocniny se odstraní 1) upravením rovnice, na př.:

$$\sqrt{x+3}=\frac{2}{\sqrt{x+3}};\quad (\sqrt{x+3})^2=2;\quad x+3=2;\quad x=-1.$$

Zkouška: $\sqrt{2}=?\ \frac{2}{\sqrt{2}}$;

2) zmocněním a to *α*) z pravidla rázem, možno-li upraviti rovnici tak, aby ta strana rovnice, jež má odmocninu, byla monom;

$$\text{na př.: } \sqrt{21+x}=\frac{3-x}{\sqrt{x}};\quad 21+x=\frac{(3-x)^2}{x};$$

$$21x+x^2=9-6x+x^2;\quad 27x=9;\quad x=\tfrac{1}{3}.$$

Zkouška: $\sqrt{21+\frac{1}{3}}=?\ \frac{3-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}};\quad \sqrt{\frac{64}{3}}=?\ \frac{8\sqrt{3}}{3};\quad \frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$,

β) postupným zmocněním, nelze-li rovnici dle *α*) upraviti. Tu bývá s prospěchem upraviti rovnici před zmocněním tak, aby každá odmocnina byla na jiné straně; na př.:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5;\quad \sqrt{x+5}=5-\sqrt{x};$$

$$x+5=25-10\sqrt{x}+x;\quad 10\sqrt{x}=20;\quad \sqrt{x}=2;\quad x=4.$$

Zkouška: $\sqrt{4+5}+\sqrt{4}=?\ 5;\quad 3+2=5.$

1. $\dfrac{9+7x}{\sqrt{x}} = 7\tfrac{1}{4}\sqrt{x}$. 2. $\sqrt{x+9} = 5$. 3. $\sqrt{2x} + 1 = 3$.

4. $\sqrt{x} + a = b$. 5. $\sqrt{x^2 - a^2} + x = a$. 6. $\sqrt{a+x} = a\sqrt{x}$.

7. $\sqrt{x} = \dfrac{x+2}{\sqrt{x+16}}$. 8. $x - a + \sqrt{x^2 - 2ax} = b^2$.

9. $5\sqrt{x} = 12 - 2\sqrt{x}$. 10. $\sqrt{x+9} = 1 + \sqrt{x}$.

11. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x} = 4$. 12. $\sqrt{7+x} + \sqrt{x} = \dfrac{7}{\sqrt{5}}$.

13. $\sqrt{x} + \sqrt{x+16} = \dfrac{40}{\sqrt{x+16}}$. 14. $3\sqrt{2+x} - 3\sqrt{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

15. $\sqrt{16 + x - \sqrt{x}} = 2$. 16. $\sqrt[3]{4x-5} = 3$.

Rovnice slovné.

Čtení rovnic. Rovnici $3x - 5 = 7$ lze považovati za úlohu slovnou, arithmetickými značkami psanou a čísti ji takto: Jest nalézti číslo (x), jehož trojnásobek ($3x$) o 5 zmenšen jest 7. Aneb: Kterého čísla trojnásobek jest o 5 větší než 7? **§ 130.**

Jest úlohu tu rozřešiti z hlavy, t. j. aniž by byla proměněna v rovnici číselnou: Je-li trojnásobek o $5 > 7$, jest $= 12$ a číslo hledané $= 12 : 3 = 4$.

Cvičení: Jest rovnice tyto čísti a úlohy čtené rozřešiti z hlavy:

1. $7x + 4 = 60$. 2. $2x + 3x = 30$.

3. $5x = 2x + 12$ (patrno, že $12 = 3x$). 4. $x = \dfrac{x}{2} + 8$.

5. $\dfrac{x}{3} = 5$. 6. $\dfrac{x}{4} - 3 = 2$. 7. $\dfrac{x+2}{5} = 10$.

8. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{4} = 9$. 9. $\dfrac{2x}{3} = x - 8$ (patrno, že $8 = \dfrac{x}{3}$).

Sestavování rovnic. Každou početní úlohu, v níž jde o určení jedné neznámé, možno vyznačiti numerickou rovnicí o 1 neznámé a tuto z ní vypočítati. Proto zoveme úlohu takovou slovnou rovnicí. Veškerá obtíž záleží v tom, úlohu slovnou proměniti v rovnici numerickou, t. j. rovnici sestaviti. Nejlepším rádcem jest zde cvik; několik pokynů usnadní počátek. **§ 131.**

1. Především jest vyznačiti neznámou číslem (x, y . . . .).

2. Vyhledati a napsati slovy rovnosť v úloze vyznačenou.

3. Není-li v úloze rovnosti, jest napsati vztah, který by se v rovnosť proměniti dal; na př. x jest o $3 > 5$; tedy $x - 3 = 5$.

4. Veličiny toliko slovy v rovnici vytčené jest vyznačiti čísly ať známými ať neznámými; tím rovnice sestavena.

Sled 1., 2. se často vyměňuje v opačný. Na př.: Jest nalézti číslo, jehož čtyřnásobek jest o 14 větší než polovice.

ad 1. Hled. číslo $= x$.

ad 3. Čtyřnásobek jest o 14 $>$ polovice.

ad 2. „ $=$ „ $+ 14$.

ad 4. $4x = \frac{x}{2} + 14; \quad x = 4.$

Zkouška se koná tím, že se zkoumá, zda-li kořen rovnice numerické vyhoví úloze slovné. Tedy: Čtyřnásobek $= 16$; polovice 2; $16 > 2$ o 14. Ukáže-li se rovnice numerická spornou, byla úlohou žádána nemožnosť. Jindy úloha slovná vyžaduje kořen celistvý neb kladný a kořen numerické rovnice objeví se lomeným neb záporným. I tu jest úloha slovná nemožnou.

Úlohy ty vyznačíme †.

Při úlohách jednoduchých možno arciť napsati rovnici rázem.

132 **Vztahy čísel.** (Viz § 130.) *a*) Jest vyhledati číslo, vyhovujíc této podmínce. (Dosaď všude za čísla zvláštní, obecná.)

1. Trojnásobek čísla jest o 72 $>$ jeho třetiny.

2. Součet poloviny a třetiny čísla jest 15.

3. Třetina čísla jest o 2 $>$ jeho čtvrtiny.

4. Sedmina čísla o 5 zmenšeného jest o 3 $<$ pětiny čísla.

5. Polovina čísla zvětšená o třetinu a čtvrtinu jeho jest o 1 $>$ čísla celého.

6. Součet pětiny a šestiny čísla jest o 13 $<$ součtu třetiny a čtvrtiny čísla.

7. Které číslo od 18 jsouc odečteno dá zbytek o 20 $>$ sebe sama.

8. Které číslo jest o 15 $>$ šestiny jeho?

9. Dvě třetiny kterého čísla jsou o 8 $<$ 30?

10. Pět šestin kterého čísla jest o 3 $>$ tři čtvrtin čísla?

11. Které číslo děleno jsouc 7mi dá podíl 6 a zbytek 5?

12. Kterým číslem jest děliti 85, aby byl podíl 6 a zbytek 7?

13. Číslo jednou zvětšeno a podruhé zmenšeno jsouc o 4 dá čísla v poměru 5 : 3.

14. Oč jest 25 zvětšiti, podruhé zmenšiti, aby vzniklá čísla dala poměr 3 : 2?

15. Které číslo jest přičísti do čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{3}{5}$, aby tím zlomek se proměnil *a*) v $\frac{5}{8}$, *b*) v $\frac{1}{3}$?

16. Číslo jest o tolik $<$ 15, oč jest $>$ 7.

17. Číslo jest tolikrát $<$ 40, kolikrát jest $>$ 10.

18. Číslo dvouciferné má na místě jednotek cifru 4; přeměníme-li sled cifer, vznikne číslo nové, jež se má k hledanému jako 5 : 6*).

19. Číslo trojciferné má na místě jednotek cifru 3; dáme-li cifru tu na místo nejvyšší, vznikne nové číslo trojciferní, jež jest o 36 < hledaného.

20. † Číslo dvouciferné má na místě jednotek 1; číslo zvratně psané má se k číslu původnímu jako 25 ku 52.

21. K číslům 39 a 14 jest přičísti číslo tak, aby součty byly v poměru 3 : 2.

22. Číslo zmenšeno jsouc jednou o 13 a podruhé o 17, dá zbytky v poměru 1 : 3.

23. Dělím-li číslo 3mi a od podílu 3 odečtu, zbytek pak opět 3mi dělím a podíl o 3 zmenším, obdržím 3.

24. Odečtu-li trojnásobek čísla od čtyř, zbytek dělím 5ti a podíl odečtu od 6, obdržím 7.

25. Číslo, jsouc postupně o 3 zmenšeno a třemi děleno, dá týž výsledek jako jsouc o 3 zvětšeno.

26. 192 děleno číslem dá za podíl trojnásobek čísla.

27. Číslo násobeno pěti dá součin rovný polovičnímu čtverci.

28. Kterým číslem jest násobiti 200 a 5, aby prvý součin byl čtvercem druhého součinu.

29. Které číslo jest přičísti a odečísti k 8, aby součet násoben rozdílem dal 39?

30. Čtvrtina čísla násobena sedminou čísla dá součin 252.

b) Vyžaduje-li úloha určení dvou čísel, musí obsahovati v sobě dvé podmínek. Tu užijeme jedné podmínky k napsání slovné rovnice (viz § 131. 2) 3) a druhé podmínky k vyznačení druhé neznámé (§ 131. 1), na př.: 45 jest rozděliti ve dva díly tak, aby prvý byl o 13 > druhého.

α) Z hlavy: Odebéřeme-li 13 z 45 pro díl prvý, připadne ze zbytku ještě na každý díl polovic; tedy

$$\text{prvý díl } 13 + \frac{45 - 13}{2} = 29, \quad \text{druhý díl} = \frac{45 - 13}{2} = 16.$$

β) Díl 1) $= x + 13$. | Díl 1) + díl 2) $= 45$,
Díl 2) $= x$. | $x + 13 + x = 45$; $x = 16$,

tedy díl 1) $= 29$, 2) $= 16$.

Aneb *γ*) Díl 1) jest o 13 > dílu 2). | Díl 1) $= x$.
Díl 1) — 13 = dílu 2). | Díl 2) $= 45 - x$.
$x - 13 = 45 - x$; $x = 29$ a díl 2) $= 16$.

*) Zde označíme písmenou x nikoliv hledané číslo, nýbrž neznámou cifru desítek, tak že hledané číslo jest $10x + 4$. Podobně v následující úloze označíme hledanou dvojskupinu číslem x.

Cvičení. Jest určiti hledaná čísla:

1. Jest rozděliti 58 na dva díly tak, aby rozdíl jich byl 12.

2. Jest rozděliti 60 na dva díly tak, aby *a*) polovina prvého rovnala se třetině druhého, *b*) trojnásobek prvého rovnal se třetině druhého.

3. Jest rozděliti 36 na dva díly tak, aby *a*) třetina prvého byla o 5 $>$ čtvrtiny druhého, *b*) trojnásobek prvého a dvojnásobek druhého daly součet 60, *c*) třetina prvého a čtvrtina druhého daly součet 11.

4. Jest rozděliti 77 ve dva díly tak, aby *a*) prvý byl 6krát $>$ rozdílu obou dílů, *b*) polovice dílu prvého byla 2krát $>$ dílu druhého, *c*) pětina dílu prvého byla o 1 $>$ čtvrtiny dílu druhého, *d*) polovina dílu prvého byla o tolik $<$ dílu druhého, oč jest $>$ čtvrtiny dílu druhého.

5. Jest rozděliti 35 [na dva sčítance] v poměru $3 : 2$.

α) Z hlavy: Rozdělíme-li 35 na $(3 + 2)$ stejných dílů, bude třínásobek (3×7) a dvojnásobek jeho (2×7) čísly hledanými.

β) Označíme-li hledaná čísla $3x$ a $2x$, vyhovují podmínce jedné $(3 : 2)$ a píšeme-li rovnici $3x + 2x = 35$, vyhověno tím podmínce druhé.

γ) Cesta druhá: 1. díl $= x$, 2. díl $= 35 - x$; rovnice: $x : (35 - x) = 3 : 2$ jest zdlouhavější.

6. Dvě čísla, jichž rozdíl jest 26, jsou v poměru $5 : 3$.

7. Dvě čísla jsou v poměru $3 : 4$; zvětšíme-li je *a*) o 6, budou v poměru $1 : 2$, *b*) o 10, budou v poměru $2 : 1$.

8. 23 jest rozděliti na dva díly tak, aby větší dělen jsa menším dal podíl 4 a zbytek 3.

9. 60 jest rozděliti na 3 díly *a*) v poměru $2 : 3 : 5$ (viz cvič. 5.), *b*) aby díl druhý byl o 8, díl třetí o 10 $>$ prvního, *c*) aby díl 1. byl o 5 $<$ a díl 3. o 8 $>$ druhého, *d*) aby dva díly lišily se o 4 a díl třetí byl třetinou dílu menšího z obou prvých.

10. Dvě čísla jsou o 1 rozdílná; dělíme-li větší 4mi a menší 5ti, liší se podíly opět o 1.

11. Dvouciferné číslo má třikrát méně jednotek co desítek; změníme-li sled cifer, vznikne číslo, jehož dvojnásobek jest o 10 $<$ čísla hledaného.

12. Dvouciferné číslo má ciferný součet *a*) 15 a počet desítek jest o 1 $>$ jednotek, *b*) 9 a převrátíme-li sled cifer, jest poměr obou čísel $= 8 : 3$.

13. Jest rozděliti 247 na 2 díly tak, aby díl jeden dělen jsa druhým dal podíl 13 a zbytek 9.

14. Čtverce dvou čísel, jež jsou v poměru $4 : 3$, dají součet 223.

15. Jest nalézti dvě čísla, jichž součin jest 12 a podíl 147.

§ 133. **Úlohy z oboru počtu procentového a úrokového** (viz § 62. až 67.), na př.: Která jistina vzroste při 5% za 2 roky na 1650 zl.?

Jistina $= x$ zl. Jistina + úroky = konečné jistině.

Úroky 1% za 1 rok $= \frac{x}{100}$
„ 5% „ 1 „ $= \frac{x \cdot 5}{100}$
„ 5% „ 2 „ $= \frac{x \cdot 5 \cdot 2}{100}$

$x + \frac{x}{10} = 1650.$
$x = 1500.$ (Zkoušku!)

Aneb rázem dle vzorce $U = \frac{J \cdot p \cdot r}{100}$.

Podobný vztah vládne mezi „hotovým“ (H), srážkou (disconto $= S$ a dluhem (D); tedy $H + S = D$, při čemž dlužno pamatovati, že srážka se počítá jako úroky z hotového a nikoliv z dluhu.

Podobně: Cena kupní + zisk = cena prodejní. Zisk se určuje v procentech ceny kupní.

1. Která jistina vzroste za $1\frac{1}{2}$ roku při $5\frac{1}{2}$% na 476·3 *K*.

2. Kolik bylo před 8 měsíci uloženo, činí-li dnes jistina s $5\frac{1}{3}$% úroky 1898 zl.?

3. Která jistina vzroste *a*) při $5\frac{1}{4}$% za 2 roky stejně jako 675 *K* při 5% za 2 r 6 měs., *b*) při 4% za 2 r. 3 měs. jako 675 *K* při $4\frac{1}{2}$% za 2 r.?

4. Kupec *a*) koupil zboží za 1081 *K* a získal na něm 15%; zač je prodal? *b*) utržil za zboží 1081 *K* se ziskem 15%; zač je koupil?

5. Kupec utržil za zboží 842·4 *K* a ztratil tím 4%; zač je koupil?

6. Úředníku bylo zvýšeno služné o $12\frac{1}{2}$%, takže béře nyní 150 zl. měsíčně. Jaké bylo jeho roční služné před zvýšením?

7. Jakou cenu má dluh *a*) 5100 *K* splatný za 4 měsíce při 6% ročním diskontu? *b*) 695·55 zl. splatný za 9 měs. při 4% diskontu?

8. Směnka, znějící na 820 zl a za 6 měs. a 20 dní splatná, byla prodána se srážkou 20 zl.; kolik % činí srážka?

9. Kupec prodal zboží se ziskem 18%; zač je prodal, činí-li zisk 108 zl.?

10. Obchodník objednal zboží za 232 zl. 50 kr., jež měl zaplatiti za 8 měsíců. Jak veliká byla srážka, zaplacen-li účet hotově?

11. Jakási jistina (J) vynese ve 3 rocích při $4\frac{1}{2}$% $60\frac{3}{4}$ zl. úroků; jistina jiná (J_1) o 150 zl. větší nese v téže době 90 zl. úroků; na kolik % jest uložena? Na x%; $J_1 = J + 150$.

$$\frac{100 \cdot 90}{x \cdot 3} = \frac{100 \cdot 60\frac{3}{4}}{4\frac{1}{2} \cdot 3} + 150; \quad x = 5.$$

Aneb v tomto sledu: $J = ?$ $J_1 = ?$ $x = ?$

12. Která jistina vynese ročně při 5% o 6 zl. 25 kr. více než při $4\frac{1}{2}$%?

13. Na kolik % jest uložiti 3200 K, by za 4 roky vynesly tytéž úroky, co 4000 K za 2 r. 8 měs. při 5%. (Rovnosť: úroky z 1. jistiny = úrokům z 2. jistiny.)

14. Jistina 600 zl. (300) vynáší při $3\frac{1}{2}$% ($3\frac{1}{3}$) v určité době 14 zl. (16) úroků; na kolik % jest jistinu 750 zl. (450) uložiti, aby vynesla v téže době 20 zl. (27) úroků? [(doba 1. = době 2.)].

15. Vynese-li jistina 720 zl. za rok a 9 měs. 22 zl. úroků, která jistina vynese při týchž procentech za rok a 3 měsíce 25 zl. úroků?

16. Za kolik let vynese jistina 374 zl. při $4\frac{1}{2}$% tolik úroků, jako by vynesla při 60% za 2 r. 9 měs.?

17. Vynese-li 930 zl. za $1\frac{3}{4}$ r. 72 zl. úroků, za kolik let vynese 560 zl. při týchž % 64 zl. úroků.

18. Oč jest zvětšiti jistinu 2000 zl., má-li při 4% nésti tolik úroků, co nesla při 5%?

19. Jest vypočítati jistinu, která při 5% za $1\frac{1}{2}$ roku o 1850 méně vynese než při 4% za $6\frac{1}{2}$ roku.

20. Věřitel má půjčeno u dvou dlužníků 1790 zl. a to u 1. na 5% a u 2. na 4%; v celku béře 80 zl. úroků. Kolik má u každého půjčeno?

21. Kupec jest vázán smlouvou z trhové ceny 1600 zl. zaplatiti část 700 zl. hned, 400 zl. za 9 měs. a zbytek za rok; kdy zaplatí, chce-li složiti celou kupní cenu najednou? Návod: a) za x měsíců; neboť kupec má právo užívati 400 zl. po 9 měsíců a zbytek (500 zl.) po 12 měsíců. I ponechá si celý kapitál (1600) tak dlouho (x měs.), aby ú r o k y z 1600 zl. za x měs. = úrokům ze 400 zl. za 9 měsíců + úrokům z 500 za rok.

$$\frac{1600 \cdot p \cdot x}{100 \cdot 12} = \frac{400 \cdot p \cdot 9}{100 \cdot 12} + \frac{500 \cdot p \cdot 12}{100 \cdot 12}.$$

Krátíme-li rovnici společným činitelem, jest $16 \cdot x = 4 \cdot 9 + 5 \cdot 12$, $x = 6$ měsíců; ježto % se krátila, jsou patrně bez vlivu na úlohu. Zkouška: Ponechá-li si kupec 700 zl. o 6 měsíců déle než dle smlouvy bylo dovoleno, získá při 1% $7 \cdot \frac{1}{2}$ zl.; zaplatí-li 400 zl. o 3 měsíce a 500 zl. o 6 měsíců dříve, má škody $4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ zl., takže zisk = škodě.

6 m ě s í c ů zove se s t ř e d n í l h ů t o u p l a t e b n í.

22. Kdosi má platiti 2400 zl. za 8 měsíců, 1200 zl. za $1\frac{1}{4}$ roku; zaplatí však 1600 zl. za rok; kdy jest mu zaplatiti zbytek? Odpověď: Za y měsíců. Úroky z 2400 zl. za 8 měs. + úroky z 1200 zl. za $1\frac{1}{4}$ roku musí se = úrokům z 1600 zl. za rok + úroky ze zbytku (3000) za y měs.; tedy $24 \cdot \frac{8}{12} + 12 \cdot \frac{15}{12} = 16 \cdot \frac{12}{12} + 30 \cdot \frac{y}{12}$; $y = 9$.

Zaplatí tedy zbytek za 9 měsíců.

23. a) † Úlohu 22. jest změniti takto: Zaplatí však 1600 zl. za 2 léta . . .

23. *b*) Spor z *a*) zmizí kladem nové otázky: Jak veliký bude zbytek placený za $2\frac{1}{2}$ léta i s 6% úroky z prodlení?

24. Kdosi má platiti 1000 *K* v 5 ročních lhůtách, a to vždy koncem roku 200 *K*. Kdy může zaplatiti celý dluh najednou?

25. *A* má zaplatiti 2000 zl. za 2 léta a 1600 zl. za 4 léta (bez úroků), zaplatí však 2400 zl. již po roce a 2 měsících. Kdy jest mu složiti zbytek?

26. Kupující má zaplatiti 3000 zl. za rok; zaplatí však 1200 zl. za 8 měs., 600 zl. za 10 měs.; kdy zaplatí zbytek?

27. Kdosi koupil dům za 12000 zl. se závazkem zaplatiti 8000 zl. hned a zbytek ve dvou stejných 3měsíčních splátkách. On však zaplatil 10000 zl. ihned a zbytek za 1 rok. Kolik zaplatil posléze při 6% úrokování a 12 zl. soudních útrat?

28. Dlužník má zaplatiti 3600 zl. za 2 roky 8 měsíců, zaplatí však *a*) 2000 zl. za rok; kdy zaplatí zbytek? *b*) Jak by se vyrovnal s věřitelem při 5% úrokové míře, kdyby první splátku 2000 zl. byl složil až po 3 letech?

29. Kolik žáků bylo v třídě, bylo-li jich 20% s vyznamenáním, 70% s prospěchem dobrým a 6 s prospěchem nedostatečným?

Rovnice z oboru počtu směšovacího. (Viz § 61. Cvič. 8. atd.) **§ 134.**

Při řešení těchto úloh užívá se z pravidla těchto rovností:

1) Váha smíšených částí = váze směsi.

2) Cena „ „ = ceně „

Na př.: Kolik ryzího stříbra jest přimísiti ku 1 *kg* stříbra č. 4., aby směs měla jakosť čísla 3ho?

Jest přidati *x kg* ryzího stříbra a ježto měď ve slitině jest bez ceny, bude rovnice 2) zníti: Množství ryzího stříbra ve smíšených dílech = množství ryzího stříbra ve směsi; tedy

$$x + 0{\cdot}75 = (x + 1)\,0{\cdot}8; \quad x = \tfrac{1}{4}\,kg.$$

Zkoušku! Aneb též: $\dfrac{\text{Váha ryzího kovu}}{\text{Váha slitiny}} = \text{Jakosť}.$

1. Kolik stříbra jest slíti s $10\frac{1}{2}$ *dkg* ryzího zlata, aby slitina měla jakosť č. 4.?

2. Kolik stříbra jest slíti s 45 *g* mědi, aby slitina měla jakosť č. 4.?

3. Kolik stříbra jakosti 0·92 jest slíti s 72 *dkg* mědi, aby slitina bylo jakosti 0·8?

4. *a*) *b*) Kolik zlata č. 1. (jakosti *a*-tisícinné) jest slíti s 42 (*n*) *dkg* zlata č. 4. (jakosti *c*-tisícinné), aby slitina byla č. 3. (jakosti *b*-tisícinné)?

5. † Kolik zlata jakosti 0·5 jest slíti o 1 *kg* zlata jakosti 0·6, aby slitina byla jakosti 0·7?

6. Zlatník má 20 *dkg* stříbra č. 4. a potřebuje stříbro č. 2. Kolik *dkg* žádaného stříbra může vytvořiti přidáním ryzího stříbra ku č. 4.?

7. Kolik vody jest přidati ku 2 hl 78% lihu, aby směs byla 75%ová?

8. Kolik absolut. lihu jest přidati ku 3 hl 74% lihu, aby směs byla 80%ová?

9. Kolik hl vína po 37 zl. jest smíchati se 3 hl vína po 32 zl., aby hl směsi měl cenu 35 zl.?

10. Kolik litrů vody jest vlíti do 1 hl vína po 36 zl., aby mohl vinárník prodávati litr o 6 kr. laciněji?

§ 135. **Rovnice z oboru pohybu.** Příklad: Za poslem, který urazí 5 km za 1 hodinu, poslán o 2 hodiny později jezdec, který vykoná za hodinu 9 km; kdy ho dohoní?

Za x hodin.	Cesta posla = cestě jezdce.
Posel vykoná $5(x+2)$ km.	$5x + 10 = 9x$.
Jezdec „ $9 \,.\, x$ „	$x = 2\frac{1}{2}$ hod. Zkoušku!

1. Cestující koná denně 39 km; kdy dostihne soudruha, který jest o 28 km napřed a denně 32 km urazí? (Rys.)

2. Jízda dohánějící pěchotu, jež urazí 5·4 km za 1 hod., dozvěděla se, že tato město před 2 hodinami opustila. Jak rychle musí spěchati, chce-li ji za 3 hodiny dostihnouti?

3. Rychlovlak a osobní vlak vyjedou současně ze stanic 215 km od sebe vzdálených. a) Kde se setkají, urazí-li rychlovlak 1·2 km, osobní 0·7 km za 1 minutu? b) Kdy se setkají, vyjede-li osobní vlak o 50 minut dříve?

4. Ze dvou míst na téže silnici ležících a 21 km od sebe vzdálených vyjdou současně 2 cestující; přední vykoná 17 km za 5 hodin a zadní 11 km za 2 hodiny. Kdy a kde dostihne jeden druhého?

5. Dvě lodi, z nichž prvá o 7 km více za hod. urazila, jely protivným směrem. Jak rychle jely, když byly za 5 hod. 135 km od sebe vzdáleny?

6. Urazíme-li za 1 hod. 5 km, dojdeme cíle o 2 hod. dříve než urazíme-li za hodinu 4 km. Jak vzdálený jest cíl? (x km); doba 1. + 2 hod. = době 2.; doba 1. $= \frac{x}{5}$ hod.; doba 2. $= \frac{x}{4}$ hod. atd.

7. Urazil-li cyklista 1 km za 3 min. místo za $2\frac{1}{2}$ min., byl u cíle o $\frac{1}{4}$ hod. později. Jak daleký byl cíl?

8. Cyklista vyjel z B v 6 hod. vstříc svému soudruhu, který vyjel z A o 30 min. dříve. a) Kdy se setkali a b) jaká jest vzdálenost AB, jel-li cyklista z A 1 km za 2 min. a z B 1 km za 3 min. a stalo-li se setkání ve $\frac{1}{3}$ cesty AB?

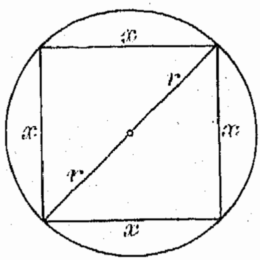
9. a) Stojí-li ručičky na hodinách proti sobě, za kolik minut se budou krýti*)? b) Kryjí-li se ručičky mezi 6tou a 7mou, kolik je hodin?

---

*) Jak velikou dráhu opíše malá (hodinová) ručička za týž čas co velká (minutová)? Na př.: Jsou-li tři hodiny, budou se ručičky krýti za x min. Za x m. opíše velká ručička x dílků minutových a malá $\frac{x}{12}$ dílků, tak že $x = 15 + \frac{x}{12}$.

10. Dvoje hodiny ukazují právě týž čas. Oč se předbíhají prvé za den, ukazují-li za měsíc o 5 minut více než druhé, jež se o 4 vteřiny denně opožďují?

Rovnice geometrické. Sestavení rovnic, beroucích látku z geometrie, zdá se proto obtížné, že v úloze zřídka kdy bývá rovnosť přímo dána. Naopak jest nám rovnici slovnou hledati v poučkách geometrických, jichž znalosť se arciť předpokládá. Ježto rys geom. názoru velmi napomáhá, neopomiňme nikdy jej učiniti. Vedle něho vyznačme veličinu danou a hledanou. Neznáme-li přímého vztahu mezi veličinou danou a hledanou, přibeřme veličinu pomocnou, která by byla v přímém vztahu jak s danou tak s hledanou a tím rovnice sestavena. Na př.: Jest vypočítati stranu čtverce (x), vepsaného do kruhu, jehož plocha jest K. § 136.



Obr. 10.

$\dfrac{\text{Dána: plocha } K}{\text{hled.: stranu } x} > r = \text{polom. kruhu}$ (vel. pomocná). Ježto přímého vztahu mezi x a K neznáme, nýbrž toliko mezi K a r ($K = \pi r^2$), volíme r za pomocnou veličinu.

Vztah mezi x a r nalezneme z rysu:

jestiť $x^2 + x^2 = (2r)^2$, $x^2 = 2r^2 = \dfrac{2K}{\pi}$;

$$x = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}.$$

A)

1. Obvod $\triangle$ jest $70\,m$; základna jest o $7\,m <$ jedné a o $12\,m >$ druhé strany. Jest určiti strany.

2. Obvod pravoúhelníka, jehož sousední strany se liší o $2\,m$, jest $36\,m$; jest určiti jeho délku a šířku.

3. Dva vedlejší úhly liší se o polovici menšího úhlu. Jak veliké jsou?

4. Ostré úhly pravoúhlého $\triangle$ jsou v poměru $8:7$; jak veliké jsou?

5. *a)* Kolik stran má mnohoúhelník, je-li součet vnitřních úhlů $20R$?

b) Vnitřní úhel pravidelného n-úhelníka jest 160^0. Kolik stran má n-úhelník?

6. Plocha obdélníka (trojúhelníka) jest $p\,m^2$, výška $v\,m$; jest určiti délku (základnu).

7. Plocha lichoběžníka jest $4\,m^2$; jedna z rovnoběžek $a\,m$, výška $v\,m$; jest určiti druhou rovnoběžku.

8. Obvod pravoúhlého trojúhelníka, jehož jedna odvěsna jest $6\,m$, jest $18\,m$. Jest určiti druhé dvě strany.

9. Zvětšíme-li jednu stranu čtverce o 6 a sousední zmenšíme o 6, po-stane tím obdélník, jehož plocha $= 13\,m$? Jest určiti stranu čtverce.

10. Obdélník jest o $15\,m$ delší a o $12\,m$ užší než čtverec a tím o $30\,m^2$ menší. Jest určiti délkové rozměry obou ploch.

11. Rozdíl sousedních stran v obdélníku jest $5\,cm$; zvětšíme-li každou stranu o $2\,cm$, zvětší se tím obsah o $46\,cm^2$.

12. *a*) Jest určiti poloměr kruhu vepsaného do pravidelného $\triangle$, jehož výška jest $v\,cm$; *b*) jest určiti poloměr kruhu opsaného.

B*).

1. Průměr kruhu jest o $6\,cm >$ tětivy, jejíž vzdálenost od středu kruhu jest $5\,cm$. Jest určiti poloměr kruhu.

2. *a*) Plocha čtverce jest p $(= 8\,m^2)$; jest určiti úhlopříčnu (u) jeho. (Strana čtverce $s =$ pom.)

b) Úhlopříčna čtverce jest u; jest určiti plochu čtverce.

3. *a*) Plocha čtverce do kruhu vepsaného jest p $(= 12{\cdot}5\,m^2)$; jest určiti poloměr kruhu.

b) Jest určiti stranu čtverce do kruhu vepsaného, je-li plocha kruhu $K\,m^2$.

4. *a*) Jest vypočítati plochu kruhu, jehož obvod jest $o\,m$. *b*) Jsou dány 2 kruhy; obvod 1ho jest $o\,m$, plocha druhého $k\,m^2$. Jest určiti poloměr kruhu třetího, jehož plocha se $=$ součtu ploch kruhů daných. (Vyčísliti správné až na mm pro $O = 7{\cdot}02\,m$, $K = 43\,m^2$).

5. Jest určiti stranu čtverce vepsaného do kruhu, jehož obvod jest $O\,m$.

6. Jest vypočítati stranu pravidelného, do kruhu vepsaného $\triangle$, je-li dán *a*) obvod kruhu, *b*) plocha kruhu.

7. Jest vypočítati plochu rovnostranného $\triangle$, jehož strana jest $a\,m$.

8. Válec a krychle mají rovné povrchy i podstavy. Jest vypočítati výšku válce, je-li hrana krychle $a\,m$.

9. Válec a krychle mají rovný povrch; podstava válce jest vepsána do stěny krychle, jejíž hrana jest $a\,m$. Jest určiti výšku válce. ($a = 8\,m$; správné na millimetry.)

§ 137. **Různé rovnice.**

1. Žák tázán jsa v r. 1893, kdy založena universita pražská odpověděl: Za 10 let bude tomu 555 roků.

2. Vsadí-li sadař stromky do 8 řad po 13ti, zbude mu jich právě tolik, co se jich nedostává, chce-li učiniti 4 řady po 29. Kolik měl stromků?

3. Ve sněmovné hlasovalo 306 poslanců; kolik poslanců hlasovalo **pro** a kolik **proti**, byl-li návrh přijat většinou 56ti hlasů?

---

*) Ježto úlohy tyto jsou v podstatě rovnice o 2 neznámých, možno je ponechati až ku § 146.

4. Dva hráči měli dohromady 3 K; vyhrál-li prvý 20 h, měl dvakráte tolik co spoluhráč. Kolik měli přede hrou?

5. Ve dvou třídách je rovně žáků; přejde-li 10 žáků z 1. třídy do druhé, je počet žáků v třídě této 2krát větší. Kolik žáků bylo v třídě?

6. Chlapec měl v pravé ruce o 12 h více než v levé; dal-li z levé ruky 1 h žebrákovi a 10 h do pravé ruky, měl v ní 3krát více než v levé. Kolik h měl v každé ruce?

7. Hráč prohrál o 1 K více než polovici svých peněz; ze zbytku opět polovici a 2 K; kolik měl přede hrou, zbyla-li mu 1 koruna?

8. Hráč maje 14 K, prohrál p i prvé jistou část, po druhé polovici zbytku, po třetí opět $\frac{1}{2}$ zbytku a konečně prohrál dvakrát tolik co poprvé, tak že se mu 1 K nedostávala. Kolik prohrál po prvé?

9. Obchodník vydal při kupování zboží třetinu, čtvrtinu a pětinu svých peněz; za zbytek koupil 13 m sukna po 3 zl. 60 kr. Kolik peněz vydal?

10. Stáří otcovo jest 5krát $>$ stáří synova. Za 8 let bude otec 3krát starší syna. Kolik let jest každému?

11. 12 roků a 3 roky jest stáří dvou bratrů; za kolik let bude stáří staršího trojnásobné?

12. Stáří muže činilo před 12 lety $\frac{2}{3}$ toho stáří, jehož dosáhne za rok; jak jest stár?

13. † Otci jest 42, synu 10; za kolik roků bude otec 5krát starší syna?

14. Žák dostával od otce za každou správnou úlohu 10 kr. a za každou chybnou vrátil otci 15 kr. Když byl vypracoval 12 úloh, zbylo mu z toho, co od otce dostal, právě polovice. Kolik bylo kterých úloh?

15. Při stavbě pracuje 32 dělníků, zedníci mají 1 zl. 20 kr. denní mzdy, nádenníci 60 kr.; kdyby se zedníkům 10 kr. na mzdě ubralo a nádenníkům 20 kr. přidalo, zvýšila by se denní mzda toliko o 40 kr. Kolik bylo zedníků a kolik nádenníků?

16. Při zábavě dítek bylo mezi diváky 2krát více žen než mužů. Diváků bylo o 5 méně než dítek. Kolik bylo mužů, žen i dětí, bylo-li všech úhrnem 75?

17. Ve společnosti bylo 2krát tolik mužů co žen; když pak čtyři muži s chotěmi odešli, zbylo tam mužů 4krát více; kolik mužů a kolik žen bylo původně ve společnosti?

18. Kdosi nesl na trh košík vajec a chtěl prodávati kus za 2 kr. Na cestě jich z neopatrnosti 6 rozbil; aby si škodu nahradil, prodával zbylá vejce po $2\frac{1}{2}$ kr. Kolik vajec nesl?

19. Chlapec koupil dvakrát více hrušek než jablek. Hrušky dostal 3 a jablka 2 za 1 kr. Kolik hrušek a jablek obdržel, zaplatil-li za obě 14 kr.?

20. Kdosi koupil 3 kg kávy a 12 kg cukru za 12 zl.; za kg kávy a *kg* cukru dohromady platil 2 zl. 80 kr. Zač koupil kávy, zač cukru a po čem?

21. Jest nalézti zlomek, jehož čitatel jest o 10 menší jmenovatele a jenž se promění ve $\frac{3}{4}$, jestliže od čitatele 1 odečteme a ku jmenovateli 1 přičteme.

22. Do vodní nádržky vedou tři roury; první naplní se nádržka za 9, druhou za 12 a třetí za 18 hodin. Za kterou dobu se naplní nádržka současným tokem všech tří rour?

23. Nádoba se naplní první rourou za $\frac{1}{2}$ hod. a vyprázdní druhou rourou za $\frac{5}{4}$ hodin. Za kolik minut naplní se nádoba, jsou-li obě roury v činnosti?

24. Sluhovi slíbena strava, šat a 60 zl. roční služby. Po 6 měsících byl propuštěn a dán mu šat a 15 zl. služného; zač byl šat počítán?

25. Z 56 *m* prodána část se ziskem $\frac{1}{2}$ zl. při 1 *m*; zbytek prodán se ztrátou $\frac{1}{5}$ zl. při 1 *m*; tím získáno celkem 21 zl. Kolik *m* prodano se ziskem, kolik se škodou?

26. Uhelné doly A a B jsou od sebe vzdáleny 20 *km*. V A se prodává kvintal uhlí za 80 kr., v B za 60 kr. Za dovoz se platí 2 kr. za *km* a kvintal. Jest nalézti místo mezi A a B, v němž by lhostejno bylo kupovati uhlí z A neb z B.

27. Obchodník koupil sukno 1 *m* po 3 zl. a prodav je se ziskem 10% utržil za ně 780 zl.; kolik metrů koupil?

§ 138. **Rovnice o 2 a více neznámých.** *a*) Dosadíme-li do rovnice I. stupně o dvou neznámých (na př. $2x + 3y = 18$) za jednu neznámou libovolnou hodnotu (na př. $x = 3$), promění se tím rovnice v rovnici o 1 neznámé ($2 . 3 + 3y = 18$), z níž možno určiti neznámou druhou $y = 4$. Takovéto 2 k sobě příslušné hodnoty (3, 4), jež rovnici $2x + 3y = 18$ vyhovují, zovou se dvojicí kořenovou, čili jedním řešením. Patrno, že rovnice I. stupně o 2 neznámých má nekonečně mnoho řešení. Jest určiti několik řešení rovnice $2x + 3y = 18$.

Podobně má i rovnice o 3 a více neznámých nekonečně mnoho řešení, na př.: $2x + 3y + 4z = 25$, (4, 3, 2), (3, 1, 4), (3, 5, 1) atd. Jedinou rovnicí o 2 neznámých nejsou neznámé úplně určeny.

b) Dvě rovnice o dvou [týchž] neznámých tvoří soustavu rovnic o 2 neznámých. Na př.: $2x + 3y = 18$, $3x - 4y = 10$. Tu se snadno přesvědčíme, že řešení jedné rovnice může, avšak nemusí vyhověti zároveň rovnici druhé. Na př. dvojice kořenová (6, 2) vyhovuje oběma rovnicím, jest tedy kořenem soustavy, kdežto (3, 4) nikoliv. Píšeme-li za $x = 1, 2, 3 \ldots$ (mimo 6), obdržíme pro y z každé rovnice jinou neznámou.

c) Vznikla-li druhá rovnice soustavy z prvé pouhým přetvořením, pak vyhovují všecka řešení rovnice prvé zároveň rovnici druhé. Rovnice takové zovou se na sobě **závislé**. Jimi neurčuje se žádná dvojice kořenová.

d) Nevyhovuje-li soustavě rovnic žádná dvojice kořenová, zoveme soustavu spornou. Každá rovnice sama o sobě může býti bezvadnou, ale současně nemůže býti oběma vyhověno jedinou dvojicí; rovnice k sobě nepatří, nejsou k sobě příslušné, na př.: $x + y = 2$, $x + y = 3$ tvoří soustavu spornou, neboť není možno, aby součet týchž veličin byl jednou 2 a podruhé 3.

Jsou-li 2 rovnice o 2 neznámých na sobě nezávislé a k sobě příslušné, jsou obě neznámé jimi určeny. A naopak: K určení dvou neznámých jest třeba dvou nezávislých a příslušných rovnic.

e) Rovnice o 2 neznámých jest upravena, má-li tvar $ax + by = c$. I upravují se dle týchž pouček, jako rovnice o 1 neznámé.

Řešení soustavy rovnic o 2 neznámých. Vyloučíme-li (eliminace) vhodným sloučením obou rovnic jednu z neznámých, obdržíme rovnici o 1 neznámé, kterou lze rozřešiti. Na př.: Sečtením rovnic $x + y = 7$ a $x - y = 1$, obdržíme $2x = 8$; $x = 4$ a dosazením (substituce) vypočítané hodnoty do některé z daných rovnic vypočítáme druhou neznámou: $4 + y = 7$; $y = 3$. (4, 3) jest kořenovou dvojicí soustavy $x + y = 7$, $x - y = 1$, neboť $4 + 3 = 7$, $4 - 3 = 1$. § 139

Jednu neznámou možno vyloučiti

1) **návodem srovnávacím** (comparací), na př.:

$$\begin{array}{r|l} x + 3y = 11 & x = 11 - 3y \\ 3x - 4y = 7 & x = \dfrac{7 + 4y}{3} \end{array}$$

$$11 - 3y = \frac{7 + 4y}{3};\quad 33 - 9y = 7 + 4y$$

$$13y = 26;\quad y = 2.$$

$$x + 3 \,.\, 2 = 11;\quad x = 5.$$

Rozřešíme li obě rovnice dle **téže** neznámé, budou pravé strany rovnic rovné (proč?) i možno z nich sestaviti rovnici o 1 neznámé a rozřešiti. ($y = 2$)

Druhou neznámou (x) vypočítáme z rovnice jednodušší dosazením.

2) **Návodem dosazovacím** (substitucí), na př.:

$$\begin{array}{r|l} x + 3y = 11 & x = 11 - 3y \\ 3x - 4y = 7 & 3(11 - 3y) - 4y = 7 \end{array}$$

$$33 - 9y - 4y = 7;\quad 26 = 13y$$

$$y = 2;\quad x + 3 \,.\, 2 = 11;\quad x = 5.$$

Jednu z rovnic (kterou?) rozřešíme dle jedné (které?) neznámé a vypočítanou hodnotu dosadíme do rovnice druhé (proč ne do téže?). Tím obdržíme rovnici o 1 neznámé, již rozřešíme.

3) Návodem stejných součinitelů (eliminací). Mají-li upravené rovnice součinitel jedné neznámé stejný, tu sečtením neb odečtením rovnic tato neznámá zmizí. Není-li stejného činitele, rozšíříme činitele jedné neznámé (které?) na nejmenší společný násobek, na př.:

$$\begin{array}{r|l}5x+6y=27 & -2;\quad -10x-12y=-54\\ 6x+4y=26 & 3;\quad 18x+12y=78\end{array}$$
$$8x=24;\quad x=3;\quad y=2.$$

Zde se rozhodneme pro vyloučení y, ježto jeho součinitele vedou k menšímu společnému násobku než při x.

Násobíme-li první rovnici 2ma, druhou 3mi a sečteme, obdržíme $8x=24$; druhou neznámou (y) možno sice vypočítati rovněž eliminací, substituce $x=3$ vede však rázem k cíli.

Návod 3) jest nejvšeobecnější. Substituce jest výhodná, má-li neznámá součinitel $=1$ a nejsou-li rovnice upravené; zvláště má-li jedna rovnice toliko jednu neznámou. V tom případě vede mimo substituci rychle k cíli vzájemné násobení neb dělení rovnic; na př.:

α) $$\begin{array}{r|l}a=by^2 & \times;\ a^2y^2=bcxy^2;\quad x=\dfrac{a^2}{bc};\quad y=\pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}.\\ ay^2=cx & \end{array}$$

β) $$\begin{array}{r|l}a=by^2 & :;\ \dfrac{cx}{a}=\dfrac{a}{b};\quad x=\dfrac{a^2}{bc};\quad y=\pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}.\\ cx=ay^2 & \end{array}$$

γ) $$\begin{array}{r|l}y=\dfrac{a}{x} & \times;\ by=ac;\quad y=\dfrac{ac}{b};\quad x=\dfrac{b}{c}.\\ b=cx & \end{array}$$

Rozřeš soustavy α) β) γ) substitucí.

Comparace se užívá, jsou-li obě rovnice již dle téže neznámé rozřešeny.

Cvičení: Jest rozřešiti tyto soustavy rovnic cestou nejvhodnější:

1. $x+y=11,\ x-y=5.$ **2.** $3x+4y=23,\ 3x-5y=5.$ **3.** $3x+2y=29,\ 5x-2y=27.$

4. $y=3x,\ y=4x-2.$ **5.** $3x-7y=4,\ x=3y.$ **6.** $7x-4y=-3,\ y=2x.$

7. $5x-3y=16,\ x=4y-7.$ **8.** $6x-5y=37,\ 4x+y=53.$ **9.** $6x-7y=19,\ 3x-2y=17.$

10. $9x+2y=37,\ 6x-5y=-7.$ **11.** $3x+5y=31,\ 4x-7y=14.$ **12.** $2x+3y=38,\ 2y+3x=37.$

13. $12x-7y=2,\ 8x+5y=11.$ **14.** $14y+5z=43,\ 21y-2z=36.$ **15.** $2y+3z=17,\ 3y-4z=0.$

16. $0{\cdot}4z+1{\cdot}3u=9{\cdot}3,\ 1{\cdot}2z-0{\cdot}6u=5{\cdot}4.$ **17.***) $6x-2y=1,\ y=3x-\frac{1}{2}.$

---

*) Viz § 138. c) a d).

18.[*] $7x - 3y = 5,\quad 3y = 7x.$

19. $3 - 2(x-3) = 8 - 5y,\quad 19 - 5(2-y) - 3x = 0.$

20. $(y+3)(z-2) = yz,\quad 3(y-1) - 2(z-3) = 4.$

21. $z : u = 5 : 4,\quad (z-7) : (u-6) = 4 : 3.$

22. $5 : y = z : 2,\quad 6 : (y+1) = 2z : 5.$

23.[**] $(x+y) : (x-y) = 5 : 1,\quad (x-6) : (x+y) = 1 : 5.$

24. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 5,\quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -1.$

25. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 13,\quad \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 11.$

26. $2y + \frac{x}{3} = 14,\quad 3y - \frac{x}{6} = 19.$

27. $\frac{x}{3} + \frac{2y}{7} = 6,\quad \frac{5x}{3} + \frac{3y}{5} = 1.$

28. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 5,\quad \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 5.$

29. $3x = 4y,\quad \frac{900}{x} = \frac{900}{y} - 25.$

30. $\frac{x-y}{3} + \frac{x+y}{2} = 14,\quad \frac{x-y}{5} - \frac{x+y}{4} = 4.$

31. $\frac{5}{2x-y} = \frac{1}{2y-5},\quad \frac{3}{y-3x} = \frac{1}{5-2x}.$

32. $\frac{x+y}{7} + \frac{2x-5}{3} = 2,\quad \frac{x+2y}{2} - \frac{2x-y}{5} = 4.$

33. $2 - \frac{11-6y}{3} = \frac{x+1}{12} - \frac{4x-15y}{8},\quad 1 - \frac{6x-3}{5} = \frac{y}{4} - \frac{9-x}{2}.$

34. $\frac{x-1}{3} - \frac{3y-4x}{6} = \frac{49}{24} - \frac{x+2}{8},$

$y - 3 + \frac{5y-3x}{4} = 2x + 3 - \frac{3y+3}{6}.$

35. $\frac{7x-21}{6} - \frac{x-3y}{3} = 4 + \frac{3x-19}{2},$

$\frac{2x+y}{2} - \frac{9x-7}{8} = \frac{3y+9}{4} - \frac{4x+5y}{16}.$

36. $x + y = a,\quad x - y = b.$

37. $ax + by = ab,\quad ax - by = ac.$

38. $ax + by = b,\quad bx - ay = c.$

39. $ax + y = b,\quad x + ay = b.$

40. $ay = bx,\quad x - y = c.$

41. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 10,\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{2b} = 2.$

42. $\frac{a}{b+y} = \frac{b}{a+x},\quad \frac{b}{a-y} = \frac{a}{b-x}.$

---

*) Viz § 138. *c*) a *d*).

**) Odůvodni tuto cestu: $x - y = x - 6$; $y = 6$.

43. $\frac{m}{x} + \frac{n}{y} = a,$ 44. $\frac{m}{x-a} + \frac{n}{y+a} = 1,$

$\frac{n}{x} + \frac{m}{y} = b.$ $\frac{m}{y+a} + \frac{n}{x-a} = 1.$

45. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a,$ 46. $5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 8,$

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = b.$ $3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 7.$

47. $x^2 : y^2 = 9 : 1,$

$x^2 + 16y^2 = 3600.$

§ 140. **Řešení rovnic o 3 a více neznámých.** Jsou-li dány 2 rovnice o 3 neznámých, na př.:

$$1)\ 3x + 2y - 2z = 4; \qquad 2)\ 4x - y + 3z = 17,$$

nemohou býti neznámé jimi určeny, neboť dosadíme-li za jednu neznámou, na př. x, jakoukoliv hodnotu (1, 2, 3 . . .), obdržíme soustavu rovnic o 2 neznámých (y, z), jež je určuje. Tím obdržíme nekonečně mnoho řešení.

Přidáme-li však třetí rovnici s týmiž neznámými, na př.:

$$3)\ 2x - 3y + 4z = 11,$$

určí se jí i třetí neznámá (x), jež dosud byla úplně libovolná. K určení tří neznámých jest třeba tří nezávislých a k sobě příslušných rovnic. Řešení děje se tak, že z daných rovnic, na př. z rovnice 1) a 2) a z 2) a 3) vyloučíme dvakrát *touž* neznámou*). Tím obdržíme soustavu dvou rovnic o 2 neznámých, kterou rozřešíme dle § 139. Substitujeme-li vypočtené kořeny do některé (nejjednodušší) z daných rovnic, určí se tím i třetí neznámá.

Příklad:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 3x+2y-2z=4 \\ 2)\ 4x-y+3z=17 \end{array}\right\} 2 \qquad \left.\begin{array}{l} 2)\ 3 \\ 3)\ 2x-3y+4z=11 \end{array}\right\} -1$$

$$\left.\begin{array}{l} 11x+4z=38 \\ 10x+5z=40 \\ 2 \quad\ 1 \quad\ 8 \end{array}\right\} 4 \qquad \begin{array}{r} 3x=6 \\ x=2 \\ z=4 \end{array}$$

Z rovnice 2) plyne $y = 3$. Hledaná trojice kořenová jest tedy (2, 3, 4).

Schází-li v některé rovnici jedna neznámá (rovnice kusá), vyloučíme touž neznámou z dvou ostatních rovnic a tím máme rázem soustavu rovnic o 2 neznámých. Příklad:

$$\begin{array}{l} 1)\ 2x+3y=18 \\ 2)\ 3x+2y-z=10 \\ 3)\ x-5y+3z=4 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 2)\ 3 \\ 3) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 1) \quad -1 \\ 4)\ 10x+y=34 \quad 3 \end{array}\right\} \quad 28x = 84$$

$$x = 3; \quad \text{ze 4)} \quad y = 4 \quad \text{a ze 2)} \quad z = 7.$$

---

*) A to tu, kterou nejsnáze vyloučiti lze.

Jsou-li 2 rovnice kusé, vede z pravidla substituce nejrychleji k cíli. Příklad věc objasní:

1. $5x + 2y - 3z = 4$	$(4y - 5) + 2y - 3(3y - 8) = 4;\ -3y = -15.$	
2. $3y - z = 8$	$z = 3y - 8$	$y = 5.$
3. $5x - 4y = -5$	$5x = 4y - 5$	$z = 7.$
		$x = 3.$

Z rovnic kusých určíme neznámou pomocí té neznáme (y), která se objevuje ve všech rovnicích a dosadíme do rovnice úplné. Tvoří-li 2 rovnice kusé soustavu o 2 neznámých, určíme z ní 2 neznámé a dosadíme do rovnice třetí (viz cvičení 3.). Někdy možno rázem vyloučiti 2 neznámé. (Viz cvič. 9.)

Je-li dána soustava rovnic o 4 neznámých, vyloučíme třikrát touž neznámou a tím obdržíme soustavu rovnic o 3 neznámých. Dále řešíme, jak právě bylo vyloženo.

Cvičení:

1. $x - z = 2,\quad 2y - x = 4,\quad 2z - y = 3.$

2. $x - 2z = 3,\quad 2x - 3y = 2,\quad 2y - 3z = 2.$

3. $x + y + z = 24,\quad 2x + 3y = 38,\quad 5x - 2y = 19.$

4. $2x + 3y + z = 22,\quad 2y - z = 1,\quad 2z + y = 13.$

5. $x + y + z = 25,\quad x : y = 4 : 3,\quad x : z = 3 : 1.$

6. $2x + y - 6z = 9,\quad 2x - 3y = -3,\quad 2y - 3z = 6.$

7. $2x + 4y - 3z = 1,\quad 2y + 5z = 69,\quad 5x - y + 2z = 30.$

8. $2x - y = 2,\quad 3y + z - x = 14,\quad 5x - 3z + y = 4.$

9. $4x - 3y + 2z = 11,\quad 3x - y + 2z = 18,\quad 2x + z = 13.$

10. $3x + 2y - 5z = 7,\quad 4x - y + 3z = 14,\quad 5y - 6x = 2.$

11. $3x + 2y + z = 29,\quad 2x - 3y + 5z = 2,\quad x + 3y + 2z = 19.$

12. $x + y - 2z = 2,\quad 3x - 2y + 3z = 27,\quad 6x - 5y + z = 31.$

13.*) $2x + y + z = 7,\quad x - y + 2z = -4,\quad 3x + y + 2z = 8.$

14.**) $x + y + z = 6,\quad 3x + 2y + z = 10,\quad x + 2y + 3z = 14.$

---

*) $\frac{1) + 2.}{3} + 1 = 3$). Že tu jsou jen 2 neznámé určeny, t j. $(x + z)$ a $(y - z)$, možno ukázati touto úpravou:

$$2(x + z) + (y - z) = 7$$
$$(x + z) - (y - z) = -4$$
$$3(x + z) + (y - z) = 8$$

**) Najdi závislost.

15. $\frac{y}{2} + x = 100,$
$\frac{z}{3} + y = 100,$
$\frac{x}{4} + z = 100.$

16. $y + \frac{x}{2} = 112,$
$\frac{x}{4} + \frac{z}{5} = 36,$
$\frac{2y - z}{z - y} = 3.$

17. $x + \frac{z}{4} = 17,$
$\frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 9,$
$\frac{2x - z}{z - x} = \frac{1}{2}.$

18. $\frac{2x}{3} - y + \frac{5z}{6} = \frac{17}{3},$
$\frac{2y - z}{x} = 1,$
$\frac{5x - z}{2} = y - 1.$

19. $\frac{x + y}{z + 1} = 3,\quad \frac{y + 2z}{x - 3} = 2,\quad \frac{x - z}{y + 1} = 1.$

20. $x + y = a,$
$z + x = b,$
$y + z = c.$

21. $x + y + z = s,$
$x : y = a : b,$
$y : z = b : c.$

22. $x + y + z = 6.$
$x + 3y + u = 11.$
$2x + 2z + u = 12.$
$u - x - y = 1.$

§ 141. **Rovnice slovné o 2 a více neznámých.** Vyžaduje-li úloha slovná, aby určeny byly 2 neznámé, označme je písmenami, (na př. x, y) a sestavme dvě rovnice dle návodu § 131. Že úlohy takové možno řešiti též rovnicí o 1 neznámé, bylo vyloženo v § 132. *b*). Příklad: Někdo koupí za 3 *K* hrušek a jablek: prvních obdrží 5, druhých 4 za desetihaléř. Sousedovi přepustí polovici hrušek a třetinu jablek za 1·3 *K*; kolik koupil hrušek a kolik jablek?

Hrušek koupil x	Cena hrušek + cena jablek = 300 *h*.
Jablek „ y	„ $\frac{1}{2}$ „ + „ $\frac{1}{3}$ „ = 130 *h*.
Cena 1 hrušky $\frac{10}{5}$ *h*.	1) $2x + \frac{5y}{2} = 300.$
„ 1 jablka $\frac{10}{4}$ *h*.	2) $x + \frac{5y}{6} = 130.$

$\frac{5y}{2} - \frac{5y}{3} = 40;\quad 5y = 240;\quad y = 48.\quad x = 90.$ Zkoušku!

Cvičení: **Vztahy čísel. 1.** Viz příklady § 132. *b*).

2. *a*) Jest určiti zlomek, který se promění v $\frac{1}{2}$, přičteme-li ku jmenovateli 1 a který se promění v 1, přičteme-li ku čitateli 2.

b) Který se promění v $\frac{1}{2}$, přičteme-li k čitateli 1 aneb odečteme-li od jmenovatele 2.

3. Jmenovatel prvního zlomku jest 9, druhého 7. Součet obou jest $\frac{44}{63}$; čitatel prvého dělen čitatelem druhého dá podíl 3 a zbytek 2. Jest určiti čitatele těch zlomků.

4. Které číslo děleno jsouc 9ti dá zbytek 6 a děleno 8mi dá zbytek 5 a podíl o 1 větší?

5. Číslo 102 (76) jest rozděliti na 2 díly tak, aby jeden dělen druhým dal podíl 6 (2) a zbytek 11 (13).

6. Dvouciferní číslo psáno jsouc sledem opáčným stane se o 36 větší a děleno jsouc polovičným ciferným součtem dá podíl 8.

Rovnice z oboru počtu procentového a úrokového. Téměř všecka cvičení § 133. možno řešiti rovnicemi o 2 neznámých. Příklad z § 133.: Která jistina vzroste při 5% za 2 roky na 1650 zl.? **§ 142.**

Neznámá jistina $= x$	1) Jistina + úroky = konečné jistině.
„ úroky $= y$	2) úroky $= \frac{J \,.\, p \,.\, r}{100}$.

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & x + y = 1650 \\ 2) & y = \frac{x \,.\, 5 \,.\, 2}{100} \end{array}\right\} \text{atd.}$$

Cvičení: **1.** Viz cvičení 1—11., § 133.

2. Která jistina vzroste za 4 roky na 1073·6 K a za 5 let při % o 1 menším na 1078 K?

3. Jistina 1100 zl. je uložena ve dvou dílech. Jest určiti díly ty, vynese-li prvý při 4% za 3 roky tolik, co druhý při 5% za 2 roky.

4. Věřitel má uloženo u 2 dlužníků 1400 zl. na různá %; od prvního béře 32 zl. úroků, od druhého 30 zl. Vymění-li jim procenta, platí prvý 40 zl. a druhý 24 zl. Kolik % platí každý dlužník?*)

5. Na kolik % jest uložiti jistinu 500 zl., aby za 3 roky vynesla o 3 zl. méně úroků než jiná jistina, jež při % o $\frac{1}{2}$ menších vynese za 4 roky 63 zl.?

6. Počet žáků ve třídě prvé činí 20% počtu úhrnného. Počet jich o 10 zmenšený jest 6krát < počtu žáků všech. Kolik žáků má ústav v třídě 1. a kolik v celku?

7. Jistina na 6% uložená vzroste za 2 roky a 2 měsíce tak, jako jiná při 5% za 4 roky. Zvětšíme-li prvou o 6 zl. a % zmenšíme o 1, vzroste opětně stejně jako druhá při % o 0·45 větším. Jest určiti obě jistiny.

8. Kdosi má platiti dvěma věřitelům po roce 5319 zl.; zaplatí však

*) Polož $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$.

hotovými; věřitel první mu povolí $4\frac{1}{2}\%$ovou, druhý 4%ovou srážku, což činí v celku 219 zl. Kolik byl každému dlužen?

9. Dva bratři koupili dům, nesoucí čistého užitku 560 zl, za 12800 zl.; *a)* jak se rozdělí o užitek, má li prvý svou kupní část úrokovanou 4mi %, kdežto druhý, jenž dům spravuje, 5ti %? *b)* Kolik s'ožil každý z kupní ceny?

§ 143. **Rovnice z oboru počtu směšovacího.** Dle návodu § 134. řešíme úlohu: *a)* Kolik stříbra 12tilotového a kolik 0·9ného jest vzíti, aby zhotovena byla soška, držící 21 *dkg* ryzího stříbra a vážící 24 *dkg*? *b)* Jaká jest jakosť sošky? takto:

a) x *dkg* stř. 12tilot.	1) $x + y = 24$	$15x + 15y = 360$	$y = 20$
y " " 0·9	2) $\frac{12}{16} \cdot x + \frac{9}{10} \cdot y = 21$	$15x + 18y = 420$	$x = 4$

b) Jakosť $= 21 : 24 = 0·875$.

Cvičení: 1. Kolik ryzího zlata a kolik mědi jest smíchati, aby vzniklo 5 *dkg* zlata č. 1.?

2. Zlatník potřebuje 78 *dkg* zlata čís. 3. a má toliko zlato čís. 2. a 4 Jak si pomůže?

3. Kolik zlata 20tikaratového a kolik čísla 3. jest smíchati, aby vzniklo 20 *dkg* zlata jakosti 31 : 40?

4. Kolik stříbra čísla 2. a kolik č. 3. jest smíchati s 1 *kg* mědi, aby povstalo 12 *kg* stříbra čís. 4.?

5. Zlatník smíchal dvoje zlato, poprvé v poměru 2 : 3, podruhé v poměru 3 : 2; poprvé měla směs jakosť 0·66, podruhé jakosť 0·74; jakou jakosť měly smíchané části?

6. Vinárník smíchal dvoje víno a to v poměru 2 : 1, po druhé v poměru 1 : 2; poprvé byl litr směsi za 40 kr., po druhé za 35 kr. Jak drahá vína smísil?

7. Vinárník smíchal víno 1 *l* po 40 kr. a 1 *l* po 45 kr. a prodával 1 *l* směsi po 43 kr. Kolik vzal každého vína, bylo-li směsi 65 *l*?

8. Vinárník smíchal 40 *l* vína dražšího a 24 *l* vína lacinějšího tak, že *l* směsi byl po $40\frac{1}{2}$ kr.; smíchá-li však naopak 40 *l* lacinějšího s 24 *l* dražšího, jest *l* směsi po $43\frac{1}{2}$ kr. Jak drahá vína smíchal?

9. Vinárník smíchal dvoje víno; litr prvého je za a kr., druhého za b kr.; kolik vezme z každého, chce-li míti m litrů po c kr?

10. Kupec smíchal 70%vý líh s 90%vým. Kolik vzal každého, aby obdržel 6 *hl* líhu 84%vého?

§ 144. **Rovnice z oboru pohybu.**

1. *a)* Cvičení 9. z § 135. *b)* Je 12 hodin; kdy budou ručičky tvořiti pravý úhel?

2. Vlak osobní a nákladní, jedouce týmž směrem ze stanic 45 *km* od sebe vzdálených dostihnou se za 5 hodin; jedou-li proti sobě, dostihnou se za 1 hodinu. Jest určiti jejich rychlosti.

3. Dva cyklisté, jedouce týmž směrem, vzdálili se od sebe za 1 minutu o 180 *m* a jedouce směry protivnými o 780 *m*. Jak rychle jeli?

4. Dva chodci o 1075 kroků od sebe vzdáleni setkají se, jdouce proti sobě, za 5 minut. Vyjde-li prvý o minutu později a učiní-li o 25 kroků více, potká druha za 4 minuty; kolik kroků učinil každý v 1 minutě?

5. Posel A má dostihnouti za 4 hodiny posla B, jenž před 2 hod. odešel. Omešká-li se o $\frac{1}{4}$ hodiny, jest mu o $\frac{1}{2}$ *km* za hodinu více uraziti. Jak rychle kráčeli oba poslové?

6. Dva jezdci měří svoji rychlosť na dráze 400 *m* dlouhé. Co jeden objede dráhu třikrát, objede ji druhý 5krát, neboť jede jednou kolem v době o 10 vteřin kratší. Jak rychle jeli oba jezdci?

Různé rovnice. § 145.

1. Z § 137. cvičení 3., 4. 6., 10., 14., 15., 17., 19., 20., 21., 25., 26.

2. V opatrovně jest 112 dětí; z dítěte mladšího 6 let se platí týdně 1 zl., staršího 6 let 1 zl. 25 kr. Za měsíc (= 4 týdny) se vybere 490 zl. Kolik je tam dětí mladších a kolik starších 6 let?

3. *a*) Čtvrtina stáří otcova jest o 2 > stáří synova. Za osm let bude otec třikrát starší syna. *b*) Stáří otcovo má se ku stáří synovu jako 3 : 1; před 5 lety byl poměr ten 4 : 1. Jak stár jest otec a jak syn?

4. † Dva bratři mají tolik roků, co jejich starší bratr 20letý. Za 10 let bude jejich stáří 2krát větší bratrova. Kolik je každému let?

5. Hoch počítaje své boby praví druhému: „Dej mi jich 12 a budeme míti rovně." „Dej mi ty jich 12," odpoví na to druhý, „a budu jich míti dvakrát tolik, co ty." Kolik bobů měl každý hoch?

6. Dva hoši tvoří ze svých peněz různé skupiny. Prvý dvojstup, druhý trojstup. I učiní prvý tolik dvojic, co druhý trojic. Učiní-li oba čtverce, zbude druhému 9 a prvnímu se jich 6 do téhož čtverce nedostává. Kolik peněz má každý?

7. Kdyby byl objem menšího sudu o 5 *l* větší, rovnal by se polovici sudu většího. Vypustí-li se z většího sudu tolik, co se vejde do menšího, z menšího pětina zbytku a z většího tolik, co v menším zbylo, zbude ve větším ještě 21 *l*. Jaký obsah mají oba sudy?

8. V nádobě prvé jest o 12 litrů > než ve druhé. Přelejeme-li z první polovici do druhé a na to z druhé čtvrtinu do prvé, jest v první tolik, co bylo původně ve druhé. Kolik litrů bylo v každé nádobě?

9. Hostinský si dal naplniti 2 soudky vínem; větší bílým *l* po 1 *K*, menší červeným vínem po 72 *h* a zaplatil 35·8 *K*. Doma poznal omyl: Ve větším bylo červené a v menším bílé, čímž měl škody 2·8 *K*. Kolik litrů měl každý soudek?

10. Kupec koupil za 96 zl. dvoje sukno: *m* po 3 zl. a *m* po 4 zl.

Prodal-li je za 111 zl., získal při 1 *m* prvého 50 kr. a druhého 60 kr. Kolik *m* každého koupil?

11. Hráč prvý počav hru měl 3krát < peněz druhého. Vyhrav polovici a 11 peněz měl s druhým rovně. Kolik měli na počátku hry?

12. Měď ponořená do vody jest nadlehčována silou $= \frac{1}{8{\cdot}8}$ váhy: stříbro silou $= \frac{1}{10{\cdot}5}$ váhy. Kolik *dkg* mědi a stříbra má slitina, vážící 78·9 *dkg*, je-li nadlehčována tlakem vody tak, že váží pouze 70·9 *dkg*?

13. Král Hiero Syrakuský dal zlatníkovi 20 liber zlata, by mu zhotovil korunu. Korunu 20 liber vážící dal Archimedovi, aby se přesvědčil, je-li z ryzího zlata. Ve vodě vážila pouze $18\frac{8}{9}$ liber. Byla-li ze stříbra a zlata, kolik každého kovu bylo v koruně? (Zlato ztrácí ve vodě 19·2 díl své váhy.)

14. Hoch měl jablek a hrušek v celku 100 kusů. Zaměnil-li si vždy 2 jablka za 3 hrušky, měl po výměně 120 hrušek. Kolik jablek a kolik hrušek měl původně?

15. Studující koupil tužky a sešity v celku 23 kusů za 1 zl.; tužky 3, sešity 2 za desetník. Kolik tužek a kolik sešitů koupil?

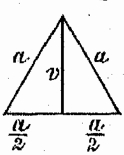
16. Překupník koupil za 2 *K* jablek a hrušek a platil za 4 jablka a za 5 hrušek po 10 *h*; prodával však 3 jablka a 4 hrušky po 10 *h*, čímž získal 60 *h*. Kolik jablek a hrušek měl?

17. Hostinský koupil dvojí zvěř, v celku *a* (80) kusů; jedné dostal *m* (7), druhé *n* (9) kusů za 1 zl. Kolik koupil každé, zaplatil-li za všecky *b* (10) zl.?

18. Sadař koupil dvoje sazenice za 10 zl.; jedněch 7, druhých 9 po 1 zl. Při prodeji prvých získal 6 kr. a druhých 5 kr. na kuse, což činilo úhrnem 4 zl. 35 kr. Kolik koupil každých sazenic?

19. Na koncích tyče 55 *cm* dlouhé jsou zavěšena závaží 4 *kg* a 7 *kg*. Kde jest tyč podepříti, aby tyč nevzala převahu na žádnou stranu?

146. **Rovnice geometrické.** Příklad: Jest vypočítati výšku (v) rovnostranného △, dána-li jeho plocha p cm^2. Ježto neznáme z paměti přímého vztahu mezi v a p, jest zvoliti pomocnou veličinu, která by byla ve vztahu jak s p, tak s v. A to jest strana △ (a); tím přibíráme novou neznámou a proto nutno sestaviti rovnice dvě. Z těch hledíme veličinu pomocnou (a) vyloučiti a určiti toliko hledanou (v) takto:



$$\begin{array}{l} \text{plocha } \triangle = p \\ \text{výška } \ \triangle = v \end{array} > a \begin{pmatrix} \text{strana } \triangle \\ \text{pom. vel.} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l|l|l} p = \frac{a \cdot v}{2} & 2p = av & \\ v^2 = \frac{3a^2}{4} & 2v = a\sqrt{3} & \frac{p}{v} = \frac{v}{\sqrt{3}} \end{array}$$

$$v^2 = p\sqrt{3}; \quad v = \sqrt{p\sqrt{3}}.$$

1. Cvičení § 136. odst. B.

2. Plocha pravidelného △ jest $p\ cm^2$; jest vypočítati stranu. (Výška △ = pom.)

3. Výška pravidelného △ jest $v\ cm$; jest vypočítati plochu. (Strana trojúhelníka = pom.)

4. Plocha rovnoramenného △ jest $p\ cm^2$, základna $2z\ cm$. Jest určiti stranu △. (Výška = pom.)

5. Výška rovnoramenného △ jest $v\ cm$. Součet ramen jest o $2d\ cm >$ základny. Jest určiti základnu.

6. Povrch rovnostranného válce jest $32\ m^2$. Jest určiti *a*) podstavu, *b*) výšku válce

7. Obsah krychle jest $k = 6{\cdot}3\dot{2}\ m^3$; jest určiti povrch krychle (3 desetinná místa).

8. † Strana pravidelného △ jest $a\ cm$; jest nalézti stranu čtverce, který má s △ stejný obvod i plochu.

9. Čtverec a pravidelný △, jehož strana jest $a\ cm$, mají rovný obvod: jest určiti poměr obsahů.

10. Čtyřstěn a roura vzniklá z rovnostranného válce mají stejný povrch. Světlosť roury se rovná zevnějšímu poloměru roury, jenž jest $= 2\ m$. Jest určiti hranu čtyřstěnu správně na cm.

11. Jest vypočítati povrch a obsah pravidelné 4boké pyramidy, jejíž všecky hrany jsou $a\ cm$.

12. Jest vypočítati podstavnou hranu pravidelné 4boké pyramidy, mající výšku rovnou hraně podstavné, je-li dán povrch pyramidy $P\ cm^2$.

13. Do rovnostranného kužele, jehož obsah jest $k\ m^3$, jest vepsán pravidelný čtyrboký jehlan. Jest vypočítati jeho obsah.

14. Rovnostranný válec a pravidelný 6boký hranol mají stejnou podstavu a stejný povrch Jest vypočítati hranu podstavnou, je li hrana poboční $b = 6{\cdot}5731\ldots m$.

15. Povrch rovnostranného kužele jest P; jest vypočítati jeho obsah.

16. Do rovnostranného válce, jehož povrch jest P, jest vepsán přímý kužel. Jest vypočítati jeho povrch.

Úlohy o více neznámých. Je-li určiti 3 čísla, vyhovující třem podmínkám, označme je písmenami (x, y, z) a ze 3 podmínek učiň 3 rovnice. Někdy jest snadno pomocí jediné neznámé vyznačiti všecky tři hledaná čísla a pak stačí jediná rovnice; obyčejně označíme jednu hledanou veličinu písmenem x a ostatní dvě veličiny hledané označíme dle dvou podmínek výrazem x-ovým. Z třetí podmínky utvoříme rovnici určující x. § 147.

Příklad *a*): Které tříciferné číslo má ciferný součet 18 a každou z krajních cifer rovnou osmině zbylé dvojskupiny?

Cifra set $= x$	1) Ciferný součet $= 18$,	$x + y + z = 18$
„ desítek $= y$	2) cifra set = zbylé dvojskup. : 8,	$x = (10y + z) : 8$
„ jednotek $= z$	3) „ jedn. = „ „ : 8.	$z = (10x + y) : 8$

$$\left.\begin{array}{l} 1) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2)\ 8x - 10y - z = 0 \\ 3)\ 10x + y - 8z = 0 \end{array}\right\}8 \left|\begin{array}{r} 9x - 9y = 18 \\ 18x + 9y = 144 \end{array}\right\}^{*)} 27x = 162 \quad \begin{array}{r} x = 6 \\ y = 4 \\ \text{z 1)}\ z = 8 \end{array} \left|\begin{array}{l} 6+4+8=18 \\ 64 : 8 = 8 \\ 48 : 8 = 6 \end{array}\right.$$

Příklad *b*): Číslo 48 jest rozděliti ve 3 díly v poměru 3 : 4 : 5. Označíme-li

díl 1) $= 3x$	je tím vyhověno žádanému dvojpoměru.
„ 2) $= 4x$	Zbývá tedy rovnosť: díl 1) + 2) + 3) = 48.
„ 3) $= 5x$	$3x + 4x + 5x = 48;\quad x = 4$

a tudíž díl 1) = 12, 2) = 16, 3) = 20. Zkoušku!

Úlohy o více neznámých řeší se obdobně.

Cvičení: **1.** *a*) § 132. cvič. 9., *b*) 136. cvič. 1.

2. Jest rozděliti 34 na 3 díly tak, aby prvý byl o 3 > druhého a druhý o 5 > třetího.

3. Tři bratři rozdělili se o dědictví tak, že prvý s druhým měli dohromady 800 *K*, druhý s třetím 700 *K*, třetí s prvým 600 *K*. Kolik obdržel každý a jak veliké bylo dědictví?

4. Hoch koupil jablka, hrušky a vinné hrozny v celku 30 kusů. Jablek 4krát tolik co hroznů, počet hrušek tvořil arith. střed ostatních. Kolik bylo kterých?

5. Při honbě prodáván zajíc za 1 zl. 20 kr., dvé koroptví za 50 kr. a dvé bažantů za 4 zl. 80 kr. I strženo bylo za zajíce a koroptve v celku 64 zl., za koroptve a bažanty 24 zl. Kolik každé zvěře bylo prodáno, bylo-li v celku 95 kusů?

6. Třiciferné číslo má ciferný součet 6. Cifra jednotek jest dvojnásobek set a značí pátý díl čísla dvouciferného, jež zbude, odstraníme-li jednotky.

7. Tříciferné číslo má ciferný součet 15; přední jeho dvojskupina značí číslo o 22 menší než druhá dvojskupina; opáčným sledem psáno stane se o 396 větší.

8. Prostřední cifra tříciferného čísla značí arithmetický střed obou krajních čísel. Zaměníme-li cifru set a desítek, stane se číslo o 90 větší. Zaměníme-li cifru desítek a jednotek, stane se číslo o 9 větší.

9. Tři osoby koupily ovoce za 100 zl. Půjčí-li druhý prvému polovici svých peněz, může tento ovoce sám zaplatiti. Podobně půjčí-li třetí druhému třetinu aneb první třetímu čtvrtinu svých peněz. Kolik peněz měl každý?

---

*) Krátíme-li obě rovnice, počítáme menšími čísly.

10. Tři osoby mají se rozděliti o 700 zl. tak, aby podíl prvý byl s druhým v poměru 2 : 3 a druhý se třetím v poměru 4 : 5.

11. Společnosť 57 osob skládá se z mužů, žen a dětí. Žen jest o 3 více než mužů a dětí o 3 více než dospělých.

12. Jest rozděliti 350 na 3 díly tak, aby díl první rovnal se polovici dílu druhého zvětšeného o 13 a díl druhý zmenšený o 5 byl s dílem třetím v poměru 2 : 3.

13. Jest rozděliti 70 na 3 díly, aby prvý byl o tolik $<$ druhého, oč jest $>$ 5 a aby zvětšený o 5 byl s třetím v poměru 2 : 3.

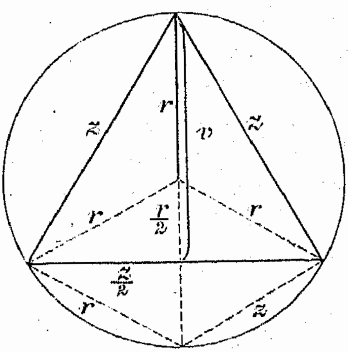
14. Jest rozděliti 36 na 4 díly tak, aby každý následující byl o 3 větší předcházejícího.

15. Jest rozděliti 153 na 4 díly ta , aby každý následující byl 3krát větší předcházejícího.

16. Jest nalézti 4 čísla tak, aby součet prvých dvou byl o 3 $>$ třetího, součet prvých tří byl o 8 $>$ čtvrtého, číslo druhé o 1 $>$ arith. středu čísla prvého a třetího, číslo čtvrté 7krát $>$ rozdílu čísla třetího a druhého.

Úkoly z geometrie. (Viz § 146. a § 136.) **§ 148.**

Příklad: Jest vypočítati plochu (p) pravidelného do kruhu vepsaného $\triangle$, je-li poloměr kruhu r *cm*. Ježto vztahu přímého mezi p a r neznáme, jest hledati pomocné veličiny. Takovými jsou zde z základna $\triangle$ a v = výška $\triangle$, z nichž jedna i druhá jest ve vztahu jak s p, tak s r. Tím přibíráme do úlohy nové 2 neznámé, tak že jest hledati s o u s t a v u t ř í r o v n i c takto:



$$\left.\begin{array}{l}\text{plocha } \triangle = p\\ \text{poloměr } = r\end{array}\right\} > z,\ v^{*)}.$$

1) $p = \frac{z \cdot v}{2}$	$2p = zv$	
2) $\frac{z^2}{4} = r^2 - \frac{r^2}{4}$	$z^2 = 3r^2$	$z = r\sqrt{3}$
3)$^{**)}$ $r = \frac{2}{3}v$	$3r = 2v$	$v = \frac{3r}{2}$

$$2p = r\sqrt{3} \cdot \frac{3r}{2};\quad p = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}.$$

b) Užijeme li vztahu ze cvič. 7. § 136. *B*), možno počítati dvěma neznámými takto:

---

*) Co z a v značí, vyznačeno již nahoře

**) Aneb neznáme-li toho vztahu (viz § 136. cv. 12), užijeme jiného a to:

$v^2 = z^2 - \frac{z}{4}$; (začátečník narýsuje obrazce, z nichž vztahy béře zvláště a označí obrazec číslicí vztahu).

$$\left.\begin{array}{l} 1)\quad p = \frac{z^2\sqrt{3}}{4} \\ 2)\quad z^2 = 3r^2 \end{array}\right\} p = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Návod ku řešení geom. úloh rovnicemi jest tudíž tento: Není-li přímého vztahu mezi danou a hledanou veličinou, přibéřeme veličiny pomocné, které by byly ve vztahu dílem s danou (-ými), dílem s hledanou (-ými) veličinou (-ami) a vytvoříme ze vztahů těch tolik rovnic, co je neznámých. Pomocné veličiny se neurčují, nýbrž vylučují. Je-li v úloze dána nějaká podmínka (rovnosť), užije se jí k sestavení rovnice.

Cvičení: **1.** Jest dána plocha p pravidelného $\triangle$; jest vypočítati a) poloměr opsaného kruhu, b) plochu vepsaného kruhu. (4 místa pro $p = 9\,cm^2$.)

2. Do rovnostranného válce jest vepsán pravidelný a) tříboký jehlan, b) čtyřboký jehlan. Jest vypočítati jeho obsah, je-li poloměr válce R (správně na dm^3 pro $R = 1{\cdot}07\,m$).

3. Jest vypočítati úhlopříčnu krychle, jejíž povrch jest $p = 216\,cm^2$ (na 5 míst).

4. a) Jest vypočítati obsah krychle, je-li úhlopříčna $u = 2{\cdot}03\,m$ (5 míst). b) Obrať.

5. Jest dán povrch P rovnostranného válce. Jest vypočítati povrch vepsaného pravidelného a) rovnoběžnostěnu (správně na cm^2 pro $P = 15\,m^2$), b) 6bokého hranolu (na cm^2 pro $P = 1\,m^2$).

6. Do krychle, jejíž povrch jest $P\,m^2$, jest vepsán přímý kužel. Jest vypočítati jeho a) povrch, b) obsah (správně na dm^3 pro $P = 72\,m^2$).

7. Do krychle, jejíž povrch jest $P\,m^2$, jest vepsán pravidelný 4boký jehlan; jest vypočítati jeho povrch (správně na cm^2 pro $P = 6\,m^2$).

8. Hrana čtyřstěnu jest $a\,m$; jest vypočítati jeho obsah.

9. Hrana čtyřstěnu jest a; jest vypočítati obsah opsaného kužele.

10. Do rovnostranného kužele, jehož poloměr jest $r\,cm$, jest vepsán pravidelný tříboký jehlan. Jest vypočítati jeho povrch.

11. Do rovnostranného kužele, jehož povrch jest K, jest vepsán pravidelný 4boký jehlan. Jest vypočítati jeho povrch.

ČÁSŤ ČTRNÁCTÁ.

Počet spolkový.

§ 149. **Průprava k počtu spolkovému***). a) Je-li srovnati dvě veličiny x, y otázkou kolikrát, vyznačujeme to poměrem $x : y = ?$ Je-li srovnati 3 a více veličin, vyznačujeme to trojpoměrem $x : y : z = ?$ čtyřpoměrem $x : y : z : u = ?$ atd. Tvar $x : y : z$ uzavírá v sobě dva nezávislé poměry (a jeden závislý), proto se zove tvar ten dvojpoměr.

*) Nedostává-li se času, možno § 149. a co na něm založeno, vynechati.

b) Dva rovné dvojpoměry, trojpoměry atd. možno spojiti v úměru řetězovou, na př. $x : y : z = 2 : 3 : 5$, jež jest toliko kratším označením celé soustavy úměr, již budeme zváti řetěz úměr, protože jednotlivé poměry strany levé i pravé souvisí spolu jako články řetězu: člen poslední poměru předcházejícího a člen prvý poměru následujícího se rovnají. Na př. řetězová roura $x : y : z = 2 : 3 : 5$ chová v sobě tento řetěz úměr:

$$\left.\begin{array}{l} x : y = 2 : 3 \\ y : z = 3 : 5 \end{array}\right| \text{ z nichž plyne násobením stran úměra třetí } x : z = 2 : 5.$$

Aneb z úměry řetězové $x : y : z : u = 3 : 4 : 5 : 6$ plyne řetěz úměr:

$$\left.\begin{array}{l} x : y = y : 4 \\ y : z = 4 : 5 \\ z : u = 5 : 6 \end{array}\right|$$

z nichž možno vytvořiti úměry $x : z = 3 : 5$, $x : u = 3 : 6$, $y : u = 4 : 6$. Ze čtyř stejnolehlých členů úměry řetězové možno utvořiti úměru jednoduchou.

c) Z úměry řetězové $x : y : z : u = 3 : 4 : 5 : 6$ možno vytvořiti řadu stejných poměrů: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{u}{6}$.

Důkaz: Zaměníme-li v *b*) členy vnitřní, obdržíme:

$$\left.\begin{array}{l} x : 3 = y : 4 \\ y : 4 = z : 5 \\ z : 5 = u : 6 \end{array}\right| \text{ čili } x : 3 = y : 4 = z : 5 = u : 6.$$

Důsledek: Naopak z rovných poměrů $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ možno utvořiti úměru řetězovou $x : y : z = a : b : c$.

d) Trojpoměr se neruší, násobíme-li neb dělíme-li všecky jeho členy týmž číslem, na př.: $x : y : z = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = 6 : 4 : 3$. Důkaz: Utvoříme li z řetězové úměry rovné poměry: $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}}$ a násobíme-li jmenovatele těchto složených zlomků nejmenším společným jmenovatelem 12, neporuší se rovnosť; i bude $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$ čili $x : y : z = 6 : 4 : 3$. Tak se z řetězové úměry odstraňují zlomky.

e) Sečtením stejnolehlých členů rovných poměrů, na př.:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} = \ldots$$

možno vytvořiti poměr součtový $\frac{x + y + z + u + \ldots}{a + b + c + d + \ldots}$, jenž se daným poměrům rovná. Důkaz:

$$\left.\begin{array}{l} x : a = m \\ y : b = m \\ z : c = m \\ u : d = m \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x = am \\ y = bm \\ z = cm \\ u = dm \end{array}\right| \begin{array}{l} x + y + z + u = m\,(a + b + c + d) \\ \dfrac{x + y + z + u}{a + b + c + d} = m. \end{array}$$

§ 150. **Počet spolkový.** Úlohy, v nichž jest rozděliti číslo na více dílů dle daných poměrů, řeší se počtem spolkovým. Čísla dané poměry vyznačující, zovou se čísla poměrná; na př.: „Jest rozděliti s na tři díly v poměru $a : b : c$." Že úlohy takové možno řešiti rovnicemi o 1 neb více neznámých, bylo ukázáno v příkladech (§ 132. b) cvič. 5. a 9. a § 140. cvič. 21.). Ježto však výsledky tohoto řešení lze snadno pamatovati, tvoříme pro řešení počtu spolkového zvláštní pravidlo. Označíme-li

první díl ax, druhý „ bx, třetí „ cx — je vyhověno podmínce: $ax : bx : cx = a : b : c$, a ježto $ax + bx + cx = s$, jest $x = \frac{s}{a+b+c}$.

Tudíž:

$$\text{díl prvý} = \frac{as}{a+b+c}$$
$$\text{„ druhý} = \frac{bs}{a+b+c}$$
$$\text{„ třetí} = \frac{cs}{a+b+c}$$

Celek dělíme součtem poměrných čísel a podíl násobíme příslušným číslem poměrným.

Jest patrno, že α) kdyby čísla poměrná měla společný činitel, tento by se ve výsledku krátil. β) Kdyby poměrná čísla byla lomená, možno násobením společným jmenovatelem odstraniti zlomky a čísla poměrná nahraditi čísly celými, na př.: 52 jest rozděliti v poměru $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$, počítáme-li se zlomky, bude $\frac{s}{a+b+c} = \frac{52}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} \left| \frac{12}{12} \right. = \frac{52 \,.\, 12}{6+4+3}$

$$\text{a tudíž díl prvý} = \frac{52 \,.\, 6}{6+4+3}$$
$$\text{„ druhý} = \frac{52 \,.\, 4}{6+4+3}$$
$$\text{„ třetí} = \frac{52 \,.\, 3}{6+4+3}$$

t. j. výsledky jsou právě takové, jako kdybychom hned v úloze byli čísla poměrná $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ násobili společným jmenovatelem 12 a nahradili je celými: $6 : 4 : 3$.

b) Označíme-li díl prvý x, druhý y, třetí z, možno sestaviti tyto rovnice:

$$x + y + z = s,$$
$$x : y : z = a : b : c.$$

Vytvoříme-li z řetězové úměry úměru součtovou, bude

$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, z čehož plyne totéž co v a).

Příklad a) bychom řešili takto:

$$x + y + z = 52$$
$$x : y : z = \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} \mid 12$$
$$x : y : z = 6 : 4 : 3$$

$$\frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{52}{13} = 4,$$
$$x = 24, \quad y = 16, \quad z = 12.$$

Cvičení*): **1**. Jest rozděliti 91 ve dva díly v poměru 8 : 5.

2. Jest rozděliti 140 dle poměru $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$.

3. 640 rozděl ve tři díly v poměru 4 : 7 : 9.

4. 2820 jest rozděliti dle poměru $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$.

5. Jest rozděliti 42 dle poměru 32 : 28 : 24.

6. Jest rozděliti 30 dle poměru 5 : 10 : 15 : 20.

7. Jest rozděliti 399 dle poměru $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$.

8.*) Dvě osoby koupily los a vyhrály 800 zl. Kolik obdržela každá osoba po srážce 15% daně z výhry?

9.*) Ke společnému obchodu dal A 2800 *K*, B 3600 *K*, C 4000 *K*. Kterak se rozdělili o zisk 1300 *K*?

10. Obchodníkovi dřívím, jemuž živelní nehoda zničila sklad, zbylo 1500 zl. jmění. Kterak se vyrovnal se svými věřiteli, z nichž byl 1mu dlužen 1000 zl., 2mu 850 zl., 3mu 650 zl.

11. Obchodník upadl v konkurs. *a*) Na kolik procent se vyrovnal se svými věřiteli, jimž byl dlužen 3000, 3200, 1200, 2800 zl., zbylo-li mu 6528 zl. *b*) Kolik obdržel každý?

12. K výrobě střelného prachu ručničného béře se 75% ledku, 15% uhlí a ostatek síry. Kolik které částky je potřebí k výrobě 800 *kg* prachu?

13. Bronzové mince rázu korunového jsou slity z 95 dílů mědi, 4 dílů cínu a 1 dílu cinku. Kolik *mg* každého kovu drží v sobě haléř, váží-li 600 haléřů 1 *kg*?

14. Uhličitan vápenatý má vzorec $CaCO_3$; atomová váha prvků jest po řadě 40, 12, 16. *a*) Kolik kterého prvku jest obsaženo v 1 *kg* uhličitanu vápenatého? *b*) Kolik vápna páleného a kolik kysličníku uhličitého jest v nich obsaženo?

15. Věřitel má půjčeno u tří dlužníků 1210 zl. a to na 4, $4\frac{1}{2}$ a 5%. Kolik má půjčeno u každého, jestliže úroky všech dlužníků jsou stejny? *a*) rovnicemi, *b*) počtem spolkovým?

16. Tři hoši vyvážili břemeno na páce závažími, jež zavěsili ve vzdálenostech 4, 5, 6 *dm* od osy a užili k tomu v celku 185 *dkg*. Kolik *dkg* zavěsil každý při svém pokusu?

17. Jak veliké jsou vnitřní úhly čtyřúhelníka, jsou-li v poměru 3 : 4 : 5 : 6?

18. Strany $\triangle$ jsou 5, 6 a 7 *cm*. Jest vypočítati strany $\triangle$ podobného, jehož obvod jest 9 *dm*.

19. Strany čtyřúhelníka jsou 11, 15, 18, 22 *cm*. Jest určiti strany podobného čtyřúhelníka, jehož obvod jest 33 *dm*.

*) Ve mnohých úlohách má podíl $\frac{s}{a+b+c}$ zvláště názorný význam. Ať jej neopomine žák určiti a počítá dále pouhým závěrem.

20. A účastnil se obchodu se 4000 zl. po dobu 3 měsíců, B s 5000 zl. po 2 měs., C 6000 zl. po 4 měs. Jak se rozdělili o zisk 230 zl.? (Složený počet spolkový.)

Návod: Podíl na A připadající byl by týž, kdyby se byl A účastnil částkou 3×4000 zl. po dobu 1 měsíce. Podobně B i C atd.

21 A počal obchod s 2400 *K*; za 6 měsíců přijal společníka B s 1500 *K*. Za 4 měsíce na to přidal B. do obchodu ještě 3800 *K*. Po 2 letech dělili se o zisk 1378 *K*. Kolik obdržel každý?

22. Povozník získal 1734 zl. tím, že pracoval při 3 stavbách a to se 6 koni po 4 týdny, s 8 koni po 5 týdnů a s 12 koni po 6 týdnů. Kolik získal při každé stavbě?

23. Tři podnikatelé najali stavbu navigační hráze za 4196 *K*; prvý pracoval s 36 dělníky po 20 dní po 10 hod., druhý s 20 dělníky po 24 dní po 11 hod., třetí s 25 dělníky po 25 dní po 12 hod. Kterak se rozdělili o zisk?

24. Kdosi byl dlužen 200 zl. po 12 měsíců, 1000 zl. 9 měsíců, 3000 zl. 5 měsíců a platil celkem 364 zl. úroků. Kolik obdržel každý věřitel?

25. Tkadlec měl objednávku na 15 *m* látky 60 *cm* široké, 12 *m* látky 70 *cm* široké a 10 *m* látky 90 *cm* široké, k čemuž obdržel 92 *kg* příze. Jak rozdělí přízi mezi dělníky, z nichž každý jednu látku zhotoviti má?

26. Kdosi vypůjčil si část peněz 1. ledna od jednoho věřitele; od druhého věřitele vypůjčil si 1. dubna polovici předešlé části a 1. srpna od třetího věřitele tolik, co od obou dohromady. Koncem roku platil 168 zl. úroků. *a*) Kolik obdržel každý věřitel? *b*) Kolik si vypůjčil od každého a na kolik procent, byl-li celý dluh 4200 zl? (Po případě jest řešiti rovnicemi.)

ČÁSŤ PATNÁCTÁ.

Složená trojčlenka.

51. (Viz § 59., § 65. př. 1., § 66.)

Příklad: „Vystaví-li 8 zedníků za 5 dní 50 m^3 zdiva, za kolik vystaví 10 zedníků 75 m^3 zdiva?“ Úlohy takové píšeme pro snazší přehled (viz § 59.) v řádky a sloupce a to podmínku do 1ho řádku a otázku do 2ho tak, aby stejnojmenné veličiny přišly v sloupce a hledaná veličina na konec. Tudíž:

Podmínka:	Vystaví-li 8	zedníků	50 m^3	zdiva za 5 dní.
Otázka:	Vystaví 10	„	75 m^3	„ „ x „

Úloha tato upomíná na jednoduchou trojčlenku. Jsou zde však tři druhy závislých veličin. Každý druh jest závislý na obou ostatních, druhy ty však jsou na sobě nezávislé; na př.: Doba x se mění i počtem zedníků i množstvím zdiva, počet zedníků však možno měniti bez ohledu na množství zdiva. Ptáme-li se po závislosti druhů dvou, předpokládáme, že třetí druh se nemění. Tak jest doba pracovní přímo závislá na množství zdiva (ceteris paribus, t. j. nemění-li se počet zedníků) a zvratně závislá na počtu pracujících.

Úlohy, v nichž se vyskytuje více druhů veličin, z nichž jedna jest závislá na *všech* ostatních (buď přímo neb zvratně), řeší se složenou trojčlenkou. My budeme řešiti úlohy ty především *a*) závěrem. K tomu cíli klademe celou řadu pomocných otázek, jež se liší od podmínky toliko jediným druhem a soudíme dle § 60. rázem na pomocnou neznámou, na př.:

Podmínka:	Vystaví-li	8 zed.	$50 m^3$ zdiva	za 5 dní.
1) Pomocná otázka:	Vystaví	2 „	$50 m^3$ „	„ 5×4 dní.
2) „ „	„	10 „	$50 m^3$ „	„ $\frac{5 \times 4}{5}\Big\vert\frac{1}{1}$ dní.
3) „ „	„	10 „	$25 m^3$ „	„ $\frac{4}{2}\Big\vert\frac{2}{-}$ dní.
4) „ „	„	10 „	$75 m^3$ „	„ $2 \times 3 = 6$ dní.

Z toho patrno, že měníme nejprve číslo prvého sloupce v číslo psané v otázce tak, jak v § 60. bylo vyloženo. Na to zůstává sloupec prvý nezměněn a měníme číslo sloupce druhého v číslo psané v otázce.

Chceme-li ušetřiti práce, netřeba poslední sloupec vypisovati, nýbrž vyznačovati vše v prvním řádku.

b) Řešení jednoduchými úměrami: Vpíšeme-li mezi podmínku a otázku pomocnou otázku tak vytvořenou, aby číslo sloupce prvního shodovalo se s podmínkou a číslo sloupce druhého s otázkou, možno z řádku 1ho a 2ho vytvořiti jednoduchou úměru, z řádku 2ho a 3ho též. Vyloučíme-li z obou úměr pomocnou neznámou, jest úloha rozřešena; na př.:

Podmínka:	Vystaví-li 8 zedníků	$50 m^3$ zdiva	za 5 dní	$\frac{50}{75} = \frac{5}{y}$	$\times$
Pomocná otázka:	„ 8 „	$75 m^3$ „	„ y „		
Daná otázka:	„ 10 „	$75 m^3$ „	„ x „	$\frac{10}{8} = \frac{y}{x}$	

$$\frac{50}{75} \cdot \frac{10}{8} = \frac{5}{y} \cdot \frac{y}{x}; \quad x = 6.$$

Při 4 druzích je třeba dvou obdobně upravených otázek pomocných.

Cvičení: Úlohy tyto jest řešiti vesměs závěrem, jen složitější jednoduchými úměrami.

1. Spotřebuje-li 8 koní 5 *hl* ovsa za 6 dní, *a*) kolik *hl* spotřebuje 12 koní za 10 dní, *b*) jak dlouho vystačí 3 koně s 10 *hl*?

2. Vyseje-li se na pole 250 *m* dlouhé a 40 *m* široké 2 *hl* pšenice, kolik se vyseje na pole 180 *m* dlouhé a 100 *m* široké?

3. Kniha čítající 160 stran, má na každé straně průměrně 36 řádků po 51 písmenech; kolik bude míti stran, tisknou-li se na stranu toliko 32 řádky po 54 písmenech?

4. 6 *ha* pole zoře se 3mi potahy za 3 dny. *a*) Za kolik dní se zoře 10 *ha* 4 potahy? *b*) Kolik zoře 1 potah denně?

5. Povozník vezl 6 *q* do vzdálenosti 15 *km* za 9 zl. 90 kr. *a*) Zač by vezl 8 *q* do vzdálenosti 12 *km*? *b*) Kolik *q* by vezl za 11 zl. do vzdálenosti 10 *km*?

6. 3600 mužů vystačí se zásobou mouky 8 měsíců, dostane-li každý denně $1\frac{1}{4}$ *kg* chleba. Kolik dostane každý, má-li zásoba stačiti $7\frac{1}{2}$ měsíce a přibude-li k nim ještě 400 mužů?

7. Ze 160 *kg* příze možno zhotoviti 180 *m* látky $1\frac{3}{4}$ *m* široké; kolik *m* látky $1\frac{1}{2}$ *m* široké možno zhotoviti ze 64 *kg* příze?

8. Viz § 66. Kolik úroků vynese jistina 4800 *K* při 5% za 2 roky 9 měsíců 15 dní?

9. Která jistina vynese za 3 roky při $4\frac{1}{2}$% 837 zl. úroků?

10. Za kterou dobu vynese jistina 2320 *K* (1470) při $4\frac{1}{2}$% ($3\frac{1}{2}$) 239·25 *K* (137·2) úroků?

11. Na kolik % jest uložiti jistinu 3360 zl. (7840), aby vynesla za 2 roky 6 měs. (1 rok 6 měs.) 462 zl. (705·6) úroků?

12. Vynese-li jistina 930 zl. za $1\frac{3}{4}$ roku 72 zl. úroků, za kolik let vynese jistina 560 zl. 64 zl. úroků při týchž %? *a*) závěrem, *b*) rovnicemi, *c*) jednoduchými úměrami.

13. Jistina 3400 zl. vynese při $4\frac{1}{2}$% 180 zl. úroků. Na kolik % jest uložiti jistinu 2000 zl., aby v téže době vynesla 100 zl. úroků?

14. Která jistina vynese při $5\frac{1}{2}$% za 3 roky 9 měs. tolik úroků, co jistina 836 zl. při $4\frac{1}{2}$% za 3 roky 4 měs.?

15. Vynese-li jistina 1344 *K* za 2 roky 10 měsíců 192·24 *K* úroků, kolik úroků vynese jistina 1064 *K* při týchž % za 3 roky a 3 měsíce?

16. Jest vypočítati úroky, jež vynese jistina J při p% za r roků.

17. Pracuje-li 15 dělníků 6 dnů 10 hodin denně, vydělá 56 zl.; *a*) kolik vydělá 12 dělníků za 8 dnů, pracují-li 12 hodin denně, *b*) kolik dělníků vydělá za 15 dnů při 8hodinné práci denní 67 zl. 20 kr.?

ČÁST ŠESTNÁCTÁ.

Složené úrokování.

Přičtou-li se koncem roku úroky k jistině, tak že se dluh zvětší o úroky a dlužník platí roku následujícího úroky nejen z počáteční jistiny, nýbrž i z úroků, tu pravíme, že se jistina úrokuje složeně, aneb že se platí úroky z úroků a to celoročně. Přirážejí-li se úroky po půl létě, úrokuje se pololetně. Jistina původní zove se jistina základní, úroky z této jistiny, jakož i z úroků z ní plynoucí, zovou se úroky složené a jistina základní o složené úroky zvětšená, zove se jistina konečná. Počet, jenž se zabývá vypočítáváním těchto veličin, zove se složený počet úrokový. § 1

Příklad. Kterak vzroste 100 zl. celoročním složeným úrokováním 6%vým za 4 roky?

Rok.	Jistina počáteční.	Jistina počáteční	+ úroky	= Jistina konečná.
1.	100,	100	$+ 6$	$= 106.$
2.	106,	106	$+ 1{\cdot}06$	$\times 6 = 112{\cdot}36.$
3.	112·36,	112·36	$+ 1{\cdot}1236$	$\times 6 = 119{\cdot}10\,..$
4.	119·10..	119·10 ..	$+ 1{\cdot}191\,..$	$\times 6 = \mathbf{126{\cdot}25}\,..$

Jistina konečná za 4 roky jest tudíž 126 zl. 25 kr., složené úroky 26 zl. 25 kr., kdežto úroky jednoduché by byly pouze 24 zl.

Proč jsou úroky složené $>$ úroků jednoduchých?

Vypočítávání toto jest při delší době zdlouhavé a obtížné; pročež počítáme takto:

Kterak se určí jistina konečná *a*) **roku prvého**? 1 zl. vzroste za rok při 6% na 1 zl. 6 kr., t. j. na 1·06 zl.; při 5%, 4%, $4\frac{1}{2}\%$, $p\%$ na 1·05, 1·04, 1·045, $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ zl. § 1

Tuto konečnou hodnotu jednoho zlatého za jeden rok zoveme úročitel a označujeme ji písmenou q.

2, 3, 4... J zl. vzroste za rok při 5% na 2krát, 3krát, 4krát... $J \times 1{\cdot}05$ zl.; označíme-li jistinu konečnou roku prvého J_1, možno psáti: $J_1 = J \,.\, 1{\cdot}05$.

Jistina konečná po době jednoho roku se vypočítá, násobíme-li jistinu základní úročitelem.

b) Za několik (n) let. *α*) při 5%.

Rok,	Jistina počáteční,	Jistina konečná
1.	J.	$J_1 = J\,.\,1{\cdot}05.$
2.	$J\,.\,1{\cdot}05$	$J_2 = (J\,.\,1{\cdot}05)\,.\,1{\cdot}05 = J\,.\,1{\cdot}05^2.$
3.	$J\,.\,1{\cdot}05^2$	$J_3 = (J\,.\,1{\cdot}05^2)\,.\,1{\cdot}05 = J\,.\,1{\cdot}05^3.$
. . . .	. . . .	. . . .
n.		$J_n = \ldots\ldots = J\,.\,1{\cdot}05^n.$

β) Při $p\,\%$ jest $\quad J_n = J\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = J\,.\,q^n.$

Konečná jistina za n roků rovná se jistině základní, násobené úročitelem zmocněným počtem roků.

Dle toho bude příklad § 152. počítán takto:
$J = 100,\quad p = 6,\quad q = 1{\cdot}06,\quad n = 4,\quad J_4 = 100\,.\,1{\cdot}06^4 = 126{\cdot}25\,..$
Ježto výpočet vyšších mocnin ubírá mnoho času, jsou mocniny úročitelů 1·02, 1·025, 1·03, 1·04, 1·05 vypočteny v tabulce § 154.

c) Kterak se úrokuje pololetně? Při 4, 5, 6% vzrostl 1 zl. za půl léta na 1·02, 1·025, 1·03. (= úročitel pololetní). I vzroste jistina J při 4% za jedno pololetí na $J_1 = J\,.\,1{\cdot}02$, za dvě pololetí na $J_2 = J\,.\,1{\cdot}02^2$ atd., tak že konečná jistina po n pololetích bude $J_n = J\,.\,1{\cdot}02^n$. Tvar vzorce toho jest týž jako v b), avšak mocnitel n značí zde počet pololetí, (v obou případech počet období) a úročitel jest pololetní, t. j. konečná jistina 1 zl. za 1 pololetí, (v obou případech za 1 období).

Cvičení: **1.** Kterak vzroste 2000 K za 8 roků při 4% celoročním složeném úrokování?

2. Ze dvou kupců nabízí prvý 73 zl. ihned, druhý 90 zl. za 5 roků. Která nabídka jest výhodnější při obvyklé míře úrokové (5%) a) při jednoduchém, b) složeném celoročním úrokování?

3. Totéž co v 2. nabízí-li prvý 2000 zl. ihned, 3650 po 4 a 1525 po 6 letech, kdežto druhý 7300 zl. po 4 letech?

4. Nač vzroste jistina 1600 K za 9 roků při 4% pololetním složeném úrokování?

5. Nač vzroste 1000 zl. za 27 roků při 5% složeném celoročním úrokování? Návod: $q^{27} = q^{20}\,.\,q^7$.

6. Otec uložil své dceři při narození 2000 zl. do peněžního ústavu, který úrokuje 4% složeně. Kolik vyplatí ústav dceři 20tileté a) při celoročním, b) při pololetním úrokování?

7. Jest vypočítati a) složené, b) jednoduché 5% úroky z 1000 zl. za 12 let.

8. Kdosi vyzvedl si 850 zl., jež měl na 4% složený úrok uloženy po 6 letech a 4 měsících. Kolik obdržel?

Návod: Obdržel $J_5 = J \cdot q^5$ a úrok z J_5 za 4 měsíce.

9. V městě, čítajícím 12000 . . obyvatelů, přibývá ročně průměrně $2\frac{1}{2}$% obyvatelstva. Kolik obyvatelstva bude míti město za 10 let?

10. Kdosi ukládal po 5 let ročně 100 zl. do spořitelny, která úrokuje složeně a celoročně 4mi %. Kolik obdrží *a*) po 5 letech, *b*) po 7 letech?

11. Kdosi ukládal ročně 250 *K* do záložny, která úrokuje 5% složeně a celoročně. Kolik měl uloženo po 6 letech?

12. Kdosi obdržel při dělení dědictví omylem o 2000 zl. více než jeho bratr. I chce po 12 letech škodu nahraditi i s 6%mi pololetními úroky z úroků. Jak veliká bude náhrada?

13. Kolik let nejméně musí jistina býti uložena, aby se při *a*) 4% *b*) 5% zdvojnásobnila při celoročním slož. úrokování?

Mocniny úročitelů*). § 154.

Období	2%	2½%	3%	4%	5%	6%
1	1·02	1·025	1·03	1·04	1·05	1·06
2	1·0404	1·050625	1·0609	1·0816	1·1025	1·1236
3	1·061208	1·076890	1·092727	1·124864	1·157625	1·191016
4	1·082432	1·103802	1·125509	1·169859	1·215506	1·262477
5	1·104081	1·131397	1·159274	1·216653	1·276282	1·338226
6	1·126162	1·159682	1·194052	1·265319	1·340096	1·418519
7	1·148686	1·188674	3·229874	1·315932	1·407100	1·503630
8	1·171659	1·218390	1·266770	1·368569	1·477455	1·593848
9	1·195093	1·248850	1·304773	1·423312	1·551328	1·689479
10	1·218994	1·280071	1·343916	1·480244	1·628895	1·790848
11	1·243374	1·312072	1·384234	1·539454	1·710339	1.898299
12	1·268242	1·344873	1·425761	1·601032	1·795856	2·012196
13	1·293607	1·378494	1·468534	1·665074	1·885649	2·132928
14	1·319479	1·412956	1·512560	1·731676	1·979932	2·260904
15	1·345869	1·448280	1·557967	1·800944	2·078928	2·396558
16	1·372786	1·484487	1·604706	1·872981	2·182875	2·540352
17	1·400241	1·521598	1·652848	1·947900	2·292618	2·692773
18	1·428246	1·559638	1·702433	2·025817	2·406619	2·854339
19	1·456811	1·598629	1·753506	2·106849	2·526950	3·025600
20	1·485947	1·638595	1·806111	2·191123	2·653298	3·207135

*) Jsou čísla ta úplná?

§ 155. **Kterak se určí jistina základní a úroky** (disconto)? *a*) Ze vzorce $J_n = J \cdot q^n$ plyne $J = J_n : q^n$. Jistina základní rovná se jistině konečné, dělené úročitelem, zmocněným počtem období.

b) Složené úroky $= J_n - J = J \cdot q^n - J = J\,(q^n - 1)$, aneb $= J_n - \frac{J_n}{q^n}$.

Ježto složené úrokování jest všeobecně zavedeno, jest spravedlivo, aby se i disconto při delší době počítalo dle úroků složených, tedy dle rovnice:

Hotové + složené úroky (= disconto) = dluhu.

Cvičení: **1.** Která jistina vzroste za 8 roků na 1000 zl. při 4% *a*) celoročním? *b*) pololetním složeném úrokování?

2. Jakou cenu má dědictví splatné za 10 roků při 5% celoročním složeném úrokování?

3. Jest vypočítati 4%ovou srážku z dluhu 4000 *K* splatného za 5 let *a*) při pololetním slož. úrokování, *b*) při jednoduchém úrokování.

4. Kolik jest otci uložiti do spořitelny, která úrokuje 4% složeně a pololetně, má-li tato vyplatiti jeho dceři za 16 let 10000 *K*?

5. Ze dvou kupců nabízí prvý 3000 *K* ihned, 3750 *K* za 5, 4250 *K* za 8 let; druhý nabízí 6570 *K* za 5 a 4530 *K* za 7 let. Která nabídka jest výhodnější při 5% složeném úrokování? (Návod: Srovnej obě nabídky tím, jakou cenu budou míti po 5ti letech.)

6. Město má 25785 obyvatelů, jehož přibývá průměrem o 2% ročně. Kolik obyvatelů *a*) mělo před 10 roky? *b*) bude míti za 10 let, nezmění-li se procentový přírůstek?

7. Kolik let nejméně musí býti jistina 2300 zl. uložena, aby při *a*) 4%, *b*) 5% složeném celoročním úrokování vzrostla na 3404·56 zl.? (Návod: $J_n : J = q^n$ a dle úročitele vyhledáme v tabulce přibližně dobu.)

Přídavek: Míry, váhy a mince.

I. Míry délkové.

1. V Rakousku, Francii, Italii, Německu atd. jsou zavedeny míry a váhy metrické. 1 metr (*m*) jest přibližně 40,000.000tý díl meridiánu zemského (10,000.000tý díl quadrantu). 1 *m* = 10 *dm* (decimetrů) = 100 *cm* (centimetrů) = 1000 *mm* (millimetrů). 1000 *m* = 1 *km* (kilometr); 10 *km* = 1 *μm* (myriametr).

2. Dřívější míry délkové v Rakousku užívané: 1 rak. míle = 4000° (sáhů), 1° = 6′ (stop), 1′ = 12″ (palců), 1″ = 12‴ (čárek).

1 m = 3·16375 stop; 1 stopa = 0·316081 m.

1 rak. míle = 1·0223 zeměp. míle; 1 zeměp. míle = 7·4204 km.

1 rak. míle = 7·586 $km \doteq 7\frac{1}{2}\,km$; 1 $km \doteq \frac{1}{4}$ hod. cesty.

1 sáh $\doteq 1{\cdot}9\,m < 2\,m$; český loket $\doteq 59\,cm < 60\,cm$; vídeňský loket $\doteq 78\,cm < 80\,cm$.

3. Míra anglická (dosud v Anglii a sev. Americe rozšířená) 1 angl. míle = 1760 Yardů. 1 Yard = 3 (angl.) stopy, 1 stopa = 12 palců, 1 palec = 12 čárek (angl.), 1 angl. stopa = 0·3048 m, 1 m = 3·281 angl. stop, Yard $\doteq 0{\cdot}9\,m$, 1 angl. míle = $1609\,m > 1\frac{1}{2}\,km$.

4. Míra ruská: 1 versta = 500 sažní = 1·0668 km.

1 rus. stopa = 0·3048 m = angl. stopa.

saržín (loket) = 71·12 cm.

II. Míry plošné.

1. 1 m^2 (metr čtvercový) = 100 dm^2 (decimetr čtvercový).

1 dm^2 = 100 cm^2, 1 cm^2 = 100 mm^2.

1 km^2 = 1 000 000 m^2.

1 a (ar) = čtverec, jehož strana jest 10 m = 100 m^2.

1 ha (hektar) = 100 a.

2. Dřívější míry: 1 čtverečná míle = $4000 \times 4000\,\square^0$, $1\,\square^0 = 6 \times 6\,\square'$ atd.

1 jitro = 3 vídeňské měřice výsevku = 2 české korce = $1600\,\square^0$, 1 jitro = 0·575464 $ha > \frac{1}{2}\,ha$. 1 a = $27{\cdot}8036\,\square^0$.

1 $m^2 \doteq 10\,\square'$, 4 $ha \doteq 7$ jiter, 1 $ha \doteq 3\frac{1}{2}$ korce

3. Rusko: 1 desjatina = 1·095 ha.

III. Míry krychlové (duté).

1. 1 m^3 (metr krychlový) = 1000 dm^3 (dm krychlový).

1 dm^3 = 1000 cm^3 = 1,000.000 mm^3.

1 dm^3 = 1 l (litr) = 10 dl (decilitr) = 100 cl (centilitr); 100 l = 1 hl (hektolitr).

2. Dřívější míry: 1 krychlový sáh = 6 × 6 × 6 krychlových stop, 1 krychl. stopa = 1728 kr. palců atd.

1 vědro = 40 mázů (pinta), 1 máz = 4 žejdlíky = 1·415 l.

1 víd. měřice = 61·4868 l.	1 hl = 1·6264 víd. měř.
1 český korec (sháněný) = 93·6 l < 1 hl	1 hl = 1·06 čes. korců sh.
1 „ „ (vrchovatý) = 105·3 l > 1 hl	1 hl = 0·095 „ „ vrch.

1 vědro = 56·589 l. 1 hl = 1·76713 vědra.

3. Rusko: Četvrť = 2·099 hl.

IV. Váhy.

1. 1 *g* (gramm) = váha 1 cm^3 destillované vody 4^0 C teplé. 1 *g* = 10 *dg* (decigramm) = 100 *cg* (centigramm) = 1000 *mg* (milligramm).

1 *kg* (kilogramm) = váha litru vody = 100 *dkg* (dekagramm) = 1000 *g*.

100 *kg* = 1 *q* (kvintal = metrický cent).

1000 *kg* = 10 *q* = 1 *t* (tůna).

2. Dřívější váhy: 1 víd. cent = 100 liber, 1 libra = 32 lotů, 1 lot = 4 kventlíky.

1 *kg* = 1·78552 liber, 1 libra = 56·006 *dkg*.

1 víd. cent ≐ 56 *kg*, 5 *kg* ≐ 9 liber, $\frac{1}{2}$ *kg* ≐ 28 lotů, 4 loty ≐ 7 *dkg*.

3. Rusko: Pud = 40 liber po 32 lotech, libra = 0·4095 *kg*.

V. Míry časové.

Rok obyčejný má 365 dní, rok přestupný 366 dní. Rok má 12 měsíců; z těch má: leden, březen, květen, červenec, srpen, říjen, prosinec 31 dní; únor 28 neb 29, duben, červen, září, listopad 30 dní. (Možno lehko pamatovati na kloubech 4 prstů.) V počtu úrokovém a j. klade se měsíc = 30 dnům a rok tedy = 360 dnům.

Den = 24 hodin, hodina = 60 minut, minuta = 60 vteřin.

VI. Míry hromadné.

1 balík papíru = 10 rysů = 100 knih = 1000 vložek = 10.000 archů.

1 hrubý tucet = 12 tuctů, 1 tucet = 12 kusů.

1 kopa = 4 mandele = 60 kusů.

VII. Mince.

1. Rakousko: *a*) Rakouské číslo (ráz): 1 zl. (zlatý) = 100 kr. (krejcar). 1 dukát = 11 *K* 29 *h*. *b*) Ráz korunový: 1 *K* (koruna) = 100 *h* (haléřů). 1 zl. = 2 *K*.

2. Anglie. Libra (livre) šterlinků (sovereign čti suvrýn) = 20 šilinků po 12 pencích. Libra šterlinků = 24·01741 *K*.

3. Francie. Frank = 100 centimů = 0·95226 *K*. 20tifrank zove se Napoleondor.

4. Italie. Livra = 100 centesimů = 1 frank.

5. Německo. Marka = 100 pfennigů = 1·17563 *K*.

6. Rusko. Rubl = 100 kopejek = 1·62 zl. ve stříbře.

7. Severo-americké soustátí. Dolar = 100 centsů = 4·9351 *K*.

8. Turecko. Lira = 100 piastrů. Piastr = 100 centsů = 9 kr. Vnitřní hodnota mincí počítá se dle množství ryzího zlata, jež mince

v sobě chová. V poslední době platil se 1 *kg* zlata za 1640 zl. rak. čísla. Ke srovnání zlatých mincí dle vnitřní hodnoty služiž toto:

164 20 *K*, 290·519 dukátů, 136·5676 liber šterlinků, $172\frac{2}{9}$ 20franků, $139\frac{1}{2}$ 20marek, 664 622 dolarů, 151·28 tureckých lir drží v sobě 1 *kg* ryzího zlata.

Frank francouzský = franku belgickému = franku švýcarskému = liře italské = dinaru srbskému = lvímu tolaru bulharskému = lvu rumunskému = drachně řecké = pesetě španělské.

Skvosty zlaté a stříbrné jest dovoleno v Rakousku hotoviti:

Ze zlata	a ze stříbra
jakosti 0·920 = č. 1.	jakosti 0·950 = č. 1.
„ 0·840 = č. 2.	„ 0·900 = č. 2.
„ 0·750 = č. 3.	„ 0·800 = č. 3.
„ 0.580 = č. 4.	„ 0·750 = č. 4.

Obsah.

(Arabské číslice značí stránku.)