NOVÝ NÁVOD

k

zmocňování a odmocňování výrazů algebraických

a čísel dekadických

s

příklady a přídavkem.

Studujícím středních škol

podává

ANNA AMORTOVA,

učitelka na obecné škole v Nové Pace.

V JIČÍNĚ.

Tiskem knihtiskárny F. Návesníka — Nákladem spisovatelky.

1883.

Předmluva.

Když mně v r. 1871.—73. v krajském městě Táboře svěřeno bylo vyučování mnoha studujících z 1.—5. ročníku realného gymnasia ve vědě počtářské, počala jsem přemýšleti o výhodách, jichž by se při mnohých výkonech početních dalo dosíci. O usnadnění práce při zmocňování výrazů algebraických a čísel dekadických pokusila jsem se úsilovně, položíc sama sobě k přesnému prozkoumání toho otázky následující:

1. Jest to nevyhnutelné říditi se při zmocňování mnohočlenů algebraických a čísel dekadických dle dvojmoci neb trojmoci dvoučlenů?

2. Jak bychom počínali sobě při zmocňování mnohočlenů algebraických, nedbajíce vzorů dvoučlenem vyvinutých?

3. Jak dlužno jednotlivé součiny druhé a třetí mocniny mnohočlenu algebraického sestaviti, aby pořádku toho i při číslech dekadických ohledně hodnoty místní jich cifer šetřeno býti mohlo?

Rozhodnutím otázek tuto vytknutých objeví se nám mnohá na sestavování, přestavování a obměňování jednotlivých členů mocněnce spočívající pravidla, jimiž základ ku prvé části spisku tohoto položen byl.

Úryvek práce této, toliko zmocňování čísel dekadických, uveřejnila jsem již zcela stručně r. 1878. v časopisu „Posel z Budče“, jsouc k tomu ještě v čas pobytu svého v Hoře Kutné z mnoha stran vybídnuta.

Od té doby pomýšlela jsem stále na spracování úplného celku započatého nálezu z mathematiky, kterážto práce nyní již ukončena jsouc, následující na prvý pohled již patrné výhody při zmocňování a odmocňování mnohočlenů vůbec podává, a sice:

1. Zmocňování výrazů algebraických a čísel dekadických dle prvého spůsobu podává řady samostatných součinů, jichž vývin zcela snadný jest a žádných vedlejších výpočtů kdesi stranou počtu nevyžaduje; zmocňování však dle druhého v dodatku obsaženého spůsobu podává souhrny jednotlivými členy mocněnce vznikajících sloupců součinů, jichž vývin s pořádkem posloupnosti vyvinutých řad se shoduje.

2. V případě, že by nedopatřením někde u výkonu početním při zmocňování výrazů algebraických neb čísel dekadických pochybeno bylo, může chyba toliko přehledem práce zpozorována a bez zrušení ostatního počtu opravena býti.

3. Odmocňování na základě nového způsobu zmocňování spočívající podává kromě snadného a přehledného vývinu odnímajících součinů ještě tu velkou výhodu, že pro stanovení každého následujícího členu kořene netřeba celého dělitele nýbrž toliko onu pomocnou hodnotu vyvinouti, jež k prvému členu hledaného kořene se vztahuje, a na onu odmyslením členů zbývající část dotyčného dělence, to jest zbytku s přivěšenou třídou příslušnou vliv má.

a) Pomocná hodnota, jež k prvému členu hledaného kořene se vztahuje, jest při výrazech algebraických pouze ona členu tomuto nadepsaná veličina, při číslech dekadických jest to též prvé číslici kořenové nadepsaná veličina číselná, ku kteréž však ještě ony číslice veličin sousedících přimysliti si dlužno, jež dle hodnoty místní pod číslice její spadají, o čemž teprv ve spisku tomto náležité známosti nabudeme. Nabyvše známosti této, nebude nám pak ani třeba ony prvé části dotyčných dělitelů písemně stanoviti, mohouce si tyto oněmi pomocnými hodnotami toliko v mysli utvořiti. Na příkladech ve spisku tomto uvedených stalo se písemní stanovení dotyčné části každého dělitele jak při oddvojmocňování tak i při odtrojmocňování čísel dekadických toliko na ukázku, jak si tuto v mysli pokaždé utvořiti lze; poslední příklady každého obou výkonů odmocňování čísel dekadických oněch částí dělitele tedy neobsahují.

b) Odmyslením členů zbývající část dotyčného dělence jest při výrazech algebraických vždy toliko prvý člen zbytku, při číslech dekadických jsou to však ony číslice, jež vybudou, odmyslíme-li si od zbytku s přivěšenou třídou příslušnou náležitý počet číslic, jež při oddvojmocňování vždy takový, při odtrojmocňování však dvakrát tak velký jest, jako počet již známých členů kořene.

4. Při zmocňování i odmocňování dle vzorců dvoučlenem vyvinutým, to jest

1) $a^2 + 2ab + b^2$,

2) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

jest nám pořádek po sobě následujících členů stále na zřeteli míti, k čemuž zajisté napnuté pozornosti třeba; dle nového návodu však této obtíže sproštěni jsouce, zcela pohodlně u výkonu početním dle jednoduchého pravidla pokračovati můžeme. Na základě vzorců výše vytknutých stává se počet zvláště s mnohočleny algebraickými prací nad pomyšlení obšírnou a obtížnou, tak že ani o věrnosti výsledku konečně ubezpečeni býti nemůžeme, nemajíce o postupu práce přehledu tak soustavného, jakéhož nabýti lze novým návodem, cestou to daleko pohodlnější, kterouž tak značná úspora práce a času získána býti může. — Co se dotýče příkladů, jež jsem tuto pro každý výkon početní při zmocňování a odmocňování mnohočlenů vůbec volila, připomínám, že při tom hlavně zřetel k tomu jsem měla, by se jimi studujícím hojného poučení o operacích s obecnými i zvláštními čísly celistvými, lomenými, nesměrnými a pomyslnými dostalo; k účelu tomu podávám tedy větší počet příkladů, než jak právě nutnosť pojednaných pravidel o věci samé vyžaduje. —

Byvši vybídnuta velezasloužilým panem ředitelem Balcarem na Novém městě v Praze, bych veškeré úkoly z pěti ročníků kalendáře učitelského veřejnosti podala, počínám tuto toliko dvěma ročníky a připojuji práci tu co druhou část k prvé části dílka tohoto. Postup práce každého úkolu snažila jsem se tak podati, by jeho prostudování i méně pokročilým žákům přístupné bylo, jsouc co samouk sama na sobě pevně přesvědčena o tom, že jen sledováním postupu práce rozřešených úkolů studujícím poznenáhla mnohé poučky mathematické se objasňují a spůsobem takovým osvojené trvalého základu nabývají; mluvíť často příklady řádně rozřešené k žákům zřejměji než pouhá slovy podaná pravidla! —

Konečně dovoluji si ještě připomenouti, že ony velmi nesnadné úkoly posledních tří ročníků kalendáře učitelského, jimiž by studujícím tříd vyšších značná pomoc k osvojení si mnohých pouček z mathematiky vzejíti mohla, jen za příznivého podporování tohoto dílka uveřejním. Kéž by se spisku tomuto od ctěného obecenstva milého přijmutí dostalo, abych, tím povzbuzena jsouc, ještě mnohé užitečné dílo ze sbírky svých prací z mathematiky veřejnosti podati se odvážila!

V NOVÉ PACE, dne 23. m. října 1882.

Anna Amortova.

Prvá část:

Nový návod k zmocňování a odmocňování výrazů algebraických a čísel dekadických.

Oddíl prvý.

Návod k zmocňování výrazů algebraických a čísel dekadických.

I. Zdvojmocňování.

Jelikož při násobení dvou algebraických výrazů každý jednotlivý člen násobence každým jednotlivým členem násobitele násobiti dlužno, shledáváme při násobení dvou rovných mnohočlenů:

1. že každý člen násoben jest sám sebou a každým všech ostatních členů;

2. že kromě součinů členů z týchž míst, totiž čtverců, vždy dva a dva součiny sobě rovny jsou; to jest za příčinou vzájemného násobení členů ze dvou nestejných míst.

Z toho pochodí následující věta:

„Druhá mocnina algebraického mnohočlenu jest součet součinů všech obměn druhé třídy s opakováním; to jest, že se skládá z čtverců jednotlivých členů a dvojnásobných součinů každých dvou členů“.

Pro přehled, jak ony čtverce a dvojené součiny, z nichž druhá mocnina nějakého mnohočlenu se skládá, z jednotlivých členů mocněnce vyvinovati a sestaviti dlužno, aby pořádku toho i při číslech dekadických ohledně hodnoty místní jich cifer šetřeno býti mohlo, stůjž zde zdvojmocnění pětičlenu

$$„(a+b+c+d+e)“,$$

a sice:

$$(a+b+c+d+e)^2=?$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \\ 2ab+2bc+2cd+2de \\ 2ac+2bd+2ce \\ 2ad+2be \\ 2ae \end{array}\right\}=s$$

Z toho zřejmo:

1. že každým následujícím členem mocněnce mocnině vždy o jeden dvojnásobný součin zvětšený sloupec součinů přibude; tudíž kolik členů mocněnec, tolik sloupců součinů mocnina obsahuje;

2. že vyvinování druhé mocniny mnohočlenu algebraického díti se může dle naznačení buď po jednotlivých členech mocněnce, čímž sloupce, aneb po jednotlivých součinech sloupců, čímž řady součinů

vycházejí; jak tohoto a onoho spůsobu při zdvojmocňování mnohočlenu užíti se má, zřejmo z výše uvedeného zdvojmocnění pětičlenu. Nebude však od místa, jestliže oba spůsoby, jež nám z hořejšího naznačení zřejmě se jeví, tuto slovy vytkneme a sice:

a) Sloupce součinů každým následujícím členem mocněnce mocniné přibývající vyvinouti lze, jestliže nejprve čtverec dotyčného členu stanovíme, a pak postoupně od pravé ruky k levé předcházející členy mocněnce členem dotyčným násobíme, a zdvojnásobněné součiny ty v pořádku, jak po sobě následují, pod sebe umístíme.

Podává tudíž od levé ruky

1. člen mocněnce toliko čtverec svůj:
2. „ čtverec svůj a dvojnásobný součin z členu předešlého a členu dotyčného;
3. „ čtverec svůj a dvojnásobné součiny z členů předešlých a členu dotyčného;
4. „ čtverec svůj a dvojnásobné součiny z členů předešlých a členu dotyčného a t. d.

Tak se pokračuje, až se nabude sloupce součinů k poslednímu členu mocněnce se vztahujícího, čímž vyvinování součinů veškerých sloupců ukončeno jest.

b) Řady součinů jednotlivými součiny sloupců vznikající vyvinouti lze pořádkem následujícím:

1. řada obsahuje čtverce jednotlivých členů;
2. „ dvojnásobný součin každých dvou vedle sebe stojících členů;
3. „ dvojnásobný součin každých dvou ob jedno místo stojících členů;
4. „ dvojnásobný součin každých dvou ob dvě místa stojících členů;
5. „ dvojnásobný součin každých dvou ob tři místa stojících členů a t. d.

Tak se pokračuje, až se nabude dvojnásobného součinu z prvého a posledního členu mocněnce, čímž vyvinování součinů veškerých řad ukončeno jest.

Vše, co tuto o zdvojmocňování mnohočlenů algebraických podáno bylo, dá se i při zdvojmocňování čísel dekadických s výhodou skutečně nemalou užiti, a sice:

Uvážíme-li, že každý čtverec číslice místa nejblíže vyššího jakož i dvojnásobný součin každých dvou nejblíže vyšších míst vždy o dvě místa, nejbližší však součin každého sloupce o jedno místo dále v levo náleží, jest pořádek vyvinování jednotlivých součinů druhé mocniny výše uvedeného naznačení, nechť se to po sloupcích neb řadách děje, úplně objasněn.

Pro přehled, jak druhou mocninu čísla dekadického po sloupcích neb řadách vyvinovati dlužno, stůjtež zde součiny druhé mocniny čísla „45746“ od sebe jednotlivě odděleny, a sice:

$$45746^2 = ?$$

16	25	49	16	36
	40	70	56	48
		56	40	84
			32	60
				48

Jelikož každému z těchto součinů za příčinou hodnoty místní v pravo dvakrát tak velký počet nul náleží, jaký jest počet v pravo stojících sloupců, a součiny veškerých těchto sloupců dvoucifernými čísly jsou: splývá každá řada součinů těch v číslo jediné, a sice:

1625491636
40705648
564084
3260
48

Nejsou však vždycky, jak známo, čtverce a dvojnásobné součiny druhé mocniny čísla dekadického čísly dvoucifernými; mohou to býti též čísla jedno- neb i tříciferná; poslední toliko dvojnásobným součinům platí. V případě tom, rozumí se samo sebou, dlužno číslům jednociferným nullu předložiti, a číslici místa třetího čísel tříciferných, totiž jednotku, k nejblíže vyššímu součinu téže řady připočítati.

Jelikož připočítávání toto při vyvinování druhé mocniny po sloupcích jednotlivých číslic mocněnce překážkou býti se jeví, řiďme se při zdvojmocňování čísel dekadických raději pořádkem hořeji pod *b)* uvedeným, při čemž počnouce stanovením čtverců jednotlivých číslic mocněnce tyto od levé ruky k pravé v jedno číslo splynouti nechme; na to počnouce od pravé ruky k levé vždy o jedno místo dále v levo dvojnásobné součiny každé řady též v jedno číslo splynouti nechme, pamětlivi jsouce při tom předkládání nully číslům jednociferným a připočítávání číslice místa třetího k nejblíže vyššímu dvojnásobnému součinu téže řady.

Připomenutí. Přicházejí-li v mocněnci nully, stávají se mnohdy celé řady nullami, po případě jednou neb několika jen číslicemi, k jichž hodnotě místní, umísťujíce je, přihlížeti dlužno: nully nemístné mohou vynechány a řady mnohé s jinými v jednu řadu spojeny býti. Dále rozumí se samo sebou, že číslici třetího místa tříciferného součinu na konci u levé ruky vypsati dlužno, a též že netřeba v případě takovém jednociferným součinům nully předložiti.

Příklady.

1. Zdvojmocňování dvoučlenů.

$$\begin{array}{c} (a+b)^2 = ? \\ \hline a^2 + b^2 \\ 2\,ab \\ \hline a^2 + 2\,ab + b^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \overline{12}^2 = ? \\ \hline 104 \\ 4 \\ \hline 144; \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{25}^2 = ? \\ \hline 425 \\ 20 \\ \hline 625; \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{39}^2 = ? \\ \hline 981 \\ 54 \\ \hline 1521; \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{58}^2 = ? \\ \hline 2564 \\ 80 \\ \hline 3364; \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{92}^2 = ? \\ \hline 8104 \\ 36 \\ \hline 8464. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = ? \\ \hline a^2 + \frac{1}{a^2} \\ -2 \\ \hline a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}; \end{array} \qquad \begin{array}{c} \left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 = ? \\ \hline \frac{1}{a^2} + 1 \\ -\frac{2}{a} \\ \hline \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + 1; \end{array} \qquad \begin{array}{c} (2\,a + 3\,b)^2 = ? \\ \hline 4\,a^2 + 9\,b^2 \\ 12\,ab \\ \hline 4\,a^2 + 12\,ab + 9\,b^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (3\,x - 2\,y)^2 = ? \\ \hline 9\,x^2 + 4\,y^2 \\ -12\,xy \\ \hline 9\,x^2 - 12\,xy + 4\,y^2; \end{array} \qquad \begin{array}{c} (5 + 4\,m)^2 = ? \\ \hline 25 + 16\,m^2 \\ +40\,m \\ \hline 25 + 40\,m + 16\,m^2; \end{array} \qquad \begin{array}{c} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right)^2 = ? \\ \hline \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} \\ \frac{2\,ab}{xy} \\ \hline \frac{a^2}{x^2} + \frac{2\,ab}{xy} + \frac{b^2}{y^2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left(\frac{2\,x}{3\,a} - \frac{3\,y}{4\,b}\right)^2 = ? \\ \hline \frac{4\,x^2}{9\,a^2} + \frac{9\,y^2}{16\,b^2} \\ -\frac{xy}{ab} \\ \hline \frac{4\,x^2}{9\,a^2} - \frac{xy}{ab} + \frac{9\,y^2}{16\,b^2}; \end{array} \qquad \begin{array}{c} \left(\frac{3\,x^2}{4\,y^2} - \frac{4\,y^2}{3\,x^2}\right)^2 = ? \\ \hline \frac{9\,x^4}{16\,y^4} + \frac{16\,y^4}{9\,x^4} \\ -2 \\ \hline \frac{9\,x^4}{16\,y^4} - 2 + \frac{16\,y^4}{9\,x^4}. \end{array}$$

$$\begin{array}{c}(2a+3\sqrt{b})^2=?\\ \hline 4a^2+9b\\ 12a\sqrt{b}\\ \hline 4a^2+12a\sqrt{b}+9b.\end{array}\qquad\begin{array}{c}(2-3\sqrt{5})^2=?\\ \hline 4+45\\ -12\sqrt{5}\\ \hline 49-12\sqrt{5}.\end{array}$$

$$\begin{array}{c}(3x^2\sqrt{y}-2y^2\sqrt{x})^2=?\\ \hline 9x^4y+4xy^4\\ -12x^2y^2\sqrt{xy}\\ \hline 9x^4y-12x^2y^2\sqrt{xy}+4xy^4;\end{array}\qquad\begin{array}{c}(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2=?\\ \hline 18+12\\ -12\sqrt{6}\\ \hline 30-12\sqrt{6}.\end{array}$$

$$\begin{array}{c}(\sqrt{2x+a}-\sqrt{2x-a})^2=?\\ \hline (2x+a)+(2x-a)\\ -2\sqrt{4x^2-a^2}\\ \hline 4x-2\sqrt{4x^2-a^2};\end{array}\qquad\begin{array}{c}(\sqrt{a}-b\sqrt{-1})^2=?\\ \hline a+b^2(-1)\\ -2b\sqrt{-a}\\ \hline a-2b\sqrt{-a}-b^2.\end{array}$$

$$\begin{array}{c}(2-3\sqrt{-1})^2=?\\ \hline 4+9(-1)\\ -12\sqrt{-1}\\ \hline -5-12\sqrt{-1};\end{array}\qquad\begin{array}{c}(3-\sqrt{-5})^2=?\\ \hline 9+(-5)\\ -6\sqrt{-5}\\ \hline 4-6\sqrt{-5};\end{array}\qquad\begin{array}{c}(\sqrt{2}-\sqrt{-2})^2=?\\ \hline 2+(-2)\\ -4\sqrt{-1}\\ \hline -4\sqrt{-1}.\end{array}$$

2. Zdvojmocňování trojčlenů.

$$\begin{array}{c}(a+b+c)^2=?\\ \hline a^2+b^2+c^2\\ 2ab+2bc\\ 2ac\\ \hline a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\overline{1}\overline{45}^2=?\\ \hline 11625\\ 840\\ 10\\ \hline 21025;\end{array}\quad\begin{array}{c}\overline{4}\overline{13}^2=?\\ \hline 160109\\ 806\\ 24\\ \hline 170569;\end{array}\quad\begin{array}{c}\overline{3}\overline{89}^2=?\\ \hline 96481\\ 4944\\ 54\\ \hline 151321;\end{array}\quad\begin{array}{c}\overline{9}\overline{69}^2=?\\ \hline 813681\\ 10908\\ 162\\ \hline 938961;\end{array}\quad\begin{array}{c}\overline{8}\overline{78}^2=?\\ \hline 644964\\ 11312\\ 128\\ \hline 770884;\end{array}$$

$$\begin{array}{c}(3x+5y+8z)^2=?\\ \hline 9x^2+25y^2+64z^2\\ 30xy+80yz\\ 48xz\\ \hline 9x^2+30xy+25y^2+48xz+80yz+64z^2.\end{array}$$

$$\left(2-\frac{a}{2}+\frac{2a^2}{3}\right)^2=?$$

$$4+\frac{a^2}{4}+\frac{4a^4}{9}$$
$$-2a-\frac{2a^3}{3}$$
$$\frac{8a^2}{3}$$

$$4-2a+\frac{35a^2}{12}-\frac{2a^3}{3}+\frac{4a^4}{9}.$$

$$\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3c}{4d}+\frac{4e}{5f}\right)^2=?$$

$$\frac{4a^2}{9b^2}+\frac{9c^2}{16d^2}+\frac{16e^2}{25f^2}$$
$$\frac{ac}{bd}+\frac{6ce}{5df}$$
$$\frac{16ae}{15bf}$$

$$\frac{4a^2}{9b^2}+\frac{ac}{bd}+\frac{9c^2}{16d^2}\frac{16ae}{15bf}+\frac{6ce}{5df}+\frac{16e^2}{25f^2}.$$

$$\left(\frac{a^3}{2b}-\frac{a^2}{3b^2}-\frac{a}{4b^3}\right)^2=?$$

$$\frac{a^6}{4b^2}+\frac{a^4}{9b^4}+\frac{a^2}{16b^6}$$
$$-\frac{a^5}{3b^3}+\frac{a^3}{6b^5}$$
$$-\frac{a^4}{4b^4}$$

$$\frac{a^6}{4b^2}-\frac{a^5}{3b^3}-\frac{5a^4}{36b^4}+\frac{a^3}{6b^5}+\frac{a^2}{16b^6}.$$

$$(1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2=?$$

$$1+8+27$$
$$-4\sqrt{2}-12\sqrt{6}$$
$$+\ 6\sqrt{3}$$

$$36-4\sqrt{2}-12\sqrt{6}+6\sqrt{3};$$

$$(a^2+2a\sqrt{-b}-b)^2=?$$

$$a^4+4a^2(-b)+b^2$$
$$4a^3\sqrt{-b}-4ab\sqrt{-b}$$
$$-2a^2b$$

$$a^4-6a^2b+4(a^3-ab)\sqrt{-b}+b^2.$$

3. Zdvojmocňování čtyřčlenů.

$$
\begin{array}{r}
(a+b+c+d)^2 = ? \\
\hline
a^2+b^2+c^2+d^2 \\
2\,ab+2\,bc+2\,cd \\
2\,ac+2\,bd \\
2\,ad \\
\hline
a^2+2\,ab+b^2+2\,(a+b)\,c+c^2+2\,(a+b+c)\,d+d^2.
\end{array}
$$

$\overline{1428}^2 = ?$	$\overline{5739}^2 = ?$	$\overline{8796}^2 = ?$	$\overline{9898}^2 = ?$	$\overline{7987}^2 = ?$
1160464	25490981	64498136	81648164	49816449
81632	704254	1132708	1454544	1274512
464	3126	14484	16328	11326
16	90	96	144	98
2039184;	32936121;	77369616;	97970404;	63792169;

$$
\begin{array}{r}
(6\,x^3-5\,x^2+4\,x-3)^2 = ? \\
\hline
36\,x^6+25\,x^4+16\,x^2+9 \\
-60\,x^5-40\,x^3-24\,x \\
48\,x^4+30\,x^2 \\
-36\,x^3 \\
\hline
36\,x^6-60\,x^5+73\,x^4-76\,x^3+46\,x^2-24\,x+9.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
(a^3+a^2\,b+ab^2+b^3)^2 = ? \\
\hline
a^6+a^4\,b^2+a^2\,b^4+b^6 \\
2\,a^5\,b+2\,a^3\,b^3+2\,ab^5 \\
2\,a^4\,b^2+2\,a^2\,b^4 \\
2\,a^3\,b^3 \\
\hline
a^6+2\,a^5\,b+3\,a^4\,b^2+4\,a^3\,b^3+3\,a^2\,b^4+2\,ab^5+b^6.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\left(\frac{x^3}{a^3}-\frac{2\,x^2}{3\,a^2}+\frac{4\,x}{a}-1\right)^2 = ? \\
\hline
\frac{x^6}{a^6}+\frac{4\,x^4}{9\,a^4}+\frac{16\,x^2}{a^2}+1 \\
-\frac{4\,x^5}{3\,a^5}-\frac{16\,x^3}{3\,a^3}-\frac{8\,x}{a} \\
\frac{8\,x^4}{a^4}+\frac{4\,x^2}{3\,a^2} \\
-\frac{2\,x^3}{a^3} \\
\hline
\frac{x^6}{a^6}-\frac{4\,x^5}{3\,a^5}+\frac{76\,x^4}{9\,a^4}-\frac{22\,x^3}{3\,a^3}+\frac{52\,x^2}{3\,a^2}-\frac{8\,x}{a}+1.
\end{array}
$$

$$(69+\sqrt{-3}-6\sqrt{-5}-7\sqrt{15})^2=?$$

$$\begin{array}{r}
\hline
4761+(-3)+36(-5)+49.15 \\
138\sqrt{-3}+12\sqrt{15}+84\sqrt{-75} \\
-828\sqrt{-5}-14\sqrt{-45} \\
-966\sqrt{15} \\
\hline
5313+558\sqrt{-3}-870\sqrt{-5}-954\sqrt{15}.
\end{array}$$

$$(a-2b\sqrt{2}+2c\sqrt{-2}-di)^2=?$$

$$\begin{array}{r}
\hline
a^2+8b^2-8c^2-d^2 \\
-4ab\sqrt{2}-16bci+4cd\sqrt{2} \\
+4ac\sqrt{-2}+4bd\sqrt{-2} \\
-2adi \\
\hline
a^2+8b^2-8c^2-d^2-4(ab-cd)\sqrt{2}+4(ac+bd)\sqrt{-2} \\
-(16bc+2ad)i.
\end{array}$$

4. Zdvojmocňování pětičlenů.

$$(a+b+c+d+e)^2=?$$

$$\begin{array}{r}
\hline
a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \\
2ab+2bc+2cd+2de \\
2ac+2bd+2ce \\
2ad+2be \\
2ae \\
\hline
a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2+ \\
2(a+b+c+d)e+e^2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\overline{31112}^2=? & \overline{12314}^2=? & \overline{54386}^2=? & \overline{78596}^2=? \\
\hline
901010104 & 104090116 & 2516096436 & 4964258136 \\
6020204 & 4120608 & 40244896 & 112809108 \\
60204 & 60424 & 306436 & 714460 \\
604 & 216 & 8048 & 12696 \\
12 & 8 & 60 & 84 \\
\hline
967956544; & 151634596; & 2957836996; & 6177331216;
\end{array}$$

$$(4-8a-3a^2+a^3+2a^4)^2=?$$

$$\begin{array}{r}
\hline
16+64a^2+9a^4+a^6+4a^8 \\
-64a+48a^3-6a^5+4a^7 \\
-24a^2-16a^4-12a^6 \\
8a^3-32a^5 \\
16a^4 \\
\hline
16-64a+40a^2+56a^3+9a^4-38a^5-11a^6+4a^7+4a^8.
\end{array}$$

$$\left(\frac{31\,a^4}{81}-\frac{38\,a^3}{27}+\frac{38\,a^2}{81}-\frac{25\,a}{81}+1\right)^2=?$$

$$\frac{961\,a^8}{6561}+\frac{1444\,a^6}{729}+\frac{1444\,a^4}{6561}+\frac{625\,a^2}{6561}+1$$
$$-\frac{2356\,a^7}{2187}-\frac{2888\,a^5}{2187}-\frac{1900\,a^3}{6561}-\frac{50\,a}{81}$$
$$\frac{2356\,a^6}{6561}+\frac{1900\,a^4}{2187}+\frac{76\,a^2}{81}$$
$$-\frac{1550\,a^5}{6561}-\frac{76\,a^3}{27}$$
$$\frac{62\,a^4}{81}$$

$$\frac{961\,a^8}{6561}-\frac{2356\,a^7}{2187}+\frac{15352\,a^6}{6561}-\frac{10214\,a^5}{6561}+\frac{12166\,a^4}{6561}-\frac{20368\,a^3}{6561}+$$
$$\frac{6781\,a^2}{6561}-\frac{50\,a}{81}+1.$$

Dodatek.

Návod k zdvojmocňování výrazů algebraických a čísel dekadických vyvinováním souhrnů jednotlivými členy mocněnce vznikajících sloupců součinů.

Jak z předcházejícího již známo, vzniká každým členem mocněnce sloupec součinů pozůstávající

a) z čtverce členu dotyčného,

b) z dvojených členů předešlých, dotyčným členem násobených, a tudíž obdržíme souhrny jednotlivými členy mocněnce vznikajících sloupců součinů spůsobem následujícím:

a) Každému členu mocněnce, vyjma posledního, nadepišme jeho dvojnásobnou hodnotu, při číslech dekadických mějmež však, zřetel k tomu, že hodnota místní číslice místa druhého každé dvojnásobné hodnoty jest táž, jako místní hodnota jednotek dvojnásobné hodnoty předcházející.

b) Násobme každým do počtu vzatým členem mocněnce nejprve jeho vlastní hodnotu a pak dvojnásobné hodnoty členů předcházejících; buďme však při počítání tom ohledně čísel dekadických pamětlivi toho, že od každého součinu toliko jednotky vypsati a ostatní část součinu k součinu následujícímu připočítati dlužno, jelikož každý následující součin téhož sloupce, jak z příkladů v předu uvedených zřejmo, o jedno místo dále v levo náleží.

Co se týče hodnoty místní vyšetřených souhrnů, totiž součtů jednotlivých sloupců součinů, jeví se nám na příkladech v předu uvedených dosti zřejmě, že každý následující souhrn o dvě místa dále v pravo náleží; následovně bude nám prvé dvě číslice míst nejnižších každého následujícího souhrnu o dvě místa dále v pravo umístiti.

Součet veškerých souhrnů jest druhou mocninou daného výrazu algebraického neb čísla dekadického.

Příklady.

$$(a+b)^2 = ?$$
$$\begin{array}{l} \quad 2a \\ \quad a+b \\ \hline \qquad a^2 \\ \quad 2ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overline{25}^2 = ? \\ \hline 4 \\ 25 \\ \hline 4 \\ 225 \\ \hline 625; \end{array} \qquad \begin{array}{l} \overline{38}^2 = ? \\ \hline 6 \\ 38 \\ \hline 9 \\ 544 \\ \hline 1444; \end{array} \qquad \begin{array}{l} \overline{41}^2 = ? \\ \hline 8 \\ 41 \\ \hline 16 \\ \;\;81 \\ \hline 1681; \end{array} \qquad \begin{array}{l} \overline{92}^2 = ? \\ \hline 18 \\ 92 \\ \hline 81 \\ \;\;364 \\ \hline 8464; \end{array}$$

$$(3x+2y)^2 = ?$$
$$\begin{array}{l} \quad 6x \\ \quad 3x+2y \\ \hline \qquad 9x^2 \\ \quad 12xy+4y^2 \\ \hline 9x^2+12xy+4y^2; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = ? \\ \hline 2a \\ a+\frac{1}{a} \\ \hline \qquad a^2 \\ 2+\frac{1}{a^2} \\ \hline a^2+2+\frac{1}{a^2}; \end{array} \qquad \begin{array}{l} \left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)^2 = ? \\ \hline \frac{2a}{x} \\ \frac{a}{x}-\frac{b}{y} \\ \hline \qquad \frac{a^2}{x^2} \\ -\frac{2ab}{xy}+\frac{b^2}{y^2} \\ \hline \frac{a^2}{x^2}-\frac{2ab}{xy}+\frac{b^2}{y^2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(a+b+c)^2=?\\ \hline
\overset{2a}{a}+\overset{2b}{b}+c\\ \hline
\qquad\qquad\qquad\quad a^2\\
\qquad\quad 2\,ab+b^2\\
2\,ac+2\,bc+c^2\\ \hline
a^2+2\,ab+b^2+2\,(a+b)\,c+c^2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\overline{235}^2=?\\ \hline
\overset{4\,6}{235}\\ \hline
4\\
129\\
\ \ 2325\\ \hline
55225;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\overline{413}^2=?\\ \hline
\overset{8\,2}{413}\\ \hline
16\\
\ \ 81\\
\ \ 2469\\ \hline
170569;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\overline{759}^2=?\\ \hline
\overset{14\,10}{759}\\ \hline
49\\
\ \ 725\\
\ \ 13581\\ \hline
576081;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\overline{801}^2=?\\ \hline
\overset{16\,0}{801}\\ \hline
6400\\
\quad 1601\\ \hline
641601;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\overline{103}^2=?\\ \hline
\overset{2\,0}{103}\\ \hline
100\\
\quad 609\\ \hline
10609;
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\left(2+\frac{a}{2}+\frac{2\,a^2}{3}\right)^2=?\\ \hline
\overset{4}{2}+\overset{a}{\frac{a}{2}}+\frac{2\,a^2}{3}\\ \hline
\qquad\qquad\qquad 4\\
\qquad\qquad 2\,a+\frac{a^2}{4}\\
\frac{8\,a^2}{3}+\frac{2\,a^3}{3}+\frac{4\,a^4}{9}\\ \hline
4+2\,a+\frac{35\,a^2}{12}+\frac{2\,a^3}{3}+\frac{4\,a^4}{9}+4.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(a+b+c+d)^2=?\\ \hline
\overset{2a}{a}+\overset{2b}{b}+\overset{2c}{c}+d\\ \hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a^2\\
\qquad\qquad\qquad 2\,ab+b^2\\
\qquad\quad 2\,ac+2\,bc+c^2\\
2\,ad+2\,bd+2\,cd+d^2\\ \hline
a^2+2\,ab+b^2+2\,(a+b)\,c+c^2+2\,(a+b+c)\,d+d^2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\overline{1423}^2=?\\ \hline
\overset{2\,8\,4}{1423}\\ \hline
1\\
\ \ 96\\
\quad 564\\
\qquad 8529\\ \hline
2024929;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\overline{5648}^2=?\\ \hline
\overset{10\,12\,8}{5648}\\ \hline
25\\
\ \ 636\\
\quad 4496\\
\qquad 90304\\ \hline
31899904;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\overline{3251}^2=?\\ \hline
\overset{6\,4\,10}{3251}\\ \hline
9\\
124\\
\ \ 3225\\
\qquad 6501\\ \hline
10569001;
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{4508}^2 = ? \\ \hline {\scriptstyle 8\ 10\ 0} \\ 4508 \\ \hline 16 \\ 42500 \\ 72064 \\ \hline 20322064; \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{3015}^2 = ? \\ \hline {\scriptstyle 6\ 0\ 2} \\ 3015 \\ \hline 900 \\ 601 \\ 30125 \\ \hline 9090225; \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{9087}^2 = ? \\ \hline {\scriptstyle 18\ 0\ 16} \\ 9087 \\ \hline 8100 \\ 14464 \\ 127169 \\ \hline 82573569; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{1002}^2 = ? \\ \hline {\scriptstyle 2\ 0\ 0} \\ 1002 \\ \hline 10000 \\ 4004 \\ \hline 1004004; \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{6007}^2 = ? \\ \hline {\scriptstyle 12\ 0\ 0} \\ 6007 \\ \hline 360000 \\ 84049 \\ \hline 36084049; \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{9005}^2 = ? \\ \hline {\scriptstyle 18\ 0\ 0} \\ 9005 \\ \hline 810000 \\ 90025 \\ \hline 81090025; \end{array}$$

$$(a^3 - 2\,a^2 \sqrt{-2} + 5\,a - 2\sqrt{2})^2 = ?$$
$$\begin{array}{r} \hline {\scriptstyle 2\,a^3 - 4\,a^2 \sqrt{-2} \quad + 10\,a} \\ a^3 - 2\,a^2\sqrt{-2} + 5\,a - 2\sqrt{2} \\ \hline a^6 \\ -4\,a^5\sqrt{-2} - 8\,a^4 \\ 10\,a^4 - 20\,a^3\sqrt{-2} + 25\,a^2 \\ -4\,a^3\sqrt{2} + 16\,a^2 i - 20\,a\sqrt{2} + 8 \\ \hline \end{array}$$
$$a^6 + 2\,a^4 + 25\,a^2 + 8 - (4\,a^5 + 20\,a^3)\sqrt{-2} + 16\,a^2 i - (4\,a^3 + 20\,a)\sqrt{2}.$$

$$(a + b + c + d + e)^2 = ?$$
$$\begin{array}{r} \hline {\scriptstyle 2a \quad 2b \quad 2c \quad 2d} \\ a + b + c + d + e \\ \hline a^2 \\ 2\,ab + b^2 \\ 2\,ac + 2\,bc + c^2 \\ 2\,ad + 2\,bd + 2\,cd + d^2 \\ 2\,ae + 2\,be + 2\,ce + 2\,de + e^2 \\ \hline \end{array}$$
$$a^2 + 2\,ab + b^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2 + 2\,(a + b + c)\,d + d^2 + 2\,(a + b + c + d)\,e + e^2.$$

$$\begin{array}{r} \overline{35214}^2 = ? \\ \hline {\scriptstyle 6\ 10\ 4\ 2} \\ 3\ 5\ 2\ 1\ 4 \\ \hline 9 \\ 325 \\ 1404 \\ 7041 \\ 281696 \\ \hline 1240025796; \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{68934}^2 = ? \\ \hline {\scriptstyle 12\ 16\ 18\ 6} \\ 6\ 8\ 9\ 3\ 4 \\ \hline 36 \\ 1024 \\ 12321 \\ 41349 \\ 551456 \\ \hline 4751\,896356; \end{array}$$

$\overline{10123}^2 = ?$

3 0 2 4
1 0 1 2 3

100
201
4044
60729

102475129;

$\overline{45061}^2 = ?$

8 10 0 12
4 5 0 6 1

16
42500
54036
90121

2030493721;

$\overline{30205}^2 = ?$

6 0 4 0
3 0 2 0 5

900
120400
302025

912342025;

$\overline{80906}^2 = ?$

16 0 18 0
8 0 9 0 6

6400
1448100
970836

6545780836;

$\overline{12003}^2 = ?$

2 4 0 0
1 2 0 0 3

1
440000
72009

144072009;

$\overline{66005}^2 = ?$

12 12 0 0
6 6 0 0 5

36
7560000
660025

4356660025;

$\overline{40001}^2 = ?$

8 0 0 0
4 0 0 0 1

16000000
80001

1600080001;

$\overline{20007}^2 = ?$

4 0 0 0
2 0 0 0 7

4000000
280049

400280049.

$(4 - 8a - 3a^2 + a^3 + 2a^4)^2 = ?$

$8 - 16a - 6a^2 \quad 2a^3$
$4 - 8a - 3a + a^3 + 2a^4$

16
$- 64a + 64a^2$
$- 24a^2 + 48a^3 + 9a^4$
$8a^3 - 16a^4 - 6a^5 + a^6$
$16a^4 - 32a^5 - 12a^6 + 4a^7 + 4a^8$

$16 - 64a + 40a^2 + 56a^3 + 9a^4 - 38a^5 - 11a^6 + 4a^7 + 4a^8.$

Z příkladů tuto uvedených o zdvojmocňování mnohočlenů dle prvého i druhého spůsobu vysvitá již dosti jasně zdvojmocňování veškerých dalších mnohočlenných výrazů algebraických a čísel dekadických.

II. Ztrojmocňování.

Násobíme-li každý čtverec a každý dvojnásobný součin, z nichž druhá mocnina mnohočlenu algebraického se skládá, každým členem původního mocněnce, obdržíme následující součiny:

1. Trojmoci jednotlivých členů.
2. Trojnásobný součin každého čtverce a jednotlivého členu.
3. Šestinásobný součin každých tří členů.

Z toho pochodí následující věta:

„Třetí mocnina algebraického mnohočlenu jest součet součinů všech obměn třetí třídy s opakováním“.

Pro přehled, jak ony troje součiny, z nichž třetí mocnina nějakého mnohočlenu se skládá, z jednotlivých členů mocněnce vyvinovati a sestaviti dlužno, abychom pořádku toho i při ztrojmocňování čísel dekadických šetřiti a vedlejších výpočtů minouti se mohli, stůjž zde ztrojmocnění pětičlenu

„$(a+b+c+d+e)$“,

a sice:

$$
\begin{array}{c}
(a+b+c+d+e)^3 = ? \\
\hline
3a^2 \quad 3b^2 \quad 3c^2 \quad 3d^2 \quad 3e^2 \\
a + b + c + d + e \\
\hline
6 \left\{ \begin{array}{l} ab \\ ac + bc \\ ad + bd + cd \end{array} \right\} \begin{array}{l} c \\ d \\ e \end{array}
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{r}
a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 \\
3\,ab^2 + 3\,bc^2 + 3\,cd^2 + 3\,de^2 \\
3\,ac^2 + 3\,bd^2 + 3\,ce^2 \\
3\,ad^2 + 3\,be^2 \\
+ 3\,ae^2 \\
3\,ab^2 + 3\,b^2c + 3\,c^2d + 3\,d^2e \\
3\,a^2c + 3\,b^2d + 3\,c^2e \\
+ 3\,a^2d + 3\,b^2e \\
3\,a^2c \\
6\,abc + 6\,bcd + 6\,cde \\
6\,acd + 6\,bde \\
6\,abd + 6\,ade \\
6\,bce \\
6\,ace \\
6\,abe
\end{array}
\right\} = s.
$$

Z toho zřejmo:

1. Že každým členem mocněnce vzniká sloupec součinů, pozůstávající:

a) z trojmoci dotyčného členu;

b) z dvakrát tak velkého počtu trojnásobných součinů, jako jest počet všech předcházejících členů mocněnce, jelikož z každých dvou členů dva trojnásobné součiny pozůstávají, lišíce se od sebe pouze tím, že jich stejné členy co činitelé střídavě mezi sebou čtverce jsou;

c) z takového počtu šestinásobných součinů, jakýž obdržíme, násobíce předcházející počet členů mocněnce číslem o jedničku menším počtu toho, a dělíce pak součin vycházející dvěma; nabýváme tedy třetím členem mocněnce:

$$\frac{2 \times 1}{2} = 1 \text{ šestinásobný součin;}$$

čtvrtým členem mocněnce:

$$\frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ šestinásobné součiny;}$$

pátým členem mocněnce:

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ šestinásobných součinů;}$$

a. t. d.

Jsou tedy šestinásobné součiny každým následujícím členem mocněnce mocnině přibývající šestinásobné součiny sestav druhé třídy bez opakování všech předcházejících členů mocněnce, násobené členem dotyčným.

2. Že vyvinování třetí mocniny mnohočlenu díti se může dle naznačení buď po jednotlivých členech mocněnce, čímž sloupce aneb po jednotlivých ale souhlasných součinech sloupců, čímž řady součinů vycházejí; jak tohoto a onoho spůsobu při ztrojmocňování mnohočlenů užiti se má, zřejmo z výše uvedeného ztrojmocnění pětičlenu. Nebude však od místa, jestliže postup práce obou těchto spůsobů i tuto slovy vytkneme, a sice:

Jelikož při ztrojmocňování mnohočlenů každý čtverec jednotlivých členů všemi ostatními členy mocněnce násobiti a součiny ty pak ztrojnásobniti dlužno, nadepišme hned každému členu mocněnce jeho trojnásobný čtverec; pomocná čísla k vyvinutí šestinásobných součinů si upravíme, jestliže počínajíce vždy novou řadou každým členem v pravo, vyjma posledního, veškeré ostatní členy v levo znásobíme, a zšestinásobněné součiny ty pak pod členy mocněnce tak umístíme, aby prvý součin každé řady v pravo pod členem, jímž násobeno bylo, se nalézal.

Majíce takto veškerá pomocná čísla k vyvinutí třetí mocniny mnohočlenu upravená, bude nám pomocí jich třetí mocninu daného mnohočlenu vyvinovati, a sice:

1. Sloupec součinů každým následujícím členem mocněnce mocnině přibývající vyvinouti lze: jestliže nejprve trojmoc dotyčného členu stanovíme, a pak posloupně od pravé ruky k levé dříve trojnásobný čtverec, dotyčnému členu mocněnce nadepsaný, předcházejícími členy, na to zase trojnásobné čtverce, předcházejícím členům nadepsané, dotyčným členem mocněnce znásobíme; na to následují šestinásobné součiny, jež, jak známo, obdržíme, jestliže součiny sestav druhé třídy bez opakování předcházejících členů

mocněnce dotyčným členem znásobíme, a souhrn součinů těch zšestinásobníme.

2. Řady souhlasných součinů, jednotlivými součiny po sobě následujících sloupců vznikající vyvinouti lze pořádkem následujícím: 1. řada obsahuje trojmoci jednotlivých členů; v následujících řadách přicházejí trojnásobné součiny, z nichž každý pochází ze dvou členů daného mocněnce, a to:

a) z trojnásobného čtverce členu v pravo a jednotlivého členu v levo stojícího v pořádku následujícím:

v 2. řadě z členů vedle sebe stojících;
v 3. řadě z členů ob jeden člen stojících;
v 4. řadě z členů ob dva členy stojících;
v 5. řadě z členů ob tři členy stojících;
a t. d.

Tak se pokračuje, až se nabude z obou členů krajních pocházejícího součinu trojnásobného; pak následují opět řady trojnásobných součinů, z nichž každý pochází též ze dvou členů daného mocněnce, a sice:

b) z trojnásobného čtverce členu v levo a jednotlivého členu v pravo stojícího v tomtéž pořádku, jako v řadě 2., 3., 4., 5., a t. d., až se opět nabude z obou členů krajních pocházejícího součinu trojnásobného.

Konečně následují šestinásobné součiny, jichž souhrn obdržíme, jestliže sousedícími členy mocněnce součiny sestav druhé třídy bez opakování veškerých předcházejících členů posloupně znásobíme a šestinásobný součet součinů těch stanovíme.

Vše, co tuto o ztrojmocňování mnohočlenů algebraických podáno bylo, dá se i při ztrojmocňování čísel dekadických a to s výhodou zvláštní užiti, a sice:

Přihlédneme-li k hodnotě místní jednotlivých součinů, shledáme:

a) že z prvých trojnásobných součinů každý následující součin stanovícího sloupce o jedno místo, druhých trojnásobných součinů každý následující součin o dvě místa, a souhrn šestinásobných součinů o tři místa dále v levo pod trojmoc dotyčnou náleží: následovně i řady souhlasných součinů tentýž pořádek zachovávají;

b) že každý následující součin té které řady souhlasných součinů o tři místa dále v stranu dotyčnou náleží: jsou-li tedy veškeré součiny řady čísly třícifernými, splývá řada ta bezprostředně v číslo jediné; vyskytují-li se však místy čísla čtyřciferná, dlužno číslici místa čtvrtého k následujícímu v levo stojícímu součinu připočítati; v případě však, kde součiny jedno- neb i dvouciferné se vyskytují, vyplněna buďtež scházející místa nullami; kde však součiny samy uprostřed nullami jsou, buďtež pro vyplnění místa třemi nullami vyznačeny! —

Zbývá nám tedy nyní ještě ukázati, jakým způsobem souhrny šestinásobných součinů následujícími číslicemi mocněnce mocnině přibývající stanoviti lze. K výpočtu tomu měli bychom především z dotyčných číslic mocněnce všecky sestavy třetí třídy bez opakování posloupně sestaviti, prvky jako činitele násobiti, šestinásobné součiny pak co čítance s zřetelem k jich hodnotě místní pod sebe sestaviti a součet jich stanoviti, což by ovšem obšírné a obtížné práce vyžadovalo, tak že by touto překážkou ztrojmocňování dle nového návodu spíše prací obtížnější se stalo.

Pro odstranění překážky této bylo však na základě úvahy následující tak postaráno, že vývin šestinásobných součinů prací zcela snadnou býti se jeví, a sice:

Uvážíme-li, že šestinásobné součiny třetí mocniny jsou mezi sebou násobené prvky sestav druhé třídy bez opakování předcházejících číslic mocněnce, násobené každou následující číslicí, shledáváme, že k vyvinutí souhrnu šestinásobných součinů celého mocněnce čísla pomocná pod mocněncem spůsobem následujícím dříve si upraviti třeba, a sice:

„Počínajíce dvěma číslicema míst nejvyšších, znásobíme každou číslicí v pravo, vyjma poslední, všecky ostatní číslice v levo, čímž se stává, že prvý součin pozůstává z dvou prvých číslic u levé ruky, druhý součin z dvou prvých číslic, násobených následující číslicí třetí, třetí součin z tří prvých číslic, násobených následující číslicí čtvrtou a t. d.; tak se pokračuje, až se nabude součinu z celé části mocněnce, jež značí sta, a číslice následující, jež značí desítky.

Co se týče sestavení těchto vždy z dvou částí mocněnce pozůstávajících součinů, pamatovati dlužno, že každý následující součin za příčinou hodnoty místní pod součin předcházející o dvě místa zpět ku pravé ruce náleží, a sice tak, aby vždy prvá číslice každého součinu pod číslicí, jíž násobeno bylo, místo své měla. K součinům těm pak u pravé ruky kolmici připojíme, a počnouce třetí číslicí mocněnce od levé ruky všecky následující číslice posloupně pod sebe dle vyvinutých součinů za kolmicí umístíme.

Příklady.

$$\frac{8\ \ 3\ \ 4}{6.\ 24.\ 4.}\qquad \frac{3\ 2\ 5}{6.\ 6.\ 5}\qquad \frac{6\ \ 4\ \ 3}{6.\ 24.\ \ 3}\qquad \frac{102}{0}$$

$$\begin{array}{c}4\ 2\ 3\ 8\\ 6\left\{\begin{array}{l}8\\ 126\end{array}\right\}\begin{array}{l}3\\ 8\end{array}\end{array}\qquad \begin{array}{c}5\ 6\ 7\ 8\\ 6\left\{\begin{array}{ll}30^{*} & 7\\ \ \ 392 & 8\end{array}\right\}\end{array}\qquad \begin{array}{c}1\ 3\ 0\ 4\\ 6\left\{\begin{array}{l}3\\ \ 00\end{array}\right\}\begin{array}{l}0\\ 4\end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}3\ 2\ 4\ 9\ 6\\ 6\left\{\begin{array}{l}6\\ 128\\ \ \ 2916\end{array}\right\}\begin{array}{l}4\\ 9\\ 6\end{array}\end{array}\qquad \begin{array}{c}7\ 3\ 0\ 2\ 4\\ 6\left\{\begin{array}{l}21\\ \ \ 00\\ \ \ \ \ 1460\end{array}\right\}\begin{array}{l}0\\ 2\\ 4\end{array}\end{array}\qquad \begin{array}{c}5\ 0\ 0\ 3\ 8\\ 6\left\{\begin{array}{l}0\\ \ 00\\ \ 1500\end{array}\right\}\begin{array}{l}0\\ 3\\ 8\end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} 2\;3\;4\;6\;5\;8 \\ 6\left\{\begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ 92 & 6 \\ 1404 & 5 \\ 11730 & 8 \end{array}\right. \end{array}
&
\begin{array}{c} 5\;3\;2\;0\;0\;4 \\ 6\left\{\begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ 106 & 0 \\ 00 & 0 \\ 00 & 4 \end{array}\right. \end{array}
&
\begin{array}{c} 2\;5\;3\;4\;6\;9 \\ 6\left\{\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ 75 & 4 \\ 1012 & 6 \\ 15204 & 9 \end{array}\right. \end{array}
\end{array}$$

Majíce pomocná čísla k vyvinutí šestinásobných součinů pod mocněncem dle pořádku uvedeného upravená, vězme, že oněmi za kolmicí vyznačenými číslicemi součin v levo vedle stojící, zvětšený však o veškeré součiny předcházející, posloupně násobiti dlužno; každý takto vzniklý a pak šesti násobený součin znamená souhrn šestinásobných součinů dotyčnou číslicí mocněnce mocnině přibylých: následovně šestinásobný součet veškerých těchto souhrnů, z nichž každý následující o tři místa zpět ku pravé ruce náleží, jest souhrnem šestinásobných součinů celého mocněnce.

Poznamenání. Můžeme tedy součiny pod číslicemi mocněnce umístěné tak naznačiti, by v každém následujícím i předcházející součin obsažen byl, což hned při násobení přičtením nadepsaných číslic snadno státi se může; anebo můžeme beze všeho připočítávání součiny tyto naznačiti, jak na příkladech výše uvedených viděti jest, při jich násobení však vedlejšími číslicemi mocněnce toto na paměti míti, t. j. nadepsané číslice dříve buď v mysli nebo stranou počtu sečísti, a součet jimi vzniklý číslicí dotyčnou znásobiti. Ku příkladu:

$$\begin{array}{l}
\text{Buď } 2\;5\;3\;4\;6\;9 \\
\begin{array}{l|l}
10 & 3 = 30 \\
1075 & 4 = \;\;4300 \\
108512 & 6 = \;\;\;\;651072 \\
10866404 & 9 = \;\;\;\;\;\;97797636
\end{array} \\
\hline
\qquad\qquad 35048869636 \times 6
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{anebo } 2\;5\;3\;4\;6\;9 \\
6\left\{\begin{array}{r|l}
10 & 3 = 30 \\
75 & 4 = \;\;4300 \\
1012 & 6 = \;\;\;\;651072 \\
15204 & 9 = \;\;\;\;\;\;97797636
\end{array}\right. \\
\hline
\qquad\qquad 35048869636 \times 6
\end{array}$$

Na základě tuto úplně již podaného vysvětlení možno třetí mocninu dekadického čísla buď po sloupcích neb řadách součinů vyvinovati, a sice:

1. Vyvinujíce třetí mocninu dekadického čísla po sloupcích součinů, shledáváme, že nám součty jednotlivých sloupců stanoviti, tyto opět k sečítání posloupně pod sebe tak sestaviti jest, aby každý následující o tři místa zpět u pravé ruky se nalézal; součet veškerých těchto sloupci součinů vzniklých součtů jest třetí mocninou daného čísla.

2. Vyvinujíce třetí mocninu dekadického čísla řadami souhlasných součinů, což výhodnější jest, shledáváme, že nám pod prvou řadu, t. j. trojmocí jednotlivých číslic, řady prvých trojnásobných součinů, na to řady druhých trojnásobných součinů, a konečně jednou řadou souhrn šestinásobných součinů celého mocněnce posloupně stanoviti jest, při čemž za příčinou hodnoty místní zřetel k tomu míti sluší, by potažmo k řadě prvé každá následující řada prvých trojnásobných součinů o jedno, druhých trojnásobných součinů o dvě místa, a souhrn šestinásobných součinů o tři místa v levo se nalézal.

Připomenutí. Přicházejí-li v mocněnci nully, stávají se mnohdy celé řady nullami, po případě jednou neb několika jen číslicemi, při jichž umístění zvláště k hodnotě místní zřetel míti sluší, nully nemístní mohou vynechány a řady mnohé s jinými v jednu řadu spojeny býti. — Dále rozumí se samo sebou, že číslici čtvrtého místa čtyřciferného součinu na konci u levé ruky vypsati dlužno, a též že netřeba v případě tomto jedno- neb dvouciferným součinům scházející počet nul předložiti.

Příklady.

1. Ztrojmocňování dvoučlenů.

$$\begin{array}{c}
(a+b)^3 = ? \\ \hline
3\,a^2 \quad 3\,b^2 \\
a + b \\ \hline
a^3 + b^3 \\
\quad 3ab^2 \\
3a^2b \\ \hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\overline{11}^3 = ? \\ \hline
3\ 3 \\
1\ 1 \\ \hline
1001 \\
3 \\
3 \\ \hline
1331;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\overline{21}^3 = ? \\ \hline
12\ 3 \\
2\ 1 \\ \hline
8001 \\
6 \\
12 \\ \hline
9261;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\overline{32}^3 = ? \\ \hline
27\ 12 \\
3\ 2 \\ \hline
27008 \\
36 \\
54 \\ \hline
32768;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\overline{88}^3 = ? \\ \hline
192\ 192 \\
8\ 8 \\ \hline
512512 \\
1536 \\
1536 \\ \hline
681472;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\overline{79}^3 = ? \\ \hline
147\ 243 \\
7\ 9 \\ \hline
343729 \\
1701 \\
1323 \\ \hline
493039.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\overline{20}^3 = ? \\ \hline
8000;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overline{40}^3 = ? \\ \hline
64000;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overline{80}^3 = ? \\ \hline
512000.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(x+2)^3 = ? \\ \hline
3x^2 \qquad 12 \\
x \ + \ 2 \\ \hline
x^3 + 8 \\
12x \\
6x^2 \\ \hline
x^3 + 6x^2 + 12x + 8;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(a^2 - 1)^3 = ? \\ \hline
3a^4 \qquad 3 \\
a^2 - 1 \\ \hline
a^6 - 1 \\
3a^2 \\
-3a^4 \\ \hline
a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=?\\
\hline
\frac{3x^2}{a^2} \qquad \frac{3y^2}{b^2}\\
\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\\
\hline
\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}\\
\frac{3xy^2}{ab^2}\\
\frac{3x^2y}{a^2b}\\
\hline
\frac{x^3}{a^3}+\frac{3x^2y}{a^2b}+\frac{3xy^2}{ab^2}+\frac{y^3}{b^3};
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\left(\frac{3a^2}{8x^2}-\frac{2x}{9a}\right)^3=?\\
\hline
\frac{27a^4}{64x^4} \qquad \frac{4x^2}{27a^2}\\
\frac{3a^2}{8x^2}-\frac{2x}{9a}\\
\hline
\frac{27a^6}{512x^6}-\frac{8x^3}{729a^3}\\
\frac{1}{18}\\
-\frac{3a^3}{32x^3}\\
\hline
\frac{27a^6}{512x^6}-\frac{3a^3}{32x^3}+\frac{1}{18}-\frac{8x^3}{729a^3}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}\right)^3=?\\
\hline
\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} \qquad -\frac{9}{4}\sqrt[3]{a^2}\\
-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}\\
\hline
-\frac{1}{8}x+\left(-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}\\
\frac{9}{8}\sqrt[3]{a^2x}\\
\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}\\
\hline
-\frac{1}{8}x+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{a^2}\right)\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{a^2x}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(5+2i\sqrt{6})^3=?\\
\hline
75 \qquad -72\\
5+2i\sqrt{6}\\
\hline
125-\ \ 48i\sqrt{6}\\
-360\\
150i\sqrt{6}\\
\hline
-235+102i\sqrt{6};
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(5-2i\sqrt{6})^3=?\\
\hline
75 \qquad -72\\
5-2i\sqrt{6}\\
\hline
125+\ \ 48i\sqrt{6}\\
-360\\
-150i\sqrt{6}\\
\hline
-235-102i\sqrt{6}.
\end{array}$$

2. Ztrojmocňování trojčlenů.

$$(a + b + c)^2 = ?$$

$$\begin{array}{c}
3a^2 \quad 3b^2 \quad 3c^2 \\
a + b + c \\
\hline
6abc \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
a^3 \;\; + \;\; b^3 \;\; + \;\; c^3 \\
3ab^2 + 3bc^2 \\
+ 3ac^2 \\
3a^2b + 3b^2c \\
+ 3a^2c \\
+ 6abc \\
\hline
\end{array}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3.$$

$132^3 = ?$	$258^3 = ?$	$496^3 = ?$	$879^3 = ?$
3 27 12	12 75 192	48 243 108	192 147 243
1 3 2	2 5 8	4 9 6	8 7 9
6.6	80.6	216.6	504.6
1027008	8125512	64729216	512343729
27036	150960	972972	1177701
12	384	432	1944
9054	60600	433458	1345323
6	96	288	1728
36	480	1296	3024
2299968;	17173512;	122023936;	679151439;

$$(x^2 + 2x + 3)^3 = ?$$

$$\begin{array}{c}
3x^4 \quad 12x^2 \quad 27 \\
x^2 + 2x + 3 \\
\hline
6\,(x.^2\; 2x.\; 3) \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
x^6 + 8x^3 + 27 \\
12x^4 + 54x \\
27x^2 \\
6x^5 + 36x^2 \\
9x^4 \\
36x^3 \\
\hline
\end{array}$$

$$x^6 + 6x^5 + 21x^4 + 44x^3 + 63x^2 + 54x + 27.$$

$$(x^2 - 3xy + 2y^2)^3 = ?$$

$$\begin{array}{c}
3x^4 \quad 27x^2y^2 \quad 12y^4 \\
x^2 - 3xy + 2y^2 \\
\hline
6\,(x.^2 - 3xy.\; 2y^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
x^6 - 27x^3y^3 + 8y^6 \\
27x^4y^2 - 36xy^5 \\
12x^2y^4 \\
- 9x^5y + 54x^2y^4 \\
6x^4y^2 \\
- 36x^3y^3 \\
\hline
\end{array}$$

$$x^6 - 9x^5y + 33x^4y^2 - 63x^3y^3 + 66x^2y^4 - 36xy^5 + 8y^6.$$

$$\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-1\right)^3=?$$

$$\frac{x^4}{3} \quad \frac{3x^2}{4} \quad 3$$

$$\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-1$$

$$6\left(\frac{x^2}{3}.-\frac{x}{2}.-1\right)$$

$$\frac{x^6}{27}-\frac{x^3}{8}-1$$

$$\frac{x^4}{4}-\frac{3x}{2}$$

$$x^2$$

$$-\frac{x^5}{6}-\frac{3x^2}{4}$$

$$-\frac{x^4}{3}$$

$$x^3$$

$$\frac{x^6}{27}-\frac{x^5}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{7x^3}{8}+\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}-1.$$

$$(1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^3=?$$

$$3 \quad 24 \quad 81$$

$$1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$$

$$-6\sqrt{6}.\,6$$

$$1-16\sqrt{2}+81\sqrt{3}$$

$$24 \quad -162\sqrt{2}$$

$$81$$

$$-6\sqrt{2}+72\sqrt{3}$$

$$9\sqrt{3}$$

$$-36\sqrt{6}$$

$$106-184\sqrt{2}+162\sqrt{3}-36\sqrt{6}.$$

$$\left(4ab-\frac{x^3}{a}+\frac{9x^5}{8a^3}\right)^3=?$$

$$48a^2b^2 \quad \frac{3x^6}{a^2} \quad \frac{243x^{10}}{64a^6}$$

$$4\,ab-\frac{x^3}{a}+\frac{9x^5}{8a^3}$$

$$6\left(4ab.-\frac{x^3}{a}.\frac{9x^5}{8a^3}\right)$$

$$\begin{array}{r} 64a^3b^3 - \dfrac{x^9}{a^3} + \dfrac{729x^{15}}{512a^9} \\ \dfrac{12bx^6}{a} - \dfrac{243x^{13}}{64a^7} \\ \dfrac{243bx^{10}}{16a^5} \\ -48ab^2x^3 + \dfrac{27x^{11}}{8a^5} \\ \dfrac{54b^2x^5}{a} \\ -\dfrac{27bx^8}{a^3} \end{array}$$

$$64a^3b^3 - 48ab^2x^3 + \frac{54b^2x^5 + 12bx^6}{a} - \frac{27bx^8 + x^9}{a^3} + \frac{243bx^{10} + 54x^{11}}{16a^5} - \frac{243x^{13}}{64a^7} + \frac{729x^{15}}{512a^9}.$$

3. Ztrojmocňování čtyřčlenů.

$$(a + b + c + d)^3 = ?$$

$$\begin{array}{cccc} 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 & 3d^2 \\ a\ + & b\ + & c\ + & d \end{array}$$

$$6\left\{\begin{array}{l} ab \\ ac + bc \end{array}\right\}\begin{array}{l} c \\ d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^3 + \quad b^3 + \quad c^3 + \quad d^3 \\ 3ab^2 + 3bc^2 + 3cd^2 \\ 3ad^2 + 3bd^2 \\ 3ad^2 \\ 3a^2b + 3b^2c + 3c^2d \\ 3a^2d + 3b^2d \\ 3a^2d \\ 6abc + 6bcd \\ 6acd \\ 6abd \end{array}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b)\, c^2\, c^3 + 3(a + b + c)^2 d + 3(a + b + c)\, d^2 + d^3.$$

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overline{1342}^3 = ?} \\ 3 & 27 & 48 & 12 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 52 \end{array}\left.\right\}\begin{array}{l} 4 = 12 \\ 2 = \quad 704 \end{array}$$

$$12704 \times 6$$

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overline{2113}^3 = ?} \\ 12 & 3 & 3 & 27 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2\ 1 \end{array}\left.\right\}\begin{array}{l} 1 = 2 \\ 3 = \ 663 \end{array}$$

$$2663 \times 6$$

$$\begin{array}{r}
1027064008\\
27144048\\
48036\\
12\\
9108096\\
12054\\
6\\
76224\\
\hline
2416893688;
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
8001001027\\
6003027\\
6027\\
54\\
12003009\\
12009\\
36\\
15978\\
\hline
9434056897;
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\overline{5897}^3 = ?\\
\hline
75 \;\; 192 \;\; 243 \;\; 147\\
5 \quad 8 \quad 9 \quad 7\\
\left.\begin{array}{r} 40 \\ 522 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9 = 360 \\ 7 = \;\; 31654 \end{array}\\
391654 \times 6\\
\hline
125512729343\\
961945323\\
1216176\\
735\\
601729701\\
676344\\
525\\
2349924\\
\hline
205065869273;
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\overline{9899}^3 = ?\\
\hline
243 \;\; 192 \;\; 243 \;\; 243\\
9 \quad 8 \quad 9 \quad 9\\
\left.\begin{array}{r} 72 \\ 882 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9 = 648 \\ 9 = \;\; 72738 \end{array}\\
720738 \times 6\\
\hline
729512729729\\
1729946187\\
2188944\\
2187\\
1945730187\\
2188728\\
2187\\
4324428\\
\hline
970004999699.
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
(a^3 + 6a^2 + 12a + 8)^3 = ?\\
\hline
3a^6 \qquad 108a^4 \qquad 432a^2 \qquad 192\\
a^3 \; + \; 6a^2 \; + \; 12a \; + \; 8\\
6 \left\{ \begin{array}{c} 6a^5 \\ 12a^4 + 72a^3 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 12a \\ 8 \end{array}\\
\hline
a^9 + 216a^6 + 1728a^3 + \;\; 512\\
108a^7 + 2592a^4 + 2304a\\
432a^5 + 1152a^2\\
192a^3\\
18a^8 + 1296a^5 + 3456a^2\\
36a^7 + \;\; 864a^4\\
24a^6\\
432a^6 + 3456a^3\\
576a^4\\
288a^5
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\hline
a^9 + 18a^8 + 144a^7 + 672a^6 + 2016a^5 + 4032a^4 + 5376a^3 +\\
4608a^2 + 2304a + 512.
\end{array}$$

$$\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^3=?$$

$$3 \quad \frac{3x^2}{4} \quad \frac{x^4}{3} \quad \frac{3x^6}{16}$$

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}$$

$$6\left\{\begin{array}{ll} -\frac{x}{2} & \\ \frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{6} & \end{array}\right\}\begin{array}{l} \cdot\ \frac{x^2}{3} \\ \cdot -\frac{x^3}{4} \end{array}$$

$$1-\frac{x^3}{8}+\frac{x^6}{27}-\frac{x^9}{64}$$

$$\frac{3x^2}{4}-\frac{x^5}{6}+\frac{x^8}{16}$$

$$\frac{x^4}{3}-\frac{3x^7}{32}$$

$$\frac{3x^6}{16}$$

$$-\frac{3x}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^7}{12}$$

$$x^2-\frac{3x^5}{16}$$

$$-\frac{3x^3}{x4}$$

$$-x^3+\frac{6}{4}$$

$$-\frac{x^5}{2}$$

$$+\frac{3x^4}{4}$$

$$1-\frac{3x}{2}+\frac{7x^2}{4}-\frac{15x^3}{8}+\frac{4x^4}{3}-\frac{41x^5}{48}+\frac{205x^6}{432}-\frac{17x^7}{96}+\frac{x^8}{16}-\frac{x^9}{64}.$$

$$\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^2c}{2b^2d}-\frac{4ac^2}{3bd^2}-\frac{2c^3}{d^3}\right)^3=?$$

$$\frac{3a^6}{b^6} \quad \frac{3a^4c^2}{4b^4d^2} \quad \frac{16a^2c^4}{3b^2d^4} \quad \frac{12c^6}{d^6}$$

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^2c}{2b^2d}-\frac{4ac^2}{3bd^2}-\frac{2c^3}{d^3}$$

$$6\left\{\begin{array}{ll} \frac{a^5c}{2b^5d} & \\ -\frac{4a^4c^2}{3b^4d^2}-\frac{2a^3c^3}{3b^3d^3} & \end{array}\right\}\begin{array}{l} \cdot -\frac{4ac^2}{3bd^2} \\ \cdot -\frac{2c^3}{d^3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\frac{a^9}{b^9}+\frac{a^6c^3}{8b^6d^3}-\frac{64a^3c^6}{27b^3d^6}-\frac{8c^9}{d^9} \\
\frac{3a^7c^2}{4b^7d^2}+\frac{8a^4c^5}{3b^4d^5}-\frac{16ac^8}{bd^8} \\
\frac{16a^5c^4}{3b^5d^4}+\frac{6a^2c^7}{b^2d^7} \\
\frac{12a^3c^6}{b^3d^6} \\
\frac{3a^8c}{2b^8d}-\frac{a^5c^4}{b^5d^4}-\frac{32a^2c^7}{3b^2d^7} \\
-\frac{4a^7c^2}{b^7d^2}-\frac{3a^4c^5}{2b^4d^5} \\
-\frac{6a^6c^3}{b^6d^3} \\
-\frac{4a^6c^3}{b^6d^3}+\frac{8a^3c^6}{b^3d^6} \\
+\frac{16a^4c^5}{b^4d^5} \\
-\frac{6a^5c^4}{b^5d^4} \\
\hline
\frac{a^9}{b^9}+\frac{3a^8c}{2b^8d}-\frac{13a^7c^2}{b^7d^2}-\frac{79a^6c^3}{b^6d^3}-\frac{5a^5c^4}{3b^5d^4}+\frac{103a^4c^5}{6b^4d^5}+\frac{476a^3c^6}{27b^3d^6} \\
-\frac{14a^2c^7}{3b^2d}-\frac{16ac^8}{bd^8}-\frac{8c^9}{d^9}.
\end{array}$$

$$\left(4-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+3i\sqrt{6}-\sqrt{i}\right)^3=?$$

$$\begin{array}{c}
\hline
48 \quad \frac{3}{4}\sqrt[3]{4} \quad -162 \quad 3i \\
4-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+3i\sqrt{6}-\sqrt{i} \\
6\left\{\begin{array}{l} -2\sqrt[3]{2} \\ 12i\sqrt{6}-\frac{3i}{2}\sqrt[6]{2.^{2}6^{3}} \end{array}\right\}\begin{array}{l} .3i\sqrt{6} \\ .-\sqrt{i} \end{array} \\
\hline
64-\frac{1}{4}-162i\sqrt{6}-i\sqrt{i} \\
3\sqrt[3]{4}+\ 81\sqrt[3]{2}-9\sqrt{6} \\
-\ 648\ -\frac{3i}{2}\sqrt[3]{2} \\
12i \\
-24\sqrt[3]{2}+\frac{9i}{4}\sqrt[6]{4.^{2}6^{3}}+162\sqrt{i}
\end{array}$$

$$144i\sqrt{6} - \frac{3}{4}\sqrt[6]{4.^2i^3}$$
$$-48\sqrt{i}$$
$$-36i\sqrt[6]{2.^26^3} + 9i\sqrt[6]{2.^26.^3i^3}$$
$$-72i\sqrt{6i}$$
$$+12\sqrt[6]{2.^2i^3}$$

$$-\frac{2337}{4} + \left(57 - \frac{3i}{2}\right)\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} - 36i\sqrt[6]{864} - (18i+9)\sqrt{6}$$
$$+\frac{9i}{4}\sqrt[6]{3456} + 12\sqrt[6]{-4i} - 72i\sqrt{6i} + 9i\sqrt[6]{-864i} + (114-i)\sqrt{i}$$
$$-\frac{3}{4}\sqrt[6]{-16i} + 12i.$$

4. Ztrojmocňování pětičlenů.

$$(a+b+c+d+e)^3 = ?$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 3a^2 & & 3b^2 & & 3c^2 & & 3d^2 & & 3e^2 \\ a & + & b & + & c & + & d & + & e \end{array}$$

$$6\left\{\begin{array}{l} ab \\ ac + bc \\ ad + bd + cd \end{array}\right\}\begin{array}{l} .c \\ .d \\ .e \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 \\ 3ab^2 + 3bc^2 + 3cd^2 + 3de^2 \\ 3ac^2 + 3bd^2 + 3ce^2 \\ 3ad^2 + 3be^2 \\ 3ae^2 \\ 3b^2c + 3c^2d + 3d^2e \\ 3a^2c + 3b^2d + 3c^2e \\ + 3a^2d + 3b^2e \\ 3a^2e, \\ 6abc + 6bcd + 6cde \\ 6acd + 6bde \\ 6abd + 6ade \\ 6bce \\ 6ace \\ 6abe \end{array}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$
$$3\,a + b + c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 + 3(a+b+c+d)^2e$$
$$+ 3(a+b+c+d)e^2 + e^3.$$

$$\overline{23112}^3 = ?$$

$$\begin{array}{l}
12 \quad 27 \quad 3 \quad 3 \quad 12 \\
2 \quad\; 3 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\
\left.\begin{array}{r} 6 \\ 23 \\ 231 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 = 6 \\ 1 = \quad 623 \\ 2 = \quad 125062 \end{array} \\
\hline
\qquad\qquad 6748062 \times 6 \\
\hline
8027001001008 \\
54009003012 \\
6009012 \\
6036 \\
24 \\
36027003006 \\
12027006 \\
12054 \\
24 \\
40488372 \\
\hline
12345610940928;
\end{array}$$

$$\overline{41231}^3 = ?$$

$$\begin{array}{l}
48 \quad 3 \quad 12 \quad 27 \quad 3 \\
4 \quad\; 1 \quad 2 \quad\; 3 \quad 1 \\
\left.\begin{array}{r} 4 \\ 82 \\ 1236 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 = 8 \\ 3 = 1446 \\ 1 = \quad 49436 \end{array} \\
\hline
\qquad\qquad 9495436 \times 6 \\
\hline
64001008027001 \\
12012054009 \\
48027006 \\
108003 \\
12 \\
48006036027 \\
96009012 \\
144003 \\
48 \\
56972616 \\
\hline
70092508729391;
\end{array}$$

$$\overline{75689}^3 = ?$$

$$\begin{array}{l}
147 \quad 75 \quad 108 \quad 192 \quad 243 \\
7 \quad\; 5 \quad\; 6 \quad\; 8 \quad\; 9 \\
\left.\begin{array}{r} 35 \\ 450 \\ 6048 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6 = 210 \\ 8 = \quad 31600 \\ 9 = \quad 3609432 \end{array} \\
\hline
\qquad\qquad 245209432 \times 6 \\
\hline
343125216512729 \\
525541153944 \\
756961458 \\
1345215 \\
1701 \\
735450865728 \\
882600972 \\
1176675 \\
1323 \\
1471256592 \\
\hline
433609014307769;
\end{array}$$

$$\overline{97989}^3 = ?$$

$$\begin{array}{l}
243 \quad 147 \quad 243 \quad 192 \quad 243 \\
9 \quad\; 7 \quad\; 9 \quad\; 8 \quad\; 9 \\
\left.\begin{array}{r} 63 \\ 873 \\ 7832 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9 = 567 \\ 8 = \quad 57384 \\ 9 = \quad 6526188 \end{array} \\
\hline
\qquad\qquad 630910188 \times 6 \\
\hline
729343729512729 \\
1324702729944 \\
2188346187 \\
1729701 \\
2187 \\
1702324945728 \\
2188178187 \\
1945323 \\
2187 \\
3785461128 \\
\hline
940875103572669.
\end{array}$$

$$(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)^3 = ?$$

$$\begin{array}{c}
\hline
3x^8 \quad 3a^2x^6 \quad 3b^2x^4 \quad 3c^2x^2 \quad 3d^2 \\
x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \\
6\left\{\begin{array}{l} ax^7 \\ bx^6 + abx^5 \\ cx^5 + acx^4 + bcx^3 \end{array}\right\}\begin{array}{l} .\,bx^2 \\ .\,cx \\ .\,d \end{array} \\
\hline
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
x^{12} + & a^3x^9 + & b^3x^6 + & c^3x^3 + & d^3 \\
 & 3ax^{210} & + 3ab^2x^7 & + 3bc^2x^4 & + 3cd^2x \\
 & & + \quad 3b^2x^8 & + 3ac^2x^5 & + 3bd^2x^2 \\
 & & & + \quad 3c^2x^6 & + 3ad^2x^3 \\
 & & & & + \quad 3d^2x^4 \\
 & 3ax^{11} & + 3a^2bx^8 & + 3b^2cx^5 & + 3c^2dx^2 \\
 & & 3bx^{10} & + 3a^2cx^7 & + 3b^2dx^4 \\
 & & & + \quad 3cx^9 & + 3a^2dx^6 \\
 & & & & + \quad 3dx^8 \\
 & & 6abx^9 & + 6abcx^6 & + 6bcdx^3 \\
 & & & + \quad 6bcx^7 & + 6acdx^4 \\
 & & & + \quad 6acx^8 & + \quad 6cdx^5 \\
 & & & & + 6abdx^5 \\
 & & & & + \quad 6bdx^6 \\
 & & & & + \quad 6adx^7
\end{array}
$$

$$
\begin{gathered}
x^{12} + 3ax^{11} + (3a^2 + 3b)\ x^{10} + (a^3 + 6ab + 3c)\,x^9 + (3a^2b + 3b^2 \\
+ 6ac + 3d)\,x^8 + (3ab^2 + 6bc + 3a^2c + 6ad)\,x^7 + (b^3 + 6abc + \\
3c^2 + 6bd + 3a^2d)\,x^6 + (3b^2c + 3ac^2 + 6abd + 6cd)\,x^5 + (3bc^2 + \\
6acd + 3b^2d + 3d^2)\,x^4 + (c^3 + 6bcd + 3\ ad^2)\,x^3 + (3c^2d + \\
3bd^2)\,x^2 + 3cd^2x + d^3.
\end{gathered}
$$

$$
\left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{ax^3}{by^3} + \frac{cx^2}{dy^2} + \frac{ex}{fy} + \frac{g}{h}\right)^3 = ?
$$

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{3x^8}{y^8} \quad \dfrac{3a^2x^6}{b^2y^6} \quad \dfrac{3c^2x^4}{d^2y^4} \quad \dfrac{3e^2x^2}{f^2y^2} \quad \dfrac{3g^2}{h^2} \\[2ex]
\dfrac{x^4}{y^4} + \dfrac{ax^3}{by^3} + \dfrac{cx^2}{dy^2} + \dfrac{ex}{fy} + \dfrac{g}{h} \\[2ex]
6\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{ax^7}{by^7} \\[2ex]
\dfrac{cx^6}{dy^6} + \dfrac{acx^5}{bdy^5} \\[2ex]
\dfrac{ex^5}{fy^5} + \dfrac{aex^4}{bfy^4} + \dfrac{cex^3}{dfy^5}
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\cdot\dfrac{cx^2}{dy^2} \\[2ex]
\cdot\dfrac{ex}{fy} \\[2ex]
\cdot\dfrac{g}{h}
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
\dfrac{x^{12}}{y^{12}} + \dfrac{a^3x^9}{b^3y^9} + & \dfrac{c^3x^6}{d^3y^9} + & \dfrac{e^3x^3}{f^3y^3} + & \dfrac{g^3}{h^3} \\[2ex]
\dfrac{3ax^{210}}{b^2y^{10}} + & \dfrac{3ac^2x^7}{bd^2y^7} + & \dfrac{3ce^2x^4}{df^2y^4} + & \dfrac{3eg^2x}{fh^2y} \\[2ex]
 & \dfrac{3c^2x^8}{d^2y^8} + & \dfrac{3ae^2x^5}{bf^2y^5} + & \dfrac{3cg^2x^2}{dh^2y^2} \\[2ex]
 & & \dfrac{3e^2x^6}{f^2y^6} + & \dfrac{3ag^2x^3}{bh^2y^3} \\[2ex]
 & & & \dfrac{3g^2x^4}{h^2y^4}
\end{array}
$$

$$\frac{3ax^{11}}{by^{11}} + \frac{3a^2cx^8}{b^2dy^8} + \frac{3c^2ex^5}{d^2fy^5} + \frac{3e^2gx^2}{f^2hy^2}$$

$$\frac{3cx^{10}}{dy^{10}} + \frac{3a^2ex^7}{b^2fy^7} + \frac{3c^2gx^4}{d^2hy^4}$$

$$\frac{3ex^9}{fy^9} + \frac{3a^2gx^6}{b^2hy^6}$$

$$\frac{3gx^8}{hy^8}$$

$$\frac{6acx^9}{bdy^9} + \frac{6acex^6}{bdfy^6} + \frac{6cegx^3}{dfhy^3}$$

$$+ \frac{6cex^7}{dfy^7} + \frac{6aegx^4}{bfhy^4}$$

$$+ \frac{6aex^8}{bfy^8} + \frac{6egx^5}{fhy^5}$$

$$+ \frac{6acgx^5}{bdhy^5}$$

$$+ \frac{6cgx^6}{dhy^6}$$

$$+ \frac{6agx^7}{bhy^7}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{12}}{y^{12}} + \frac{3ax^{11}}{by^{11}} + \left(\frac{3a^2}{b^2} + \frac{3c}{d}\right)\frac{x^{10}}{y^{10}} + \left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{6ac}{bd} + \frac{3e}{f}\right)\frac{x^9}{y^9} + \left(\frac{3a^2c}{b^2d} + \right.\\
&\left.\frac{3c^2}{d^2} + \frac{6ae}{bf} + \frac{3g}{h}\right)\frac{x^8}{y^8} + \left(\frac{3ac^2}{bd^2} + \frac{6ce}{df} + \frac{3a^2e}{b^2f} + \frac{6ag}{bh}\right)\frac{x^7}{y^7} + \left(\frac{c^3}{d^3} + \right.\\
&\left.\frac{6ace}{bdf} + \frac{3e^2}{f^2} + \frac{6cg}{dh} + \frac{3a^2g}{b^2h}\right)\frac{x^6}{y^6} + \left(\frac{3c^2e}{d^2f} + \frac{3ae^2}{bf^2} + \frac{6acg}{bdh} + \frac{6eg}{fh}\right)\\
&\frac{x^5}{y^5} + \left(\frac{3ce^2}{df^2} + \frac{6aeg}{bfh} + \frac{3c^2g}{d^2h} + \frac{3g^2}{h^2}\right)\frac{x^4}{y^4}\left(\frac{e^3}{f^3}\ \frac{6ceg}{dfh} + \frac{3ag^2}{bh^2}\right)\frac{x^3}{y^3} + \\
&\left(\frac{3e^2g}{f^2h} + \frac{3cg^2}{dh^2}\right)\frac{x^2}{y^2}\ \frac{3eg^2x}{fh^2y} + \frac{g^3}{h^3}.
\end{aligned}$$

Dodatek.

Návod k ztrojmocňování výrazů algebraických a čísel dekadických vyvinováním souhrnů jednotlivými členy mocněnce vznikajících sloupců součinů.

Jak z předcházejícího již známo, vzniká každým členem mocněnce sloupec součinů, pozůstávající

a) z trojmoci členu dotyčného;

c) z předcházejících členů, násobených trojnásobným čtvercem členu dotyčného;

d) ze šestinásobných součinů sestav druhé třídy bez opakování veškerých členů předcházejících, násobených členem dotyčným; z toho patrno, že vývin šestinásobných součinů třetím členem daného mocněnce počíná.

Abychom souhrny jednotlivými členy mocněnce vznikajících sloupců součinů vyvinouti mohli, šetřemež při ztrojmocňování jak výrazů algebraických tak čísel dekadických následujících značné výhody poskytujících pravidel:

1. Upravme si především k výpočtu tomu potřebná čísla pomocná spůsobem následujícím:

a) Každému členu mocněnce nadepišme jeho trojnásobný čtverec.

b) Počnouce dvěma prvými členy mocněnce, násobme stranou počtu každým členem v pravo vyjma posledního, všecky ostatní členy v levo; jednotlivé součiny ty pak zšestinásobněme a pod členy mocněnce tak umístěme, aby prvý člen každého součinu v pravo pod členem, jímž násobeno bylo, se nalézal. Užívajíce v pokračování počtu těchto šestinásobných součinů pomocných, mějmež na paměti, že ku každému následujícímu součinu součet všech předcházejících náleží.

Co se týče vyvinutí šestinásobných součinů pomocných při číslech dekadických, platí totéž pravidlo jako při vyvinutí šestinásobných součinů pomocných výrazů algebraických, s tím však doložením, že, jelikož ku každému následujícímu součinu součet všech předcházejících náleží, šestinásobné součiny pomocné čísla dekadického hned tak vyvinouti můžeme, by v každém následujícím i předcházející obsažen byl: to se stane, jestliže prvé dvě číslice každého součinu šestinásobného pod číslici, jíž násobeno bylo, umístíme, k ostatním pak číslicím téhož součinu číslice předcházejícího součinu připočítáme.

Pro příklad, jak ony pomocné součiny šestinásobné vyvinovati a pod číslice mocněnce zmenšeně umístiti dlužno, stůjž zde vývin pomocných součinů šestinásobných několika čísel dekadických, a sice:

3 5 8	4 3 7	9 1 2	1 0 8
90	72	54	0

4 5 7 2	1 3 2 5	6 0 9 5	8 9 0 7
120	18	0	432
13890	1956	3240	43200

5 2 1 4	2 8 4 3	7 1 6 9	2 6 0 3
60	96	42	72
6312	10272	6756	7200

8 9 6 7 3	4 1 2 5 7	2 1 8 3 4
432	24	12
46404	2892	2208
4678032	301560	224724

1 4 0 9 5	3 7 5 0 2	7 0 5 0 8
24	126	0
2400	13710	2100
247560	1371000	210000

2. Majíce pomocná čísla k ztrojmocňování výrazu algebraického neb čísla dekadického upravena, a chtíce souhrn každým následujícím členem mocněnce vznikajícího sloupce součinů stanoviti, mějmež na paměti následující postup práce:

a) trojmoc dotyčného členu mocněnce stanoviti;

b) dotyčným členem mocněnce násobiti nejprvé šestinásobný součin předcházejícími členy mocněnce vyvinutý a pak trojnásobné čtverce členů předcházejících;

c) trojnásobným čtvercem členu dotyčného veškeré předcházející členy násobiti.

Z toho zřejmo, že prvý člen mocněnce toliko trojmoc svoji, druhý člen trojmoc svoji, trojnásobný čtverec členu předcházejícího, násobený členem druhým, a trojnásobný čtverec členu druhého, násobený členem prvým, podává, každým pak následujícím členem mocněnce že veškeré v předu uvedené součiny vyvinouti dlužno.

3. Vyvinuté souhrny výrazů algebraických vyjádříme dle vzorce níže vytknutého; souhrny čísel dekadických bude nám však dle toho za příčinou hodnoty místní spůsobem následujícím vyjádřiti, a sice:

a) Počínajíce vždy o tři místa dále v pravo trojmocí do počtu vzaté číslice daného mocněnce, vyjádřemež tuto trojmístně a nechme číslice ty s příslušným součinem šestinásobným v jedno číslo splynouti.

b) Tímtéž do počtu vzatým členem mocněnce násobme posloupně veškeré trojnásobné čtverce členů předcházejících, buďme však při násobení tom pamětlivi toho, že za příčinou hodnoty místní každý součin dvoumístně vyjádřiti dlužno: následovně bude nám zbývající část každého součinu k součinu nejblíže v levo stojícímu připočítati a chybící počet číslic nullami vyplniti. Jak známo, má číslice třetího místa každého trojnásobného čtverce takovou místní hodnotu jako jednotky předcházejícího čtverce trojnásobného: můžeme si tedy hned při násobení každou číslici místa třetího k jednotkám trojnásobného nejblíže v levo stojícího čtverce přimysliti. Takovýmto spůsobem nechmež veškeré součiny v jedno číslo splynouti, avšak tak, aby za příčinou hodnoty místní celé toto číslo pod číslo předcházející o dvě místa dále v levo umístěno bylo.

c) Konečně nám ještě zbývá předcházející členy mocněnce **trojnásobným** čtvercem téhož do počtu vzatého členu mocněnce násobiti, a sice: Počet ten, kde obě čísla vícecifernými býti se jeví, proveďme stranou počtu tak, aniž bychom si ona čísla dříve vypsali, a po ukončeném násobení umístěmež jich součin pod číslo předcházející o jedno místo dále v pravo.

Co se týče místní hodnoty vyšetřených souhrnů, t. j. součtů jednotlivými číslicemi mocněnce vznikajících sloupců součinů, jeví se nám na příkladech v předu uvedených dosti zřejmě, že každý následující souhrn o tři místa dále v pravo náleží: následovně bude nám prvé tři číslice míst nejnižších, t. j. trojmoc každého následujícího do počtu vzatého členu daného mocněnce o tři místa dále v pravo trojmoci předcházejícího členu umístiti.

Součet veškerých souhrnů jest třetí mocninou daného výrazu algebraického neb čísla dekadického.

Příklady.

$$
\begin{array}{c}
(a+b)^3 = ? \\
\hline
3a^2 \quad 3b^2 \\
a + b \\
\hline
a^3 \\
3a^2b + b^3 \\
3ab^2 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\overline{25}^3 = ? \\
\hline
12 \quad 75 \\
2 \quad 5 \\
\hline
8000 \\
6125 \\
150 \\
\hline
15625;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overline{39}^3 = ? \\
\hline
27 \quad 243 \\
3 \quad 9 \\
\hline
27000 \\
25029 \\
729 \\
\hline
59319;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overline{17}^3 = ? \\
\hline
3 \quad 147 \\
1 \quad 7 \\
\hline
1000 \\
2443 \\
147 \\
\hline
4913;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overline{86}^3 = ? \\
\hline
192 \quad 108 \\
8 \quad 6 \\
\hline
512000 \\
115416 \\
864 \\
\hline
636056.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
(3x + 2y)^3 = ? \\
\hline
27x^2 \quad 12y^2 \\
3x + 2y \\
\hline
27x^3 \\
54x^2y + 8y^3 \\
36xy^2 \\
\hline
27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(2a^2 - 4b^2)^3 = ? \\
\hline
12a^4 \quad 48b^4 \\
2a^2 - 4b^2 \\
\hline
8a^6 \\
- 48a^4b^2 - 64b^6 \\
96a^2b^4 \\
\hline
8a^6 - 48a^4b^2 + 96a^2b^4 - 64b^6.
\end{array}
$$

$$\left(\frac{x}{2}-1\right)^3=?$$

$$\frac{3x^2}{4} \quad 3$$
$$\frac{x}{2}-1$$

$$\frac{x^3}{8}$$
$$-\frac{3x^2}{4}-1$$
$$\frac{3x}{2}$$

$$\frac{x^3}{8}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-1;$$

$$(1-\sqrt{-3})^3=?$$

$$3 \quad -9$$
$$1-\sqrt{-3}$$

$$1$$
$$-3\sqrt{-3}+3\sqrt{-3}$$
$$-9$$

$$1-3\sqrt{-3}-9+3\sqrt{-3}=-8$$

$$(a+b+c)^3=?$$

$$3a^2 \quad 3b^2 \quad 3c^2$$
$$a+b+c$$
$$6ab$$

$$a^3$$
$$3a^2b+b^3$$
$$3ab^2$$
$$6abc+c^3$$
$$3(a^2+b^2)c$$
$$3(a+b)c^2$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3.$$

$\overline{4}\overline{25}^3=?$	$\overline{3}\overline{21}^3=?$	$\overline{79}\overline{6}^3=?$
48 12 75	27 12 3	147 243 108
4 2 5	3 2 1	7 9 6
48	36	378
64000	27000	343000
9608	5408	133029
480000	360000	17010000
240125	36001	2268216
24060	2712	89658
3150	96	8532
76765625;	33076161;	504358336;

$\overline{405}^3=?$	$\overline{602}^3=?$	$\overline{908}^3=?$
48 0 75	108 0 12	243 0 192
4 0 5	6 0 2	9 0 8
64000000	216000000	729000000
2400125	2160008	19440512
3000	720	17280
66430125;	218167208;	748613312;

$$(1-2x+3x^2)^3=?$$

$$\begin{array}{c} 3 \quad 12x^2 \quad 27x^4 \\ 1-2x+3x^2 \\ -12x \\ \hline 1 \\ -\quad 6x \quad -\quad 8x^3 \\ 12x^2 \\ -36x^3+27x^6 \\ 9x^2+36x^4 \\ 27x^4-54x^5 \\ \hline 1-6x+21x^2-44x^3+63x^4-54x^5+27x^6. \end{array}$$

$$\left(\frac{x^2}{2}-8x+2\right)^3=?$$

$$\begin{array}{c} \frac{3x^4}{4} \quad 192x^2 \quad 12 \\ \frac{x^2}{2}-8x+2 \\ -24x^3 \\ \hline \frac{x^6}{8} \\ -\quad 6x^5-512x^3 \\ 96x^4 \\ -48x^3+\quad 8 \\ \frac{3x^4}{2}+384x^2 \\ 6x^2-96x \\ \hline \frac{x^6}{8}-6x^5+\frac{195x^4}{2}-560x^3+390x^2-96x+8. \end{array}$$

$$(2\sqrt{15}-\sqrt{-3}+i)^3=?$$

$$\begin{array}{c} 180 \quad -9 \quad -3 \\ 2\sqrt{15}-\sqrt{-3}+i \\ -36\sqrt{-5} \\ \hline 120\sqrt{15} \\ -180\sqrt{-3}+3\sqrt{-3} \\ -18\sqrt{15} \\ +36\sqrt{5}\quad -\quad i \\ 180i-9i \\ -6\sqrt{15}+3\sqrt{-3} \\ \hline 96\sqrt{15}-174\sqrt{-3}+36\sqrt{5}+170i. \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(a+b+c+d)^3 = ? \\
\hline
3a^2 \quad 3b^2 \quad 3c^2 \quad 3d^2 \\
a + b + c + d \\
6ab \\
6ac + 6bc \\
\hline
a^3 \\
3a^2b + b^3 \\
3ab^2 \\
6^3abc + c^3 \\
3\,(a^2 + b^2)\,c \\
3\,(a + b)\,c^2 \\
6\,(ab + ac + bc)\,d + d^3 \\
3\,(a^2 + b^2 + c^2)\,d \\
3\,(a + b + c)\,d^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$a^3 + 3a^2b\ 3ab^2 + b^3 + 3\,(a+b)^2\,c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3 + 3\,(a+b+c)^2\,d + 3\,(a+b+c)\,d^2 + d^3.$$

$$\begin{array}{c}
\overline{14}\,\overline{23}^3 = ? \\
\hline
3 \quad 48 \quad 12 \quad 27 \\
1 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \\
24 \\
2568 \\
\hline
1000 \\
1264 \\
480000 \\
48008 \\
696 \\
1680000 \\
7704027 \\
104436 \\
3834 \\
\hline
2881473967;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overline{25}\,\overline{76}^3 = ? \\
\hline
12 \quad 75 \quad 147 \quad 108 \\
2 \quad 5 \quad 7 \quad 6 \\
60 \\
7050 \\
\hline
8000 \\
6125 \\
1500000 \\
420343 \\
8925 \\
36750000 \\
42300216 \\
765882 \\
27756 \\
\hline
17093758976;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overline{31}\,\overline{12}^3 = ? \\
\hline
27 \quad 3 \quad 3 \quad 12 \\
3 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\
18 \\
1986 \\
\hline
27000 \\
2701 \\
90000 \\
18001 \\
2703 \\
930000 \\
3972008 \\
540606 \\
3732 \\
\hline
30138300928:
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\overline{40}\,\overline{18}^3 = ? \\
\hline
48 \quad 0 \quad 3 \quad 192 \\
4 \quad 0 \quad 1 \quad 8 \\
0 \\
240 \\
\hline
64000000 \\
480001 \\
1200000 \\
1920512 \\
3840024 \\
76992 \\
\hline
64867893832;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overline{62}\,\overline{09}^3 = ? \\
\hline
108 \quad 12 \quad 0 \quad 243 \\
6 \quad 2 \quad 0 \quad 9 \\
72 \\
7200 \\
\hline
216000 \\
21608 \\
720000000 \\
64800729 \\
9730800 \\
150660 \\
\hline
239367387329;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overline{73}\,\overline{50}^3 = ? \\
\hline
147 \quad 27 \quad 75 \quad 0 \\
7 \quad 3 \quad 5 \quad 0 \\
126 \\
14790 \\
\hline
343000 \\
44127 \\
1890000 \\
630125 \\
73635 \\
54750000 \\
\hline
397065375000;
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\overline{2001}^3=?}\\
\hline
12 & 0 & 0 & 3\\
2 & 0 & 0 & 1\\
\hline
\multicolumn{4}{r}{8000000000}\\
\multicolumn{4}{r}{12000001}\\
\multicolumn{4}{r}{600}\\
\hline
\multicolumn{4}{r}{8012006001;}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\overline{5008}^3=?}\\
\hline
75 & 0 & 0 & 192\\
5 & 0 & 0 & 8\\
\hline
\multicolumn{4}{r}{125000000000}\\
\multicolumn{4}{r}{600000512}\\
\multicolumn{4}{r}{96000}\\
\hline
\multicolumn{4}{r}{125600960512;}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\overline{4900}^3=?}\\
\hline
48 & 243 & 0 & 0\\
4 & 9 & 0 & 0\\
\hline
\multicolumn{4}{l}{64000}\\
\multicolumn{4}{l}{43929}\\
\multicolumn{4}{r}{9720000000}\\
\hline
\multicolumn{4}{r}{117649000000.}
\end{array}$$

$$\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^2}{2b^2}-\frac{4a}{3b}-2\right)^3=?$$

$$\begin{array}{c}
\hline
\dfrac{3a^6}{b^6}\quad \dfrac{3a^4}{4b^4}\quad \dfrac{16a^2}{3b^2}\quad 12\\
\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{a^2}{2b^2}-\dfrac{4a}{3b}-2\\
\hline
\dfrac{3a^5}{b^5}\\
-\dfrac{8a^4}{b^4}-\dfrac{4a^3}{b^3}\\
\hline
\dfrac{a^9}{b^9}\\
\dfrac{3a^8}{2b^8}+\dfrac{a^6}{8b^6}\\
\dfrac{3a^7}{4b^7}\\
-\dfrac{4a^6}{b^6}-\dfrac{64a^3}{27b^3}\\
-\dfrac{4a^7}{b^7}-\dfrac{a^5}{b^5}\\
\dfrac{16a^5}{3b^5}+\dfrac{8a^4}{3b^4}\\
-\dfrac{6a^5}{b^5}+\dfrac{16a^4}{b^4}+\dfrac{8a^3}{b^3}-8\\
-\dfrac{6a^6}{b^6}-\dfrac{3a^4}{b^4}-\dfrac{32a^2}{3b^2}\\
\dfrac{12a^3}{b^3}+\dfrac{6a^2}{b^2}-\dfrac{16a}{b}\\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{a^9}{b^9}+\frac{3a^8}{2b^8}-\frac{13a^7}{4b^7}-\frac{79a^6}{8b^6}-\frac{5a^5}{3b^5}+\frac{103a^4}{6b^4}+\frac{476a^3}{27b^3}-\frac{14a^2}{b^2}-\frac{16a}{b}$$

$$-8.$$

$$\begin{array}{r}
(6x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^3 = ? \\
\hline
108x^6 \quad 75x^4 \quad 48x^2 \quad 27 \\
6x^3 - 5x^2 + 4x - 3 \\
-180x^5 \\
+144x^4 - 120x^3 \\
\hline
216x^9 \\
-540x^8 - 125x^6 \\
450x^7 \\
-720x^6 + 64x^3 \\
432x^7 + 300x^5 \\
288x^5 - 240x^4 \\
540x^5 - 432x^4 + 360x^3 - 27 \\
-324x^6 - 225x^4 - 144x^2 \\
162x^3 - 135x^2 + 108x \\
\hline
216x^9 - 540x^8 + 882x^7 - 1169x^6 + 1128x^5 - 897x^4 + 586x^3 \\
-279x^2 + 108x - 27.
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
(a + b + c + d + e)^3 = ? \\
\hline
3a^2 \quad 3b^2 \quad 3c^2 \quad 3d^2 \quad 3e^2 \\
a + b + c + d + e \\
6ab \\
6ac + 6bc \\
6ad + 6bd + 6cd \\
\hline
a^3 \\
3a^2b + b^3 \\
3ab^2 \\
6abc + c^3 \\
3(a^2 + b^2)c \\
3(a + b)c^2 \\
6(ab + ac + bc)d + d^3 \\
3(a^2 + b^2 + c^2)d \\
3(a + b + c)d^2 \\
6(ab + ac + bc + ad + bd + cd)e + e^3 \\
3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)e \\
3(a + b + c + d)e^2 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + \\
b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3 + 3(a + b + c + d)^2e + 3(a \\
+ b + c + d)e^2 + e^3.
\end{array}$$

$\overline{21365}^3 = ?$

12 3 27 108 75
2 1 3 6 5
12
1578
165468

8000
1201
60000
36027
3609
5670000
9468216
721962
230040000
827340125
60164040
160200

9752336802125;

$\overline{87692}^3 = ?$

192 147 108 243 12
8 7 6 9 2
336
36732
3720504

512000
134743
11760000
2016216
116082
93960000
330588729
17413272
2128680000
7441008008
386962086
105228

674341558877888;

$\overline{43712}^3 = ?$

48 27 147 3 12
4 3 7 1 2
72
9006
903222

64000
14427
1080000
504343
33789
63210000
9006001
482847
13110000
1806444008
96569406
52452

83522220720128;

$\overline{65149}^3 = ?$

108 75 3 48 243
6 5 1 4 9
180
18390
1854624

216000
54125
4500000
180001
10875
1950000
73560064
4350012
312480000
16691616729
978753132
1582902

276517907502949;

$\overline{90375}^3 = ?$

243 0 27 147 75
9 0 3 7 5
0
1620
199926

729000000
7290027
24300000
11340343
17010189
1327410000
999630125
1215014235
677775

738150521484375;

$\overline{46980}^3 = ?$

48 108 243 192 0
4 6 9 8 0
144
16884
1710912

64000
29016
4320000
1296729
44172
111780000
135072512
3928344
900480000

103690516392000;

$\overline{75006}^3 = ?$

147 75 0 0 108
7 5 0 0 6
210
21000
2100000

343000
73625
5250000000000
12600000216
886500000
810000

421976258100216;

$\overline{40089}^3 = ?$

48 0 0 192 243
4 0 0 8 9
0
000
19200

64000000000
384000512
768000000
172800729
432001728
973944

64428151224969;

$\overline{50304}^3 = ?$

75 0 27 0 48
5 0 3 0 4
0
900
90000

125000000
2250027
13500000000
360000064
300010800
241440

127293890494464

$\overline{10906}^3 = ?$

3 0 243 0 108
1 0 9 0 6
0
540
54000

1000000
270729
24300000000
324000216
18145800
117720

1297168757416;

$$\begin{array}{r}
\overline{30009}^3 = ? \\
\hline
27\quad 0\quad 0\quad 0\quad 243 \\
3\quad 0\quad 0\quad 0\quad 9 \\
\hline
270000000000000 \\
24300000729 \\
729000 \\
\hline
270243072907 29\,;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\overline{20001}^3 = ? \\
\hline
12\quad 0\quad 0\quad 0\quad 3 \\
2\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1 \\
\hline
800000000000000 \\
1200000001 \\
6000 \\
\hline
8001200060001.
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
(3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1)^3 = ? \\
\hline
27x^8 \quad 12x^6 \quad 3x^4 \quad 48x^2 \quad 3 \\
3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1 \\
-36x^7 \qquad\qquad\qquad \\
18x^6 - 12x^5 \qquad\quad \\
-72x^5 + 48x^4 - 24x^3 \qquad \\
\hline
27x^{12} \\
-54x^{11} - 8x^9 \\
36x^{10} \qquad\quad \\
-36x^9 + x^6 \\
27x^{10} + 12x^8 \qquad\qquad\quad \\
9x^8 - 6x^7 \qquad\qquad\quad \\
144x^8 - 72x^7 + 48x^6 - 64x^3 \\
-108x^9 - 48x^7 - 12x^5 \qquad\qquad \\
144x^6 - 96x^5 + 48x^4 \qquad\qquad \\
-36x^7 + 18x^6 - 84x^5 + 48x^4 - 24x^3 + 1 \\
27x^8 + 12x^6 + 3x^4 + 48x^2 \qquad\quad \\
9x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 12x \qquad\quad \\
\hline
27x^{12} - 54x^{11} + 63x^{10} - 152x^9 + 192x^8 - 162x^7 + 223x^6 \\
- 192x^5 + 108x^4 - 94x^3 + 51x^2 - 12x + 1.
\end{array}$$

Z příkladů tuto uvedených o ztrojmocňování mnohočlenů vysvítá již dosti jasně ztrojmocňování veškerých dalších mnohočlenných výrazů algebraických a čísel dekadických.

Poznámka

k zmocňování mnohociferných čísel dekadických.

Záhodno zajisté bude ještě o jedné důležité věci při zmocňování mnohociferných čísel dekadických bližší poznámku učiniti. týkáť se to hlavně stanovení místa jednotlivých součinů druhé a' třetí mocniny, zvláště oněch mnohociferných čísel dekadických, jež mezi jinými číslicemi také buď větší neb menší počet nul v sobě obsahují, kterými, jak již praveno bylo, mnohé řady nullami, po případě jednou neb i několika jen číslicemi se stávají. Neznajíce stanovení místa jednotlivých součinů druhé a třetí mocniny o sobě samých, bude nám při zmocňování mnohociferných čísel dekadických, více nul v sobě obsahujících, s nullami u výpočtu právě tak naložiti, jako by to číselné veličiny byly, a to jen z té příčiny, bychom se stanovení místa jednotlivých součinů z číselných veličin daného mocněnce domohli, čímž se však práce často nejen zbytečně prodlužuje, ale i obtížnější stává.

Abychom tedy celé řady součinů, jež toliko nully podávají, nepovšímnuty nechati, a pouze k stanovení součinů, veličiny číselné podávající, přihlížeti mohli, hleďmež především známosti nabýti o tom, jak na základě hodnoty místní kterýkoli dvojnásobný součin druhé mocniny neb trojnásobný součin třetí mocniny pod čtverce neb trojmoci číslic daného mocněnce umístiti dlužno.

Známosti této nabudeme, šetříce následujícího zcela jednoduchého pravidla, a sice:

a) Majíce na zřeteli toliko ony dvě číslice daného mocněnce, z nichž dotyčný dvojnásobný neb trojnásobný součin pochází, zapamatujmež sobě nejprvé počet číslic, jakýž na onu v levo stojící číslici následuje, buďme však při tom pamětlivi toho, že další v pravo stojící číslice daného mocněnce v počet ten nespadají!

b) Na to přihlédněmež ku čtverci neb trojmoci oné v pravo stojící číslice daného mocněnce, a počnouce prvou číslicí dotyčného čtverce neb dotyčné trojmoci, odmysleme si od pravé ruky k levé u vývinu dvojnásobného součinu druhé mocniny *vždy*, a u vývinu trojnásobného součinu třetí mocniny jen *tenkráte* takový počet míst, jejž jsme si nejdříve byli zapamatovali, jestliže nám trojnásobný čtverec v pravo stojící číslice onou v levo stojící násobiti jest; v případě však, kde nám naopak zase trojnásobný čtverec v levo stojící číslice onou v pravo stojící násobiti bude, dlužno si v tomtéž pořádku dvakrát tak velký počet míst, jako jest onen, jejž jsme si byli zapamatovali, odmysliti, a hned na prvá místa, jak v předcházejícím tak i v tomto případě, číslice dotyčného součinu umístiti.

Seznámivše se s tuto uvedeným pravidlem o stanovení místa jednotlivých součinů v druhou neb třetí mocninu čísla dekadického spadajících, můžeme si tím počet často značně ukrátiti, jelikož mnohé součiny, nully podávající, nepovšimnuty nechati, a na jich místa jiné součiny, v tatáž místa spadající, umístiti můžeme.

Příklady.

1. Zdvojmocňování.

$309^2 = ?$	$780^2 = ?$	$600^2 = ?$
90081	496400	360000
54	112	
95481;	608400;	

$4021^2 = ?$	$3005^2 = ?$	$6201^2 = ?$
16000401	9000025	36040001
16804	30	24124
16168441;	9030025;	38452401;

$30509^2 = ?$	$40013^2 = ?$	$20014^2 = ?$
900250081	1600000109	400000116
305490	24006	16008
930799081;	8	4
	1601040169;	400560196;

$66005^2 = ?$	$30007^2 = ?$	$48000^2 = ?$
3636000025	900000049	1664000000
720660	42	64
4356660025;	900420049;	2304000000;

$706005^2 = ?$	$800109^2 = ?$
490036000025	640000010081
8407060	144018
498443060025;	16
	640174411881;

$690006^3 = ?$

368100000036
10800108
72

476108280036;

$200508^3 = ?$

40000250064
2032080

40203458064;

$100095^3 = ?$

10000008125
1900090

10019009025;

$400007^3 = ?$

160000000049
56

160005600049;

$3005002^3 = ?$

9000025000004
30012020

9030037020004;

$4070001^3 = ?$

16004900000001
56000814

16564908140001.

2. Ztrojmocňování.

$405^3 = ?$

48 0 75
4 0 5

64000125
300
240

66430125;

$760^3 = ?$

147 108 0
7 6 0

343216000
756
882

438976000;

$4021^3 = ?$

48 0 12 3
4 0 2 1

$80 \mid 1 = 80$
80×6

64000008001
96481206
484812

65013301261;

$1203^3 = ?$

3 12 0 27
1 2 0 3

$200 \mid 3 = 600$
600×6

1008000027
1293654
603627

1740992427;

$7006^3 = ?$

147 0 0 108
7 0 0 6

343000000216
882756

343882756216;

$3009^3 = ?$

27 0 0 243
3 0 0 9

27000000729
243729

27243729729;

$\overline{40009}^3 = ?$

48 0 0 0 243
4 0 0 0 9

64000000000729
43200972

64043200972729;

$\overline{80031}^3 = ?$

192 0 0 27 3
8 0 0 3 1

2400 | 1 = 2400
$\overline{2400} \times 6$

51200000027001
57621624279
192144

512595430669791;

$\overline{96005}^3 = ?$

243 108 0 0 75
9 6 0 0 5

540000 | 5 = 2700000
$\overline{2700000} \times 6$

729216000000125
9720540450
12150675
1458162

884874247200125;

$\overline{80631}^3 = ?$

192 0 108 27 3
8 0 6 3 1

480 | 3 = 1440
2418 | 1 = 50418
$\overline{1490418} \times 6$

512000216027001
1152021624189
864016227
1920108
5760324
8942508

524211009879591;

$\overline{35021}^3 = ?$

27 75 0 12 3
3 5 0 2 1

1500 | 2 = 3000
700 | 1 = 150700
$\overline{3150700} \times 6$

27125000008001
225150601506
540360912
13502775
189042

42952221314261;

$\overline{6090}4^3 = ?$

108 0 243 0 48

6 0 9 0 4

54000 | 4 = 216000

$\overline{216000} \times 6$

216000729000064

1458000432

4320288

972000972

1296

225911037643264;

$\overline{6000}27^3 = ?$

108 0 0 0 12 147

6 0 0 0 2 7

12000 | 7 = 84000

$\overline{84000} \times 6$

216000000000008343

756008820294

216007200084

504

216029161312219683;

$\overline{1005}06^3 = ?$

3 0 0 75 0 108

1 0 0 5 0 6

50000 | 6 = 300000

$\overline{300000} \times 6$

1000000125000216

150750108240

18180450

1015256940354216;

$\overline{5000}09^3 = ?$

75 0 0 0 0 243

5 0 0 0 0 9

125000000000000729

67501215

125000675012150729;

$$\overline{305041}^{3} = ?$$

$$\begin{array}{cccccc} 27 & 0 & 75 & 0 & 48 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 4 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 15000 & 4 = 60000 \\ 12200 & 1 = \quad 1512200 \end{array}$$

$$\overline{61512200} \times 6$$

$$\begin{array}{r} 27000125000064001 \\ 2250144091512 \\ 13502700240048 \\ 10803075 \\ 3690732 \\ \hline 28384068613183921 \end{array};$$

$$\overline{1020706}^{3} = ?$$

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 0 & 12 & 0 & 147 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 7 = 14000 \\ 714000 & 6 = \quad 124284000 \end{array}$$

$$\overline{14124284000} \times 6$$

$$\begin{array}{r} 1000008000343000216 \\ 12014701080756 \\ 6211802940216 \\ 84720882 \\ 84745704 \\ \hline 1063413092766055816 \end{array}.$$

Oddíl druhý.

Návod k odmocňování výrazů algebraických a čísel dekadických.

I. Oddvojmocňování.

Tak jako odnásobení znamená odnímání v dělenci obsažených dělitelů, čímž jednotlivé členy podílu (číslice počtu dělitelů) vycházejí, značí i oddvojmocňování posloupné odnímání v odmocněnci obsažených sloupců součinů, čímž jednotlivé členy kořene druhého vycházejí.

Znajíce vývin počtu při zdvojmocňování výrazů algebraických a čísel dekadických dle podání v oddílu prvém obsaženého, můžeme návod k odmocňování spořádaných algebraických výrazů a dekadických čísel odvoditi z pravidla, kterým výrazy ony z kořene povstaly, a to:

Uvážíme-li, že oddvojmocňování jest opačný výkon zdvojmocňování, t. j., že tytéž v odmocněnci obsažené sloupce součinů v tomtéž pořádku, jako při zdvojmocňování, na základě vycházejících členů kořene vyvinovati, souhrnem dle spůsobu v dodatku o zdvojmocňování obsaženého vyjadřovati a pak odnímati dlužno bude nám zřejmo:

A) Pravidlo k oddvojmocňování spořádaných výrazů algebraických.

1. Jelikož při zdvojmocňování mnohočlenu algebraického prvým členem mocněnce pouze čtverec jeho vzniká, dobudeme opačně prvého členu kořene, jestliže prvý člen daného odmocněnce odmocníme a druhou mocnosť vycházejícího členu kořene od odmocněnce odečteme.

2. Jelikož prvý člen každého zbytku v daném odmocněnci dvojnásobný součin z prvého a onoho na novo stanovícího členu kořene jest, obdržíme na základě toho druhý a každý následující člen, jestliže dvojnásobným prvým členem kořene prvý člen zbytku dělíme, podílem pak, t. j. nově vyšetřeným členem kořene, souhrn sloupce součinů dle návodu, v dodatku o zdvojmocňování obsaženého, vyvineme, a od zbývajících ještě členů odmocněnce odečteme

Dlužno tedy prvému jakož i každému následujícímu již vyšetřenému členu kořene, než na novo děliti počneme, jeho dvojnásobnou hodnotu nadepsati, jelikož, jak známo, pomocí dvojených hodnot předcházejících členů mocněnce souhrny jednotlivých sloupců součinů vyvinovány býti mohou.

Takto pokračujíce ve výkonu tomto shledáme, že buď nezůstane žádný zbytek a čtvercový kořen jest úplně dobyt, aneb zůstane zbytek, což se stává, kdykoli daný výraz úplným čtvercem není, pak jest kořen nesměrný.

B) Pravidlo k oddvojmocňování čísel dekadických.

1. Rozdělme dané číslo od jednotek počínajíce na třídy o dvou cifrách, při čemž poslední třída v levo i jednu cifru míti může. Jsou-li číslu celému připojena místa desetinná, rozdělme je tímže způsobem, avšak od levé ruky k pravé, při čemž se, pakli třeba, chybující poslední desetinka nullou vyplní.

2. Vyhledejme největší cifru, jejíž druhá mocnosť v nejvyšší třídě obsažena jest, umístěme ji co prvou číslici čtvercového kořene, a odčetše zdvojmocněnou číslici tuto od prvé třídy, přivěsme zbytku třídu druhou.

3. Druhou a každou následující číslici kořenovou dobudeme následovně:

a) Od zbytku s přivěšenou třídou příslušnou odmysleme si v pravo takový počet číslic, jakýž kořen již čítá, a dělme zbývající část dvojnásobnou hodnotou prvé číslice kořenové, majíce při tom zřetel k velikosti čísla, podílem tím se vyvinujícího: bude nám tedy, prvé nežli ku stanovení druhé a každé následující číslice kořenové přikročíme, posledně vyšetřené číslici její dvojnásobnou hodnotu nadepsati, a že číslice místa druhého každé dvojnásobné hodnoty tutéž hodnotu místní má, jako jednotky dvojnásobné hodnoty předcházející, na paměti míti.

b) Vycházejícím podílem, t. j. následujícím členem kořene hledaného, vyviňmež dle návodu, v dodatku o zdvojmocňování obsaženého, souhrn sloupce součinů, odečtěme jej od čísla do počtu vzatého, a ku zbytku přivěsme opět třídu následující.

Takto pokračujme tak dlouho, až všechny třídy tímže způsobem vystřídány jsou!

Příklady.

$$\begin{array}{l} \phantom{\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = } 2a \\ \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b. \\ \underline{-a^2} \\ \quad + 2ab + b^2 \\ \quad \underline{\pm 2ab \pm b^2} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \phantom{\sqrt{6/25}=2}4 \\ \sqrt{6/25} = 25; \\ \;22{,}5 : 4 \\ \;0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \phantom{\sqrt{14/44}=3}6 \\ \sqrt{14/44} = 38; \\ \;54{,}4 : 6 \\ \;0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \phantom{\sqrt{84/64}=9}18 \\ \sqrt{84/64} = 92. \\ \;36{,}4 : 18 \\ \;0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \phantom{\sqrt{9x^2+12xy+4y^2}=}3x \\ \sqrt{9x^2 + 12xy + 4y^2} = 3x + 2y; \\ \underline{-9x^2} \\ \quad + 12xy + 4y^2 \\ \quad \underline{\pm 12xy \pm 4y^2} \\ \qquad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \phantom{\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}=}2a \\ \sqrt{a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}} = a + \frac{1}{a} \\ \underline{-a^2} \\ \quad + 2 + \frac{1}{a^2} \\ \quad \underline{\pm 2 \pm \frac{1}{a^2}} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \phantom{\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-\frac{2ab}{xy}+\frac{b^2}{y^2}}=}\frac{2a}{x} \\ \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - \frac{2ab}{xy} + \frac{b^2}{y^2}} = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}. \\ \underline{-\frac{a^2}{x^2}} \\ \quad - \frac{2ab}{xy} + \frac{b^2}{y^2} \\ \quad \underline{\mp \frac{2ab}{xy} \pm \frac{b^2}{y^2}} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \phantom{\sqrt{a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2}=}2a \quad 2b \\ \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2} = a + b + c. \\ \underline{-a^2} \\ \quad + 2ab + b^2 \\ \quad \underline{\pm 2ab \pm b^2} \\ \qquad + 2ac + 2bc + c^2 \\ \qquad \underline{\pm 2ac \pm 2bc \pm c^2} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \phantom{\sqrt{5/52/25}=}4\;6 \\ \sqrt{5/52/25} = 235; \\ \;15{,}2 : 4 \\ \quad 23{,}25 : 4 \\ \quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \phantom{\sqrt{17/05/69}=}8\;2 \\ \sqrt{17/05/69} = 413; \\ \;10{,}5 : 8 \\ \quad 24{,}69 : 8 \\ \quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{57/60/81} = 7\;\overset{14}{5}\;\overset{10}{9};$$
$$\begin{array}{l} 86{,}0 : 14 \\ 135{,}81 : 15 \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt{64/16/01} = 8\;\overset{16}{0}\;\overset{0}{1};$$
$$\begin{array}{l} 16{,}01 : 16 \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt{1/06/09} = 1\;\overset{2}{0}\;\overset{0}{3};$$
$$\begin{array}{l} 6{,}09 : 2 \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt{37/08/81} = 6\;\overset{12}{0}\;\overset{0}{9};$$
$$\begin{array}{l} 108{,}81 : 12 \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt{4 + 2a + \frac{35a^2}{12} + \frac{2a^3}{3} + \frac{4a^4}{9}} = 2 + \overset{4}{\frac{a}{2}} + \overset{a}{\frac{2a^2}{3}}.$$
$$\begin{array}{l}
-4 \\
\hline
+2a + \frac{35a^2}{12} \\
\underline{\pm}\, 2a \,\underline{\pm}\, \frac{a^2}{4} \\
\hline
+\frac{8a^2}{3} + \frac{2a^3}{3} + \frac{4a^4}{9} \\
\underline{\pm}\, \frac{8a^2}{3} \,\underline{\pm}\, \frac{2a^3}{3} \,\underline{\pm}\, 4a^4 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2}$$
$$= a + \overset{2a}{b} + \overset{2b}{c} + \overset{2c}{d}.$$
$$\begin{array}{l}
a^2 \\
\underline{-a^2} \\
+2ab + b^2 \\
\underline{\pm}\, 2ab \,\underline{\pm}\, b^2 \\
\hline
+2ac + 2bc + c^2 \\
\underline{\pm}\, 2ac \,\underline{\pm}\, 2bc \,\underline{\pm}\, c^2 \\
\hline
+2ad + 2bd + 2cd + d^2 \\
\underline{\pm}\, 2ad \,\underline{\pm}\, 2bd \,\underline{\pm}\, 2cd \,\underline{\pm}\, d^2 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\sqrt{2/02/49/29} = 1\;\overset{2}{4}\;\overset{8}{2}\;\overset{4}{3};$$
$$\begin{array}{l} 10{,}2 : 2 \\ 6{,}49 : 2 \\ 8{,}529 : 2 \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt{31/89/99/04} = 5\;\overset{10}{6}\;\overset{12}{4}\;\overset{8}{8}.$$
$$\begin{array}{l} 68{,}9 : 10 \\ 53{,}99 : 11 \\ 90{,}304 : 11 \\ 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 6\;\; 4\;\; 10 \\
\sqrt{10/56/90/01} = 3\;\; 2\;\; 5\;\; 1; \\
\quad 15{,}6 : 6 \\
\quad\;\; 32{,}90 : 6 \\
\quad\;\;\;\; 6{,}501 : 6 \\
\quad\;\;\;\;\;\; 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 8\;\; 10\;\; 0 \\
\sqrt{20/32/20/64} = 4\;\; 5\;\; 0\;\; 8; \\
\quad 43{,}2 : 8 \\
\quad\;\; 72{,}064 : 9 \\
\quad\;\;\;\; 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 6\;\; 0\;\; 2 \\
\sqrt{9/09/02/25} = 3\;\; 0\;\; 1\;\; 5; \\
\quad 9{,}02 : 6 \\
\quad 30{,}125 : 6 \\
\quad\;\; 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 18\;\; 0\;\; 16 \\
\sqrt{82/57/35/69} = 9\;\; 0\;\; 8\;\; 7; \\
\quad 157{,}35 : 18 \\
\quad\;\; 127{,}169 : 18 \\
\quad\;\;\;\; 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{\{a^6 + 4a^5\sqrt{-2} + 2a^4 - (4\sqrt{2} + 20\sqrt{-2})\,a^3 + (25 + 16i)\,a^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2a^3 \quad -4a^2\sqrt{-2} \quad +10a \\
\qquad + 20a\sqrt{2} + 8\} = a^3 - 2a^2\sqrt{-2} + 5a - 2\sqrt{2}. \\
\quad a^6 \\
\underline{-a^6} \\
\qquad -4a^5\sqrt{-2} + 2a^4 \\
\qquad \underline{\mp 4a^5\sqrt{-2} \mp 8a^4} \\
\qquad\qquad + 10a^4 - (4\sqrt{2} + 20\sqrt{-2})\,a^3 + (25 + 16i)a^2 \\
\qquad\qquad \underline{\pm 10a^4 \qquad\qquad\quad \mp 20\sqrt{-2}\;\; a^3 \pm 25} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 4a^3\sqrt{2} + 16a^2 i - 20a\sqrt{2} + 8 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\mp 4a^3\sqrt{2} \pm 16a^2 i \mp 20a\sqrt{2} \pm 8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2 + 2\,(a + b + c)\,d + d^2 + 3\,(a} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2a \quad\; 2b \quad\; 2c \quad\; 2d \\
\qquad\quad \overline{+ b + c + d)\,e + e^2} = a + b + c + d + e. \\
\quad a^2 \\
\underline{-a^2} \\
\qquad + 2ab + b^2 \\
\qquad \underline{\pm 2ab \pm b^2} \\
\qquad\qquad\qquad + 2\,(a + b)\,c + c^2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\pm 2\,(a + b)\,c \pm c^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 2\,(a + b + c)\,d + d^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\pm 2\,(a + b + c)\,d \pm d^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2\,(a + b + c + d)\,e + e^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\pm 2\,(a + b + c + d)\,e \pm e^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\sqrt{12/40/02/57/96} = \overset{6}{3}\ \overset{10}{5}\ \overset{4}{2}\ \overset{2}{1}\ 4;$$

$$\begin{array}{l} 34,0 : 6 \\ \quad 15,02 : 7 \\ \qquad 9,857 : 7 \\ \qquad 28,1696 : 7 \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{47/51/89/63/56} = \overset{12}{6}\ \overset{16}{8}\ \overset{18}{9}\ \overset{6}{3}\ 4;$$

$$\begin{array}{l} 115,1 : 12 \\ \quad 127,89 : 13 \\ \qquad 46,863 : 13 \\ \qquad\quad 55,1456 : 13 \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{1/02/47/51/29} = \overset{2}{1}\ \overset{0}{0}\ \overset{2}{1}\ \overset{4}{2}\ 3;$$

$$\begin{array}{l} 2,47 : 2 \\ \quad 4,651 : 2 \\ \qquad 6,0729 : 2 \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{20/30/49/37/21} = \overset{8}{4}\ \overset{10}{5}\ \overset{0}{0}\ \overset{12}{6}\ 1;$$

$$\begin{array}{l} 43,0 : 8 \\ \quad 54,937 : 9 \\ \qquad 9,0121 : 9 \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{16/00/08/00/01} = \overset{8}{4}\ \overset{0}{0}\ \overset{0}{0}\ \overset{0}{0}\ 1;$$

$$\begin{array}{l} 8,0001 : 8 \\ \quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{4/00/28/00/49} = \overset{4}{2}\ \overset{0}{0}\ \overset{0}{0}\ \overset{0}{0}\ 7;$$

$$\begin{array}{l} 28,0049 : 4 \\ \quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{20/44/66/75/24} = \overset{8}{4}\ \overset{10}{5}\ \overset{4}{2}\ \overset{2}{1}\ 8;$$

$$\begin{array}{l} 44,4 : 8 \\ \quad 19,66 : 9 \\ \qquad 16,275 : 9 \\ \qquad\quad 72,3424 : 9 \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{54/04/30/81/96} = \overset{14}{7}\ \overset{6}{3}\ \overset{10}{5}\ \overset{2}{1}\ 4;$$

$$\begin{array}{l} 50,4 : 14 \\ \quad 75,30 : 14 \\ \qquad 20,581 : 14 \\ \qquad\quad 58,8096 : 14 \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{16 - 64a + 40a^2 + 56a^3 + 9a^4 - 38a^5 - 11a^6 + 4a^7 + 4a^8}$$
$$8 - 16a - 6a^2 + 2a^3$$
$$= 4 - 8a - 3a^2 + a^3 + 2a^4.$$

$$\begin{array}{l}
16 \\
\underline{-16} \\
\quad -64 + 40a^2 \\
\quad \underline{\mp 64 \pm 64a^2} \\
\qquad -24a^2 + 56a^3 + 9a^4 \\
\qquad \underline{\mp 24a^2 \pm 48a^3 \pm 9a^4} \\
\qquad\qquad +8a^3 \qquad\qquad -38a^5 - 11a^6 \\
\qquad\qquad \underline{\pm 8a^3 \mp 16a^4 \mp 6a^5 \pm a^6} \\
\qquad\qquad\qquad +16a^4 - 32a^5 - 12a^6 + 4a^7 + 4a^8 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\pm 16a^4 \mp 32a^5 \mp 12a^6 \pm 4a^7 \pm 4a^8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\frac{62a^4}{81} - \frac{76a^3}{27} + \frac{76a^2}{81} - \frac{50a}{81}$$

$$\sqrt{\left\{\frac{961a^8}{6561} - \frac{2356a^7}{2187} + \frac{15352a^6}{6561} - \frac{10214a^5}{6561} + \frac{12166a^4}{6561} - \frac{20368a^3}{6561} + \frac{6781a^2}{81} - \frac{50a}{81} + 1\right\}} = \frac{31a^4}{81} - \frac{38a^3}{27} + \frac{38a^2}{81} - \frac{25a}{81} + 1.$$

$$\frac{961a^8}{6561}$$

$$-\frac{961a^8}{6461}$$

$$-\frac{2356a^7}{2187} + \frac{15352a^6}{6561}$$

$$\mp\frac{2356a^7}{2187} \pm \frac{1444a^6}{729}$$

$$+\frac{2356a^6}{6561} - \frac{10214a^5}{6561} + \frac{12166a^4}{6561}$$

$$\pm\frac{2356a^6}{6561} \mp \frac{2888a^5}{2187} \pm \frac{1444a^4}{6561}$$

$$-\frac{1550a^5}{6561} + \frac{10722a^4}{6561} - \frac{20368a^3}{6561} + \frac{6781a^2}{6561}$$

$$\mp\frac{1550a^5}{6561} \pm \frac{1900a^4}{2187} \mp \frac{1900a^3}{6561} \pm \frac{625a^2}{6561}$$

$$+\frac{62a^4}{81} - \frac{18468a^3}{6561} + \frac{6156a^2}{6561} - \frac{50a}{81} + 1$$

$$\pm\frac{62a^4}{81} \mp \frac{76a^3}{27} \pm \frac{76a^2}{81} \mp \frac{50a}{81} \pm 1$$

$$0$$

II. Odtrojmocňování.

Tak jako oddvojmocňování znamená posloupné odnímání v odmocněnci obsažených sloupců součinů, čímž jednotlivé členy kořene druhého vycházejí, značí i odtrojmocňování posloupné odnímání v odmocněnci obsažených sloupců součinů, čímž jednotlivé členy kořene třetího vycházejí.

Znajíce vývin počtu při ztrojmocňování mnohočlenů algebraických a čísel dekadických dle podání v oddílu prvém obsaženého, můžeme návod k odtrojmocňování spořádaných algebraických výrazů a dekadických čísel odvoditi z pravidla, kterým výrazy ony z kořene povstaly; známoť, že odtrojmocňování jest opáčný výkon ztrojmocňování, t. j., že tytéž v odmocněnci obsažené sloupce součinů v tomtéž pořádku, jako při ztrojmocňování na základě vycházejících členů kořene vyvinovati, souhrnem dle návodu, v dodatku o ztrojmocňování obsaženého, vyjadřovati, a pak odnímati dlužno, a proto bude nám zřejmo:

A) Pravidlo k odtrojmocňování spořádaných výrazů algebraických.

1. Jelikož při ztrojmocňování mnohočlenů algebraických prvým členem mocněnce pouze trojmoc jeho vzniká, dobudeme opáčně prvého členu kořene, jestliže prvý člen daného odmocněnce odtrojmocníme, a třetí mocnosť vycházejícího členu kořene od odmocněnce daného odečteme.

2. Jelikož prvý člen každého zbytku v daném odmocněnci součin z trojnásobného čtverce členu prvého a onoho na novo stanovícího členu hledaného kořene jest: obdržíme na základě toho druhý a každý následující člen kořene, jestliže prvý člen zbytku trojnásobným čtvercem prvého členu kořene dělíme, podílem pak, t. j. nově vyšetřeným členem, souhrn sloupce součinů jako při ztrojmocňování dle návodu v dodatku obsaženého vyvineme, a od zbývajících ještě členů odmocněnce odečteme.

Dlužno tedy každému vycházejícímu členu kořene jeho trojnásobný čtverec nadepsati, a před stanovením třetího jakož i každého následujícího členu kořene pomocný součin šestinásobný jako při ztrojmocňování dle návodu v dodatku obsaženého vyvinouti a každý prvý člen pomocných součinů šestinásobných pod člen, jímž předcházející členy kořene násobeny byly, umístiti.

Takto pokračujíce ve výkonu tomto, shledáváme, že buď neostane žádný zbytek, v kterémžto případě pravíme, že kořen žádaný jest racionálný, neb ostane zbytek, což se stává, kdykoli daný mnohočlen není úplnou mocností třetího stupně, v kterémžto případě pravíme, že kořen žádaný jest veličinou neracionálnou.

B) Pravidlo k odtrojmocňování čísel dekadických.

1. Rozdělme dané číslo od jednotek počínajíce na třídy o třech cifrách; nejvyšší třída může býti i o dvou cifrách neb i o jedné cifře.

Jsou-li číslu celému připojena místa desetinná, rozdělme je tímže spůsobem, avšak od levé ruky k pravé; nezáleží-li nejnižší třída ze třech cifer, doplňme počet tento nullami, čímž, jak známo, hodnotu daného čísla nikterak nezměníme.

2. Vyhledejme největší číslo, jehož třetí mocnina jest obsažena v nejvyšší třídě, umístěme je co prvou číslici v třetím kořenu, a odčetše ztrojmocněnou tuto číslici od nejvyšší třídy odmocněnce, připišme ku zbytku třídu následující.

3. Druhou číslici hledaného kořene obdržíme, jestliže od zbytku s přivěsenou třídou druhou dvě číslice si odmyslíme (zatrhneme), zbývající část trojnásobným čtvercem prvé číslice kořenové dělíme, a vycházejícím podílem, t. j. následujícím členem kořene, souhrn sloupce součinů jako při ztrojmocňování dle návodu v dodatku obsaženého vyvineme, jej od čísla do počtu vzatého odečteme, a ku zbytku opět třídu následující připíšeme; bude nám tedy každé vycházející číslici kořenové její trojnásobný čtverec nadepsati, a dělíce onu prvou zatrhnutím oddělenou část zbytku v levo trojnásobným čtvercem číslice prvé, též k velikosti souhrnu, podílem se vyvinujícího, přihlížeti.

4. Třetí a každou následující číslici kořenovou obdržíme následovně:

a) Násobme stranou počtu posledně vyšetřenou číslicí kořenovou všecky číslice předcházející, součin ten zšestinásobněme a pod známé již číslice kořenové tak umístěme, by dvě číslice jeho míst nejnižších pod číslici, jíž násobeno bylo, přišly, ostatní pak číslice téhož pomocného součinu šestinásobného by k číslicím předcházejícího součinu, předchází-li již jaký, připočítány byly, a součet tím vzniklý k oněm dvěma číslicím připojen byl.

Takovýmto způsobem domaháme se pomocných čísel k vyvinutí šestinásobných součinů, v sloupec vyšetřeného členu kořenového spadajících.

b) Od zbytku s přivěsenou třídou příslušnou zatrhněme v pravo dvakrát tak velký počet číslic, jakýž kořen již čítá, a dělme zbývající část netoliko trojnásobným čtvercem číslice prvé jako při ztrojmocňování výrazů algebraických, nýbrž přimysleme si k tomuto pokaždé i ony číslice nově vyvinutého pomocného součinu šestinásobného, jež dle hodnoty místní pod číslice jeho spadají, a jež dle prvého pomocného součinu šestinásobného poznati lze způsobem následujícím:

Dle své hodnoty místní náleží prvý pomocný součin šestinásobný pod prvý trojnásobný čtverec o jednu číslici dále v pravo, a tudíž, vyjma číslice místa nejnižšího, spadají všecky ostatní číslice v levo pod prvý trojnásobný čtverec; následovně bude nám od prvého pomocného součinu šestinásobného jednu, od druhého tři, od třetího pět, a od každého následujícího vždy o dvě číslice více číslic v pravo si odmysliti. a číslice v levo stojící co číslo samostatně k prvému trojnásobnému čtverci si přimysliti. Mějmež však při sčítání těchto dvou hodnot na zřeteli:

a) že, jak prvý trojnásobný čtverec, tak ony pod tento spadající číslice každého pomocného součinu šestinásobného, číslicemi míst nejvyšších takových dvou čísel jsou, jichž součet trojnásobný čtverec celé tím do počtu vzaté známé části kořene podává;

b) že, jelikož trojnásobný čtverec každé následující číslice kořenové o dvě místa dále v pravo náleží, můžeme na základě toho veškeré trojnásobné čtverce v jedno číslo shrnouti, jestliže číslici místa třetího k předcházejícímu čtverci trojnásobnému připojíme a chybící počet míst nullami vyplníme.

Můžeme tedy buď celý trojnásobný čtverec známé části kořene vyvinouti, jestliže k souhrnu trojnásobných čtverců známých členů kořene nově vyvinutý pomocný součin šestinásobný připočítáme, anebo můžeme také libovolnou část číslic téhož trojnásobného čtverce známé části kořene zcela správně vyvinouti, jestliže jen ony číslice, libovolnému počtu vyhovující, k sečítání pojmeme, ostatní pak nepovšímnuty necháme.

Z toho plyne návod pro vyvinutí oněch počátečních číslic trojnásobného čtverce celé známé již části kořene, jež na onu zatrhnutím zbývající část číslic v levo každého zbytku s přivěsenou třídou příslušnou v daném odmocněnci vliv mají, jelikož nám jimi, co číslem samostatným, dotyčnou část do počtu vzatých číslic daného odmocněnce děliti bude, a to:

Sčítajíce dotyčné dvě hodnoty pro vyvinutí dělitele každé prvé části do počtu vzatých číslic odmocněnce, přimysleme si číslici místa třetího druhého trojnásobného čtverce, vyskytuje-li se jaká, k trojnásobnému čtverci prvému, a jelikož nám možno, majíce na zřeteli hodnotu místní jednotlivých trojnásobných čtverců, trojnásobný čtverec celé již vyšetřené části kořene, jak výše vytknuto bylo, pouze součtem dotyčných pomocných čísel vyjádřiti, čehož však tuto potřeba nekáže, jelikož na onu prvou zatrhnutím oddělenou část číslic dotyčného dělence toliko součet dotyčných dvou hodnot co dělitel vliv má: vyviňme toliko pro přesnost žádaného součtu o jednu číslici více, což se stane, počneme-li sčítání ono číslicí druhého místa druhého trojnásobného čtverce a onou nově vyvinutého pomocného součinu šestinásobného, jež dle hodnoty místní k této náleží; dáť se často součtem sousedících číslic jednotka pro součet žádaný vyvinouti, a kdyby i toho nebylo, rozhoduje často takováto číslice vedlejší určité stanovení hledaného podílu, jelikož se hodnota její buď více neb méně k jednotce nejblíže vyššího místa blíží, čímž buď větší neb menší počet jednotek pro nejblíže vyšší hodnotu místní u vývinu stanovícího souhrnu v počet spadajících součinů získati se dá.

c) Vycházejícím podílem, t. j. následujícím členem hledaného kořene vyviňme souhrn sloupce součinů jako při ztrojmocňování dle návodu v dodatku obsaženého, odečteme tento v daném odmocněnci od čísla do počtu vzatého, a ku zbytku přivěsme opět třídu následující.

Takto pokračujeme tak dlouho, až všechny třídy týmže způsobem vystřídány jsou!

Příklady.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3a^2 \quad 3b^2 \\ \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b \\ \underline{-a^3} \\ \quad + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \quad \underline{\pm}\, 3a^2b \,\underline{\pm}\, 3ab^2 \,\underline{\pm}\, b^3 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad 12 \quad 75 \\ \sqrt[3]{15/625} = 2 \quad 5\,; \\ \quad 76{,}25 : 12 \\ \quad 6125 \\ \quad \underline{150} \\ \qquad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad 192 \quad 108 \\ \sqrt[3]{636/056} = 8 \quad 6\,; \\ \quad \underline{512} \\ \quad 1240{,}56 : 192 \\ \quad 115416 \\ \quad \underline{\quad 864 \quad} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad 3 \quad 147 \\ \sqrt[3]{4/913} = 1 \quad 7\,; \\ \quad 39{,}13 : 3 \\ \quad 2443 \\ \quad \underline{147} \\ \qquad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \qquad\qquad\quad 27 \quad 243 \\ \sqrt[3]{59/319} = 3 \quad 9\,; \\ \quad 323{,}19 : 27 \\ \quad 25029 \\ \quad \underline{\quad 729 \quad} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 27x^2 \quad 12y^2 \\ \sqrt[3]{27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3} = 3x + 2y\,; \\ \underline{-27x^3} \\ \quad + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 \\ \quad \underline{\pm}\, 54x^2y \,\underline{\pm}\, 36xy^2 \,\underline{\pm}\, 8y^3 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 12a^4 \quad 48b^4 \\ \sqrt[3]{8a^6 - 48a^4b^2 + 96a^2b^4 - 64b^6} = 2a^2 - 4b^2\,; \\ \underline{-8a^6} \\ \quad - 48a^4b^2 + 96a^2b^4 - 64b^6 \\ \quad \mp\, 48a^4b^2 \,\underline{\pm}\, 96a^2b^4 \,\mp\, 64b^6 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{\left\{\frac{x^3}{8}-\frac{3x^2}{8}+\frac{3x}{2}-1\right\}}=\overset{\frac{3x^2}{4}}{\frac{x}{2}}-\overset{3}{1}.$$

$$-\frac{x^3}{8}$$

$$-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-1$$

$$\underset{+}{-}\frac{3x^2}{4}\underset{-}{+}\frac{3x}{2}\underset{+}{-}1$$

$$0$$

$$\sqrt[3]{\left\{\frac{27a^6}{512x^6}-\frac{3a^3}{32x^3}+\frac{1}{18}-\frac{8x^3}{729a^3}\right\}}=\overset{\frac{27a^4}{64x^4}}{\frac{3a^2}{8x^2}}-\overset{\frac{4x^2}{27a^2}}{\frac{2x}{9a}}.$$

$$-\frac{27a^6}{512x^6}$$

$$-\frac{3a^3}{32x^3}+\frac{1}{18}-\frac{8x^3}{729a^3}$$

$$\underset{+}{-}\frac{3a^3}{32x^2}\underset{-}{+}\frac{1}{18}\underset{+}{-}\frac{8x^3}{729a^3}$$

$$0$$

$$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3}$$

$$=\overset{3a^2}{a}+\overset{3b^2}{\underset{6ab}{b}}+\overset{3c^2}{c}.$$

$$a^3$$

$$-a^3$$

$$+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\underset{-}{+}3a^2b\underset{-}{+}3ab^2\underset{-}{+}b^3$$

$$+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$

$$\underset{-}{+}3(a+b)^2c\underset{-}{+}3(a+b)c^2\underset{-}{+}c^3$$

$$0$$

$$\sqrt[3]{76/765/625}=\overset{48}{4}\ \ \overset{12}{\underset{48}{2}}\ \ \overset{75}{5};$$

127‚65 : 48
9608
48

267‚7625 : 52‚9
240125
24060
3150

0

$$\sqrt[3]{33/076/161}=\overset{27}{3}\ \ \overset{12}{\underset{36}{2}}\ \ \overset{3}{1};$$

60‚76 : 27
5408
36

30‚8161 : 30‚7
36001
2712
96

0

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad 147\ 243\ 108 \\
\sqrt[3]{504/358/336} = 7 \quad 9 \quad 6; \\
\quad 343 \qquad\qquad\quad 378 \\
\hline
\quad 1613{,}58 : 147 \\
\quad 133039 \\
\quad\ 1701 \\
\hline
\quad 1131{,}9336 : 187{,}2 \\
\qquad 2268216 \\
\qquad 89658 \\
\qquad\quad 8532 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad 48 \quad 0 \quad 75 \\
\sqrt[3]{66/430/125} = 4 \quad 0 \quad 5; \\
\qquad 243{,}0125 : 48 \\
\qquad 2400125 \\
\qquad\quad 3000 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad 108 \quad 0 \quad 12 \\
\sqrt[3]{218/167/208} = 6 \quad 0 \quad 2; \\
\qquad 216{,}7208 : 108 \\
\qquad 2160008 \\
\qquad\quad 820 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad 243 \quad 0 \quad 192 \\
\sqrt[3]{748/613/312} = 9 \quad 0 \quad 8. \\
\qquad 1961{,}3312 : 243 \\
\qquad 19440512 \\
\qquad\quad 17280 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3 \quad 12x^2 \quad 27x^4 \\
\sqrt[3]{1 - 6x + 21x^2 - 44x^3 + 63x^4 - 54x^5 + 27x^6} = 1 - 2x + 3x^2. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 12x \\
1 \\
-1 \\
\hline
\quad - 6x + 21x^2 - 44x^3 \\
\quad \mp 6x \pm 12x^2 \mp 8x^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad + 9x^2 - 36x^3 + 63x^4 - 54x^5 + 27x^6 \\
\qquad\qquad\qquad \pm 9x^2 \mp 36x^3 \pm 63x^4 \mp 54x^5 \pm 27x^6 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{\left\{\frac{x^6}{27} - \frac{8x^5}{15} + \frac{89x^4}{25} - \frac{1712x^3}{125} + \frac{801x^2}{25} - \frac{216x}{5} + 27\right\}}$$

$$\frac{x^4}{4} \qquad \frac{192x^2}{25} \qquad 27$$

$$= \frac{x^2}{3} - \frac{8x}{5} + 3.$$

$$-\frac{16x^3}{5}$$

$$\begin{array}{l}
\dfrac{x^6}{27} \\
-\dfrac{x^6}{27} \\
\hline
\end{array}$$

$$-\frac{8x^5}{15}+\frac{89x^4}{25}-\frac{1712x^3}{125}$$
$$\underset{+}{-}\frac{8x^5}{15}\underset{-}{+}\frac{64x^4}{25}\underset{+}{-}\frac{512x^3}{125}$$
$$+x^4-\frac{48x^3}{5}+\frac{801x^2}{25}-\frac{216x}{5}+27$$
$$\underset{-}{+}x^4\underset{+}{-}\frac{48x^3}{5}\underset{-}{+}\frac{801x^2}{25}\underset{+}{-}\frac{216x}{5}\underset{-}{+}27$$
$$0$$

$$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3}=a+b+c+d.$$

$$\begin{array}{cccc} 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 & 3d^2 \\ 6ab & & & \\ 6ac+6bc & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a^3 \\
-a^3 \\
\hline
+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\underset{-}{+}3a^2b\underset{-}{+}3ab^2\underset{-}{+}b^3 \\
\hline
+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 \\
\underset{-}{+}3(a+b)^2c\underset{-}{+}3(a+b)c^2\underset{-}{+}c^3 \\
\hline
+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3 \\
\underset{-}{+}3(a+b+c)^2d\underset{-}{+}3(a+b+c)d^2\underset{-}{+}d^3 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{2/881/473/967}=\overset{3}{1}\ \ \overset{48}{4}\ \ \overset{12}{2}\ \ \overset{27}{3}.$$

$$\begin{array}{ll}
18{,}81:3 & 24 \\
1264 & 2568 \\
48 & \\
\hline
13{,}7473:5{,}8 & \\
48008 & \\
696 & \\
168 & \\
\hline
18{,}185967:6{,}0 & \\
7704027 & \\
104436 & \\
3834 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

```
                              12  75 147 108
 3
√17/093/758/976 = 2   5   7   6 ;
   40,93 : 12             6 0
    6125                  7 0 5 0
    150
  ─────────
    146,8758 : 18,7
      420343
      8925
       3675
────────────────
         119,165976 : 19,8
            42300216
            765882
               27756
        ─────────────────
                 0


 3                              27   3   3   12
√30/138/300/928 = 3   1   1   2 ;
    31,38 : 27              1 8
    2701                    1 9 8 6
       9
  ─────────
       34,7300 : 28,8
         18001
        2703
            93
   ────────────
            58,069928 : 29,0
              3972008
             540606
                 3732
         ─────────────────
                  0


 3                              27  192 147 243
√58/365/920/439 = 3   8   7   9 ;
   313,65 : 27              1 4 4
    22112                   1 5 9 9 6
      576
  ─────────
      349,3920 : 4,33
      1008343
      20244
         5586
──────────────────
        405,317439 : 44,9
        143964729
        2604123
            94041
     ─────────────────
              0
```

$$\sqrt[3]{239/367/387/329} = \overset{108}{6}\quad \overset{12}{2}\quad \overset{0}{0}\quad \overset{243}{9};$$

233,67 : 108 — 7 2
216 08 — 7 2 0 0
7 2
1039,387329 : 115,3
64 800729
973 0800
1 50660
0

$$\sqrt[3]{64/867/893/832} = \overset{48}{4}\quad \overset{0}{0}\quad \overset{3}{1}\quad \overset{192}{8};$$

86,7893 : 48 — 2 4 0
48 0001
120
386,692832 : 48,2
1 920512
384 0024
76992
0

$$\sqrt[3]{8/012/006/001} = \overset{12}{2}\quad \overset{0}{0}\quad \overset{0}{0}\quad \overset{3}{1};$$

12,006001 : 12
12 000001
600
0

$$\sqrt[3]{125/600/960/512} = \overset{75}{5}\quad \overset{0}{0}\quad \overset{0}{0}\quad \overset{192}{8};$$

600,960512 : 75
600 000512
96000
0

$$\sqrt[3]{117/649/000/000} = \overset{48}{4}\quad \overset{243}{9}\quad \overset{0}{0}\quad \overset{0}{0}.$$

64
536,49 : 48
439 29
97 2
0

$$\sqrt[3]{216x^9 - 540x^8 + 882x^7 - 1169x^6 + 1128x^5 - 897x^4 + 586x^3 - 279x^2 + 108x - 27} = 6x^3 - 5x^2 + 4x - 3.$$

$$108x^6 \quad 75x^4 \quad 48x^2 \quad 27$$

$$-180x^4$$

$$+144x^4 - 120x^3$$

$$216x^9$$

$$-216x^9$$

$$-540x^8 + 882x^7 - 1169x^6$$

$$\mp 540x^8 \pm 450x^7 \mp 125x^6$$

$$+432x^7 - 1044x^6 + 1128x^5 - 897x^4 + 586x^3$$

$$\pm 432x^7 \mp 720x^6 \pm 588x^5 \mp 240x^4 \pm 64x^3$$

$$-324x^6 + 540x^5 - 657x^4 + 522x^3 - 279x^2 + 108x - 27$$

$$\mp 324x^6 \pm 540x^5 \mp 225x^4 \pm 162x^3 \mp 144x^2 \pm 108x \mp 27$$

$$\mp 432x^4 \pm 360x^3 \mp 135x^2$$

$$0$$

$$\sqrt[3]{\left\{\frac{a^9}{b^9} + \frac{3a^8}{2b^8} - \frac{13a^7}{4b^7} - \frac{79a^6}{8b^6} - \frac{5a^5}{3b^5} + \frac{103a^4}{6b^4} + \frac{476a^3}{27b^3} - \frac{14a^2}{3b^2} - \frac{16a}{b} - 8\right\}} = \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^2}{2b^2} - \frac{4a}{3b} - 2.$$

$$\frac{3a^6}{b^6} \quad \frac{3a^4}{4b^4} \quad \frac{16a^2}{3b^2} \quad 12$$

$$\frac{3a^5}{b^5}$$

$$-\frac{8a^4}{b^4} - \frac{4a^3}{b^3}$$

$$-\frac{a^9}{b^9}$$

$$+\frac{3a^8}{2b^8} - \frac{13a^7}{4b^7} - \frac{79a^6}{8b^6}$$

$$\pm \frac{3a^8}{2b^8} \pm \frac{3a^7}{4b^7} \pm \frac{a^6}{8b^6}$$

$$-\frac{4a^7}{b^7} - \frac{10a^6}{b^6} - \frac{5a^5}{3b^5} + \frac{103a^4}{6b^4} + \frac{476a^3}{27b^3}$$

$$\mp \frac{4a^7}{b^7} \mp \frac{4a^6}{b^6} \pm \frac{13a^5}{3b^5} \pm \frac{8a^4}{3b^4} \mp \frac{64a^3}{27b^3}$$

$$-\frac{6a^6}{b^6} - \frac{6a^5}{b^5} + \frac{29a^4}{2b^4} + \frac{20a^3}{b^3} - \frac{14a^2}{b^2} - \frac{16a}{b} - 8$$

$$\mp \frac{6a^6}{b^6} \mp \frac{6a^5}{b^5} \mp \frac{3a^4}{2b^4} \pm \frac{12a^3}{b^3} \mp \frac{32a^2}{3b^2} \mp \frac{16a}{b} \mp 8$$

$$\pm \frac{16a^4}{b^4} \pm \frac{8a^3}{b^3} \pm \frac{6a^2}{b^2}$$

$$0$$

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,(a+b)^2\,c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3 + 3\,(a + b + c)^2\,d + 3\,(a+b+c)\,d^2 + d^3 + 3\,(a+b+c+d)^2\,e + 3\,(a+b+c+d)\,e^2 + e^3} = \overset{3a^2}{a} + \overset{3b^2}{b} + \overset{3c^2}{c} + \overset{3d^2}{d} + \overset{3e^2}{e}.$$

$$\begin{array}{l}
6ab \\
6ac + 6bc \\
6ad + 6bd + 6cd
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a^3 \\
-\,a^3 \\
\hline
+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
\pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3 \\
\hline
+ 3\,(a+b)^2\,c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3 \\
+ 3\,(a+b)^2\,c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3 \\
\hline
+ 3\,(a+b+c)^2\,d + 3\,(a+b+c)\,d^2 + d^3 \\
+ 3\,(a+b+c)^2\,d + 3\,(a+b+c)\,d^2 + d^3 \\
\hline
3\,(a+b+c+d)^2\,e + 3\,(a+b+c+d)\,e^2 + e^3 \\
3\,(a+b+c+d)^2\,e + 3\,(a+b+c+d)\,e^2 + e^3 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{9/752/336/802/125} = \overset{12}{2}\quad \overset{3}{1}\quad \overset{27}{3}\quad \overset{108}{6}\quad \overset{75}{5};$$

$$\begin{array}{l}
1\,2 \\
1\,5\,7\,8 \\
1\,6\,5\,4\,6\,8
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
17{,}52 : 12 \\
12\;01 \\
\;\;6 \\
\hline
49{,}1336 : 13{,}2 \\
3\;6027 \\
36\;09 \\
\;\;567 \\
\hline
88{,}739802 : 13{,}6 \\
9\;468216 \\
72\;1962 \\
\;\;23004 \\
\hline
68{,}45346125 : 13{,}6 \\
8\;27340125 \\
60\;164040 \\
\;\;160200 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{83/522/220/720/128} = \overset{48}{4}\quad \overset{27}{3}\quad \overset{147}{7}\quad \overset{3}{1}\quad \overset{12}{2};$$

$$\begin{array}{l}
7\,2 \\
9\,0\,0\,6 \\
9\,0\,3\,2\,2\,2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
195{,}22 : 48 \\
144\;27 \\
\;\;10\;8 \\
\hline
401{,}5220 : 55{,}4 \\
50\;4343 \\
337\;89 \\
\;\;6\;321 \\
\hline
\end{array}$$

68,767720 : 57,2
9 006001
48 2847
1311

114,63909128 : 57,2
18 06444008
96 569406
52452

0

192 147 108 0 12

$\sqrt[3]{672/267/419/611/208} = 8 \quad 7 \quad 6 \quad 0 \quad 2;$

1602,67 : 192
1347 43
117 6

1376,4419 : 227,0
201 6216
1160 82
9 396

460,43611208 : 230,2
73 46400008
386 961600
105120

0

3 3 6
3 6 7 3 2
3 6 7 3 2 0 0

243 0 27 147 75

$\sqrt[3]{738/150/521/484/375} = 9 \quad 0 \quad 3 \quad 7 \quad 5;$

915,0521 : 243
729 0027
2 430

1836,194484 : 244,6
11 340343
1701 0189
1 32741

1225,07831375 : 244,9
9 99630125
1215 014235
677775

0

1 6 2 0
1 9 9 9 2 6

108 75 0 48 243

$\sqrt[3]{275/246/543/312/649} = 6 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 9;$

592,46 : 108
541 25
45 0

1 8 0
1 8 0 0 0
1 8 1 5 6 0 0

621,543312 : 126,7
72 000064
435 0000
31200

1142,31248649 : 126,9
163 40400729
978 750432
1580472

0

48 0 0 75 108

$\sqrt[3]{64/269/176/495/616} = 4 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \quad 6;$

1 2 0 0 0

269,176495 : 48
240 000125
30000

288,76370616 : 481
72000216
288 000450
332540

0

27 147 0 0 192

$\sqrt[3]{50/685/863/104/512} = 3 \quad 7 \quad 0 \quad 0 \quad 8;$

1 2 6 0 0 0 0

236,85 : 27
192 43
44 1

328,63104512 : 41,0
100 80000512
227 760000
710400

0

12 0 3 0 75

$\sqrt[3]{8/129/088/165/043} = 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 7;$

1 2 0 0 0

12,9088 : 12
12 0001
60

84,87165043 : 12,1
84000343
84 002100
295470

0

$$\sqrt[3]{27x^{12} - 54x^{11} + 63x^{10} - 152x^9 + 192x^8 - 162x^7 + 223x^6 - 192x^5 + 108x^4 - 94x^3 + 51x^2 - 12x + 1}$$

$$\begin{array}{ccccc} 27x^8 & 12x^6 & 3x^4 & 48x^2 & 3 \end{array}$$

$$= 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1.$$

$$\begin{array}{l} -36x^7 \\ +18x^6 - 12x^5 \\ -72x^5 + 48x^4 - 24x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 27x^{12} \\ -27x^{12} \\ \hline -54x^{11} + 63x^{10} - 152x^9 \\ \mp 54x^{11} \pm 36x^{10} \mp 8x^9 \\ \hline 27x^{10} - 144x^9 + 192x^8 - 162x^7 + 223x^6 \\ 27x^{10} \mp 36x^9 \pm 12x^8 \mp 6x^8 \pm x^6 \\ \pm 9x^8 \\ \hline -108x^9 + 171x^8 - 156x^7 + 222x^6 - 192x^5 + 108x^4 - 94x^3 \\ \mp 108x^9 \pm 144x^8 \mp 48x^7 \pm 144x^6 \mp 12x^5 \pm 48x^4 \mp 64x^3 \\ \mp 72x^7 \pm 48x^6 \mp 96x^5 \\ \hline +27x^8 - 36x^7 + 30x^6 - 84x^5 + 60x^4 - 30x^3 + 51x^2 - 12x + 1 \\ \pm 27x^8 \mp 36x^7 \pm 12x^6 \mp 72x^5 \pm 3x^4 \mp 6x^3 \pm 48x^2 \mp 12x \pm 1 \\ \pm 18x^6 \mp 12x^5 \pm 9x^4 \mp 24x^3 \pm 3x^2 \\ \pm 48x^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Z postupu práce příkladů v druhém oddílu uvedených vysvítá již dosti jasně odmocňování veškerých dalších mnohočlenů algebraických a čísel dekadických.

Dodatek.

1. Odmocňování spořádaných mnohočlenů algebraických a čísel dekadických, nejsoucích úplnými mocnostmi dotyčného stupně.

Při odmocňování spořádaného mnohočlenu algebraického neb čísla dekadického, nejsoucího však úplnou mocností dotyčného stupně, shledáváme, že poslední zbytek nerovná se nulle. V případě tom dlužno pokračovati u výkonu tom tak dlouho, dokud toho potřeba pro věrnosť výpočtu káže, právě tak, jak pravidly o odmocňování naznačeno bylo. Bude nám tedy, odmocňujíce čísla dekadická, ku danému odmocněnci libovolný počet nul, co míst desetinných, si přimysliti, a při dalším dobývání kořene téhož pravidla, jako při číslech předcházejících, šetřiti.

Příklady.

1. Oddvojmocňování.

$$2 \qquad x \qquad \frac{x^2}{4}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \ldots$$

$$-1$$

$$+x$$

$$\begin{array}{ccc} +x & + & \dfrac{x^2}{4} \\ - & & - \end{array}$$

$$-\frac{x^2}{4}$$

$$\begin{array}{cccccc} -\dfrac{x^2}{4} & - & \dfrac{x^3}{8} & + & \dfrac{x^4}{64} \\ + & & + & & - \end{array}$$

$$+\frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{64}$$

$$\begin{array}{ccccccc} +\dfrac{x^3}{8} & + & \dfrac{x^4}{16} & - & \dfrac{x^5}{64} & + & \dfrac{x^6}{256} \\ - & & - & & + & & - \end{array}$$

$$-\frac{5x^4}{64} + \frac{x^5}{64} - \frac{x^6}{256} \text{ a t. d.}$$

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad 8\;\;6\;\;6\;\;0\;\;2\;\;4\;\;14\;\;0\;\;2\;\;16\;\;18\\
\sqrt{18{\cdot}75} = 4{\cdot}3\;\;3\;\;0\;\;1\;\;2\;\;7\;\;0\;\;1\;\;8\;\;9\;\;2\ldots\\
\;\;27{,}5\\
\;\;\;2\;6{,}00\\
\;\;\;\;\;11{,}0000\\
\;\;\;\;\;\;2\;3{,}39900\\
\;\;\;\;\;\;\;\;6\;0{,}785600\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;16{,}38710000\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;7\;7{,}268459900\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;7\;9{,}8642767600\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1\;9{,}21990427900\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1\;89939620336 \text{ atd.}
\end{array}$$

2. Odtrojmocňování.

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad 3 \qquad \frac{1}{3}x^2 \quad \frac{1}{27}x^4\\
\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\ldots\\
\qquad\qquad\qquad\quad -2x\\
\underline{-1}\\
\quad -x\\
\quad \underset{+}{-}x \underset{-}{+} \frac{1}{3}x^2 \underset{+}{-} \frac{1}{27}x^3\\
\hline
\qquad -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{27}x^3\\
\qquad \underset{+}{-}\frac{1}{3}x^2 \underset{-}{+} \frac{2}{9}x^3 \underset{-}{+} \frac{1}{27}x^4 \underset{+}{-} \frac{1}{81}x^5 \underset{+}{-} \frac{1}{729}x^6\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underset{+}{-}\frac{1}{27}x^4\\
\hline
\qquad\qquad -\frac{5}{27}x^3 \qquad\qquad + \frac{1}{81}x^5 + \frac{1}{729}x^6 \text{ atd.}
\end{array}$$

```
 3         27  75 192  27   0    48 147 192
 √46 = 3 · 5   8   3   0   4   7   8...
  27         9 0
  ‾‾    1 0 6 8 0
  190,00 1 0 7 4 4 4 4
  136 25 1 0 7 4 4 4 4 0 0
   22 5  1 0 7 4 5 2 9 9 9 2 0
  ─────── ─1 0 7 4 5 4 5 0 4 0 7 6 8
   312,5000
    72 0512
   222 00
     6 720
   ──────────
    11 7,288000
     3 2 040027
     8 3 3076
          9666
    ─────────────
      18,43713000
    ───────────────
      184,3713000000
       42 9777600064
      111 07690800
            1719840
    ─────────────────────
        303,149121536000
         75 217099440343
        194 3845890336
              52670688
      ───────────────────
         335,46906355177000
          85 96360326144512
         222 153816039576
                687945024
         ──────────────────────
          2735157545624648 atd.
```

2. Skrácené odmocňování čísel dekadických.

Z příkladů v předcházejícím odstavci obsažených viděti jest, že počítání pro množství cifer tím obtížnější se stává, čím větší počet míst k dosažení potřebné věrnosti v kořenu žádáme. Jak se obtíži této bez ublížení věrnosti kořene snadně dá odpomoci, platí i při tomto novém spůsobu odmocňování tatáž pravidla o výkonech skracovacích, jichž se v mnohých učebních knihách početních dočítáme: stávát se to tedy použitím skráceného dělení. Abychom se však dověděli, od kolikáté cifry kořenové skráceného dělení užiti máme, držme se následujícího pravidla:

„Vyhledejme při oddvojmocňování o jednu číslici více než jest polovice, při odtrojmocňování však toliko polovici počtu číslic stanovícího kořene dle návodu odmocňovacího, ostatní pak část kořene dělením skráceným“.

Kdykoli však počet cifer stanovícího kořene číslo liché udává, dlužno, abychom o věrnosti poslední cifry kořenové ubezpečeni byli, onu prvou část kořene, jak při oddvojmocňování tak i při odtrojmocňování o jednu cifru větší druhé části učiniti.

Chtíce tedy užiti skráceného odmocňování při číslech dekadických, kde tobo třeba, vyhledejme onu prvou část cifer stanovícího kořene spůsobem obyčejným, na místě však, co bychom následující třídu příslušnou ku zbytku měli přivěsiti, počínejme sobě při dalším výkonu následovně:

a) při oddvojmocňování skraťme nového dělitele, t. j. souhrn dvojených hodnot již známých cifer kořenových, o jednu cifru, pokračujíce v dalším dělení podobným skracováním dělitele tak dlouho, až spůsobem tím veškery cifry jeho vytřídány jsou, a vycházejícími podíly ostatní část cifer dobývajícího kořene stanovena jest;

b) při odtrojmocňování skraťme nového dělitele, t. j. souhrn pomocných hodnot již známých cifer kořenových o n a zbytek o $n - 1$ cifer, to však tak, abychom zbývajícími ciframi v dalším dělení, skracujíce dělitele vždy o jednu cifru, toliko ostatní hledanou ještě část cifer dobývajícího kořene vyvinouti mohli.

Jelikož každá třída cifer daného odmocněnce jednu cifru kořenovou podává, můžeme, znajíce počet desetinných míst, jež vyvinouti dlužno, i počet veškerých cifer stanovícího kořene snadno v mysli přehlédnouti, a dle toho pak na základě tuto již vytknutého pravidla výkon skráceného odmocňování si zaříditi, jak příklady následujícími naznačeno bude:

1. Vyhledejme

a) $\sqrt{46/81}$ na 4 místa desetinná,
b) $\sqrt{137 \cdot 5}$ na 5 míst desetinných,
c) $\sqrt{45691}$ na 6 míst desetinných,
d) $\sqrt{75 \cdot 4\dot{2}\dot{5}}$ na 8 míst desetinných,
e) $\sqrt{0 \cdot 06\dot{5}}$ na 10 míst desetinných.

Provedení.

a) Jelikož prvý příklad číslo celistvé o dvou třídách podává, bude, majíce čtyři desetinná místa vyvinouti, veškerých cifer stanovícího kořene šest: následovně bude nám tuto čtyři prvé cifry kořenové spůsobem obyčejným a ostatní dvě cifry skráceným dělením vyhledati:

```
            12 16 8  2
√46/71 = 6  8·4  1  7  8  3
  108‚1
    5 7‚00
      2 4‚400
      1 0 719 : 13‚6‚8‚2
          1 141
              46
```

Jelikož příklad ten ještě o jednu cifru více, než bylo žádáno, podává, můžeme o věrnosti poslední cifry ubezpečeni býti.

b) Jelikož druhý příklad číslo smíšené o třech třídách podává, z nichž dvě třídy v číslo celistvé spadají, bude, majíce pět desetinných míst vyvinouti, veškerých cifer stanovícího kořene sedm: následovně bude nám i tuto čtyři prvé cifry kořenové spůsobem obyčejným, a ostatní tři cifry skráceným dělením vyhledati:

```
              2  2  14 4
√1/37·5 = 1  1·7  2  6  0  4
    3‚7
    1 6‚50
        6‚100
        1 416 : 2‚3‚4‚4
              9
```

c) Jelikož třetí příklad číslo celistvé o třech třídách podává, bude, majíce šest desetinných míst vyvinouti, veškerých cifer stanovícího kořene devět: následovně bude nám pět prvých cifer spůsobem obyčejným a ostatní čtyři cifry kořenové skráceným dělením vyhledati:

$$
\begin{array}{l}
\phantom{\sqrt{4/56/91}=\;} {}^{4}\;{}^{2}\;{}^{6}\;{}^{14}\;{}^{10} \\
\sqrt{4/56/91} = 2\;1\;3\cdot7\;5\;4\;5\;3\;2 \\
5,6 \\
1\;5,91 \\
\quad 3\;2,200 \\
\quad\; 2\;3,3100 \\
\quad\;\; 1\;9375 : 4,2,7,5,0 \\
\quad\quad 2275 \\
\quad\quad\; 137 \\
\quad\quad\quad 9
\end{array}
$$

d) Jelikož čtvrtý příklad číslo smíšené o nekonečném počtu tříd podává, z nichž toliko jedna třída v číslo celé spadá, ostatní však třídy periodický desetinec, o dvou cifrách se opakujících a o jedné cifře, periodu předcházející, značí; bude tedy, majíce osm desetinných míst vyvinouti, veškerých cifer stanovícího kořene devět: následovně bude nám pět prvých cifer spůsobem obyčejným a ostatní čtyři cifry kořenové skráceným dělením vyhledati:

$$
\begin{array}{l}
\phantom{\sqrt{75\cdot\dot{4}\dot{2}/5}=\;} {}^{16}\,{}^{12}\,{}^{16}\;{}^{8}\;{}^{14} \\
\sqrt{75\cdot\dot{4}\dot{2}/5} = 8\cdot6\;8\;4\;7\;7\;1\;2\;9\;9 \\
114,2 \\
\;14\;6,52 \\
\quad 8\;2,852 \\
\quad 1\;3\;3,9652 \\
\quad\; 1\;2\;3843 : 1,7,3,6,9,4 \\
\quad\quad\; 2257 \\
\quad\quad\;\; 520 \\
\quad\quad\;\; 173 \\
\quad\quad\quad 17
\end{array}
$$

Jelikož počet ten ještě o jednu cifru více, než bylo žádáno, podává, můžeme o věrnosti poslední cifry ubezpečeni býti.

e) Jelikož pátý příklad pouze periodický desetinec o jedné cifře se opakující a o dvou cifrách předcházejících periodu, značí, jest počet tříd daného odmocněnce nekonečný; bude tedy, majíce deset desetinných míst vyvinouti, veškerých cifer stanovícího kořene též deset: následovně bude nám šest prvých cifer spůsobem obyčejným a ostatní čtyři cifry skráceným dělením vyhledati:

```
          4 1012 0 6 16
√0·06/5̇ = 0·2 5 6 0 3 8 1 9 1 5 9
   25,5
    3 0,55
       1,955
       1 9,5555
         4 1,94655
            98111 : 5,1,2,0,7,6
            46903
              817
              305
               49
```

Počet ten podává ještě o jednu číslici více, než jak bylo žádáno, a tudíž můžeme o věrnosti poslední cifry ubezpečeni býti; v případě však takovém, jako jest právě tuto, že ona následující ještě cifra jest devítkou, můžeme, žádajíce toliko onen určitý počet míst, s posledním místem příslušnou opravu zavésti, t. j. číslici místa posledního o jednu jednotku zvětšiti, jelikož se tím chyba, jíž se tak i onak dopouštíme, menší stává:

$$\sqrt{0{\cdot}06\dot{5}} = 0{\cdot}25603819159\ldots = 0{\cdot}2560381916.$$

2. Vyhledejme

a) $\sqrt[3]{1/456/078{\cdot}1475}$ na 5 desetinných míst;

b) $\sqrt[3]{460}$ na 6 míst desetinných;

c) $\sqrt[3]{46}$ na 7 míst desetinných;

d) $\sqrt[3]{0{\cdot}\dot{1}\dot{8}}$ na 8 míst desetinných.

Provedení.

a) Prvý příklad podává číslo smíšené o pěti třídách, z nichž tři třídy v číslo celé spadají; majíce pět desetinných míst vyvinouti, bude veškerých cifer stanovícího kořene osm: jest nám tedy čtyři prvé cifry spůsobem obyčejnýın a ostatní čtyři cifry skráceným dělením vyhledati:

```
3                   3  3  27 27
√1/456/078·147/5 =  1  1  3 · 3  4  3  0  6
   456                 6
   331                 7 9 8
  ─────                8 1 8 3 4
   12,5078
    1 8027
    9 09
     297
    ──────
```

```
1 3,181147
  2 394027
  9 0981
     3051
―――――――――――
  1 6585,10 : 3,8,5,1,067
    1181
      26
```

b) Druhý příklad podává číslo celistvé o jedné třídě; majíce šest desetinných míst vyvinouti, bude veškerých cifer stanovícího kořene sedm; jest nám tedy tuto čtyři prvé cifry spůsobem obyčejným, a ostatní tři cifry skráceným dělením vyhledati :

```
 3          147 147  3  243
 √460 = 7 · 7   1   9   4   4   2
  343       2 9 4
 ―――――      2 9 8 6 3
  1170,00   3 0 2 7 8 3 4
  1032 43
    102 9
 ――――――――――
     346,7000
       29 4001
     148 47
         231
  ――――――――――――
     168 5,989000
       26 8 758729
     133 6 2327
         1 87353
     ――――――――――――――
          7 9 12,4041 : 17,8,7,48883
            7 62
              47
```

Majíce čtyři místa odmocněním vyvinuta, mohli bychom tuto, jak zřejmo, ještě více míst vyvinouti, než jak ony tři, jež pro doplnění určitého počtu míst žádány byly, jelikož ale věrnosti poslednějších cifer překážka v cestu se klade, a jak tuto odstraniti lze, až níže poznamenáno bude, přestati sluší toliko na určitém počtu míst žádaných, dle čehož si tedy i ono zatrhnutí posledních cifer jak v dělenci tak v děliteli zaříditi dlužno.

c) Třetí příklad podává též číslo celistvé o jedné třídě; majíce sedm desetinných míst vyvinouti, bude veškerých cifer stanovícího kořene osm: jest nám tedy čtyři prvé cifry spůsobem obyčejným, a ostatní cifry skráceným dělením vyhledati :

```
       27 75 192 27
∛46 = 3·5  8  3  0  4  7  8
 27        9 0
 ───     1 0 6 8 0
 190,00  1 0 7 4 4 4 4
 136 25
  22 5
 ──────────
  31 2,5000
   7 2 0512
  22 2 00
     6 720
 ────────────
   1 1 7,288000
     3 2 040027
     8 3 3076
         9666
 ──────────────
      1 843,713 : 3,8,5,1,3667
         302
          32
```

d) Čtvrtý příklad podává toliko periodický desetinec o dvou cifrách stále se opakujících; majíce šest desetinných míst vyvinouti, bude veškerých cifer stanovícího kořene též šest: jest nám tedy tři prvé cifry způsobem obyčejným, a ostatní tři cifry skráceným dělením vyhledati:

```
              75 108 108
∛0·1̇8̇ = 0 · 5   6   6   5  1  6
     125       1 8 0
   ─────       2 0 0 1 6
     568,18
     452 16
      54 0
   ──────────
      62 0,2181
      10 8 0216
      45 6 48
         6 048
   ───────────────
        4 9 66,85 : 9,6,1,068
          1 61
            65
```

Poznamenání.

Kdybychom správnosť skráceného odtrojmocňování na příkladech tuto uvedených zkoušeli tím, že bychom na týž počet míst úplné odtrojmocnění provedli, nepotkali bychom se sice ve výsledku (to však toliko náhodou) se žádnou chybou; shledali bychom však přece něco, čím bychom se přesvědčili, že na věrnosť poslednějších cifer ne vždycky bezpečiti se můžeme, totiž: že ony skráceným dělením vznikající zbytky větší oněch, odmocněním vzniklých, býti se jeví.

Pátráme-li blíže po příčině toho, shledáme, že odtrojmocňujíce číslo dekadické, odnímáme posloupně od odmocněnce daného po vývinu každé cifry kořenové souhrn čtverých součinů; dělíce však tak, jak naznačeno bylo, necháváme jeden součin oněch čtvera nepovšimnuta, totiž trojnásobný čtverec posledně vyvinuté cifry kořenové, násobený předcházející již známou částí kořene. Jelikož jen některé cifry míst nejvyšších součinu toho pod onu část odmocněnce, již nám děliti dlužno, spadají, stávají se tím zbytky, nebeřouce k tomu zřetele, poněkud většími, následkem čehož někdy na věrnost dalších cifer, dělením vyvinutých, tak přesně spolehati nelze.

Jelikož nám však v matematice na věrnosti veškerých odmocněním vyvinutých cifer často nemálo záleženo bývá, budiž tuto závěrečně ještě poznámka učiněna o tom, jak takovéto překážce v čas potřeby předejíti lze, a to:

„Násobme onu odmocněním vyvinutou část kořene trojnásobným čtvercem prvé cifry podílu, a odčetše součin tento, vyjma dvou cifer míst nejnižších, od dělence dotyčného, od zbytku teprv příslušný odnímající součin odečtěme a v dělení dalším bez překážky, jak již naznačeno bylo, pokračujme“.

Měli-li bychom ku př. vyhledati

$$\sqrt[3]{2670{\cdot}15}$$

na čtyři místa desetinná skráceným odmocňováním, měl by se počet ten, nevšímajíce si poznámky předcházející, asi takto:

```
 3                3  27  192
√2/670·15 = 1   3 · 8   7   3   6
  16‚70         1 8
   9 27       2 4 2 4
   2 7
 ─────────
   4 7‚3150
   1 4 4512
   2 6 16
     2 496
 ──────────────
     4 207‚8 : 5‚7‚1‚32
       208
         37
```

Kdybychom se však o správnosti odtrojmocnění tohoto přesvědčiti chtěli tím, že bychom veškery cifry odtrojmocněním vyvinuli, shledali bychom, že na posledním místě místo šesti státi má toliko dvě nebo s opravou tři!

Chyba, jíž jsme se tedy u výpočtu předcházejícího dopustili, zakládá se jedině na tom, že součinu zmíněného opomenuto bylo.

Šetříce tedy oné výše vytknuté poznámky, bude se počet ten míti takto:

```
3             3  27 192 147
√2670·15 = 1  3 · 8  7   3   3
 1670          1 8
  917          2 4 2 4
  27
 ─────
  47‚3150
  14 4512
  26 16
   2 496
 ──────────
   4 2078 : 5‚7‚1‚32
       203
    ────────
   4 187‚5
      187
       17
```

Číslo 203, jež nám tuto od dělence dotyčného odečísti bylo, jsou s opravou vzaté cifry nejvyšších tří míst součinu 138 × 147, jehož odejmutím věrnosti hledaných cifer se domaháme.

Šetříme-li poznámky tuto vytknuté i při obšírnějších výpočtech, budeme se moci na věrnosť i poslednějších cifer směle bezpečiti. —

Připomenutí. Vývin ku skrácenému dělení žádoucího dělitele, t. j. trojnásobného čtverce celé známé již části kořene, stane se, jak z předběžného vysvětlení zřejmo, následovně:

„Počnouce od pravé ruky k levé, napišme číslice místa nejnižšího posledního trojnásobného čtverce též co číslici místa nejnižšího dotyčného dělitele, a majíce zřetel k hodnotě místní trojnásobných čtverců, ostatní číslice s číslicemi posledního pomocného součinu šestinásobného v sečítání pojměme, a číslice součtu toho k oné již napsané číslici místa nejnižšího vedle sebe posloupně od pravé ruky k levé umístěme!

Druhá část:

Rozluštění příkladů ze dvou ročníků kalendáře učitelského.

Rozluštění příkladů z ročníku 1878. kalendáře učitelského.

Příklad 1.

Číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mají se tak sestaviti, aby sčítáním vyšlo číslo 100. (Žádná číslice nesmí se opakovati).

Rozřešení.

Součet jednotlivých číslic jest 45. Součet z daných číslic sestavených sčítanců má býti číslo 100; rozdíl obou součtů jest tedy 55. Z daných číslic mají se sestaviti sčítanci tak, by jich součet o číslo 55 sestavením zvětšen byl; umístěním jednotek na místo desítek součet zvětšen bývá o devítinásobný počet jednotek těch; že však číslo 55 číslem 9 dětitelno není, nutno tedy voliti na místo desítek x libovolný počet jednotek a dle toho pak vyšlý součin $9x$ tak uspořádati, aby $9x + y = 55$.

Představuje tedy x o jaký počet desítek, a y o jaký počet jednotek nový součet zvětšen býti má.

Rovnici „$9x + y = 55$“ vyhovují hodnoty neznámých:

$$x = 0, \quad y = 55,$$

jakož i všecka celistvá čísla, vyjádřená vzorci:

$$x = 0 + u; \qquad y = 55 - 9u.$$

1. Při $u = 0$, jest $x = 0$, $y = 55$; pak nalézají místa sestavení;

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 = 100;$
b) $1 \times 2 \times 9 + 3 \times 8 + 4 \times 7 + 5 \times 6 = 100;$

a j. v.

2. Při $u = 1$ bude $x = 1$, $y = 46$; pak nalézají místa sestavení:

a) $12 + 3 \times 5 + 4 + 6 \times 9 + 7 + 8 = 100;$
b) $2 + 3 \times 4 + 6 + 7 \times 8 + 9 + 15 = 100;$

a j. v.

3. Při $u = 2$, bude $x = 2$, $y = 37$; pak nalézají místa sestavení:

a) $24 + 6 + 7 \times 8 + 9 + \frac{15}{3} = 100$;

b) $1 + 26 + 8 \times 9 + \frac{3 \times 4 - 5}{7} = 100$;

a j. v.

4. Při $u = 3$ bude $x = 3$, $y = 28$; pak nalézají místa sestavení:

a) $2 + 34 + 5 + 1 \times 6 \times 7 + 8 + 9 = 100$;
b) $1 + 2 \times 7 + 36 + 4 \times 9 + 5 + 8 = 100$;

a j. v.

5. Při $u = 4$ bude $x = 4$, $y = 19$; pak nalézají místa sestavení:

a) $1 + 2 \times 6 + 3 \times 9 + 45 + 7 + 8 = 100$;
b) $19 + 2 \times 7 + 35 + 4 \times 6 + 8 = 100$;

a j. v.

6. Při $u = 5$ bude $x = 5$, $y = 10$; pak nalézají místa sestavení:

a) $1 + 2 \times 7 + 3 \times 4 + 56 + 8 + 9 = 100$;
b) $1 \times 3 \times 7 + 2 + 4 + 56 + 8 + 9 = 100$;

a j. v.

7. Při $u = 6$ jest $x = 6$, $y = 1$; pak nalézají místa sestavení:

a) $19 + 2 \times 3 + 4 + 56 + 7 + 8 = 100$;

b) $\frac{21}{3} + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$;

a j. v.

8. Při $u = 7$ jest $x = 7$, $y = 8$; pak nalézají místa sestavení:

a) $1 + 3 + \frac{4 + 8}{2} + 5 + 76 + 9 = 100$;

b) $13 + 25 + 49 + \frac{78}{6} = 100$;

a j. v.

9. Při $u = 8$ jest $x = 8$, $y = -17$; pak nalézají místa sestavení:

a) $\frac{3}{12} + 6 + 9 + 84{\cdot}75 = 100$;

b) $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{6} + 5 + 7 + 84 = 100$;

c) $\frac{8}{2} + \frac{63}{9} + 14 + 75 = 100$;

a j. v.

10. Při $u = 9$ jest $x = 9$, $y = -26$; pak nalézají místa sestavení:

$a)\ \frac{3}{6}+\frac{9}{18}+24+75=100;$

$b)\ \frac{3}{4}+\frac{6}{12}+98{\cdot}75=100;$

a j. v.

Pozn. Úkol ten, jak zřejmo, jest částečně hádankou.

Příklad 2.

Zahradník rozestavuje stromy do čtverce, i zbude mu jich 18; dá-li však řady i stromy hustěji k sobě, nedostane se mu jich 18; mnoho-li stromů měl a jak je stavěl?

Rozřešení.

Vyznačíme-li počet veškerých stromů písmenem x, počet řad více od sebe vzdálených písmenem y, méně od sebe vzdálených písmenem z, bude sestavení rovnice úkolu toho následující:

$$x - y^2 = 18,$$
$$x - z^2 = -18.$$

Řešení: Rozdíl obou rovnic jest: $z^2 - y^2 = 36$; z toho jde:

$$z^2 = 36 + y^2;\ \text{tedy}\ z = \sqrt{36 + y^2};$$

a poněvadž z racionalnou hodnotu značí, vyhovuje neznámé hodnotě y pouze číslo 8; následovně bude $z = 10$, a $x = 82$.

Zahradník onen měl tedy 82 stromů; zbylo-li mu jich 18, stavěl je v 8 řadách po 8 stromích; nedostalo-li se jich však 18, stavěl je v 10 řadách po 10 stromích;

Příklad 3.

Učitel dal žákovi násobiti dvě čísla, z nichž bylo jedno o 6 jednotek větší než druhé. Žák, vykonav násobení, musel udělati zkoušku, proto součin správně dělil menším činitelem; podíl obnášel 87 a zbytek 40; bylo tedy chybně násobeno, i musel chybu opraviti. Žák vyhledav ji, pravil, že prvé vynechal trojku při sčítání částečných součinů, načež řekl učitel: Nikoliv 3, ale 300 jsi při sčítání vynechal. Která čísla to byla, jež měl žák násobiti?

Rozřešení.

Vyznačíme-li ona hledaná čísla co veličiny neznámé písmeny x a y, bude sestavení rovnice úkolu toho následující:

$$x = y + 6,$$

$$x = 87 + \frac{40}{y} + \frac{300}{y}.$$

Z toho plyne následující rovnice o jedné neznámé:

$$y + 6 = 87 + \frac{40}{y} + \frac{300}{y}.$$

Obě strany rovnice této veličinou y násobeny, dají rovnici:

$$y^2 + 6y = 87y + 40 + 300.$$

Z toho plyne následující již k řešení uspořádaná rovnice druhého stupně:

$$y^2 - 81y = 340.$$

$$\text{Řešení: } y = \frac{81}{2} \pm \sqrt{\frac{6561}{4} + 340} = \frac{81}{2} \pm \frac{89}{2};$$

jest tedy $y_1 = 85$, a $y_2 = -4$.

Podmínce daného úkolu vyhovuje toliko kladná hodnota veličiny y, t. j. číslo 85, pak jest $x = 91$. — Čísla, jež měl žák násobiti, byla tedy 91 a 85.

Příklad 4.

Obsah dvou sobě rovných krychlí jest 9 kr. metrů. Zmenšíme-li obsah jedné krychle o tolik kr. metrů, kolik jich k obsahu druhé přičteme, obdržíme dvě nové krychle, jichž součet všech hran rovná se 36 metrům; kolik kr. metrů bylo odejmuto?

Rozřešení.

Počet krychlových metrů od jedné krychle odejmutých a ke druhé krychli přičtěných znamenejž písmeno x; sestavení rovnice úkolu toho stane se pak následovně:

$$12\sqrt[3]{4{\cdot}5 - x} + 12\sqrt[3]{4{\cdot}5 + x} = 36.$$

a) Krácením obou stran rovnice této dvanácti obdržíme:

$$\sqrt[3]{4{\cdot}5 - x} + \sqrt[3]{4{\cdot}5 + x} = 3.$$

b) Výraz $\sqrt[3]{4{\cdot}5 + x}$ z levé strany na pravou stranu umístěn, činí:

$$\sqrt[3]{4{\cdot}5 - x} = 3 - \sqrt[3]{4{\cdot}5 + x}.$$

c) Ztrojmocněním obou stran rovnice této obdržíme:

$$4{\cdot}5 - x = 27 - 27\sqrt[3]{4{\cdot}5 + x} + 9\sqrt[3]{(4{\cdot}5 + x)^2} - (4{\cdot}5 + x).$$

d) Rovnice tato, co rovnice druhého stupně uspořádána, bude následovně:

$$9\sqrt[3]{(4{\cdot}5 + x)^2} - 27\sqrt[3]{(4{\cdot}5 + x)} = -18.$$

e) Krácením obou stran devíti obdržíme již následující k řešení uspořádanou rovnici 2. stupně:

$$\sqrt[3]{(4{\cdot}5 + x)^2} - 3\sqrt[3]{(4{\cdot}5 + x)} = -2.$$

Řešení: $\sqrt[3]{4{\cdot}5 + x} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{3} \pm \frac{1}{2}$; následovně:

$\sqrt[3]{(4{\cdot}5 + x)_1} = 2$, a $\sqrt[3]{(4{\cdot}5 + x)_2} = 1$.

Při $\sqrt[3]{4{\cdot}5 + x} = 2$, bude $4{\cdot}5 + x = 8$; tedy $x = 3{\cdot}5$.

Při $\sqrt[3]{4{\cdot}5 + x} = 1$, bude $4{\cdot}5 + x = 1$; tedy $x = -3{\cdot}5$.

Bylo tedy 3·5 kr. metrů od jedné krychle odejmuto a ke druhé krychli přičtěno.

Příklad 5.

Dvě osoby A a B uložily své jmění, totiž A 9000 zl. a B 7000 zl. ve třech podnicích P, Q a R, z kterých první vynesl $11^1/_9\%$, druhý 6%, třetí 5% úroků ročně. V podniku P mají dohromady 8100 zl., v podniku Q 4000 zl. a v R 3900 zl., čímž se stalo, že A svým jměním ročně o 179 zl. více získal než B. Sečítáme-li pětinásobný zisk, jejž měl B z podniku Q, a dvojnásobný zisk, jejž měl z podniku R, jest součet roven zisku, jejž A měl z podniku P. Mnoho-li uložil A do každého podniku, do P, do Q i do R?

Rozřešení.

Vyznačíme-li ony částky peněz, jež osoby A a B do podniku P, Q a R uložily, co veličiny neznámé písmeny x_1, x_2, x_3 a y_1, y_2, y_3, peníze však, jež oněmi vklady ročně byly získaly, písmeny x a y, bude dané otázce úkolu vyhověno spůsobem následujícím:

Abychom hodnoty neznámých veličin x_1, x_2, x_3 vyšetřili, bude nám rovněž i hodnoty veličin y_1, y_2, y_3 vyšetřiti, ža příčinou čehož nám tuto dle daných podmínek úkolu určitou rovnici o šesti neznámých vyvinouti jest; aby rovnice k vyvinutí tomu potřebné od sebe nezávislé byly, bude nám dříve roční zisk osoby *A* a *B* vyšetřiti, jelikož tím pro sestavení oné určité rovnice o šesti neznámých jedna rovnice získána býti musí.

Z toho následuje:

1. Sestavení rovnice pro vypočítání ročního zisku osoby *A* a *B* stane se dle daných podmínek úkolu následovně:

$$x + y = \frac{8100 \times 11^1/_9}{100} + \frac{4000 \times 6}{100} + \frac{3900 \times 5}{100}, \; x = y + 179.$$

Rovnice ta k řešení uspořádána bude následovně:

$$x + y = 1335,$$
$$x - y = 179.$$

Řešení: $2x = 1514$; tedy $x = 757$;
následovně $y = 578$.

Z oněch tří podniků získal *A* ročně 757 zl.
„ „ „ „ „ *B* „ 578 zl.

Volíme-li pro sestavení oné určité rovnice o šesti neznámých zisk osoby *A*, bude nám v sestavení dotyčné následující rovnici vřaditi:

$$\frac{11^1/_9}{100} x_1 + \frac{6}{100} x_2 + \frac{5}{100} x_3 = 757.$$

2. Sestavení rovnice při vypočítání vkladu osoby *A* a *B* do podniku *P*, *Q* a *R* stane se tedy dle daných podmínek úkolu následovně:

$$\frac{11^1/_9}{100} x_1 + \frac{6}{100} x_2 + \frac{5}{100} x_3 = 757,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 7000,$$
$$x_1 + y_1 = 8100,$$
$$x_2 + y_2 = 4000,$$
$$x_3 + y_3 = 3900,$$
$$5 . \frac{6}{100} . y_2 + 2 . \frac{5}{100} . y_3 = \frac{11^1/_9}{100} x_1 .$$

Rovnice tato k řešení uspořádána bude následovně:

$$100x_1 + 54x_2 + 45x_3 = 681300,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 7000,$$
$$x_1 + y_1 = 8100,$$
$$x_2 + y_2 = 4000,$$
$$x_3 + y_3 = 3900,$$
$$10x_1 - 27y_2 - 9y_3 = 0.$$

Řešení.

a) Odečteme-li druhou rovnici od rovnice třetí, bude tím veličina *y* vyloučena a rovnice o šesti neznámých v rovnici o pěti neznámých předvedena, a to:

$$100x_1 + 54x_2 + 45x_3 = 681300; \quad x_1 - y_2 - y_3 = 1100;$$
$$x_2 + y_2 = 4000; \quad x_3 + y_3 = 3900; \quad 10x_1 - 27y_2 - 9y_3 = 0.$$

b) Znásobíme-li pro získání rovného součinitele třetí rovnici číslem 54, a odečteme-li součin ten od rovnice prvé, bude tím veličina x_2 vyloučena a rovnice o pěti neznámých v rovnici o čtyřech neznámých přeměněna, a to:

$$x_1 - y_2 - y_3 = 1100; \quad 100x_1 + 45x_3 - 54y_2 = 465,300;$$
$$x_3 + y_3 = 3900; \quad 10x_1 - 27y_2 - 9y_3 = 0.$$

c) Znásobíme-li pro získání rovného součinitele třetí rovnici číslem 45, a odečteme-li součin ten od rovnice druhé, bude tím veličina x_3 vyloučena a rovnice o čtyřech neznámých v rovnici o třech neznámých přeměněna, a to:

$$x_1 - y_2 - y_3 = 1100; \quad 100x_1 - 54y_2 - 45y_3 = 289800;$$
$$10x_1 - 27y_2 - 9y_3 = 0.$$

d) Znásobíme-li pro získání rovných součinitelů prvou rovnici číslem 100, třetí rovnici číslem 10, a odečteme-li součiny ty posloupně od rovnice druhé, bude tím veličina x_1 vyloučena a rovnice o třech neznámých v následující rovnici o dvou neznámých převedena:

$$46y_2 + 55y_3 = 179800,$$
$$216y_2 + 45y_3 = 289800.$$

e) Znásobíme-li konečně pro získání rovných součinitelů veličiny y_3 prvou rovnici číslem 9, druhou však rovnici číslem 11 bude rozdíl součinů těch stanoven následující rovnici o jedné neznámé:

$$1962y_2 = 156960.$$

Z toho jde: $y_2 = 800$; následovně $x_2 = 3200$; $y_3 = 2600$ $x_3 = 1300$; $x_1 = 4500$; $y_1 = 3600$.

Zodpovědění otázky daného úkolu zní tedy následovně:

Osoba A uložila do podniku $P = 4500$ zl.
" " " " " $Q = 3200$ zl.
" " " " " $R = 1300$ zl.

Rozluštění příkladů z ročníku 1879. kalendáře učitelského.

Příklad 1.

Jsou tři krychle A, B, C. Nejmenší z nich jest A, a hrana její a měří 2 centimetry. C jest největší a čísla vyjadřující délky hran kostek B i C v centimetrech jsou celistvá čísla b, c. Udělalo se pak tolik krychlí nových, mnoho-li centimetrů obnáší rozdíl hran $c - a$. Hrana každé této nové krychle měřila $b - a$ centimetrů. Právě tolik udělalo se i takových kostek, jichž každá hrana měla $c - b$ centimetrů. — Číslo vyjadřující obsah všech kostek prvního i druhého druhu v krychlových centimetrech bylo čtyřikrát tak velké jako quadrat součinu, jehož oba členy vyznačují délky hran obou druhů kostek v centimetrech. Jaké jsou hrany krychlí zde uvedených?

Rozřešení.

Hrany v úkolu uvedených krychlí jsou:

a, b, c, $(b - a)$ a $(c - b)$, z nichž $a = 2$ cm.

Podmínkám daného úkolu vyhovují rovnice:

$$(c - 2)(b - 2)^3 + (c - 2)(c - b)^3 = 4[(b - 2)(c - b)]^2.$$

Vyjmutím součinitele $(c - 2)$ neznámých veličin levé strany a odstraněním závorky pravé strany přechází rovnice ta v následující:

$$(c - 2)[(b - 2)^3 + (c - b)^3] = 4(b - 2)^2(c - b)^2.$$

Položíme-li $b - 2 = x$, $c - b = y$, bude $c - 2 = x + y$, a rovnice hořejší bude v následující přetvořena:

$$(x + y)(x^3 + y^3) = 4x^2y^2.$$

Již z této dosud neuspořádané neurčité rovnice 4. stupně o dvou neznámých dosti zřejmě se nám jeví, že $x = y$, jelikož obě tyto veličiny v rovnici dotyčné v tomtéž pořádku a s týmiž vzájemnými vlastnostmi se objevují.

Jelikož, jak výše vytknuto, $b - 2 = x$, $c - b = y$, bude za příčinou rovnosti veličin x a y:

$$b - 2 = c - b.$$

Z toho plyne následující již k řešení uspořádaná rovnice neurčitá o dvou neznámých:

$$2b - c = 2.$$

Řešení: $c = 2b - 2$; jelikož, jak z úkolu známo,

$$a = 2 \text{ cm.}, \; a < b,$$

bude nejmenší číslo, jež tuto za veličinu b voliti lze, číslo 3, a to:

$$\text{při } b = 3, \text{ jest } c = 2. \quad 3 - 2 = 4.$$

Rovnici dotyčné vyhovují tedy hodnoty neznámých:

$$b = 3 \text{ a } c = 4,$$

jakož i veškerá čísla celistvá, vyjádřená vzorci:

$$b = 3 + u, \quad c = 4 + 2u,$$

kde u značí kterékoli číslo celistvé.

Protož při $u = 0$ jest $b = 3$, $c = 4$;
$u = 1$ „ $b = 4$, $c = 6$;
$u = 2$ „ $b = 5$, $c = 8$;
$u = 3$ „ $b = 6$, $c = 10$;
a t. d.

Veličinám b a c, a tudíž i výrazům $(b - 2)$ a $(c - b)$ vyhovuje tedy nekonečný počet hodnot.

Důkaz o správnosti v předcházejícím obsaženého rozřešení:

Kdybychom však nedbali toho, že se nám v rovnici jeví $x = y$, nýbrž rozřešením rovnice:

$$„(x + y)(x^3 + y^3) = 4x^2y^2,“$$

o pravdě toho přesvědčiti se chtěli, bylo by provedení počtu následující:

Rovnice dotyčná jest neurčitou rovnicí 4. stupně o dvou neznámých, a tudíž bude nám jednu z neznámých těchto veličin druhou neznámou veličinou stanoviti. Volíme-li tuto stanovení veličiny y veličinou x, bude nám rovnici dotyčnou na y, co neznámou uspořádati, a veličinu x co obecného součinitele jejího považovati, a to:

$$y^4 + xy^3 - 4x^2y^2 + x^3y + x^4 = 0. \qquad \text{(I.)}$$

Položíme-li pro odstranění 2. členu

$$y = z - \frac{x}{4},$$

obdržíme následující rovnici:

$$z^4 + \left(-\frac{3}{8}.x^2 - 4x^2\right)z^2 + \left[\frac{1}{8}.x^3 - \frac{1}{2}(-4x^2.x) + x^3\right]z$$
$$+ \left[-\frac{3}{256}x^4 + \frac{1}{16}. - 4x^2.x^2 - \frac{1}{4}.x^3.x + x^4\right] = 0.$$

Rovnice ta zjednodušena:

$$z^4 - \frac{35x^2}{8} z^2 + \frac{25x^3}{8} z + \frac{125x^4}{256} = 0. \qquad \text{(II.)}$$

Z toho obdržíme resolventu následovně:

$$w^3 + \left(2 \cdot - \frac{35x^2}{8}\right) w^2 + \left[\left(-\frac{35x^2}{8}\right) - 4 \cdot \frac{125x^4}{256}\right] w - \left(\frac{25x^3}{8}\right)^2 = 0.$$

Resolventa ta zjednodušena:

$$w^3 - \frac{35x^2}{4} w^2 + \frac{1100x^4}{64} w - \frac{625x^6}{64} = 0. \qquad \text{(III.)}$$

Položíme-li pro odstranění druhého členu:

$$w = u + \frac{35x^2}{12},$$

obdržíme novou rovnici následovně:

$$u^3 + \left[-\frac{1}{3}\left(-\frac{35x^2}{4}\right)^2 + \frac{1100x^4}{64}\right] u +$$

$$\left[\frac{2}{27}\left(-\frac{35x^2}{4}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{35x^2}{4} \cdot \frac{1100}{64}\right) - \frac{625x^6}{64}\right] = 0.$$

Zjednodušením rovnice této obdržíme:

$$u^3 - \frac{25x^4}{3} u - \frac{250x^6}{27} = 0. \qquad \text{(IV.)}$$

Rovnici tuto lze v rovnici druhého stupně přetvořiti následovně:

$$v^2 + \left(-\frac{250x^6}{27}\right) v - \frac{1}{27}\left(-\frac{25x^4}{3}\right)^3 = 0.$$

To jest:

$$v^2 - \frac{250x^6}{27} v + \frac{15625x^{12}}{729} = 0. \qquad \text{(V.)}$$

Řešení:

$$v = \frac{125x^6}{27} \pm \sqrt{\frac{15625x^{12}}{729} - \frac{15625x^{12}}{729}}.$$

Jelikož tuto výraz pod odmocnítkem rovná se nulle, vyhovuje rovnici poslední kořen toliko jeden, jenž jest:

$$v = \frac{125x^6}{27}.$$

Na základě přetvoření rovnice IV. v rovnici V. má rovnice IV. kořeny:

$$u_1 = \frac{10x^2}{3}; \quad u_2 = u_3 = -\frac{5x^2}{3}.$$

Následovně má rovnice III. kořeny:

$$w_1 = \frac{25x^2}{4}; \quad w_2 = w_3 = \frac{5x^2}{4}.$$

Na základě přetvoření rovnice II. v rovnici III., jež resolventou Eulerovou slove, má rovnice II. kořeny:

$$z_1 = z_2 = \frac{5x}{4}; \quad z_3 = -\frac{5x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{5};$$
$$z_4 = -\frac{5x}{4} - \frac{x}{2}\sqrt{5};$$

Jelikož $y = z - \frac{x}{4}$, má rovnice I. kořeny:

$$y_1 = y_2 = x; \quad y_3 = -\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{5};$$
$$y_4 = -\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{5}.$$

Rozřešením danému úkolu vyhovující rovnice neurčité 4. stupně o dvou neznámých jest tedy dokázáno, že $x = y$; z toho pak, jak již známo, plyne rovnice neurčitá 1. stupně o dvou neznámých, a to:

$$b - 2 = c - b,$$

jejíž rozřešení v předcházejícím již obsaženo jest.

Druhá cesta

k rozřešení téhož úkolu vedoucí.

V předcházejícím řešení daného úkolu považovány byly výrazy $b - 2$ a $c - b$, t. j. délky hran oněch dvou druhů nových krychlí, za veličiny neznámé, jimiž jsme pak, poznavše vzájemný poměr jich hodnot, i vzájemný poměr druhých dvou jednotlivých hodnot veličin b a c stanoviti mohli. Tohoto spůsobu řešení však jen z té příčiny užito býti mohlo, že i výraz $(c - 2)$, t. j. počet jednotlivých druhů nových krychlí, oněmi neznámými, a sice jich součtem vyjádřiti se dal; jinak bylo by nám ne výrazy $(b - 2)$ a $(c - b)$, nýbrž jednotlivé jich členy b a c za neznámé považovati, a hodnotu jedné z neznámých druhou neznámou veličinou tímtéž spůsobem jako v předcházejícím stanoviti, a to:

Volíme-li tuto stanovení veličiny c veličinou b, bude nám rovnici dotyčnou na c, co neznámou veličinu uspořádati a výrazy od veličiny c odvislé za součinitele považovati.

Rovnice, již nám úkol podává, a jež nám tuto přede vším uspořádati bude, jest:

$$(c-2)\,[(b-2)^3+(c-b)^3]=4\,[(b-2)\,(c-b)]^2.$$

Uspořádání výrazu levé strany stane se následovně:

a) Trojmoc dvoučlenu $(b-2)$ jest $=$

$$b^3-6b^2+12b-8.$$

b) Trojmoc dvoučlenu $(c-b)$ jest $=$

$$c^3-3bc^2+3b^2c-b^3.$$

c) Součet obou trojmocí těch jest $=$

$$-6b^2+12b-8+c^3-3bc^2+3b^2c.$$

d) Součet ten násoben výrazem $(c-2)$ dává $=$

$$-6b^2c+12bc-8c+c^4-3bc^3+3b^2c^2+12b^2-24b+16-2c^3+6bc^2-6b^2c.$$

e) Výraz tento na c sestupně uspořádán $=$

$$c^4-(3b+2)\,c^3+(3b^2+6b)\,c^2-(12b^2-12b+8)\,c+12b^2-24b+16.$$

2. Uspořádání výrazu pravé strany rovnice dotyčné stane se následovně:

a) Součin dvoučlenů $(b-2)$ a $(c-b)=$

$$bc-2c-b^2+2b.$$

b) Dvojmoc součinu toho jest $=$

$$b^2c^2+4c^2+b^4+4b^2-4bc^2+4b^2c-4b^3-2b^3c-8bc+4b^2c.$$

c) Dvojmoc tato 4 násobena a na c sestupně uspořádána $=$

$$(4b^2-16b+16)\,c^2-(8b^3-32b^2+32b)\,c+(4b^4-16b^3+16b^2).$$

3. Převedením výrazů pravé strany k výrazům strany levé obdržíme následující již k řešení uspořádanou a na nullu uvedenou rovnici 4. stupně, a to:

$$c^4-(3b+2)\,c^3-(b^2-22b+16)\,c^2+(8b^3-44b^2+44b-8c)-(4b^4-16b^3+4b^2+24b-16)=0. \qquad \text{(I.)}$$

4. Řešení rovnice této stane se tímtéž spůsobem jako v předcházejícím, s tím však rozdílem, že tuto za příčinou mnohočlenných součinitelů práce ta zdlouhavější jest a zvláštní pozornosti vyžaduje, následovně:

a) Položíme-li pro odstranění druhého členu

$$c=x+\frac{3b+2}{4}$$

obdržíme následující rovnici:

$$x^4+\left[-\frac{3}{8}(3b+2)^2-(b^2-22b+16)\right]x^2+\left[\frac{1}{8}\cdot-(3b+2)^3-\frac{1}{2}(3b+2)\,(b^2-22b+16)+(8b^3-44b^2+44b-8)\right]x$$

$$+\left[-\frac{3}{256}(3b+2)^4+\frac{1}{16}.-(b^2-22b+16)(3b+2)^2-\frac{1}{4}.-(8b^3-44b^2+44b-8)(3b+2)-(4b^4-16b^3+4b^2+24b-16)\right]=0.$$

Zjednodušením rovnice této obdržíme:

$$x^4-\frac{35b^2-140b+140}{8}x^2+\frac{25b^3-150b^2+300b-200}{8}x+\frac{125b^4-1000b^3+3000b^2-4000b+2000}{256}=0.$$

Vyjmutím společné míry členů jednotlivých součinitelů obdržíme:

$$x^4-\frac{35}{8}(b^2-4b+4)x^2+\frac{25}{8}(b^3-6b^2+12b-8)x+\frac{125}{256}(b^4-8b^3+24b^2-32b+16)=0.$$

To jest:

$$x^4-\frac{35}{8}(b-2)^2x^2+\frac{25}{8}(b-2)^3x+\frac{125}{256}(b-2)^4=0. \qquad \text{(II.)}$$

Z toho obdržíme resolventu následovně:

$$w^3+\left[2.-\frac{35}{8}(b-2)^2\right]w^2+\left\{\left[-\frac{35}{8}(b-2)^2\right]^2-4.\frac{125}{256}(b-2)^4\right\}w-\left[\frac{25}{8}(b-2)^3\right]^2=0.$$

Rovnice ta zjednodušena přechází v následující:

$$w^3-\frac{35}{4}(b-2)^2w^2+\frac{275}{16}(b-2)^4w-\frac{625}{64}(b-2)^6=0. \qquad \text{(III.)}$$

Položíme-li

$$w=u+\frac{35}{12}(b-2)^2,$$

obdržíme novou rovnici následovně:

$$u^3+\left\{-\frac{1}{3}\left[-\frac{35}{4}(b-2)^2\right]^2+\frac{275}{16}(b-2)^4\right\}u+\left\{\frac{2}{27}.\left[-\frac{35}{4}(b-2)^2\right]^3-\frac{1}{3}.-\frac{35}{4}(b-2)^2.\frac{275}{16}(b-2)^4-\frac{625}{64}(b-2)^6\right\}=0.$$

Rovnice ta zjednodušena:

$$u^3 - \frac{25}{3}(b-2)^4 u - \frac{250}{27}(b-2)^6 = 0. \qquad \text{(IV.)}$$

Rovnici tuto lze v rovnici druhého stupně přeměniti následovně:

$$v^2 - \frac{250}{27}(b-2)^6 v - \frac{1}{27}\left[-\frac{25}{3}(b-2)^4\right]^3 = 0.$$

To jest:

$$v^2 - \frac{250}{27}(b-2)^6 v + \frac{15625}{729}(b-2)^{12} = 0. \qquad \text{(V.)}$$

Řešení:

$$v = \frac{125}{27}(b-2)^6 \pm \sqrt{\frac{15625}{729}(b-2)^{12} - \frac{15625}{729}(b-2)^{12}}.$$

Jelikož tuto výraz pod odmocnítkem rovná se nulle, vyhovuje rovnici V. toliko kořen:

$$v = \frac{125}{27}(b-2)^6.$$

Na základě přetvoření rovnice (IV.) v rovnici (V.) má rovnice (IV.) kořeny:

$$u_1 = \frac{10}{3}(b-2)^6; \quad u_2 = u_3 = -\frac{5}{3}(b-2)^2.$$

Následovně má rovnice III. kořeny:

$$w_1 = \frac{25}{4}(b-2)^2; \quad w_2 = w_3 = \frac{5}{4}(b-2)^2.$$

Na základě přetvoření rovnice II. v rovnici III., jež resolventou Eulerovou slove, má rovnice II. kořeny:

$$x_1 = x_2 = \frac{5}{4}(b-2); \quad x_3 = -\frac{5(b-2)}{4} + \frac{(b-2)}{2}\sqrt{5};$$

$$x_4 = -\frac{5(b-2)}{4} - \frac{(b-2)}{2}\sqrt{5};$$

Jelikož $c = x + \frac{3b+2}{4}$, má rovnice I. kořeny:

$$c_1 = c_2 = 2b - 2; \quad c_3 = \frac{6-b}{2} + \frac{b-2}{2}\sqrt{5};$$

$$c_4 = \frac{6-b}{2} - \frac{b-2}{2}\sqrt{5}.$$

Jelikož dle daného úkolu neznámé veličině c toliko kladná a celistvá hodnota vyhovuje, plyne z rozřešení toho následující neurčitá rovnice 1. stupně o dvou neznámých, a to:

$$2b^2 - c = 2.$$

Rovnici této vyhovují, jak z předcházejícího již známo, hodnoty neznámých

$$b = 3, \text{ a } c = 4,$$

jakož i veškerá čísla celistvá, vyjádřená vzorci:

$$b = 3 + u, \text{ a } c = 4 + 2u,$$

kde u značí kterékoli číslo celistvé.

Správnosť řešení úkolu toho jest tím tedy úplně dokázána!

Dodatek.

Stručné pojednání o řešení rovnic čtvrtého, následovně i třetího a druhého stupně.

Jelikož nám pro stanovení výsledku 1. úkolu rovnici stupně čtvrtého rozřešiti bylo, budiž zde postup práce následujícím předběžným vysvětlením objasněn.

Majíce řešiti rovnici čtvrtého stupně o jedné neznámé, podoby v předcházejícím řešení vytknuté, to jest

$$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad \text{(I.)}$$

v níž že veličiny a_3, a_2, a_1, a_0 jakákoli čísla realná představují, předpokládejme: bude nám především přihlížeti k tomu, rovnici tuto na rovnici stupně druhého převésti, čehož abychom se dodělali, následujících pravidel šetřiti dlužno:

1. Rovnici (I.) uveďme na podobu rovnice:

$$„y^4 + py^2 + qy + r = 0 \qquad \text{(II.)}$$

K tomu účelu položme:

$$x = y - \frac{a_3}{4};$$

hodnotou touto v rovnici (I.) vloženou bude

$$p = -\frac{3}{8} a_3^2 + a_2;$$

$$q = \frac{1}{8} a_3^3 - \frac{1}{2} a_2 a_3 + a_1;$$

$$r = -\frac{3}{256} a_3^4 + \frac{1}{16} a_2 a_3^2 - \frac{1}{4} a_1 a_3 + a_0.$$

2. Rovnici (II.) přeměňmež v rovnici o stupeň nižší, t. j. v rovnici stupně třetího (Eulerovu resolventu), což na základě

substituce tří nových neznámých za y položených se stane. (Viz M. Pokorného „Determinanty a vyšší rovnice".)

Pomocí součinitelů p, q, r lze onu resolventu spůsobem docela snadným vyvinouti, a to:

$$w^3 + 2p\,w^2 + (p^2 - 4r)\,w - q^2 = 0.$$

Nazveme-li pro krátkost $2p = b_2$, $p^2 - 4r = b$, $q = b_0$ objeví se nám podoba, jakouž mívá obecná rovnice třetího stupně, a to:

$$w^3 + b_2\,w^2 + b_1\,w + b_0 = 0. \qquad \text{(III.)}$$

3. Rovnici (III.) uveďmež opět na podobu rovnice:

$$u^3 + pu + q = 0. \qquad \text{(IV.)}$$

K tomu účelu položme

$$w = u - \frac{b_2}{3};$$

hodnotou touto v rovnici (III.) vloženou, bude

$$p = -\frac{1}{3}\,b_2{}^2 + b_1;$$

$$q = \frac{2}{27}\,b_2{}^2 - \frac{1}{3}\,b_2\,b_1 + b_0.$$

4. Rovnici (IV.) bude nám nyní opět v rovnici o stupeň nižší, tedy stupně druhého přeměniti, což na základě substituce dvou nových neznámých za u položených se se stane. (Viz M. Pokorného „Determinanty a vyšší rovnice".)

Pomocí známých veličin p a q stane se ono přeměnění spůsobem docela snadným, a to:

$$v^2 + qv - \frac{1}{27}\,p^3 = 0. \qquad \text{(V.)}$$

Kořeny rovnice (I.) vyvinouti lze tedy následovně:

a) Jak známo z nauky o rovnicích druhého stupně, jsou kořeny rovnice (V.):

$$v_1 = -\frac{1}{2}\,q + \sqrt{\frac{1}{4}\,q^2 + \frac{1}{27}\,p^3};$$

$$v_2 = -\frac{1}{2}\,q - \sqrt{\frac{1}{4}\,q^2 + \frac{1}{27}\,p^3}.$$

Hodnotami těmito udají se kořeny rovnice IV. následovně:

$$u_1 = \sqrt[3]{v_1} + \sqrt[3]{v_2};$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\,(-1 + i\sqrt{3})\,\sqrt[3]{v_1} + \frac{1}{2}\,(-1 - i\sqrt{3})\,\sqrt[3]{v_2};$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\,(-1 - i\sqrt{3})\,\sqrt[3]{v_1} + \frac{1}{2}\,(-1 + i\sqrt{3})\,\sqrt[3]{v_2}.$$

Poznamenání. Je-li jeden kořen rovnice stupně třetího vyšetřený, k. př.

$$u_1 = \sqrt[3]{v_1} + \sqrt[3]{v_2} = a,$$

můžeme druhé dva kořeny vyšetřiti též pomocí vzorce:

$$-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{3}{4}a^2 - p}.$$

Následovně: $u_2 = -\frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}a^2 - p}$

$$u_3 = -\frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}a^2 - p}.$$

Připomenutí. Je-li $\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right) < 0$, objevují se všechny tři kořeny pod formou pomyslnou, ačkoliv právě v tomto případě jsou všecky realné. Případ ten slove nepřevodný případ vzorce Kardanova, jenž pomocí forem úhloměrných rozřešiti se dá. (Pojednání o tom, jakož i „Úvod v základní ponětí trigonometrie" přinese onen v předmluvě zmíněný spisek A. Amortové.)

c) Jelikož $w = u - \frac{b_2}{3}$, má rovnice (III.) kořeny:

$$w_1 = u_1 - \frac{b_2}{3}; \quad w_2 = u_2 - \frac{b_2}{3}; \quad w_3 = u_3 - \frac{b_2}{3}.$$

d) Na základě přeměnění rovnice (II.) v rovnici (III.) obdržíme kořeny rovnice II. následovně:

a) Pro kladné q:

$$y_1 = \frac{1}{2}(+\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2} - \sqrt{w_3})$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(+\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2} + \sqrt{w_3})$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2} + \sqrt{w_3})$$

$$y_4 = \frac{1}{2}(-\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2} - \sqrt{w_3})$$

b) Pro záporné q:

$$y_1 = \frac{1}{2}(+\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2} + \sqrt{w_3})$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(+\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2} - \sqrt{w_3})$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2} - \sqrt{w_3})$$

$$y_4 = \frac{1}{2}(-\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2} + \sqrt{w_3})$$

Poznamenání. Jelikož veličina q (součinitel neznámé veličiny z při prvém řešení jakož i součinitel neznámé veličiny x při druhém řešení daného úkolu) kladná byla, byly kořeny rovnice (II.) v obou spůsobech řešení danému úkolu vyhovující rovnice dle vzorců prvých vyvinuty.

e) Konečně přicházíme již k stanovení kořenů rovnice (I.), a to:

Jelikož $x = y - \frac{a_3}{4}$, obdržíme hledané kořeny rovnice (I.) následovně:

$$x_1 = y_1 - \frac{a_3}{4}; \qquad x_3 = y_3 - \frac{a_3}{4};$$

$$x_2 = x_2 - \frac{a_3}{4}; \qquad x_4 = y_4 - \frac{a_3}{4}.$$

Tímto stručným pojednáním o řešení rovnic stupně čtvrtého jest tedy celý postup soustavného řešení prvého úkolu náležitě objasněn.

Příklad 2.

Která čísla trojciferná, při nichž součet cifer menší jest než 5, dávají zbytek 3, jsou-li dělitelna devíti, a zbytek 1, jsou-li dělitelna jedenácti?

Rozřešení.

Se stanoviska známek dělitelnosti čísel dekadických se týkajících vysvítá z daných podmínek úkolu toho dosti zřejmě:

a) že součet číslic každého hledaného čísla *tři* býti musí;

b) že rozdíl součtů číslic na lichách a na sudách jen číslo *jedna* býti může.

Na základě toho obdržíme sestavení následující poněkud neurčité rovnice 1. stupně o třech neznámých:

$$x + y + z = 3,$$
$$x - y + z = 1.$$

Řešení: Rozdíl těchto dvou rovnic jest:

$$2y = 2;\ \text{jest tedy}\ y = 1;$$
$$\text{následovně}\ x + z = 2.$$

Při $x = 2$ jest $z = 0$, při $x = 1$ jest $z = 1$.

Danému úkolu vyhovují tedy jen dvě čísla, a to:

210 a 111.

Příklad 3.

V šestiúhelníku zvolen byl bod. Součet vzdáleností bodu toho ode všech stran rovný jest 60 cm. Jedna kolmice z bodu ku straně vedená $= \frac{1}{2}$ cm. a sousední kolmice 1 cm.; jak dlouhé jsou kolmice ostatní, jak dlouhá jest strana šestiúhelníka a na jaké úseky každá strana jest příslušnou kolmicí rozdělena?

Rozřešení.

Prv než-li k řešení úkolu toho přikročíme, znázorněmež si výkresem pravidelný šestiúhelník a veďme od zvoleného bodu kolmice ku stranám jeho: rozličnými takovými pokusy pak shledáme:

a) že kolmice ty šesti nestejnými z jednoho bodu vycházejícími přímkami jsou, jež tři vzájemně se protínající přímky tvoří;

b) že délka těchto tří vzájemně se protínajících přímek průměru šestiúhelníku vepsaného kruhu se rovná, a tudíž přímky ty jen stejné délky, nechť jsou v poloze jakékoli, vyznačovati mohou.

c) že tedy oněmi třemi vzájemně se protínajícími přímkami kolem jich průsečníku (zvoleného bodu) šest rovných úhlů, tedy o 60^0, vzniká.

d) že, blíží-li se zvolený bod stranám šestiúhelníka značněji, kolmice některé s bodu toho na prodloužené strany vně výkresu dopadají.

Vyznačíme-li strany šestiúhelníka písmeny A, B, C, D, E, F, kolmice k nim se vztahující písmeny a, b, c, d, e, f, úseky však jednotlivých stran těchto týmiž písmeny avšak pro rozdíl ukazovately 1 a 2 vyznačenými, bude:

1. $A = a_1 + a_2, \quad B = b_1 + b_2, \quad C = c_1 + c_2;$
$D = d_1 + d_2, \quad E = e_1 + e_2, \quad F = f_1 + f_2.$

2. $a + d = b + e = c + f.$

Jelikož součet vzdáleností v šestiúhelníku zvoleného bodu ode všech stran jeho $= 60$ cm., bude jedna z oněch tří v dotýčném bodě se protínajících přímek $= 20$ cm.

Dle dané podmínky úkolu jest

$$a = \tfrac{1}{2} \text{ cm.}, \quad b = 1 \text{ cm.}$$

$$\text{následovně: } d = 20 - \tfrac{1}{2} = 19\tfrac{1}{2} \text{ cm.},$$
$$e = 20 - 1 = 19 \text{ cm.},$$
$$\text{poněvadž } a + d = b + e = 20 \text{ cm.}$$

Abychom vyšetřili délku kolmic c a f, jichž součet třetí přímku též o 20 cm. tvoří, bude nám dříve délky neznámých stran onoho obrazce vyšetřiti, jež známými kolmicemi a a b a neznámými úseky a_2 a b_1 uzavřen jest, jelikož tím pak poloha přímky $b + e$, kterouž tuto pro stanovení délek kolmic c a f znáti třeba, se objeví.

Neznámé délky stran onoho obrazce, totiž úseky a_2 a b_1 vyšetříme pomocí trigonometrie následovně:

V šestiúhelníku byla od zvoleného bodu ku straně A kolmice $a = \frac{1}{2}$ cm., a k sousední straně B kolmice $b = 1$ cm. vedena; zřejmo tedy, že tím, nedopadá-li kolmice některá v krajní bod strany šestiúhelníka, čtyrúhelník vzniká, a že se kolmicemi těmi úhel 60°vý uzavírá.

Představíme-li si nyní, že kolmice b a úsek a_2 až ku svému průsečníku prodlouženy jsou, objeví se nám tím pravoúhlý trojúhelník, jehož jednou odvěsnou jest nám známá kolmice $a = \frac{1}{2}$ cm., druhou odvěsnou nám neznámý úsek a_2 k průsečníku prodloužený, a přeponou kolmice b k témuž průsečníku prodloužená.

Jelikož i úhly trojúhelníka tuto vytknutého nám známy jsou (uzavírajíť kolmice a a b, jak známo, úhel 60°vý), můžeme pomocí trigonometrie i jeho dvě neznámé strany spůsobem následujícím vyšetřiti:

V trojúhelníku pravoúhlém jest jedna odvěsna $= \frac{1}{2}$ cm., úhel protilehlý 30°vý; bude tedy

a) druhá odvěsna $= \dfrac{0.5}{\operatorname{tang} 30^0} = 0{\cdot}866025$ cm.

b) přepona $= \dfrac{0.5}{\sin 30^0} = \dfrac{0{\cdot}5}{0{\cdot}5} = 1$ cm.

Z toho patrno, že, jelikož žádného prodloužení kolmice b neznamenáme, tato v krajní bod strany B dopadá; následovně vzniká tedy kolmicemi danými, ku stranám vedenými ne čtyrúhelník ale trojúhelník, jehož třetí stranou jest úsek $a_2 = 0{\cdot}866025$ cm.

Z toho patrno, že je-li v pravoúhlém trojúhelníku jeden úhel 30°vý, přepona má se k menší odvěsně tak, jako 2 : 1.

Z toho plyne již stanovení polohy přímky $b + e$, a to:

„Jelikož kolmice b v krajní bod strany B dopadá, dopadá rovněž i kolmice e v krajní bod strany E; z toho zřejmo, že přímka $b + e$ koncové body dvou sousedních stran šestiúhelníka spojuje“.

Poznavše tímto polohu přímky $b + e$, můžeme již k stanovení strany šestiúhelníka jakož i kolmice f a od této závislé kolmice c pomocí trigonometrie přikročiti, a to:

Spojením dvou sousedních stran dotýčného šestiúhelníka přímkou $b + e$ vzniká, jak zřejmo, trojúhelník rovnoramenný; vezmouce polovinu trojúhelníka toho, máme trojúhelník pravoúhlý, jehož přepona stranu šestiúhelníka značí; stranu tu vyšetříme následovně:

V trojúhelníku pravoúhlém jest jedna odvěsna $= 10$ cm., a úhel odvěsně té protilehlý 60°vý; bude tedy

a) druhá odvěsna $= \dfrac{10}{\operatorname{tang} 60^0} = 5{\cdot}77350$, *b)* přepona $= \frac{10}{\sin 60^0} = 11{\cdot}54701.$

Strana dotýčného šestiúhelníka $= 11.54701$ cm.

Co se dotýče vyšetření délky kolmice f, můžeme výkresem poznati, že jest to odvěsna pravoúhlého trojúhelníka, jehož druhou odvěsnu prodloužená strana F, a přeponu nám již známá kolmice e vyznačuje.

Vyšetření kolmice f stane se tedy následovně:

V trojúhelníku pravoúhlém jest přepona $= 19$ cm., úhel kolmici f protilehlý $= 30^0$; bude tedy

a) prvá odvěsna, t. j. délka kolmice $f = 19 \sin 30^0 = 9{\cdot}5$ cm.

b) druhá odvěsna, t. j. prodloužená strana šestiúhelníka $= 19 \cos 30^0 = 16{\cdot}4545$ cm.

Na základě předcházejícího rozřešení neznámých veličin možno již i úseky stran A, B, C, D, E, F příslušnými kolmicemi vzniklé, vyšetřiti, a to:

a) Jelikož $A = a_1 + a_2 = 11{\cdot}54701$ cm. a $a_2 = 0{\cdot}866025$ cm., bude $a_1 = 11{\cdot}54701 - 0{\cdot}866025 = 10{\cdot}68098$ cm.

b) Jelikož $B = b_1 + b_2 = 11{\cdot}54701$ cm., a $b_1 = 0$, bude $b_2 = 11{\cdot}54701$ cm.

c) Jelikož $F = f_1 + f_2 = 11{\cdot}54701$ cm. a $f_1 = 16{\cdot}45450$ cm. bude $f_2 = -4{\cdot}90749$ cm.

Jelikož kolmice z některého bodu strany pravidelného šestiúhelníka ku straně protější vedená obě tyto strany na stejné úseky dělí, jsou tuto vyšetřenými úseky stran A, B a F zároveň i úseky protějších stran D, E a C vyšetřeny.

Souhrn veškerých tuto vyšetřených veličin.

1. Délky kolmic z bodu zvoleného ku stranám šestiúhelníka vedené:

a) Dle podmínek úkolu: $a = \frac{1}{2}$ cm., $b = 1$ cm.;
b) Řešením vyšetřeno: $c = 10{\cdot}5$ cm., $d = 19{\cdot}5$ cm., $e = 19$ cm., $f = 9{\cdot}5$ cm.

2. Strana šestiúhelníka $= 11{\cdot}54701$ cm.

3. Úseky stran A, B, C, D, E a F příslušnými kolmicemi vzniklé, budou tedy:

$a_1 + a_2 = d_1 + d_2 = 10{\cdot}68098 + 0{\cdot}866025$ cm.
$b_1 + b_2 = e_1 + e_2 = 0 + 11{\cdot}54701$ cm.
$c_1 + c_2 = f_1 + f_2 = 16{\cdot}45450 - 4{\cdot}90749$ cm.

Z rozřešení úkolu toho zřejmo, že onen zvolený bod uvnitř šestiúhelníka v takovém místě leží, z něhož toliko čtyři kolmice ku stranám *uvnitř*, ostatní však dvě kolmice ku prodlouženým stranám *vně* šestiúhelníka dopadají.

Příklad 4.

Ze řady čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vyberou se dvě číslice, z nichž se dvouciferné číslo sestaví. Násobí-li se toto číslo násobkem všech čísel, která v řadě zbyla, obdrží se 1,866.240; jaké bylo to číslo?

Rozřešení.

Číslice tuto stanovícího dvouciferného čísla buďtež co veličiny neznámé písmeny x a y vyznačeny; podmínkám daného úkolu vyhovuje pak následující rovnice:

$$(10x + y)\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{xy} = 1{,}866.240.$$

a) Krácením obou stran rovnice této činitely 2.3.4.5.6.8.9 obdržíme:

$$\frac{(10x + y)\,7}{xy} = 36.$$

b) Obě strany rovnice této výrazem xy násobeny, dají:

$$(10x + y)\,7 = 36xy.$$

c) Z toho plyne již následující k řešení uspořádaná neurčitá rovnice druhého stupně o dvou neznámých:

$$36xy - 70x - 7y = 0.$$

Řešení:

$$x = \frac{7y}{36y - 70}.$$

Výrazu tomuto vyhovuje toliko $y = 2$; následovně: $x = 7$. Číslo hledané jest tedy 72.

Příklad 5.

Šikmý hranol dřevěný má za půdice čtverce. Hrana bočná jest 10 cm. dlouhá, hrana půdice pak 6 cm. Hranol, jsa postaven na základnu, měl polohu vrátkou. Byl pak rovinou rovnoběžnou k oběma půdicím rozdělen na dva stejné hranoly B a C. Zhotoven byl pak hranol kovový, jehož základna byla shodna s půdicí hranolu dřevěného, a stěny jeho byly rovnoběžny se souhlasnými pobočnými stěnami hranolu prvního. Postaví-li se tato deska kovová na hořejší půdici hranolu B tak, aby souhlasné pobočné stěny do týchž rovin padly, zvrátí se oba hranoly při nejmenším otřesení, protože poloha jich jest vrátká. Jaké byly rozměry desky kovové i hranolu B a hranolu původního, co vážila všecka ta tělesa, je-li hustota dřeva 0·5 a slitiny 6·25?

Rozřešení.

Z úkolu toho víme, že hranol původní měl polohu vrátkou, a tutéž polohu že podrží polovina jeho, postaví-li se na ni tak, jak praveno bylo, ona deska kovová, následkem čehož se oba hranoly při nejmenším otřesení zvrátí.

Z toho zřejmo, že, jak v původním hranolu tak i v onom, jenž polovinou hranolu původního a kovovou deskou vznikl, kolmo z těžiště k půdici dolejší vedená čára v krajní bod strany čtverce dopadá, a tudíž těžiště onoho smíšeného hranolu v těžišti ploch na sobě ležících místo své má, následkem čehož se váha desky kovové váze hranolu původního rovná.

Jak si výkresem znázorniti můžeme, vzniknou outěžní čarou a kolmicí těžištěm procházející a k půdicím dopadající v hranolu původním dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Ze známých stran trojúhelníků těch lze neznámé rozměry dotyčných hranolů pomocí pythagorejské věty, dílem také z poměru hustoty dřeva a slitiny spůsobem následujícím vypočítati:

Známé strany jednoho z oněch shodných, outěžní čarou a kolmicí vzniklých trojúhelníků hranolu původního jsou:

a) odvěsna, t. j. polovina strany půdice $= 3$ cm.
b) přepona, t. j. polovina outěžní čáry $= 5$ cm.

Jest tedy délka druhé odvěsny, t. j. vzdálenosť od těžiště k půdicím hranolu původního stanovena následujícím:

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm.}$$

Z toho určeny býti mohou následující neznámé rozměry hranolů, a to:

1. Výška hranolu původního $= 8$ cm.
2. Výška hranolu B, jež jest polovinou výšky hranolu původního $= 4$ cm.
3. Bočná hrana hranolu B, jež jest polovinou bočné hrany hranolu původního $= 5$ cm.

Z poměru hustoty dřeva a slitiny, to jest

$$0·5 : 6·25 \text{ čili } 2 : 25,$$

mohou býti určeny neznámé rozměry desky kovové, a to:

4. Bočná hrana desky kovové, jež se má k oné hranolu B jako $2:25$; jest tedy délka její stanovena srovnalostí:

$h:5=2:25$; to jest: $h=0\cdot4$ cm.

5. Výška desky kovové, jež se má k oné hranolu B jako $2:25$; jest tedy délka její stanovena srovnalostí:

$v:4=2:25$; to jest: $v=0\cdot32$ cm.

Váhu jednotlivých hranolů lze tuto určiti součinem z krychlového obsahu a hutnosti hmoty jeho, a to:

1. Hranolu původního:

   a) krychlový obsah: $6\times6\times8=288$ krychl. cm.
   b) váha: $288\times0\cdot5=144$ gramy.

2. Hranolu B:

   a) krychlový obsah: $6\times6\times4=144$ krychl. cm.
   b) váha: $144\times0\cdot5=72$ gramy.

3. Desky kovové:

   a) krychlový obsah: $6\times6\times0\cdot32=11\cdot52$ kr. cm.
   b) váha: $11\cdot52\times6\cdot25=72$ gramy.

Příklad 6.

Jsou čísla A, B, C, D. Číslo A násobeno číslem B aneb o ně zvětšeno dává týž výsledek; rozdíl $C-A$ rovná se podílu čísel C a A. Součet čísel C a D rovný jest součinu obou. Která čísla to jsou, jestliže součet čísel B a C jest 1) číslo celistvé a 2) číslo smíšené, jehož zlomek rovný jest periodickému desetinci o n cifrách se opakujících a o p cifrách předcházejících periodu?

Rozřešení.

Podmínkám daného úkolu vyhovuje sestavení následující určité rovnice druhého stupně o čtyřech neznámých:

$$AB=A+B,$$
$$C-A=\frac{C}{A},$$
$$C+D=CD,$$
$$B+C=m.$$

Rovnice ta uspořádána:

$$AB-A-B=0,$$
$$AC-A^2-C=0,$$
$$C+D-CD=0,$$
$$B+C=m.$$

Řešení: Součet prvých dvou rovnic jest:

$$A(B+C)-(A^2+A)-(B+C)=0.$$

Dosadíme-li za $B+C$ hodnotu m, obdržíme následující na A uspořádanou rovnici 2. stupně:

$$A^2-(m-1)A+m=0.$$

Rovnice tato rozřešena jest výrazem:

$$A=\frac{m-1\pm\sqrt{(m-1)^2-4m}}{2}=\frac{m-1\pm\sqrt{m^2-6m+1}}{2}.$$

Z podmínek úkolu vysvítá, že čísla A, B, C a D jen racionálné hodnoty vyznačovati mohou; bude nám tedy nyní přihlížeti k tomu, za m ony hodnoty voliti, jež výraz $\sqrt{m^2-6m+1}$ racionalným činí.

Aby výraz ten byl racionalným, dosazena býti musí za m hodnota výrazu

$$„\frac{u^2-1}{2u-6}“,$$

v němž u libovolná čísla značí.

Dle úkolu mají však za u ony hodnoty voleny býti, jež činí m *a)* číslem celistvým, *b)* číslem smíšeným, jehož zlomek rovný jest periodickému desetinci o n cifrách se opakujících a o p cifrách předcházejících periodu.

I. **Řešení úkolu toho, znamená-li m, t. j. součet čísel $(B+C)$, číslo celé.**

Aby m bylo číslem celým, voleny býti mohou na místo u jen dvě čísla, totiž 5 neb 7; při obou těchto za u ve výraze

$$\frac{u^2-1}{2u-6}$$

dosazených číslech stává se $m=6$.

Dosadíme-li číslo to ve výraze, jenž značí hodnotu čísla A, dají se pak hodnoty ostatních čísel neznámých z předcházejících známých spůsobem následujícím vyšetřiti:

Z první rovnice hořejšího sestavení obdržíme dosazením známého čísla A hodnotu pro číslo

$$B=\frac{A}{A-1}.$$

Z druhé rovnice obdržíme dosazením známého čísla A hodnotu pro číslo

$$C=\frac{A^2}{A-1}.$$

Z třetí rovnice obdržíme dosazením známého čísla C hodnotu pro číslo

$$D = \frac{C}{C-1}.$$

Dosazením nalezené hodnoty 6 na místo m stává se

$$A = \frac{5+1}{2};$$

vyhovují tedy veličině A, a proto i veličinám B, C a D dvě hodnoty kladné, a to:

$$A_1 = 3; \quad B_1 = \frac{3}{2}; \quad C_1 = \frac{9}{2}; \quad D_1 = \frac{9}{7};$$

$$A_2 = 2; \quad B_2 = 2; \quad C_2 = 4; \quad D_2 = \frac{4}{3};$$

II. Řešení úkolu toho, znamená-li m číslo smíšené, jehož zlomek rovný jest periodickému desetinci o n cifrách se opakujících a o p cifrách předcházejících periodu.

Jak z předcházejícího řešení již známo, dosazeny býti mohou ve výrazu

$$„\frac{u^2-1}{2u-6}“$$

od 4 počínaje za u libovolné hodnoty. Vyjma 5 a 7 stává se hodnota výrazu toho při každé za u dosazené hodnotě zlomkem smíšeným. Dle dané podmínky úkolu má však toto číslo smíšené býti periodickým desetincem o n cifrách se opakujících a o p cifrách předcházejících periodu; bude nám tedy za veličinu u taková čísla voliti, jimiž se výraz

$$„\frac{u^2-1}{2u-6}“$$

desetincem dané podmínce úkolu vyhovujícím stává.

Znajíce zevrubně vlastnosti zlomků, bude nám zřejmo, že výše vytknuté podmínce úkolu vyhovuje každá hodnota veličiny u, při níž nejmenšími čísly vyjádřená hodnota výrazu

$$„\frac{u^2-1}{2u-6}“$$

takovým zlomkem býti se jeví, jehož jmenovatel jest buď roven hodnotě výrazu

$$(10^n - 1)\, 10^p$$

aneb kterékoli míře jeho, dělitelné však výrazem

$$„\frac{(10^n-1)\, 2^p}{9}“,$$

jímž se nejmenší hodnota dotýčného jmenovatele vyjadřuje.

Následovně bude výše vytknuté podmínce úkolu vyhověno každou hodnotou veličiny u, kterouž obdržíme, učinivše výraz

$$2u - 6$$

rovným buď výrazu $(10^n - 1)\,10^p$, buď takové míře neb takovému násobku jeho, při němž jakož i při oné míře hodnota výrazu

$$\frac{u^2 - 1}{2u - 6},$$

nejmenšími čísly vyjádřená, zlomkem vlastnosti výše vytknuté se stává.

Dle toho možno tedy při číselných hodnotách veličin n a p veškeré výrazu $2u - 6$ vyhovující hodnoty též číselně vyjádřiti; jelikož nám však úkol čísla obecná n a p podává, zastupujž tuto též obecné číslo a každou možnou hodnotu při obecných číslech n a p výrazu $2u - 6$ vyhovující, a to:

$$2u - 6 = a;$$

následovně $u = \frac{a + 6}{2}$; z toho plyne:

$$\frac{u^2 - 1}{2u - 6} = \frac{a^2 + 12a + 32}{4a}.$$

Jelikož, jak z předcházejícího známo,

$A = \frac{m - 1 \pm \sqrt{m^2 - 6m + 1}}{2}$, obdržíme dosazením výrazu

$\frac{a^2 + 12a + 32}{4a}$ za m:

$$A = \frac{(a^2 + 8a + 32) \pm (a^2 - 32)}{8a}.$$

Z toho plyne již následující rozřešení:

$$A_1 = \frac{a + 4}{4}; \qquad A_2 = \frac{a + 8}{a};$$

následovně obdržíme na základě v předcházejícím vyvinutých stejnin:

$$B = \frac{A}{A - 1}, \qquad C = \frac{A^2}{A - 1}, \qquad D = \frac{C}{C - 1},$$

hodnotu ostatních neznámých veličin, a to:

$$B_1 = \frac{a + 4}{a}; \qquad B_2 = \frac{a + 8}{8};$$

$$C_1 = \frac{a^2 + 8a + 16}{4a}; \qquad C_2 = \frac{a^2 + 16a + 64}{8a};$$

$$D_1 = \frac{a^2 + 8a + 16}{a^2 + 4a + 16}; \qquad D_2 = \frac{a^2 + 16a + 64}{a^2 + 8a + 64}.$$

Z předcházejícího rozřešení plyne následující věta:

„Periodický desetinec o n cifrách se opakujících a o p cifrách periodu předcházejících podává každý co možná ukrácený zlomek, jehož jmenovatel jest buď roven hodnotě výrazu

$$(10^n - 1)\, 10^p,$$

neb kterékoli míře jeho, dělitelné však výrazem

$$\text{buď } \frac{(10^n - 1)\, 2^p}{9} \text{ neb } \frac{(10^n - 1)\, 5^p}{9}.“$$

Při $n = 1$ bude hodnota výrazu

$$\frac{(10^n - 1)\, 2^p}{9}$$

rovna p té mocnině čísla 2, a hodnota výrazu

$$\frac{(10^n - 1)\, 5^p}{9}$$

p té mocnině čísla 5. Bude se nám tedy zdáti, že při $n = 1$ výše vytknutá věta snad platnosti nemá pro každou míru výrazu $(10^n - 1)\, 10^p$, dělitelnou

$$\text{buď } \frac{(10^n - 1)\, 2^p}{9} \text{ neb } \frac{(10^n - 1)\, 5^p}{9},$$

jelikož mnoha z nich k úplnému desetinci vede.

Uvážíme-li, že pouze $n = 1$ námitku tuto proti oné výše vytknuté větě vyvolává, že však ale i každý zlomek úplný desetinec podávající v periodický desetinec o jedné cifře se opakující a o tolika cifrách periodu předcházejících, jako dotyčný desetinec nul čítá, proměniti lze, bude tím námitka proti pravosti výše vytknuté věty úplně vyvrácena.

Připomenutí. Jmenovatel stanovícího nejmenšími čísly vyjádřeného zlomku m může dle daných podmínek úkolu býti hodnota výrazu

$$(10^n - 1)\, 10^p$$

neb kterákoli míra jeho, dělitelná však výrazem

$$\frac{(10^n - 1)\, 2^p}{9},$$

jelikož, jak zřejmo, jen takovými hodnotami výrazu $2u - 6$ celistvých čísel pro veličinu u se domáháme.

OPRAVY.

Str.:	Řádek:	Místo:	Má státi:
III.	10. shora	dvoučlenů	dvoučlenu.
IV.	14. zdola	vyvinutým	vyvinutých.
8.	10. shora	$\frac{16ae}{15bf}$	$+\frac{16ae}{15bf}$.
15.	11. zdola	$-3a$	$-3a^2$.
21.	10. shora	v levo	dále v levo.
25.	8. zdola	$3(a+b)c^2c^3$	$3(a+b)c^2+c^3$.
27.	10. zdola	$-\frac{3x^3}{x4}$	$-\frac{3x^3}{4}$.
27.	9. zdola	$+\frac{^6}{4}$	$+\frac{x^6}{4}$.
29.	2. zdola	$3a+b+c)^2d$	$3(a+b+c)^2d$.
31.	2. shora	$3ax^{210}$	$3a^2x^{10}$.
31.	6. zdola	$+\frac{cex^3}{dfy^6}$	$+\frac{cex^3}{dfy^3}$.
31.	4. zdola	$\frac{3ax^{210}}{b^2y^{10}}$	$\frac{3a^2x^{10}}{b^2y^{10}}$.
32.	10. zdola	$\left(\frac{e^3}{f^3}\frac{6ceg}{dfh}\right.$	$+\left(\frac{e^3}{f^3}+\frac{6ceg}{dfh}\right.$.
32.	9. zdola	$\frac{3eg^2x}{fh^2y}$	$+\frac{3eg^2x}{fh^2y}$.
33.	Na počátku stránky této bylo opomenuto: „b) z trojnásobných čtverců členů předcházejících, násobených členem dotyčným.		
38.	9. shora	6^3abc	$6abc$.
39.	4. zdola	$-\frac{3a^4}{b^4}$	$-\frac{3a^4}{2b^4}$.
39.	2. zdola	$-\frac{14a^2}{b^2}$	$-\frac{14a^2}{3b^2}$.
53.	15. shora	$\pm 4a^4$	$\pm\frac{4a^4}{9}$.
58.	17. zdola	ztrojmocňování	odtrojmocňování.
62.	8.) 9.) zdola náleží o dva výrazy dále v levo.		
63.	Šestinásobné součiny vzorce náleží o jeden výraz dále v pravo.		
64.	9. zdola	4,33	43,3.
69.	14. shora	4 81	48,2.
71.	Dvojené hodnoty vycházejícím členům kořene nadepsané náleží o jeden výraz dále v levo.		
81.	18. shora	187	188.
86.	13. zdola	$y=8$	$y=-8$.
90.	20. zdola	při	pro.
90.	2. zdola	y	y_1.
94.	4. shora	$\left(-\frac{35x^2}{8}\right)$	$\left(-\frac{35x^2}{8}\right)^2$.
95.	2. zdola	jež	již.
96.	11. zdola	$-8c)$	$-8)c$.
100.	6. shora	$p^2-4r=b$	$p^2-4r=b_1$.
100.	6. shora	$q=b_0$	$-q^2=b_0$.
100.	Veličiny p a q v rovnici (IV.) a (V.) spadající mají pro rozdíl veličin p a q rovnice (II.) řeckými písmeny (pí a ró) vyznačeny býti.		
101.	Veličina ‚a‘ zastupuje tuto všude též písmeno řecké (alfa.)		
102.	11. shora	$x_2=x_2-\frac{a_3}{4}$	$x_2=y_2-\frac{a_3}{4}$.