GEOMETRIE

PRO ÚSTAVY UČITELSKÉ.

SEPSAL

KAREL DOMIN,

PROFESSOR PŘI C. K. ÚSTAVU UČITELSKÉM V HOŘE KUTNÉ.

DÍL PRVÝ:

PLANIMETRIE

PRO I. A II. ROČNÍK.

SE 173 OBRAZY V TEXTU.

V HOŘE KUTNÉ.

NAKLADATEL KAREL ŠOLC KNIHKUPEC.

1880.

KNIHTISKÁRNA: MILITKÝ A NOVÁK V PRAZE.

Předmluva.

Poněvadž není posud učebné knihy geometrické pro ústavy učitelské, uvázal se nížepsaný u vydání této knihy, jejíž prvním účelem jest: sloužiti chovancům ústavův učitelských jako učební text při vyučování; v druhé však řadě posloužiti kandidatům učitelství, již se připravují ke zkoušce dospělosti a spůsobilosti.

Při práci své řídil jsem se úplně předpisy organisačního statutu pro ústavy učitelské a měl jsem při roztřídění látky stále na paměti, aby geometrické upotřebení pouček a pravidel arithmetických nepřicházelo dříve, než v arithmetice byly probrány.

Při odvozování pravidel a pouček bedliv jsem byl *jednoduchosti* a *přesnosti.*

K řešení geometrických úkolů (jak konstruktivných tak početních) přihlížel jsem co možná nejvíce, poněvadž mají tyto na formální i materielní vzdělání neocenitelný vliv; úkoly tyto byly přímo připojeny těm kterým statím, čímž příhodnosť této rukověti tuším získá.

Spis svůj rozdělil jsem na dva díly, z nichž první, obsahující planimetrii, pro nižší, a druhý stereometrii, trigonometrii a dodatek, jednající o vyměřování pozemků a o kreslení situačním, pro vyšší dva ročníky ústavův učitelských určen jest.

Díl druhý jest v tisku a vyjde ještě před koncem letošního roku školního.

Pokud se týče stránky jazykové, hleděl jsem šetřiti co nejvíce stručného a jasného proslovení.

Spisovatelé, z jejichž spisů jsem čerpal, jsou: *F. Hoza*, *J. Jandečka*, *Č. Jarolímek*, *M. Kuchynka*, *Dr. Frant. ryt. Močník*, *Dr. C. Spitz*, *Josef Streissler*, *Th. Wittstein* a j.

Za všeliké opravy, jakož i jiná pokynutí budu povděčen i vezme se na ně zřetel ve vydání příštím, jestli se ho spis dočká.

Konečně uznávám, že pan nakladatel nešetřil žádných obětí, aby vnější úprava vyhovovala všem požadavkům zřetelnosti a úhlednosti.

V **Hoře Kutné**, dne 24. května 1880.

Spisovatel.

OBSAH.

Strana

Část třetí.

O shodnosti mnohoúhelníků.

Část čtvrtá.

Ploský obsah přímočarých mnohoúhelníků.

Část pátá.

O podobnosti.

Část šestá.

O kružnici a kruhu.

Část sedmá.

O ellipse, hyperbole a parabole.

Úvod.

§. 1. **Části prostoru se všech stran omezená slove těleso.** Hledí-li se při omezené části prostoru též k látce, kterou tato část vyplněna jest (ke hmotě), jest to těleso fysické; nehledí-li se však k této prostor vyplňující hmotě a vlastnostem na ní závislým, nýbrž pozorují-li se pouze rozměry a podoba omezené části prostoru, jest to těleso měřické.

Velikosť meze tělesa činí povrch jeho, a každá část povrchu slove plocha. Velikosť meze plochy nazývá se obvodem a každá část obvodu jmenuje se linie. Meze linie jsou body.

Body, linie, plochy a tělesa jsou útvary prostorové, z nichž však pouze tělesa sama o sobě jako útvary samobytné se objevují. Plochy, linie a body nalézáme pouze na tělesech, nikde o sobě. — Mluví-li se v měřictví přece o bodu, linii a ploše o sobě, tu si je od těles odloučené představujeme.

Každé těleso má tři hlavní rozměry: délku, šířku a výšku (hloubku a tloušťku); plocha má toliko dva hlavní rozměry: délku a šířku a linie pouze jeden: délku.

Tělesa, plochy a linie jako útvary prostorové mající jeden neb více rozměrů, dají se zvětšiti i zmenšiti a slují proto veličiny prostorové. Bod jest útvar měřický bez rozměru a velikosti, není tedy veličinou.

Veličiny prostorové mohou se utvořiti pohybem a nazývají se útvary geometrické. Pohybem bodu vznikne linie, pohybem linie vzniknouti může plocha, pohybem plochy těleso. — Útvar geometrický, jehož pohybem jiný útvar geometrický vznikne, sluje útvar tvořící a zákon, dle něhož se útvar tvořící podle jiného daného útvaru pohyb řídícího (útvar řídící) pohybuje, sluje zákon výtvarný.

§. 2. Pohybuje-li se bod (jako samobytný předpokládaný) v určitém stálém běhu, vytvoří linii přímou. Může-li se bod z kteréhokoliv místa na ploše v této ploše kamkoli tak pohybovati, aby běh pohybu jeho stanovil linii přímou, sluje tato plocha plochou rovnou či rovinou.

§. 3. Veličinu měřiti znamená vyšetřovati, kolikkráte určitá jiná, za jednotku považovaná veličina téhož rodu v ní obsažena jest.

Každá veličina prostorová dá se měřiti tedy pouze veličinou prostorovou s ní stejnorodou; linie linií, plocha plochou a těleso tělesem.

Číslo udávající, kolikkráte za jednotku považovaná veličina v dané veličině obsažena jest, jmenuje se číslo míry čili měrné číslo té veličiny.

Velikosť omezené linie sluje délka, velikosť omezené plochy obsah plochy a velikosť tělesa krychlený, tělesný či kubický obsah neb krátce obsah tělesa.

§. 4. Při každé veličině prostorové rozeznáváme velikosť, tvar či podobu a polohu její.

Útvary měřické téhož tvaru a téže velikosti lišiti se mohou pouze polohou a slují útvary shodné. Znaménko k označení shodnosti jest $\cong$.

Útvary téhož tvaru lišiti se mohou velikostí a polohou a jmenují se útvary podobné. Znaménko podobnosti jest $\sim$.

Útvary rozličného tvaru a nestejné polohy mohou se co do velikosti shodovati a slují v tomto případě útvary vzájemně rovné. K označení rovnosti útvarův užívá se znaménka rovnosti $=$. Shodné tvary jsou vzájemně rovny i podobny.

§. 5. **Náuka jednající o tvaru, velikosti a poloze útvarů geometrických sluje měřictví či geometrie (v nejširším slova smyslu).**

Měřické útvary dělíme na rovinné a prostorné. Rovinným útvarem sluje onen měřický útvar, jenž se do jediné roviny vměstnati dá, jako bod, přímá linie, některé křivé linie a rovina sama. — Prostorové útvary jsou ony měřické útvary, jež, byvše na rovinu položeny, s ní úplně se nesjednotí jako některé křivé linie (šroubovice), křivé plochy a všecka tělesa.

Dle toho, jedná-li se v měřictví o útvarech rovinných anebo prostorových, rozděluje se měřictví na dvě větve: měřictví v rovině (planimetrie) a měřictví v prostoru (stereometrie).

§. 6. Měřictví podává nauku svou na základě výměrů (definic), zásad samozřejmých (axiomů) a požadavků (postulatů) v poučkách, které se dokazují, v úkolech, které se řeší, a v následcích a dodatcích, které se k oněm větám připojují.

§. 7. Výměr (definice) jest udání podstatných znaků pojmu a záleží obyčejně v udání všeho toho, co jest základem následujícího vyšetřování.

§. 8. Věty samozřejmé, základné či axiomy nepotřebují žádného odůvodnění, jsou hned patrny, jakmile jsme smysl jejich pochopili. Obecných axiomů mathematických užívá se též v geometrii. Na př.:

Každá veličina jest sama sobě rovna. Celek se rovná součtu svých částí. Je-li každá ze dvou veličin současně rovna veličině třetí, jsou tyto tři veličiny mezi sebou rovny. Podrobí-li se sobě rovné veličiny stejným proměnám, obdrží se zase sobě rovné výsledky.

Věty, které samy o sobě patrny nejsou, potřebují zvláštního odůvodnění či důkazu správnosti geometrické pravdy v nich obsažené, a jmenují se poučky geometrické. Každá geometrická poučka sestává z předpokládání (hypothesis), které obsahuje podmínky, pro které poučka platnosť míti má, ze tvrzení (thesis), jež pravdu, zakládající se na předpokládaných podmínkách, vyslovuje, a z důkazu, že tvrzení ze předpokládání nutně plyne.

Důkaz jest buď přímý neb nepřímý.

Důkazem přímým udávají se bezprostředně důvody, ze kterých pravdivosť poučky plyne, a sestává z jednoho neb více soudů takové posloupnosti, že poslední soud tvrzením jest.

Důkazem nepřímým (indirektním) se dokazuje, že opak tvrzení vedl by na soudy, které patrně odporují větám za pravdivé již uznaným.

Obrácená poučka jest věta, v nížto předpokládání původní poučky jest tvrzením, tvrzení její však předpokládáním.

Poučka dokázaná není vždycky také pravdiva, když ji obrátíme, máť zvláštního důkazu zapotřebí.

Následky a dodatky jsou věty, jež bezprostředně nebo jednoduchými soudy ze předcházejících vět odvoditi lze.

§. 9. Úkoly geometrické mohou býti buď konstruktivné neb početné.

Konstruktivný úkol geometrický záleží v tom, že se má sestrojiti útvar geometrický, který daným podmínkám vyhovuje.

Početní úkol záleží v tom, že se mají vypočísti veličiny geometrické pomocí čísel.

Každý úkol geometrický vyžaduje řešení, t. j. aby se udal spůsob, jímž lze konstrukci neb výpočet v úkolu vyslovený provésti. Řešení každého úkolu geometrického musí předcházeti rozumné posouzení podmínek v úkolu obsažených, což výhodně rozborem či analysí se stává. Rozbor pokládá úkol za řešený, vyšetřuje souvislosť částí daných a hledaných, a soudí z toho použitím pouček geometrických, kterak neznámé části z daných stanoviti lze. Důkaz, že se daný úkol správně řešil, plyne potom obyčejně z rozboru tak, že jdouce zpátečnou cestou, uvádíme důvody rozboru v pořádku opačném.

S důkazem bývá spojeno omezení úkolu (determinace), t. j. vyšetření, za kterých podmínek jest řešení možno, aneb připouští-li úkol řešení jediné neb několikeré.

Planimetrie.

Část první.

O bodu, přímé linii a úhlu.

O bodu.

§. 10. Nejjednodušší útvar měřický jest bod, protože nemá žádných rozměrů. Body objevují se jako společné části dvou neb více linií, a jmenují se průsečíky, aneb na tělesech jako průsečíky čar plochy omezujících a slují vrcholy.

Bod nemá rozměrů, nemá tedy také tvaru ani velikosti. O poloze bodu lze jen tehdy mluviti, když jsou alespoň dva na zřeteli, při čemž přihlížíme k tomu, jak jeden vzhledem k druhému umístěn jest.

Body, o jichž vzájemné poloze mluviti chceme, představujeme si jako vrcholy těles, anebo jako útvary samobytné, t. j. myslíme si v prostoru dvě určitá místa beze vší velikosti a beze všeho tvaru. Abychom o těchto bodech krátce mluviti mohli, pojmenujeme je, jak se obyčejně stává, různými písmeny malé abecedy (buď bez přípony nebo s příponou) anebo číslicemi. O vzájemné poloze dvou bodů *a* a *b* pravíme, že leží bod *b* v pravo neb v levo vedle bodu *a*, anebo že jest bod *b* nad nebo pod bodem *a*, a konečně, že jest bod *b* v pravo či v levo nad anebo pod bodem *a*.

§. 11. Zobrazení bodu děje se dotknutím tabule křídou, nebo papíru tužkou či pérem. Obraz bodu sluje tečka. Aby tečka bodu jí zobrazenému nejvíce se přibližovala, musí míti nejméně hmoty; aby však jemně kreslené tečky přece viditelny byly, dělá se kolem nich kroužek. K tečkám připisujeme táž písmena, jaká přísluší oněm bodům, jichž obrazy jsou.

§. 12. Názvu „bod“ užívá se často, hlavně v praktickém životě, k pojmenování rozličných předmětů, nalézajících se na různých místech. V tomto smyslu lze mluviti o nějakém stromu, mezníku atd. jako bodu. Při vyměřování pozemků vyznačují se důležitější takové body dřevěnými kolíky; často též tyčemi traçovacími aneb praporečky.

O linii přímé.

§. 13. Určitý bod roviny může se v této rovině nesčíslným množstvím stálých běhů pohybovati. Každý takovýto běh pohybu, jenž se nesmí měniti, stanoví běh přímé linie, jež se tímto pohybem vytvořila.

Soujem všech přímých linií, které týmž bodem procházejí, sluje rovinný svazek paprsků; každá přímka tohoto svazku jest paprsek a bod všem paprskům společný sluje střed tohoto svazku paprskového.

Soujem všech přímých linií téhož běhu tvoří osnovu paprskovou.

Poněvadž jakýkoli bod za střed svazku paprskového považovati můžeme, není jedním bodem přímá linie stanovena.

Je-li běh linie přímé, jakož i poloha pouze jednoho jejího bodu známa, jest tím i poloha přímé linie stanovena.

Zastaví-li se bod, přímou linii vytvořující, ve svém pohybu ve vzdálenosti konečné, vytvořil přímou linii omezenou. Jen omezené přímé linie jeví se ve skutečnosti jako hrany těles.

Každá přímá linie omezená má dva krajní body, z nich jest jeden počáteční, druhý koncový bod.

Pohybem bodu s určitého místa v témže běhu až do nekonečné vzdálenosti, vytvoří se přímá linie na jedné straně neomezená, která se paprskem nazývá. — Přímá linie, na obou stranách neomezená, sluje přímou linií neomezenou. Nekonečně vzdálený bod přímé linie neomezené sluje její bod úběžný. Určitá, na dvou místech omezená část přímé linie neomezené, sluje úsečka či délka.

§. 14. Z ponětí o přímé linii plynou následující věty:

1. Jedním bodem není přímá linie stanovena.

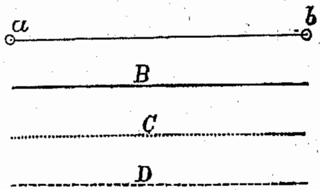
2. Dvěma body, aneb jedním bodem a během svým jest přímá linie stanovena.

3. Přímá linie jest nejkratší vzdálenosť dvou bodů (přímá cesta nejkratší).

4. Přímé linie, mající dva body společné, sjednocují se po celé své rozsáhlosti.

5. Dvě přímé linie mohou míti jediný bod společný. Tento dvěma přímým liniím společný bod jest jejich průsečík.

§. 15. Obraz přímé linie, totiž čára přímá neb krátce *přímka*, vznikne pohybem hrotu, péra či tužky po papíru, nebo křídy po tabuli v tomtéž běhu. Aby při rýsování přímka nejvíce přímé linii jí zobrazované odpovídala, musí se jemně rýsovati. Omezené přímé linii odpovídá též omezená přímka; krajním jejím bodům krajní tečky, které se buď kroužky nebo kratičkými příčkami označují. Neomezené linie dá se na omezenou nákresnu toliko jistá část zobraziti. Omezená přímá linie se označuje tím, že se přisoudí její krajním bodům jistá písmena, na př. *a* a *b*, a potom se mluví o přímé linii *ab*. Neomezená přímá linie označuje se obyčejně jediným písmenem velké abecedy latinské.



Obr. 1.

Přímky rýsují se rozličně, dle toho, jaký význam mají. Přímky dané aneb obrazy viditelných hran tělesa rýsují se tence a plně (přímka *ab*); výslednice rýsují se plně a rázně (přímka *B*). Obrazy neviditelných hran tělesa se tečkují (př. *C*). Přímky pomocné rýsují se tence a přetržitě.

Poznámka. Na poli označují se přímé linie provazem, řetězem anebo pásmem měřickým mezi dvěma kolíky napjatým anebo stružkou dle napjatého řetězu neb provazu udělanou; nejčastěji se však přímá linie pouze mezi dvěma kolíky nebo praporečky vytčenými body myslí. — Tesaři rýsují přímky pomocí šňůry, rudkou zbarvené.

§. 16. Při přímé omezené linii *ab* (obr. 1.) můžeme buď bod *a* buď *b* za tvořící považovati. Bod *a* vytvoří přímou linii *ab*, když běží přímo k bodu *b*; podobně ji vytvoří bod *b*, pohybuje-li se týmž během jako prve *a*, ale protivným směrem, t. j. od *b* k *a*. Z tohoto pozorování jest viděti, že má každá přímá linie *jediný běh, ale dva směry*, z nichž jeden sluje *kladný*, druhý pak *záporný*. Oba směry jsou vzájemně *protivny*.

Jde-li kladný směr vzhůru, jde druhý dolů; jde-li jeden do předu, jde druhý do zadu, a jde-li prvý na pravo, jde druhý na levo.

§. 17. Při každé omezené přímé linii (úsečce, hraně, délce) musíme nejen k její poloze, jejímu běhu a směru hleděti, nýbrž též k její *délce*.

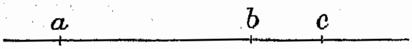
Délka přímé linie omezené udává vzdálenosť jejích krajních bodů. Aby se dvě přímé linie co do délky srovnaly, kladou se tak na sebe, aby se počátkové body kryly; kryjí-li se i koncové body, mají přímé linie *stejnou délku*, jinak jsou *nestejně dlouhé*.

Určujeme-li délku jakési omezené přímé linie, říkáme, že ji *měříme*. K tomu konci bereme některou přímou linii známé velikosti za *jednotku* a zkoumáme, kolikkrát jest ve přímé linii, kterou měřiti máme, obsažena. Číslo, udávající poměr tento, slove *číslem míry* čili *měrným číslem* dané přímé omezené linie.

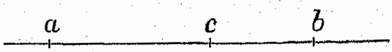
Jednotkou míry délkové jest téměř ve všech státech evropských *metr* (m). Metr dělí se na 10 *decimetrů* (dm), decimetr na 10 *centimetrů* (cm) a centimetr na 10 *millimetrů* (mm); 10 metrů jest *dekametr* (Dm), 100 metrů jest *hektometr* (Hm), 1000 metrů jest *kilometr* (Km) a 10000 metrů jest *miriametr* (Mm).

Přímé délky měřívají se *měřítky*, v přírodě (na poli) často *pásmem měřickým* a *řetězem měřickým*.

§. 18. Přímé linie, jako veličiny, lze podrobiti výkonům početním. Naměříme-li na omezené přímé linii od určitého bodu a (obr. 2.) až do bodu b určitou délku $\overline{ab}$, a od bodu b až do bodu c délku jinou $\overline{bc}$, odpovídá úsečka $\overline{ac}$ součtu úseček $\overline{ab}$ a $\overline{ac}$, při čemž dlužno pamatovati, že koncový bod úsečky jedné jest počátečným bodem úsečky druhé.



Obr. 2.



Obr. 3.

$$\overline{ac} = \overline{ab} + \overline{bc}.$$

Má-li se od délky $\overline{ab}$ délka $\overline{bc}$ odečísti, nanese se na neomezenou přímou linii napřed úsečka $\overline{ab}$ (obr. 3.) a od jejího bodu koncového úsečka $\overline{bc}$ ve směru opačném; potom jest:

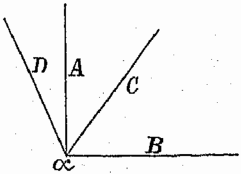
$$\overline{bc} = \overline{ab} - \overline{bc}.$$

Cvičení v sečítání, odčítání, násobení a dělení (zkusmo) daných délek.

§. 19. Dle běhu rozeznáváme přímé linie svislé, vodorovné a šikmé.

Svislá (vertikální) přímá linie má běh niti, na níž volně visí závaží (olovnice). Obrazy přímých linií svislých kreslí se obyčejně ve stejném běhu s pravým anebo levým během nákresny.

Přímka A (obr. 4.) jest obrazem přímky svislé. Volně padající těleso pohybuje se během svislým.



Obr. 4.

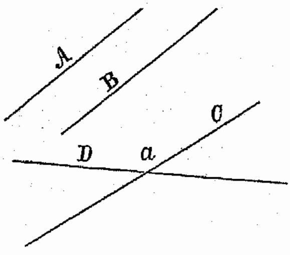
Přímá linie, mající běh hůlky na klidné vodě plovoucí anebo vahadla na obou stranách stejně obtěžkaného, jmenuje se vodorovná. Přímá linie vodorovná značí se na papíře neb na tabuli přímkou, která má týž běh jako horní a dolní okraj nákresny (přímka B obr. 4).

Přímá linie, která není ani svislá ani vodorovná, jest šikmá. Přímá linie šikmá jest buď na pravo neb na levo nakloněna. Otáčí-li se svislá linie přímá A (obr. 4.) kolem svého spodního bodu krajního α, zove se v každé poloze v pravo od polohy původní se nalézající, přímá linie šikmá v pravo nakloněná a v každé poloze od polohy A v levo se nalézající, přímá linie šikmá v levo nakloněná. V obr. 4. jest tedy přímka C obrazem přímé linie šikmé v pravo a přímka D obrazem přímé linie šikmé v levo nakloněné.

Běh svislý určuje se ve skutečnosti šňůrou, na které závaží visí (olovnicí), a běh vodorovný krokvicí nebo libellou.

Poznámka. Při obyčejné poloze našeho papíru není ovšem obraz svislé linie svislý a šikmé linie šikmý, nazývá se tudíž chybně přímkou svislou neb šikmou. Aby obraz odpovídal skutečnému běhu přímé linie, musela by se nákresna postaviti do polohy příslušné.

§. 20. Dvě přímé linie, ležící v téže rovině, protínají se, byvše náležitě prodlouženy, vždy v jediném bodu, který jich průsečíkem se zove. Průsečík jest vzdálen buď konečně, buď nekonečně. Přímé linie, mající týž běh, protínají se vždy ve vzdálenosti nekonečné, jich průsečík jest bod úběžný. Přímé linie téhož běhu zovou se rovnoběžky. Rovnoběžné přímé linie (jako A a B obr. 5.) jsou od sebe všude stejně vzdáleny. Znaménko rovnoběžnosti jest $||$, a značíme $A \,||\, B$.



Obr. 5.

Dvě přímé linie různého běhu protínají se v bodu konečném, a slují r o v n o b ě ž k y (C a D obr. 5.). Hledíme-li ku směru různoběžek, pozorujeme, že směřují buď obě ku společnému bodu (k průsečíku a obr. 5.), a slovou s b í h a v ý m i (convergent); anebo směřuje každá jinam z bodu tohoto, a pak slovou r o z b í h a v ý m i (divergent).

Z pojmu o přímých liniích rovnoběžných a různoběžných plynou následující pravidla:

1) Přímé linie svislé jsou vždy rovnoběžny.

2) Přímé linie vodorovné, v téže rovině ležící, jsou rovnoběžny.

3) Je-li jedna ze přímých linií rovnoběžných svislá neb vodorovná, jest též druhá buď svislá neb vodorovná.

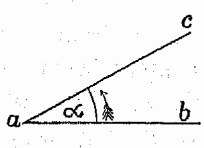
4) Daným bodem lze k dané přímé linii pouze jedinou rovnoběžku sestrojiti.

5) Je-li každá ze dvou rovnoběžných linií přímých rovnoběžna k téže linii třetí, jsou všecky tři vespolek rovnoběžny.

O úhlu.

§. 21. **Rozdíl běhu dvou různoběžek čili odchylka běhu jedné ze dvou různoběžek ode druhé slove ú h e l.**

Přímé linie úhel tvořící jsou r a m e n a a jejich průsečík v r c h o l ú h l u. Vzniknutí úhlu můžeme si také tak vykládati, že předpokládáme v rovině dva paprsky téhož svazku. Velikosť točení, které musí paprsek ab (obr. 6.) kolem středu a ve směru šipkou naznačeném vykonati aby se sjednotil s paprskem ac, jest úhel.



Obr. 6.

V písmě znamená se úhel několika způsoby a sice:

1) Označí a vysloví se pouze písmeno příslušící vrcholu úhlu a před ně napíše se znaménko $\sphericalangle$. Úhel v obr. 6. jest tedy $\sphericalangle a$.

2) Označí se úhel jediným písmenem (obyčejně malé abecedy řecké, jako α obr. 6.), které se mezi ramena úhlu blíže vrcholu klade.

3) Označí se třemi písmeny, z nichž jedno stojí u vrcholu a ostatní při ramenech. Písmeno, u vrcholu stojící, píše a vyslovuje se vždy uprostřed; v obr. 6. tedy buď $\sphericalangle\, bac$ neb $\sphericalangle\, cab$.

§. 22. Velikosť úhlu nezávisí na délce ramen, nýbrž pouze na velikosti otočení, které jedno rameno vykonati musí, aby se dostalo do polohy ramena druhého. Dva úhly jsou r o v n y, stačí-li k jich vzniknutí totéž otočení, jinak jsou n e r o v n y. Položí-li se dva úhly vrcholem a jedním ramenem na sebe, musí se i druhá ramena sjednotiti, když jsou úhly dané rovny, nejsou-li však úhly rovny, nesjednotí se též druhá ramena. V tomto případu jest onen úhel menší, jehož druhé rameno mezi rameny úhlu druhého leží.

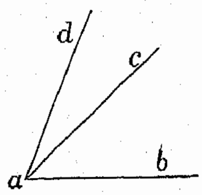
§. 23. Otočí-li se rameno *ac* úhlu *cab* (obr. 7.) o úhel *dac*, takže přijde do polohy *ad*, jest nový úhel *dab* součet úhlů *cab* a *dac*, tedy

$$\sphericalangle\, dab = dac + cab.$$

Otočíme-li však v úhlu *dab* rameno *ad* kolem vrcholu *a* do polohy *ac*, jest úhel *cab* rozdíl úhlů *dab* a *dac*;

$$\sphericalangle\, cab = dab - dac.$$

Úhly jako veličiny dají se podrobiti výkonům početním.



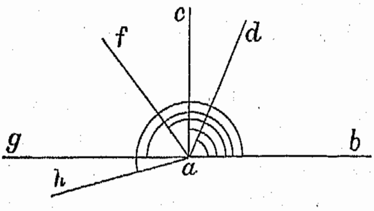
Obr. 7.

Jak se sečítají, odčítají, násobí a dělí (zkusmo) úhly?

§. 24. Točí-li se paprsek kolem svého krajního bodu, přijde po řadě do všech běhů, které v rovině z tohoto bodu možny jsou, a tvoří s původním během svým veškeré, kolem daného bodu možné, úhly. Vykoná-li točící se paprsek čtvrtý díl úplného otočení, vznikne úhel p r a v ý.

Všecky úhly pravé jsou sobě rovny. Pravý úhel značí se obyčejně písmenem *R*.

Úhel, k jehož vytvoření méně než čtvrť úplného otočení třeba jest, jmenuje se úhel o s t r ý; úhel pak, k jehož vytvoření více nežli čtvrť, ale méně než půl úplného otočení třeba jest, jmenuje se úhel t u p ý. Ostrý úhel jest tedy menší a tupý větší než úhel pravý, oba slovou úhly k o s é. V obr. 8. jest $\sphericalangle\, cab$ pravý, $\sphericalangle\, dab$ ostrý a $\sphericalangle\, fab$ tupý.



Obr. 8.

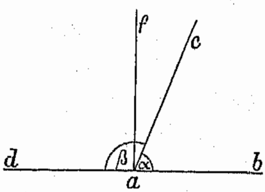
Vykoná-li pohyblivý paprsek polovinu celého otočení, přijde ve směr protivný původnímu směru svému. Takto vzniklý úhel jmenuje se **p ř í m ý**. Ramena úhlu přímého mají týž běh, ale protivné směry. Úhel přímý rovná se dvěma pravým. $\sphericalangle\, bag = 2R$ (obr. 8.). Všecky úhly přímé jsou sobě rovny.

Úhel menší nežli přímý jmenuje se **d u t ý**, úhel větší nežli přímý slove **v y p u k l ý**. V obr. 8. jest $\sphericalangle\, bag$ přímý, $\sphericalangle\, baf$ dutý, $\sphericalangle\, bah$ vypuklý.

Úplným otočením dostane se paprsek do prvotné polohy své. Úhel tímto otočením vzniklý jmenuje se úhel plný. Jeho ramena padají v jedno a obsahují dva přímé nebo čtyry pravé.

Dva úhly, jichž součet se rovná úhlu pravému, slovou **d o p l ň k o v é** (complementární), a dva úhly, jichž součet se rovná úhlu přímému, slují **v ý p l ň k o v é** (supplementární).

§. 25. Dva úhly, které mají vrchol a jedno rameno společné a jich druhá ramena mají týž běh, ale směry protivné, slovou úhly **v e d l e j š í**. V obr. 9. jsou $\sphericalangle\, \alpha$ a β, jakož i $\sphericalangle\, fab$ a fad úhly vedlejší.



Obr. 9.

Z axiomu: součet všech částí celku rovná se celku, plynou poučky:

1) **Součet dvou úhlů vedlejších rovná se úhlu přímému nebo dvěma pravým.**

$$\sphericalangle\, \alpha + \beta = 2R, \quad \sphericalangle\, fad + fab = 2R.$$

2) **Součet všech úhlů, na téže straně přímky ležících, jichž společný vrchol na této přímce jest, rovná se dvěma pravým.**

3) **Součet všech v rovině, kolem jednoho bodu ležících úhlů, rovná se čtyřem R.**

Prodlouží-li se totiž v tomto případu některé rameno kteréhokoli z těchto úhlů přes vrchol, jest součet úhlů na každé straně tohoto prodlouženého ramena $2R$, tudíž rovná se součet všech úhlů na obou jeho stranách čtyřem pravým.

§. 26. Přímá linie af (obr. 9.), od přímé linie ab o pravý úhel odchýlená, slove na ní **k o l m o u** (**n o r m á l n o u**) anebo krátce **k o l m i c í**.

Znaménko kolmosti jest $\perp$. Přímka $af \perp ab$, je-li úhel $afb = R$. Co do správné mluvy pamatovati sobě sluší tyto dva způsoby proslovení: V bodě přímky vztyčujeme kolmici na tuto přímku a s bodu mimo přímku ležícího spouštíme na přímku kolmici. V obr. 9. jest tedy v bodě a na přímku bd vztyčena kolmice af.

Jsou-li dva úhly vedlejší vzájemně sobě rovny, jest každý z nich polovina úhlu přímého, tedy $\sphericalangle$ pravý. V tomto případu musí býti společné rameno kolmé na ramenech ostatních. **Uzavírá-li tedy přímá linie s jinou přímou linií dva rovné úhly vedlejší, stojí na ní kolmo.**

Má-li přímá linie jinou odchýlku od druhé přímé linie než úhel pravý, je k této linii nakloněna.

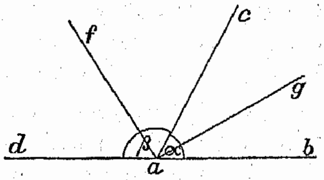
§. 27. **Přímé linie, půlící dva úhly vedlejší, uzavírají úhel pravý.**

Důkaz:

$$\sphericalangle\ \alpha + \beta = 2R.$$

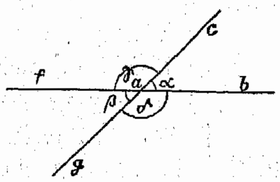
$$\sphericalangle \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = R.$$

$$\sphericalangle\ gac + fac = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = R. \text{ (Obr. 10.)}$$



Obr. 10.

§. 28. Prodloužíme-li obě ramena úhlu cab (obr. 11.) za vrchol, vznikne nový úhel fag, jenž slove jeho úhlem vrcholovým. **Vrcholové úhly mají společný vrchol a ramena jejich sjednocují se ve dvou přímkách, majíce při tom směr protivný.** $\sphericalangle$ α a β, γ a δ jsou úhly vrcholové.



Obr. 11.

Úhly vrcholové jsou si rovny.

Důkaz: $\sphericalangle\ \alpha + \beta = 2R.$ $\quad$ proto: $\sphericalangle\ \alpha + \gamma = \gamma + \beta$ aneb

$\sphericalangle\ \gamma + \beta = 2R.$ $\quad$ $\sphericalangle\ \delta = \beta.$

Týmž způsobem se dokáže, že $\sphericalangle\ \gamma = \delta$.

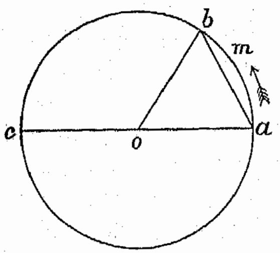
§. 29. Měření úhlu děje se tím, že vyšetřujeme, kolikkrát jest známý za jednotku považovaný úhel v tomto daném úhlu obsažen.

Jednotkou míry úhlové jest stupeň (°), t. j. 360tá část úhlu plného. Stupeň dělí se na 60 minut (′), minuta na 60 sekund (″).

Kolik stupňů má úhel přímý, pravý, tupý a ostrý?

Nejjednodušší prostředek ku měření úhlů jest **k r u ž n i c e**.

§. 30. Otáčí-li se délka oa v rovině kolem svého krajního bodu o, až přijde opět v původní svou polohu, opisuje bod a křivou linii, kterou nazýváme **k r u ž n i c í** (obr. 12.). Všecky body kružnice mají tudíž tutéž vzdálenosť od uvnitř ležícího bodu o. Tento bod slove **s t ř e d** (centrum).



Obr. 12.

Každá poloha pohyblivé délky, ku př. oa, ob, oc jmenuje se **p o l o m ě r** (radius) kružnice.

Délka ab, spojující dva body kružnice, slove **t ě t i v a** (chorda). Tětiva, procházející středem, sluje **p r ů m ě r** (diametr) kružnice. Každá část kružnice, jako amb, slove **o b l o u k** (arcus). Kružnicí omezená část roviny sluje **k r u h**; délka celé kružnice **o b v o d**, **o b m ě r** či **p e r i p h e r i e** kruhu. Polovina kružnice zove se **p o l o k r u ž n i c í**, čtvrtina kružnice **č t v e r n í k e m** (kvadrantem).

Úhel aob, jehož vrchol leží ve středu a jehož ramena jsou poloměry kruhu, slove **ú h e l s t ř e d o v ý**.

Z toho, co posud o kružnici řečeno bylo, plyne:

1) Kružnice jest rovinná křivá linie, jejíž veškeří bodové od určitého, v též rovině se nalézajícího bodu stejnou mají vzdálenosť.

2) Všecky poloměry téže kružnice jsou si rovny.

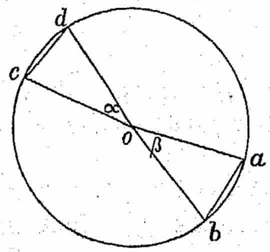
3) Každý průměr jest roven dvojnásobnému poloměru.

4) Všecky průměry téže kružnice jsou si rovny.

§. 31. **V tomtéž kruhu (anebo ve dvou rovných kruzích) přísluší ku rovným úhlům středovým rovné oblouky i rovné tětivy.**

Budiž $\sphericalangle\ \alpha = \beta$ (obr. 13.).

D ů k a z: Položíme-li úhel α na β tak, aby poloměry oa a ob dopadly na poloměry od a oc, což za příčinou rovnosti úhlů α a β možno jest, přijdou body b a a na body c a d, protože jsou poloměry sobě rovny; proto jest tětiva $ab = cd$. Kryjí-li se však tětivy, musí se též i oblouky cd a ab krýti, poněvadž by jinak všechny jejich body nebyly od středu stejně vzdáleny. Jest proto i oblouk $\overline{cd} = ab$.



Obr. 13.

§. 32. Ku měření oblouku slouží *stupeň obloukový* (°), t. j. 360tý díl kružnice (téhož poloměru), jejž považujeme *za jednotku míry obloukové*. Měříce nějaký oblouk vyšetřujeme, kolikkrát se dá tato míra na něj vedle sebe položiti. Stupeň obloukový dělí se na 60 *minut obloukových* (′) a jedna minuta se dělí na 60 *sekund obloukových* (″).

Rozdělí-li se plný úhel středový v kruhu na 360 rovných dílů, stupňů úhlových, tu dělí ramena těchto úhlů (dle §. 32.) i obvod kruhu (tedy kružnici) na 360 sobě rovných oblouků, z nichž jest každý stupeň obloukový. Stupni úhlovému odpovídá tedy stupeň obloukový; podobně odpovídá minuta úhlová minutě obloukové a sekunda úhlová sekundě obloukové. Podle toho vyjadřuje počet stupňů, minut a sekund obloukových také počet stupňů, minut a sekund úhlu středového. V tom smyslu říká se, že oblouk kružnice jest mírou příslušného úhlu středového. Na měření úhlu pomocí oblouků kružnice zakládá se zařízení *úhloměru* (*transporteru, přenášeče*).

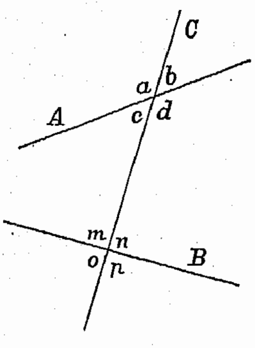
Zařízení úhloměru, přenášení a měření úhlů pomocí úhloměru.

§. 33. Protíná-li přímá linie jiné dvě linie přímé v téže rovině ležící, vznikne kolem obou průsečíků 8 úhlů.

Tyto úhly dělíme vzhledem k přímé linii protínající (C obr. 14.) na

α) *úhly přilehlé*, které na téže straně linie C položeny jsou; na př. $\sphericalangle\, b$ a p, $\sphericalangle\, a$ i m, $\sphericalangle\, c$ a o,

β) *úhly střídavé*, které na protivných stranách přímé linie C leží; na př. $\sphericalangle\, a$ a n, $\sphericalangle\, m$ a p, $\sphericalangle\, cn$, $\sphericalangle\, d$ i o.



Obr. 14.

Vzhledem ku přímým, proťatým liniím A a B rozvrhujeme úhly ty na:

a) *úhly souhlasné*, ležící na souhlasných, t. j. buď hořejších neb dolejších stranách přímých linií proťatých; na př. $\sphericalangle\, a$ a m, $\sphericalangle\, c$ a o, $\sphericalangle\, n$ a b, $\sphericalangle\, b$ a m, $\sphericalangle\, c$ a p.

b) *úhly vnitřní*, které na vnitřních stranách přímých linií proťatých leží; na př. $\sphericalangle\, c$ a n, $\sphericalangle\, d$ a m, $\sphericalangle\, c$ a m, $\sphericalangle\, n$ a c, $\sphericalangle\, n$ a d.

c) úhly vnější, ležící na vnějších stranách přímých linií proťatých; na př. $\sphericalangle b$ a o, $\sphericalangle d$ a o, $\sphericalangle b$ a p, $\sphericalangle a$ a p.

Vzhledem ku všem třem přímým liniím A, B, C (obr. 14.) rozeznáváme:

a) úhly přilehlé:
- souhlasné $\sphericalangle b$ a n, $\sphericalangle d$ a p, $\sphericalangle a$ a m, $\sphericalangle c$ a o
- vnitřní $\sphericalangle d$ a n, $\sphericalangle c$ a m
- vnější $\sphericalangle b$ a p, $\sphericalangle a$ a o

b) úhly střídavé:
- souhlasné $\sphericalangle a$ a n, $\sphericalangle b$ a m, $\sphericalangle c$ a p, $\sphericalangle d$ a o
- vnitřní $\sphericalangle c$ a n, $\sphericalangle d$ a m
- vnější $\sphericalangle a$ a p, $\sphericalangle b$ a o.

Předpokládejme, že mají přímky proťaté (A a B v obr. 15.) týž běh (že jsou rovnoběžny); potom jsou:

1) **souhlasné úhly přilehlé** a

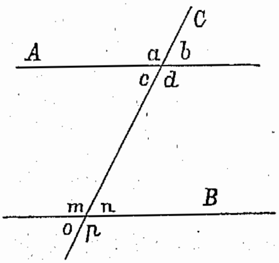
2) **vnější i vnitřní úhly střídavé mezi sebou rovny. Mimo to doplňují se**

3) **vnitřní i vnější úhly přilehlé** a

4) **souhlasné úhly střídavé na dva pravé.**

Důkaz: Přímé linie A a B mají týž běh, různý od běhu přímé linie C, je protínající. Poněvadž u souhlasných úhlů přilehlých i směry ramen jsou stejny, neliší se tyto úhly ničím jiným než polohou, a jsou proto sobě rovny.

$$1)\ \sphericalangle a = m, \qquad \sphericalangle c = o,$$
$$\sphericalangle b = n, \qquad \sphericalangle d = p.$$



Obr. 15.

Na základě rovnosti souhlasných úhlů přilehlých dokáže se rovnosť střídavých úhlů vnějších i vnitřních takto:

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle m = p \\ \sphericalangle n = o\end{array}\right\} \text{ jakožto úhly vrcholové.}$$

Tudíž jest:

$$2)\ \sphericalangle a = p, \qquad \sphericalangle c = n,$$
$$\sphericalangle b = o, \qquad \sphericalangle d = m.$$

$\sphericalangle a + c = 2R$, protože jsou úhly vedlejšími, a poněvadž úhly c a o, jakožto souhlasné úhly přilehlé, sobě rovny jsou, jest i:

$$\begin{array}{ll} \sphericalangle a + o = 2R, & \text{Podobně se dokáže, že } \sphericalangle a + n = 2R, \\ b + p = 2R, & \sphericalangle b + m = 2R, \\ c + m = 2R, & \sphericalangle c + p = 2R, \\ d + n = 2R, & \sphericalangle d + o = 2R. \end{array}$$

Poučka. **Kdykoli protíná přímá linie jiné dvě přímé linie tak, že jsou buď dva souhlasné úhly přilehlé, neb dva vnitřní či vnější úhly střídavé sobě rovny, aneb že se doplňují buď dva vnější či vnitřní úhly přilehlé anebo dva souhlasné úhly střídavé na dva pravé, jest i všem ostatním dříve uvedeným podmínkám vyhověno a přímé linie proťaté jsou rovnoběžny.**

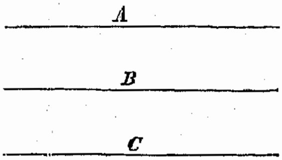
Důkaz těchto vět zůstavuje se soukromému výkladu.

Na těchto větách zakládá se rýsování rovnoběžek pomocí trojúhelníku, na jiném pravítku pošinutelném; podobně i rýsování rovnoběžek pomocí příložného pravítka.

§. 34. **Věta základná: Bodem jedním lze toliko jednu přímou linii, rovnoběžně s jinou přímou linií, vésti.**

Následek: Je-li každá ze dvou přímých linií rovnoběžna k téže přímé linii třetí, jsou též spolu rovnoběžny.

Důkaz: Je-li v obr. 16. $A \parallel C$ a $B \parallel C$, musí i $A \parallel B$. Kdyby nebyla $A \parallel B$ protínaly by se, náležitě jsouce prodlouženy, v určitém bodu. Tímto bodem by však potom byly ku C dvě rovnoběžky možny, což dle hořejší věty není možno.



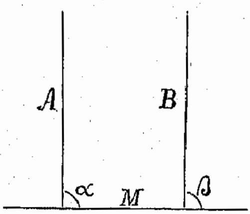
Obr. 16.

§. 35. **Poučky: 1) Kolmice, na téže přímé linii vztyčené, jsou spolu rovnoběžny.**

Předpokl. $A \perp M$ a $B \perp M$ (obr. 17.)

Tvrzení $A \parallel B$.

Důkaz: Poněvadž $A \perp M$, jest $\sphericalangle \alpha = R$; a poněvadž $B \perp M$, jest $\sphericalangle \beta = R$; tudíž úhel $\alpha = \beta$, proto musí dle §. 33. $A \parallel B$.



Obr. 17.

2) Stojí-li jedna ze dvou rovnoběžek na přímé linii kolmo, stojí i druhá rovnoběžka na této přímé linii kolmo. (Obrácení poučky předešlé.)

Předpokládání. $A \perp M$ a $A \parallel B$.

Tvrzení. $B \perp M$.

Důkaz: Poněvadž $A \parallel B$, jest $\sphericalangle \alpha = \beta$; jelikož $A \perp M$, jest $\sphericalangle \alpha = R$; tudíž i

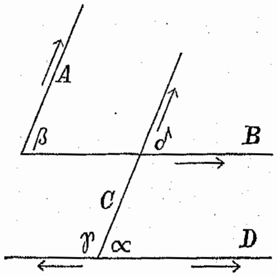
$$\sphericalangle \beta = R, \text{ t. j. } B \perp M.$$

3) **S bodu, mimo přímou linii ležícího, možno toliko jedinou kolmici na tuto linii spustiti.**

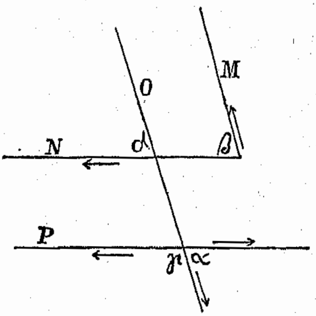
Důkaz nepřímý. Kdyby bylo lze s bodu, mimo přímou linii ležícího, na tuto přímou linii, více než jednu kolmici spustiti, musely by dle poučky 1. tyto kolmice býti rovnoběžny, což není možno, poněvadž mají společný bod.

4. **V bodu přímé linie lze na tuto linii jedinou toliko kolmici vztyčiti.**

Důkaz jako při poučce předešlé.



Obr. 18.



Obr. 19.

§. 36. Budiž v obr. 18. $A \parallel C$ a $B \parallel D$, potom jsou $\sphericalangle\ \alpha$ i β úhly, jichž ramena mají týž běh i směr. Každý z nich jest roven $\sphericalangle\ \delta$, proto musí i $\sphericalangle\ \alpha = \beta$.

Budiž v obr. 19. $M \parallel O$ a $N \parallel P$, potom jsou α i β úhly, jichž rovnoběžná ramena mají týž běh, ale protivné směry; každý jest roven $\sphericalangle\ \delta$ (dle §. 33.), proto jest i zde $\sphericalangle\ \alpha = \beta$.

Z toho plyne:

Úhly, jichž ramena mají týž běh a směry buď protivné anebo tytéž, jsou si rovny.

(Úhly, jichž ramena jsou vzájemně rovnoběžna, jsou si rovny, jsou-li oba tupé neb ostré.)

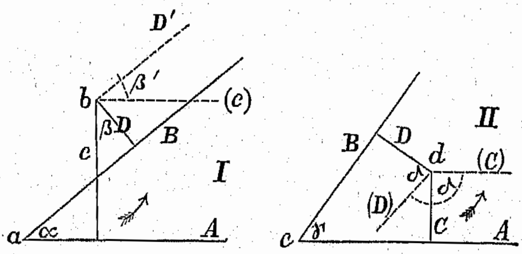
V obr. 18. i 19. jest

$$\sphericalangle\ \alpha + \gamma = 2R$$

proto i $\sphericalangle\ \beta + \gamma = 2R$ t. j.:

Úhly, jichž oboje ramena mají týž běh, ale jedna z nich směr souhlasný a druhá směr protivný, doplňují se na $2R$.

§. 37. Buď v obr. 20. $C \perp A$ a $D \perp B$ a mysleme si, že se předpokládá za nehybně spojená ramena $\sphericalangle\ \beta$ a taktéž i $\sphericalangle\ \delta$,



Obr. 20.

a že se otočí o 90^0, ve směru šípem naznačeném, okolo vrcholů svých b a d. V obr. 20. (I.) mají ramena $\sphericalangle\ \alpha$ i β' týž běh i směr a proto $\sphericalangle\ \alpha = \beta'$, tudíž i $\sphericalangle\ \alpha = \beta$.

V obr. 20. (II.) mají $\sphericalangle\ \delta'$ a $\sphericalangle\ \gamma$ ramena rovnoběžná, ale jedna ramena mají souhlasné a druhá protivné směry; proto jest dle dřívějšího:

$$\sphericalangle\ \delta' + \gamma = 2R \text{ tudíž i}$$
$$\sphericalangle\ \delta + \gamma = 2R.$$

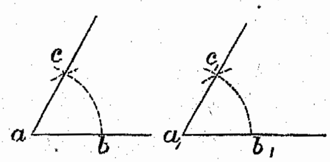
Dva úhly, jichž ramena střídavě kolmo na sobě stojí, jsou si rovny, mají-li oboje ramena jejich buď souhlasné aneb oboje protivné směry; aneb doplňují se na $2R$, když mají jedna ramena souhlasné a druhá protivné směry.

(Dva úhly, jichž ramena střídavě kolmo na sobě stojí, jsou si rovny, je-li každý z obou úhlů ostrý aneb tupý.)

Úkoly k rýsování.

§. 38. 1) Má se vyrýsovati úhel, jenž by se rovnal jinému úhlu danému.

Okolo vrcholu a daného úhlu bac (obr. 21.) opíše se jakýmkoli poloměrem oblouk, jenž ramena úhlu v bodech b a c protne. Má-li býti vrchol nového úhlu v a_1 a a_1b_1 jedním jeho ramenem, opíše se týmž poloměrem ze středu a_1 oblouk. Kolem jeho průsečíku b_1 s daným ramenem opíše se nový oblouk, rozevřením kružidla, od b až do c sáhajícím. Bod c_1, v němž se oblouky protínají, spojí se s bodem a'; $\sphericalangle\ b_1a_1c_1 = bac$.



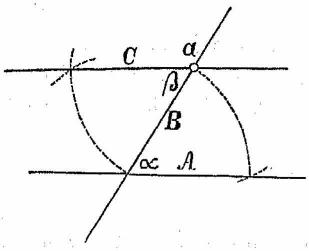
Obr. 21.

Důkaz krytím.

Kdyby byl daný úhel tupý, přenesl by se pomocí svého ostrého úhlu výplňkového.

2) Má se narýsovati, tečkou mimo přímku ležící, přímka k této přímce rovnoběžná.

Tečkou a (obr. 22.) vyrýsujeme libovolně nakloněnou přímku B; učiníme potom dle předešlého $\sphericalangle\ \beta = \alpha$, načež jest $C \| A$ (§. 34.).



Obr. 22.

Úkol tento řešiti se může na základě §. 33. rozličnými spůsoby. Třeba pouze narýsovati buď dva úhly souhlasné přilehlé, buď dva vnitřní neb vnější úhly střídavé, aby byly sobě rovny.

§. 39. *Úkoly.*

1) Jak veliký jest součet

a) ∢ $35^0 48' 56''$ *a* $108^0 13' 34''$,

b) ∢ $59^0 17' 18''$ *a* $78^0 24' 15''$.

2) Jak veliký jest doplněk úhlu

a) $38^0 25'$,

b) $78^0 14' 38''$.

3) Vypočítejte vedlejší úhly následujících úhlů:

a) ∢ 43^0, *b)* ∢ $54^0 15'$, *c)* ∢ $112^0 17' 25''$.

4) Oč jest úhel, měřící $138^0 15' 14''$, *větší než úhel, měřící* $58^0 38' 45''$.

5) Měří-li jistý úhel $14^0 25' 38''$, *jaká jest míra úhlu a) 3kráte, b) 5kráte, c)* $6\frac{1}{2}$*kráte většího?*

6) Jaké jest měrné číslo úhlu a) třikráte, b) pětkráte menšího než jest úhel, měřící $145^0 12' 34''$?

7) Dva úhly, z nichž jeden jest třikráte tak velký jako druhý, měří dohromady $158^0 44' 48''$; *jak velký jest každý z nich?*

8) Jeden ze čtyř úhlů kolem průsečíku dvou různoběžek měří $118^0 12' 38$; *jak velký jest každý z ostatních úhlů?*

9) Měří-li v obr. 15. ∢ *b* $64^0 35' 48''$, *jak velký jest každý z ostatních úhlů?*

10) Ze dvou úhlů vedlejších jest jeden třikráte tak velký jako druhý; co měří každý z nich?

11) Sestrojiti úhel, jenž by se rovnal součtu dvou neb více daných úhlů.

12) Vyrýsovati úhel, který se rovná rozdílu dvou daných úhlů.

13) Vyrýsovati úhel dvakrát, třikrát atd. tak velký jako úhel daný.

14) Jsou dány čtyři úhly, ∢ α, ∢ β, ∢ γ *a* ∢ δ, *z nichž* $\alpha > \beta + \gamma$; *sestrojte*

$$\sphericalangle a = \alpha + \beta + \gamma - \delta,$$
$$\sphericalangle b = \alpha + \delta - \beta - \gamma,$$
$$\sphericalangle c = \alpha + \beta - \gamma - \delta.$$

15) *Rozdělte daný úhel na 3, 5 mezi sebou rovných úhlů (zkusmo).*

Dodatek k části prvé.

Místo geometrické.

§. 40. M í s t o g e o m e t r i c k é jest nepřetržitá soustava bodů (tedy čára), z nichž každý, mimo ně však žádný jiný, určitému předpokládání zadost činí. Nejjednodušším místy geometrickými v rovině jsou přímá linie a kružnice.

1) Geometrické místo všech bodů, které mají od dané přímé linie určitou vzdálenosť, je v dané vzdálenosti k dané přímé linii rovnoběžně vedená přímá linie.

2) Geometrické místo všech bodů, které od daného bodu určitě vzdáleny jsou, jest kružnice opsaná kolem daného bodu jako středu danou vzdáleností jako poloměrem.

3) Geometrické místo pro středy všech kruhů, z nichž každý jest opsán týmž poloměrem a jichž kružnice mají obsahovati určitý bod, jest kružnice týmž poloměrem kolem daného bodu jako středu opsaná.

§. 41. Místa geometrická poskytují znamenitých pomůcek při řešení úloh geometrických, hlavně konstruktivných. Jde tu obyčejně o to, aby se stanovil bod, kteréžto stanovení hověti musí daným podmínkám. Známe-li pro stanovení bodu jeho dvě místa geometrická a umíme-li je sestrojiti, jest hledaný bod průsečíky svých míst geometrických určen.

Ku stanovení určitého místa geometrického sluší pečlivě předpokládání v úkolu obsažené prozkoumati. Poznavše některé místo geometrické, čerpáme z něho hned pravidlo ku potřebnému výkonu.

Z odstavce 2. §. 40. plyne: Jde-li o stanovení bodu, jenž by od určitého bodu daného měl vzdálenosť určitou, narýsuje se poloměrem, který jest rovný dané vzdálenosti, kružnice z daného bodu jako středu. Na této kružnici jest bod žádaný.

Podobně pochodí z věty 3. §. 40.:

Jde-li o stanovení kružnice, která má poloměr dané délky *r*, a mimo to daný bod obsahovati má, narýsuje se z daného bodu, který na kružnici ležeti má, jako středu, poloměrem *r* kružnice; na této kružnici leží žádaný střed.

§. 42. Řešení geometrických úkolů konstruktivných. Geometrický úkol konstruktivný záleží, jak již v §. 9. řečeno bylo, v sestrojení útvaru geometrického, který danému předpokládání vyhovuje.

V planimetrii jde nejvíce při řešení úkolů o sestrojování bodů, přímek anebo mnohoúhelníků. Poněvadž však přímka dvěma body stanovena jest a mnohoúhelník polohou vrcholů svých, jde při řešení úkolů geometrických o stanovení bodů, které se jako dvěma geometrickým místům společné útvary stanoví.

Za místa geometrická, jichž společné body danému úkolu dosti činí, volí se z pravidla čáry takové, jichž sestrojení jest snadné, tedy přímky, nebo kružnice, takže se žádané body objeví jako:

1) průsečíky dvou přímek, neb
2) přímky a kružnice anebo
3) dvou kružnic.

Každý úkol geometrický žádá dle §. 9.

1) pochopení daného úkolu,
2) rozbor,
3) konstrukci,
4) důkaz a
5) determinaci.

Postup, kterým se rozbor nese, jest následující: Předpokládá se, že jest konstrukce úkolem žádaná již hotova, a vyrýsuje se za tím účelem stranou pouze od ruky útvar se žádaným stejnorodý, t. j. jde-li na př. o sestrojení rovnoramenného trojúhelníku, kreslí se trojúhelník rovnoramenný. V tomto obrazci pomocném vytknou se části dané, též ty, které se přímo v obrazci neobjeví. Je-li k sestrojení dříve uvedeného trojúhelníku dán obvod, musí se v obrazci též vytknouti (ovšem jako jediná přímá linie). Části dané hledíme vytknouti v úzké souvislosti mezi sebou, při čemž žádná část daná z obrazce zmizeti nesmí. Na to hledí se k souvislosti vrcholů, které se určiti mají s dříve vytčenými částmi danými. Ve mnohých případech povstanou tímto rozborem nové obrazce. Potom zkoumá se, dá-li se některý z těchto obrazců sestrojiti, aneb je-li lze pomocí některé věty geometrické poznati, jak z daných bodů body hledané stanoveny býti mohou.

Tu shledáme, že body žádané se stanoví buď

1) bezprostředním upotřebením známých vět geometrických, aneb

2) pomocí dvou míst geometrických, či

3) redukcí na dříve již řešený úkol, anebo

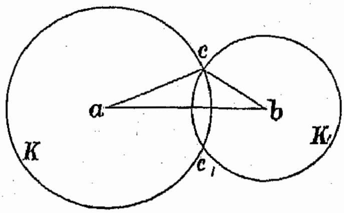
4) analogií (obdobou) s úkolem jiným.

Byl-li rozbor úkolu proveden, bývá sestrojení snadné; třeba při tom následovati rozboru, a každý bod, o jehož stanovení jde, stanoviti z jiného tak, jak byly body v rozboru dány, aneb jak se seznalo, že jeden z druhého následuje.

O důkazu a omezení úkolu bylo mluveno již v §. 9.

Příklad: Má se stanoviti bod, který by ode dvou daných bodů a a b měl dané vzdálenosti v a v_1.

Rozbor: Obraz hledaného bodu budiž tečka c (obr. 23.). Poněvadž c od a má vzdálenosť v, musí bod c ležeti na kružnici opsané poloměrem $= v$ z a jako středu. Kružnice K jest tedy jedno geometrické místo bodu žádaného. Podobně pochodí, že i kružnice K_1 jest geometrickým místem žádaného bodu. Společný oběma kružnicím bod c (c_1) jest bod žádaný.



Obr. 23.

Sestrojení. Kolem středu a opiš poloměrem v a kolem b poloměrem v_1 kružnici; průsečík c neb c_1 jest bod žádaný.

Důkaz. Dle konstrukce jest $ac = v$, $bc = v_1$.

Omezení: Průsečíky kružnic K a K_1 jest žádaný bod stanoven, a vyhovuje tedy danému úkolu tolik bodů, kolik průsečíků kružnice K a K_1 mají. Obecně mají dvě kružnice (jako v obr. 23.) dva body společné (c a c_1) a vyhovují tedy obecně danému předpokládání dva body. — Oba průsečíky mohou se však sjednotiti, je-li $ac + bc = ab$, potom připouští daný úkol jen jediné řešení. — Neprotínají-li se kružnice K a K_1, což by se stalo, kdyby

$$ac + bc < ab,$$

není řešení daného úkolu možné.

Úkoly: 1) Stanov bod, který má od každého ze dvou daných bodů a i b vzdálenosť v.

2) Daným poloměrem vyrýsuj kružnici, která dané dva body a i b obsahuje.

3) Na dané přímce stanov bod, mající od daného bodu určitou vzdálenosť.

4) Vyrýsuj kružnici stanovenou tětivou, jejíž poloha i délka jest dána, a délkou poloměru.

5) Na dané kružnici stanov bod, mající od daného bodu určitou vzdálenosť.

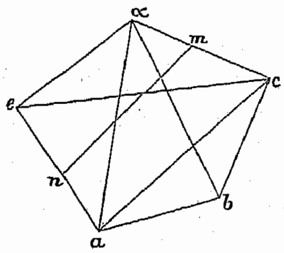
6) Stanov bod c, který má od každého ze dvou daných bodů a i b tutéž vzdálenosť jako má a od b.

Část druhá.

O mnohoúhelnících vůbec.

§. 43. Přímými liniemi všestranně omezená část roviny slove mnohoúhelník. Přímé linie, mnohoúhelník omezující, zovou se strany; jich průsečíky vrcholy, a úhly při vrcholích uvnitř mnohoúhelníku ležící, úhly vnitřní mnohoúhelníku.

Strany, mající společný vrchol, jsou strany sousedné (*ab* a *ae*, *ab* i *bc* atd.); rovněž slovou i vrcholy, které jsou jednou stranou spojeny, vrcholy sousedné.



Obr. 24.

Strany a vrcholy nesousedné slují protější.

Každá strana má dva úhly přilehlé, ostatní jsou protilehlé.

Mnohoúhelník má tolik stran, kolik vrcholů nebo kolik úhlů.

Mnohoúhelníky dělí se dle počtu stran (tedy i vrcholů neb úhlů) na troj-, čtyř-, pěti-, šesti- aneb vůbec mnohoúhelníky (*n*-úhelníky, je-li *n* stran).

Vzhledem ku vzájemné délce stran rozeznáváme mnohoúhelníky rovnostranné a nerovnostranné; vzhledem ku vzájemné velikosti úhlů rovno- a nerovnoúhelné.

Rovnostranný, rovnoúhelný mnohoúhelník sluje pravidelný.

Součet všech mnohoúhelník omezujících stran sluje obvod mnohoúhelníku.

§. 44. Kolmice, spuštěná s vrcholu mnohoúhelníku na protější stranu, sluje výška.

Přímka, spojující dva libovolné body obvodu mnohoúhelníku, sluje příčna či příčka (*mn* obr. 24.); jde-li příčna protějšími vrcholy, slove úhlopříčna (*ac*, *ce*, *ac* atd.) Z každého vrcholu

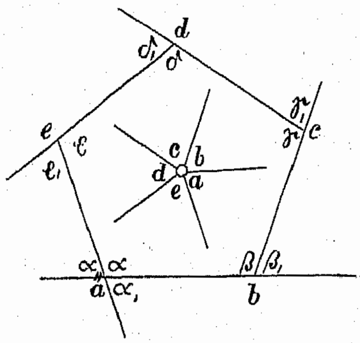
n-úhelníku dá se vésti ku každému protějšímu vrcholu jedna úhlopříčna. Však takových protějších vrcholů má každý vrchol n-úhelníku n-3; v n-úhelníku bylo by tedy možno vésti $n\ (n$-$3)$ úhlopříčen; ale v tomto počtu jest každá úhlopříčna počítána dvakráte, bude tudíž počet všech rozličných úhlopříčen v n-úhelníku stanoven vzorcem:

$$\acute{u} = \frac{n\,(n-3)}{2}.$$

V pětiúhelníku jest $\acute{u}_5 = \frac{5\,(5-3)}{2} = 5.$

§. 45. Prodlouží-li se veškeré strany mnohoúhelníku týmže směrem za vrchol, vznikne u každého úhlu vnitřního ještě jeden úhel, který sluje **úhel vnější**.

Úhel vnější mnohoúhelníku jest uzavřen jednou stranou mnohoúhelníku a prodlouženou její stranou sousední (obr. 25. $\sphericalangle\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1,\ \varphi_1$). Kdyby se strany (na př. ab) prodloužily ve směru protivném, vznikly by ještě jiné úhly vnější (na př. $\sphericalangle\ \alpha_{11}$), které se ale velikostí od dříve uvedených úhlů vnějších neliší; proto se říká, že má n-úhelník též n úhlů vnějších.



Obr. 25.

Poučky: 1) **Každý úhel vnější doplňuje se příslušným úhlem vnitřním na $2R$.**

$$\sphericalangle\ \alpha_1 + \alpha = 2R$$
$$\sphericalangle\ \beta_1 + \beta = 2R \qquad \sphericalangle\ \delta_1 + \delta = 2R$$
$$\sphericalangle\ \gamma_1 + \gamma = 2R \qquad \sphericalangle\ \varphi_1 + \varphi = 2R.$$

(Důkaz plyne bezprostředně z obrazce 25.).

2) Zvolme vnitř mnohoúhelníku libovolně bod (obrazem tohoto bodu budiž tečka o v obr. 25.), a veďme tímto bodem rovnoběžky ku stranám mnohoúhelníku. Kolem o vzniklé úhly rovnají se dle §. 37. střídavě vnějším úhlům mnohoúhelníku ($\sphericalangle\ a = \alpha$, $\sphericalangle\ b = \beta_1$ atd.); jich součet rovná se (dle §. 25., 3.) $4R$, tedy i **součet všech vnějších úhlů jakéhokoli mnohoúhelníku činí $4R$.**

3) V n-úhelníku činí součet všech úhlů vnějších i vnitřních dohromady (dle §. 45., 1.) $n \cdot 2R$, a proto součet všech úhlů vnitřních roven jest $n \cdot 2R - 4R$ t. j.

součet vnitřních úhlů jakéhokoli mnohoúhelníku rovná se tolikráte $2R$, kolik má mnohoúhelník stran, méně $4R$.

Jest tedy součet všech vnitřních úhlů v devítiúhelníku

$$9 \cdot 2R - 4R = 14R;$$

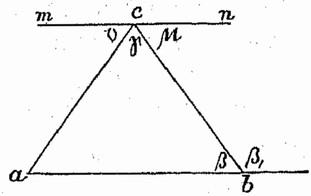
kdyby to byl devítiúhelník pravidelný, byla by velikosť vnitřního úhlu

$$\frac{14R}{9} = 1\tfrac{5}{9}\,R = 140^0.$$

O trojúhelnících.

§. 46. 1) **Součet všech úhlů vnitřních v každém trojúhelníku roven jest $2R$.**

Mimo důkaz sub 3) §. 45. pro mnohoúhelníky obecně udaný, stůj zde ještě tento zvláštní:



Obr. 26.

učiň . . . $mn \parallel ab$; potom

jest $\sphericalangle\ \mu = \beta$ proč?

$\sphericalangle\ \nu = \alpha$

poněvadž $\sphericalangle\ \nu + \gamma + \mu = 2R$,

musí též $\sphericalangle\ \alpha + \gamma + \beta = 2R$.

2) **V každém trojúhelníku rovná se úhel vnější součtu obou mu protilehlých úhlů vnitřních** (obr. 26.).

$\sphericalangle\ \beta + \beta_1 \quad = 2R$ — jako vedlejší úhly,

$\sphericalangle\ \alpha + \beta + \gamma = 2R$ — jako úhly v trojúhelníku, tedy i

$\sphericalangle\ \beta + \beta' = \alpha + \beta + \gamma$, z čehož plyne, že

$\sphericalangle\ \beta' = \alpha + \gamma$.

Následky: *a*) **V trojúhelníku může býti jen jeden úhel pravý nebo tupý.**

b) **Je-li v trojúhelníku jeden úhel pravý, jest součet ostatních též pravému roven.**

c) **Mají-li dva trojúhelníky po dvou úhlech střídavě rovných, jsou i třetí jejich úhly střídavě rovny.**

d) **Jsou-li dva úhly v trojúhelníku známy, dá se třetí vypočítati.**

Dle velikosti úhlu rozeznáváme trojúhelník:

1) pravoúhlý, v němž jeden úhel jest pravý;

2) tupoúhlý, v němž jest jeden úhel tupý;

3) ostroúhlý, v němž všickni tři úhlové jsou ostří.

Trojúhelníky ostro- a tupoúhlé slovou též kosoúhlými.

V trojúhelníku pravoúhlém slují strany, pravý úhel svírající, odvěsny, a strana, proti pravému ležící, přeponou.

§. 47. Strana, na níž trojúhelníku dáme spočívati, sluje základna nebo půdice; může jí býti strana kterákoliv. Půdici protilehlý vrchol jmenuje se obzvláště vrchol. Kolmice, s vrcholu trojúhelníku na protější stranu (třeba-li prodlouženou) spuštěná, sluje výška trojúhelníku. Každý trojúhelník má tři výšky.

Porovnávajíce délku stran trojúhelníku, rozeznáváme trojúhelník:

1) rovnoštranný, jehož všecky tři strany jsou si rovny;

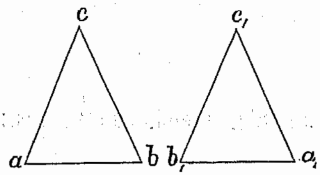
2) rovnoramenný, jenž má toliko dvě strany spolu rovné a třetí lichou;

3) nerovnostranný, v němž má každá strana jinou délku.

Při rovnoramenném trojúhelníku béřeme obyčejně za základnu stranu lichou; ostatní dvě spolu rovné strany slovou ramena.

§. 48. **Vztahy stran a protilehlých úhlů trojúhelníku:**

1) **Naproti rovným stranám trojúhelníku leží rovné úhly.**



Obr. 27.

Předpokládáme, že $ac = bc$. Mysleme si $\triangle\ abc$ ještě jednou ale obráceně vyrýsovaný ($\triangle\ b_1 a_1 c_1$) a položme $\triangle\ a_1 b_1 c_1$ na $\triangle\ abc$, aby úhel c_1 kryl úhel c, což možné jest, jelikož $\sphericalangle\ c_1 = c$. Poněvadž jest $ac = bc$, tedy i $a_1 c_1 = b_1 c_1$, a musí se též vrchol b_1 krýti vrcholem a, a a_1 vrcholem b; a jelikož $\sphericalangle\ b_1 = b$, jest i $\sphericalangle\ a = b$.

Následky: *a*) **V rovnoramenném trojúhelníku jsou úhly při půdici spolu rovny.**

Jedním úhlem rovnoramenného trojúhelníku jsou ostatní určeny.

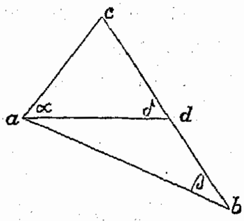
b) **Vnější úhel při vrcholu rovnoramenného trojúhelníku jest dvakráte tak velký, jako vnitřní úhel při půdici tohoto trojúhelníku.**

c) **V trojúhelníku rovnostranném jsou všecky úhly sobě rovny; každý z nich měří 60^0.**

2) **V trojúhelníku leží proti větší straně též větší úhel.**

Podmínka $bc > ac$.

Důkaz: Učiň $cd = ac$ a narýsuj ad; jest pak v rovnoramenném trojúhelníku acd . . . $\sphericalangle\ \alpha = \delta$; $\sphericalangle\ cab > \delta$. Jako vnější úhel trojúhelníku adb jest však $\sphericalangle\ \delta > \beta$; tím spíše musí tedy býti $\sphericalangle\ cab > \beta$.



Obr. 28.

3) **V trojúhelníku leží proti rovným úhlům rovné strany.** (Obr. 27.).

Podmínka: $\sphericalangle\, a = b$.

Důkaz: Kdyby ac nerovnala se bc, byla by nezbytně $ac >< bc$; tu by ale dle předchozí poučky byl $\sphericalangle\, a >< b$, což odporuje podmínce; musí tedy

$$ac = bc.$$

4) **V trojúhelníku leží naproti většímu úhlu větší strana.** (Obr. 28.)

Podmínka: $\sphericalangle\, bac > \beta$.

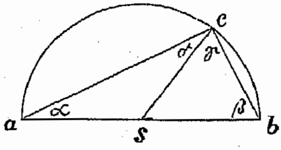
Důkaz: Dejme tomu, že by nebyla $bc > ac$. Tu by se musila $bc = ac$ anebo $bc < ac$; každá z těchto dvou hypotheś odporuje podmínce, nebo kdyby $bc = ac$, byl by nutně $\sphericalangle\, bac = \beta$, a kdyby $bc < ac$, musil by $\sphericalangle\, bac < \beta$. Musí tudíž $bc > ac$.

Následky: *a*) **V trojúhelníku pravoúhlém jest přepona stranou nejdelší.**

b) **V trojúhelníku tupoúhlém leží nejdelší strana proti úhlu tupému.**

§. 49. **Tětivy, spojující kterýkoliv bod polokružnice s koncovými body jejího průměru, svírají úhel pravý.**

Podmínka: Budiž s středem a ab průměrem polokružnice abc.



Obr. 29.

Důkaz: Vyrýsuj sc; pak jest $as = sb = sc$, jako poloměry téže kružnice.

V rovnoramenném

$\triangle asc \ldots \sphericalangle\, \alpha = \delta$.

V rovnoramenném

$$\frac{\triangle csb \ldots \sphericalangle\, \beta = \gamma;\ \text{tudíž}}{\sphericalangle\, \gamma + \delta = \alpha + \beta = \sphericalangle\, acb.}$$

Z toho plyne, že $2 \sphericalangle\, acb = \alpha + \beta + acb = 2R$

$\sphericalangle\, acb = R$, co se mělo dokázati.

Následek: Geometrické místo vrcholů všech pravých úhlů, jichž ramena procházejí krajními body dané délky, jest kružnice, nad touto délkou jako průměrem opsaná.

§. 50. **Vztahy mezi stranami trojúhelníku.**

1) **V trojúhelníku jest součet dvou jeho stran větší nežli strana třetí.**

Důkaz této věty odpadne, uvážíme-li, že jest přímá linie drahou nejkratší mezi dvěma body.

V $\triangle abc$ (obr. 28.) jest

$$bc < ab + ac.$$

2) Z této nerovnosti plyne, že

$$bc - ab < ac \text{ t. j.}$$

V trojúhelníku jest rozdíl dvou jeho stran menší než strana třetí.

§. 51. Spustí-li se s bodu mimo přímou linii ležícího na tuto linii kolmice, aneb vede-li se z tohoto bodu ku přímé linii linie šikmá, jmenuje se průsečík linie kolmé či šikmé a dané linie stopou kolmé či šikmé linie.

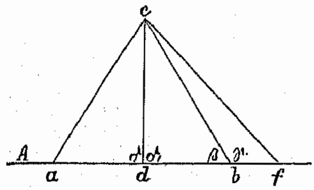
Vzdálenosť bodu, s něhož se na přímou linii kolmice spustila, od stopy této kolmice udává délka té kolmice.

Poučka: **Spustí-li se s bodu mimo přímou linii ležícího na tuto kolmice a mimo to více linií šikmých, tu jest:**

1) **kolmice nejkratší ze všech těch délek;**

2) **dvě délky kosé, jichž stopy od stopy kolmice rovné mají vzdálenosti, jsou stejně dlouhé.**

3) **Ze dvou délek šikmých, jichž stopy nerovné mají vzdálenosti od stopy kolmice, jest ona delší, jejíž stopa jest od stopy kolmice vzdálenější.**



Obr. 30.

1) Je-li v obr. 30. $cd \perp A$, jest v pravoúhlých trojúhelnících acd, dcb a dcf odvěsna cd kratší než kterákoli z přepon ac, bc, cf.

2) Je-li $cd \perp A$, a $ad = db$, musí, myslíme-li si trojúhelník acd kolem cd, tak dlouho točený, až přijde na trojúhelník cdb, vrchol a sjednotiti se s vrcholem b (pro rovnosť úhlů δ a δ_1 a délek ad a db); a tudíž $ac = bc$.

3) Je-li $cd \perp A$, jest v pravoúhlém $\triangle\, cdb$ $\measuredangle\, \beta$ ostrý, jeho úhel vedlejší γ tedy tupý a v tupoúhlém $\triangle cbf$ jest $cf > cb$.

Následky: *a)* **S bodu mimo přímou linii ležícího lze na tuto linii toliko jednu kolmici spustiti.**

b) **S bodu mimo přímou linii ležícího lze k této linii pouze dvé stejně dlouhých délek vésti.**

§. 52. **Úkoly.** *1) Stanoviti počet všech úhlopříčen v a) trojúhelníku, b) čtyřúhelníku, c) šestiúhelníku, d) osmiúhelníku, e) dvanáctiúhelníku.*

2) Vypočítati součet všech úhlů vnitřních v a) čtyřúhelníku, b) pětiúhelníku, c) sedmiúhelníku, d) desítiúhelníku, e) dvanáctiúhelníku.

3) Jak velký jest vnitřní úhel v pravidelném a) trojúhelníku, b) čtyřúhelníku, c) šestiúhelníku, d) osmiúhelníku, e) desítiúhelníku.

4) Obnášejí-li tři úhly ve čtyřúhelníku 45^0, 105^0 a 85^0; jak velký jest úhel čtvrtý?

5) Měří-li vnější úhel pětiúhelníku 106^0, jak velký jest součet a) ostatních čtyř vnějších úhlů, b) čtyř jemu protilehlých úhlů vnitřních?

6) Jak velký jest vnější úhel trojúhelníku, měří-li protilehlé jeho úhly vnitřní

α) $43^0 15'$ a $74^0 18'$; β) $60^0 15' 18''$ a $47^0 57' 46''$; γ) $36^0 40' 52''$ a $69^0 26' 19''$; δ) $72^0 15' 34''$ a $36^0 48' 18''$?

7) Jak velký jest třetí úhel trojúhelníku, jehož dva úhly měří: α) $54^0 38'$ a $68^0 56'$; β) $56^0 34' 54''$ a $72^0 18' 38''$; γ) $132^0 0' 8''$ a $35^0 2'$; δ) $85^0 10' 8''$ a $60^0 18' 39''$.

8) Poměr velikostí úhlů v trojúhelníku jest α) $1:2:3$; β) $3:4:5$; γ) $8:9:10$; jak velký jest každý úhel ve všech těchto případech?

9) Jak velký jest každý úhel čtyřúhelníku, jichž poměr jest $3:4:5:7$.

10) V trojúhelníku měří úhel vnější $125^0 48' 37''$ a jeden mu protilehlý úhel vnitřní $64^0 57' 48''$; jak velký jest každý z obou ostatních úhlů v trojúhelníku?

11) V trojúhelníku pravoúhlém měří jeden úhel vnější (při přeponě) α) 104^0, β) $112^0 45' 8''$, γ) $140^0 5' 48''$; jak velký jest 1) každý z ostatních úhlů vnějších, 2) každý z úhlů vnitřních?

12) Ze tří úhlů trojúhelníku jest $\sphericalangle \alpha$ o $14^0 20'$ větší než $\sphericalangle \beta$ a $\sphericalangle \gamma$, o $4^0 15'$ menší než $\sphericalangle \beta$; jak velký jest každý úhel?

13) Úhel při vrcholu rovnoramenného $\triangle$ měří

α) $48^0 15'$, β) $56^0 52' 18''$, γ) $45^0 0' 36''$, δ) $75^0 35' 42''$; jak velký jest úhel při půdici?

14) Jeden úhel při půdici rovnoramenného △ měří 45°18'47"; jak velký jest úhel při vrcholu?

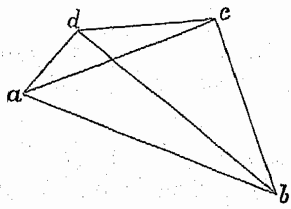
15) Jak velký jest každý úhel ostrý v rovnoramenném, pravoúhlém trojúhelníku?

16) Vnější úhel při půdici rovnoramenného trojúhelníku měří 148°24'48"; jak velký jest každý úhel vnitřní v tomto trojúhelníku?

17) Jak velké jsou úhly v rovnoramenném trojúhelníku, je-li úhel při vrcholu a) dvakráte, b) třikráte tak velký jako úhel při půdici, aneb c) měří-li úhel při vrcholu polovinu úhlu při půdici?

O čtyřúhelnících.

§. 53. Čtyřúhelník má čtyry strany, čtyry úhly a dvě úhlopříčny. Ze stran čtyřúhelníku jsou vždy dvě a dvě protější; proto říká se, že má čtyřúhelník dvoje strany protější (jedny strany protější jsou *ab* a *cd*, druhé jsou *ad* a *bc*. Součet všech úhlů vnitřních čtyřúhelníků roven jest *4R* (§. 45., 3.).

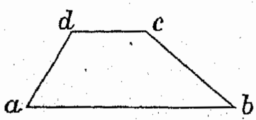


Obr. 31.

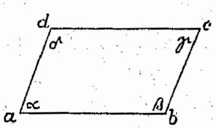
§. 54. Dle běhu protějších stran dělíme čtyřúhelníky na

1) různoběžníky, v nichž jsou oboje strany protější různoběžné (obr. 31.);

2) lichoběžníky, jichž jedny strany protější jsou rovnoběžné a druhé různoběžné (obr. 32.);



Obr. 32.



Obr. 33.

3) rovnoběžníky, jichž oboje strany protější jsou rovnoběžné (obr. 33.). Různoběžné strany lichoběžníku slují jeho ramena.

Lichoběžník, jehož ramena mají tutéž délku, sluje rovnoramenný.

§. 55. 1) **V rovnoběžníku jest součet dvou úhlů k téže straně přilehlých roven** $2R$; (na př. $\sphericalangle\,\alpha + \beta = 2R$, $\sphericalangle\,\beta + \gamma = 2R$) (obr. 33.).

(Důkaz plyne z §. 33.)

2) **Úhly protější v rovnoběžníku jsou si rovny.**

(V obr. 33. jest $\sphericalangle\,\alpha = \gamma$; $\sphericalangle\,\beta = \delta$, což plyne z §. 36).

3) **Je-li jeden úhel v rovnoběžníku pravý, jsou i ostatní úhly pravé; a je-li jeden úhel kosý, jsou i ostatní kosé, a sice dva z nich (protější) ostré, a dva (protější) tupé.**

Tato věta třetí plyne z předchozích dvou vět.

Část třetí.

O shodnosti mnohoúhelníků.

§. 56. 1) Mnohoúhelníky, mající stejný tvar i stejnou velikosť, slovou shodnými.

Shodné mnohoúhelníky mohou se pouze rozličnou polohou lišiti.

2) **Shodné mnohoúhelníky, jsouce na sebe náležitě položeny, musí se navzájem dokonale pokrývati**, t. j. meze jednoho padnou na meze druhého. Naopak lze též souditi: **Mnohoúhelníky, jež se navzájem mohou dokonale pokrývati, jsou jistě shodny.**

3) Při shodných mnohoúhelnících jsou strany a úhly, které na sebe připadnouce se kryjí, v témž pořádku sobě rovny a slovou souhlasné, a pokud tutéž polohu buď mají neb jí nabyti mohou, též stejnolehlé.

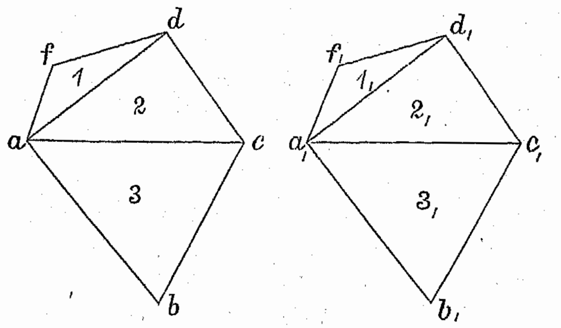
4) **Ve shodných mnohoúhelnících jsou stejnolehlé strany i úhly střídavě sobě rovny a naopak: mnohoúhelníky, jichžto stejnolehlé strany i úhly střídavě sobě rovny jsou, musí býti shodnými.**

5) **Shodné mnohoúhelníky rozložiti se dají úhlopříčnami stejnolehlými na střídavě shodné trojúhelníky.**

Položíme-li totiž shodné mnohoúhelníky tak, aby vrcholy jednoho pokrývaly stejnolehlé vrcholy druhého, pokrývají se i stejnolehlé úhlopříčny, tudíž i trojúhelníky jimi tvořené.

6) **Dva mnohoúhelníky, kteréžto z téhož počtu střídavě shodných trojúhelníků složeny jsou, jsou shodny.**

Buď v obr. 34. $\triangle\ 1 \cong 1_1$ $\triangle\ 2 \cong 2_1$ a $\triangle\ 3 \cong 3_1$. Myslíme-li si mnohoúhelník $a_1 b_1 c_1 d_1 f_1$ položený na mnohoúhelník $abcdf$ tak, aby $\triangle\ 1_1$ pokrýval $\triangle\ 1$, musí též $\triangle\ 2_1$ pokrývati $\triangle\ 2$ a i $\triangle\ 3_1$ $\triangle\ 3$; pročež se pokryjí i oba mnohoúhelníky.



Obr. 34.

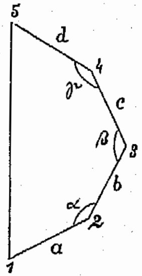
§. 57. Mnohoúhelník jest co do velikosti i podoby dokonale určen, je-li dána poloha jeho vrcholů.

Poloha vrcholů mnohoúhelníku nemusí však vždy přímo dána býti, nýbrž může se též z daných částí určovacích stanoviti.

Kdybychom měli sestrojiti mnohoúhelník (na př. pětiúhelník), jehož strany po pořádku by měly míti délku a, b, c, d, f, a úhlové velikosť α, β, γ, δ, φ, postupovali bychom takto:

Narýsovali bychom

přímku $12 = a$
a učinili $\sphericalangle\ 2 = \alpha$,
nanesli $23 = b$
a učinili $\sphericalangle\ 3 = \beta$
nanesli $34 = c$
a učinili $\sphericalangle\ 4 = \gamma$,



Obr. 35.

a udělali bychom $45 = d$. — Nyní, kde nám zbývají ještě 3 dané veličiny ($\sphericalangle\ \delta$, φ a strana f), nemůžeme nic jiného učiniti, než vésti přímku 51; pročež ostatní tři podmínky, totiž aby $15 = f$, a $\sphericalangle\ 5 = \delta$, a $\sphericalangle\ 1 = \varphi$, nelze vyplniti, lečby šťastnou náhodou i zároveň jim zadost učiněno bylo.

Z toho vidíme, že ve mnohoúhelníku jsou jedna strana a přilehlé k ní úhly závislé na velikosti částí ostatních. A jako tyto tři jmenované části, mohou i jiné tři části závislými učiněny býti na rozměrech ostatních částí mnohoúhelníku.

Tři části mnohoúhelníku tedy samy sebou z ostatních částí se ustanoví.

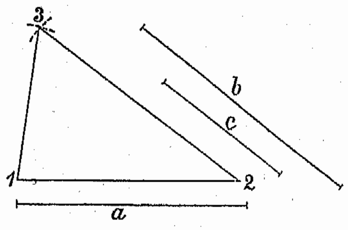
N-úhelník jest i co do tvaru i co do velikosti dokonale určen, když z jeho $2n$ částí (n-úhlů a n-stran) pouze **2n-3** částí dáno jest. Říkáme, že mnohoúhelník jest dokonale určen, když jest dáno částí (totiž stran a úhlů) tolik a takových, kolik jich třeba, ne méně, ne více, by se z nich mohl sestrojiti mnohoúhelník pouze jeden, a aby každý jiný, jenž by těm podmínkám zadost činil, s prvým byl shodný.

Pročež, máme-li rozhodnouti o shodnosti dvou mnohoúhelníků, není třeba, bychom napřed věděli, že všecky jejich stejnolehlé strany i úhly střídavě jsou rovny; nýbrž postačí věděti o rovnosti pouze oněch částí, jimiž mnohoúhelník jest dokonale určen. — Z úhlů mnohoúhelníku jest vždy jeden závislý na ostatních, poněvadž součet všech jest určitý a nemůže býti ku sestrojení n-úhelníku mimo strany dáno n-úhlů.

O shodnosti trojúhelníků.

§. 58. Stanovme, je-li trojúhelník třemi stranami dokonale určen.

Mezi délkami stran daných musí býti v §. 50. udané vztahy vyplněny. V obr. 36. jsou dány úsečkami a, b, c délky těchto stran.



Obr. 36.

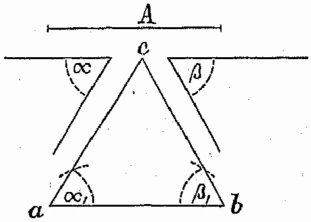
Nejdříve učiňme $12 = a$, tu vidíme, že jednou stranou stanovena jest již poloha dvou vrcholů trojúhelníku. Třetí vrchol musí míti vzdálenosť b od 2, a vzdálenosť c od 1; jest tedy průsečíkem dvou kružnic, z nichž jedna kolem bodu 1 poloměrem $= c$ a druhá kolem bodu 2 jako středu poloměrem $= b$ opsána jest. Spojením tohoto průsečíku s vrcholy 1 a 2 vznikne trojúhelník jediný; **jest tedy trojúhelník třemi stranami dokonale určen.**

Z toho plyne: **Dva trojúhelníky, jejichž všecky strany jsou si střídavě rovny, jsou shodny.**

Ony kružnice protínaly by se také na druhé (spodní) straně přímky 12; mohlo by se tedy zdáti, že z daných stran lze mimo trojúhelník 123 ještě jiný sestrojiti, z čehož by pak plynulo, že třemi stranami trojúhelník určen není. Kdybychom však tento trojúhelník druhý skutečně sestrojili, poznali bychom již pohledem, že od △ *123* ničím se neliší, leč umístěním.

§. 59. Vyšetřme, je-li trojúhelník jednou stranou a k ní přilehlými úhly dokona určen.

Kdybychom měli sestrojiti trojúhelník, jehož jedna strana by měla míti délku A, a k této straně přilehlé úhly velikosti α a β; tedy učiňme $ab = A$, čímž jest poloha dvou vrcholů trojúhelníku stanovena; potom sestrojme při ab dva úhly, z nichž $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$ a $\sphericalangle \beta_1 = \beta$. Druhá ramena těchto úhlů α_1 a β_1 jsou geometrická místa pro bod c. Tato místa geometrická mají pouze jeden bod společný, proto jest jen jediný trojúhelník možný, který daným podmínkám vyhovuje.



Obr. 87.

Jednou stranou a k ní přilehlými úhly jest trojúhelník dokonale určen.

Trojúhelníky, mající střídavě jednu stranu a k této straně přilehlé úhly sobě rovny, jsou shodny.

Následky: 1) **Trojúhelníky jsou shodny, mají-li střídavě jednu stranu a kterékoliv dva úhly střídavě rovny.**

2) **Pravoúhlé trojúhelníky jsou shodny, mají-li střídavě jednu stranu a jeden úhel ostrý rovný.**

3) **Rovnoramenné trojúhelníky jsou shodny, mají-li střídavě jednu stranu a jeden úhel rovný.**

4) **Trojúhelníky rovnostranné jsou shodny, mají-li střídavě jednu stranu rovnou.**

§. 60. Má-li se vyrýsovati trojúhelník, k jehož sestrojení dány jsou dvě strany a těmito stranami sevřený úhel, tu vykreslí se napřed úhel téže velikosti jako úhel daný a na jeho ramena nanesou se délky daných stran; spojí-li se koncové body těchto délek přímkou, tu jest vidno, že lze sestrojiti jediný trojúhelník, který hoví daným podmínkám, poněvadž dvěma body pouze jediná přímka vésti se dá.

Dvěma stranami a jimi sevřeným úhlem jest trojúhelník dokona určen.

Trojúhelníky, mající střídavě dvě strany a těmito stranami sevřený úhel rovny, jsou shodny.

Následek: **Pravoúhlé trojúhelníky jsou shodny, mají-li střídavě obě odvěsny rovně dlouhé.**

§. 61. Vyšetřme, je-li trojúhelník dvěma stranami a úhlem protilehlým dokonale určen. Zde rozeznávejme tyto případy:

a) Dané strany jsou si rovny.

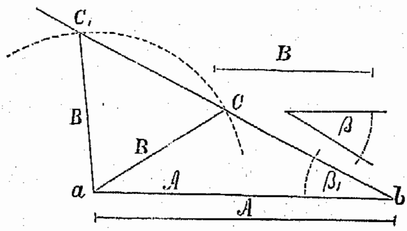
b) Jedna z daných stran jest větší než druhá.

1) Jsou-li dané strany rovny, jest trojúhelník rovnoramenný a dle §. 59., 3. dokonale určen. Je-li ale jedna strana větší než druhá, sluší opět rozeznávati:

a) buď jest dán úhel proti větší straně, nebo

b) proti menší straně položený.

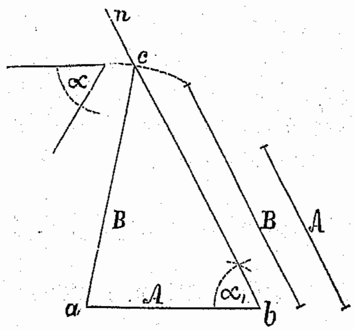
2) Jsou-li ku sestrojení trojúhelníku dány strany A a B, z nichž $A > B$ a úhel β proti kratší straně ležící; tu učiňme $ab = A$; sestrojme $\sphericalangle\ \beta' = \beta$, tu jest rameno úhlu β' měřickým místem pro třetí vrchol (c) trojúhelníku. Poněvadž jest dána délka strany B, ležící naproti $\sphericalangle\ \beta'$, jest též kružnice kolem bodu a poloměrem $= B$ místem geometrickým vrcholu c. Obě místa geometrická bodu c mají dva body společné, tedy připouští tento úkol řešení dvojí; vyhovujeť podmínkám i $\triangle\ abc$ i $\triangle\ abc_1$.



Obr. 88.

Dvěma stranami a úhlem, naproti kratší z nich ležícím, není trojúhelník určen.

3) Jsou-li dány 2 strany A a B ku sestrojení trojúhelníku, z nichž $B > A$ a úhel naproti delší straně ležící; tu jest délkou $ab = A$ poloha dvou vrcholů a i b úplně stanovena. Ramenem bn úhlu $\alpha' = \alpha$ jest jedno geometrické místo pro třetí vrchol c určeno. Poněvadž jest délka strany $ac = B$ dána, tudíž c od a o ac vzdálen, jest kružnice kolem a poloměrem $= B$ (ac) druhé místo geometrické pro bod c; poněvadž jen jediný, oběma místům geometrickým společný bod c daným



Obr. 89.

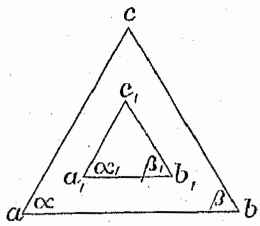
podmínkám zadost činí, lze na základě těchto částí určovacích jediný pouze trojúhelník sestrojiti.

Dvěma stranami a úhlem, proti delší z nich ležícím, jest tedy trojúhelník dokona určen.

Trojúhelníky, jejichž dvě strany a úhel, proti delší straně ležící, jsou si střídavě rovny, jsou shodny.

Následek: 1) **Pravoúhlé trojúhelníky jsou shodny, mají-li střídavě přeponu a jednu odvěsnu rovnou.**

§. 62. Že dvěma (tedy ani všemi třemi) úhly trojúhelník dokonale určen není, vidno ihned z pohledu na obr. 40., kde $\sphericalangle\, \alpha_1 = \alpha$, a $\sphericalangle\, \beta_1 = \beta$, aniž by $\triangle\, a_1 b_1 c_1$ byl shodný s $\triangle\, abc$.



Obr. 40.

Ohlédneme-li se na předcházející úvahy, shledáme, že mezi oněmi třemi částmi, jež musí býti jednak dány, má-li trojúhelník dokonale určen býti, jednak při dvou i více trojúhelnících střídavě sobě rovných, aby tyto byly shodny, objevuje se nejméně jedna strana.

Všecky souhlasné části shodných trojúhelníků se shodují. Pročež kdykoliv shodnosť trojúhelníků jest dokázána, lze souditi na rovnosť souhlasných částí jejich, o níž před tím známosť nebyla.

Pravíme proto: **Ve shodných trojúhelnících leží naproti rovným stranám rovné úhly a naopak naproti rovným úhlům rovné strany.**

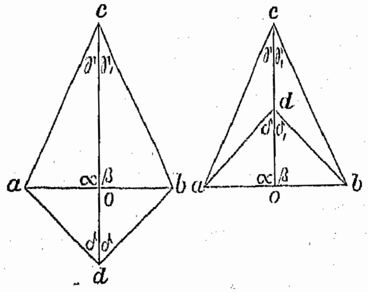
Použití pouček o shodnosti.

Poučky o trojúhelnících.

§. 63. **Přímka, spojující vrcholy dvou rovnoramenných trojúhelníků v společné půdici, rozpoluje i úhly při vrcholech i společnou půdici a stojí na ní kolmo** (obr. 41.).

Předpoklad $ac = bc$

$ad = bd.$



Obr. 41.

Tvrzení 1. $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$

$\sphericalangle \delta = \delta_1$.

Důkaz. $\triangle\, acd \cong bcd$ (poněvadž mají střídavě všecky strany rovné); proto $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$. (V druhém obrazci jest $\sphericalangle \delta = \delta_1$ jako úhly vedlejší rovných úhlů).

Tvrzení 2. a 3.

$ao = ob,\ cd \perp ab.$

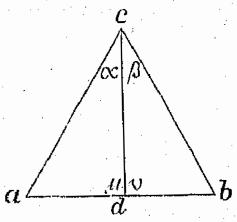
Důkaz. $\triangle\, aoc \cong boc$ (§. 59.); proto jest

$ao = bo$ a

$\sphericalangle \alpha = \beta, \ldots \sphericalangle \alpha + \beta = 2R$ tedy $\sphericalangle \alpha = \beta = R$ a

$cd \perp ab.$

§. 64. Poučky. 1) **Přímka, spojující vrchol rovnoramenného trojúhelníku se středem jeho půdice, stojí na této půdici kolmo a půlí úhel při vrcholu.**



Obr. 42.

Předpokl. $ac = bc$

$ad = db.$

Tvrzení $cd \perp ab$

$\sphericalangle \alpha = \beta.$

Důkaz

$\triangle\, acd \cong bcd$ (§. 58.);

proto jest $\sphericalangle \mu = \nu$ nebo $cd \perp ab$

a $\sphericalangle \alpha = \beta.$

2) **Kolmice s vrcholu rovnoramenného trojúhelníku na půdici spuštěna, rozpoluje tuto půdici a úhel při vrcholu.** (Důkaz na základě §. 61).

3) **Přímka půlící úhel při vrcholu rovnoramenného trojúhelníku, stojí na půdici v rozpolovacím bodu kolmo** (§. 60).

4) **Kolmice, vztyčena v rozpolovacím bodu půdice rovnoramenného trojuhelníku na tuto půdici, prochází vrcholem.**

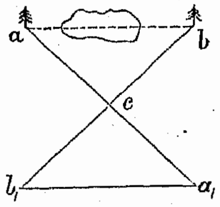
Plyne z 1, jelikož přímka, spojující vrchol se středem půdice rovnoramenného trojúhelníku, na této kolmá jest, a ve středu půdice na ní toliko jediná kolmice vztyčiti se dá.

Následek: Geometrické místo pro vrcholy rovnoramenných trojúhelníků o dané půdici, jest kolmice, vztyčená ve středu této půdice na tuto půdici.

Příklad praktického upotřebení nauky o shodnosti.

Stanoviti jest vzdálenosť dvou bodů na poli, která se přímo měřiti nedá, je-li ale možno vzdálenosť bodu třetího od daných bodů měřiti.

Buďtež a a b body, jichž vzdálenosť se stanoviti má a mezi nimiž na př. rybník se nacházející přímého měření nedopouští. Zvolme stanovisko c tak, aby se od něho i ku a i ku b měřiti mohlo a změřme přímou vzdálenosť ac i bc buď řetězem anebo pásmem měřickým; na prodloužené délky ac a bc nanesme $b_1c = bc$ a $a_1c = ac$. a_1b_1 udává vzdálenosť ab, jelikož $\triangle\, abc \cong a_1cb_1$.

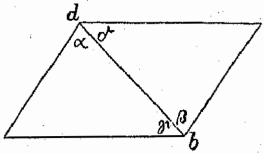


Obr. 43.

Poučky o rovnoběžnících.

§. 65. **Úhlopříčnou rozděluje se rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky.**

$$\begin{array}{rl} \text{Poněvadž} \ldots & ab \parallel cd \ldots \sphericalangle\gamma = \delta \\ & ad \parallel bc \ldots \sphericalangle\alpha = \beta \\ & bd = bd \\ \hline & \triangle\, abd \cong bdc. \end{array}$$



Obr. 44.

Následky:

Poněvadž $\triangle\, abd \cong bdc$, jest
$ad = bc$
$ab = cd$, t. j.

1) **V rovnoběžníku jsou protější strany sobě rovny.**

Tato věta vyslovuje se často takto:

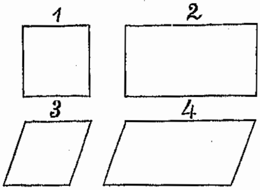
Rovnoběžky mezi rovnoběžkami jsou sobě rovny.

2) **Jsou-li dvě přímé linie rovnoběžny, mají všecky body jedné z nich ode druhé rovné vzdálenosti**; neboť kolmice, které vzdálenosť těchto rovnoběžek stanoví, jsou rovnoběžny. Stálá vzdálenosť každého bodu jedné ze dvou rovnoběžných přímých linií ode druhé, jmenuje se vzdálenosť obou rovnoběžek.

§. 66. Jsou-li v rovnoběžníku dvě sousedné strany sobě rovny, jest rovnoběžník rovnostranný; nemají-li však v rovnoběžníku dvě strany sousedné tutéž délku, jest rovnoběžník nerovnostranný.

Vzhledem ku poměru i úhlů i stran rozeznáváme:

rovnoběžník	pravoúhlý	rovnostranný	1) čtverec
		nerovnostranný	2) obdélník
	kosoúhlý	rovnostranný	3) kosočtverec
		nerovnostranný	4) kosodélník.



Obr. 45.

Čtverec jest rovnostranný, pravoúhlý rovnoběžník;

kosočtverec jest rovnostranný, kosoúhlý rovnoběžník;

obdélník jest nerovnostranný, pravoúhlý rovnoběžník;

kosodélník jest nerovnostranný, kosoúhlý rovnoběžník.

§. 67. Obrácení vět v §. 65.

1) **Čtyřúhelník, jehožto oboje protější strany jsou sobě rovny, jest rovnoběžník.**

Ve čtyřúhelníku *abcd* (obr. 44.) budiž $ab = cd$ a $ad = bc$. Tu jest $\triangle\, abd \cong bcd$ (proč?), tudíž jsou střídavé úhly $\sphericalangle\ \alpha = \beta$ sobě rovny, z čehož plyne, že $ad \parallel cb$, podobně i $\sphericalangle\ \gamma = \delta$, tedy i $ab \parallel cd$.

2) **Čtyřúhelník, jehožto dvě strany protější jsou sobě rovny a spolu rovnoběžny, jest rovnoběžník.**

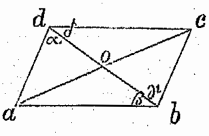
Ve čtyřúhelníku *abcd* (obr. 44) budiž $ab \parallel dc$, pak jest $\triangle\, abd \cong bcd$ (proč?), tudíž jsou střídavé úhly $\alpha = \beta$ z čehož plyne, že $ad \parallel bc$.

Následky: *a*) Mají-li dva body jakési přímky od jiné přímky na téže straně rovné vzdálenosti, jsou obě přímky rovnoběžny.

b) Měřické místo pro všecky body, kteréž mají od dané přímky na určité její straně danou vzdálenosť, jest přímka vedená rovnoběžně s danou přímkou na téže straně v dané vzdálenosti.

§. 68. **Poučky o úhlopříčnách v rovnoběžnících.**

1) **V rovnoběžníku se úhlopříčny navzájem rozpolují.**



Obr. 46.

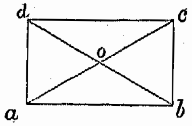
Budiž *abcd* rovnoběžník,

tedy $ab \parallel cd$, $ad \parallel bc$ a tu

$\triangle\, aob \cong cod$ (proč?); z čehož plyne, že

$$ao = oc$$
$$bo = do.$$

2) **V pravoúhlém rovnoběžníku (tedy ve čtverci a obdélníku) jsou úhlopříčny sobě rovny.**



Obr. 47.

Pravoúhlé trojúhelníky

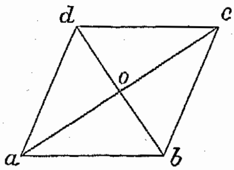
abd a *abc*

jsou shodny, proto jest

$ac = bd.$

3) **V rovnostranném rovnoběžníku (tedy ve čtverci a kosočtverci) stojí úhlopříčny na sobě kolmo.**

Je-li *abcd* rovnostranný rovnoběžník, tedy jsou *abd* a *bcd* dva rovnoramenné trojúhelníky o společné půdici *bd;* stojí v nich tedy $ac \perp bd$.



Obr. 48.

Sestavíme-li tyto poučky, vidno, že:

a) **Úhlopříčny rovnoběžníku se vzájemně půlí.**

b) **Úhlopříčny v obdélníku jsou sobě rovny.**

c) **Úhlopříčny v kosočtverci stojí na sobě kolmo.**

d) **Úhlopříčny ve čtverci jsou sobě rovny a stojí na sobě kolmo.**

Podle obrácených těchto pouček, které též pravdivy jsou, rozhoduje se často o druhu rovnoběžníku.

Věty o lichoběžnících.

§ 69. 1) **Příčka, vedena středem jedné různoběžné strany rovnoběžně se stranami rovnoběžnými, půlí druhou stranu různoběžnou.**

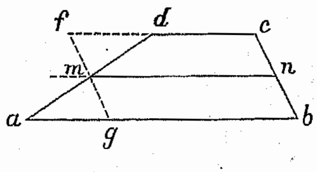
Budiž v obr. 49. $dc \parallel ab$,

$am = md$, a

$mn \parallel ab \parallel cd$; kreslí-li se $fg \parallel bc$, tu jest $\triangle mfd \cong amg$ (proč?) pročež

$fm = mg.$

Ale $fm = cn$, a $mg = nb$, tedy i $cn = nb$.



Obr. 49.

Důkaz obrácené této věty jest indirektní.

Přímá linie *mn* sluje příčkou střední lichoběžníku.

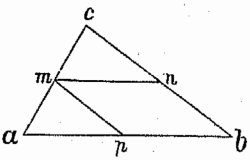
2) **Příčka střední v lichoběžníku rovná se polovici součtu jeho rovnoběžných stran.**

Ze shodnosti $\triangle amg$ a $\triangle mfd$ (obr. 49.) plyne, že $ag = fd$; dále jest $mn = bg = ab - ag$, a

$$\begin{array}{rl} mn = & cf = cd + df \\ \hline 2mn = & ab + cd \\ mn = & \dfrac{ab + cd}{2}. \end{array}$$

Poučky o příčkách ku stranám trojúhelníků rovnoběžných.

§. 70. 1) **Příčka, vedena v trojúhelníku ze středu jedné strany rovnoběžně s druhou, půlí stranu třetí.**



Obr. 50.

Předpokl.: $am = mc = \frac{ac}{2}$

$mn \parallel ab$

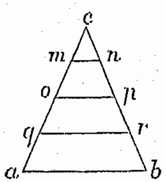
Tvrzení: $bn = cn$.

Důkaz: Učiňme $mp \parallel bc$, tu bude $\triangle amp \cong mcn$ (proč?), tudíž $mp = cn$; ale $mp = bn$, pročež jest $bn = cn$.

2) **Příčka, spojující středobody dvou stran trojúhelníku, jest rovnoběžna ku straně třetí.**

m a n buďtež středobody stran ac a bc trojúhelníku abc (obr. 50.). Přímka z m rovnoběžně ku ab vedená protíná bc v jistém bodě n_1; poněvadž dle 1) musí $cn_1 = n_1 b$, jest n_1 totožný s n, t. j. $mn \parallel ab$.

3) **Soustava příček rovnoběžných ku jedné straně trojúhelníku, která dělí stranu na díly mezi sebou rovné, dělí i druhou stranu na týž počet mezi sebou rovných dílů.**



Obr. 51.

Předpoklad:

$cm = mo = oq = qa$

$mn \parallel op \parallel qr \parallel ab.$

Tvrzení:

$cn = np = pr = rb.$

Důkaz:

$cn = np$ (v $\triangle ocp$ dle 1.)

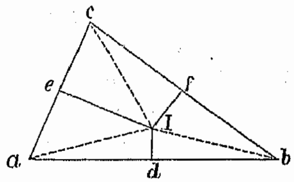
$np = pr = rb$ (dle §. 69., 1.).

§. 71. **O čtyřech zvláštních bodech v trojúhelníku.**

1) **Kolmice, vztyčené v rozpolovacích bodech stran trojúhel-**

niku na tyto strany, protínají se v jediném bodu, který má ode všech vrcholů trojúhelníku tutéž vzdálenosť.

Předpokl.: $ad = db$, $ae = ec$, $cf = fb$;
$dI \perp ab$, $If \perp bc$, $Ie \perp ac$.



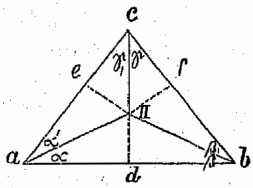
Obr. 52.

Kolmice dI a eI budou se vůbec v jednom bodu (I) protínati. Nakreslíme-li aI, bI a cI, musí býti $\triangle\, acI$ i $\triangle\, aIb$ rovnoramenný, jelikož výška eI, dI stojí na půdici ac, ab v rozpolovacím bodu kolmo, proto jest $aI = Ic$, a $Ia = Ib$, tedy i $aI = Ib = Ic$; tudíž jsou vzdálenosti bodu I ode všech vrcholů trojúhelníku sobě rovny, a jest bod I středobodem o trojúhelník opsané kružnice. Každému trojúhelníku dá se kružnice opsati. Geometrická místa pro její středobod jsou kolmice, v rozpolovacích bodech stran na tyto strany vztyčené.

Poněvadž $\triangle\, bIf$ jest rovnoramenný, musí přímka, spojující f s I, býti výškou tohoto trojúhelníku; tedy $fI \perp bc$. Bod I jest tedy průsečík kolmic dI, eI a fI.

2) **Příčky, půlící vnitřní úhly v trojúhelníku, protínají se v jediném bodu, který má od stran tohoto trojúhelníku rovné vzdálenosti.**

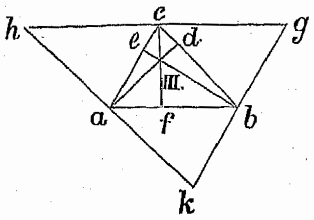
Předpokl.: $\sphericalangle\, \alpha = \alpha'$ $\sphericalangle\, \beta = \beta'$, $\sphericalangle\, \gamma = \gamma'$. Buďtež aII a bII příčkami, jež rozpolují úhly a i b, a bod II jich průsečíkem. Spustíme-li s II kolmice IId, IIe a IIf, jest $\triangle\, adII \cong aeII$, pročež $dII = eII$; poněvadž jest $\triangle\, IIdb \cong IIbf$, proto jest též $dII = fII$, tedy i $eII = dII = fII$; t. j. bod II má ode všech stran trojúhelníku abc tutéž vzdálenosť. Kreslíme-li nyní IIc, jest trojúhelník $eIIc \cong IIcf$, tedy i $\sphericalangle\, \gamma' = \gamma$, a přímka IIc půlí $\sphericalangle\, c$.



Obr. 53.

Bod II jest tudíž společný průsečík příček, úhly trojúhelníku abc půlících.

3) **Všecky tři výšky trojúhelníku protínají se v jediném bodu.**

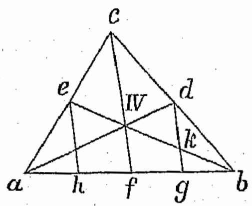


Obr. 54.

Budiž v obr. 54. $ad \perp bc$, $be \perp ac$ a $cf \perp ab$; vrcholy a, b, c kresleme přímky hg, gk, hk rovnoběžně ku stranám trojúhelníku abc, čímž obdržíme $\triangle hgk$, v němž jsou a, b, c středními body stran; kolmice pak ad, be a cf, vztyčené ve středech stran $\triangle ghk$ na jeho strany, protínají se dle 1) v jediném bodu III.

4) **Příčky, spojující vrcholy trojúhelníku se středobody protějších stran, protínají se v jediném bodu.**

Bod tento sluje těžiště trojúhelníku; leží v koncovém bodu první třetiny té které příčky, od stopy její počínaje.



Obr. 55.

Předp.: V trojúhelníku abc budiž $cd = db$, $ce = ea$, $af = fb$. Bod IV budiž průsečíkem příček cf a be. Příčkami dg a he rovnoběžně ku cf vedenými, rozpoluje se bf i af, pročež $bg = gf = hf$ a také $bk = kIV = IVe$; jest tedy

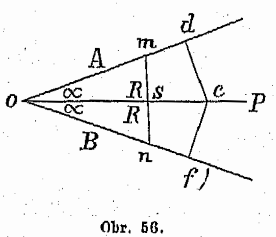
$$eIV = \frac{eb}{3}.$$

Příčka cf dělí tudíž be v bodě IV. v poměru $1:2$.

Vedeme-li příčku ad, rozdělí tato be na tytéž dvě části; pročež bude také bodem IV. procházeti.

§. 72. **O přímé linii, která úhel dvou různoběžných linií půlí.**

Budiž v obr. 56. přímka P přímkou, půlící úhel, kterýž jest sevřen přímkami A a B.



Obr. 56.

Sestrojíme-li libovolnou kolmici na P, třeba mn, jest

$$\triangle mso \cong osn$$

$$\sphericalangle\, \alpha = \alpha$$
$$\sphericalangle\, R = R$$
$$os = os, \text{ tudíž}$$

1) $om = on$
2) $ms = sn$.

1) Kolmice, vztyčena na přímku, úhel dvou různoběžek půlící, stanoví na těchto různoběžkách, od jich průsečíku počítaje, rovné úsečky.

2) Úsečka kolmice, na přímku úhel dvou různoběžek půlící vztyčena, se touto přímkou rozpoluje.

Spustíme-li z libovolného bodu linie P na A i B kolmice, jest

$$\underline{\triangle\, odc \cong ocf}$$
$$\sphericalangle\, \alpha = \alpha$$
$$\sphericalangle\, d = f = R$$
$$\underline{oc = oc}, \text{ tudíž}$$
$$3)\; dc = cf$$
$$4)\; od = of, \text{ t. j.}$$

3) kolmice, z libovolného bodu přímky úhel dvou různoběžek půlící na tyto různoběžky spuštěné, jsou stejně dlouhé a

4) stanoví na daných různoběžkách, od jich průsečíku počítaje, rovné úsečky.

Následky. Geometrické místo všech bodů, majících od každé ze dvou různoběžek tutéž vzdálenosť, jest přímka, úhel těchto různoběžek půlící.

Věty o pravidelných mnohoúhelnících.

§. 73. Poučka: **Přímky, jimiž se dva sousedné úhly pravidelného mnohoúhelníku rozpolují, protínají se v bodě, který má rovné vzdálenosti:** a) **ode všech vrcholů,** b) **ode všech stran mnohoúhelníku.**

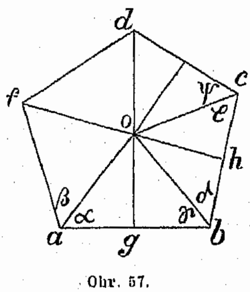
Podmínka: $ab = bc = cd = df = fa$
$$\sphericalangle\, \alpha = \beta$$
$$\sphericalangle\, \gamma = \delta$$

Důkaz: $\underline{\triangle\, aob \cong boc}$ (proč?); tudíž jest

$$ao = oc$$
$$\sphericalangle\, \beta = \varphi. \text{ Poněvadž jest}$$
$$\sphericalangle\, a = c,$$

tedy $\sphericalangle\, \beta = \frac{a}{2}$, a musí též

$$\sphericalangle\, \varphi = \frac{c}{2} = \psi, \text{ tedy i}$$
$$\underline{\triangle\, boc \cong cod}, \text{ tudíž}$$
$$bo = od \text{ atd.}$$



Obr. 57.

Tím se dokáže, že

$$ao = ob = oc = od = of.$$

V rovnoramenných trojúhelnících

aob a obc jest

$$\left.\begin{aligned} gb &= \frac{ba}{2} \\ bh &= \frac{bc}{2} \end{aligned}\right\} \text{ tudíž } bg = bh \text{ a}$$

$$\triangle bgo \cong bho \text{ (proč?); tedy}$$

$$og = oh \text{ atd.}$$

Tímto spůsobem lze dokázati, že jest $oh = ok$ atd.

Bod o, který má i od vrcholů i ode stran pravidelného mnohoúhelníku rovné vzdálenosti, sluje **střed** pravidelného mnohoúhelníku.

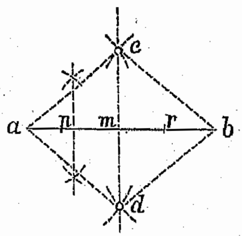
Následek: **Přímky, spojující střed pravidelného mnohoúhelníku s jeho vrcholy, rozpolují vnitřní úhly tohoto mnohoúhelníku a dělí jej na samé rovnoramenné, shodné trojúhelníky.**

Měřické konstrukce ku předešlé části.

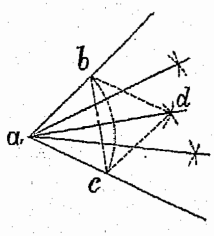
§. 74. **Rozpolování délek a úhlů, rýsování kolmic, dělení úhlu pravého na 3 rovné díly, rýsování úhlů určité velikosti a dělení přímky na několik rovných dílů.**

1) **Omezená přímka má se rozpůliti.**

Kolem krajních bodů a a b dané přímky (obr. 58.) opíší se libovolným poloměrem, který však větší býti musí než polovina dané délky, po obou stranách přímky ab dva (v celku tedy čtyry) oblouky, jež se protnou ve dvou bodech c a d.



Obr. 58.



Obr. 59.

Přímkou cd jest délka ab v bodu m rozpůlena. Důkaz plyne, nakreslíme-li ac, bc, ad, bd přímo z §. 63.

Kdyby se měla daná délka *ab* rozděliti na čtyři rovné díly, rozpůlila by se týmže spůsobem polovnia *am* v bodu *p*, a přenesením $mr = mp$, byl by úkol řešený.

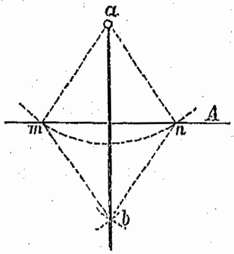
2) **Daný úhel má se rozpůliti** (obr. 59.)

Kolem vrcholu *a* daného úhlu opíše se libovolným poloměrem oblouk, jenž protne ramena jeho v bodech *c* a *b*.

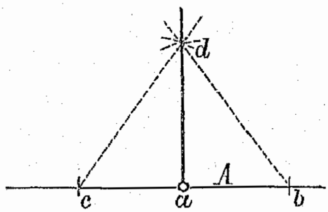
Z těchto bodů *b* a *c* opíší se opět poloměrem kterýmkoliv (avšak dosti dlouhým) nové kruhové oblouky, jež se protnou v bodě *d*; přímka *ad* rozpoluje daný úhel.

Důkaz. Kreslíme-li *bc*, *bd* a *cd*, obdržíme dva rovnoramenné trojúhelníky o společné půdici. Rozpůlíme-li podobně $\sphericalangle$ *c a d* a $\sphericalangle$ *b a d*, bude daný úhel na čtyři rovné díly rozdělen.

3) **S bodu, mimo přímku ležícího, má se na přímku spustiti kolmice.**



Obr. 60.



Obr. 61.

Kolem daného bodu *a* opíše se poloměrem dosti dlouhým oblouk, jenž danou přímku *A* protne v bodech *m* a *n*; kolem bodů *m* a *n* opíší se libovolným, ale stejným poloměrem oblouky, které se protnou v bodě *b*.

Přímka $ab \perp A$.

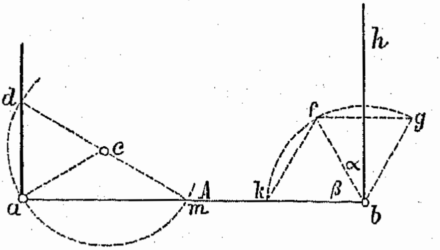
Důkaz. Rýsujeme-li *ma*, *na*, *mb* a *nb*, plyne důkaz přímo z §. 63.

4) **V daném bodu přímky má se vztyčiti kolmice** (obr. 61.)

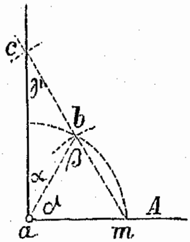
Má-li se v bodu *a* přímky *A* na tuto přímku vztyčiti kolmice, učiní se $ac = ba$, a opíší se kolem *c* a *b* libovolným poloměrem oblouky, jež se v bodě *d* protnou; $ad \perp A$.

Důkaz. Rýsují-li se *cd* a *bd*, vznikne rovnoramenný trojúhelník *cbd*, v němž přímka *ad*, spojující vrchol se středem půdice, na této kolmo stojí.

5) **V krajním bodu přímky vztyčiti kolmici, aniž by se tato přímka prodloužila.**



Obr. 62.



Obr. 63.

Kolem libovolně zvoleného, mimo danou přímku A ležícího bodu c (obr. 62.) opíše se poloměrem ac oblouk, který danou přímku A v bodu m protíná. Rýsuje-li se průměr dcm a tětiva ad, jest ad žádanou kolmicí.

Že $ad \perp A$, plyne z §. 49., dle něhož jest $\sphericalangle\ dam = R$.

Druhý způsob řešení tohoto úkolu jest následující: Kolem bodu b přímky A (obr. 62.), ve kterém se kolmice vztyčiti má, opíše se libovolným poloměrem oblouk, jenž v bodu k protíná danou přímku. Od tohoto bodu k počínaje, protne se prvý oblouk týmž rozevřením kružidla dvakráte po sobě novými oblouky v bodech f a g. Kolem f a g opíší se konečně dva oblouky jakýmkoliv ale stejným poloměrem, jež se vespolek v bodě h protnou; hb jest žádanou kolmicí.

Důkaz. Kreslí-li se kf a fb, jest $\triangle\ kfb$ rovnostranný, tedy $\sphericalangle\ \beta = 60^0$; z téhož důvodu jest i, kreslí-li se fg a bg, $\sphericalangle\ fbg = 60^0$, polovina jeho pak $\sphericalangle\ \alpha = 30^0$, tudíž $\sphericalangle\ \beta + \alpha = R$, t. j. $bh \perp A$.

Třetí způsob řešení tohoto úkolu jest následující: Kolem bodu a přímky dané A (obr. 63.) opíše se oblouk libovolně velkým poloměrem, který v bodu m přímku A protíná. Z bodu m protne se oblouk tento obloukem jiným, týmž poloměrem opsaným, v bodu b. Po té rýsuje se bm, učiní $bc = bm$ a spojí c s a. $ca \perp A$.

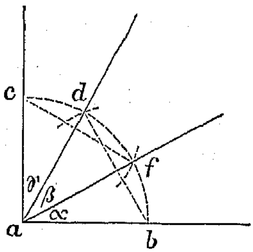
Důkaz. V rovnostranném trojúhelníku abm jest $\sphericalangle\ \beta = 60^0$; $\sphericalangle\ \beta$ jest vnějším úhlem rovnoramenného $\triangle\ abc$, tedy $\sphericalangle\ \beta = \alpha + \gamma$ t. j.

$$\sphericalangle\ \alpha = 30^0$$

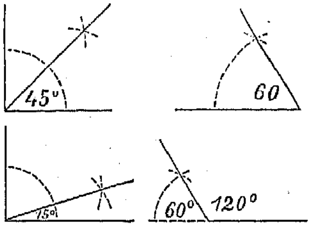
$$\sphericalangle\ \alpha + \delta = 30 + 60 = 90^0, \text{ tudíž}$$

$$ac \perp A.$$

6) **Rozděliti se má úhel pravý na tři rovné díly** (obr. 64.). Kolem vrcholu a úhlu pravého opíše se libovolným poloměrem čtvrtina kružnice, jež protne ramena v bodech b a c;



Obr. 64.



Obr. 65.

kolem těchto bodů týmže poloměrem $ab = ac$ opíší se kružnicové oblouky, jež protnou oblouk bc v bodech d a f.

Kreslí-li se ad a af, tedy jest daný úhel těmito přímkami na tři rovné díly rozdělen.

Důkaz. Kresli db a cf. V rovnostranném trojúhelníku abd jest $\sphericalangle\ dab = 60^0$, tedy $\sphericalangle\ \gamma = 30^0$. V rovnostranném $\triangle\ caf$ jest $\sphericalangle\ caf = 60^0$, tedy $\sphericalangle\ \alpha = 30^0$. Je-li $\sphericalangle\ \alpha = 30^0$, a $\sphericalangle\ \gamma = 30^0$, musí, poněvadž

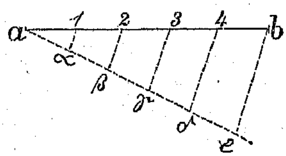
$\sphericalangle\ \alpha + \beta + \gamma = R$, býti též $\sphericalangle\ \beta = 30^0$.

7) **Sestrojiti úhel** 90^0, 45^0, 60^0, 15^0, 120^0, 135^0.

Konstrukce tyto jsou snadny na základě úkolů předcházejících (viz obr. 65.)

8) **Daná přímka má se na části sobě rovné rozděliti.**

Budiž ab (obr. 66.) danou délkou. Krajním bodem této délky na př. bodem a kreslí se přímka běhu libovolného, který však není příliš málo od běhu ab odchýlen. Na tuto novou přímku nanese se tolik mezi sebou rovných, jinak ale libovolně velkých dílů, na kolik částí se má ab rozděliti.



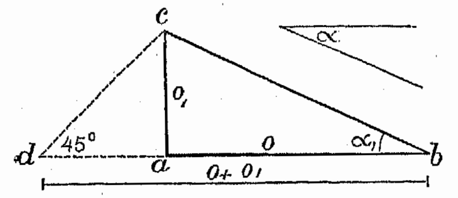
Obr. 66.

Koncový bod posledního dílu spojí se s druhým krajním bodem b. K této přímce kreslí se ostatními body dělícími rovnoběžky, jimiž jest délka ab na žádaný počet sobě rovných dílů rozdělena.

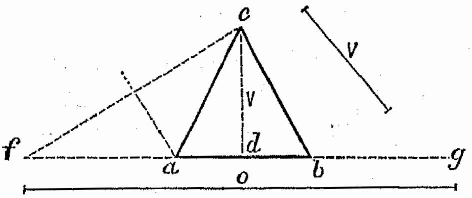
Důkaz plyne bezprostředně z věty 3. §. 70.

§. 75. Sestrojování trojúhelníků z daných částí určovacích.

1) **Sestrojiti se má trojúhelník pravoúhlý, dán-li jest součet odvěsen a jeden úhel ostrý.**



Obr. 67.



Obr. 68.

R o z b o r. Předpokládejme, že jest žádaný $\triangle$ *abc* v obr. 67. již sestrojen. Vytkněme v něm dané části, totiž $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$; druhou část danou, totiž součet odvěsen, který se zde bezprostředně nejeví, hleďme do obrazce uvésti. To stane se, prodlouží-li se *ab* za *a*, a učiní-li se $ad = ac$; tu jest $db = o + o_1$ t. j. druhá část daná. — Aby bod *d*, který se nyní obdržel, byl ve spojení s částmi danými, spojme jej s vrcholem *c*. Nyní vyšetřujme souvislost částí daných a částí, které se určiti mají.

Bezprostředně lze rýsovati přímku $db = o + o_1$ a učiniti $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$; tím jest poloha vrcholu *b* stanovena. Jde pouze o stanovení vrcholu *c*, neboť pro vrchol *a* jsou pak již dvě místa geometrická, totiž přímka *db* a $ac \perp db$ dána. Vrchol *c* jest průsečíkem ramena *bc* úhlu α_1, které se snadno rýsovati dá, a přímky *dc*.

K sestrojení přímky *dc* vyšetříme $\triangle$ *adc*, který jest pravoúhlý a rovnoramenný; tedy $\sphericalangle d = 45^0$, a může se proto snadno sestrojiti. Tím jsou již obě místa geometrická vrcholu *c* stanovena.

S e s t r o j e n í. Nakreslí se přímka a nanese se na ni délka $db = o + o_1$; při jednom z krajních její bodů vykreslí se $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$ a při druhém krajním $\sphericalangle 45^0$. V průsečíku druhých ramen úhlů *a* a úhlu 45^0 jest vrchol *c*. S vrcholu *c* spustí se na *db* kolmice, jejížto stopa na *db* stanoví třetí vrchol *a* žádaného trojúhelníku.

D ů k a z. Poněvadž jest v $\triangle$ *adc* . . . . $\sphericalangle d = 45^0$, jest tento pravoúhlý trojúhelník rovnoramenným, tudíž $ad = ac$ a proto i $db = o + o_1$; mimo to jest $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$, tedy hoví $\triangle$ *abc* daným podmínkám.

D e t e r m i n a c e: $\sphericalangle \alpha$ musí býti ostrý.

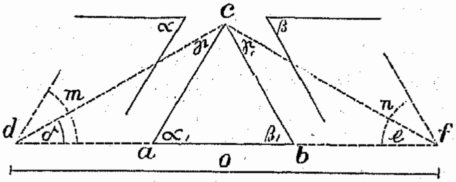
2) **Sestrojiti trojúhelník rovnoramenný, dán-li jest obvod jeho a výška.**

Rozbor. Budiž trojúhelníkem žádaným abc (obr. 68.). Vytkněme v něm dané části, t. j. výšku cd a obvod fg tím spůsobem, že si myslíme ab za oba krajní body a i b prodlouženou; tím učiněny jsou $af = ac$, $bg = bc$; pak jest $fg = o$. Poněvadž jest trojúhelník abc rovnoramenný, jest bod d středním bodem délky fg. Pro vrchol c jsou tedy dvě místa geometrická stanovena, totiž 1) kolmice vztyčená v d na fg, a 2) kružnice, jež jest délkou dané výšky v kolem d opsána. — Pro stanovení vrcholu a jest jedním místem geometrickým přímka fg; mimo to jest a vrcholem rovnoramenného $\triangle\, cfa$; jest tudíž druhým místem geometrickým pro vrchol a kolmice ve středu fc na fc vztyčená. — Ku stanovení vrcholu b stačí podmínka, že v rovnoramenném $\triangle\, abc$ vrcholy a i b souměrně ku d položeny jsou.

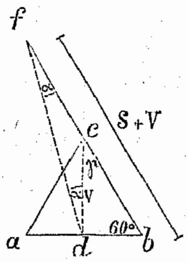
Sestrojení. Narýsuje se přímka, a na ni se nanese délka $o = fg$; ve středobodu d této délky vztyčí se kolmice a učiní se $dc = v$. Potom kreslí se fc, a v rozpolovacím bodu této délky vztyčí se kolmice, která fg v bodu a protíná. Učiní-li se posléze $db = ad$, jest žádaný trojúhelník sestrojen.

Důkaz vysvítá z rozboru.

3) **Sestrojiti trojúhelník, jsou-li dány dva úhly a obvod jeho** (obr. 69.).



Obr. 69.



Obr. 70.

Rozbor. Budiž abc žádaným trojúhelníkem, v němž jest $\sphericalangle\, \alpha_1 = \alpha$, $\sphericalangle\, \beta_1 = \beta$; abychom do obrazce uvedli daný obvod o, prodlužme ab na obě strany a učiňme $da = ac$, $bf = bc$, jest potom $df = o$. Kresleme dále cd i cf; tím povstane $\triangle\, dac$, jenž jest rovnoramenný, pročež $\sphericalangle\, \gamma = \delta$; jelikož však

$$\sphericalangle\, \alpha_1 = \gamma + \delta, \text{ musí } \sphericalangle\, \delta = \frac{\alpha_1}{2}$$

Podobně ukáže se, že $\sphericalangle\, \varphi = \frac{\beta_1}{2}$. — Pro stanovení vrcholu c

jsou jako místa geometrická dána druhá ramena úhlů δ a φ. Vrcholy a a b leží 1) na df, 2) na ac, po případě bc.

Sestrojení. Na rýsovanou přímku se nanese $df = o$, a sestrojí se při $d \sphericalangle m = \alpha_1$, při $f \sphericalangle n = \beta_1$. Úhly tyto se rozpůlí a průsečíkem c přímek, kteréž tyto úhly půlí, kreslí se rovnoběžky ke druhým ramenům úhlů m a n; tyto rovnoběžky stanoví na df vrcholy a a b.

Důkaz plyne z rozboru.

4) **Sestrojiti se má trojúhelník rovnostranný, dán-li jest součet jeho strany a výšky.**

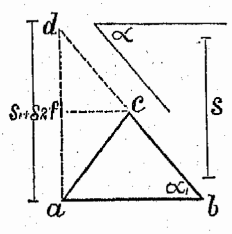
Rozbor. Budiž abc (obr. 70.) žádaným trojúhelníkem, a cd vytčenou v něm výškou. Prodlužme bc za vrchol c a učiňme $fc = v$; tu jest $bf = S + V$. Je-li poloha bodů d a b stanovena, dá se trojúhelník abc snadno sestrojiti. Poněvadž $\sphericalangle b = 60^0$, může se narýsovati úhel 60^0 a na jedno jeho rameno nanésti $bf = S + V$. Ku stanovení bodu d jest 1) ab jedním a 2) fd druhým geometrickým místem. K rýsování fd poslouží rovnoramenný trojúhelník fcd, v němž $\sphericalangle \alpha = \frac{\gamma}{2}$; a poněvadž jest $\sphericalangle \gamma = 30^0$, jest $\sphericalangle \alpha = 15^0$.

Sestrojení. Nakreslí se úhel 60^0, jehož vrchol jest b. Na jedno rameno tohoto úhlu se nanese $bf = S + V$, a při f sestrojí se $\sphericalangle 15^0$, jehož druhé rameno na ramenu úhlu 60^0 stanoví bod d. Vztyčením kolmice v d na ab obdrží se vrchol c, a přenesením $ad = db$ vrchol b.

Důkaz vysvítá z rozboru.

5) **Sestrojiti se má trojúhelník, dána-li jest jedna strana S, k této straně přilehlý úhel α, a součet $S_1 + S_2$ obou ostatních stran.**

Rozbor. Předpokládejme, že jest trojúhelník žádaný abc v obr. 71. již nakreslen; v něm budiž $ab = S_1$ a $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$. Abychom do obrazce uvedli daný součet $S_1 + S_2$, prodlužme bc za vrchol c a učiňme $cd = ac$; potom jest $bd = S_1 + S_2$. Pro vrchol c jest přímka bd jedním, a kolmice fc, v rozpolovacím bodu délky ad na tuto délku vztyčená, druhým geometrickým místem, jelikož jest $\triangle\ acd$ rovnoramenný.



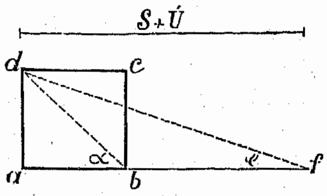
Obr. 71.

Sestrojení. Nakreslí se úhel $\alpha_1 = \alpha$; na jedno jeho rameno se nanese délka $ab = S$, na druhé rameno délka $bd = S_1 = S_2$. Bod d spojí se s bodem a, a v rozpolovacím bodu délky ad vztyčí se kolmice, která na ramenu bd stanoví třetí vrchol c žádaného trojúhelníku.

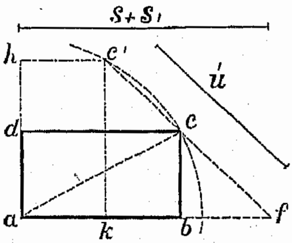
Důkaz vysvítá z rozboru.

§. 76. Sestrojování čtyřúhelníků z daných částí určovacích.

1) **Má se sestrojiti čtverec, je-li dán součet jeho strany a úhlopříčny.**



Obr. 72.



Obr. 73.

Rozbor. Budiž $abcd$ (obr. 72.) žádaným čtvercem, a bd jeho úhlopříčnou. Abychom v obrazci obdrželi daný součet $S + Ú$, prodlužme ab za vrchol b a učiňme $bf = bd = Ú$; potom jest $af = S + Ú$. Čtverec žádaný dá se, poněvadž poloha vrcholu a dána jest, snadno sestrojiti, bude-li známa poloha vrcholu d. K stanovení vrcholu d poslouží 1) přímka $ad \perp af$, a 2) přímka df.

$\sphericalangle\, \alpha$ jest vnějším úhlem rovnoramenného $\triangle\, bdf$, tedy $\sphericalangle\, \varphi = \frac{\alpha}{2}$.

Poněvadž $\sphericalangle\, \alpha = 45^0$, proto $\sphericalangle\, \varphi = 22\frac{1}{2}^0$. Odchylkou φ jest běh přímky df stanoven, a dá se tato rýsovati.

Sestrojení. Nakreslí se úhel pravý, jehož vrcholem jest a. Na jedno rameno tohoto úhlu se nanese $af = S + Ú$. Při vrcholu f sestrojí se $\sphericalangle\, \varphi = 22\frac{1}{2}^0$ tím, že se $\sphericalangle\, R$ rozdělí na čtyry rovné díly; v průsečíku ramena tohoto $\sphericalangle\, \varphi$ a druhého ramena $\sphericalangle\, a$ jest vrchol d. Učiní-li se nyní $ab = ad$, a opíší-li kolem b i d oblouky poloměrem $ad = ab$, jest průsečík c těchto oblouků čtvrtým vrcholem žádaného čtverce.

2) **Sestrojiti obdélník, je-li dán součet dvou sousedných stran a úhlopříčna.**

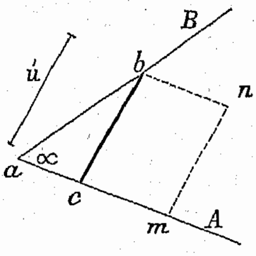
Rozbor. Žádaný obdélník budiž *abcd* v obr. 73., a *ac* jeho úhlopříčnou. Prodlouží-li se *ab* za vrchol *b*, a učiní-li se $bf = bc$, jest $af = S + S_1$. Bude-li poloha vrcholu *c* známa, bude sestrojení obdélníku již snadné; neboť třeba pouze s vrcholu *c* spustiti kolmici na *af*, čímž se obdrží vrchol *b*, a kolmici na druhé rameno pravého úhlu při *a*, čímž se obdrží vrchol *d*. Ku stanovení vrcholu *c* jsou následující místa geometrická: 1) přímka *fc*, jejíž odchylka od $af = 45^0$, poněvadž jest $\triangle\ bcf$ rovnoramenný a pravoúhlý, a 2) kružnice poloměrem $= ú$ kolem *a* jako středu opsaná. Poněvadž tato místa geometrická mají dva společné body *c* a c_1, obdrží se celkem dva vrcholy *c*, které hoví podmínkám daného úkolu, a tudíž i dva obdélníky *abcd* a ahc_1k. Oba tyto obdélníky liší se od sebe pouze polohou (proč?).

Sestrojení. Nakresli úhel pravý, jehož vrchol jest *a*. Na jedno rameno tohoto úhlu se nanese $af = S + S_1$; při *f* sestrojí se úhel 45^0, a druhé rameno tohoto úhlu protne se obloukem poloměrem $= ú$ kolem vrcholu *a* opsaným. S průsečíku *c* spustí se kolmice na obě ramena dříve rýsovaného úhlu pravého.

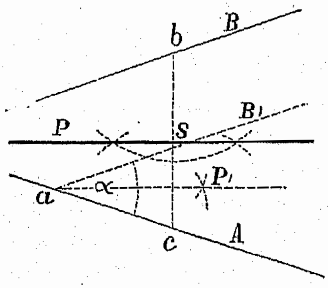
Determinace. Kolik obdélníků lze zde sestrojiti; kdy jest jeden obdélník možný, a kdy jest řešení tohoto úkolu nemožno?

§. 77. Některé jiné konstrukce.

1) **Mezi rameny daného úhlu nakresliti úsečku rovnoběžnou a stejně dlouhou s danou délkou.**



Obr. 74.



Obr. 75.

Daný úhel budiž α a daná délka *ú* v obr. 74.

Libovolným bodem *m* jednoho ramena (*A*) daného úhlu kreslí se $mn \parallel u$, a učiní se $mn = u$. Bodem n kreslí se potom $nb \parallel A$. Průsečíkem b této rovnoběžky s druhým ramenem B úhlu daného kreslí se úsečka žádaná $bc \parallel u$.

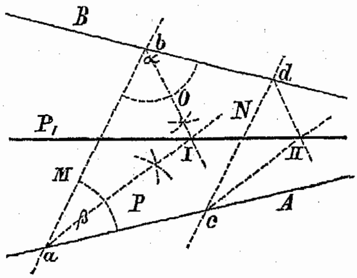
Důkaz zůstavuje se čtenáři.

2) **Stanoviti se má přímka, úhel dvou různoběžek půlící, neprotínají-li se tyto různoběžky na nákresně.**

Buďtež dány různoběžky A a B v obr. 75. Kterýmkoliv bodem jedné z daných různoběžek na př. bodem a přímky A kreslí se přímka rovnoběžná ku druhé dané přímce, tedy $B' \parallel B$. Odchylka přímek A a B' (tedy $\sphericalangle\ \alpha$) se rozpůlí a na přímku P' tento úhel rozpolovací vztyčí se kdekoliv kolmice na př. bc; tato se rozpůlí, a v bodu s se kreslí $P \parallel P'$. (P jest v bodu s kolmo na bc.)

Důkaz jest použije-li se věty 2. v §. 72. snadný.

Jiný způsob řešení tohoto úkolu jest následující:



Obr. 76.

Jsou-li A a B v obr. 76. dané různoběžky, tu nakreslí se dvě přímky rovnoběžné M a N běhu libovolného tak, aby obě dané přímky protínaly. Úhly, které svírá jedna z těchto přímek, na př. M s danými přímkami (tedy úhly α a β), se rozpůlí; průsečík I přímek O a P tyto úhly půlících, jest jedním bodem přímky žádané. Druhý bod II jest průsečíkem přímek, jež jsou body c a d rovnoběžně k P a O vedeny.

Důkaz spočívá na větě 2. §. 71.

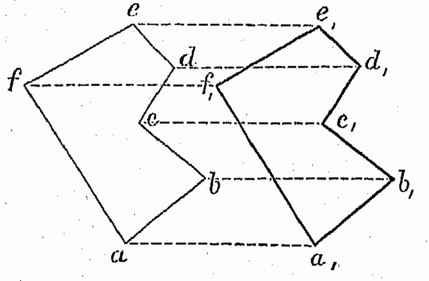
§. 78. **Rýsování shodných mnohoúhelníků.**

1) Vrcholy daného mnohoúhelníku kreslí se přímky rovnoběžné, běhu libovolného, a na nich stanoví se, od vrcholů daného mnohoúhelníku počínaje, rovné úsečky. Spojením koncových bodů těchto úseček v náležitém postupu obdrží se mnohoúhelník, který jest s daným mnohoúhelníkem shodný.

Budiž v obr. 77. mnohoúhelník daný $abcdef$ a mnohoúhelník $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ dříve vytčeným způsobem sestrojený, tedy jest

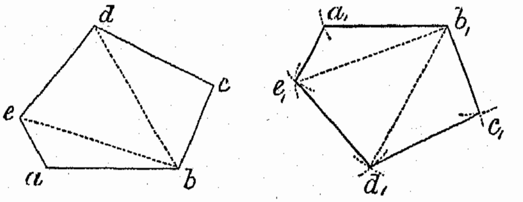
$$abcdef \cong a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 .$$

Důkaz, že strany stejnolehlé i úhly těchto dvou mnohoúhelníků jsou střídavě rovny, následuje z §. 66.



Obr. 77.

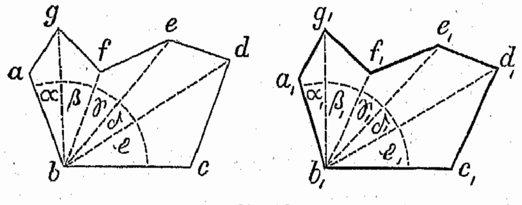
2) Daný mnohoúhelník rozloží se na trojúhelníky (buď úhlopříčnami, z jednoho vrcholu vycházejícími, anebo přímkami, které spojují vrcholy daného mnohoúhelníku s libovolně voleným bodem vnitř tohoto mnohoúhelníku), a mnohoúhelník nový, který s daným shodný býti má, složí se z trojúhelníků, které se stejnolehlými trojúhelníky daného mnohoúhelníku shodny jsou. Mnohoúhelník jest dle věty 6. §. 57. shodný.



Obr. 78.

Podle toho učiní se v obr. 78.:

$$
\begin{aligned}
a_1 b_1 &= ab,\\
b_1 e_1 &= be,\\
a_1 e_1 &= ae,\\
b_1 d_1 &= bd,\\
e_1 d_1 &= ed,\\
b_1 c_1 &= bc,\\
d_1 c_1 &= dc.
\end{aligned}
$$



Obr. 79.

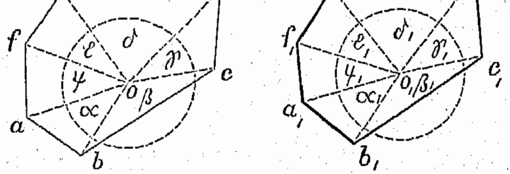
V obr. 79. přenesly se úhly $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$ atd., potom

$$
\begin{aligned}
a_1 b_1 &= ab,\\
b_1 g_1 &= bg \text{ atd.}
\end{aligned}
$$

Ku sestrojení mnohoúhelníku

$$a_1 b_1 c_1 \ldots f_1 \cong abc \ldots f$$

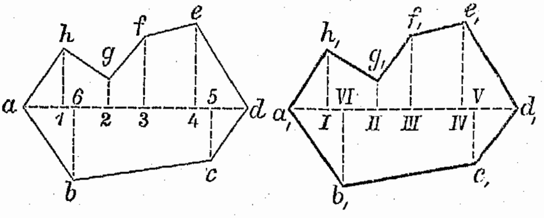
(obr. 80.), přenesly se pořadné úhly $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta \ldots \sphericalangle \psi_1 = \psi$ a učinily se délky $a_1 o_1 = ao$, $b_1 o_1 = bo$ atd.



Obr. 80.

3) Jiný spůsob rýsování shodných mnohoúhelníků děje se pomocí soustřednic. Vnitř daného mnohoúhelníku kreslí se úhlopříčna nejdelší (tato jest osou úseček) a na ni spustí

se se všech vrcholů daného mnohoúhelníku kolmice (pořadnice). Poloha každého bodu jest určena vzdáleností stopy pořadnice od krajního bodu osy úseček, tak zvanou úsečkou a délkou pořadnice.

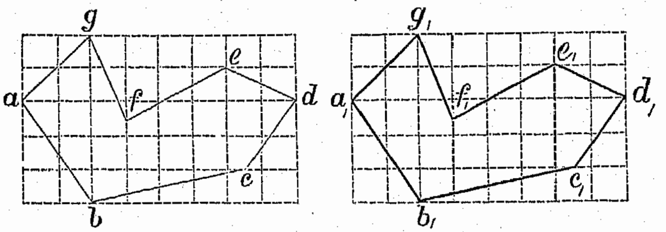


Obr. 81.

V obr. 81. jest a (a_1) počátkem souřadnic, a vzdálenosti bodů *I*, *II*, *III*... *VI*, d, nanesou se od tohoto počátku.

V bodech takto nanesených vztyčí se kolmice v náležitém směru a na ty přenesou se příslušné délky pořadnic. Osa souřadnic může se i mimo daný mnohoúhelník voliti.

4) Mnohoúhelníky shodné rýsují se též pomocí sítě čtvercové.



Obr. 82.

Upotřebení sítě čtvercové vysvítá z obr. 82.

Úkoly k rýsování.

§. 79. *1) Danou délku rozděliti α) na 8, β) 5, δ) 6 rovných dílů.*

2) Rozděliti úhel daný na 4 rovné díly.

Sestrojiti trojúhelník, dány-li jsou:

3) Základna a k této přilehlé úhly, z nichž jeden 45° a druhý 75° měří.

4) Dvě strany a těmito sevřený úhel, který měří 60°.

5) Délka všech tří stran.

6) *Délka dvou stran a naproti delší z nich ležící úhel, jenž měří 135°.*

Sestrojiti trojúhelník pravoúhlý, dány-li jsou:

7) *Přepona a jedna odvěsna.*

8) *Obě odvěsny.*

9) *Přepona a 75° velký úhel.*

10) *Jedna odvěsna a úhel $22\frac{1}{2}$°.*

11) *Přepona a k ní příslušná výška.*

12) *Přepona a rozdíl obou úhlů ostrých. (Součet těchto úhlů = R, tedy sestrojí se tyto úhly ze známého součtu a rozdílu.)*

13) *Výška na přeponu spuštěná a jedna odvěsna.*

14) *Výška na přeponu spuštěná a jedna úsečka přepony.*

15) *Přepona rovnoramenného trojúhelníku.*

16) *Obvod a jeden úhel ostrý.*

17) *Jedna odvěsna a součet přepony a odvěsny druhé.*

18) *Odvěsna a rozdíl přepony a odvěsny druhé.*

19) *Přepona a součet obou odvěsen.*

20) *Součet odvěsen a jeden ostrý úhel.*

21) *Obvod a rozdíl obou úhlů ostrých.*

Sestrojiti trojúhelník rovnoramenný, dány-li jsou:

22) *Půdice a úhel při vrcholu (45°).*

23) *Výška a úhel při půdici (30°).*

24) *Rameno a výška.*

25) *Výška a úhel při půdici.*

26) *Půdice a rozdíl ramena a výšky.*

27) *Půdice a součet ramena a výšky.*

28) *Rozdíl půdice a ramena a úhel při půdici.*

29) *Součet půdice a ramena a úhel při půdici.*

30) *Rozdíl ramena a výšky a úhel při vrcholu.*

31) *Obvod a výška.*

32) *Obvod a úhel při vrcholu.*

33) *Obvod a úhel při půdici.*

Sestrojiti trojúhelník rovnostranný, když jsou dány:

34) *Obvod.*

35) *Výška.*

36) *Součet strany a výšky.*

37) *Rozdíl strany a výšky.*

Sestrojiti trojúhelník, dány-li jsou:

38) Dvě strany a výška k jedné z nich příslušná.

39) Dvě strany a výška příslušná ku straně třetí.

40) Oba úhly při půdici a výška.

41) Půdice, jeden k ní přilehlý úhel a součet ostatních stran.

42) Půdice, jeden k ní přilehlý úhel (ostrý) a rozdíl obou ostatních stran.

43) Půdice a tupý k ní přilehlý úhel; mimo to rozdíl ostatních stran.

44) Obvod a úhly při půdici, z nichž jeden 45° a druhý 75° měří.

45) Obvod, výška a jeden úhel při půdici.

Sestrojiti čtverec, dány-li jsou:

46) Obvod.

47) Úhlopříčna.

48) Součet strany a úhlopříčny.

49) Rozdíl strany a úhlopříčny.

Sestrojiti kosočtverec, dány-li jsou:

50) Obě úhlopříčny.

51) Strana a jedna úhlopříčna.

52) Strana a výška.

53) Výška a jeden úhel.

54) Výška a jedna úhlopříčna.

55) Úhlopříčna a jí protilehlý úhel.

Sestrojiti obdélník, dány-li jsou:

56) Dvě strany sousedné.

57) Strana a úhlopříčna.

58) Strana a součet její strany sousedné a úhlopříčny.

59) Součet dvou sousedných stran a úhlopříčna.

60) Obvod a úhlopříčna.

61) Strana a podmínka, že její strana sousedná má poloviční délku úhlopříčny.

62) Strana a jí protilehlý, úhlopříčnami sevřený úhel.

Sestrojiti rovnoběžník, dány-li jsou:

63) Dvě strany sousedné a úhel jimi sevřený.

64) Dvě strany sousedné a jedna úhlopříčna.

65) Dvě strany sousedné a jedna výška.

66) Jedna strana a úhly, které úhlopříčny s ní svírají.

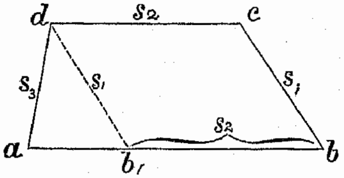
67) Jedna strana a obě úhlopříčny.

68) Obě úhlopříčny a úhel jimi sevřený.
69) Jedna strana a obě výšky.
70) Obě úhlopříčny a jedna výška.
71) Jedna strana, k ní příslušná výška a jedna úhlopříčna.

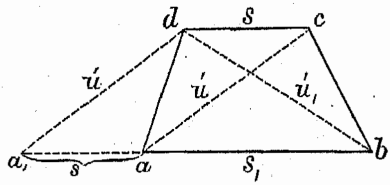
72) Úhlopříčna a úhel jí protilehlý; mimo to úhel, který tato úhlopříčna s jednou stranou svírá.

Sestrojiti lichoběžník, dány-li jsou:

73) Všecky čtyři strany (obr. 83.).
74) Obě rovnoběžné strany a obě úhlopříčny (obr. 84.).



Obr. 83.



Obr. 84.

75) Tři strany a výška.
76) Obě strany rovnoběžné a obě úhlopříčny.
77) Tři strany a úhel dvěma z nich sevřený.
78) Tři strany a jedna úhlopříčna.

Sestrojiti čtyřúhelník, dány-li jsou:

79) Tři strany a oba jimi sevřené úhly.
80) Tři strany a obě úhlopříčny.
81) Čtyři strany a jeden úhel.
82) Čtyři strany a jedna úhlopříčna.
83) Dvě strany a všechny (tři) k nim přiléhající úhly.

Úkoly jiné:

84) Na dané přímce A stanoviti bod, jenž jest ode dvou daných, mimo danou přímku ležících bodů stejně vzdálen.

85) Dány jsou tři body, které v jedné přímce neleží. Sestrojiti přímku, která jedním bodem procházeti a od ostatních bodů rovné vzdálenosti míti má.

86) Dány jsou dvě délky; stanoviti se má bod, jenž jest společným vrcholem rovnoramenných trojúhelníků nad těmito délkami jakožto základnami sestrojených.

87) V trojúhelníku tupoúhlém, v němž úhel tupý 135° měří, stanoviti čtyři zvláštní body.

88) Stanoviti bod, který má ode dvou daných různoběžek dané vzdálenosti.

89) Dány jsou dvě, na nákresně se neprotínající různoběžky a mimo ně ležící bod; má se rýsovati přímka, která tímto bodem prochází, a na těchto různoběžkách, počítaje od jich průsečíku, rovné úsečky stanoví.

90) Dán jest úhel ostrý a délka A; položiti tuto délku tak mezi ramena daného úhlu, aby stála kolmo na jednom z nich a by krajní body její do těchto ramen padly.

Část čtvrtá.

Ploský obsah přímočarých mnohoúhelníků.

§. 80. **Obsahem plochy či krátce obsahem nějakého mnohoúhelníku rozumíme velikost jím zaujaté roviny.**

Mnohoúhelníky, které mají stejné obsahy, jsou si rovny.

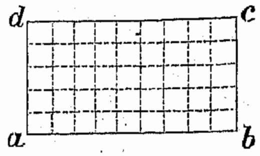
Ku měření obsahu nějakého mnohoúhelníku béře se jiný mnohoúhelník známé velikosti za jednotku plošné míry a zkoumá se, kolikkráte jest v onom mnohoúhelníku obsažen. Číslo, udávající, kolikkráte jednotka plochomíry v daném mnohoúhelníku jest obsažena, jmenuje se číslo míry čili měrné číslo jeho obsahu.

Za jednotku plošné míry jest přijat čtverec, jehož strana jest jednotkou míry délkové. Je-li pro měření délek metr za jednotku považován, jest jednotkou plošné míry čtvercový metr (□m), t. j. čtverec, jehož strana má jeden metr zdéli. 1 čtvercový metr má 100 čtvercových decimetrů (□dm) po 100 čtvercových centimetrech (□cm), tyto po 100 čtverc. millimetrech (□mm), 1 čtvercový kilometr (□Km) = 1,000.000 □m, 1 čtv. myriametr (□Mm) = 100 □Km.

Jednotkou plošné míry pozemků jest ar, t. j. plocha čtverce, jehož strana měří jeden dekametr; 1 ar = 100 □m, 100 arů činí 1 hektar; 100 hektarů činí 1 myriar.

Stanovení plošného obsahu pozemků bezprostředným kladením jednotky plochomíry bylo by obtížno a není mimo to vždy možno. Proto určujeme plošné obsahy obyčejně prostředečně, měříce ony délky, na kterých velikost jejich závisí, a vypočítávajíce potom z těchto měrných čísel délek počtem hledaný obsah.

§. 81. Má-li se stanoviti obsah obdélníku *abcd* (obr. 85.), změří se délka základny *ab* a výškou *ad* toutéž jednotkou délkovou. Je-li tato jednotka délková v základně *a*-kráte a ve výšce b-kráte obsažena, dá se jednotka plochomíry v obdélníku po základně a-kráte nanésti, a takovýto pás, a jednotek plošných obsahující, dá se po výšce b-kráte nanésti. Obdélník tedy obsahuje $a \,.\, b$ plošných jednotek. Je-li p měrné číslo obsahu obdélníka, jest



Obr. 85.

$$p = ab, \text{ t. j.}$$

Měrné číslo obsahu obdélníku rovná se součinu z měrných čísel základny (délky) a výšky (šířky).

Pravidlo toto vyjadřuje se obyčejně takto:

Obsah obdélníku rovná se součinu z jeho základny a výšky, aneb plošný obsah obdélníku rovná se součinu ze dvou jeho sousedných stran.

Kdekoli se takovéhoto stručného proslovení užívá, jest součinem délek vždy součin měrných jich čísel míněn.

Ze vzorce $p = a \,.\, b$ plyne

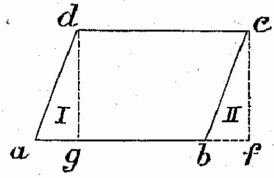
$$a = \frac{p}{b}; \; b = \frac{p}{a}.$$

§. 82. Poněvadž každý čtverec může se považovati za obdélník, jehož základna a výška mají tutéž délku, následuje ze předešlého, je-li s délka strany a p plocha čtverce, že

$$p = s \,.\, s = s^2, \text{ t. j.}$$

Obsah čtverce rovná se dvojmoci měrného čísla jeho strany.

§. 83. Je-li v obr. 86. $abcd$ kosoúhelný rovnoběžník a spustí-li se s jeho vrcholů c a d kolmice na základnu ab, vznikne obdélník $dgcf$, který má s daným rovnoběžníkem stejnou základnu i výšku. Pravoúhlé trojúhelníky I a II jsou shodny, protože mají rovné přepony a odvěsny $dg = cf$. Přidáním trojúhelníku I neb II k lichoběžníku $dcgb$, obdrží se buď rovnoběžník $abcd$, buď obdélník $dgcf$, proto jest



Obr. 86.

$$\text{rovnoběžník } abcd = \text{obdélníku } dgcf,$$

tudíž

Obsah každého kosoúhlého rovnoběžníku rovná se obsahu obdélníku, který s ním má stejnou základnu i výšku.

Následky:

1) Plošný obsah každého rovnoběžníku rovná se součinu z jeho základny a výšky.

2) Plošné obsahy dvou rovnoběžníků, které mají rovné půdice i rovné výšky, jsou sobě rovny.

§. 84. Kreslí-li se v rovnoběžníku úhlopříčna, dělí tato rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky, z nichž každý má tutéž základnu i výšku jako daný rovnoběžník.

Trojúhelník jest tedy polovina rovnoběžníku, který s ním má rovnou půdici i výšku.

Následky: 1) Obsah trojúhelníku rovná se polovině součinu z čísel míry jeho základny a výšky (aneb součinu ze základny a poloviny výšky).

Je-li p obsah trojúhelníku, z měrné číslo jeho základny a v měrné číslo výšky, jest

$$p = \frac{z \cdot v}{2} = z \cdot \frac{v}{2} = \frac{z}{2} \cdot v;$$

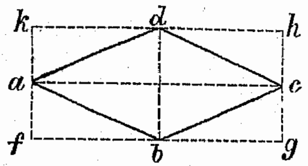
$$v = \frac{2p}{z}; \quad z = \frac{2p}{v}.$$

2) Obsah trojúhelníku pravoúhlého rovná se polovičnému součinu z měrných čísel jeho odvěsen.

3) Trojúhelníky o rovných základnách a výškách mají rovné obsahy.

4) Trojúhelníky o společné základně, jichž vrcholy leží na přímce k základně rovnoběžné, jsou si rovny.

§. 85. Plošný obsah kosočtverce určuje se týmž způsobem, jako obsah kosoúhlého rovnoběžníku vůbec; může se však též vypočísti z obou úhlopříčen, které v kosočtverci kolmo na sobě stojí.



Obr. 87.

Kreslí se totiž v kosočtverci $abcd$ (obr. 87.) úhlopříčny a mimo to vrcholy jeho přímky s úhlopříčnami rovnoběžné; obdrží se obdélník $fghk$, jehož základna a výška rovny jsou úhlopříčnám kosočtverce. Kosočtverec jest složen ze čtyř takových trojúhelníků, jakých na obdélník osm připadá; rovná se tedy polovici obdélníku toho. Je-li p obsah a $ú$ a $ú_1$ délka úhlopříčen v kosočtverci, jest

$$p = \frac{ú \cdot ú_1}{2} = \frac{ú}{2} \cdot ú_1 = ú \, \frac{ú_1}{2}, \text{ t. j.}$$

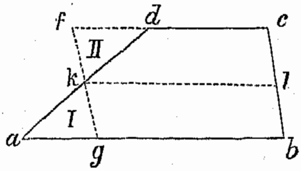
Obsah kosočtverce rovná se polovičnému součinu z měrných čísel obou jeho úhlopříčen.

Toto pravidlo prospívá mnohdy ve příkladech praktických, poněvadž se vzdálenosť protějších vrcholů (úhlopříčny) pohodlněji měří, než vzdálenosť strany od protějšího vrcholu (výška).

Následek: Obsah čtverce rovná se polovičnému součinu z obou úhlopříčen.

Protože však ve čtverci úhlopříčny rovnou mají délku, **rovná se obsah čtverce polovině dvojmoci měrného čísla úhlopříčny.** (Čtverec nad úhlopříčnou čtverce jest dvakrát tak velký jako daný čtverec.)

§. 86. Kreslí-li se v lichoběžníku *abcd* (obr. 88.) rozpolovacím bodem jednoho ramena *k* přímka *kl* rovnoběžně k základnám tohoto lichoběžníku a mimo to přímka *fg* rovnoběžně k druhému ramenu, jest $\triangle\, fkd \cong akg$. Přidáním trojúhelníku *I* neb *II* ku pětiúhelníku *gbcdk*, shledá se, že lichoběžník



Obr. 88.

abcd = rovnoběžníku *bcfg*.

Výška tohoto rovnoběžníku jest táž jako výška lichoběžníku a základna jeho

$$bg = kl = \frac{ab + cd}{2} \text{ t. j.:}$$

Lichoběžník má týž obsah jako rovnoběžník o téže výšce, jehož základna rovná se střední příčce (t. j. polovině součtu obou základen) tohoto lichoběžníku.

Následek: Obsah lichoběžníku rovná se součinu z polovičného součtu měrných čísel obou rovnoběžných stran a měrného čísla výšky.

Je-li p obsah, z a z_1 délky rovnoběžných stran a v výška lichoběžníku, jest

$$p = \frac{z + z_1}{2} \cdot v = \frac{v\,(z + z_1)}{2} = \frac{v}{2}\,(z + z_1).$$

§. 87. Spojí-li se v pravidelném n-úhelníku střed se všemi vrcholy, rozloží se tento mnohoúhelník na n shodných trojúhelníků. Jsou-li s a k měrná čísla strany a na stranu se středu spuštěné kolmice a p měrné číslo plochy tohoto pravidelného mnohoúhelníku, jest

$$p = n \cdot \frac{s \cdot k}{2} = n \cdot s \cdot \frac{k}{2},$$

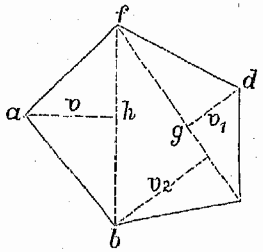
při čemž značí ns měrné číslo obvodu mnohoúhelníku.

Obsah pravidelného mnohoúhelníku rovná se polovičnému

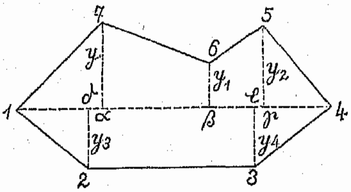
součinu z měrných čísel obvodu jeho a kolmice spuštěné se středu na některou stranu.

Vzdálenosť středobodu ode strany ve mnohoúhelníku nesmí se libovolně přijati, nýbrž závisí zcela určitým spůsobem na délce strany.

§. 88. Aby se obsah mnohoúhelníku nepravidelného stanovil, rozloží se tento mnohoúhelník buď úhlopříčnami na samé trojúhelníky aneb na trojúhelníky pravoúhlé a lichoběžníky



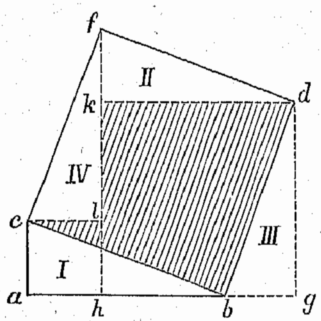
Obr. 89. a)



Obr. 89. b)

tak, že se kreslí nejdelší úhlopříčna a na tuto spustí se s jednotlivých vrcholů kolmice. Obsahy jednotlivých těchto trojúhelníků aneb trojúhelníků pravoúhlých a lichoběžníků se jednotlivě vypočtou a sečtou. (Obr. 89.)

§. 89. **Věta Pythagorova.**



Obr. 90.

Budiž v obr. 90. *abc* trojúhelník pravoúhlý a *bcdf* čtverec nad přeponou jeho sestrojený. Spustí-li se s *d* a *f* kolmice *dg* a *fh* na *ab* a s *d* a *c* kolmice *kd* a *cl* na *hf*, vzniknou čtyři shodné trojúhelníky *I II III* a *IV*. (Proč jsou shodny?)

Čtverec *cbdf* jest složen ze pětiúhelníku *bdklc* a trojúhelníků *II* a *IV*; oba čtyřúhelníky *ahlc* a *hgdk* složeny jsou z téhož pětiúhelníku *bdklc* a ze shodných trojúhelníků *I* a *III*, pročež jest $bdfc = ahlc + hgdk$.

Ve čtyřúhelníku *ahlc* jest $ac \parallel hl$ a $cl \parallel ah$, proto jest rovnoběžník, a protože jest úhel při $a = R$, jest rovnoběžník pravoúhlý. Jako stejnolehlé strany ve shodných trojúhelnících *I* a *IV* jest $ac = cl$, tudíž jest tento pravoúhlý rovnoběžník též rovnostranný a jest tedy čtverec nad odvěsnou ac. Podobně dokáže se, že jest $hgdk$ čtvercem nad odvěsnou ab a platí tedy věta:

V každém pravoúhlém trojúhelníku rovná se čtverec nad přeponou součtu čtverců nad oběma odvěsnama.

Tato věta jmenuje se věta Pythagorova po svém vynálezci Pythagorovi.

Úkoly početné.

§. 90. *1) Jak velký jest obvod o a obsah p obdélníku, mají-li půdice z a výška v následující hodnoty:*

α) $z = 18\ m$ β) $z = 14{\cdot}8\ m$ γ) $z = 128.76\ m$
$v = 36\ m$ $v = 56{\cdot}6\ m$ $v = 54{\cdot}57$?

2) Jsou-li v obdélníku z dříve uvedených veličin u, p, z a v dány.

α) $o = 40\ m$ β) $p = 93{\cdot}75\ \square m$ γ) $p = 40{\cdot}32\ \square m$
$z = 12\ m$ $z = 7{\cdot}5\ m$ $v = 11{\cdot}2\ m$

δ) $o = 43{\cdot}8\ m$ ε) $p = 8\ \square m\ 45\ \square dm\ 60\ \square cm$
$v = 12{\cdot}4\ m$ $z = 1{\cdot}4\ m.$

mají se vypočítati v každém případě obě ostatní.

3) Má se položiti obdélníková podlaha, 16 m dlouhá a 8 m široká, prkny 4 m dlouhými a 0·5 m širokými. Kolik takových prken jest k tomu třeba?

4) Obdélníkové pole, 246·8 m dlouhé, měří 30751·28 □m; jak jest široké?

5) Ve dvou stejně velkých obdélnících měří dvě sousedné strany jednoho 8·4 m a 3·6 m; délka druhého měří 7·6 m; jak velká jest jeho šířka?

6) Rolník zamění své pole, které obsahuje 860·75 □m, za jiné téhož obsahu, které 17·4 m široké jest; jak dlouhé jest nové pole?

7) Zrcadlo i s rámcem jest 5·8 dm široké a 8·2 dm dlouhé; jaký jest α) obvod, β) obsah zrcadlové plochy, je-li rámec 6 cm široký?

8) Podlaha obdélníková 7·2 m dlouhá a 6·5 m široká stojí 53 zl. 88 kr.; po čem jest 1 □m?

9) Dvůr 27 m dlouhý a 21 m široký má vydlážděn býti čtvercovými dlažicemi, jichž hrana měří 3 dm:

α) kolik dlažic bude k tomu třeba?

β) zač přijde tato dlažba, platí-li se □m po 7 ½ zl.?

10) Hospodář vymění dvě role, z nichž jest jedno 36·4 m *dlouhé a 30 m široké a druhé 58·8 m dlouhé a 46·4 m široké, za jiné role, které tak velké jest jako obě ona dohromady, a jehož délka 72 m měří; jak široké jest toto?*

11) Obvod obdélníku měří 24·54 m, základna jeho jest dvakráte tak velká jako výška; jak velký jest jeho obsah?

12) Pokoj 78 m dlouhý, 5·75 m široký a 3·6 m vysoký má býti vyčalouněn; v pokoji tom jsou 3 okna, každé 2 m vysoké a 1·2 m široké a jedny dvéře 2·2 m vysoké a 1·3 m široké. Čalouník vezme k tomu čaloun 42 cm široký, jehož stůčka 8 m dlouhá jest, a 1 zl. 40 kr. stojí, a počítá za přilepování 80 kr. od stůčky. Co stojí vyčalounění toho pokoje?

13) Jak velká jest plocha čtverce, jehož strana měří

α) 37 m, β) 2·732 m, γ) 0·586 m.

14) Jak velký jest obsah čtverce, jehož obvod měří 22·8 m?

15) Jakou cenu má čtvercové místo ku stavění, jehož strana měří 42 m, počítá-li se □m po 4 zl. 80 kr.?

16) Kolem zahrady čtvercové, jejíž strana měří 65·4 m, vésti se má cesta 1·3 m široká; jak velký jest obsah této cesty?

17) Dvě zahrady, stejně velké, obehnati se mají plotem; jedna z nich má podobu čtverce, jehož strana 48 m dlouhá jest, a druhá má podobu obdélníku 36 m širokého. Oč bude plot okolo obdélné zahrady delší nežli okolo čtverečné?

18) Jak široké musí býti obdélníkové pole 50·87 m dlouhé, aby mělo týž obsah jako čtvercové pole, jehož strana měří 38·5 m?

19) V trojúhelníku, jehož základna jest z, výška v a obsah p, má se ze dvou veličin vypočítati třetí, je-li dáno:

α) z = 12·5 m	*β) p = 22·8 □m*	*γ) p = 106·7 □m*
v = 8·6 m	*v = 5·7 m*	*z = 9·7 m.*

20) Jak velký jest obsah pravoúhlého trojúhelníku, měří-li jeho odvěsny

α) 27·4 m	*β) 42·6 m*
15·6 m	*1·583 m*

21) Obsah trojúhelníku měří 125·36 □m, jedna jeho výška měří 18·4 m; jak velká jest této výšce příslušná strana?

22) Trojúhelný pozemek, jehož základna měří 336 m, má 378 arů plochy:

a) jakou výšku má tento pozemek?

b) jakou cenu, stojí-li hektar 1045 zl.?

23) Jak velký jest obsah trojúhelníku rovnoramenného, jehož výška $8^1/_2$ m, jedno rameno $10^1/_4$ m a obvod $33^3/_8$ m měří?

24) *Jak vysoký jest trojúhelník, mající 8·4 m dlouhou základnu, má-li týž obsah jako čtverec, jehož strana měří 5·6 m?*

25) *Jak velký jest obsah rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku, měří-li jeho odvěsna 82·7 m?*

26) *Jedna odvěsna pravoúhlého trojúhelníku měří 5·55 m; jak velká jest odvěsna druhá, má-li tento trojúhelník týž obsah jako čtverec, jehož strana měří 4·44 m.*

27) *V rovnoběžníku jest p obsah, z půdice a v výška. Vypočítati veličinu třetí, dány-li jsou:*

α) $z = 4{\cdot}2\ m$ β) $p = 39\ \square m$ γ) $p = 67\ \square m$
$v = 3{\cdot}3\ m$ $v = 8\ m$ $z = 13{\cdot}2\ m.$

28) *Z louky kosodélné, jejíž základna 76·4 m a výška 48·7 m měří, byl pruh $11^3/_4$ m široký rovnoběžně se základnou oddělen a zorán; α) jak velká byla louka, β) jak velký jest zbývající kus louky?*

29) *Buďtež v kosočtverci s a v měrná čísla strany a výšky, ú a ú₁ měrná čísla úhlopříčen; vypočítati obsah jeho p, dány-li jsou:*

α) $z = 12{\cdot}38\ m$ β) $ú = 62{\cdot}03\ m$ γ) $z = 0{\cdot}35\ m$
$v = 8{\cdot}73\ m$ $3ú_1 = 6{\cdot}27\ m$ $v = 0{\cdot}14\ m.$

30) *Zahrada 3 ary velká má podobu kosočtverce, jehož delší úhlopříčna měří 27 m; jak velká jest úhlopříčna kratší?*

31) *Stůl 1·5 m dlouhý a 1·2 m široký jest uprostřed vyložen kosočtvercem, jehož úhlopříčny měří 5 dm a 4 dm; oč jest plocha stolu větší než plocha kosočtverce?*

32) *Jak velká jest strana kosočtverce 8·3 m vysokého, který má týž obsah jako obdélník 14·3 m dlouhý a 9·5 m široký?*

33) *V lichoběžníku jsou z a z_1 strany rovnoběžné, v výška a p obsah; ze tří těchto veličin stanoviti čtvrtou, dány-li jsou*

α) $z = 8$ β) $z = 25{\cdot}3\ m$ γ) $z = 5{\cdot}5\ m$ δ) $z = 13{\cdot}4\ m$
$z_1 = 6$ $z_1 = 18{\cdot}2\ m$ $z_1 = 4{\cdot}6\ m$ $v = 6{\cdot}6\ m$
$v = 5$ $v = 12{\cdot}4\ m$ $p = 19{\cdot}84\ \square m$ $p = 138{\cdot}8\ \square m.$

34) *Co stojí dlažba dvoru, jenž má tvar lichoběžníku, jehož rovnoběžné strany 28·5 m a 23·7 m dlouhé a 12·4 m od sebe vzdáleny jsou, platí-li se za 1 □m dlažby 2 zl. 25 kr.?*

35) *Obsah lichoběžníku jest 351·9 □m, jedna z rovnoběžných stran měří 18·6 m a výška 12·4 m; jak velká jest druhá z rovnoběžných stran?*

36) *Jak velký jest obsah různoběžníku, v němž měří jedna*

úhlopříčna 2·78 m a kolmice na ni s protějších vrcholů spuštěné 1·06 m a 0·47 m?

37) Jak velký jest obsah mnohoúhelníku abcdf (obr. 89.), je-li:

$fb = 12·8\,m$	$v_2 = 5·9\,m$
$v = 5·7\,m$	$v_1 = 7·1\,m$
$fc = 14·6\,m$	

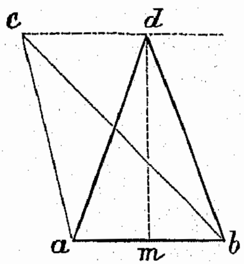
38) Vypočítati obsah mnohoúhelníku 1234567 (obr. 89.), v němž jest

$y = 2.3\,m$	$1\alpha = 1·1\,m,$
$y_1 = 1·9\,m$	$\alpha\delta = 2·9\,m,$
$y_2 = 3·4\,m$	$\delta\beta = 1·2\,m,$
$y_3 = 4·2\,m$	$\beta\gamma = 3·1\,m,$
$y_4 = 3·8\,m$	$\gamma\varepsilon = 1·3\,m,$
	$\varepsilon 4 = 2·2\,m.$

O proměňování a dělení mnohoúhelníků.

§. 91. Mnohoúhelník na jiný proměniti znamená, sestrojiti mnohoúhelník, jenž by s mnohoúhelníkem daným měl plochu stejně velkou.

1) **Proměniti trojúhelník nerovnostranný na jiný rovnoramenný v téže základně.**

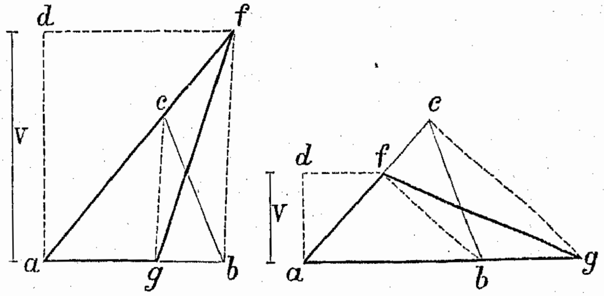


Obr. 91.

Je-li v obr. 91. daný trojúhelník *abc*, jest geometrickým místem vrcholu *d* trojúhelníku žádaného *α*) kolmice *md* v středobodu základny *ab* na tuto vztyčena, *β*) *cd* vrcholem *c* ku *ab* || vedená (§. 84. 4).

2) **Proměniti trojúhelník na jiný, jenž by měl jinou (buď větší neb menší) výšku.**

Budiž v obr. 92. *abc* daný trojúhelník a *v* výška trojúhelníku žádaného. Ve vrcholu *a* vztyčí se kolmice na základnu *ab* a učiní se $ad = v$. Bodem *d* kreslí se přímka k *ab* rovnoběžná, která stranu *ac* (neb její prodloužení) v bodu *f* protíná. Kreslí se *fb* a potom *cg* || *fb*; △ *afg* jest trojúhelník žádaný.

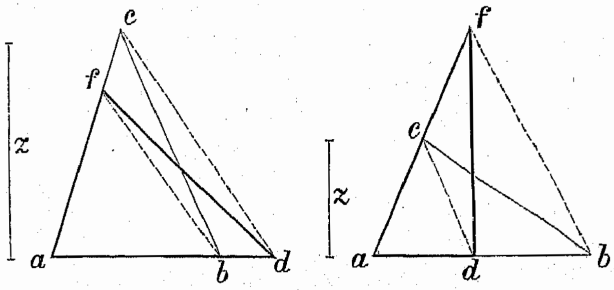


Obr. 92.

Důkaz:

$$\triangle\, acg = \triangle\, acg$$
$$\triangle\, fcg = \triangle\, bcg \text{ (§. 84., 4).}$$
$$\triangle\, acg + \triangle\, fcg = \triangle\, acg + \triangle\, bcg$$
$$\triangle\, agf = \triangle\, abc.$$

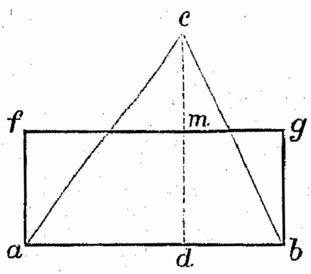
3) **Proměniti trojúhelník na jiný, jehož základna má danou (buď větší neb menší) délku.**



Obr. 93.

Sestrojení jest z obr. 93. patrno; důkaz podobný předešlému.

4) **Proměniti trojúhelník na obdélník.** Je-li v $\triangle\, abc$ (obr. 94.) cd výška, rozpůlí se tato v bodu m a kreslí se tímto bodem přímka || ku ab. Kolmice v a i b na ab vztyčené stanoví na této rovnoběžce ostatní dva vrcholy f a g obdélníku.



Obr. 94.

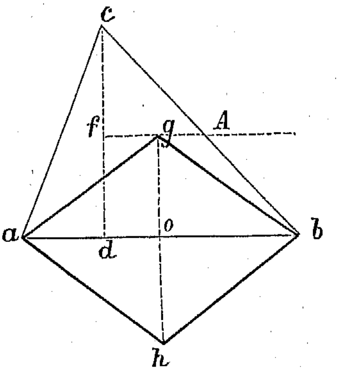
Důkaz:

pl. $abfg = ab \,.\, md$;

pl. $\triangle abc = ab \,.\, \dfrac{cd}{2} = ab \,.\, md$, tedy

pl. $abfg = \triangle\, abc$.

5) **Proměniti trojúhelník na kosočtverec.**



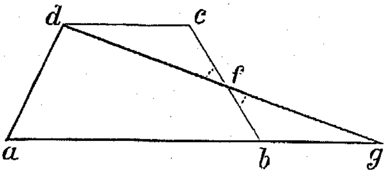
Obr. 95.

Je-li abc (obr. 95.) daný trojúhelník, cd jeho výška, rozpůlí se tato v bodu f a kreslí se tímto bodem přímka $A \parallel ab$. Vztyčíme-li ve středobodu o přímky ab kolmici, protíná tato přímku A v bodu g; učiní-li se potom $oh = og$ a body h a g s body a a b se spojí, jest $abgh$ kosočtverec žádaný.

D ů k a z:

pl. $abgh = ab \,.\, og$
pl. $\triangle abc = ab \,.\, fd = ab \,.\, og$ proto
pl. $abgh = \triangle\, abc$.

6) **Proměniti lichoběžník na trojúhelník.**



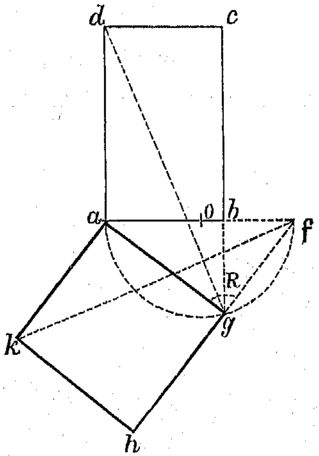
Obr. 96.

Na prodlouženou základnu ab (obr. 96.) nanese se $bg = dc$ a spojí se d s g.

D ů k a z.

Lichoběžník $abcd$ = čtyřúhelníku $abfd + \triangle\, dcf$. Trojúhelník agd = čtyřúhelníku $abfd + \triangle\, bgf$. Poněvadž však $\triangle\, dcf \cong \triangle\, bgf$, jest též lichoběžník $abcd = \triangle\, agd$.

7) **Proměniti obdélník na čtverec.**



Obr. 97.

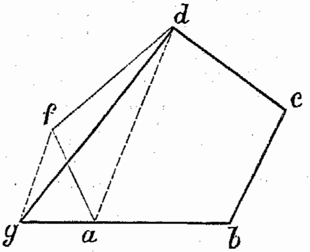
Kratší strana ab daného obdélníku $abcd$ (obr. 97.) prodlouží se za vrchol a učiní se $af = ad$ a nad af jako průměrem sestrojí se polokružnice, kterou prodloužená strana bc v bodu g protíná. Tětiva ag jest stranou žádaného čtverce, který se snadno sestrojí.

D ů k a z. Nakresleme přímky dg a fk. Poněvadž (§. 49.) $\sphericalangle agf = R$, jest bod f bodem prodloužené strany hg čtverce $aghk$. Dle §. 84. jest $\triangle\, akf = {}^1/_2$ čtverce $aghk$ a $\triangle\, adg = {}^1/_2$ obdélníku $abcd$, jest též

$\triangle\, akf \cong adg$ (proč?); tudíž jest i čtverec $aghk$ = obdélníku $abcd$.

8) **Proměniti mnohoúhelník na jiný, který má o jednu stranu méně.**

Má se pětiúhelník $abcdf$ (obr. 98.) proměniti na čtyřúhelník tím, že se má určitý jeho vrchol (na př. f) odstraniti, kreslí se úhlopříčna (da), spojující sousedné vrcholy onoho, jenž se odstraniti má, a k ní kreslí se rovnoběžka oným vrcholem. Bod (g), v němž tato rovnoběžka prodlouženou stranu (ab neb dc) protíná, jest novým vrcholem žádaného čtyřúhelníku $gbcd$.



Obr. 98.

D ů k a z. Pětiúhelník $abcdf$ a čtyřúhelník $bcdg$ skládají se z částí oběma společné $abcd$ a ze sobě rovných trojúhelníků adg a afd.

Opakováním této konstrukce dá se každý mnohoúhelník proměniti na trojúhelník, tento na obdélník a obdélník na čtverec; tudíž možno kterýkoli mnohoúhelník na čtverec proměniti.

9) **Sestrojiti čtverec, jenž by byl roven součtu neb rozdílu dvou čtverců daných.**

Řešení tohoto úkolu jest na základě věty Pythagorovy snadné. Má-li se žádaný čtverec rovnati součtu daných dvou čtverců, jest přepona pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají délku stran daných čtverců, stranou jeho; má-li se však čtverec nový rovnati rozdílu čtverců daných, jest ve pravoúhlém trojúhelníku, jehož jedna odvěsna rovná se straně menšího a přepona straně většího z daných čtverců, odvěsna druhá stranou čtverce žádaného.

Opětováním konstrukce první lze sestrojiti čtverec, který jest

α) součtem více čtverců,

β) 2., 3., 4., 5., ... tak velký jako čtverec daný.

§. 92. Dělení mnohoúhelníků.

1) **Rozděliti trojúhelník přímkami, z téhož vrcholu vybíhajícími, na více sobě rovných částí.**

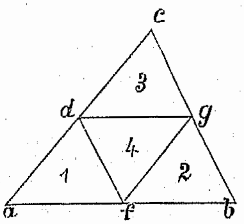
Strana naproti vrcholu, z něhož přímky dělící vycházeti mají, rozdělí se na tolik rovných dílů, na kolik rovných částí daný trojúhelník rozdělen býti má, a body dělící spojí se s protějším vrcholem.

Důkaz. Takto vzniklé trojúhelníky mají společnou výšku a rovné základny.

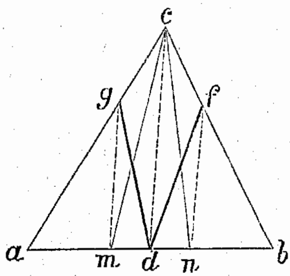
2) **Rozděliti trojúhelník daný příčkami, k jeho stranám rovnoběžnými, na 4 shodné trojúhelníky.**

Strany daného trojúhelníku *abc* (obr. 99.) se v bodech *d*, *f*, *g* rozpůlí a tyto body se spojí.

Důkaz. Dokáže se, že každý z trojúhelníků 1., 2., 3. je shodný s trojúhelníkem 4.



Obr. 99.



Obr. 100.

3) **Daný trojúhelník rozděliti příčkami, které daným bodem jedné z jeho stran procházejí, na více sobě rovných dílů.**

Má-li se $\triangle$ *abc* (obr. 100.) na 3 rovné části rozděliti tak, aby příčky dělící bodem *d* procházely, rozdělí se strana *ab*, na níž daný bod *d* leží, na tři rovné díly a body *m* a *n*, jimiž jest strana *ab* na tři rovné díly rozdělena, kreslí se přímky ku *dc* rovnoběžné.

Body *f* a *g*, v nichž tyto rovnoběžky strany trojúhelníku *abc* protínají, spojí se bodem *d*.

Důkaz. Kresleme *cm* a *cn*; pak jest

$$\triangle\, agd = \triangle\, amc = \tfrac{1}{3}\, \triangle\, abc$$
$$\triangle\, bdf = \triangle\, bcn = \tfrac{1}{3}\, \triangle\, abc$$

čtyřúhelník $gdfc = \tfrac{1}{3}\, \triangle\, abc$.

4) **Rozděliti trojúhelník na tři sobě rovné části tak, aby přímky dělící spojovaly jediný bod, uvnitř trojúhelníku ležící, s jeho vrcholy.**

V daném trojúhelníku *abc* (obr. 101.) rozdělí se jedna strana při *ab* na tři rovné díly v bodech *d* a *f* a kreslí se

$$dg \parallel ac \text{ a } fh \parallel bc;$$

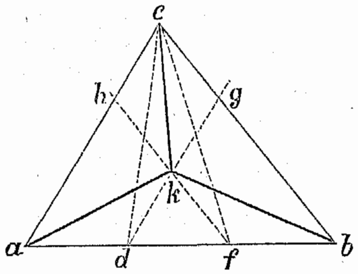
průsečík přímek hf a dg jest žádaný bod uvnitř trojúhelníku ležící: ak, bk a ck jsou přímky dělící.

Důkaz. Kreslí-li se přímky pomocné cd a cf, tedy jest

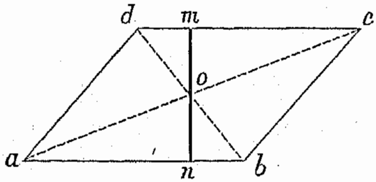
$\triangle\, ack = \triangle\, acd = {}^1\!/_3\, \triangle\, abc$

$\triangle\, bck = \triangle\, bcf = {}^1\!/_3\, \triangle\, abc$, proto též

$\triangle\, abk = {}^1\!/_3\, \triangle\, abc.$



Obr. 101.



Obr. 102.

5) **Příčka v rovnoběžníku procházející průsečíkem jeho úhlopříčen, dělí rovnoběžník na dvě rovné části** (obr. 102.).

$\triangle\, ado \cong obc$

$\triangle\, aon \cong com$

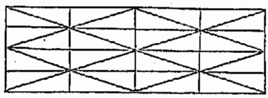
$\triangle\, dmo \cong onb$

$\triangle\, ado + \triangle\, oan + \triangle\, dmo = \triangle\, obc + \triangle\, com + \triangle\, bon$

pl. $anmd$ = pl. $nbcm$.

Na základě této věty řešiti lze následující úkol: Rozděliti rovnoběžník příčkou, určitým na obvodu, anebo uvnitř ležícím bodem procházející, na dva rovné díly.

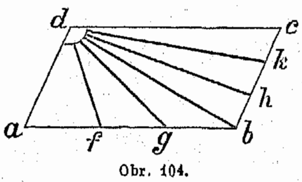
6) **Rozděliti obdélník na 4, 8, 16, 32 shodných částí** (obr. 103.).


Obr. 103.

7) **Rovnoběžník rozděliti příčkami, z jednoho vrcholu vycházejícími, na více rovných částí.**

Zde nutno rozeznávati dva případy:

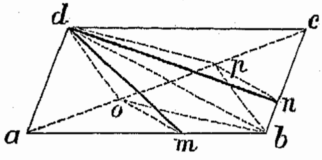
α) Je-li počet dílů sudý (obr. 104.), rozdělí se napřed rovnoběžník úhlopříčnou, daným vrcholem procházející, na dvě sobě rovné části a každý takový trojúhelník se rozdělí



Obr. 104.

známým spůsobem na polovinu částí, na něž má rovnoběžník rozdělen býti.

β) Je-li počet dílů lichý (má-li se na př. rovnoběžník *abcd* (obr. 105.) rozděliti příčkami, vrcholem *d* procházejícími, na 3 rovné díly), kreslí se obě úhlopříčny, a ta, která vrcholem *d* neprochází, rozdělí se na 3 rovné díly a body dělícími kreslí se rovnoběžky k úhlopříčně druhé; průsečíky těchto rovnoběžek s protějšími stranami vrcholu *d* se spojí s *d*, a jsou žádané příčky dělící.



Obr. 105.

Důkaz. Kreslí-li se *od* a *ob*, jest

$\triangle\ bmd = \triangle\ bod = {}^1/_6$ rovnoběžníku *abcd*, též

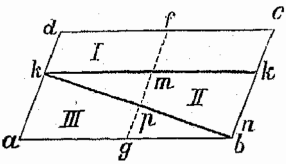
$\triangle\ bnd = \triangle\ dbp = {}^1/_6$ rovnoběžníku *abcd*, tedy i

pl. $dmbn = {}^2/_6$ pl. $abcd = {}^1/_3$ pl. $abcd$

pl. $amd = ({}^1/_2 - {}^1/_6)$ pl. $abcd = {}^1/_3$ pl. $acbd$ a podobně

pl. $dcn = ({}^1/_2 - {}^1/_6)$ pl. $abcd = {}^1/_3$ pl. $abcd$.

8) **Rozděliti rovnoběžník na více sobě rovných dílů příčkami, které daným bodem obvodu jeho procházejí.**



Obr. 106.

Mají-li v obrazci 106. přímky, rovnoběžník *abcd* na 3 rovné části dělící, bodem *k* strany *ad* procházeti, spojí se středobody *f* a *g* protějších stran, v nichž tento bod neleží, a tato přímka *fg* rozdělí se v bodech *m* a *p* na 3 rovné díly. Příčky, které se kreslí bodem *k*, tak aby procházely body *m* a *p*, jsou přímky dělící.

Důkaz. Značí-li *v* vzdálenosť stran *ad* a *bc* a $z = {}^1/_3\, fg$, jest

pl. $I. = fm\,.\,v = z\,.\,v$

pl. $II = \dfrac{hk}{2}\,.\,v = \dfrac{pm}{2}\,.\,v = z\,.\,v$

pl. $III. = pg\,.\,v = z\,.\,v$, tudíž jest

pl. $I.$ = pl. $II.$ = pl. $III.$

9) **Lichoběžník rozděliti příčkou, jedním vrcholem procházející, na dva sobě rovné díly.**

Aby se lichoběžník *abcd* (obr. 107.) příčkou, vrcholem *d* procházející, na dva sobě rovné díly rozdělil, nanese se na delší z rovnoběžných stran délka kratší základny, tak že jest $af = dc$

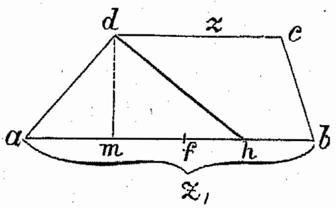
a zbývající část rozpůlí se v bodu h. Příčkou dh jest lichoběžník rozpůlen.

Důkaz. Označí-li se pro krátkost $dm = v$, $dc = z$, $ab = z_1$, tedy jest

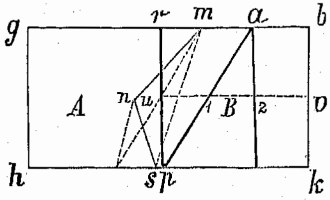
$$fh = hb = \frac{z_1 - z}{2} \text{ a tudíž}$$

$$pl.\ adh = \left(z + \frac{z_1 - z}{2}\right)\frac{v}{2} = \frac{z_1 - z \,.\, v}{4};$$

jest tedy $\triangle\ adh = {}^1/_2$ lichoběžníku $abcd$, proto $\triangle\ adh =$ čtyřúhelníku $hbcd$.



Obr. 107.



Obr. 108.

10) **Lomenou mez** mnp **dvou pozemků** A **a** B **(obr. 108.) vyměniti za rovnou a pozemek** B **rozděliti na tři rovné části liniemi, bodem daným** a **procházejícími.**

Konstrukce jest z obr. 108. patrna.

§. 93. Úkoly k rýsování.

Proměniti:

1) trojúhelník tupoúhlý na pravoúhlý.

2) trojúhelník pravoúhlý na rovnoramenný.

3) trojúhelník nerovnostranný na pravoúhlý.

4) trojúhelník tupoúhlý, v němž tupý úhel měří 135°, na jiný, v němž jeden úhel měří 75°.

5) trojúhelník nerovnostranný na kosodélník, v němž jeden úhel 60° měří.

6) trojúhelník na jiný rovnoramenný, jehož výška jest dána (buď větší nebo menší výšky původního).

7) trojúhelník na jiný rovnoramenný, jehož základna má danou délku (buď větší nebo menší délky základny daného trojúhelníku).

8) trojúhelník pravoúhlý na různoběžník, v němž jeden úhel měří 45°.

9) obdélník na kosočtverec.

10) rovnoběžník na pravoúhlý trojúhelník.

11) lichoběžník na obdélník.

12) kosočtverec na obdélník.

13) pětiúhelník na trojúhelník.

14) obdélník na čtverec.

15) trojúhelník na čtverec.

16) různoběžník na čtverec.

17) mnohoúhelník (pěti-, šesti-. . . úhelník) na čtverec.

18) mnohoúhelník pravidelný na trojúhelník.

19) Sestrojiti trojúhelník, jenž by se rovnal α) součtu, β) rozdílu dvou daných trojúhelníků o rovných základnách.

20) Sestrojiti trojúhelník, jenž by se rovnal α) součtu, β) rozdílu dvou daných trojúhelníků s rozdílně dlouhými základnami i výškami.

21) Sestrojiti čtverec, který by se rovnal součtu dvou, tří, pěti daných čtverců.

22) Sestrojiti čtverec, jenž by se rovnal rozdílu dvou daných čtverců.

23) Sestrojiti obdélník, jenž by se rovnal α) součtu, β) rozdílu dvou daných trojúhelníků.

24) Rozděliti trojúhelník příčkami, z některého bodu na jeho obvodu vybíhajícími, na α) 4, β) 5, γ) 6 rovných částí.

25) Rozděliti trojúhelník příčkami, z některého jeho vrcholu vybíhajícími, na α) 5, β) 7 rovných částí.

26) Rozděliti kosodélník přímkami, k jedné z jeho stran rovnoběžnými, na daný počet (na př. 5) rovných částí.

27) Rozděliti obdélník na dvě rovné části přímkou, která daným bodem α) jedné strany, β) uvnitř ležícím, prochází.

28) Rozděliti obdélník na 4 rovné části přímkami, které z jednoho jeho vrcholu vycházejí α) na 8, β) na 7 rovných částí.

29) Rozděliti různoběžník příčkami, které z daného bodu jeho obvodu vycházejí, na 5 rovných částí.

30) Rozděliti různoběžník na α) 4, β) 5 rovných částí příčkami, z jednoho jeho vrcholu vycházejícími.

Část pátá.

O podobnosti trojúhelníků.

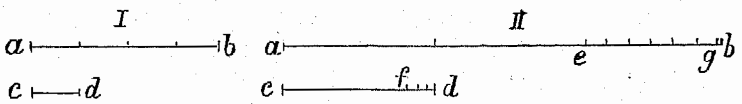
1. Srovnalosť délek.

§. 94. Veličina prostorová, která v jiné s ní stejnorodé veličině prostorové vícekráte beze zbytku obsažena jest, sluje její míra.

Je-li prostorová veličina m měrou veličiny A i B, sluje společnou měrou jejich.

V měřictví vyhledává se největší společná míra dvou veličin spůsobem podobným onomu, jímž se v arithmetice vypočítává největší společná míra dvou čísel.

Aby se společná míra dvou délek stanovila, nanáší se kratší z nich na delší tolikráte, kolikráte se nanésti dá.



Obr. 109.

1) Je-li kratší délka cd v delší vícekráte (na př. 4kráte) beze zbytku obsažena (obr. 109., I), tedy jest cd největší společnou měrou délek ab a cd.

2) Není-li ale délka kratší cd v délce větší ab beze zbytku obsažena, je-li na př. cd v ab (obr. 109., II) dvakrát obsažena, a zbude-li ještě zbytek eb, tedy nanáší se zbytek tento na cd tolikráte, kolikráte se nanésti dá, zde na př. jen jednou, a zbytek fd nanáší se na dřívější zbytek eb, v němž jest obsažen 6kráte; zbytek gb nanáší se na fd, v němž jest 3kráte beze zbytku obsažen.

Nyní jest

$$
\begin{aligned}
fd &= 3bg \\
eb &= 6fd + gb = 19bg \\
cd &= cf + fd = eb + fd = 22bg \\
ab &= 2cd + eb = 44bg + 19bg = 63bg.
\end{aligned}
$$

Délky ab a cd mají tedy společnou míru bg; tato míra jest v ab 63kráte, a v cd 22kráte obsažena.

Poněvadž při tomto vyhledávání největší společné míry každý zbytek musí býti sice menší předcházejícího, tomuto však při prostorových veličinách není položena mez, pod kterouž by nemohl přijíti, jest možno, že odnímání zbytků se opakuje až do nekonečna, aniž se objeví zbytek, jenž by byl měrou zbytku předcházejícího. V tom případě nemají dané dvě veličiny společné míry a jmenují se nesměřitelné. Dvě veličiny mající společnou míru slovou směřitelné.

§. 95. Porovnání dvou délek za tím účelem, aby se stanovilo, kolikráte jest jedna z nich větší než druhá, děje se poměrem měřickým. Poměr délek vyjadřuje se poměrem měrných jich čísel. Dány-li jsou na př. dvě délky ab a cd, a je-li jejich společná míra m v délce ab .... $r$kráte, a v cd $s$kráte obsažena, jest $\frac{r}{s}$ aneb $r : s$ poměr těchto délek ab a cd.

Poměr těchto délek dá se pronésti následovně:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{r}{s} \text{ aneb } ab : cd = r : s.$$

Podobně jest pro délky ab a cd v obr. 109. *II.*

$$ab : cd = 63 : 22.$$

V praktickém životě určuje se poměr dvou délek spůsobem tím, že se změří obě touže měrou (týmž měřítkem), a takto stanovená čísla měrná v poměr dají. Má-li se na př. stanoviti poměr délek dvou cest A a B, tu změří se délka cesty A i B; je-li cesta A 18·4 m a $B = 24{\cdot}8$ m dlouhá, jest poměr délek těchto cest $\frac{18{\cdot}4}{24{\cdot}8} = \frac{23}{31}$.

§. 96. Je-li poměr dvou veličin roven poměru dvou jiných veličin, tu mohou se oba poměry spojiti, a vznikne srovnalosť měřická.

Mají-li tedy poměry $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ téhož udavatele, tedy jest $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ aneb $a : b = c : d$ srovnalosť měřická.

Srovnalosť, v níž vnitřní členy sobě rovny jsou, slove **srovnalosť spojitá**, na př. $a:b = b:d$ aneb $b^2 = ad$; vnitřní člen b sluje **střední měřicky srovnalostná** mezi oběma členy vnějšími, a čtvrtý člen d této spojité srovnalosti sluje **třetí spojitě srovnalostná**. Každá rovnice tvaru $x^2 = ab$ má dle toho ten význam geometrický, že jest x střední měřicky (geometricky) srovnalostná mezi a i b.

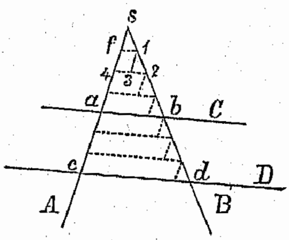
Jsou-li veličiny dvou rodů na sobě tak závisly, že poměr kterýchkoliv dvou veličin jednoho rodu se rovná poměru příslušných dvou veličin rodu druhého sestavenému v témž pořádku, říká se, že jsou **oba rody veličin v poměru přímém**, aneb že jsou **přímo srovnalé** (či srovnalostné). Jsou-li však veličiny dvou rodů na sobě tak závisly, že poměr kterýchkoli dvou veličin jednoho rodu rovná se poměru příslušných dvou veličin rodu druhého, ale sestavenému v pořádku opačném, říká se, že jsou **oba rody veličin v poměru obráceném**, či že jsou **nepřímo srovnalostny**.

Poněvadž srovnalosť měřická stejným podlehá proměnám jako srovnalosť číselná, platí veškeré, v arithmetice o srovnalostech uvedené věty, i zde.

§. 97. Při stanovení společné míry délek nesměřitelných stává se zbytek posloupným nanášením vzniklý stále menším a menším a může se posléze státi menším než kterákoli sebe menší délka, tak že se může pak zanedbati. V tomto případě může se poslední zbytek z daných délek, který se na druhou délku nanášel, za společnou míru obou těchto nesměřitelných veličin (ovšem jen příbližně) považovati. Poměr těchto dvou nesměřitelných délek rovná se tedy příbližně poměru dvou délek směřitelných, a proto můžeme se při následujících porovnáváních pouze na veličiny směřitelné obmeziti.

2. Srovnalostné dělení paprsků příčkami rovnoběžnými.

§. 98. 1) Dány-li jsou (obr. 110.) dva libovolné paprsky A a B svazku rovinného, jehož střed jest s, a protneme-li tyto dva paprsky dvěma rovnoběžkami C a D, a považujeme-li úsečky na paprsku A za veličiny jednoho, ony na paprsku B za veličiny druhého a posléze úsečky na příčkách C a D za veličiny rodu



Obr. 110.

třetího, tedy jsou příslušné veličiny kterýchkoli dvou z těchto tří rodů přímo srovnalostny.

Důkaz. Budiž $sf = m$ společnou měrou úseček sa a ac; je-li míra m v $sa \ldots \alpha$kráte a v $ac \ldots \beta$kráte obsažena, tedy jest $sa = \alpha \, . \, m$; $ac = \beta \, . \, m$, a tudíž i

$$a) \; sa : ac = \alpha : \beta.$$

Rozdělí se nyní sa na α a ac na β rovných dílů, a kreslí-li se takto vzniklými body příčky ku C a D rovnoběžné, bude těmito příčkami i délka sb na α a bd na β mezi sebou rovných dílů, z nichž každý budiž n, rozdělena (plyne bezprostředně z §. 70., považuje-li se scd za trojúhelník) a má tedy i následující srovnalosť platnosť

$$b) \; sb : bd = \alpha : \beta.$$

Spojením této srovnalosti se srovnalostí dřívější obdržíme

$$1) \; sa : ac = sb : bd.$$

Z této srovnalosti odvoditi se dají též srovnalosti jiné; jest totiž

$$(sa + ac) : sa = (sb + bd) : sb, \text{ nebo}$$

$$2) \; sc : sa = sd : sb; \text{ podobně též}$$

$$(sa + ac) : ac = (sb + bd) : db.$$

$$3) \; sc : ac = sd : bd.$$

Kreslí-li se jednotlivými body paprsku B přímky rovnoběžné ku A, tedy vzniknou při tomto paprsku B trojúhelníky shodné; proto jest $f1 = 32$, a poněvadž jest $f134$ rovnoběžník, musí i $43 = f1$; označíme-li délku $f1 = p$, jest $42 = 2\,p$. Podobně ukáže se, že jest $ab = \alpha \, . \, p$ a $cd = (\alpha + \beta)\, p$; proto se dá sestaviti srovnalosť

$$c) \; cd : ab = (\alpha + \beta) : \alpha.$$

Z dříve uvedené srovnalosti a) plyne $sa + ac : sa = \alpha + \beta : \alpha$; spojením této srovnalosti se srovnalostí c) plyne

4) $sc : sa = cd : ab$. Stručněji dá se tato věta prosloviti takto:

Dvě příčky rovnoběžné stanoví na dvou paprscích téhož svazku úsečky mezi sebou i k úsečkám na těchto rovnoběžkách srovnalostné.

Následek: 1) **Příčka v trojúhelníku k jedné straně rovnoběžná, dělí ostatní dvě strany na díly srovnalostné.**

2) **Dvě příčky, které dělí dva paprsky na úsečky srovnalostné, jsou rovnoběžny** (obrácení poučky předchozí) (obr. 111.).

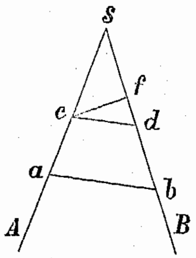
Budiž platna srovnalosť

1) $sa : sc = sb : sd$.

Kdyby příčka bodem c ku ab rovnoběžně vedená neprocházela bodem d, nýbrž některým jiným bodem na př. f paprsku B, pak by muselo dle dřívější věty

2) $sa : sc = sb : sf$.

Porovnáním srovnalosti 1) a 2) shledá se, že jsou tři členy těchto srovnalostí střídavě sobě rovny, pročež i čtvrté členy sobě rovny býti musí, totiž $sf = sd$, t. j. bod f musí se s bodem d sjednotiti, t. j. $cd \parallel ab$.



Obr. 111.

Následek. Příčka, která rozděluje dvě strany trojúhelníku na díly srovnalostné, jest rovnoběžna ku straně třetí.

3. Podobnost mnohoúhelníků.

§. 99. Zvolí-li se na paprscích svazku rovinného, jehož střed jest s, dvě soustavy bodů $abcdf$ a $a_1b_1c_1d_1f_1$ tak, aby v bodech a a a_1, b a b_1, c a c_1, d a d_1, f a f_1, byly paprsky A, B, C, D, F tohoto svazku srovnalostně protaty, tedy aby měly srovnalosti $sa : sa_1 = sb : sb_1 = sc : sc_1$ platnosť, a kreslí-li se mnohoúhelníky $abcdf$ a $a_1b_1c_1d_1f_1$, tedy jsou tyto mnohoúhelníky stejnolehlé.

Stejnolehlé slovou též *a*) vrcholy a a a_1, b a b_1 atd. na společném paprsku ležící;

b) strany mnohoúhelníků stejnolehlé vrcholy spojující;

c) úhlopříčny těchto mnohoúhelníků stejnolehlými vrcholy procházející;

d) úhly při stejnolehlých vrcholích ležící.

Porovná-li se mnohoúhelník $abcdf$ s mnohoúhelníkem $a_1b_1c_1d_1f_1$, tu plyne z předpokládání, že musí býti $a_1b_1 \parallel ab$, $b_1c_1 \parallel bc$, $c_1d_1 \parallel cd$, $d_1f_1 \parallel df$, $f_1a_1 \parallel fa$; podobně i $b_1f_1 \parallel bf$, $b_1d_1 \parallel bd$. Mimo to jest

1) $\sphericalangle\ a = a_1$, $\sphericalangle\ b_1 = b$, $\sphericalangle\ c_1 = c$, $\sphericalangle\ d_1 \sphericalangle\ d$, a $\sphericalangle\ f_1 = f$, poněvadž jich ramena jsou rovnoběžná.

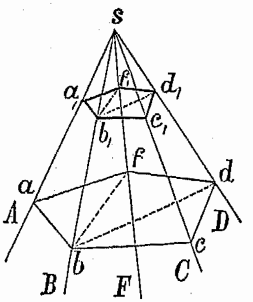
Dle §. 98., 1. $sb : sb_1 = ab : a_1b_1$

$sb : sb_1 = bc : b_1c_1$, tudíž i

$ab : a_1b_1 = bc : b_1c_1$.

Podobně dokázati lze, že

2) $ab : a_1b_1 = bc : b_1c_1 = cd : c_1d_1 = df : d_1f_1 = fa : f_1a_1$.
Z rovnic 1) a 2) vidno, že jsou stejnolehlé strany mnohoúhelníků srovnalostné, a stejnolehlé úhly jejich rovné.



Obr. 112.

Mnohoúhelníky tyto mají stejnou podobu a liší se od sebe pouze velikostí a polohou, a slovou **mnohoúhelníky podobné**.

Ve mnohoúhelnících podobných jsou tedy veškeré stejnolehlé úhly střídavě sobě rovny a stejnolehlé strany srovnalostny.

Střed svazku paprskového s, v němž se paprsky stejnolehlými vrcholy mnohoúhelníků procházející protínají, sluje **bod podobnosti**.

P o u č k y: 1) **Mnohoúhelníky podobné dělí se stejnolehlými úhlopříčnami na trojúhelníky podobné.**

D ů k a z. Jelikož v obr. 112. jest $b_1f_1 \parallel bf$, musí dle §. 98. 1) $bf : b_1f_1 = sb : sb_1$ a jelikož $ab : a_1b_1 = sb : sb_1$, jest i $bf : b_1f_1 = ab : a_1b_1$; podobně se dokázati dá, že i poměr kterýchkoliv jiných úhlopříčen stejnolehlých rovná se stálému poměru stejnolehlých stran daných mnohoúhelníků. V trojúhelnících abf a $a_1b_1f_1$, fbd a $f_1b_1d_1$, dbc a $d_1b_1c_1$ jsou tedy stejnolehlé strany srovnalostny a stejnolehlé úhly rovny (ramena jich jsou rovnoběžná), a proto jsou tyto trojúhelníky sobě podobny.

2) **Mnohoúhelníky tímtéž způsobem ze stejného množství podobných trojúhelníků sestavené jsou si podobny.**

D ů k a z. V obou mnohoúhelnících jsou si stejnolehlé úhly jako stejnolehlé úhly podobných trojúhelníků, aneb jako součty rovných úhlů rovny, a i stejnolehlé jich strany jsou srovnalostny, poněvadž to jsou stejnolehlé strany podobných trojúhelníků.

3) **Obvody mnohoúhelníků podobných jsou přímo srovnalostny ku dvěma stejnolehlým stranám.**

Je-li $abcd \ldots \backsim a_1b_1c_1d_1 \ldots$ musí

$$ab : a_1b_1 = bc : b_1c_1 = cd : c_1d_1 = \ldots \text{ tudíž i}$$

$$ab + bc + cd + \ldots : a_1b_1 + b_1c_1 : c_1d_1 + \ldots = ab : a_1b_1$$

$$o : o = ab : a_1b_1,$$

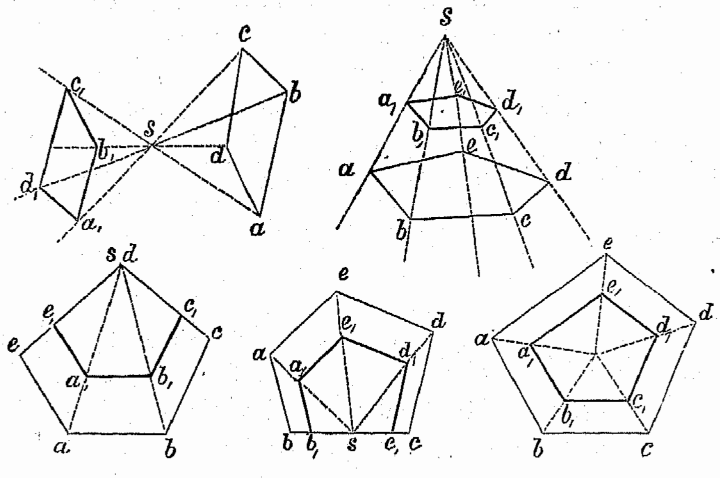
při čemž jsou o a o_1 obvody daných mnohoúhelníků.

Následky: 1) **Dva pravidelné mnohoúhelníky při témž počtu stran jsou si podobny.**

2) **Kterékoli dva kruhy jsou si podobny** (jelikož lze kruh považovati za pravidelný mnohoúhelník nesčíslně velkým počtem stran omezený).

Podobné mnohoúhelníky mohou se náležitým pošinováním vždy do polohy stejnolehlé přivésti.

Bod podobnosti může v rozličných případech rozličnou míti polohu; on může ležeti buď vně obou mnohoúhelníků tak, že se nacházejí stejnolehlé vrcholy mnohoúhelníků na téže straně, aneb naproti oněm stranám středu paprsků; mimo to může ležeti uvnitř mnohoúhelníků, nebo na společném vrcholu, aneb kdekoliv jinde na obvodu jejich. (Obr. 113.)



Obr. 113.

§. 100. **Rýsování mnohoúhelníků sobě podobných** zakládá se na tom, že jsou stejnolehlé mnohoúhelníky podobny. Má-li se k mnohoúhelníku *abcdf* narýsovati mnohoúhelník podobný, tu zvolí se bod podobnosti libovolně (obr. 113.), a strany mnohoúhelníku žádaného kreslí se rovnoběžně ku stejnolehlým stranám mnohoúhelníku daného. Má-li míti jedna ze stran mnohoúhelníku nového určitou délku, použije se konstrukce dříve udané (§. 77.), jak kreslí se mezi rameny úhlu daného příčka určité délky k dané délce rovnoběžná.

Má-li býti mnohoúhelník danému mnohoúhelníku podoben nad určitou danou délkou jako základnou sestrojen, kreslí se napřed mnohoúhelník nový, jehož strany v daném poměru zvětšeny (či zmenšeny) jsou, v poloze k danému mnohoúhelníku stejnolehlé, a s tímto nakreslí se nad danou délkou mnohoúhelník shodný.

4. Podobnosť trojúhelníků.

§. 101. **Dva trojúhelníky jsou si podobny, mají-li stejnolehlé strany srovnalostné a stejnolehlé úhly sobě rovné.** (Obr. 114.)

Je-li $\triangle\ abc \sim a_1 b_1 c_1$, tu

$$ab : a_1 b_1 = ac : a_1 c_1 = bc : b_1 c_1 \text{ a}$$

$$\sphericalangle a = a_1,\ \sphericalangle b = b_1,\ \sphericalangle c = c_1.$$

Z těchto podmínek plyne:

V trojúhelnících podobných leží naproti rovným úhlům srovnalostné strany a naproti srovnalostným stranám rovné úhly.

(Důkaz zůstavuje se čtenáři.)

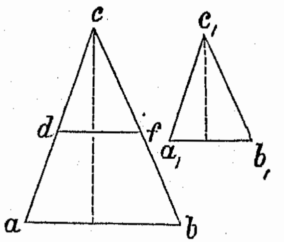
Jako k dokonalému určení n-úhelníku (totiž jeho tvaru a velikosti) není třeba napřed znáti všechny jeho strany a úhly, nýbrž postačuje ($2n$-3) částí těchto, tak i k dokonalému určení pouhého tvaru (podobnosti) n-úhelníku požaduje se obyčejně pouze ($2n$-4) podmínek, totiž o jednu méně než o shodnosti, protože zde na velikosti mnohoúhelníku nebývá záleženo. Proto neudává se prostá délka stran, nýbrž pouze poměr jejich.

K stanovení podobnosti dvou trojúhelníků stačí tedy dvě podmínky.

§. 102. **Znaky podobnosti trojúhelníků.**

1) Kreslí-li se v trojúhelníku abc příčka $df \parallel ab$, jest

$$\triangle\ cdf \sim abc,$$



Obr. 114.

neboť jsou stejnolehlé strany těchto trojúhelníků přímo srovnalostny a stejnolehlé úhly sobě rovny. Věta tato pronésti se dá takto:

Příčka trojúhelníku k jedné straně rovnoběžná odděluje trojúhelník, který jest danému trojúhelníku podobný.

(Dva trojúhelníky o společném vrcholu a rovnoběžných základnách jsou si podobny.)

2) Přemístí-li se trojúhelník cdf (obr. 114.) pomocí délek

svých stran do polohy $a_1 b_1 c_1$, tak že jest $\triangle\ a_1 b_1 c_1 \cong dcf$, tu bude, jelikož jest $\triangle\ cdf \sim abc$ též $\triangle\ a_1 b_1 c_1 \sim abc$.

Poněvadž se při přemístění trojúhelníku cdf poměr stran trojúhelníků abc a cdf nezměnil, jest patrno, že již ze srovnalosti stran stejnolehlých dvou trojúhelníků o jejich podobnosti rozhodovati se dá, a tudíž **jsou si dva trojúhelníky podobny, mají-li střídavě všecky tři strany srovnalostné.**

3) Přenese-li se $\triangle\ cdf$ (obr. 114.) na základě délky dvou svých stran *(cd a cf)* a těmito stranami sevřeného úhlu *(c)* do polohy $a_1 b_1 c_1$, tedy jest, poněvadž

$$\triangle\ a_1 b_1 c_1 \cong cdf,\ \triangle\ a_1 b_1 c_1 \sim abc.$$

Poněvadž se při přemístění $\triangle\ cdf$ nezměnil úhel c a poměr stran cd a cf tento úhel svírajících ku stejnolehlým stranám ac a ab trojúhelníku abc, jest patrno, že již vlastnosti těchto částí ve jmenovaných trojúhelnících o jejich podobnosti rozhodovati mohou, a jest tedy další znak pro podobné trojúhelníky tento:

Dva trojúhelníky jsou si podobny, mají-li střídavě dvě strany srovnalostné a těmito stranami sevřený úhel rovný.

4) Přenese-li se $\triangle\ cdf$ (obr. 114.) pomocí dvou svých stran cd a cf a úhlu α naproti delší z nich ležícího do polohy $a_1 b_1 c_1$, tu bude $\triangle\ a_1 b_1 c_1 \sim abc$.

Poněvadž se při přemístění $\triangle\ cdf$ do polohy $a_1 b_1 c_1$ jeho úhel α jakož i poměr stran cd a cf ku stejnolehlým stranám ac a cb trojúhelníku abc nezměnil, jest patrno, že se již z vlastnosti těchto částí jmenovaných trojúhelníků na jejich podobnosť souditi může, a proto jest další znak podobnosti trojúhelníků tento:

Dva trojúhelníky jsou si podobny, mají-li dvě strany srovnalostné a úhly proti delším stranám ležící sobě rovné.

5) Přemístí-li se trojúhelník cdf do polohy $a_1 b_1 c_1$ pomocí jedné strany *(cd)* a obou k této straně přilehlých úhlů do c, tedy jest i v této nové poloze trojúhelníku abc podobný. Poněvadž strany cd a ac tvoří jediný toliko poměr, má $\triangle\ cdf$ v nové své poloze $a_1 b_1 c_1$ s trojúhelníkem abc pouze dva úhly stejné. Z toho následuje:

Dva trojúhelníky jsou si podobny, mají-li střídavě dva a dva úhly sobě rovny.

Následky: a) **Trojúhelníky pravoúhlé, mají-li střídavě jeden úhel ostrý rovný, jsou si podobny.**

b) **Trojúhelníky rovnoramenné jsou si podobny, mají-li střídavě jeden úhel rovný.**

c) **Veškeré rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky jsou si podobny.**

d) **Veškeré trojúhelníky rovnostranné jsou si podobny.**

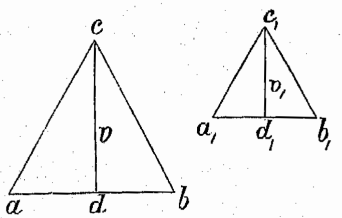
e) **Dva trojúhelníky, jejichž veškeré strany jsou střídavě buď rovnoběžně, buď na sobě kolmy, jsou si podobny.**

5. Upotřebení pouček o podobnosti.

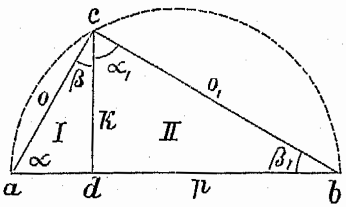
§. 103. I.) **V trojúhelnících podobných jsou stejnolehlé výšky ku stejnolehlým půdicím srovnalostny.**

Předp. $\triangle\, abc \sim a_1 b_1 c_1$. Kreslí se výšky cd a $c_1 d_1$, tedy jsou pravoúhlé $\triangle\, acd$ a $a_1 c_1 d_1$ sobě podobny, poněvadž jest $\sphericalangle\, a = a_1$. Je-li $\triangle\, acd \sim a_1 c_1 d_1$ jest $ac : a_1 c_1 = v : v_1$; a poněvadž jest $\triangle\, abc \sim a_1 b_1 c_1$ jest

$$\frac{ac : a_1 c_1 = ab : a_1 b_1 \text{; tudíž}}{ab : a_1 b_1 = v : v_1 .}$$



Obr. 115.



Obr. 116.

II) **Spustí-li se v pravoúhlém trojúhelníku s vrcholu úhlu pravého na přeponu kolmice, tedy**

1) **se rozděluje touto kolmicí daný trojúhelník na dva jemu i sobě podobné trojúhelníky;**

2) **jest tato kolmice střední měřicky srovnalostnou mezi úsečkami přepony;**

3) **jest každá odvěsna daného trojúhelníku střední měřickou srovnalostnou mezi přilehlou úsečkou a celou přeponou.**

Důkaz. Budiž v obr. 116. $\sphericalangle\, c = R$ a $cd \perp ab$, pak jest

$$1)\ \frac{\triangle\, abc \sim I \sim II.}{\sphericalangle\, \alpha = \alpha_1 .}$$

Z podobnosti $\triangle\, I \sim II$ plyne 2) $ad : k = k : bd$ aneb $k^2 = ad \,.\, bd$.

Z podobnosti $\triangle\, abc \sim I$ jde
Z podobnosti $\triangle\, abc \sim II$

$$3) \begin{cases} p : o = o : ad \text{ aneb } o^2 = p \,.\, ad. \\ p : o_1 = o_1 : bd \text{ aneb } o^2 = p \,.\, bd. \end{cases}$$

Značí-li p, o a o_1 měrná čísla délek stran pravoúhlého trojúhelníku abc (obr. 116.), tedy se obdrží sečtením rovnic

$$o^2 = p \, . \, ad$$
$$o_1^{\,2} = p \, . \, bd$$
$$o^2 + o_1^{\,2} = p \, \underbrace{(ad + bd)}_{p} = p^2 \text{ t. j.}$$

v každém pravoúhlém trojúhelníku jest dvojmoc měrného čísla přepony rovna součtu měrných čísel obou odvěsen.

Toť jest výrazem pro větu Pythagorovu, jejíž správnosť ve smyslu geometrickém již dříve odůvodněna byla. Pomocí této věty lze ze dvou známých stran trojúhelníku pravoúhlého vypočítati stranu třetí; jest totiž

$$p^2 = o^2 + o_1^{\,2} \qquad o^2 = p^2 - o_1^{\,2} \qquad o_1^{\,2} = p^2 - o^2$$
$$p = \sqrt{o^2 + o_1^{\,2}} \qquad o = \sqrt{p^2 - o_1^{\,2}} \qquad o_1 = \sqrt{p^2 - o^2}$$

Příklady. *a)* V pravoúhlém trojúhelníku, v němž odvěsny měří 33 m a 56 m, jest měrné číslo přepony

$$p = \sqrt{33^2 + 56^2} = 65.$$

b) Měří-li v trojúhelníku pravoúhlém přepona $p = 53 \, m$ a jedna odvěsna $o = 45 \, m$, jest druhá odvěsna

$$o_1 = \sqrt{53^2 - 45^2} = 28 \, m.$$

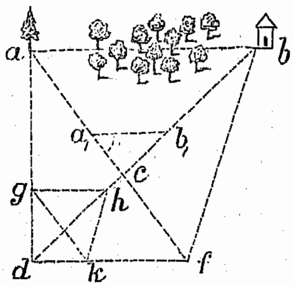
Pozn. Při skutečném počítání jest často výhodno, rozložiti rozdíl dvojmocí pod odmocnítkem na dva činitele.

$$o_1 = \sqrt{(53 + 45) \, . \, (53 - 45)} = \sqrt{\underbrace{98 \, . \, 8}_{2 \, . \, 49}} = \sqrt{49 \, . \, 16} = 7 \, . \, 4 = 28 \, m.$$

§. 104. **Některé případy praktického upotřebení nauky o podobnosti.**

1) *Stanoviti délku vzdálenosti dvou předmětů, která se přímo měřiti nedá.*

Při upotřebení nauky o shodnosti byl již jeden spůsob udán, kterým se úkol tento řešiti dá. Spůsobu tam udaného nelze upotřebiti, když se délky ac a bc za bod c nedají prodloužiti.



Obr. 117

V tomto případu změří se ac i bc a učiní se a_1c = určitému dílu ac; podobně učiní se b_1c = téže části bc, jako bylo učiněno a_1c od ac.

Je-li $a_1 c = \frac{ac}{3}$ a $b_1 c = \frac{bc}{3}$, tedy jest $a_1 b$, která se změří, rovna $\frac{ab}{3}$.

2) *Kdyby bod b byl nepřístupen*, tak že nelze délku bc změřiti, tu změří se pouze ac a učiní se potom $a_1 c$ rovnou určité části ac na př. $a_1 c = \frac{ac}{3}$. Při a_1 vztyčí se úhel $b_1 a_1 c_1 = bac$, v jehož ramenu $a_1 b_1$ se zaměřením z c do b stanoví bod b_1. Změřená délka $a_1 b_1$ jest tolikátou částí délky ab, jako jest $a_1 c$ délky ac.

3) *Kdyby byly oba koncové body délky ab nepřístupny*, tu zvolí se dvě stanoviska d a f, z nichž lze k oběma bodům a i b viděti, a jichž vzdálenosť možno přímo měřiti. Délka df se změří, a nanese se na ni od d počínaje na př. třetina její délky do bodu k. Při k vztyčí se úhel $dkg = dfa$. V ramenu tohoto úhlu určí se bod g ležící na ad. Podobně vztyčí se při k úhel $dkh = dfb$, a v jeho rameně se stanoví bod h, ležící ve směru db. gh jest pak tolikátá část délky ab, jako jest dk od df.

6. O poměrné velikosti ploských obsahů mnohoúhelníků.

§. 105. 1) Jsou-li p a p_1 ploské obsahy a s a s_1 délky dotyčných stran dvou čtverců, tedy jest dle §. 82.

$$p = s^2 \text{ a } p_1 = s_1^2 \text{ tudíž}$$
$$p : p_1 = s^2 : s_1^2, \text{ t. j.}$$

Měrná čísla obsahu dvou čtverců jsou přímo srovnalostna ku dvojmocem měrných čísel jejich stran.

2) Jsou-li p a p_1 obsahy dvou rovnoběžníků, jichž základny mají délku z a z_1 a výšky v a v_1, tedy jest

$$p = z \,.\, v \text{ a } p_1 = z_1 \,.\, v_1, \text{ tudíž}$$
$$p : p_1 = z \,.\, v : z_1 \,.\, v \text{ t. j.}$$

ploské obsahy dvou rovnoběžníků jsou přímo srovnalostny k součinům ze základen a výšek.

$$\text{Pro } z = z_1 \text{ jest } p : p_1 = v : v_1$$
$$\text{pro } v = v_1 \text{ jest } p : p_1 = z : z_1 \text{ t. j.}$$

ploské obsahy dvou rovnoběžníků o rovných základnách či výškách jsou přímo srovnalostny ku svým výškám či základnám.

3) Jsou-li p a p_1, z a z_1, v a v_1 ploské obsahy, základny a výšky dvou trojúhelníků, tedy jest

$$p = \frac{z \cdot v}{2} \text{ a } p_1 = \frac{z_1 \cdot v_1}{2}, \text{ tudíž}$$

$$p : p_1 = \frac{z \cdot v}{2} : \frac{z_1 \cdot v_1}{2} \text{ anebo}$$

$$p : p_1 = zv : z_1 v_1 \text{ t. j.}$$

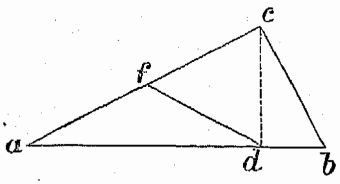
ploské obsahy dvou trojúhelníků jsou k součinům měrných čísel svých základen a výšek přímo srovnalostny.

Pro $z = z_1$ jest $p : p_1 = v : v_1$,
pro $v = v_1$ jest $p : p_1 = z : z_1$, t. j.

ploské obsahy dvou trojúhelníků o stejných základnách aneb výškách jsou přímo srovnalostny, k výškám či základnám svým.

4) **Ploské obsahy trojúhelníků, majících jeden úhel společný (stejně velký), jsou srovnalostny ku součinu měrných čísel stran tento úhel svírajících.**

Důkaz. Buďtež v trojúhelnících abc a afd, které mají úhel a společný, měrná čísla stran ab a ac, ad a af, které tento úhel svírají, m a n, p a q. Kreslí-li se cd, tedy mají trojúhelníky abc a adc stejnou výšku, a proto jsou $\triangle\, abc : adc = ab : ad$



Obr. 118.

1) $\triangle\, abc : adc = m : p$;

podobně mají trojúhelníky afd a acd společnou výšku, proto též

$\triangle\, acd : afd = ac : af$ anebo

2) $\triangle\, acd : afd = n : q$.

Násobením srovnalostí 1) a 2) obdrží se

$$\triangle\, abc : afd = mn : pq.$$

5) **Ploské obsahy trojúhelníků podobných jsou přímo srovnalostny ku dvojmocím měrných čísel jejich stran aneb výšek stejnolehlých.**

Jsou-li v podobných trojúhelnících abc a $a_1 b_1 c_1$ (obr. 115.) a, b, c a a_1, b_1, c_1 měrná čísla stran ab, bc, ac, a $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, $a_1 c_1$ pak jest

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1, \text{ tudíž i}$$
$$a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = c^2 : c_1^2; \text{ proto jest}$$

pouze dokázati, že

$$\triangle\, abc : a_1 b_1 c_1 = a^2 : a_1^2.$$

Násobí-li se srovnalosť

$$b : b_1 = a : a_1$$

srovnalostí

$$a : a_1 = a : a_1, \text{ pak jest}$$

$$ab : ab_1 = a^2 : a_1^2.$$

Poněvadž $\sphericalangle b = b_1$, jest dle poučky předešlé

$$\triangle abc : \triangle a_1b_1c_1 = ab : a_1b_1; \text{ tudíž i}$$

$$\triangle abc : \triangle a_1b_1c_1 = a^2 : a_1^2.$$

6) **Ploské obsahy mnohoúhelníků podobných jsou přímo srovnalostny ku dvojmocím měrných čísel jejich stran (nebo příček vůbec) stejnolehlých.**

Jsou-li ve mnohoúhelnících sobě podobných $abcdf$ a $a_1b_1c_1d_1f_1$ (obr. 112.) a_1 a a, b_1 a b, c_1 a c, d_1 a d, f_1 a f měrnými čísly stejnolehlých stran, tedy jest

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = d : d_1 = f : f_1, \text{ tudíž i}$$

$$a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = c^2 : c_1^2 = d^2 : d_1^2 = f^2 : f_1^2; \text{ zbývá}$$

tedy pouze dokázati, že jest plocha $abcdf : a_1b_1c_1d_1f_1 = a^2 : a_1^2$.

Rozloží-li se tyto mnohoúhelníky úhlopříčnami, ze stejnolehlých vrcholů b a b_1 vycházejícími, na sobě podobné trojúhelníky, tedy dle věty předešlé

$$\triangle abf : \triangle a_1b_1f_1 = a^2 : a_1^2$$

$$\triangle bdf : \triangle b_1d_1f_1 = a^2 : a_1^2$$

$$\triangle bdc : \triangle b_1d_1c_1 = a^2 : a_1^2, \text{ tudíž i}$$

$$(\triangle abf + \triangle bdf \triangle bdc) : (\triangle a_1b_1f_1 + \triangle b_1d_1f_1 + \triangle b_1d_1c_1) = a^2 : a_1^2$$

aneb pl. $abcdf : a_1b_1c_1d_1f_1 = a^2 : a_1^2$.

Následek. Rozdělí se strany trojúhelníku na 2, 3, 4, 5 . . . n sobě rovných dílů a kreslí-li se body dělícími dvou a dvou stran příčky rovnoběžné ku straně třetí, jest plocha každého z takto vzniklých 4, 9, 16, 25 . . . n^2 trojúhelníků $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25} \ldots \frac{1}{n^2}$ plochy trojúhelníku daného. (Daný trojúhelník rozdělen jest těmito příčkami na 4, 9, 16, 25 . . . n^2 shodných trojúhelníků.)

7) **Sestrojí-li se nad stranami pravoúhlého trojúhelníku sobě podobné mnohoúhelníky, tedy jest součet plošných obsahů mnohoúhelníků nad odvěsnami roven obsahu mnohoúhelníku nad přeponou.** (Rozšíření věty Pythagorovy.)

Jsou-li b a c odvěsny a a přepona pravoúhlého trojúhelníku, p_1 a p_2 obsahy mnohoúhelníků nad odvěsnami a p obsah mnohoúhelníku nad přeponou, tedy plyne z podobnosti těchto mnohoúhelníků dle věty předešlé

$p_1 : p_2 = b^2 : c^2$

$p_1 + p_2 : p_1 = b^2 + c^2 : b^2$ dle věty Pythagorovy jest ale

$b^2 + c^2 = a^2$, tudíž

1) $p_1 + p_2 : p_1 = a_2 : b_2$.

Z podobnosti mnohoúhelníků uvedených ale plyne též

2) $p : p_1 = a_2 : b_2$.

V srovnalostech 1) a 2) jsou druhé, třetí i čtvrté členy sobě rovny, proto musí býti i první členy sobě rovny, tudíž

$$p = p_1 + p_2.$$

Úkoly početní.

§. 106. 1) **Stanoviti obsah trojúhelníku rovnostranného, jehož strana jest** s.

Je-li výška trojúhelníku v a obsah $= p$, tedy jest

$$v^2 = s^2 - \frac{s^2}{4} = \frac{3}{4}\,s^2,\; v = \frac{s}{2}\sqrt{3}$$

$$p = \frac{s \,.\, v}{2} = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \left(\frac{s}{2}\right)^2\sqrt{3}$$

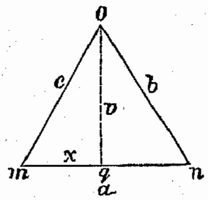
2) **Vypočítati obsah trojúhelníku, jehož strany jsou** a, b, c.

Budiž v $\triangle$ mno (obr. 119.) $mn = a$, $on = b$, $mo = c$, $oq = v$, $mq = x$; tedy jest $nq = a - x$ v $\triangle$ oqn . . . $v^2 = b^2 (a-x)^2$ v $\triangle$ mqo . . . $v^2 = c^2 - x^2$, tudíž jest

$$b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$$

$$b^2 = a^2 + 2ax - x^2 = c^2 - x^2$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$



Obr. 119.

Vloží-li se tato hodnota za x do rovnice,

$$v^2 = c^2 - x^2 = (c + x)\,(c - x),\text{ tu jest}$$

$$v^2 = \left(c + \frac{a^2 = c^2 - b^2}{2a}\right) . \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$v^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2) . (2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$v^2 = \frac{((a + c)^2 - b^2)\;(b^2 - (a - c)^2)}{4a^2}$$

$$v^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c).(b+a-c)(b+c-a)}{4a^2}$$

$$v^2 = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c).(a+b-c)(b+c-a)}$$

Označí-li se polovina obvodu (t. jest polovina součtu všech stran) s, tedy

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \text{ a}$$

$$s - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2},\ s - b,\ \frac{a+c-b}{2},$$

$$s - c = \frac{a+b-c}{2}, \text{ tudíž } 2(s-a) = b+c-a,$$

$$2(s-b) = a+c-b,\ 2(s-c) = a+b-c.$$

Dosadí-li se tyto hodnoty do výrazu pro v, jest

$$v = \frac{1}{2a}\sqrt{2s\,.\,2(s-a)\,.\,2(s-b)\,.\,2(s-c)}$$

$$= \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

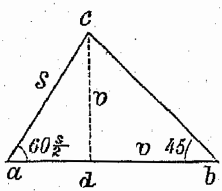
Plošný obsah $p = \frac{a\,.\,v}{2} = \frac{a}{2}\,.\,\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)\,.\,(s-b)\,.\,(s-c)}$

$$p = \sqrt{s(s-a)\,.\,(s-b)\,.\,(s-c)}.$$

Měří-li strany trojúhelníku 10, 12 a $14\ m$, tedy jest $s = 18$, $s - a = 8$, $s - b = 6$, $s - c = 4$, a

$$p = \sqrt{\underbrace{18\,.\,8}_{3.6}\,.\,\underbrace{6\,.\,4}_{2.4}\,.\,\underbrace{\ }_{16}} = 6\,.\,4\sqrt{6} = 24\,.\,2{\cdot}45 = 58{\cdot}8\ \square m$$

3) Vypočítati obsah trojúhelníku, v němž měří základna $23{\cdot}66\ m$ **a k této základně přilehlé úhly** 45^0 **a** 60^0.



Obr. 120.

Pravoúhlý $\triangle\ adc$, v němž $\sphericalangle\ a = 60^0$ lze považovati za polovinu trojúhelníku rovnostranného, jehož strana jest

$$ac = s;\ \text{tudíž jest } ad = \frac{s}{2}.$$

Pravoúhlý trojúhelník bdc jest rovnoramenný, tudíž $db = cd = v\ 23{\cdot}66 = \frac{1}{2} + v.$

$$V \triangle\ acd \ldots\ldots v = \frac{s}{2}\sqrt{3}, \text{ tedy } \frac{s}{2} = \frac{v}{\sqrt{3}} = \frac{v}{3}\sqrt{3}.$$

Dosadí-li se tato hodnota místo $\frac{s}{2}$, jest

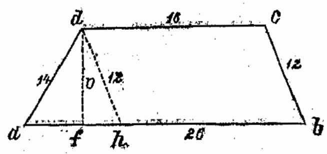
$$23{\cdot}66 = \frac{v\sqrt{3}}{3} + v$$

$$v = \frac{3\,.\,23{\cdot}66}{3 + 1{\cdot}732} = 15$$

$$p = \frac{23{\cdot}66}{2}\,.\,15 = 11.83 \times 15 = 17{\cdot}745 \,\square\, m.$$

4. **Vypočítati obsah lichoběžníku, jehož strany měří** *16*, *26*, *12* a *14 m*.

V $\triangle$ *ahd* měří strana *ah* = *26* — *16* = *10 m*.



Obr. 121.

Obsah tohoto trojúhelníku $p = 58{\cdot}8 \,\square m$ (§. 106. 2.), a tudíž $v = 58{\cdot}8 : 5 = 11{\cdot}76$; plocha lichoběžníku

$$p_1 = \frac{16 + 26}{2}\,.\,11{\cdot}76 = 246{\cdot}96 \,\square m.$$

Úkoly ku cvičení.

1) V plánu katastrálním měří jistá délka 8·75; jak velká jest tato délka ve skutečnosti, když ve výkresu 1 cm 30 metrům ve skutečnosti odpovídá?

2) Plošný obsah mnohoúhelníku narýsovaného dle měřítka 1 dm = 35 m jest na papíře 28 □dm; jak velká jest tato plocha ve skutečnosti?

3) Stín svisle postavené tyče 3 m dlouhé jest 2 m dlouhý; jak vysoká jest věž, jejíž stín v tutéž dobu a) 75 m, b) 135 m, 88 m, d) 94·78 m dlouhý jest?

4) Tři strany jednoho trojúhelníku měří 16·8 m, 22·8 m a 34·6 m; nejmenší strana jiného tomuto podobného trojúhelníku měří 5·6 m; jak velké jsou ostatní strany jeho?

5) V trojúhelníku, jehož strany 52·7 m, 108·5 m a 124 m měří, rýsovati se má příčka 3·4 m dlouhá, rovnoběžně ku straně nejkratší; v jaké vzdálenosti od protějšího vrcholu protíná tato příčka ostatní strany daného trojúhelníku?

6) Jak velké jsou strany trojúhelníku, jehož obvod měří 4·37 m; je-li tento trojúhelník podobný k trojúhelníku, jehož strany měří 4·55 m, 6·3 m a 4·445 m?

7) Obsah trojúhelníku, jehož jedna strana 115·4 m měří, jest 3849·6 □m; jak velký jest obsah jiného tomuto podobného trojúhelníku, jehož uvedené straně odpovídající strana 42·6 měří?

8) Strany trojúhelníku měří 18 m, 24 m a 34 m; jak velké jsou strany jiného, tomuto podobného trojúhelníku, jehož obsah jest 860 □m?

9) Obsahy dvou trojúhelníků podobných jsou 24·36 □m a 182·7 □m; jedna strana prvního z těchto trojúhelníků jest o 8·5 m kratší než s ní stejnolehlá strana trojúhelníku druhého. Jak dlouhé jsou tyto strany?

10) Strany různoběžníku měří 18 m, 20 m, 22 m a 25 m; jak velké jsou strany lichoběžníku tomuto podobného, jehož obvod měří 36 m?

11) Výška k přeponě pravoúhlého trojúhelníku příslušná, stanoví na této úsečky 7·2 m a 16·2 m dlouhé; jak dlouhá jest tato výška a jak velký obsah tohoto trojúhelníku?

12) Přepona pravoúhlého trojúhelníku měří 18 m a k ní příslušná výška 8 m; jak velké jsou úseky touto výškou na přeponě tvořené?

13) Výška k přeponě pravoúhlého trojúhelníku příslušná měří 6 m, a jedna jí tvořená úsečka přepony 5 m; jak velké jsou strany tohoto trojúhelníku?

14) Dvě strany trojúhelníku měří 18 m a 15 m; příčkou ku třetí straně rovnoběžnou rozděliti se má tento trojúhelník na dvě rovné části. Jak vzdáleny jsou koncové body této příčky od protějšího vrcholu?

15) V trojúhelníku abc, jehož strany $ab = 36$, $ac = 48$ a $bc = 54$ m měří, odděliti se má příčkou $df \parallel ab$ plocha 100 □m veliká; jak vzdáleny jsou body d a f od vrcholu c?

16) Dříve jmenovaný trojúhelník abc rozděliti příčkami ku ab rovnoběžnými na 3 rovné díly; jak veliké jsou vzdálenosti krajních bodů těchto příček od vrcholu c?

17) Trojúhelník, jehož strany měří 50 m, 60 m a 80 m, rozděliti se má příčkami ku straně nejdelší rovnoběžnými, na tři díly v poměru 2 : 3 : 5; jak vzdáleny jsou koncové body těchto příček od protějšího vrcholu?

18) V trojúhelníku abc měří $ab = 400$ m, $ac = 250$ m, $bc = 300$ m. Tento trojúhelník rozděliti se má příčkami, bodem d strany bc od vrcholu c o 120 m vzdáleným procházejícími, na 3 rovné části.

Stanoviti polohu krajních bodů těchto příček vzhledem k vrcholu daného trojúhelníku. (§. 105. 4.)

19) Trojúhelník, jehož strany 40 m, 70 m, 50 m měří, rozděliti má příčkami ku straně nejdelší rovnoběžnými na 3 rovné části. Stanoviti se má poloha bodů dělících. (§. 105. 4.)

20) Trojúhelník, jehož strany 200 m, 280 m a 275 m měří, rozděliti se má příčkami ku straně nejkratší rovnoběžnými na tři části v poměru 2 : 5 : 7. Stanoviti se má poloha bodů dělících.

21) Do trojúhelníku, jehož strany 21, 23 a 25 m měří, vepsati se má čtverec; jak velká jest strana tohoto čtverce a v jakém poměru jest obsah tohoto čtverce k obsahu daného trojúhelníku?

22) Jak velká jest výška obdélníku vepsaného, měří-li jeho délka 30 m?

23) Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku měří a) 9 m a 40 m, b) 437 m a 84 m, c) 7 m a 24 m, d) 8·3 m a 5·5 m, e) 12·05 m a 18·46 m; jak velká jest přepona a plocha tohoto trojúhelníku?

24) V pravoúhlém trojúhelníku měří přepona a jedna odvěsna a) 53 m a 45 m, b) 74 m a 24 m, c) 113 m a 15 m, d) 545 m a 327 m, e) 11·18 m a 5 m, f) 56·18 m a 28·54 m; jak velká jest odvěsna druhá a jak velká plocha tohoto trojúhelníku?

25) V trojúhelníku pravoúhlém jest měrné číslo obsahu a ono jedné odvěsny a) 546 □m a 13 m, b) 10920 □m a 182 m, c) 150 □m a 20 m, d) 21 □m a 6 m, e) 1425·64 □m a 79·2 m; jak velká jest odvěsna druhá a přepona?

26) Jak velké jsou odvěsny a jak velká jest plocha pravoúhlého trojúhelníku rovnoramenného, jehož přepona měří a) 43 m, b) 231·04 m, c) 784 m, d) 1755·61 m?

27) Vypočítati obsah trojúhelníku rovnostranného, jehož strana měří a) 16 m, b) 28·7 m, c) 65·08 m, d) 9·75 m, f) 0·47 m.

28) Vypočítati obsah trojúhelníku rovnostranného, jehož výška měří a) 17·32, b) 25·98, c) 8·5 m, d) 5·1 m.

29) Vypočítati délku strany i výšky trojúhelníku rovnostranného, jehož plošný obsah měří a) 114 □m, b) 4330·127 □m, c) 73·18 □m, d) 12 □m, f) 33 □m.

30) Základna rovnoramenného trojúhelníku měří 34 m a rameno 145 m; jak velký jest obsah tohoto trojúhelníku?

31) Jak velké jest rameno trojúhelníku rovnoramenného, 28·12 m vysokého a 593·0508 □m velkého?

32) *Obvod trojúhelníku rovnoramenného, jehož rameno měří 9·5 m, jest 31 m; jak velký jest jeho obsah?*

33) *Vypočítati délku stran a velikost obsahu trojúhelníku rovnoramenného, jehož obvod měří 40 m a k základně příslušná výška 10 m.*

34) *Vypočítati obsah trojúhelníku, jehož strany měří a) 13 m, 14 m a 15 m, b) 39 m, 25 a 56 m, c) 272 m, 267 a 11 m, d) 650 m, 596 m a 126 m, e) 10·2 m a 17 m, f) 19 m, 20 m a 21 m.*

35) *Dvě strany trojúhelníku měří 20 m a 13 m a výška ku třetí straně příslušná 12 m. Jak velká jest tato třetí strana, a jak velká jest plocha tohoto trojúhelníku?*

36) *Dvě strany trojúhelníku měří 20 m a 30 m a výškou dělí se kratší z těchto stran na úseky 8 m a 12 m dlouhé. Jak dlouhá jest strana třetí a jak velká jest plocha tohoto trojúhelníku?*

37) *Vypočítati obsah trojúhelníku, v němž měří dvě strany 5 m a 11 m a těmito stranami sevřený úhel 60°.*

38) *Dvě strany trojúhelníku měří 15·2 m a 18·6 m a těmito stranami sevřený úhel 45°; vypočítati obsah tohoto trojúhelníku.*

39) *Vypočítati obsah trojúhelníku, v němž měří jedna strana 48 m a z úhlů, k této straně přilehlých, jeden 45° a druhý 60°.*

40) *Jak velký jest obsah trojúhelníku, jehož dvě strany měří 28 m a 18 m a těmito stranami sevřený úhel 30°?*

41) *Dvě strany trojúhelníku měří 5 a 19 m, jak velký jest obsah tohoto trojúhelníku, měří-li úhel naproti větší z těchto stran ležící 60°?*

42) *Strany trojúhelníku měří 2·5 m, 4·8 m a 3·2 m, jak velké jsou úseky na straně 4·8 m dlouhé, příslušnou k ní výškou tvořené, a jak velký jest obsah tohoto trojúhelníku?*

43) *Vypočítati délku strany a velikost obsahu čtverce, v němž měří úhlopříčna a) 12 m, b) 21·2 m, c) 46·67 m, d) 18 m, f) 142 m.*

44) *Vypočítati délku strany, úhlopříčny jakož i obvodu čtverce, jehož obsah činí a) 625 □m, b) 1536·64 □m, c) 249.64 □m, d) 289 □m, e) 846·81 □m.*

45) *Jak velká musí býti učiněna strana čtverce, který má míti týž obsah, jako trojúhelník rovnostranný, jehož strana měří 5·26 m?*

46) *Vypočítati obsah čtverce, který má tak velký obvod jako trojúhelník rovnostranný, jenž 4330·127 □m velký jest.*

47) *Jak velká jest strana čtverce dvakráte, třikráte, čtyři-*

kráte, pětkráte atd. tak velkého, jako jest čtverec, jehož strana měří a) 8·5 m, b) 15 m, c) 175·34 m, d) 54·2 m.

48) Součet strany a úhlopříčny ve čtverci jest 14·484 m; jak velká jest strana, úhlopříčna a plocha tohoto čtverce?

49) Rozdíl úhlopříčny a strany čtverce jest 12·6 m; jak velká jest strana, úhlopříčna a plocha tohoto čtverce?

50) Vypočítati obsah obdélníku, v němž měří jedna strana 133 m a úhlopříčna 205 m.

51) Jak dlouhá jest úhlopříčna obdélníku, v němž měří strany a) 16·97 m a 6 m, b) 765 m a 1188 m, c) 33 m a 56 m, d) 8·3 m a 5·9 m, e) 15.02 m a 24·54?

52) Jak velké jsou strany a jak velký obsah obdélníku, v němž jest délka dvakráte tak dlouhá jako šířka, a jehož úhlopříčna měří 1) 15 m, b) 33·5 m, c) 17·64 m, d) 243·8 m?

53) Obvod obdélníku měří 2454 m; délka jest dvakrát tak dlouhá jako šířka; jak dlouhé jsou strany a jak velký obsah tohoto obdélníku?

54) Vypočítati délku strany čtverce stejně velikého s obdélníkem 125 m dlouhým a 80 m širokým.

55) Strany tří čtverců měří 8·4, 17·3 a 25·86 m; jak velká musí býti učiněna strana čtverce téhož obsahu jako uvedené tři čtverce dohromady?

56) Jak široký jest obdélník 15 m dlouhý, jehož obvod jest tak velký jako onen čtverce 132·25 □m velkého?

57) Vypočítati obsah kosočtverce, v němž měří jeden úhel 60° a strana a) 8 m, b) 12·7 m, c) 108·04 m, d) 56·36 m.

58) Vypočítati obsah kosočtverce, v němž měří jeden úhel 45° a strana 7·3 m.

59) Jak velká jest strana a obvod kosočtverce, v němž měří jedna úhlopříčna 60 m a výška 48 m?

60) Strana kosočtverce měří 20 m a úhlopříčna 30 m; jak velký jest obsah tohoto kosočtverce?

61) Jak velká jest strana rovnostranného trojúhelníku téhož obsahu jako kosočtverec, jehož strana 22 m a úhlopříčna 17·5 m měří?

62) Vypočítati obsah kosodélníku, v němž měří dvě sousedné strany 25 m a 15 m, a úhlopříčna jedna 18 m.

63) Jak velký jest obsah kosodélníku, v němž měří dvě sousedné strany 5 m a 11 m a těmito stranami uzavřený úhel 60°?

64) Jak vysoký jest obdélník 14 m dlouhý, který jest stejně velký s rovnoběžníkem, jehož dvě sousedné strany měří 18 m a 8 m a těmito stranami sevřený úhel 45°?

65) Vypočítati obsah lichoběžníku, v němž měří ramena 72 m a 84 m a základny 68 m a 184 m.

66) V lichoběžníku, v němž jedno rameno na základnách kolmo stojí, měří toto rameno 45°. Jak velký jest obsah toho lichoběžníku?

67) Základny lichoběžníku rovnoramenného měří 15 m a 25 m: jak velký jest obsah tohoto lichoběžníku, měří-li jeho rameno 12 m?

68) V lichoběžníku měří základny 16 m a 34 m; jedno rameno 14 m a úhlopříčna 18 m; jak velký jest obsah tohoto lichoběžníku?

69) Vypočítati obsah čtyřúhelníku, jehož strany měří 5 m, 8 m, 10 m a 12 m, a jehož jedna úhlopříčna má 7 m.

70) Jak velký jest obsah lichoběžníku, v němž měří jeden úhel 60°, jsou-li jeho strany 12·2 m, 9·7 m, 14·2 m a 13·5 m dlouhé?

71) Jak velká jest strana čtverce, který jest tak velký jako různoběžník, v němž měří strany 7 m, 9 m, 11 m a 12 m, a jeden úhel 45°?

72) U různoběžníku měří základna 18 m a k ní přilehlé úhly 60° a 45°; jak velký jest obsah tohoto lichoběžníku, měří-li strana se základnou 60°, úhel 16 m a druhá sousední strana základny 9 metrů?

Úkoly konstruktivné, které se na srovnalosti délek nebo podobností zakládají.

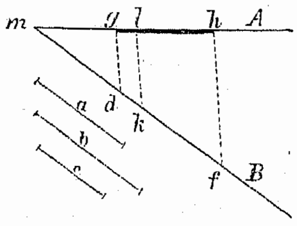
§. 107. 1) **Ku třem daným délkám sestrojiti čtvrtou srovnalostnou.**

Narýsuje se úhel libovolně velký (ne příliš ostrý) AB (obr. 122.) a učiní se $md = a$, $df = b$, $mg = c$; kreslí se dg a bodem f $fh \parallel gd$; gh jest žádaná délka x, neboť z podobnosti $\triangle\ mgd$ a mhf plyne:

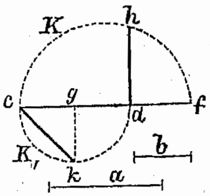
$$md : df = mg : gh, \text{ aneb}$$
$$a : b = c : x$$

Při řešení tohoto úkolu mohlo se též tím způsobem postupovati, že se učiní (obr. 122.) $md = a$, $mk = b$, $mg = c$, a že se ku dg kreslí rovnoběžka kl bodem k; pak plyne z podobnosti $\triangle$ mgd a mkl

$$\begin{aligned} md : mk &= mg : ml \text{ aneb} \\ a : b &= c \;\; : ml, \text{ a jest tudíž i zde} \\ ml &= x. \end{aligned}$$



Obr. 122.



Obr. 123.

2) **Ku dvěma daným délkám sestrojiti střední měřicky srovnalostnou.**

Dány-li jsou délky a i b (obr. 123.), a má-li se sestrojiti délka x tak, aby srovnalosti $a : x = x : b$ zadost učinila; tr nanese se na libovolně zvolenou přímku A délka $cd = a$, a $df = b$. Nad cf jako průměrem vykreslí se polokružnice K a v d vztyčí se kolmice cf, která polokružnici K v bodu h protíná; dh jest žádanou délkou x.

Důkaz plyne bezprostředně z věty 2, II. §. 103., kreslí-li se ch a hf.

Jiný spůsob řešení tohoto úkolu jest ten, že se učiní $cd = a$ a $cg = b$; nad cd jako průměrem vykreslí se polokružnice K_1. Bod k, ve kterém kolmice v bodu g na cd vztyčená tuto polokružnici protíná, spojí se s c, a délka ck jest délkou žádanou x; neboť kreslí-li se kd, tedy jest dle §. 103. II. 2.

$$\begin{aligned} cd : ck &= ck : cg \text{ aneb} \\ a : ck &= ck : b, \text{ tedy } ck = x. \end{aligned}$$

3) **Ku dvěma daným délkám sestrojiti třetí spojitě srovnalostnou.**

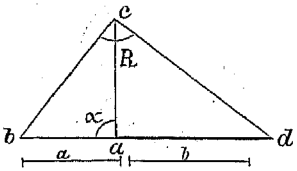
Úkol tento řešiti se dá rozmanitými spůsoby

a) Má-li se sestrojiti délka x tak, aby hověla vzhledem daným délkám a i b srovnalosti $a : b = b : x$, třeba pouze v úkolu 1. §. 107. učiniti $c = b$.

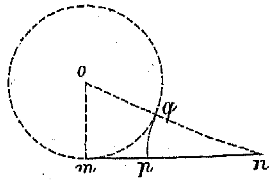
b) Je-li v dané srovnalosti a $>$ b, sestrojí se trojúhelník pravoúhlý, jehož přepona má délku a a jedna odvěsna délku b;

s vrcholu úhlu pravého na přeponu spuštěná kolmice stanoví na přeponě dvě úsečky, z nichž jest dle §. 103., II., 3. ona k odvěsně b přiléhající žádanou délkou x.

c) Je-li $a < b$, nakreslí se pravý úhel α, jehož jedno rameno za vrchol se prodlouží, a nanese se $ab = a$ (obr. 124.), a $ac = b$; kreslí-li se bc a vztyčí-li se v bodu c kolmice cd na bc, tedy jest dle (§. 103., II., 2.) ad délkou žádanou.



Obr. 124.



Obr. 125.

4) **Danou délku rozděliti v poměru vnějším i vnitřním t. j. tak na 2 části, aby větší z nich byla střední měřicky srovnalostnou mezi částí menší a mezi celou délkou** (zlatý řez).

Je-li (obr. 125.) daná délka $mn = a$ v bodu p rozdělena v poměru žádaném, a označí-li se její větší úsečka $np = x$, tedy musí býti zadost učiněno srovnalosti

$$a : x = x : a - x, \text{ aneb } x^2 = a(a - x).$$

Konstrukce. V m vztyčí se na mn kolmice, a učiní se $mo = \frac{a}{2}$. Kolem o opíše se poloměrem $mo = \frac{a}{2}$ kružnice, která se s přímkou on v bodu q protíná, délka qn jest délkou žádanou x; třeba pouze učiniti $np = nq$.

Důkaz. V pravoúhlém $\triangle\ mno \ldots no^2 = mn^2 + mo^2$

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 = a^2 - ax = a(a - x) \text{ aneb}$$

$$a - x : x = x : a.$$

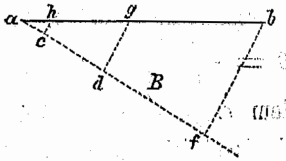
5) **Danou délku rozděliti na více částí, jichž délky jsou v daném poměru.**

Budiž dána délka ab (obr. 126.), která se má rozděliti na části, jež se k sobě mají, jako

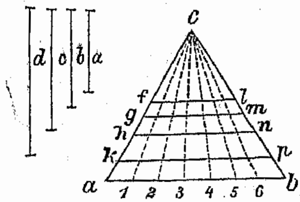
$$m : n : p. \ (1 : 3 : 5).$$

Bodem a kreslí se přímka B běhu libovolného (avšak tak, aby nebyla její odchylka od ab příliš malá) a nanese se na ni z bodu a do bodu c m, z c do d n, z d do f p rovných částí. Kreslí-li se bf a body d a c ku bf rovnoběžky, tedy se

$$ah : hg : gb = m : n : p.$$



Obr. 126.



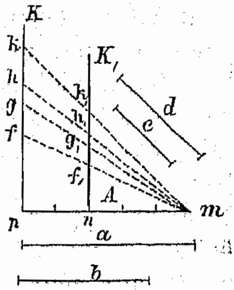
Obr. 127.

6) **Více daných délek na stejný počet dílů rovných rozděliti.**

Mají-li se dané délky a, b, c, d na m (na př. 7) rovných dílů rozděliti, nakreslí se (obr. 127.) přímka, na niž se nanese m (7) stejných dílů od a do b, avšak tak, aby byla ab delší než nejdelší z daných délek. Nad ab jako základnou sestrojí se rovnostranný trojúhelník abc, jehož vrchol c se spojí s body, v nichž jest ab rozdělena. Konečně učiní se $cf = a$, $cg = b$, $ch = c$, $ck = d$, a kreslí se $fl \| gm \| hn \| kp$. Základny rovnostranných trojúhelníků cfl, cgm, chn, ckp rozděleny jsou příčkami $c1$, $c2$, $c3$ . . . na m (7) rovných dílů.

7) **Více daných délek zvětšiti nebo zmenšiti poměrem daným.**

Aby se dané délky a, b, c, d (obr. 128.) na př. v poměru $5 : 3$ zmenšily, nakreslí se přímka A, na niž se nanesou od m do n 3 rovné, ale libovolně dlouhé a podobně od m do p 5 dílů téže velikosti. V bodech n a p vztyčí se na A kolmice. Na kolmici K nanášejí se, od p počínaje, dané délky, tak že jest $pf = a$, $pg = b$, $ph = c$, $pk = d$. Spojí-li se body f, g, h, k s bodem m, tedy stanoví průsečíky těchto přímek s kolmicí K_1 koncové body délek v žádaném poměru zmenšených. Délky zmenšené jsou nf_1, ng_1, nh_1, nk_1.

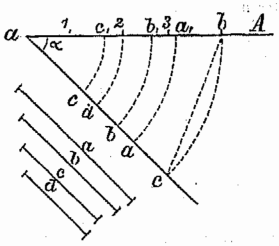


Obr. 128.

Kdyby se dané délky měly v poměru $3 : 5$ zvětšiti, tu by se nanášely na K_1 a na K by se objevily délky zvětšené.

Jiný způsob dané délky určitým poměrem zmenšiti nebo zvětšiti, jest následující:

Mají-li se dané délky a, b, c, d (obr. 129.) v poměru $4:3$ zmenšiti, tu sestrojí se úhel redukční α tím spůsobem, že se na rameno A od libovolného obvodu a nanesou 4 sobě rovné díly až do bodu b. Poloměrem ab opíše se kolem a oblouk. Tento oblouk protne se obloukem jiným kolem bodu b opsaným, jehož poloměr jest $bc = a3 = \frac{3}{4}\, ab$. Průsečík c spojen s bodem a stanoví druhé rameno ac úhlu redukčního α. Aby se pomocí tohoto úhlu redukčního stanovily délky v daném poměru zmenšené, opíše se délkou danou kolem vrcholu úhlu redukčního oblouk. Vzdáleností průsečíku tohoto oblouku s rameny úhlu redukčního (tedy tětivy $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $d_1 d_2$) stanoví se délky žádané. Úhlu redukčního velmi často se užívá ku zmenšování nebo zvětšování obrazů předmětu daným poměrem. V tomto případu bývá místo číselného poměru zmenšení či zvětšení často dána délka, která má v obrazu zmenšeném či zvětšeném odpovídati délce obrazu daného. — Jak sestrojí se úhel redukční v tomto případě?

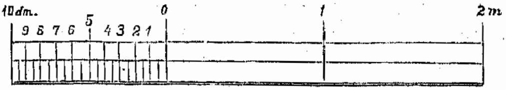


Obr. 129.

8) **Rýsování měřítek.**

Obrazy rozmanitých předmětů (na př. plány stavitelské, mapy situační) nelze často hotoviti v takové velikosti, aby obrazy jednotlivých částí měly tutéž velikost, jako mají tyto části na předmětu skutečném. Obrazy takových předmětů kreslí se obyčejně v míře zmenšené, tak aby délky na nich měřené byly v určitém poměru ku délkám na skutečném předmětu. Obraz souvisí s předmětem na základě zákonu o podobnosti. Kreslí-li se obraz v rozměrech takových, že délce 1 m na předmětu odpovídá délka 1 cm, tedy jsou jednotlivé délky obrazu 100krát, jednotlivé plochy však 10000krát menší, než příslušné délky či plochy předmětu skutečného. V mapách katastrálních (dříve kreslených, než zavedeny byly u nás míry metrické) odpovídala délka 1″ délce 40°, ve skutečnosti byly tedy jednotlivé délky těchto plánů polohopisných 72×40, t. j. 2880krát a obrazy jednotlivých pozemků 2880^2 tedy 8294400krát menší než skutečné délky nebo pozemky.

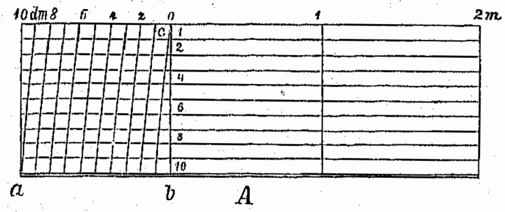
Při rýsování obrazů hotoví se měřítko tím spůsobem, že se stanoví napřed poměr, v němž mají býti jednotlivé rozměry zmenšeny (tedy velikost délky odpovídající jednotce délkové na předmětu).



Obr. 130.

Další zařízení takového měřítka jest z obr. 130. patrno. — Cvičení v užívání takového měřítka k měření délek v obrazu a ku kreslení obrazu předmětu, jehož rozměry byly měřeny.

Měřítka, na nichž lze přesně mimo decimetry též centimetry a přibližně i millimetry odměřiti, slují měřítka popříčná (transversalní, tisícinná).



Obr. 131.

Měřítko takové kreslí se spůsobem následujícím: Na přímku A (obr. 131.) se nanese několikráte délka ab, která odpovídati má 1 m ve skutečnosti. V a vztyčí se na A kolmice a na ni se nanese 10 stejných (jinak ale libovolně dlouhých dílů) až do bodu 10. Body, v nichž jest tato kolmice rozdělena, kreslí se rovnoběžky ku A a v bodech dříve na A stanovených vztyčí se kolmice. Délka $o10$ rozdělí se na 10 rovných dílů, z nichž délka každého odpovídá délce 1 dm ve skutečnosti. Bod 9 spojí se s bodem a, a ostatními body na $o10$ kreslí se ku $a9$ rovnoběžky. Délka $c1$ jest $\frac{1}{10}$ $b1$, tedy $c1$ odpovídá délce 1 cm ve skutečnosti.

Důkaz spočívá na podobnosti trojúhelníků.

Jak se výhodně takového měřítka upotřebí ku měření délek v daném obrazu a ku rýsování přímek určité délky?

9) Proměniti obdélník ve čtverec.

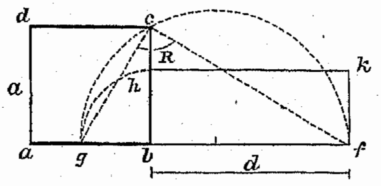
Je-li délka obdélníku d a šířka $š$ a neznámá strana čtverce x, tedy jest

$$x^2 = d \,.\, š \text{ aneb } d : x = x : š, \text{ t. j.}$$

strana čtverce jest střední měřicky srovnalostnou mezi délkou a šířkou obdélníku jemu rovného.

Sestrojení jest dle §. 107. 2. snadné.

10) **Proměniti čtverec v obdélník, jehož jeden rozměr jest dán.**



Obr. 132.

Je-li strana daného čtverce a, a je-li mimo to dána délka obdélníku d, a označí-li se neznámá šířka x, tedy jest

$$a^2 = dx \text{ t. j. } d:a = a:x$$
$$bf = d;\ bg = x.$$

Sestrojení jest z obr. 132. patrno.

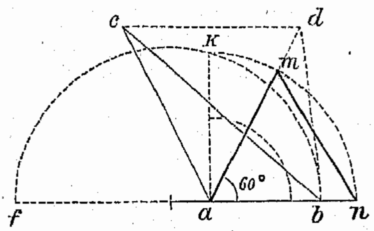
11) **Trojúhelník nerovnostranný proměniti za jiný rovnostranný.**

Daný trojúhelník abc promění se napřed za jiný abd, který má při a úhel 60^0. Označí-li se délky stran tohoto trojúhelníku abd, které tento úhel a svírají, písmeny a a b, a strana trojúhelníku rovnostranného, který se má sestrojiti, x, tedy jsou obsahy těchto trojúhelníků, poněvadž mají jeden úhel (60^0) stejně velký, přímo srovnalostny k součinu měrných čísel stran tento úhel svírajících. Trojúhelníky ty jsou však rovny, proto jest

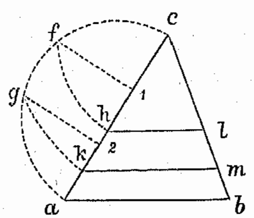
$$x^2 = a\,.\,b = ad\,.\,ab \text{ aneb}$$
$$ad : x = x : ab.$$

Další sestrojení jest z obr. 133. patrno.

$$af = ad,\ ak = x.$$



Obr. 133.



Obr. 134.

12) **Trojúhelník rozděliti příčkami ku základně rovnoběžnými na tři rovné díly.**

Předpokládá-li se, že jest úkol řešený, a že jsou tedy hl a km žádané přímky dělící, tu jsou obsahy podobných trojúhelníků abc a chl v poměru

$$\triangle\, abc : chl = ac^2 : ch^2$$
$$3 : 1 = ac^2 : ch^2$$
$$ch^2 = \frac{ac^2}{3} = ac \cdot \frac{ac}{3}, \text{ aneb}$$
$$ac : ch = ch : \frac{ac}{3}.$$

Podobně se dokáže, že $ac : ck = ck : \frac{2}{3}\, ac$.

Stanovení bodů h a k jest z obrazce 134. patrno.

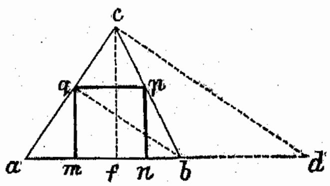
13) **Sestrojiti mnohoúhelník danému mnohoúhelníku podobný, jehož plocha jest určitou částí plochy mnohoúhelníku daného.**

Má-li se sestrojiti mnohoúhelník $a_1 b_1 c_1 d_1 f_1 \backsim abcdf$ tak, aby byla

$$\text{pl. } a_1 b_1 c_1 d_1 f_1 = \frac{1}{3} \text{ pl. } abcdf, \text{ tedy}$$
$$\text{pl. } abcdf : \text{pl. } a_1 b_1 c_1 d_1 f_1 = ab^2 : a_1 b_1{}^2$$
$$3 : 1 = ab^2 : a_1 b_1{}^2, \text{ z čehož plyne}$$
$$ab : a_1 b_1 = a_1 b_1 : \frac{ab}{3}.$$

Stanovení délky strany $a_1 b_1$ a rýsování mnohoúhelníku $a_1 b_1 c_1 d_1 f_1$ jest na základě této srovnalosti snadné.

14) **Do daného trojúhelníku vepsati čtverec, tak, aby jedna jeho strana padla do strany trojúhelníku a ostatní dva vrcholy ležely na druhých stranách daného trojúhelníku.**



Obr. 135.

Je-li (v obr. 135.) základna daného trojúhelníku $ab = z$, výška $= v$ a strana čtverce x, tedy plyne z podobnosti

$$\triangle\, abc \backsim cpq$$
$$z : v = x : v \text{ aneb}$$
$$z + v : z = v : x \text{ aneb}$$
$$z + v : v = z : x.$$

Sestrojení jest z obrazce, v němž jest $bd = cf = v$, patrno.

15) **Sestrojování výrazů algebraických.**

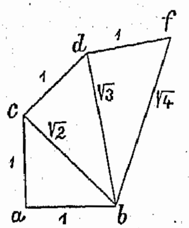
Výrazu algebraickému přisuzuje se často význam geometrický. Ve výrazu algebraickém mohou se totiž jednotlivé veličiny jako měrná čísla délek či obsahů plošných považovati; tak jsou na př. v jistém výrazu a, b, c měrná čísla dvou délek; znásobením měrných čísel dvou délek obdrží se měrné číslo plochy; značí tedy $a \,.\, b$, aneb m^2 obsah obdélníku či čtverce.

a) Má se sestrojiti x ve výrazu $x = \frac{2ab}{c}$; dány-li jsou délky a, b i c.

Z rovnice $x = \frac{2ab}{c}$ plyne $x : 2a = b : c$.

Sestrojení plyne z §. 107. 1.

b) Má-li se sestrojiti výraz $x^2 = 2ab$, tedy jest x střední měřicky srovnalostnou mezi $2a$ a b. Úkol tento pronésti se může též takto: Sestrojiti čtverec dvakráte tak velký, jako obdélník, jehož jeden rozměr jest a a druhý b.



Obr. 136.

c) Dána-li jest délka jednotky, sestrojiti hodnotu $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ atd.

Z obr. 136. jest patrno, že značí $\sqrt{2}$ délku přepony pravoúhlého trojúhelníku rovnoramenného, jehož odvěsna měří jednotku délkovou; $\sqrt{3}$ jest přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny měří 1 a $\sqrt{2}$ atd.

Úkoly ku cvičení.

1) Sestrojiti nad danou délkou jako stranou mnohoúhelník k danému mnohoúhelníku podobný.

2) Sestrojiti mnohoúhelník k danému mnohoúhelníku podobný, jehož strany jsou třikráte menší, než příslušné strany mnohoúhelníku daného.

3) Sestrojiti pětiúhelník k danému pětiúhelníku podobný, tak aby poměr délek jeho stran ku délkám stran pětiúhelníku daného byl 2 : 5.

4) Uvnitř daného trojúhelníku vyrýsovati trojúhelník jemu podobný tak, aby strany jeho byly 3kráte menší než strany trojúhelníku daného a aby stály kolmo na stejnolehlých stranách daného trojúhelníku.

5) Sestrojiti sedmiúhelník danému sedmiúhelníku podobný, tak aby jeho plocha byla 3kráte menší než plocha sedmiúhelníku daného.

6) Sestrojiti trojúhelník pravoúhlý, dány-li jsou oba úseky výšky na přeponě tvořené.

7) Sestrojiti trojúhelník pravoúhlý, dána-li jest délka přepony a poměr (2 : 3) obou odvěsen.

8) Sestrojiti čtverec, jehož plocha jest $\frac{3}{5}$ *plochy čtverce daného.*

9) Sestrojiti trojúhelník rovnostranný, který jest pětkráte tak velký, jako daný trojúhelník rovnostranný.

10) Nad úhlopříčnou daného čtverce sestrojiti obdélník téže velikosti jako daný čtverec.

11) Danou délku rozděliti na čtyry díly v poměru a) 1 : 3 : 6 : 7, b) 2 : 3 : 4 : 5.

12) Každou z daných pěti délek rozděliti na 9 rovných dílů.

13) Obraz daného předmětu (na př. pomníku) devětkráte (co do plochy) zmenšiti použitím úhlu redukčního.

14) Obraz daného předmětu zvětšiti v poměru 2 : 3 (na zákl. §. 107., 7.).

15) Daný obraz pozemku 4kráte zmenšiti použitím síti čtvercové.

16) Rýsovati obrazy předmětů (na př. školní skříně) použitím měřítka příčného.

17) Stanoviti dvě délky, dán-li jest jejich součet a mimo to jejich střední měřicky srovnalostná.

18) Proměniti trojúhelník pravoúhlý na jiný rovnostranný.

19) Proměniti trojúhelník rovnostranný na čtverec, aniž by se dříve proměnil v obdélník.

20) Rozděliti trojúhelník příčkami k jedné straně rovnoběžnými na 2, 4, 5, 6 rovných částí.

21) Rozděliti trojúhelník příčkami ku jedné straně rovnoběžnými na dvě části v poměru a) 3 : 4, b) 2 : 3, c) 1 : 4.

22) Rozděliti trojúhelník příčkami ku jedné straně rovnoběžnými na 3 části v poměru a) 2 : 3 : 4, b) 2 : 4 : 5.

23) Rozděliti lichoběžník příčkou ku základnám rovnoběžnou na 2 rovné díly.

24) Rozděliti lichoběžník příčkami ku základně rovnoběžnými na 3, 4, 5 rovných částí.

25) Daný lichoběžník rozděliti příčkami ku základnám rovnoběžnými na dvě části v poměru a) 2 : 3, b) 3 : 5.

26) Dán jest čtverec a délka a; rozděliti tuto délku na dva díly tak, aby obdélník nad nimi sestrojený byl tak velký jako daný čtverec.

27) Nad úhlopříčnou obdélníku sestrojiti obdélník jiný, jemu rovný.

28) Do daného trojúhelníku vepsati obdélník, jehož délka jest dána (menší než základna daného trojúhelníku).

29) V následujících výrazech sestrojiti délku x:

$$x = \frac{m \cdot n}{p}\,;\; x^2 = 4a^2 + 9b^2\,;\; x = \sqrt{g \cdot h}\,;\; x^2 = ab + cd\,;$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{c}\,;\; x^2 = 5a^2.$$

Udati geometrický význam těchto rovnic.

30) Dána-li jest délka jednotky, sestrojiti

a) $5\sqrt{2}$; *b)* $8\sqrt{3}$; *c)* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; *d)* $\sqrt{5}$.

Část šestá.

O kružnici a kruhu.

1. Střed kružnice.

§. 108. 1) **Kružnice jest určena středem a poloměrem svým**; délkou poloměru stanovena jest totiž velikosť a polohou středu poloha její.

2) **Vzájemná vzdálenosť jakéhokoli bodu ke kružnici závisí na vzdálenosti jeho od středu.** Vzdálenosť kteréhokoli bodu, uvnitř kružnice se nalézajícího, k této kružnici, jest menší a vzdálenosť kteréhokoli bodu vně kružnice jest větší než poloměr a naopak.

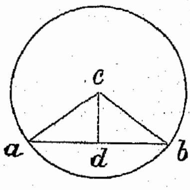
3) Bod leží buď na kružnici, buď vnitř kružnice, buď vně kružnice, je-li vzdálenosť od středu buď rovna, buď menší, buď větší poloměru.

4) **Průměrem protíná se kružnice (kruh) na dvě sobě rovné části čili na dvě polokružnice (dva polokruhy).**

Otočí-li se totiž jedna kolem průměru, splyne s částí druhou, poněvadž všechny poloměry jsou si rovny.

Poloha středu k tětivě.

§. 109. Spojí-li se koncové body a a b tětivy ab (obr. 137.) se středobodem, vznikne rovnoramenný trojúhelník abc. Kreslí-li se výška cd v tomto trojúhelníku, plynou na základě §. 64. z toho následující věty:



Obr. 137.

1) **Přímá linie, rozpolující úhel středový, stojí kolmo na tětivě (uprostřed).**

2) **Přímá linie, spojující střed tětivy se středem kružnice, rozpoluje úhel středový a stojí na tětivě kolmo.**

3) **Kolmice, spuštěná se středu kružnice na tětivu, rozpoluje úhel středový, tětivu a tudíž i příslušný oblouk.**

4) **Kterýkoli bod kolmice, uprostřed na tětivu vztyčené, má od obou krajních bodů tětivy rovné vzdálenosti**; z toho následuje:

5) **Střed kruhu (kružnice) nemůže ležeti mimo kolmici uprostřed některé tětivy jeho vztyčenou.**

Ze 4. a 5. věty následuje:

Geometrické místo pro středy všech kružnic, které dva dané body a a b obsahují, jest kolmice, v prostředku přímé linie tyto body spojující, vztyčená.

Na větách těchto zakládá se řešení následujících úkolů.

α) **Stanoviti střed dané kružnice neb daného oblouku kružnicového.**

Má-li se stanoviti střed kružnice, nakreslíme dvě tětivy: kolmice, v středobodech těchto tětiv vztyčené, jsou dvě geometrická místa pro střed: jejich průsečík jest tedy středobod žádaný. — Dána-li jest celá kružnice, postačí jedna tětiva a uprostřed ní vztyčená kolmice; prodlouží-li se tato kolmice až kružnici na obou stranách protne, obdrží se průměr. Středobod průměru jest středobodem kružnice.

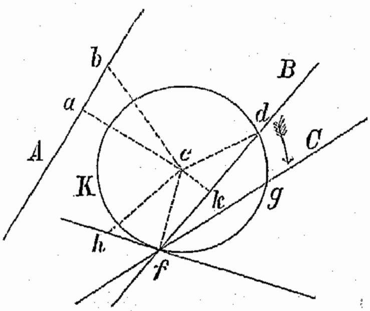
β) **Rýsovati kružnici, která tři dané body** *abc* **obsahuje.** Spojením daných tří bodů povstane trojúhelník *abc;* kolmice, uprostřed stran tohoto trojúhelníku vztyčené, protínají se (dle §. 71. 1.) v jediném bodu, který má ode všech vrcholů trojúhelníku tutéž vzdálenosť; jest tedy třeba pouze na dvě z těchto uprostřed vztyčiti kolmice; průsečík těchto kolmic jest střed a vzdálenosť středu od kteréhokoli z daných bodů, poloměr žádané kružnice.

Omezení. Aby se tyto dvě kolmice, jako místa geometrická pro střed, mohly sestrojiti, jest nutno, aby bylo lze spojením daných bodů přímkami, obdržeti trojúhelník, což jest vždy možno, neleží-li dané tři body *abc* v jediné přímce. — Průsečík těchto tří kolmic jest jeden ze zvláštních bodů trojúhelníků. Tedy jest pouze jediný bod možný, který od daných tří bodů stejnou má vzdálenosť. Platí tudíž věta: **Třemi danými body (trojúhelníkem) jest kružnice dokonale určena**; mimo to plyne věta:

Dvě kružnice mohou se pouze ve dvou bodech protínati. Kdyby měly tři body společné, sjednotily by se v celé své rozsáhlosti.

2. Kružnice ve spojení s přímou linií.

§. 110. I) Nalézá-li se přímá linie v rovině kružnice, má s kružnicí body společné jako linie *B* (obr. 138.), aneb s ní společných bodů nemá jako linie *A*. Přímá linie *B*, mající s kružnicí dva body společné, sluje **sečna**; tětiva *df* jest pouze omezená část sečny *B*. **Tětiva** *df* **napíná oblouk kružnice** a to vždy menší, kdykoli by jinak výslovně podotknuto nebylo; zde tedy oblouk *dgf*. Část kruhu omezená dvěma poloměry a obloukem sluje **výseč** a část, omezená tětivou a obloukem příslušným, **úseč kruhu**.



Obr. 138.

V rovnoramenném trojúhelníku *cdf* (obr. 138.) jest výška *ck* udávající vzdálenosť sečny od středu, menší než rameno *cd*, tedy i menší než poloměr kružnice *k*. **Vzdálenosť sečny ode středu jest vždy menší než poloměr kružnice.**

Naopak může se říci: **Každá přímá linie, jejíž vzdálenosť ode středu kružnice jest menší než poloměr, jest sečnou této kružnice.**

Je-li totiž vzdálenosť *ck* linie *B* od středu kružnice *k* menší než poloměr této kružnice, leží bod *k* (§. 108.) vnitř kružnice.

Ze středu *c* lze dle §. 51., 3, b. ku linii *B* pouze dvě kosé délky vésti, které jsou rovny poloměru. Stopy těchto délek na linii *B* jsou průsečíky *d* a *f* kružnice *k* a přímé linie *B*; má tedy linie *B* s kružnicí *K* dva body společné, t. j. ona jest sečnou.

II. Předpokládá-li se, že se sečna *B* kolem jednoho svého průsečíku s kružnicí, na př. kolem bodu *f*, otáčí směrem naznačeným šípem, mění druhý její průsečík *d* s kružnicí při tom svou polohu; on se pevnému průsečíku *f* přibližuje. Při tomto také délka tětivy stále se zmenšuje. Přiblíží-li se konečně hybný průsečík průsečíku *f* nekonečně blízko, stane se délka tětivy nekonečně malou a tudíž i **sečna tečnou kružnice** *K* **v bodu** *a* **jakožto bodu dotyčném**. Tečna má s kružnicí dva body společné, jež jsou však nekonečně sobě blízky. Body takové slují **soumezné** a nekonečně malá část kružnice mezi dvěma soumeznými body obsažená, sluje prvek kružnice. **Tečna jest tedy přímá linie, která má s kružnicí prvek společný.** Prvek kružnici a tečně společný slove bod dotyčný. Prvek tečně a kružnici společný považuje se při geometrických vyšetřováních za jediný bod, proto tedy bod dotyčný. Poněvadž kterýkoli bod tečny (na př. h) vyjma bod dotyčný mimo kružnici ležeti musí, jest vzdálenosť bodu dotyčného od středu nejkratší vzdáleností středu c od tečny T; tudíž jest $cf \perp T$, t. j.:

1) **Vzdálenosť tečny od středu rovná se poloměru.**

2) **Poloměr k bodu dotyčnému příslušný, stojí na tečně kolmo.**

Jelikož jest však bod dotyčný jako prvek čásť kružnice i tečny, může se též říci:

3) **Každý poloměr stojí na kružnici kolmo.**

Naopak platí věta:

4) **Každá přímá linie, jejíž vzdálenosť od středu rovna jest poloměru, jest tečna.**

Důkaz zůstavuje se čtenáři.

5) **V bodu kružnice lze k této pouze jedinou tečnu sestrojiti.** (Následek věty 2.)

Z těchto vět pochodí:

a) Místo geometrické pro středy kružnic, které určitým poloměrem opsány jsouce, mají se dotýkati přímé linie dané, jest přímá linie ve vzdálenosti poloměru daného k dané linii rovnoběžně vedená.

b) Geometrické místo pro středy všech kružnic, které se dané přímé linie v daném bodě dotýkají, jest kolmice v tomto bodě na danou přímou linii vztyčená.

III. **Vzdálenosť přímé linie A, která s kružnicí K společných bodů nemá, ode středu c jest větší než poloměr.**

Každá linie, jejíž kolmá vzdálenosť od středu jest větší než poloměr, leží mimo kružnici.

§. 111. Některé věty o tětivách.

1) **V téže kružnici aneb v kružnicích jednostejných přísluší** *a)* **ku stejným tětivám stejné vzdálenosti;** *b)* **k delším tětivám kratší vzdálenosti ode středu.**

a) Buď v obr. 139. $ab = df$ a $ch \perp ab$, $ck \perp df$. Ze shodnosti $\triangle\, abc \cong cdf$ plyne, že $ch = ck$.

Buďtež ab a ag tětivy kružnice K, z nichž

$$ag > ab.$$

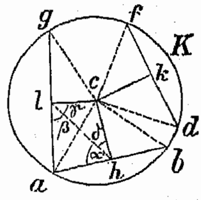
Jsou-li h a l středy těchto tětiv a kreslí-li se přímka hl, jest ve

$\triangle\, ahl$ $al > ah$, tedy i

$\sphericalangle\, \alpha > \beta$ a

$\sphericalangle\, \delta < \gamma$; a proto

v $\triangle\, chl$ $cl < ch$.



Obr. 139.

2) Z těchto dvou vět jdou věty převrácené:

V téže kružnici aneb v kružnicích jednostejných přísluší *a)* ku stejným vzdálenostem ode středu stejné tětivy, *b)* k delším však vzdálenostem tětivy kratší.

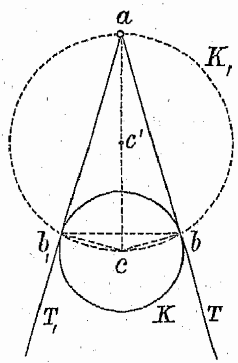
Důkaz nepřímý jest zůstaven čtenáři.

Následek: **Průměr jest nejdelší tětivou kružnice, neboť jeho vzdálenosť od středu jest nejkratší** ($= o$).

§. 112. Některé úkoly a věty o tečnách.

1) **Sestrojiti k dané kružnici tečny z bodu vně kružnice daného vycházející.**

Rozbor. Budiž c (obr. 140.) středem dané kružnice, k níž se z daného bodu a tečna vésti má. Je-li linie T žádanou tečnou a b bod dotyčný, bude celé sestrojení záležeti na stanovení polohy bodu b. Jedním místem geometrickým pro tento bod b jest daná kružnice K. Kreslí-li se poloměr cb, stojí tento na tečně T v bodu b kolmo, jest tedy úhel $abc = R$. Poněvadž ramena tohoto úhlu pravého krajními body délky ac procházejí, jest (§. 48. Následek) kružnice K_1 nad ac jako průměrem opsaná, druhým místem geometrickým pro bod b.



Obr. 140.

Sestrojení. Kreslí se přímka ac a opíše se nad ní jako průměrem kružnice; společné body b a b_1 této kružnice a kružnice dané jsou body dotyčné: spojením bodů dotyčných s bodem daným obdrží se žádané tečny.

Determinace. Poněvadž kružnice K_1 a K dva body společné mají, obdrží se dva body dotyčné, tedy i dvě tečny. Kdyby ležel bod a vnitř kružnice K, neprotínaly by se kružnice K a K_1 a neobdrželo by se tudíž žádných tečen. — Kdyby bod a ležel na obvodě kružnice, byl by jen jediný bod oběma kružnicím společný, tudíž jen jeden bod dotyčný a jedna tečna.

2) **Dvě tečny z téhož bodu mimo kružnici ležícího ke kružnici vedené, jsou si rovny.**

V obr. 140. jsou pravoúhlé trojúhelníky abc a ab_1c shodny, proto též

$$ab_1 = ab.$$

3) Kreslí-li se tětiva bb_1 (obr. 140.), plyne z rovnoramenných trojúhelníků b_1ab a bcb, které základnu společnou bb_1 mají, následující:

a) **Přímá linie, která spojuje průsečík dvou tečen kružnice se středem této kružnice, půlí α) úhel těmito tečnami sevřený, β) oblouk a tětivu bb_1 a stojí mimo to na této tětivě kolmo.**

Následek. *Geometrické místo pro středy všech kružnic, které se dotýkají dvou daných přímých linií, jest přímá linie jich úhel půlící. Jsou-li však dané přímé linie rovnoběžny, jest geometrickým místem pro středy všech kružnic, které se jich dotýkají, přímá linie s nimi rovnoběžná, jež jest vedena prostředkem jejich vzdálenosti od sebe.*

§. 113. Úkoly k rýsování.

1) Kol daného tupoúhlého trojúhelníku obepsati kružnici.

2) Rýsovati kružnici, která dva dané body obsahuje a jejíž střed na dané linii leží.

3) Bodem vnitř kružnice ležícím rýsovati nejkratší tětivu.

(Tato tětiva stojí na poloměru, který daný bod obsahuje, kolmo, neb každá jiná tětiva má ode středu menší vzdálenosť.)

4) V dané kružnici rýsovati tětivu určité délky, která k dané tětivě jest rovnoběžna.

(Na danou tětivu spustí se se středu kolmice a na každou stranu od její stopy nanesou se délky rovné polovině délky žádané tětivy. V koncových bodech těchto délek na danou tětivu vztyčené kolmice stanoví na dané kružnici krajní body žádané tětivy.)

5) *Daný oblouk kružnice rozpůliti.*

6) *Rýsovati kružnici, jejíž střed jest dán tak, aby tato kružnice na dané přímce stanovila tětivu dané délky.*

(Stopa kolmice s daného středu na danou přímku spuštěné stanoví střed tětivy.)

7) *Daným poloměrem rýsovati kružnici, která dva body dané obsahuje.*

8) *Daným poloměrem rýsovati kružnici, která se ramen daného úhlu dotýká.*

9) *Daným poloměrem rýsovati kružnici, která se dotýká dvou různoběžek daných, jež se na nákresně neprotínají.*

10) *Daným poloměrem rýsovati kružnici, která se ramen daného úhlu dotýká a daný bod obsahuje.*

11) *Rýsovati kružnici, jež se ramen daného úhlu dotýká a bod daný, který na přímce půlící úhel daný leží, obsahuje.*

12) *Rýsovati poloměrem daným kružnici, která se dané přímky dotýká a mimo to daný bod obsahuje.*

13) *Vyrýsovati daným poloměrem kružnici, jež se dotýká dané přímky a jejíž střed má od jiné určité přímky danou vzdálenosť.*

14) *Rýsovati daným poloměrem kružnici, která se dané přímky dotýká a na druhé dané přímce tětivu určité délky stanoví.*

(Druhé geometrické místo pro střed žádané kružnice jest přímka k druhé dané přímce rovnoběžně vedená vrcholem rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna na této druhé přímce ležící má délku dané tětivy).

15) *Vyrýsovati kružnici, jež se dané přímky v daném bodu dotýká a mimo danou přímku ležící daný bod obsahuje.*

16) *Vyrýsovati poloměrem daným kružnici, která se dané přímky v daném bodu dotýká.*

17) *Vyrýsovati kružnici, která se dané přímky dotýká a jejíž střed má od jiné dané přímky určitou vzdálenosť.*

18) *Rýsovati kružnici, která se tří daných přímek dotýká. (Přímky, rozpolující úhly daných přímek, jsou geometrická místa pro střed).*

19) *Rýsovati kružnici, jež se dvou daných přímek dotýká, a s jedné z nich v bodě daném.*

20) Rýsovati kružnici dotýkající se dvou přímek daných, jejíž střed má od třetí přímky určitou vzdálenosť.

21) Rýsovati kružnici, jež se všech tří stran daného trojúhelníku dotýká.

(Do trojúhelníku vepsati kružnici.)

22) Rýsovati kružnici, jež se daných tří přímek dotýká, z nichž dvě jsou rovnoběžny.

23) K dané kružnici rýsovati tečny k dané přímce rovnoběžné.

24) K dané kružnici rýsovati tečny stojící kolmo na dané přímce.

(Poloměry příslušné k bodům dotyčným jsou s danou přímkou rovnoběžny.)

25) K dané kružnici rýsovati tečny, které s danou přímkou daný úhel (na př. 45°, 60°, 30°) svírají.

(Jsou 4 tečny možny.)

3. O úhlech v kruhu.

§. 114. Při úhlech, jež se dají rýsovati v kruhu, hledí se kde jich vrchol leží.

Co do této polohy rozeznává se hlavně:

a) Úhel středový, jehož vrchol jest ve středu kruhu a jehož ramena jsou poloměry.

b) Úhel obvodový, jehož vrchol leží na obvodu kruhu: ramena jeho jsou tětivy.

V obr. 140. jsou ∢ α a ∢ β úhly obvodové a ∢ γ úhel středový.

Ku každému středovému i obvodovému úhlu náleží oblouk, který rameny jeho jest omezen, a praví se, že onen úhel na tomto oblouku stojí; ∢ γ stojí tedy na tomtéž oblouku df, na němž stojí ∢ α.

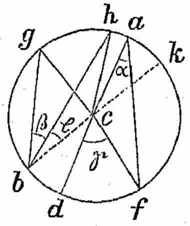
1) **Měrou středového úhlu jest oblouk, na němž stojí** (§. 31.).

2) **Úhel obvodový rovná se polovině úhlu středového, s kterým stojí na témž oblouku.**

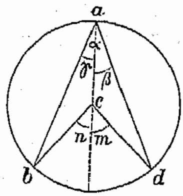
Při důkazu této věty rozeznávají se tři případy:

α) Jedno rameno obvodového úhlu α (obr. 141.) obsahuje střed. Středový úhel γ stojí s obvodovým úhlem α

na témž oblouku df. Jako vnější úhel rovnoramenného trojúhelníku acf jest $\sphericalangle\, \gamma = 2\alpha$ aneb $\sphericalangle\, \alpha = \frac{1}{2}\, \gamma$.



Obr. 141.



Obr. 142.

β) Leží-li střed kruhu (obr. 142.) mezi rameny úhlu obvodového α a kreslí-li se průměr příslušný k vrcholu tohoto úhlu α, jest

$$\sphericalangle\, \gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle\, n$$

$$\sphericalangle\, \beta = \frac{1}{2} \sphericalangle\, m$$

$$\sphericalangle\, \gamma + \sphericalangle\, \beta = \frac{1}{2}\, (m + n), \text{ tudíž}$$

$$\sphericalangle\, \alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle\, bcd.$$

γ) Leží-li střed kruhu mimo ramena úhlu obvodového β (obr. 141.) a kreslí-li se úhel středový gch, stojící na témže oblouku, a mimo to ještě průměr bk, jest

$$\sphericalangle\, \beta + \varphi = \frac{1}{2} \sphericalangle\, gck,$$

$$\sphericalangle\, \varphi = \frac{1}{2} \sphericalangle\, hck, \text{ proto}$$

$$\sphericalangle\, \beta = \frac{1}{2}\, (\sphericalangle\, gck - hck) = \frac{1}{2} \sphericalangle\, gch.$$

O tom, že středový úhel má za míru oblouk, na němž stojí, lze říci:

Mírou úhlu obvodového jest polovička oblouku, na němž stojí.

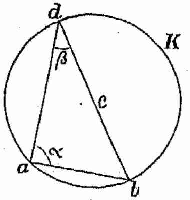
Následky: *a)* **Všecky úhly obvodové, jež v témže kruhu, aneb ve kruzích jednostejných, stojí na společném nebo stejném oblouku, jsou sobě rovny.**

b) **K stejným úhlům obvodovým náleží v témž kruhu nebo v kruzích jednostejných rovné oblouky.**

c) **Obvodový úhel, stojící na polokružnici (obvodový úhel v polokruhu), jest pravý.**

Úkol. **Sestrojiti nad danou tětivou kruh, jehož na obvodě příslušný úhel má určitou velikosť.**

Rozbor. Buď (obr. 143.) K kruh žádaný, c jeho střed a ab daná tětiva. Kreslí-li se průměr bd a tětiva ad, jest $\sphericalangle\ \alpha = R$ a $\sphericalangle\ \beta$ úhlem žádaným. Tím jest úkol převeden na úkol jiný, t. j. aby se sestrojil trojúhelník pravoúhlý, dána-li jest odvěsna (ab) a jí protější úhel (β).



Obr. 143.

Sestrojení a důkaz zůstavuje se čtenáři.

Následek. *Geometrické místo pro vrcholy všech úhlů určité velikosti, jichž ramena probíhají dvěma body danými, jest kružnice nad délkou danými body stanovenou, jako tětivou opsána, v níž úhel na obvodě rovná se úhlu danému.*

§. 115. **Úhel, jejž svírá tečna s tětivou, rovná se úhlu na obvodě v protější úseči kruhu ležícímu.**

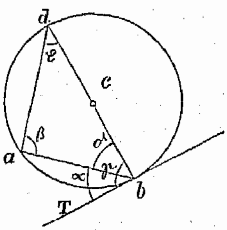
Důkaz. Buď ab (obr. 144.) tětiva kruhu, c jeho střed a T tečna. Kreslí-li se průměr bd a tětiva ad, jest

$$\sphericalangle\ \beta = R \ (\S.\ 114.,\ 2.,\ c.) \text{ a}$$
$$\sphericalangle\ \gamma = R \ (\S.\ 110.\ 2.), \text{ tudíž}$$
$$\sphericalangle\ \beta = \gamma = \delta + \alpha.$$

V pravoúhlém $\triangle\ abd$ se

$$\sphericalangle\ \beta = \delta + \varphi,$$

proto též $\sphericalangle\ \alpha = \varphi$.



Obr. 144.

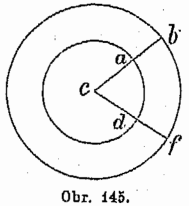
4. Dvě kružnice.

(Dva kruhy.)

§. 116. Dvě nestejné, v téže rovině jsoucí kružnice slovou, mají-li společný středový bod, soustřednými.

Úsečka ab, rovnající se rozdílu poloměru obou kružnic, určuje vzdálenosť těchto kružnic. Protože jest tato vzdálenosť všude stejna, praví se, že kružnice soustředné jsou rovnoběžny.

Část roviny, dvěma soustřednými kružnicemi omezená, slove m e z i k r u ž í. Vzdálenost kružnic mezikruží omezujících udává š í ř k u m e z i k r u ž í.



Obr. 145.

Oblouky *ad* a *bf*, které k témuž úhlu středovému přísluší, jsou s t e j n o l e h l é.

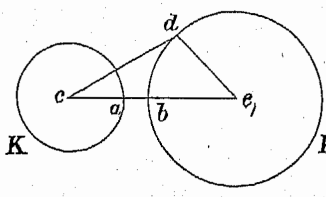
§. 117. Mají-li kružnice středy různé, slovou v ý s t ř e d n ý m i (excentrické) a přímka, od jednoho středu ke druhému vedená, jmenuje se o b o j s t ř e d n á (centrála).

Výstředné kružnice buď nemají bodů společných — neprotínají se — aneb mají dva společné body soumezné — dotýkají se — aneb mají společné dva body nesoumezné — protínají se.

Kružnice výstředné, které mají dva společné body soumezné, dotýkají se buď vnitř anebo vně, dle toho, leží-li jedna kružnice vnitř kružnice druhé čili nic.

§. 118. Vzájemná poloha dvou kružnic jest závisla na poměrné velikosti centrály a poloměrů.

P o u č k y. **Kdykoli jest centrála dvou kružnic delší než součet poloměrů, leží jedna mimo druhou.**



Obr. 146.

D ů k a z. Buďtež c a c_1 (obrazec 146.) středy dvou kružnic K a K_1, v nichž součet poloměrů r a r_1 kratší jest než centrála cc_1, tedy $cc > r + r_1$. Protíná-li kružnice K centrálu v a a kružnice K_1 v b, jest

$cc_1 > ca + c_1b$; aneb

$ac_1 - c_1b > ca$, pročež

$cb > ca$; bod a leží tedy mimo kružnici K_1. Totéž platí o každém jiném bodu, na př. d kružnice K_1, neboť v trojúhelníku cdc_1 jest

$cd > cc - c_1d_1$ aneb

$cd > cc_1 - c_1b$, t. j.

$cd > cb$, proto jest

$cd > r$; bod d leží tedy mimo kružnici K.

2) **Kdykoli jest centrála dvou kružnic rovna součtu poloměrů, dotýkají se kružnice vně, a dotyčný jich bod leží na centrále.**

Buďtež (obr. 147.) c a c_1 středy, r a r_1 poloměry dvou kružnic K a K_1 a $cc_1 = r + r_1$.

Protíná-li kružnice K centrálu cc_1 v a, jest $ca = r$. Vzhledem k předpokládání jest tudíž

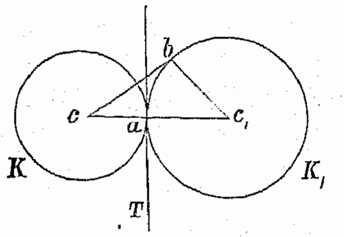
$$cc_1 = r_1 + ca, \text{ pročež i}$$
$$ac_1 = r.$$

Bod a jest proto oběma kružnicím společný. Každý jiný bod (na př. b) kružnice K_1 musí však ležeti mimo kružnici K; neboť

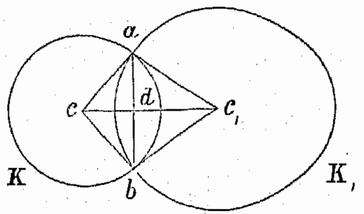
$$cb > cc_1 - bc_1 \text{ aneb}$$
$$cb > cc_1 - ac_1, \text{ t. j.}$$
$$cb > r.$$

Kružnice K a K_1 mají pouze bod a společný, jinak leží jedna kružnice zcela mimo druhou, dotýkají se tudíž vně.

Poněvadž jest ca poloměrem jedné a ca_1 poloměrem druhé kružnice, stojí společná oběma kružnicím tečna v bodu a na centrále kolmo.



Obr. 147.



Obr. 148.

3) **Je-li centrála menší než součet, ale větší než rozdíl poloměrů, protínají se kružnice ve dvou bodech.**

Buďtež (obr. 148) r a r_1 poloměry dvou kružnic K a K_1 a $cc_1 < r + r_1$ a $cc_1 > r_1 - r$. Při této podmínce lze nad centrálou cc_1 sestrojiti shodné trojúhelníky cac_1 a cbc_1, jichž strany ostatní mají délku obou poloměrů r a r_1, totiž

$$ca = cb = r \text{ a } c_1a = c_1b = r_1.$$

Body a a b jsou oběma kružnicím společny; t. j. kružnice K a K_1 protínají se v těchto dvou bodech. ab jest oběma kružnicím společná tětiva.

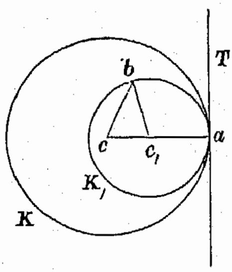
Protínají-li se dvě kružnice, stojí centrála kolmo na společné tětivě a půlí tuto tětivu, jakož i příslušné úhly středové v obou kružnicích.

4) **Rovná-li se centrála rozdílu poloměrů, dotýkají se kružnice vnitř.**

Budtež (obr. 149.) c a c_1 středy, r a r_1 poloměry dvou kružnic

K a K_1 a $cc_1 = r - r_1$.

Prodlouží-li se centrála cc_1 za c_1 a učiní-li se $ca = r$, tedy jest $cc_1 = ca - r$, a tudíž $cc_1 = c_1a = r_1$, protož jest a oběma kružnicím bod společný.



Obr. 149.

Každý jiný bod, na př. b, kružnice K_1 leží vnitř kružnice K, jelikož jest

$cb < cc_1 + c_1b$, aneb

$cb < cc_1 + c_1a$, tudíž jest

$cb < ca$; obě kružnice dotýkají se vnitř. Společná oběma kružnicím tečna T stojí na prodloužené centrále kolmo.

5) **Kdykoli jest centrála dvou kružnic menší než rozdíl poloměrů, leží jedna kružnice úplně vnitř druhé.**

Důkaz zůstavuje se čtenáři.

Následky těchto vět. *a) Geometrické místo pro středy všech kružnic, které mají opsány býti poloměrem daným a dotýkati se vně (vnitř) kružnice dané, jest kružnice soustředná, jejíž poloměr se rovná součtu (rozdílu) obou daných poloměrů (t. j. jak daného tak hledaného).*

b) Geometrické místo pro středy všech kružnic, jež dotýkati se mají dané kružnice v bodě daném, jest přímá linie vedená bodem dotyčným i středem dané kružnice.

§. 119. 1) Dva libovolné kruhy jsou si vždy podobny a mohou se v kterékoli vzájemné poloze své za stejnolehlé považovati, poněvadž jest každý z nich ve všech částech svých jednostejný. Jako ku dvěma podobným mnohoúhelníkům, náleží též ku dvěma kruhům zvláštní bod podobnosti.

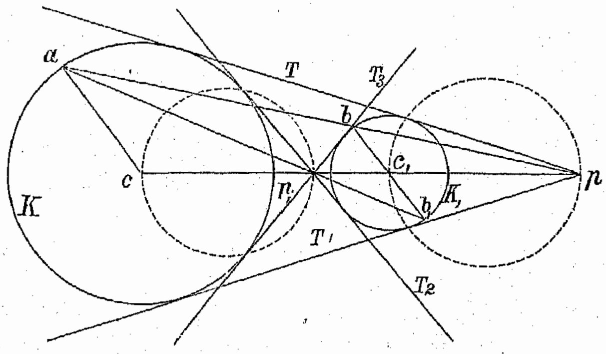
K stanovení bodu podobnosti dvou kruhů třeba rýsovati pouze dva paprsky stejnolehlé, t. j. takové, které stejnolehlé body v obou kruzích obsahují. Jedním takovýmto paprskem jest centrála (aneb centrála prodloužená), poněvadž jsou středy kruhů body stejnolehlé. Protože jsou ve mnohoúhelnících podobných, které se v poloze stejnolehlé nalézají, přímky stejnolehlé, stejnolehlými body procházející rovnoběžny, budou též poloměry běhu libovolného v obou kružnicích stejnolehlými a tudíž i krajními jich body stanoven paprsek, na němž bod podobnosti leží.

Jsou-li (obr. 149.) c a c_1 středy, r a r_1 poloměry dvou kružnic K a K_1, leží bod jich podobnosti

a) na prodloužené centrále cc;

b) na paprsku ab, jenž krajní body dvou poloměrů rovnoběžných ca a $c_1 b$ běhu libovolného spojuje. Bod p jest jedním bodem podobnosti obou kruhů.

Jsou-li ca a $c_1 b_1$ dva poloměry téhož běhu, ale opačného směru, jest též ab_1 geometrickým místem pro bod podobnosti, a tudíž p_1 druhý bod podobnosti obou kruhů. p sluje vnějším a p_1 vnitřním bodem podobnosti obou kruhů. Paprsky svazku, jehož střed jest jeden z obou bodů podobnosti, obsahují na obou kruzích body stejnolehlé; má-li totiž přímka, některým bodem podobnosti



Obr. 150.

vedená, s kruhem jedním dva body společné, protíná i druhý kruh ve dvou bodech, je-li však tečnou k jednomu kruhu, jest i k druhému tečnou. Společné oběma kruhům tečny procházejí bodem podobnosti. Poněvadž každým mimo kružnici ležícím bodem ke kružnici dvě tečny rýsovati lze, a tudíž každým bodem podobnosti dvě k oběma kruhům společné tečny procházejí, proto mají dva kruhy celkem čtyry tečny společné.

2) **Ku dvěma kruhům (kružnicím) rýsovati tečny společné.**

Stanoví se oba body podobnosti kruhů daných a každým bodem podobnosti kreslí se tečny k jednomu z daných kruhů (na př. ke kruhu K_1, obr. 150.), tyto tečny jsou žádané tečny společné.

§. 120. Úkoly k rýsování.

1) **Danými poloměry r, r_1 a r_2 rýsovati tři kružnice K, K_1 a K_2, jež se vzájemně dotýkají.**

Rozbor. Jsou-li žádané kružnice K, K_1 a K_2 rýsovány, závisí sestrojení na stanovení polohy středu c, c_1 a c_2, které jsou vrcholy trojúhelníku cc_1c_2. Strany tohoto trojúhelníku jsou

$$cc_1 = r + r_1,\ cc_2 = r + r_2,\ c_1c_2 = r_1 + r_2.$$

2) *Rýsovati daným poloměrem kružnici, která se dotýká dvou kružnic daných.* (§. 118. Následek *a*.)

3) *Rýsovati daným poloměrem kružnici, jež se dotýká dané kružnice a dané přímky.*

4) *Vyrýsovati daným poloměrem kružnici, která daný bod obsahuje a mimo to se dotýká dané kružnice.*

5) *Kolem tří daných bodů jako středů opsati kružnice, jež se vně dotýkají.*

(Body dotyčné kružnice vepsané do trojúhelníku stanoveného středy danými jsou zároveň body dotyčnými žádaných kružnic).

6) *Rýsovati kružnici dotýkající se kružnice dané v daném bodu, která mimo to daný bod vnitř dané kružnice ležící obsahuje.*

7) *Kolem daného bodu jako středu rýsovati dvě kružnice, z nichž se jedna dané kružnice vně, druhá vnitř dotýká.*

8) *Rýsovati kružnici, která daný bod obsahuje a jíž daná kružnice se dotýká.*

(Možny jsou dvě kružnice, jedna z nich dotýká se vně, druhá vnitř.)

9) *Dány jsou dvě kružnice, z nichž leží jedna zcela mimo druhou, rýsovati kružnice, jichž dané kružnice se buď vně buď vnitř dotýkají.*

(4 kružnice se mají rýsovati.)

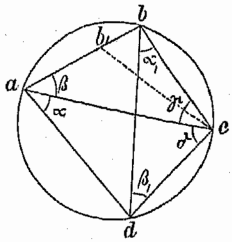
5. Kruh a mnohoúhelník.

§. 121. Mnohoúhelník, jehož vrcholy leží v obvodu kruhu, sluje do kruhu vepsaný, kruh pak jest o mnohoúhelník opsán.

Mnohoúhelník do kruhu vepsaný sluje též mnohoúhelníkem z tětiv, protože jsou strany jeho tětivami kruhu.

Mnohoúhelník, jehož strany se dotýkají téhož kruhu, sluje mnohoúhelníkem z tečen aneb mnohoúhelníkem o daný kruh opsaným, kruh teň slove do mnohoúhelníku vepsaným.

§. 122. **V každém čtyřúhelníku z tětiv jsou součty protilehlých úhlů sobě rovny a každý součet rovná se dvěma pravým.**



Obr. 151.

Důkaz. Rýsují-li se ve čtyřúhelníku z tětiv $abcd$ (obr. 151.) úhlopříčny bd a ac, tedy jest $\sphericalangle\ \alpha = \alpha_1$ a $\sphericalangle\ \beta = \beta_1$, jako úhly obvodové v kruhu nad týmž obloukem.

V $\triangle\ bdc$ jest

$$\sphericalangle\ \alpha_1 + \gamma + \delta + \beta = 2R,$$

proto též

$$\sphericalangle\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2R,$$

aneb $\sphericalangle\ a + c = 2R.$

Jelikož jest ve čtyřúhelníku

$$\sphericalangle\ a + b + c + d = 4R, \text{ jest též}$$

$$\sphericalangle\ b + d = 2R; \text{ a tudíž}$$

$$\sphericalangle\ a + c = b + d.$$

2) **Čtyřúhelník, v němž jsou součty protilehlých úhlů sobě rovny, jest čtyřúhelníkem z tětiv.**

(Obrácení věty předešlé.)

Důkaz nepřímý. Je-li ve čtyřúhelníku $abcd$ (obr. 151.) $\sphericalangle\ a + c = b + d$ a sestrojí-li se kruh, který tři vrcholy a, d a c daného čtyřúhelníku na svém obvodu obsahuje, a předpokládá-li se, že vrchol čtvrtý b mimo obvod tohoto leží, musel by obvod tohoto kruhu stranu ab v některém bodu protínati, na př. v bodu b_1. Bod b_1 byl by bodem obvodu tohoto kruhu a ab_1cd čtyřúhelníkem z tětiv v tomto kruhu, tudíž

$$\sphericalangle\ b_1 + d = 2R.$$

Poněvadž jest předpokládáno, že $\sphericalangle\ b + d = 2R$, musí, porovnáme-li tyto rovnice,

$$\sphericalangle\ b_1 = b,$$

což jest jen tehdy možno, sjednotí-li se bod b s bodem b_1, jelikož není jinak možno, aby vnější úhel b_1, trojúhelníku bb_1c, rovnal se vnitřnímu jemu protilehlému úhlu b. Bod b jest tedy bodem obvodu kruhu, který obsahuje body a, c, d, a $abcd$ jest čtyřúhelník z tětiv.

§. 123. **O každý trojúhelník dá se kruh opsati a každému trojúhelníku dá se kruh vepsati.**

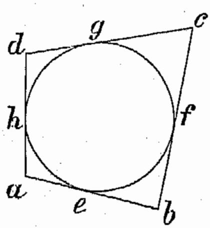
Středem kruhu kolem trojúhelníku opsaného jest průsečík kolmic uprostřed stran tohoto trojúhelníku na tyto strany vztyčených. Střed kruhu do trojúhelníku vepsaného jest průsečík příček úhly tohoto trojúhelníku rozpůlujících.

(Viz o čtyrech zvláštních bodech trojúhelníku.)

§. 124. 1) **V čtyřúhelníku z tečných jsou součty protějších stran sobě rovny.**

Dle §. 112., 2. jsou v obr. 152.

$$ae = ah$$
$$be = bf$$
$$cg = cf$$
$$dg = dh, \text{ tudíž}$$
$$ab + dc = bc + da.$$



Obr. 152.

2) **Čtyřúhelník, v němž jsou součty protějších stran sobě rovny, jest čtyřúhelník z tečných.**

(Obrácení věty poslední.)

D ů k a z n e p ř í m ý. Kdyby kruh, který se dotýká daného čtyřúhelníku, nedotýkal se též strany čtvrté, mohla by se z jednoho krajního bodu této strany vésti tečna ke kružnici, čímž by vznikl čtyřúhelník z tečných, potom by však jedna strana trojúhelníku byla rovna rozdílu druhých dvou stran, což možno není.

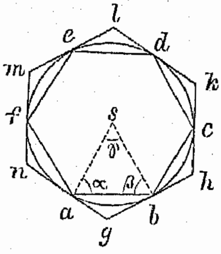
N á s l e d e k. **Do každého čtverce a kosočtverce dá se vepsati kruh.**

§. 125. **O každý pravidelný mnohoúhelník může býti kružnice opsána a do každého pravidelného mnohoúhelníku může býti vepsána.**

(Důkaz plyne bezprostředně z §. 73.)

N á s l e d e k. *Střed pravidelného mnohoúhelníku jest zároveň středem kruhu o tento mnohoúhelník opsaného i kruhu do něho vepsaného.*

§. 126. **Je-li obvod kruhu (kružnice) rozdělen na více rovných částí, tvoří** *a*) **tětivy mezi sousednými po sobě jdoucími body dělícími kruhu vepsaný pravidelný mnohoúhelník a** *b*) **tečné, v jednotlivých bodech dělících ke kruhu vedené, o kruh opsaný pravidelný mnohoúhelník.**



Obr. 153.

Budiž (obr. 153.)
arc. (ab) = arc. (bc) = arc. (cd) = ...
kreslí-li se tětivy ab, bc, cd, de ...., jsou ve mnohoúhelníku $abcd$ ... strany ab, bc, cd .. sobě rovny, jelikož odpovídají v témže kruhu rovným obloukům, ale též $\measuredangle\ a, b, c$ ... jsou si rovny, protože přísluší v témže kruhu stejným tětivám; tudíž jest mnohoúhelník $abcd$ ... kruhu vepsaný pravidelný.

Kreslí-li se tečné v bodech $a, b, c, \ldots$, které se v $g, h, k \ldots$ protínají, jsou $\triangle\ abg$, bch, cdk ... shodné a rovnoramenné, poněvadž jsou jednak jich základny ab, bc, cd ... jinak přilehlé k nim úhly (§. 115.) vesměs sobě rovny. Proto jsou také součty dvou a dvou ramen sobě rovny, t. j. $gh = hk$. . . .

Ze shodnosti trojúhelníků plyne též rovnosť úhlů $\measuredangle\ g, h, k, \ldots$, tudíž jest mnohoúhelník ghk ... o kruh opsaný pravidelný.

§. 127. **Strana pravidelného, do kruhu vepsaného šestiúhelníku rovná se poloměru.**

Je-li $abcdef$ (obr. 153.) pravidelný do kruhu vepsaný šestiúhelník, tedy vnitřní úhel jeho

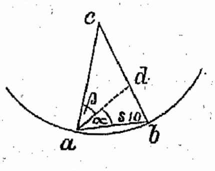
$$\measuredangle\ a = \measuredangle\ b = \ldots = \frac{12R - 4R}{6} = 120^0,$$

a tudíž úhel $\alpha = \beta = 60^0$, pročež i $\measuredangle\ \gamma = 60^0$. Trojúhelník abs jest tedy rovnostranný, t. j. $ab = as = bs = r$.

§. 128. **Rozpůlí-li se úhel středový, příslušný ku tětivě rovné straně pravidelného do kruhu vepsaného n-úhelníku, odpovídá polovině tohoto úhlu středového tětiva rovná straně pravidelného $2n$-úhelníku do téhož kruhu vepsaného.**

Důkaz plyne bezprostředně z věty, že k rovným úhlům středovým přísluší v témž kruhu i rovné tětivy i rovné oblouky.

§. 129. **Strana pravidelného do kruhu vepsaného desetiúhelníku jest větší úsečkou v poměru vnějším i vnitřním rozděleného poloměru.**



Obr. 154.

Důkaz. Budiž $ab = s_{10}$ (obr. 154.) stranou pravidelného do kruhu vepsaného desetiúhelníku, tedy jest

$$\measuredangle\ c = 36^0 \text{ a } \measuredangle\ a = b = 72^0.$$

Kreslí-li se příčka ad, která $\measuredangle\ a$ trojúhelníku abc rozpoluje, jest

$$\measuredangle\ \alpha = \beta = c = 36^0,$$

tudíž v rovnoramenném $\triangle\ abc$ . . . $ad = cd$. Poněvadž jest též

$\triangle\ abd$ rovnoramenný (proč?), jest též

$$ab = ad = s_{10},$$

tudíž i

$$cd = s_{10}.$$

Z podobnosti $\triangle\ abc \sim abd$

plyne $cb : ab = ab : db$

anebo $r : s_{10} = s_{10} : r - s_{10}$.

§. 130. **Rýsování pravidelných mnohoúhelníků do kruhu vepsaných.**

Má-li se rýsovati pravidelný do kruhu vepsaný n-úhelník, rozdělí se obvod kruhu na n sobě rovných částí. Body dělící jsou vrcholy žádaného mnohoúhelníku. — Dělení obvodu kruhu na daný počet dílů sobě rovných provede se buď zkusmo aneb v některých případech spůsobem jednodušším.

1) **Má-li se do kruhu vepsati pravidelný šestiúhelník,** nanese se, od libovolného bodu obvodu kruhu počínaje, poloměr jako tětiva šestkráte.

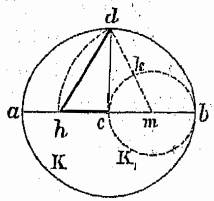
Rýsují-li se tyto tětivy, jest daný úkol řešen.

2) Spojí-li se koncové body tětiv rovnajících se poloměru ob jeden, jest tím pravidelný do kruhu vepsaný trojúhelník stanoven.

3) Krajní body dvou na sobě kolmo stojících průměrů stanoví na obvodu kruhu vrcholy čtverce do kruhu vepsaného.

4) **Sestrojiti stranu pravidelného, do kruhu vepsaného desetiúhelníku.**

V obr. 155. jest dk větší úsečkou v poměru vnějším i vnitřním děleného poloměru r, tedy rovno straně žádané.



Obr. 155.

Aby se při skutečném sestrojování kružnice K_1 rýsovati nemusela, opíše se poloměrem dm oblouk dh, potom jest $dm = hm$, tudíž i

$$dm - \frac{r}{2} = hm - \frac{r}{2}, \text{ proto}$$

$dk = ch = s_{10}$, značí-li s_{10} stranu pravidelného do kruhu vepsaného desetiúhelníku.

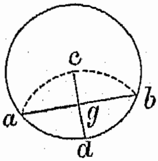
5) Tětiva, odpovídající dvakráte tak velkému oblouku, jaký přísluší straně pravidelného desetiúhelníku, jest stranou pravidelného, do kruhu vepsaného pětiúhelníku.

V obr. 155. jest délka dh rovna straně pravidelného pětiúhelníku, tedy

$$dh = s_5.$$

6) Sestrojení pravidelného osmi-, dvanácti-, šestnáctiúhelníku do kruhu vepsaného zakládá se na §. 128.

7) **Strana pravidelného, do kruhu vepsaného sedmiúhelníku** (s_7) rovná se přibližně polovině strany pravidelného do téhož kruhu vepsaného trojúhelníku (s_3).



Obr. 156.

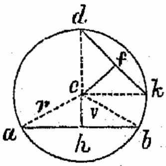
V obr. 156. jest

$$ab = s_3 \text{ a}$$

$$ag = \frac{s_3}{2} = s_7.$$

§. 131. **Vypočítati ze známého poloměru kruhu délku strany pravidelného, do tohoto kruhu vepsaného mnohoúhelníku.**

Označí-li se délka strany mnohoúhelníku do kruhu vepsaného s_n a délka poloměru r, jest pro každý případ stanoviti hodnotu s_n se vzhledem ku poloměru r.



Obr. 157.

Obecně jest

$ah^2 = r^2 - ch^2$; označí-li se $ch = v$, jest

$$\frac{s_n^2}{4} = r^2 - v^2 \text{ a tudíž}$$

$$s_n = 2\sqrt{r^2 - v^2} = 2\sqrt{(r - v)(r + v)}.$$

V některých případech dá se v snadno stanoviti.

1) **V pravidelném šestiúhelníku jest** $s_6 = r$.

2) V pravidelném trojúhelníku jest úhel při středu kruhu 120° a v trojúhelníku ahc (obr. 157.), který lze jako polovinu trojúhelníku rovnostranného, jehož strana jest $ac = r$, považovati, jest

$$v = \frac{r}{2} \text{ a proto}$$

$$s_3 = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3}.$$

3) Straně čtverce s_4 do kruhu vepsaného odpovídá úhel pravý při středu; vzdálenost její ode středu cf (obr. 158.) jest

$$cf = \frac{s_4}{2} \text{ a } s_4 = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}.$$

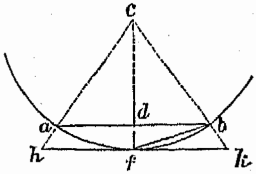
4) **Je-li dána strana s_n n-úhelníku pravidelného a poloměr r kruhu opsaného, vypočítati stranu pravidelného $2n$-úhelníku do téhož kruhu vepsaného.**

Buď (obr. 158.) $ab = s_n$ a $cd \perp ab$, tedy jest $fb = s_{2n}$

V $\triangle\ bdf \ldots s_{2n}^2 =$

$$\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \left(r - cd\right)^2$$

V $\triangle\ cdb \ldots cd = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$;



Obr. 158.

dosadí-li se do poslední rovnice, obdrží se:

$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{4} + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)^2,$$

$$s_{2n}^2 = r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} + r^2.$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - s_n^2}\right)}$$

Příklad. Vypočítati délku strany pravidelného dvanáctiúhelníku do kruhu vepsaného, jehož poloměr se rovná r.

$$s_{12} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_6^2}{4}}\right)},$$

$$s_{12} = \sqrt{2r\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)},$$

$$s_{12} = r\sqrt{2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

§. 132. **Jsou-li dány poloměr kruhu r a strana s_n pravidelného n-úhelníku do něho vepsaného, vypočítati stranu S_n n-úhelníku pravidelného o týž kruh opsaného.**

Budiž v obr. 158. $ab = s_n$ a tudíž $hk = S_n$.

Z podobnosti $\triangle\ acb \sim chk$ plyne

$$hk : ab = cf : cd$$

$$S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}.$$

$$S_n = \frac{r \cdot s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}} = \frac{2r\ s_n}{\sqrt{4r^2 - s_n^2}}.$$

Příklad. Vypočítati stranu pravidelného o kruh opsaného trojúhelníku.

$$S_3 = \frac{2r\, s_3}{\sqrt{4r^2 - s_3^2}} = \frac{2r\sqrt{3}}{\sqrt{4r^2 - 3r^2}} = 2r\sqrt{3}.$$

Porovnáme-li S_3 a s_3, shledáme, že

$$S_3 = 2s_3.$$

§. 133. 1) Úkoly k rýsování.

1) O daný obdélník obepsati kruh.

2) O daný čtverec obepsati kruh.

3) Do daného čtverce rýsovati kruh.

4) Do daného kosočtverce rýsovati kruh.

5) Do daného čtverce rýsovati pět kruhů, které se vzájemně vně dotýkají.

6) Rýsovati pravidelný, do kruhu vepsaný a) trojúhelník, b) čtverec, c) pětiúhelník, d) šestiúhelník, e) sedmiúhelník, f) osmiúhelník, g) desetiúhelník, h) dvanáctiúhelník, i) šestnáctiúhelník.

2) Úkoly početní.

1) Jsou-li r a r_1 délky poloměrů, ac délka centrály dvou kružnic, má se udati v každém z následujících příkladů vzájemná poloha dvou kružnic

a) $r = 4$, $r_1 = 5$, $c = 8$; *b)* $r = 6$, $r_1 = 4$, $c = 1{\cdot}5$;
c) $r = 3$, $r_1 = 5$, $c = 9$; *d)* $r = 8$, $r_1 = 5$, $c = 7$;
e) $r = 10$, $r_1 = 7$, $c = 3$; *f)* $r = 9$, $r_1 = 9$, $c = 12$;
g) $r = 12$, $r_1 = 7$, $c = 9$; *h)* $r = 9$, $r_1 = 3$, $c = 5$.

2) Je-li poloměr kruhu r, vypočítati stranu pravidelného, tomuto kruhu vepsaného a) osmiúhelníku, b) šestnáctiúhelníku, c) 32tiúhelníku, d) 64tiúhelníku.

3) Je-li poloměr kruhu r, vypočítati stranu pravidelného, do tohoto kruhu vepsaného a) 24tiúhelníku, b) 48tiúhelníku, c) 96tiúhelníku, d) 192tiúhelníku.

4) Je-li poloměr kruhu r, vypočítati stranu pravidelného o tento kruh opsaného a) čtverce, b) šestiúhelníku, c) osmiúhelníku, d) dvanáctiúhelníku.

5) Je-li poloměr kruhu r, vypočítati stranu pravidelného, o tento kruh opsaného a) 16tiúhelníku, b) 32tiúhelníku, c) 24tiúhelníku, d) 48tiúhelníku, e) 96tiúhelníku.

6) Je-li poloměr kruhu r, stanoviti vzdálenosť ode středu tohoto úhlu strany pravidelného, do něho vepsaného a) šestiúhelníku, b) dvanáctiúhelníku, c) šestnáctiúhelníku.

7) Je-li průměr kruhu = 1, vypočítati délku strany pravidelného, do tohoto kruhu vepsaného a) čtverce, b) osmiúhelníku, c) 16tiúhelníku, d) 32tiúhelníku.

8) Vypočítati délku strany pravidelného a) trojúhelníku, b) dvanáctiúhelníku, c) 24tiúhelníku vepsaného do kruhu, jehož poloměr měří 2 cm.

9) Vypočítati obsah pravidelného trojúhelníku opsaného o kruh, jehož poloměr měří 5 m.

10) Jak velký jest poloměr kruhu, měří-li strana pravidelného, do něho vepsaného trojúhelníku 8·66 m.

11) Jak velký jest poloměr kruhu opsaného o pravidelný 12tiúhelník, jehož strana měří 12·94 m.

6. O upotřebení nauky o srovnalosti délek na nauku o kruhu.

§. 134. 1) **V témž kruhu jsou oblouky k příslušným úhlům středovým přímo srovnalostny.**

(Důkaz plyne bezprostředně z §. 32.)

2) **V témž kruhu jsou výseče k příslušným úhlům středovým přímo srovnalostny.**

(Důkaz zůstavuje se čtenáři.)

Následky. *a)* **Oblouk se má ku celému obvodu jako tomuto oblouku příslušný úhel ku 360°.**

b) **Výseč kruhu má se k celému kruhu jako k ní příslušný úhel středový ku 360°.**

§. 135. **Stejnolehlé oblouky jsou přímo srovnalostny k obvodům a stejnolehlé výseče k obsahům příslušných celých kruhů.**

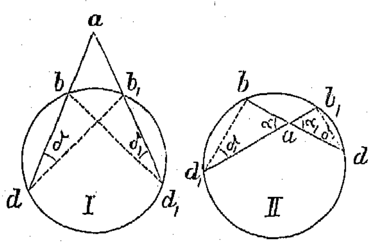
Buďtež o a o_1 obvody, p a p_1 obsahy dvou kruhů, jichž poloměry jsou $cb = r$, $ca = r_1$ (obr. 145.) a bf a ad oblouky stejnolehlé k témuž úhlu středovému $\sphericalangle bcf = \alpha$ příslušné, tedy jest dle §. 134. (Následek)

$$\text{arc.}\ (bf) : o = \alpha^0 : 360^0,$$
$$\text{arc.}\ (ad) : o_1 = \alpha^0 : 360^0,\ \text{tudíž}$$
$$\text{arc.}\ (bf) : o = \text{arc.}\ (ad) : o_1,\ \text{aneb}$$
$$\text{arc.}\ (bf) : \text{arc.}\ (ad) = o : o_1.$$

Podobně pochodí vzhledem k následku *b*) §. 13. 3.

$$\text{výseč}\ cbf : \text{výseči}\ acd = p : p_1.$$

§. 136. **Úsečky, na něž se přímky z téhož bodu vycházející obvodem kruhů přetínají, jsou k sobě v poměru převráceném.**



Obr. 159.

D ů k a z. Z bodu a (obrazec 159.) ať vycházejí dvě přímky, které prodlouženy jsouce protínají obvod kruhu v bodech b a b_1, potom v d a d_1. Kreslí-li se přímky bd_1 a b_1d_1 lze dokázati, že jest $\triangle\ abd_1 \sim ab_1d_1$ neboť jest

$\sphericalangle\ \alpha = \alpha_1$, neb $\sphericalangle\ a = a$
$\sphericalangle\ \delta_1 = \delta$ (proč?).

Z podobnosti těchto trojúhelníků jde:

$$ad_1 : ad = ab : ab_1.$$

Tato poučka pronášívá se často větami:

a) **Sečné kruhů z téhož bodu mimo kruh ležícího vedené jsou ku svým vnějším úsečkám nepřímo srovnalostny** (obr. 159. I.).

b) **Úsečky dvou tětiv kruhů na vzájem se protínajících jsou nepřímo srovnalostny** (obr. 159. II.)

Utvoří-li se v poslední srovnalosti součiny vnějších i vnitřních členů, jest

$$ad_1 \,.\, ab_1 = ab \,.\, ad$$

N á s l e d k y. Význam této rovnice jest

a) **Obdélníky tvořené těmito sečnami** (obr. 159. I.) **a mimo kruh ležícími úsečkami těchto sečen jsou si rovny.**

b) **Obdélníky z úseček těchto dvou tětiv** (obr. 159. II.) **jsou si rovny.**

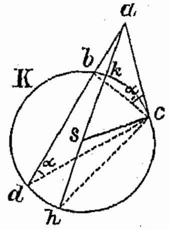
2) **Tečná přímka, z některého bodu mimo kruh ležícího ke kruhu vedená, jest střední měřicky srovnalostnou mezi libovolnou sečnou z téhož bodu vycházející a mezi její vnější úsečkou.**

D ů k a z. Buď (obr. 160.) c bod dotyčný, tečny ac a b a d průsečíky sečny ad s obvodem kruhu K. Kreslí-li se cd a bc, jest

$\triangle\ abc \sim adc$, neboť

$\sphericalangle\ a = a$

$\sphericalangle\ \alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ arc. (bc).



Obr. 160.

Z podobnosti těchto trojúhelníků jde, že

$$ab : ac = ac : ad$$
$$ac^2 = ab \,.\, ad.$$

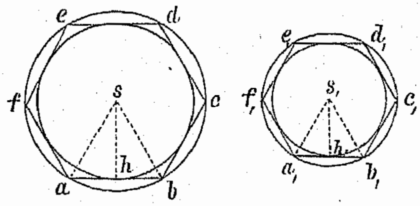
Následky. 1) **Obdélník ze sečny a její vnější úsečky rovná se čtverci nad tětivou.**

2) Kdyby sečna procházela středem kruhu s, bylo by

$$ah : ac = ac : ak$$
$$as + sh : ac = ac : as - ks$$
$$as + cs : ac = ac : as - cs$$
$$ac^2 = (as + cs)\,(as - cs)$$
$$ac^2 = as^2 - cs^2, \text{ aneb}$$
$$ac^2 + cs^2 = as^2 \text{ (Věta Pythagorova).}$$

§. 137. **Obvody pravidelného mnohoúhelníku o témž počtu stran mají se k sobě jako poloměry kruhů buď opsaných buď vepsaných a plošné obsahy jejich mají se k sobě jako druhé mocniny těchto poloměrů.**

Budtež (obr. 161.) $abcdf$ a $a_1 b_1 c_1 d_1 f_1$ dva pravidelné mnohoúhelníky o témže počtu stran, s a s_1 délky jejich stran, o a o_1 jejich obvody, p a p_1 jich obsahy, r a r_1 poloměry vepsaných a c a c_1 poloměry o ně opsaných kruhů.



Obr. 161.

Protože oba pravidelné mnohoúhelníky o témže počtu stran sobě podobny jsou, jest

$$o : o_1 = s : s_1$$

Z podobnosti trojúhelníkův $abs \sim a_1 b_1 s_1$ plyne

1) $s : s_1 = r : r_1$ a mimo to

2) $s : s_1 = c : c_1$ tudíž jest

$$o : o_1 = r : r_1 = c : c_1.$$

Z podobnosti těchto mnohoúhelníků dále pochodí

$$p : p_1 = s^2 : s_1{}^2;$$

ze srovnalosti 1) a 2) obdrží se však umocňováním

$$s^2 : s_1{}^2 = r^2 : r_1{}^2 \text{ a}$$
$$s^2 : s_1{}^2 = c^2 : c_1{}^2, \text{ tudíž jest}$$
$$p^2 : p_1{}^2 = r^2 : r^2 = c^2 : c^2.$$

§. 138. **Stanoviti obvod a obsah pravidelného n-úhelníku.**

Značí-li o obvod, p obsah a s_n stranu pravidelného n-úhelníku a r poloměr tomuto vepsaného kruhu, jest

$$o = n \,.\, s_n.$$

Spojí-li se vrcholy tohoto mnohoúhelníku se středem, vznikne n shodných rovnoramenných trojúhelníků, z nichž má každý obsah $= s_n \,.\, \frac{r}{2}$; a jest proto

$$p = n \,.\, s_n \,.\, \frac{r}{2} = o \,.\, \frac{r}{2} \text{ t. j.}$$

Měrné číslo obsahu pravidelného mnohoúhelníku rovná se součinu z měrného čísla obvodu jeho a poloviny poloměru kruhu jemu vepsaného.

Příklad. Vypočítati obsah pravidelného dvanáctiúhelníku, jehož strana měří 2 dm.

$$p = o \,.\, \frac{r}{2} = \frac{24}{2} \,.\, r = 12r.$$

Značí-li r_1 poloměr opsaného kruhu, jest

$$s_{12} = r_1 \,.\, \sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ a } r_1 = \frac{s_{12}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

$$r = \sqrt{r_1{}^2 - \left(\frac{s_{12}}{2}\right)^2};$$

$$r = \sqrt{\frac{s^2_{12}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{s_{12}}{4}} = \frac{s_{12}}{2} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}},$$

$$r = \frac{s_{12}}{2} \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{3})^2}{4 - 3}} = \frac{s_{12}}{2} \left(2 + \sqrt{3}\right);$$

pro tento případ jest

$$r = \frac{2}{2} (2 + \sqrt{3}) = 2{\cdot}732 \text{ a}$$

$$p \doteq 12 \,.\, 2{\cdot}732 = 32{\cdot}784 \,\square dm.$$

Úkoly ku cvičení.

1) Vypočítati obsah a obměr pravidelného trojúhelníku o kruh opsaného, jehož poloměr měří 3 dm.

2) Vypočítati obsah a obměr osmiúhelníku pravidelného opsaného i vepsaného do kruhu, jehož poloměr měří 2 dm.

3) Vypočítati obměr a obsah pravidelného šestiúhelníku vepsaného i opsaného o kruh, jehož poloměr jest r. — Stanoviti poměr plošných obsahů těchto dvou šestiúhelníků.

4) Jak velký jest obsah pravidelného osmiúhelníku o kruh opsaného, jehož poloměr měří 5 dm.

5) Stanoviti obsah pravidelného osmiúhelníku, jehož strana měří 2 dm.

6) Vypočítati obsah pravidelného dvanáctiúhelníku opsaného o kruh, jehož poloměr jest r; stanoviti poměr obsahů tohoto dvanáctiúhelníku a čtverce nad poloměrem jemu vepsaného kruhu sestrojeného.

7) Jak velký jest obsah pravidelného šestiúhelníku, jehož obvod měří 24 dm.

8) Stanoviti obvod a obsah čtverce opsaného i vepsaného do kruhu, jehož poloměr jest r, a určiti poměr obsahů obou čtverců.

9) Oč jest obsah pravidelného trojúhelníku, vepsaného do kruhu, jehož poloměr jest r (= 2 dm) větší než obsah do téhož kruhu vepsaného čtverce?

10) Obsah osmiúhelníku pravidelného jest 108·4 □dm; jak velký jest obsah jiného pravidelného osmiúhelníku do kruhu vepsaného, jehož poloměr jest třikráte větší než poloměr prvnímu osmiúhelníku opsaného kruhu?

11) Jak velký jest poloměr kruhu, má-li do tohoto kruhu vepsaný, pravidelný šestiúhelník týž obsah jako čtverec, jehož strana měří 8·4 dm?

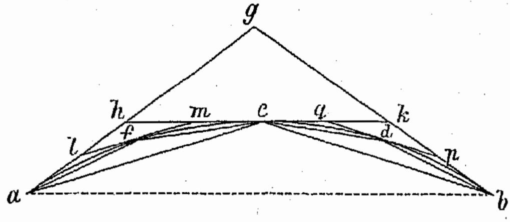
12) Jak velká jest strana čtverce, který má týž obsah jako součet trojúhelníku vepsaného i opsaného o kruh, jehož poloměr měří 6 dm?

13) Obsah pravidelného do kruhu vepsaného šestiúhelníku jest 515·29 □dm; jak velká jest strana čtverce do téhož kruhu vepsaného?

7. Měření obměru a obsahu kruhu.

§. 139. 1) **Každá tětiva v kruhu jest menší než příslušný jí oblouk.**

Pravdivosť této věty vysvítá již z toho, že jest přímá linie nejkratší vzdálenosť.



Obr. 162.

V obr. 162. jest $ab <$ arc. (ab). Rozpůlí-li se arc. (ab) v c, jest lomená linie $acb <$ arc. (acb), ale větší než ab; rozpůlí-li se arc. (ac) a arc. (cb) v f a d, jest lomená linie $afcdb <$ arc. $(afcdb)$, ale větší než lomená linie acb (poněvadž $ac < af + fc$ a $cb < cd + db$), tím větší tedy než ab.

Kdyby se tímto spůsobem v rozpolování oblouků a rýsování tětiv pokračovalo, stávaly by se povstalé lomené linie tím větší, čím více společných bodů s obvodem kruhu by měly, vždy by však byla lomená linie taková menší než obvod kruhu, jelikož se skládá ze součtu částí (tětiv), z nichž každá menší jest než příslušná část obvodu kruhu (oblouk).

2) **Součet tečných z bodu mimo kruh ležícího k jeho obvodu vedených jest větší než oblouk jeho mezi body dotyčnými obsažený.**

Buďtež (obr. 162.) ag a bg tečné z bodu g k obvodu kruhu sestrojeny a acb oblouk mezi body dotyčnými a a b obsažený a hk tečná uprostřed tohoto oblouku sestrojená, a protože jest $gh + gk > hk$, jest též $(ag + bg)$ větší než lomená linie $ahkb$. Sestrojí-li se mimo to prostřed oblouků ac a cb tečné lm a pq, jest lomená linie $ahkb$ větší než lomená linie $almqpb$ a tudíž tím větší $ag + gb$ než $almqpb$.

Kdyby se tímto spůsobem ve sestrojování tečných uprostřed oblouků pokračovalo, byla by těmito tečnami tvořená linie lomená tím menší, čím více společných bodů by s obloukem měla; avšak co do velikosti přibližovala by se oblouku tím více, čím větší by byl počet bodů společných linie lomené a oblouku.

Každá taková linie lomená musí býti však vždy větší než oblouk, poněvadž by v případě, že by byla buď stejně velká, aneb menší než oblouk, by se zvětšováním počtu bodů dotyčných vždy menší a menší stávala, nemohla se oblouku přibližovati, nýbrž od něho vzdalovati; jest tudíž $ag + gb >$ arc. (acb).

Následky:

a) **Obměr (obvod) kruhu jest větší než obvod vepsaného, ale menší než obvod opsaného mnohoúhelníku.**

b) Obvody kruhu vepsaných a opsaných mnohoúhelníků pravidelných mohou se opětným zdvojnásobováním počtu stran přiblížiti k obměru kruhu tak, že se stanou rozdíly menší než kterékoli sebe menší číslo stanovitelné; t. j. obměr kruhu lze považovati za mezi, ku které vepsaný aneb opsaný mnohoúhelník při stálém zvětšování počtu stran nekonečně se přibližuje. V tomto smyslu říká se:

Kruh jest pravidelný mnohoúhelník o nekonečném počtu stran.

Veškeré věty, které o mnohoúhelnících pravidelných bez ohledání na jich počet stran pronešeny byly, platí tudíž též o kruhu.

§. 140. Poněvadž obvody pravidelných mnohoúhelníků o témž počtu stran se k sobě mají jako poloměry kruhů buď opsaných, buď vepsaných, platí též věta:

Obměry dvou kruhů jsou přímo srovnalostny ku poloměrům neb průměrům svým.

Následky. *a)* Jsou-li o a o_1 obměry dvou kruhů, jichž poloměry jsou

r a r_1 a průměry d a d_1, jest

$o : o_1 = r : r_1 = d : d_1$, z čehož následuje

$o : d = o_1 : d_1$ t. j.

Poměr obměru k průměru kruhu jest ve všech kruzích stálý.

Tento stálý poměr obvodu k průměru kruhu znamená se písmenem π a slove obyčejně číslem Ludolfským, jest tudíž

$$\frac{o}{d} = \frac{o}{2r} = \pi.$$

b) Z poslední rovnice pochodí

$$o = \pi d = 2\pi r, \text{ t. j.}$$

Obměr kruhu rovná se průměru (aneb dvojnásobnému poloměru) znásobenému číslem Ludolfským.

c) Pro $d = 1$ jest $o = \pi$.

Číslo π lze tudíž též za měrné číslo obměru kruhu považovati, jehož průměr měří délkovou jednotku.

d) Je-li a délka daného oblouku kruhového a $\sphericalangle \alpha$ jemu příslušný úhel, jest dle §. 134, a):

$$a : 2\pi r = \alpha : 360^0, \text{ tudíž}$$

$$a = \frac{2\pi \alpha r}{360} = \frac{\pi \alpha r}{180}.$$

§. 141. **Stanoviti hodnotu čísla** π.

Aby se stanovila hodnota čísla π, t. j. obměr kruhu, jehož průměr jest 1, stanoví se napřed strana pravidelného, do tohoto kruhu (jehož poloměr $r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}$) vepsaného šestiúhelníku, z té vypočítá se s_{12}, t. j. strana pravidelného, do téhož kruhu vepsaného dvanáctiúhelníku a pomocí toho s_{24}, strana pravidelného 24tiúhelníku atd. — Násobením měrných čísel těchto stran počtem jejím (tudíž 6, 12, 24 atd.) obdrží se měrná čísla obvodu o_6, o_{12}, o_{24} .. těchto do kruhů vepsaných mnohoúhelníků.

Každé z těchto měrných čísel obvodu jest však menší než měrné číslo obměru tohoto kruhu, tudíž i menší než hodnota čísla π; čím větší jest však počet stran, tím více se tato hodnota přibližuje číslu π.

Ze známých stran s_6, s_{12}, s_{24} .. vypočítají se strany S_6, S_{12}, S_{24} .. pravidelných o tento kruh opsaných mnohoúhelníků o témž počtu stran a z těchto zase násobením číslem udávajícím počet stran obvody těchto mnohoúhelníků O_6, O_{12}, O_{24} ...

Každé z těchto měrných čísel obvodu jest větší než číslo π, liší se však tím méně od hodnoty jeho, čím větší jest počet stran. Hodnota čísla π leží tedy vždy mezi měrnými čísly obvodu pravidelného mnohoúhelníku do kruhu, jehož průměr $= 1$, vepsaného a o týž kruh opsaného při témž počtu stran. Čím větší jest počet stran, tím méně liší se zmíněná měrná čísla obvodu mnohoúhelníků od sebe a tím více se přibližuje každé z nich měrnému číslu obměru tohoto kruhu, t. j. hodnotě čísla π.

Výsledky takového výpočtu až k pravidelnému 3072tiúhelníku obsaženy jsou v následující tabulce, v níž značí n počet stran, o_n a O_n měrná čísla vepsaných a opsaných mnohoúhelníků.

n	o_n	O_n
6	3	3·464102
12	3·105829	3·215390
24	3·132629	3·159660
48	3·139350	3·146086
96	3·141032	3·142715
192	3·141452	3·141873
384	3·141558	3·141663
768	3·141584	3·141610
1536	3·141590	3·141597
3072	3·141592	3·141594

Měrná čísla obvodu vepsaného a opsaného 3072tiúhelníku liší se teprve v šestém místě desetinném, poněvadž však hodnota π mezi oběma leží, musí společná část hodnoty obou obměrů o_{3072} a O_{3072} též hodnotu π vyznačovati, jest tudíž

$$\pi = 3{\cdot}14159\ldots$$

Archimedes († 212 po Kr.) stanovil pro π hodnotu $\frac{22}{7}$ a holandský mathematik Ludolf van Ceylen († 1610) stanovil hodnotu π na 35 míst desetinných způsobem dříve naznačeným; dle něho obdrželo toto číslo jméno své.

Pro obyčejný výpočet stačí hodnota $3{\cdot}14$ aneb $\frac{22}{7}$ a pro poněkud přesnější výpočty hodnota $\pi = 3{\cdot}1416$.

§. 142. Považuje-li se kruh za mnohoúhelník o nesčíslném počtu stran, **stanoví se obsah jeho, násobí-li se obměr jeho polovinou poloměru** (§. 87.).

Je-li p obsah a r poloměr kruhu, jest

$$p = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \text{ a } p_1 = \pi r_1{}^2 = \pi\left(\frac{d_1}{2}\right),$$

$$p : p_1 = r^2 : r_1{}^2 = d^2 : d_1{}^2, \text{ t. j.}$$

a) **Měrná čísla obsahů dvou kruhů jsou přímo srovnalostna ku dvojmocem měrných čísel svých poloměrů neb průměrů.**

b) **Součet polokruhů nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku rovná se polokruhu nad přeponou tohoto trojúhelníku sestrojenému.**

§. 143. **Stanoviti obsah výseče kruhové.**

Je-li p obsah výseče, jíž při poloměru r středový úhel α odpovídá, jest

$$p : \pi r^2 = d : 360^0, \text{ tudíž}$$

$$p = \frac{\pi \alpha r^2}{360} = \frac{\pi \alpha r}{130} \cdot \frac{r}{2},$$

$\frac{\pi \alpha r}{180}$ značí však (§. 139. následek d) ku středovému úhlu α příslušnou délku oblouku a, tudíž jest

$$p = a \cdot \frac{r}{2}, \text{ t. j.}$$

Měrné číslo obsahu výseče kruhové rovná se součinu ze měrných čísel délky oblouku a poloviny poloměru.

Dodatek. **Kruhová úseč, která jest menší aneb větší polokruhu, rovná se podle toho rozdílu anebo součtu příslušné výseče a trojúhelníku omezeného tětivou a oběma poloměry.**

§. 144. **Stanoviti obsah mezikruží.**

Značí-li p obsah mezikruží, r a o poloměr a obměr menšího a R a O poloměr a obměr většího z obou soustředných kruhů, $š = R - r$ šířku mezikruží, jest

$$p = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R - r)\,(R + r)$$

$$p = \pi š(R + r) \text{ anebo též}$$

$$p = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot (R - r) = \frac{O + o}{2} \cdot š, \text{ t. j.}$$

Měrné číslo obsahu mezikruží rovná se součinu z měrných čísel arithmetického průměru obměru obou kruhů a šířky.

§. 145. Úkoly početní.

1) *Značí-li v kruhu r poloměr, b tětivu, v vzdálenosť této tětivy ode středu: vypočítati z daných hodnot dvou z těchto veličin, hodnotu veličiny třetí, je-li*

α) $b = 3{\cdot}6\,m$	β) $r = 1{\cdot}75\,m$	γ) $r = 7{\cdot}2\,dm$
$v = 2{\cdot}6\,m$	$v = 0{\cdot}85\,m$	$b = 5{\cdot}1\,dm.$

2) *Je-li r poloměr, d průměr, o obvod a p obsah kruhu: vypočítati z dané hodnoty jedné z těchto veličin hodnotu veličin ostatních, dáno jest*

a) $r = 7\,m$	*d)* $d = 8\cdot5\,dm$	*h)* $o = 18\cdot8496\,m$
b) $r = 5\cdot2\,m$	*e)* $d = 0\cdot53\,dm$	*i)* $o = 28\cdot2744\,dm$
c) $r = 1^3/_8\,dm$	*f)* $d = 2\cdot58\,m$	*j)* $o = 14\cdot6608\,dm$
	k) $p = 28\cdot2744\,\square dm$	
	l) $p = 12\cdot5664\,\square dm$	
	m) $p = 19\cdot635\,\square m$	

V příkladech a) až g) buď $\pi = 3\cdot14$ *a v ostatních* $\pi = 3\cdot14156$.

3) Obměr desky okrouhlé měří 1·48 cm; jak velký jest a) průměr, b) obsah její?

4) Kolik osob může seděti kolem okrouhlého stolu, jehož poloměr měří $^2/_3\,m$, *vyžaduje-li se pro 2 osoby* $1^1/_2\,m$ *obměru stolu?*

5) Poloměr kruhu měří 21·5 m; jak velký jest obměr jiného kruhu, který má o $1^1/_3$ *větší obsah?*

6) Okrouhlý stůl má míti 1 $\square$*m plochy; jakého jest mu poloměru třeba?*

7) Jak velký jest průměr kola, které se na délce 19635 m otočí 3125kráte?

8) Obsah dvou kruhů dohromady jest 740·4232 $\square$*m; jeden z nich jest o 683·8744* $\square$*m větší než druhý; jak velké jsou poloměry těchto kruhů* ($\pi = 3\cdot1416$)?

9) Jak velký jest poloměr kruhu, který má týž obvod jako dva kruhy, jichž poloměry měří 6 m a 10 m dohromady?

10) Jak velký jest průměr kruhu tak velkého, jako jsou dva dané kruhy, jichž poloměry měří 2·4 dm a 3·2 dm?

11) Obvody dvou daných kruhů měří 27·35 cm a 12·78 cm, jak velký jest obvod kruhu, jehož obsah jest roven rozdílu obsahů kruhů daných?

12) Vypočítati délku poloměru kruhu téhož obsahu, jako čtverec, jehož strana měří $1^1/_3\,dm$.

13) Průměr předních kol jest u nějakého vozu 1·3 m; jak velkou dráhu ujel vůz tento, otočilo-li se každé kolo přední 1500kráte a kolikkráte otočilo se při tom každé kolo zadní, jehož průměr jest 1·8 m?

14) Nad danou délkou, která 12 m měří, opsán jest polokruh ($d = 12\,m$) *a mimo to dva polokruhy menší, v nichž měří průměry 7 m a 5 m; jak velká jest plocha mezi těmito kruhy menšími a kruhem velkým obsažená?*

15) Jak velká jest strana čtverce téhož obsahu jako kruh, jehož poloměr měří 8 dm ($\pi = 3\cdot14$)?

16) Vypočítati obsah kruhu, jehož obměr jest tak velký jako obvod čtverce, v němž měří úhlopříčna 3·5 dm?

17) V kruhu, jehož poloměr jest r, náleží ku středovému ∢ α oblouk délky a, vypočítati ze dvou z těchto veličin veličinu třetí, je-li

a) $r = 5\,dm$, $\alpha = 135^0$ b) $r = 2{\cdot}7\,dm$, $a = 2{\cdot}03\,cm$ c) $\alpha = 48^0$, $a = 42{\cdot}6\,cm$.

18) Vypočítati průměr kruhu, v němž jest oblouk 15⁰ čítající a) 3 dm, b) 7·5 dm, c) 25·2 dm, d) 4·5 dm dlouhý.

19) Jak dlouhý jest oblouk 35⁰ čítající v kruhu, jehož poloměr měří 2 dm?

20) Kolik stupňů má oblouk 7·853 dm dlouhý, měří-li průměr kruhu 2 m?

21) Jak velký jest poloměr kruhu, v němž přísluší ku středovému úhlu 64⁰ oblouk 70·4 m dlouhý? ($\pi = 3{\cdot}1416$).

22) Jak velký jest oblouk, odpovídající středovému úhlu 48⁰ 12', v kruhu, jehož obsah měří 78.54 □dm ($\pi = \frac{22}{7}$)?

23) Jak velkému úhlu středovému odpovídá v kruhu, jehož průměr měří 11·5 m, oblouk 4·6 m dlouhý ($\pi = 3{\cdot}1416$)?

24) Jak velký oblouk napíná strana pravidelného, do kruhu vepsaného a) trojúhelníku, b) čtverce, c) pětiúhelníku, d) šestiúhelníku, f) osmiúhelníku, g) dvanáctiúhelníku, vezme-li se poloměr $= 7\,dm$ *a* $\pi = \frac{22}{7}$?

25) Jak velký úhel středový odpovídá oblouku, který má tutéž délku jako průměr kruhu?

26) Vypočítati obsah výseče kruhové, jíž odpovídá poloměr = 2 dm a úhel středový 38⁰.

27) Jak velký jest obsah výseče kruhové příslušné ku středovému úhlu 35⁰, měří-li oblouk ji omezující 2·61 m?

28) Obsah výseče kruhové jest 64 □m a příslušný úhel středový měří 34⁰ 24', jak velký jest poloměr?

29) Vypočítati obsah úseče omezené stranou pravidelného šestiúhelníku a příslušným obloukem v kruhu, jehož poloměr měří 3·2 m.

30) Vypočítati obsah úseče v kruhu, jehož průměr měří 1·2 dm, je-li tato omezena stranou pravidelného a) čtverce, b) osmiúhelníku, c) trojúhelníku, do tohoto kruhu vepsaného. — Oč jest obsah kruhu větší než obsah každého z uvedených mnohoúhelníků?

31) Jsou-li r a r_1 poloměry a o a o_1 obvody dvou kružnic soustředných, $š$ šířka a p obsah těmito kružnicemi omezeného mezikruží; vypočítati ze dvou z těchto veličin veličiny ostatní, je-li totiž:

a) $r = 6{\cdot}8\,dm$ a	$r_1 = 4{\cdot}5\,dm$	*vypočítati* o, o_1 $š$ a p
b) $r = 312\,m$	$o_1 = 11{\cdot}56\,m$	r_1, o, $š$ a p
c) $r_1 = 0{\cdot}75\,m$	$p = 1{\cdot}836\,\square m$	r, o, o_1 a $š$
d) $š = 2{\cdot}37\,dm$	$p = 8{\cdot}038\,\square m$	r, r_1 o a o_1
e) $o = 7{\cdot}134\,m$	$p = 5{\cdot}793\,\square m$	r, r_1, $š$ a o.

32) Obvody dvou kruhů soustředných měří 21·98 m a 18·84 m; jak velký jest obsah mezikruží ($\pi = 3{\cdot}14$)?

33) Obsah mezikruží jest 42 □dm, poloměr kruhu vnitřního měří 9 dm; jak široké jest toto mezikruží ($\pi = 3{\cdot}14$)?

34) Na terči jest průměr vnitřního černého kruhu 0·25 m a šířka bílého kruhu 0·3 m; jak velký jest bílý kruh ($\pi = \frac{22}{7}$)?

35) Kolem okrouhlého trávníku, jenž má v průměru 18 m, jest 2 m široká cesta, jak velkou plochu zaujímá cesta ta?

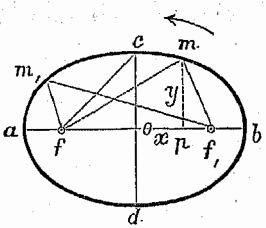
36) Má se stanoviti plocha mezikruží, rovnají-li se obvody kruhů je tvořících 315·8 dm a 410·5 dm.

Část sedmá.

O ellipse, hyperbole a parabole.

O ellipse.

§. 146. Dány-li jsou tři body, jichž obrazy jsou f, f_1 a m v obr. 163., a předpokládá-li se, že jsou body f a f_1 pevny, tedy jest součet vzdáleností 3tího bodu hybného m od obou bodů pevných $mf + mf_1$. Součet těchto vzdáleností má určitou délku. Pohybuje-li se bod m v téže rovině tím způsobem, aby **v každé jeho poloze součet jeho vzdáleností od pevných bodů f a f_1 byl týž jako v poloze původní,** tedy vytvoří pohybem tím uzavřenou linii křivou, jež sluje e l l i p s o u. Je-li m_1 určitou polohou bodu m, tedy musí dle dříve udaného zákona výtvarného býti $mf + mf_1 = m_1 f + m_1 f_1$.



Obr. 163,

Ellipsa jest tudíž geometrické místo všech bodů (v rovině) tak položených, aby součet jejich vzdáleností ode dvou pevných bodů měl určitou stálou délku.

P o z n á m k a: Bod m musí ležeti mimo přímou linii ff_1 a tudíž musí býti $mf + mf_1 > ff_1$.

Body f a f_1 slovou o h n i s k a (focus) ellipsy.

Při svém pohybu přijde hybný bod dvakráte do přímé linie ff_1 v bodu a a b, z nichž prvý má patrně takovou vzdálenosť od bodu f jako druhý od f_1, t. j. $af = bf_1$.

Dle zákona výtvarného jest

$af + af_1 = mf + mf_1$; jelikož ale
$af_1 = af + ff_1$, a mimo to $af = bf_1$, jest též
$af + bf_1 + ff_1 = mf + mf_1$, tudíž
$ab = mf + mf_1$, t. j. délka ab rovná se součtu vzdáleností jakéhokoli bodu ellipsy od obou ohnisek.

Přímá linie ab jdoucí ohnisky a dělící ellipsu na dvě stejné části, nazývá se větší její osou.

Vzdálenosť kteréhokoli bodu ellipsy od ohniska sluje průvodcem či průvodičem tohoto bodu. Každý bod má dva průvodce. Hledíce k tomu,* co posud o ellipse řečeno bylo, můžeme říci: **Ellipsa jest křivá linie, při níž součet průvodců každého bodu rovná se větší její ose.**

Délka cd, která prostřed (o) větší osy na tuto kolmá jest, zove se menší osou ellipsy.

I menší osa ellipsu rozpoluje.

Krajní body a, b, c, d obou os slovou vrcholy, průsečík os, tedy bod o střed (středobod) ellipsy.

Úsečka, spojující dva body ellipsy, jmenuje se její tětivou. Jde-li tětiva středem, slove průměr.

Středobod rozpoluje všecky průměry.

Vzdálenosť ohniska od středu ellipsy sluje linearní výstředností (excentrikou) ellipsy, a znamená se písmenem e; v obr. 163. $of = of_1 = e$. Velká poloosa znamená se písmenem a, a poloosa malá písmenem b; jest tudíž $ab = 2a$, $cd = 2b$.

1) V pravoúhlém $\triangle$ ofc jest $fc^2 = e^2 + b^2$, poněvadž jest ale $cf + cf_1 = 2cf = 2a$, jest též $a^2 = e^2 + b^2$ a tudíž $fc = a$, t. j. **vzdálenosť krajních bodů malé osy ellipsy od ohnisek rovná se polovině osy velké.**

Z rovnice $a^2 = e^2 + b^2$ plyne

$$a = \sqrt{e^2 + b^2},\ b = \sqrt{a^2 - e^2},\ e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Čím menší jest výstřednosť, tím více blíží se ellipsa kružnici; pro $e = 0$ jest $a = b$ a ellipsa stane se kružnicí.

Je-li ellipsa na př. dána velkou osou a oběma ohnisky, sestrojí se krajní body osy malé, protne-li se její běh z ohniska obloukem, jehož poloměr se rovná polovině osy velké. Je-li ale ellipsa dána oběma osami, stanoví se poloha ohnisek jejich, protne-li se velká osa z některého krajního bodu osy malé polovinou svou (a).

Na základě toho lze stanoviti krajní body obou os ellipsy, která jest stanovena oběma ohnisky a jedním bodem svým.

2) Aby se vzájemná poloha bodu a ellipsy stanovila, postačí, vyšetří-li se součet vzdáleností tohoto bodu od ohnisek; je-li tento menší, nebo roven, anebo větší než větší osa, leží bod buď uvnitř, buď na ellipse aneb vně ellipsy.

Poznámka. Dráhy, ve kterých naše země a ostatní oběžnice okolo slunce se pohybují, jsou ellipsy, v jejichž jednom ohnisku slunce se nachází. Ellipsa v praktickém životě často se vyskytuje; některé záhony v zahradách, dna van ke koupání, některá klenutí, rámce kolem fotografií atd. mívají podobu elliptickou.

§. 147. **Stanoviti vzdálenosť kteréhokoli bodu ellipsy od ohnisek** (určiti délku průvodců).

Spustí-li se s bodu ellipsy m (obr. 163.) kolmice mp na osu velkou a označí-li se délka $op = x$ a $mp = y$, tedy jest
v pravoúhlém $\triangle\ fmp \ldots\ fm^2 = y^2 + fp^2 = y^2 + (e + x)^2$
v pravoúhlém $\triangle\ f_1mp \ldots\ f_1m^2 = y^2 + f_1p^2 = y^2 + (e + x)^2$.

Odečtením obdrží se $fm^2 - f_1m^2 = 4ex$ aneb rozložením rozdílů dvojmocí $(fm + f_1m) \,.\, (fm - f_1m) = 4ex$.

Poněvadž jest ale

$$fm + f_1m = 2a \ldots fm - f_1m = \frac{4ex}{2a} = \frac{2ex}{2a}.$$

Sečtením hodnot 1) $fm + f_1m = 2a$ a

2) $fm - f_1m = \dfrac{2ex}{a}$, obdrží se

$$2fm = 2a + \frac{2ex}{a} \text{ a tudíž}$$

$$fm = a + \frac{ex}{a};$$

podobně obdrží se odečtením rovnice 2. od rovnice 1. . . .

$$f_1m = a - \frac{ex}{a}.$$

§. 148. **Opíše-li se kolem středu ellipsy kružnice poloměrem rovnajícím se velké poloose, stanoviti poměr vzdáleností na téže kolmici se nalézajících bodů kružnice a ellipsy od osy velké.**

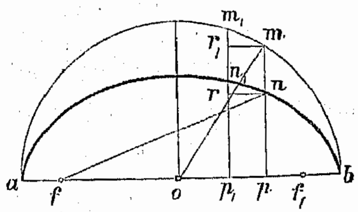
Budiž v obr. 164. m bod kružnice a n bod ellipsy na téže kolmici se nalézající a p stopa této kolmice na ose velké. Označí-li se $op = x$, $mp = y$, $np = y_1$, tedy jest v pravoúhlém trojúhelníku $omp \ldots 1)\ y^2 = a^2 - x^2$.

V pravoúhlém trojúhelníku $fnp \ldots\ y_1^2 = fn^2 - fp^2$; aneb

$$y_1^2 = \left(a + \frac{e^2x^2}{a}\right)^2 - \left(e + x\right)^2,$$

proto

$$y_1^2 = a^2 + \frac{ex}{a^2} - e^2 - x^2.$$



Obr. 164.

Dosadí-li se za $e^2 = a^2 - b^2$, bude

$$y_1^2 = \frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^2} + b^2 - x^2 \text{ a též}$$

$$2)\ y_1^2 = \frac{b^2x^2 + a^2b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Porovnáním rovnic 1. a 2. obdrží se

$$y^2 : y_1^2 = 1 : \frac{b^2}{a^2}, \text{ aneb}$$

$$y^2 : y_1^2 = a^2 : b^2 \text{ a odmocněním}$$

$$y : y_1 = a : b, \text{ t. j.}$$

poměr vzdáleností dvou na téže kolmici se nalézajících bodů kružnice a ellipsy od osy velké jest týž jako poměr poloos ellipsy.

§. 149. **Stanoviti měrné číslo obsahu ellipsou omezené roviny.**

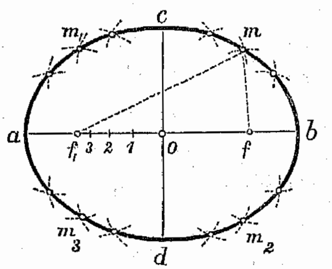
Budiž v obr. 164. sestrojena ellipsa a nad její velkou osou kružnice. Zvolí-li se dva body m a m_1 nekonečně blízké na kružnici a spustí-li se s nich kolmice na osu velkou, tedy jest $pp_1\ nn_1$ prvek plochy ellipsou omezené a $pp_1\ mm_1$ prvek kruhu. Kreslí-li se mr_1 a nr rovnoběžně k velké ose, mohou se při uvedených prvcích plošných části nn_1r a mm_1r zanedbati, jelikož jsou nekonečně malé; obdélníky pp_1rm a pp_1rn jsou v poměru poloos ellipsy. Rozloží-li se tímto spůsobem celá plocha ellipsou omezená jakož i celý kruh na samé prvky, jest poměr vždy dvou příslušných prvků roven poměru poloos, a tudíž i součty všech prvků, t. j. obsah ellipsy a kruhu jsou v poměru poloos. Označí-li se obsah kruhu p a obsah roviny ellipsou omezený p_1, jest

$$p : p_1 = a : b \text{ tudíž i}$$
$$\pi a^2 : p_1 = a : b, \text{ z čehož plyne,}$$
$$p_1 = \pi ab, \text{ t. j.}$$

Měrné číslo obsahu ellipsou omezené roviny rovná se součinu z měrných čísel poloos a čísla ludolfského.

§. 150. Sestrojení ellipsy.

1) **Stanovena-li jest ellipsa, která se sestrojiti má větší osou a oběma ohnisky,** tu určí se napřed středobod její, který leží prostřed vzdálenosti ohnisek; potom běh a krajní body osy malé. K stanovení libovolného počtu bodů ellipsy poskytuje její zákon výtvarný prostředek náležitý.



Obr. 165.

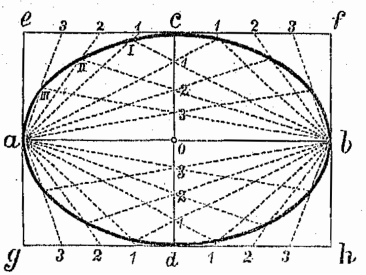
Zvolí se bod 1. mezi o a f_1 (obr. 165.) a poloměrem rovným délce $a1$ opíši se kolem bodů f a f_1 oblouky kruhové; poloměrem rovným délce $b1$ protnou se oblouky ty oblouky jinými kolem f a f_1 opsanými. Průsečíky m, m_1, m_2 a m_3 jsou body ellipsy žádané; neboť pro bod m jest $mf + mf_1 = 1b + 1a = 2a$. Podobným spůsobem dá každý jiný bod zvolený na of_1 na př. bod 2, 3 atd. nové čtyři body ellipsy, jež se tímto spůsobem sestrojí.

2) **Dány-li jsou obě osy ellipsy,** stanoví se napřed ohniska její, a stanovení jiných bodů ellipsy státi se může tak, jak bylo v případě předešlém ukázáno.

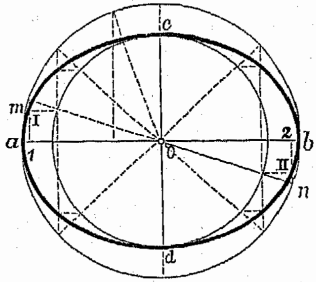
3) **Je-li dána ellipsa oběma osami,** lze dostatečný počet bodů též následujícím spůsobem stanoviti. V krajních bodech os vztyčí se kolmice (obr. 166.), čímž se obdrží obdélník $efgh$ ellipse žádané opsaný. Kterékoli dvě protější strany obdélníku tohoto na př. ef a gh rozdělí se na rovný (sudý) počet dílů; podobně rozdělí se i osa, prostředky těchto stran spojující na týž počet mezi sebou rovných dílů. Koncové body těchto dílů označí se od bodu c a d počínaje ve všech směrech číslicemi 1, 2, 3 atd. Každý bod dělící strany ef a gh spojí se s bližším krajním bodem (a nebo b) velké osy přímkami; mimo to spojí se vrcholy a i b se všemi body dělícími osu cd, kteréžto poslední přímky se pro-

dlouží. Průsečíky paprsků procházejících stejně označenými body dělícími náležejí ellipse. — Podobně mohly se rozděliti *eg* a *fh* a osa *ab*; paprsky pak, jež by se v bodech ellipsy protínaly, musely by se vésti vrcholy *c* a *d*.

Tím spůsobem může se rýsovati třeba jen čtvrtina ellipsy; body ostatních tří čtvrtin mohly by se stanoviti souměrným položením k bodům první čtvrti vzhledem k oběma osám.



Obr. 166.



Obr. 167.

4) **Jiný spůsob sestrojiti dostatečný počet bodů ellipsy stanovené oběma osami.**

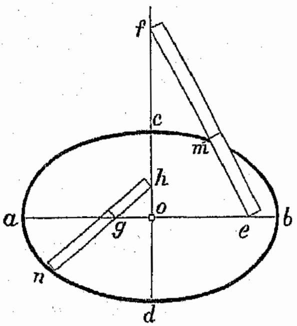
Spůsob tento záleží v tom, že se kolem jejího středu nad každou osou jako průměrem opíše kružnice. Kreslí-li se ve větší z těchto kružnic (obr. 167.) průměr kterýkoliv *mn*; spustí-li se s krajních bodů tohoto průměru na větší osu kolmice *m1* a *n2* a kreslí-li se mimo to průsečíkem tohoto průměru a menší kružnice k velké ose rovnoběžka, tedy jsou společné body těchto rovnoběžek a dříve spuštěných kolmic body ellipsy.

Tím spůsobem lze též náležitý počet bodů ellipsy sestrojiti. Konstrukce tato zakládá se na §. 148.

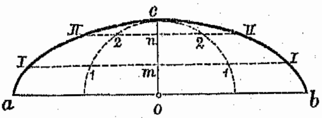
5) Chce-li se dostatečný počet bodů ellipsy, jejíž osy dány jsou, rychle zobraziti, a nezáleží-li příliš na přesnosti, možno obdržeti jednotlivé body její následovně. Na přímočarně seříznutý proužek papíru vnese se od konce *e* (obr. 168.) délka *b* (polovina osy malé) tedy $em = b = co$, a od *m* až ku *f* polovina délky osy velké, tedy $mf = ao = a$. Délka proužku $ef = a + b$. Položí-li se proužek ten směrem libovolným na obrazec tak, aby konec jeho *e* v ose velké (*ab*), konec *f* v prodloužené ose malé (*cd*) se nacházel, bude dělící bod *m* obou poloos krýti určitý bod ellipsy. Poznamená-li se tento bod ellipsy, a pošine-li se proužek

do polohy jiné, při čemž ovšem dbáti toho, by bod **e** v ose velké a bod **f** v ose malé se nacházel, obdrží se jiné body ellipsy. Tento způsob sestrojování ellipsy sluje sestrojení ellipsy ze součtu poloos.

6) Podobně možno sestrojiti ellipsu z rozdílu poloos. Dá-li se proužku papíru (obr. 168.) délka velké osy $nh = a$, a vnese-li se naň od n polovina osy malé $ng = b$, jest $gh = a - b$ rozdílem obou poloos. Položí-li se nyní proužek nh tak, aby bod **h** byl v malé ose cd, bod **g** v ose velké ab, bude v každé takové poloze bod n bodem ellipsy. Tento způsob stává se tím nespolehlivějším, čím menší jest rozdíl poloos; součet poloos dává v každém případě ellipsu přesnější.



Obr. 168.



Obr. 169.

7) Jedná-li se o zobrazení nějaké ellipsy vůbec, a může-li poměr os libovolným býti, učiní se velká poloosa $a = 2b$. Kolem středu o opíše se (obr. 169.) kružnice poloměrem $= b$, a kreslí se několik sečen v této kružnici ku velké ose ab rovnoběžných. V každé takové sečné obsažená tětiva ellipsy rovná se dvojnásobné tětivě kružnice; učiní-li se tedy $1I = m1$, $2II = n2$ atd., tedy jsou I, II . . . body ellipsy.

8) **Sestrojení ellipsy spůsobem mechanickým pomocí šňůry.** Tento spůsob zakládá se na výtvarném zákonu ellipsy, a užívá se zvláště tam, kde má míti ellipsa rozměry velké, jako na př. v zahradách k omezení záhonů nebo na sbitých prknech k rozličným potřebám řemeslnickým. Za tím účelem vezme se šňůra o něco málo delší než větší osa; na koncích jejích udělají se oka tak, aby, když se sdrhnou, rovnala se délka šňůry délce větší osy. Tato oka navleknou se potom na kolíky v ohniskách zaražené, načež se šňůra dřevěným nebo železným rydlem nebo tužkou

napne. Točí-li se potom rydlem kolem středu ellipsy tak, aby byla šňůra pořád stejně napjata, vytvoří se ellipsa, neboť jest stále součet průvodičů roven velké ose.

§. 151. Úkoly ku cvičení.

1) Jak velka jest velká osa ellipsy, v níž měří malá osa 1 m a výstřednosť 3 dm?

2) Vypočítati délku malé osy ellipsy, v níž měří výstřednosť 0·34 m a velká osa 1·3 m.

3) Stanoviti polohu ohnisek ellipsy vzhledem ku krajním bodům osy velké, měří-li osa velká 60 dm a osa malá 45 dm.

4) Vypočítati obsah roviny ellipsou omezené, v níž měří velká osa 18 dm a osa malá 12 dm.

5) Jak velkou plochu zaujímá elliptický záhon květinový $6^1/_2$ m dlouhý a $4^3/_4$ m široký?

6) Okolo elliptického záhonu 6.4 m dlouhého a 4·6 m širokého jde cesta 1·3 m široká; jak velkou plochu zaujímá cesta tato?

7) Vypočítati obsah roviny ellipsou omezené, 3·52 m dlouhé a 2.68 m široké.

8) Velká osa ellipsy měří 1·54 m, výstřednosť 1·1 m; vypočítati a) délku osy malé, b) obsah roviny touto ellipsou omezené.

9) Malá poloosa ellipsy měří 2·9 m, výstřednosť 0·9 m; vypočítati a) délku poloosy velké, b) měrné číslo obsahu roviny touto ellipsou omezené.

10) Měří-li poloosy ellipsy 21 dm a 11 dm, vypočítati délku strany čtverce téhož obsahu jako rovina touto ellipsou omezená $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

11) Vypočítati délku poloosy menší ellipsy, v níž měří poloosa větší $3^3/_5$ dm, rovná-li se obsah roviny touto ellipsou omezené obsahu kruhu, jehož poloměr měří 3 dm.

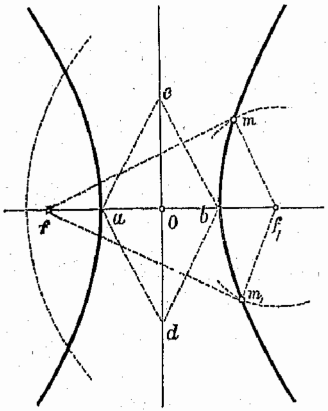
12) Vypočítati délku strany rovnostranného trojúhelníku téhož obsahu jako rovina omezená ellipsou v příkladu desátém uvedenou.

13) Dán jest obdélník 9·42 dm dlouhý a 4 dm široký; vypočítati délku malé poloosy ellipsy, omezující rovinu téže *velikosti jako daný obdélník, v níž měří poloosa větší 5 dm* ($\pi = 3{\cdot}14$).

14) Jak velký jest poloměr kruhu téhož obsahu jako rovina ellipsou omezená, v níž měří poloosy 6·4 dm a 2·5 dm?

O hyperbole.

§. 152. Dány-li jsou 3 body f, f_1 a m (obr. 170.), z nichž buďtež dva (f a f_1) pevny a třetí (m) hybný. Pohybuje-li se bod m v rovině tak, aby v každé jeho poloze rozdíl jeho vzdálenosti od obou bodů pevných f a f_1 tedy $mf - mf_1$ byl tentýž jako v poloze původní, tedy vytvoří pohybem tím linii křivou, jež sluje hyperbolou. Je-li m_1 poloha bodu hybného m, jest



Obr. 170.

$$mf - mf_1 = m_1f - m_1f_1.$$

Hyperbola jest tudíž geometrické místo všech bodů v rovině tak položených, aby rozdíl jejich vzdáleností ode dvou pevných bodů měl určitou stálou délku.

Pevné body f a f_1 slovou ohniska hyperboly a vzdálenosti mf a mf_1 průvodici (průvodiči) bodu m.

Při svém pohybu přijde bod m dvakráte do přímé linie ff_1 v bodu a i b. Body tyto slovou vrcholy a délka ab osou hlavní hyperboly. Poněvadž jsou a i b body hyperboly, jest

$$fb - bf_1 = af_1 - af \text{ aneb}$$
$$fa + ab - bf_1 = f_1b + ab - af \text{ a tedy}$$
$$2af + ab = 2bf_1 + ab, \text{ pročež též}$$
$$af = bf_1, \text{ tedy}$$

vzdálenosť jednoho vrcholu hyperboly od ohniska rovná se vzdálenosti druhého vrcholu od ohniska druhého.

Poněvadž střed osy ab jest středem hyperboly, jest i tento od obou ohnisek stejně vzdálen.

Vzdálenosť ohniska ode středu sluje výstřednosť (linearní) a označuje se jako při ellipse písmenem e.

Poněvadž jest

$$fm - fm_1 = af_1 - af \text{ a } af = bf_1$$

jest též $fm - fm_1 = af_1 - bf_1 = ab$ t. j.

Rozdíl průvodců každého bodu hyperboly rovná se hlavní ose její.

Vzhledem k této větě lze říci: **Hyperbola jest křivá linie, při níž rozdíl průvodců každého jejího bodu roven jest hlavní její ose.**

Hyperbola není linie v sobě uzavřená, nýbrž skládá se ze dvou shodných, do nekonečna jdoucích větví, jež se prodlouženou osou hlavní rozpolují.

Opíší-li se kolem vrcholu hyperboly kružnice poloměrem rovným výstřednosti, tedy stanoví přímka cd průsečíky těchto kružnic spojující vedlejší osu hyperboly a stojí ve středu na hlavní osy kolmo (neb jsou $\triangle\ abc$ a abd rovnoramenné).

Vedlejší osa nemá s hyperbolou bodů společných a sluje proto též osou imaginarní (pomyslnou) na rozdíl od osy hlavní čili realní (skutečné).

I při hyperbole označuje se poloosa realní písmenem **a**, poloosa imaginarní písmenem **b**.

Z $\triangle\ aoc$ plyne $e^2 = a^2 + b^2$, z čehož následuje

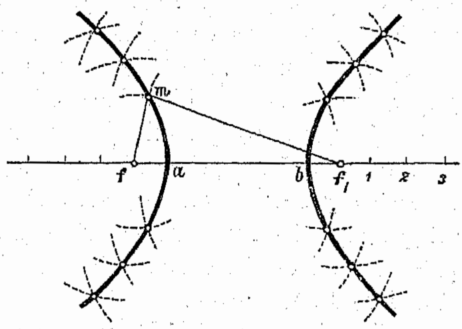
$$e = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = \sqrt{e^2 - b^2},\ b = \sqrt{e^2 - a^2},$$ t. j.

ze dvou z těchto tří veličin lze vypočítati veličinu třetí.

§. 153. **Sestrojiti dostatečný počet bodů hyperboly dané osou hlavní a oběma ohnisky.**

Jsou-li v obr. 171. a a b vrcholy a f a f_1 ohniska, tedy jest ab osou hlavní. Zvolí-li se na ose hlavní bod 1, a opíší-li se z obou ohnisek oblouky jednak poloměrem $a1$, jednak poloměrem $b1$, tedy jsou průsečíky těchto oblouků body hyperboly, neboť jest na př. pro bod $m \ldots f_1m = a1$ a $fm = b1$, tudíž

$f_1m - fm = a1 - b1 = ab.$



Obr. 171.

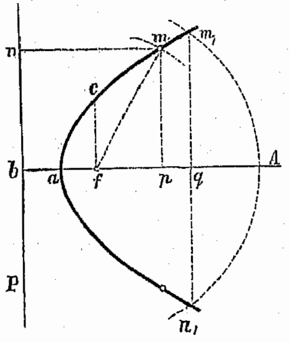
Podobným spůsobem dá každý jiný bod na př. bod $2., 3. \ldots$ zvolený na ose hlavní nové čtyři body hyperboly, jež se tímto spůsobem sestrojí.

O parabole.

§. 154. Dány-li jsou přímá linie a mimo ni ležící bod jako útvary nehybné, a pohybuje-li se bod tak, aby v každé poloze své měl tutéž vzdálenosť i od dané přímé linie i od daného bodu, tedy vytvoří linii křivou, která se nazývá parabolou.

Parabola jest dle toho geometrické místo bodů, které mají od dané přímé linie i od daného bodu rovné vzdálenosti.

Daná přímá linie sluje přímkou řídící a daný nehybný bod ohniskem paraboly.



Obr. 172.

Je-li v obr. 172. P přímkou řídící a f ohniskem paraboly, a spustí-li se s f na P kolmice A, tedy jest tato kolmice A osou paraboly. Bod uprostřed vzdálenosti ohniska od přímky řídící ležící jest dle zákona výtvarného bodem paraboly a sluje vrchol. Je-li a vrcholem paraboly; tedy jest

$$ab = af.$$

Pro bod paraboly m musí býti $mn = mf$.

Spustí-li se s bodu m na osu A kolmice mp, jest $bp = mn = mf$. Na základě toho lze body paraboly na kolmicích k ose A snadno obdržeti, protnou-li se totiž tyto kolmice z ohniska (jako středu) kruhovými oblouky, jichž poloměry rovnají se vzdálenostem kolmic těch od přímky řídící. Protne-li se na př. kolmice v q na A vztyčená obloukem opsaným kolem ohniska poloměrem rovným bq, budou takto stanovené průsečíky m_1 a n_1 body paraboly; neb jest $fm_1 = fn_1 = bq$. Takto lze na každé na osu vztyčené kolmici, která jest vzdálenější od přímky řídící než vrchol paraboly, dva k ose souměrně položené body stanoviti; pročež jest osa paraboly též osou souměrnosti. Jelikož by i na kolmici od přímky řídící nekonečně vzdálené stanoviti se daly dva body paraboly od ohniska nekonečně vzdálené, jest parabola křivou linií nekonečnou.

Kolmice fc v ohnisku na osu paraboly vztyčená sluje parameter a označuje se obyčejně písmenem p. Jelikož jest $fc = fb$, **udává parameter vzdálenosť ohniska od přímky řídící.**

Poznámka. Parabola se v životě praktickém často vyskytuje. Těleso vodorovně nebo šikmě vržené opisuje parabolu, z roury vytékající paprsek vody opisuje oblouk parabolický; mnohá zrcadla, naslouchátka atd. mají podobu parabolickou.

§. 155. **Stanoviti vzdálenosť bodů paraboly od osy.** Je-li v obr. 172. m libovolně zvolený bod paraboly a označí-li se vzdálenosť jeho od osy $mp = y$ a vzdálenosť $ap = x$, tedy jest, je-li parameter $p = bf$,

$$fm = bp = ba + ap = \frac{p}{2} + x.$$

V pravoúhlém $\triangle\ mfp \ldots y^2 = fm^2 - fp^2$

$$y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = 2px$$

$$y^2 = 2px.$$

$$y = \sqrt{2px}.$$

Následek. Z rovnice $y^2 = 2px$ plyne

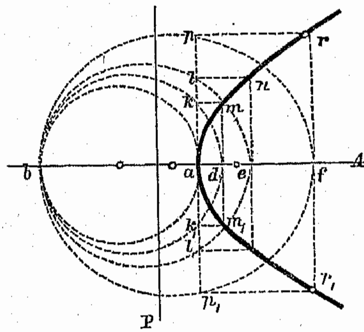
$$2p : y = y : x \text{ t. j.}$$

vzdálenosť bodu paraboly jest střední měřickou srovnalostnou mezi dvojnásobným parametrem a vzdáleností stopy kolmice na osu spuštěné od vrcholu. Na tom zakládá se následující konstrukce bodů paraboly dané ohniskem a parametrem.

Budiž v obr. 173. $ab = 2p$ a a vrcholem paraboly. Zvolí-li se na ose A paraboly kterýkoli bod na př. d, a opíše-li se nad bd jako průměrem kružnice a vztyčí-li se v a na A kolmice, tedy jest ak střední měřicky srovnalostná mezi

ba a ad; je-li $ad = x$, jest

$$2p : ak = ak : x;\ \text{t. j.}$$



Obr. 173.

ak udává vzdálenosť bodů na kolmici v d od osy; tyto body m a m_1 se tudíž snadno sestrojí. — Podobným spůsobem lze dostatečný počet bodů paraboly stanoviti.

Následkem vzdálenosti spisovatele od místa tiskárny vloudilo se do knihy několik nemilých chyb tisku, za jejichž laskavé opravení tímto žádáme, a sice:

Na str. 13 řádek 10. zdola místo $\sphericalangle\alpha+\beta = 2R$ má státi $\sphericalangle\alpha+\gamma = 2R$.
„ „ 13. „ 9. „ „ $\sphericalangle\delta = \beta$ má státi $\sphericalangle\alpha = \beta$.
„ „ 95. „ 4. a 6. shora místo $a_2 : b_2$ „ „ $a^2 : b^2$.
„ „ 95. „ 3. zdola místo $=$ uvnitř první závorky má státi $+$.
„ „ 96. „ 2. „ „ $\frac{1}{2} + v$ má státi $\frac{1}{2}s + v$.
„ „ 107. v obrazci 131. schází číslice 1 v levo vedle písmene b.
„ „ 109. řádek 9. zdola místo $x : v$ má státi $x : v - x$.
„ „ 123. „ 12. „ „ $ac_1 - c_1b$ má státi $cc_1 - c_1b$.
„ „ 125. „ 5. shora „ $ca - r$ „ „ $ca - r_1$.
„ „ 125. „ 6. „ „ cc_1 má státi $ca - cc_1$.
„ „ 134. „ 3. „ „ $\frac{2r\sqrt{3}}{\sqrt{4r^2 - 3r^2}}$ má státi $\frac{2r^2\sqrt{3}}{\sqrt{4r^2 - 3r^2}}$
„ „ 138. „ 5. zd. místo $\sqrt{\frac{s_{12}^2}{2-\sqrt{3}} - \frac{s_{12}}{4}}$ má státi $\sqrt{\frac{s_{12}^2}{2-\sqrt{3}} - \frac{s_{12}^2}{4}}$
„ „ 138. „ předposlední a poslední místo 2·732 má státi 3·732.
„ „ 138. „ poslední místo 32·784 □dm. má státi 44·784 □dm.
„ „ 150. „ 17. zdola místo $(e + x)^2$ má státi $(e - x)^2$
„ „ 150. „ 13. „ „ $\frac{2ex}{2a}$ má státi $\frac{2ex}{a}$
„ „ 151. „ 6. shora „ $\frac{e^2x^2}{a}$ má státi $\frac{ex}{a}$
„ „ 151. „ 8. „ „ $\frac{ex}{a^2}$ má státi $\frac{e^2x^2}{a^2}$
„ „ 151. „ 11. „ „ $\frac{b^2x^2 + a^2b^2}{a}$ má státi $\frac{-b^2x^2 + a^2b^2}{a^2}$