Kompendium

der

ebenen und sfärischen

Trigonometrie.

Gemeinfasslich bearbeitet

von

Ernest Sedlaczek,

Oberlieutenant im k. k. Ingenieur-Geografenkorps etc.

Wien 1856.

Wilhelm Braumüller,

k. k. Hofbuchhändler.

In Commission.

1376

ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA
PEDAGOGICKÉ FAKULTY
HRADEC KRÁLOVÉ
Signatura U 1392
Inv. č. 202088

Gedruckt bei Ant. Benko.

Seiner Hochwohlgeboren

Herrn Oberst im k. k. General-Quartiermeisterstabe,

August von Fligély,

Direktor des k. k. militärisch-geografischen Institutes, Besizer des kaiserlich-königlichen Militär-Verdienstkreuzes, Ritter des kais. russischen St. Annen-Ordens zweiter Klasse mit der Krone, Kommandeur des königlich hannoveranischen Guelphen-Ordens, Offizier des königl. portugiesischen Thurm- und Schwert-Ordens, Ritter des grossherzoglich toskanischen Militär-Verdienst-Ordens, etc. etc. etc.

in

vollkommenster Hochachtung und Verehrung

geweiht

vom Verfasser.

Vorwort.

Bei Ausarbeitung vorliegenden Werkes, welches nur die elementarsten Kenntnisse der Geometrie voraussezt, hat mich die Idee geleitet, Diejenigen, denen die Gelegenheit zum fortgesezten Studium der Trigonometrie nicht war, auf die einfachste Weise in diesen Gegenstand einzuführen und zugleich Alles, was dessen Studium erschweren oder bei demselben lästig fallen könnte, auf eine geeignete Art zu überbrücken oder gänzlich wegzulassen. Daher habe ich die zu kleinen Details gemieden, weil ich nicht nur zu ermüden, sondern auch fürchtete, dass die Uebersicht in den Augen des Studirenden verloren gehe. Dabei habe ich jedoch nichts weggelassen, was der Deutlichkeit Eintrag thun könnte.

Zur möglichsten Erhöhung der praktischen Brauchbarkeit des Buches dienen mehre durchgearbeitete und mit Anmerkungen versehene Beispiele, die der allgemeinen Auflösung unmittelbar angereiht sind.

Ich glaube, dass man in diesem gedrängten Raume kaum Etwas vermissen dürfte, was man sich in demselben

erwarten kann. Ich habe mich bestrebt, den Scharfsinn des Lesers zu unterstüzen und endlich dieses Buch zugleich so einzurichten, dass es als ein nüzliches Nachschlagebuch gebraucht werden kann.

Der Anhang sezt zwar mehr als die elementarsten geometrischen Vorbegriffe voraus; kann aber wegen der Art und Weise, wie derselbe abgefasst ist, ganz wohl von Jedem unserer Leser benüzt werden, und ich habe die sichere Ueberzeugung, dass eben dieser Anhang wegen seines vielseitigen geistigen Interesses von unseren Lesern mit ebenso grosser Vorliebe als Nuzen wird durchgearbeitet werden.

Schliesslich glaube ich, dass es dem Leser angenehm sein dürfte, in dem Nachfolgenden geschichtliche Notizen über die Entstehung und den Fortschritt der Trigonometrie, in so ferne uns die nöthigen Daten bekannt geworden sind, zu erhalten; sie beziehen sich jedoch mehr auf die älteste Zeit bis gegen das achtzehnte Jahrhundert und schliessen die Entdeckungen der neueren Zeit, welche doch mehr bekannt und leichter zugänglich sind, vollkommen aus.

Thales von Milet (ungefähr 640 J. v. Ch.) entdeckte den Saz, dass der Winkel im Halbkreise aus zwei Rechten besteht; von ihm soll auch der Saz sein, dass gleichen Seiten im Dreiecke gleiche Winkel gegenüber liegen. Euklides (geb. zu Alexandria ungefähr 300 J. v. Ch.) schrieb auch in seinem Werke Δεδομενα (Data) mehre Bücher, welche Grundsäze zur Trigonometrie enthalten und zwar: im 1. Buche, Dreiecke, Pythagoras'scher Saz (auch *magister matheseos*); 4. Buch, von den dem Kreise ein- und umgeschriebenen Polygonen; 6. Buch, Aehnlichkeit der Drei-

ecke; 13. Buch, regelmässige Polygone und Polyeder, übrigens ist dieser grosse Gelehrte des Alterthums auch sonst sehr verdient um die Geometrie. Seine Data sind von Schwab, Stuttgart 1780 und Wurm, Berlin 1825, dann seine Στοιχεῖα (Elemente) von Lorenz, Halle 1798, 1825 und von Mollweide, Halle 1825 in deutscher Sprache erschienen.

Der griechische Astronom Autolykus aus Pitane in Aeolis (ungefähr 300 J. v. Ch.) hat in seinen Werken über die sich bewegende Sfäre und den Sonnen-Auf- und Untergang nur solche Aufgaben behandelt, welche ohne Kenntniss der Trigonometrie mit Hilfe eines Globus gelöst werden können; es ist daher höchst wahrscheinlich, dass die Trigonometrie dazumal noch unbekannt gewesen ist.

Archimedes (geb. um 287 v. Ch. zu Syrakus) gab als Grundlagen zur Trigonometrie dienliche Säze über die Sfäre, das Sfäroid, u. s. w.

Theodosius von Tripolis (ungefähr 50 J. v. Ch.) schrieb seine Sfaerica in 3 Büchern sehr gründlich, von denen das 1. Buch von den grössten Kreisen, ihren Polen, Durchschneidungen und den dadurch entstehenden Relazionen; das 2. Buch von zwei zu einander parallelen, sich schneidenden oder tangirenden Kreisen auf der Kugel; das 3. Buch endlich von den Relazionen handelt, welche entstehen, wenn mehre parallele Kreise von einem anderen geschnitten werden; ingleichen von den Relazionen der Pole sich schneidender Kreise und von verwandten Gegenständen.

Die sfärische Trigonometrie, welche in der Astronomie eine so grosse Rolle spielt und ihretwegen er-

funden wurde, ist der ebenen Trigonometrie vorangegangen. Der grosse Astronom Hipparch von Nicea (ungefähr 140 J. v. Ch.) scheint deren Schöpfer gewesen zu sein; er schrieb 12 Bücher über die Behandlung und Anwendung der Sehnen im Kreise, welche aber nicht auf uns überkommen sind; auch der berühmte Astronom Menelaus (98 J. v. Ch.) schrieb 6 Bücher über diesen Gegenstand. Klaudius Ptolomäus (ungefähr 100 J. n. Ch.), welcher zu Alexandrien lebte, sammelte die Forschungen der Alten und gab dieselben in seiner „Μεγαλη Συνταξις" (Halma, Basel 1538; Paris 1813). Dieses Werk wurde um 820 in das Arabische übersezt und heisst „Almagest", welcher auf Befehl Kaiser Friedrich II. in das Lateinische übertragen wurde. Er gibt schon eine Methode an, aus der Sehne eines Bogens die Sehne der Ergänzung des Bogens zu 180 Grad, aus der Sehne eines Bogens die Sehne des halben Bogens und aus den bekannten Sehnen zweier Bogen die Sehne der Summe und des Unterschiedes zweier Bogen, zu finden. Schon Ptolomäus berechnet die Grösse der Sehnen für alle Winkel von 0 bis 180 Grad um 30 Minuten fortschreitend; von ihm rührt auch folgender Saz her: „das „Verhältniss der Sehne des grösseren Bogens zur Sehne „des kleineren Bogens ist kleiner als das Verhältniss „des grösseren Bogens zum kleineren Bogen." Mit Hilfe seiner Lehrsäze berechnete Ptolomäus sowohl ebene als sfärische Dreiecke, wobei jedoch zu bemerken ist, dass er jedes schiefwinkelige Dreieck in rechtwinklige zerlegt; zu welchem Behufe ihm bei sfärischen Dreiecken besonders die sogenannte *„regula de sex quantitatibus"* dienlich war: Zieht man nämlich auf der Kugeloberfläche ein dem grössten Kreise angehöriges

Bogenstück $A + a$ und schneidet dasselbe durch ein zweites Bogenstück $B + b$ eines grössten Kreises, so dass die Theile a und b der Bogenstücke konvergiren und sich ihre Endpunkte schneiden, während die Theile A und B divergiren; zieht man ferner durch die divergirenden Endpunkte der Bogenstücke A und B bis an die gegenüber liegenden Bogen $B + b$ und $A + a$ willkürliche Bogenstücke $C + c$ und $D + d$ grössten Kreise, wodurch sowohl die Bogen $B + b$ und $A + a$ in die Segmente B und b einerseits und A und a anderseits, als auch zugleich diese willkürlichen Bogenstücke in die Theile C und c, dann D und d zerfallen, wobei vorausgesezt wird, dass C und D die Bogenstücke A und B erreichen, so gibt Ptolomäus folgende früher benannte Regel:

$$\frac{\text{Sehne } 2\,(A + a)}{\text{Sehne } 2\,a} = \frac{\text{Sehne } 2\,(C + c)}{\text{Sehne } 2\,c} = \frac{\text{Sehne } 2\,D}{\text{Sehne } 2\,(D + d)}.$$

Hieraus können alle Auflösungsfälle für das rechtwinklige sfärische Dreieck abgeleitet werden.

Von Hero dem Jüngeren stammt die bekannte Methode: den Flächeninhalt eines geradlinigten Dreieckes unmittelbar aus den drei Seiten zu berechnen.

Albaten (929) führte statt der Sehnen die Sinusse (dschaib) ein und schon seine Landsleute, die Araber, berechneten Sinustafeln von 15 zu 15 Sekunden. Der Araber Nassireddin übersezte die Euklides'schen Elemente; Dscheber ben afla kommentirte die Trigonometrie des Ptolomäus. Alhazen und Sergius hatten um 820 den „Almagest" arabisch übersezt; überhaupt suchten die Araber die trigonometrischen Operazionen zu vereinfachen.

Geber (1050) stellt in seiner Astronomie den Saz vom Verhältnisse der Sinusse der Seiten zu den Sinussen der Winkel auf.

Jezt finden wir einen grossen Zeitraum ohne Fortschritt. Georg Purbach (Peurbach), Professor der Mathematik in Wien (geb. zu Peurbach in Oesterreich 1423, gest. 1461 zu Wien), schrieb eine Erklärung der sechs ersten Bücher des „Almagest", berechnete Sinustafeln von 10 zu 10 Minuten nach der Ptolomäus'schen und arabischen Eintheilung des Halbmessers in 60 Theile; dagegen theilt er aber jeden 60sten Theil in 100 Minuten und jede Minute in 100 Sekunden.

Johann Müller von Königsberg (Regiomontanus, geb. 1436, gest. 1476), Purbach's Schüler und Freund, schrieb 1464 fünf Bücher über die Dreiecke, welche Schoner 1553 nach dessen Tode herausgab. Regiomontanus berechnete auch Tafeln, in welchen er den Sinus totus (Halbmesser) in 60000 Theile theilte; sie sind 1556 mit seinen *tabulis directionum perfectionumque in nativitatibus multum utiles* erschienen; später berechnete er Tafeln, in denen er den Halbmesser = 10000000 sezte. Von ihm erschien auch 1533 ein Werk *de triangulis omnimodis*.

Georg Joachim Rhäticus, ehemaliger Professor der Mathematik zu Wittenberg (geb. 1514 zu Feldkirch, gest. 1574), berechnete durch Nikolaus Kopèrnicus (geb. 1473, gest. 1543) unterrichtet und angeeifert, mit Hilfe mehrer Kalkulatoren durch 12 Jahre Sinustafeln für den Halbmesser zehntausend Millionen, und für den ersten Grad sezte er sogar den Halbmesser gleich tausend Billionen, und liess die

Winkel durchgehends von 10 zu 10 Sekunden wachsen. Er starb noch vor der Herausgabe seines Werkes. Kaiser Maximilian und der damalige Kurfürst Friedrich IV. von der Pfalz bestritten die Kosten des Werkes, welches Valentin Otto beendete und als *opus palatinus de triangulis* auf Kosten des Kurfürsten 1616 herausgab. Der Inhalt desselben ist: 1. Rhaeticus, *libri tres de fabrica canonis doctrinae triangulorum;* 2. *Ejusdem, liber quartus de triangulis globi*; 3. Otto, *libri quinque de triangulis globi sine angulo recto*; 4. *Canon magnus triangulorum.* Die Tangenten führte Regiomontanus, die Sekanten Rhäticus ein, ohne sie aber so zu nennen. Ihre Namen haben sie von Fink (1583), von dem auch der Saz herrührt, dass sich in jedem ebenen Dreiecke die Summe zweier Seiten zu ihrem Unterschiede verhält, wie die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüber liegenden Winkel zur Tangente des halben Unterschiedes derselben Winkel. (Siehe §. 27.)

Bartholomäus Pitiscus (geb. 1561, gest. 1613), schrieb fünf Bücher über die Trigonometrie, welche 1599 und vermehrt 1612 erschienen sind und auch nebst einen Kanon für die Sinusse, Tangenten und Sekanten, mehre nüzliche Anwendungsbeispiele der Trigonometrie enthalten. Er schrieb auch einen „*thesaurus mathematicus*, Frankfurt 1613," in welchem die Sinusse des Quadranten von 2 zu 2 Sekunden in 15 Dezimalstellen enthalten sind, eine Beendigung der von Rhäticus begonnenen Arbeit.

Geber und Regiomontanus berechnen zur Bestimmung der Dreieckswinkel das Perpendikel, welches von einem Eckpunkte eines Dreieckes, dessen drei

Seiten gegeben sind, auf die gegenüber liegende Seite gefällt wird; Rhäticus stellt den Saz auf, dass sich das Produkt aus der halben Summe der Dreiecksseiten in die um eine Seite verminderte halbe Summe dieser Seiten zu dem Produkte der um die zweite Seite verminderten halben Summe der Dreiecksseiten in das Produkt der um die dritte Seite verminderten halben Summe der Dreiecksseiten genau so verhält, wie die Einheit zum Quadrate der Tangente des halben, der ersten Seite gegenüber liegenden Winkels. Von ihm rühren auch folgende für sich äquipollente Säze her: 1. Der Sinus des Produktes zweier Bogen wird gefunden, wenn man vom doppelten Produkte aus dem Sinus (des Produktes des ersten um Eins verminderten Bogens in den zweiten Bogen) in den Kosinus des zweiten Bogens, den Sinus des Produktes aus dem ersten um Zwei verminderten Bogen in den zweiten Bogen, abzieht. 2. Der Kosinus des Produktes zweier Bogen wird gefunden, wenn man vom doppelten Produkte aus dem Cosinus (des Produktes des ersten um Eins verminderten Bogens in den zweiten Bogen) in den Kosinus des zweiten Bogens, den Kosinus des Productes aus dem ersten um Zwei verminderten Bogen in den zweiten Bogen, abzieht. Werden nun statt des ersten Bogens nach und nach die Werthe 2, 3, 4 u. s. f. gesezt, so erhält man die zuerst von François Vieta (gest. 1603) gegebenen Ausdrücke für die Sinusse und Kosinusse vielfachen Winkel. Friedrich Meyer in Petersburg (1727) hat zuerst die trigonometrischen Relazionen durch die algebraische Sprache ausgedrükt und der grosse Leonhard Euler (geb. zu Basel 15. April 1707, gest. zu Petersburg 7. September 1783) führte die noch jezt üblichen Bezeich-

nungen für Sinus, Tangente und Sekante ein. Die Namen der Kofunkzionen rühren von Edmund Gunter (geb. 1581, gest. 1626) her und scheinen auf den Ausdruck Komplement hinzuweisen, als welches der zugehörige Winkel bezüglich des denselben zu 90 Grad ergänzenden Winkels erscheint, dessen Funkzion genau so gross ist, als die Kofunkzion.

Johann Neper (geb. 1550, gest. 1618 zu Menchiston) gebührt das grosse Verdienst, die trigonometrischen Rechnungen durch Anwendung der Logarithmen wesentlich erleichtert zu haben. Er gab Behufs dessen 1614 zu Edingburg: „*Mirifici logarithmorum canonis descriptio ejusque usus in utraque trigonometria et omni logistica mathematica explicatio*“ heraus, wovon 1619 durch seinen Sohn eine vermehrte Auflage gegeben wurde. In diesem Werke ist $sin\ 90° = 0$ angenommen.

Jakob Gregori, Professor in Schottland (geb. 1636 zu New-Aberdeen, gest. 1675 zu St. Andrews) lehrt in seinen „*exercitationes geometricae*, Padua 1668“ die Reihen für Sinus, Tangente und Sekante durch Bogen und umgekehrt, ingleichen die Logarithmen dieser Funkzionen, auszudrüken; was später in der Cyklometrie, die einen Gegenstand der neuern Analysis ausmacht, weiter ausgebildet wurde.

Jakob Kresa, ein Jesuit, lehrte die Anwendung der Algebra in der ebenen und sfärischen Trigonometrie durch seine 1720 zu Prag erschienene: „*Analysis speciosa trigonometriae sfäricae, primo mobili, triangulis rectilineis et progressioni arithmeticae et geometricae aliisque variis problematis applicata.*“

Schliesslich kann aber auch der Name Christian Wolf (Freiherr, geb. 1679 zu Breslau, gest. 1754 zu Halle) nicht mit Stillschweigen übergangen werden, da er ausser seinen sonstigen grossen Verdiensten um die Mathematik die damaligen Lehrsäze der Trigonometrie wesentlich verallgemeinerte.

Wien, im Jänner 1856.

Ernest Sedlaczek.

Inhalt.

Erster Theil.

Ebene Trigonometrie.

	Seite
Vorwort	
§. 1. Trigonometrische Funkzionen	1
§. 2. Deren Entstehen	—
§. 3. Jede Funkzion ist die Kofunkzion des komplementären Winkels und umgekehrt	2
§. 4. Uebersichtliche Zusammenstellung über das Wachsen und Abnehmen aller Funkzionen in allen Quadranten und deren Werthe für 0°, 90°, 180° und 270°	3
§. 5. Trigonometrische Grundgleichungen	4
§. 6. Die sechs wichtigsten Funkzionen durch die andern ausgedrückt	5
§. 7. Die Kathete des rechtwinkl. Dreieckes durch die andere Kathete oder die Hypothenuse, in Verbindung mit einer trigonometrischen Funkzion eines Dreieckswinkels ausgedrückt .	6
§. 8. Die Seiten stehen im geraden Verhältnisse zu den Sinussen der gegenüberliegenden Winkel	7
§. 9. Carnot'scher Lehrsatz	—
§. 10. Sinus und Kosinus der Summe und des Unterschiedes zweier Winkel durch die trigonometrischen Funkzionen der Winkel selbst ausgedrückt	8
§. 11. Tangente der Summe und des Unterschiedes zweier Winkel durch die Tangente der Winkel selbst ausgedrückt . .	9
§. 12. Summe und Unterschied des Sinus und Kosinus zweier Winkel durch die Produkte der Sinusse und Kosinusse der halben Summen und halben Unterschiede dieser Winkel ausgedrückt	10

Seite

§. 13. Tafel zur Werthbestimmung trigonometrischer Funkzionen in allen Quadranten 10
§. 14. Verwandlung des Sinus, Kosinus und der Tangente des ganzen Winkels in die Funkzionen des halben Winkels . . 11
§. 15. Ausdruck der Tangente der Summe dreier Winkel durch die Tangenten der einzelnen Winkel und Folgerungen . . 12
§. 16. Ludolf'sche Zahl in 200 Dezimalstellen 13
§. 17. Sinus und Kosinus des vielfachen Bogens, dann Sinus und Kosinus, durch den Bogen in Reihen ausgedrückt . . . 15
§. 18. Moivre'sche Binominalformel, Reihe für die Tangente durch den Bogen und umgekehrt 16
§. 19. Bedeutung von $\sqrt{-1}$ nach Gauss; zur Verständlichkeit des folgenden Paragrafes 17
§. 20. Moivre'sche Binominalformel, nach Gauss . . . 19
§. 21. Sinus und Kosinus nach den Bogen, in Reihen entwickelt . 20
§. 22. Sukzessive Berechnung der Sinusse und Kosinusse . . 22
§. 23. Zu einem gegebenen Winkel den trigonometrischen Logarithmus aus den Tafeln zu finden und umgekehrt . . . 25
§. 24. Ueber die Auflösung der Dreiecke*) 28
§. 25. Mögliche Fälle bei der Auflösung schiefwinklichter Dreiecke 29
§. 26. 1) Alle drei Seiten gegeben 30
§. 27. 2) *a* Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben . 37
Fink'scher Lehrsatz 38
§. 28. 2) *b* Zwei Seiten und der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben 41
§. 29. 3) Eine Seite und beide anliegenden Winkel gegeben . . 42
§. 30. 4) Eine Seite, der derselben gegenüberliegende und ein anliegender Winkel gegeben . . . . . —
§. 31. Auflösung rechtwinklichter Dreiecke; Fehler der Resultate durch die Tafeln 43
§. 32. Beispiel über die Theilung der Fläche eines Dreiecks mit Vertheilung der Fehler der Resultate 45
§. 33. Beispiel über das Abschneiden einer bestimmten Fläche an einem Vierecke, unter einem bestimmten Winkel . . . 49
§. 34. Ueber Polygone 50
§. 35. Relazionen in regelm. Polygonen bezüglich seiner Bestimmungsstücke und jener des ein- und umgeschriebenen Kreises —
§. 36. Ausdrücke für die ganzen und halben Winkel, welche in einem regelmässigen Vielecke der Vielecksseite gegenüber liegen, dann Tafeln der zur Berechnung regelmässiger Polygone gehörigen trigonometrischen Funkzionen und deren Logarithmen für das Dreieck bis zum Zwölfeck . . . 53

*) Der Flächeninhalt ist bei jedem einzelnen Falle besonders behandelt.

Seite

§. 37. Grösse der Summe aller inneren und äusseren Winkel im unregelmässigen Polygone 55
§. 38. Fundamentalsäze der Polygonometrie 56
§. 39. Wenn man jeden Eckpunkt des Polygons mit einem ausserhalb der Polygonslinie befindlichen willkürlichen Punkte verbindet, so müssen die Produkte aus den Sinussen aller an den Ecken gleichartig liegenden inneren Winkel und die Produkte aus den Sinussen aller übrigen an denselben Ecken anliegenden inneren Winkel einander gleich sein 57
§. 40. Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades . . . 58
§. 41. Auflösung der Gleichungen des dritten Grades . . . 61
§. 42. Auflösung der Gleichungen des vierten Grades . . . 67

Zweiter Theil.

Sfärische Trigonometrie.

§. 43. Entstehung des sfärischen Dreieckes. Was die Seite eines sfärischen Dreieckes vorstellt 68
§. 44. Entwicklung der drei Grundformeln 69
§. 45 Die sfärischen Seiten durch die Winkel ausgedrückt . . 70
§ 46. Die Winkel durch die Seiten ausgedrückt 72
§. 47. Gauss'sche Analogien . . . . . —
§. 48. Neper'sche Analogien 73
§. 49. Die Summe zweier Seiten eines Dreieckes ist stets grösser, als die dritte Seite 74
§ 50. Die Summe dreier Seiten ist stets kleiner, als der Umfang des grössten Kreises . . . . . —
§. 51. Die Summe der drei Winkel im Dreiecke ist jederzeit grösser, als 180 Grad . . . . . —
Sfärischer Exzess . . . . . —
§. 52. Die Summe der drei Winkel im Dreiecke kann nie vollkommen 540 Grad erreichen 75
§ 53. Fläche des Zweieckes, welches an den beiden (entgegengesezten) Polen in seine Ecken ausläuft . . . . . —
§. 54. Flächeninhalt eines Dreieckes 76
§. 55. Mögliche Fälle zur Auflösung schiefwinklichter Dreiecke . —
§. 56. 1.) Alle drei Seiten gegeben 77
§. 57. Flächeninhalt oder Exzess durch die drei Seiten ausgedrückt. L'huillier'sche Formel 78
§. 58. 2.) a. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben 80
§. 59. 2.) b. Zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel gegeben 82

Seite

§. 60. 3) a. Zwei Winkel und eine anliegende Seite gegeben . . 85
§. 61. 3) b. Zwei Winkel und die einem Winkel gegenüber liegende Seite gegeben 87
§. 62. Alle drei Winkel gegeben 90
§. 63. Auflösung rechtwinklichter Dreiecke 91
§. 64. Legendre'scher Lehrsaz . . . . . —
§. 65. Redukzion auf die Chorden 95
Berechnung eines auf die Chorden reduzirten wirklich gemessenen Dreieckes und Folgerungen 99
§. 66. Flächeninhalt des Polygones 102
§. 67. Derselbe Saz, wie §. 39 103
§. 68. Auf der Kugeloberfläche sind nur fünf verschiedene Arten gleicher Vielecke möglich, welche gleiche Seiten und gleiche Winkel haben und zwar bestehen dieselben aus 4, 8 oder 20 Dreiecken, 6 Vierecken oder 12 Fünfecken . . . . —
§. 69. Redukzion ad Achse 104
§. 70. Redukzion ad Zentrum 105

Anhang.

Entwicklung der Methode des Prof. Dr. L. K. Schulz von Strassnitzki, die Ellipsen grafisch darzustellen, durch Bestimmung jener Punkte zunächst, wo sich die Krümmungsrichtung dieser Figur am bedeutendsten ändert; ingleichen der Abszissen und Ordinaten für den Krümmungsmittelpunkt, so wie der Krümmungshalbmesser.

Verbesserungen.

In dem zu §. 4 gehörigen lezten Absaze auf Seite 3 soll es heissen: Dass die Tangente nicht durchgehends dasselbe Zeichen hat, etc.

In der 20. Zeile des §. 16 auf Seite 13 soll es heissen: $360^0 = 2\pi$ (für den Halbmesser = 1).

Die Anmerkung auf Seite 18 kann auch auf folgende Weise dargestellt werden: *1 mit + 1 multipliziren heisst: die Grösse + 1 Einmal lateral ansezen. Ebenso heisst auch *1 mit *1 multipliziren, die laterale Einheit noch Einmal lateral ansezen; nachdem uun aber die positive Lateralrichtung von der positiven Lateralrichtung die negative Richtung ist, so wird obiger Anforderung dadurch entsprochen, indem man die Einheit als Produkt ansieht.

Seite 19 in der 5. Zeile des §. 20 soll es heissen: und man bezeichnet den Effekt der Grösse dieser Richtung etc.

Seite 21, §. 21 kommt am Ende des Sazes in der ersten Zeile der Deutlichkeit wegen noch hinzu zu fügen: weil in diesem Falle bei der unendlichen Abnahme des x sich $\sin x$ nicht dem Bogen, sondern seinem $a$fachen Werthe immer mehr nähern würde, was unrichtig ist. Es kann also dx das x als Faktor nicht in der ersten Potenz enthalten; eben so wenig aber auch in der zweiten oder überhaupt in einer geraden Potenz, weil sich die absoluten Grössenausdrücke für $\sin x$ und $\sin(-x)$ gleich bleiben müssen, während sich blos das Zeichen verändern muss; was aber bei der Annahme gerader Potenzen nicht der Fall ist.

Dieser Band wurde sehr aufmerksam gesezt und korrigirt; wenn aber doch noch einige Fehler vorkommen, welche nach geschehener Korrektur durch fremde Unvorsichtigkeit enstanden sind, so sind dieselben gewiss derart, dass Jeder ohne Zweifel alsogleich das Wahre von dem Irrthümlichen zu unterscheiden wissen wird.

Erster Theil.

Ebene Trigonometrie.

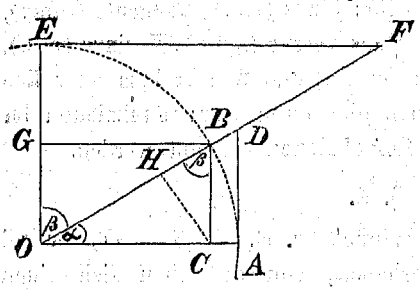
§. 1.

Die reine **Trigonometrie** beschäftigt sich mit der systematischen Darstellung von, durch Linien ausgedrückten, sowohl der Grösse als dem Zeichen nach, veränderlichen Hilfsgrössen, die man Funkzionen nennt. Man hat deren acht: **Sinus** (sin.), **Tangente** (tang.), **Sekante** (sec.), **Quersinus** der **Sinus versus** (sinv.), **Kosinus** (cos.), **Kotangente** (cotg.), **Kosekante** (cosec.) und **Querkosinus** oder **Kosinus versus** (cosv.), von denen die ersten vier: **Funkzionen im Besonderen**; die lezten vier: **Kofunkzionen** genannt werden.

§. 2.

Denkt man sich einen Winkel (z. B. $AOB = \alpha$), er sei spizig, stumpf, hohl oder erhaben, von dem man sich einen Schenkel (AO) als fix; den anderen (BO) hingegen als beweglich vorstellt, trägt vom Scheitel des Winkels auf dem beweglichen Schenkel ein der Einheit (1 eines bestimmten Masses) gleiches Stück auf und fällt vom Schnittpunkte eine Senkrechte (BC) bis auf den unbeweglichen Schenkel, so stellt das Längenmass dieser Linie den **Sinus** des Winkels (α) vor (und man schreibt $BC = sin.\alpha$); das Stück vom Scheitel des Winkels bis zum Fusspunkt des Sinus (die Linie OC) ist der **Kosinus** dieses Winkels ($OC = cos.\ \alpha$). Trägt man die Einheit vom Scheitel des Winkels am unbeweglichen Schenkel auf und errichtet im Schnittpunkte (A) ein Perpendikel (AD), bis es den verlängerten beweglichen Schenkel trifft, so drückt die Grösse dieser durch beide Schenkel begrenzten Linie die **Tangente** des Winkels aus ($AD = tang.\ \alpha$); das Stück des beweglichen Schenkels (OD) vom Scheitel bis zur Tangente ist die **Sekante** ($OD = sec.\ \alpha$). Errichtet man im Scheitel des Winkels eine Senkrechte, trägt darauf vom Scheitel aus die Einheit (OE)

auf und führt im Schnittpunkte (E) eine mit dem unbeweglichen Schenkel gleichlaufende Linie (EF), bis sie den beweglichen Schenkel trifft, so nennt man die Grösse dieser Linie die **Kotangente** ($EF = cotg.\ \alpha$); das Stück vom Scheitel des Winkels bis zu dem Punkte, in welchem sich die Kotangente mit dem verlängerten beweglichen Schenkel schneidet, ist die **Kosekante** ($OF = cosec.\ \alpha$). Das Stück (AC) des unbeweglichen Schenkels vom Fusspunkte des Sinus bis zum Einheitsschnittpunkt (A) ist der **Quersinus** oder **Sinus versus** ($AC = sinv.\ \alpha$); hingegen ist die Grösse (EG) der Linie, welche durch das Ziehen einer mit dem unbeweglichen Schenkel durch den Einheitsschnittpunkt (B) des beweglichen Schenkels geführten Parallelen bis zum Fusspunkte der Kotangente entsteht, der **Kosinus versus** oder der **Querkosinus** ($EG = cosv.\ \alpha$).



In der beigefügten Figur ist der bewegliche zu dem unbeweglichen Schenkel unter einem Winkel geneigt, welcher kleiner ist, als 90 Grad. Die unter solchen Verhältnissen konstruirten 8 trigonometrischen Funkzionen liegen im ersten Quadranten. Der Kürze wegen werden wir hier den zweiten (Neigung zwischen 90 und 180 Grad), den dritten (zwischen 180 und 270 Grad) und den vierten Quadranten (zwischen 270 und 360 Grad) übergehen; müssen jedoch unseren Lesern ganz besonders anempfehlen, diese 8 Funkzionen auch in den übrigen drei Quadranten grafisch zu entwickeln.

§. 3.

Wird der Winkel $AOB = \alpha$ durch Hinzugabe des Winkels $BOE = \beta$ zu einem Rechten ergänzt, so dass $\alpha + \beta = 90^0$ und bestimmt man die Funkzionen des anderen Winkels, so findet man wegen:

$$OC = BG$$

und $$OG = BC$$

folgende Relazionen:

$$sin\ \alpha = cos\ \beta$$

$$cos\ \alpha = sin\ \beta$$

$$tang\ \alpha = cotg\ \beta$$
$$cotg\ \alpha = tang\ \beta$$
$$sec\ \alpha = cosec\ \beta$$
$$cosec\ \alpha = sec\ \beta$$
$$sinv\ \alpha = cosv\ \beta$$
$$cosv\ \alpha = sinv\ \beta.$$

Wenn man nun ganz allgemein durch $f\ (\alpha)$ eine **Funkzion im Besonderen,** und durch $cof.\ (\alpha)$ eine **Konfunkzion** des Winkels α bezeichnet, so hat man:

$$f\ (\alpha) = cof.\ (90 - \alpha),$$
$$f\ (90 - \alpha) = cof.\ (\alpha).$$

§. 4.

Verfolgt man aber aufmerksam das Wachsen und Abnehmen aller Funkzionen in den verschiedenen Quadranten, so findet man die in den folgenden Tabellen aufgestellten merkwürdigen Ergebnisse:

Funkzion	0° bis 90°	90° bis 180°	180° bis 270°	270° bis 360°
Sinus	+ *w*	+ *a*	— *w*	— *a*
Kosinus	+ *a*	— *w*	— *a*	+ *w*
Tangente	+ *w*	— *a*	+ *w*	— *a*
Kotangente	+ *a*	— *w*	+ *a*	— *w*
Sekante	+ *w*	— *a*	— *w*	+ *a*
Kosekante	+ *a*	+ *w*	— *a*	— *w*
Quersinus	+ *w*	+ *w*	+ *a*	+ *a*
Querkosinus	+ *a*	+ *w*	+ *w*	+ *a*

In dieser Tabelle erscheint sowohl das Zeichen jeder einzelnen Funkzion in jedem Quadranten, wie auch anderseits durch die Buchstaben „*w*“ und „*a*“ ausgedrückt ist, ob die Grösse der Funkzion vom Beginne dieses bis zum Anfange des folgenden Quadranten im Wachsen oder Abnehmen begriffen ist.

Dass die Tangente nicht dasselbe Zeichen hat, wie der Sinus des gleichen Winkels, ist ganz natürlich; denn es beziehen sich die Tangenten aller Quadranten auf eine einzige, im Einheitsschnittpunkte *(A)* des als normal angenommenen unbeweglichen Schenkels geführte, Berührungslinie. Das Analoge gilt auch für die Kotangente.

Funkzion	0^0	90^0	180^0	270^0
Sinus	0	1	0	-1
Kosinus	1	0	-1	0
Tangente	0	∞	0	∞
Kotangente	∞	0	$-\infty$	0
Sekante	1	∞	-1	$-\infty$
Kosekante	∞	1	∞	-1
Quersinus	0	1	2	1
Querkosinus	1	0	1	2

In dieser Tabelle ist die Grösse einer jeden Funkzion für die Winkel von 0^0, 90^0, 180^0 und 270^0 vollständig ausgedrückt. Für den Winkel von 360^0 ist die Grösse der Funkzionen genau dieselbe, wie für 0^0 und ganz allgemein ist, wenn $\varphi(x)$ jede Funkzion für den Winkel x bezeichnet:

$$\varphi(x + 360n) = \varphi(x).$$

§. 5.

Der Winkel $OCB = 90^0$; ferner sei CH senkrecht auf BO. Nun ist $BOC = \alpha$ und weil OBC ein Winkel ist, welcher durch die Linie BO dadurch entstanden ist, dass BC zu OG parallel ist, so muss $CBO = BOG = \beta$ sein. Sezt man ferner $BCH = x$ und $HCO = y$, so ist wegen $BCO = BHC = CHO = 90^0$ und weil die Summe der drei Winkel in jedem Dreiecke 180^0 beträgt,

$$\alpha + y = \beta + x = x + y = \alpha + \beta = 90^0,$$

woraus $x = \alpha$ und $y = \beta$ folgt, und weil in den Dreiecken BCO, CHO und BHC die Winkel α und β gemeinschaftlich sind, so sind die Dreiecke BOC, BCH und COH unter einander ähnlich, daher folgt vermöge der Proporzionalität der Linien in ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{BO} \text{ und } \frac{HO}{CO} = \frac{CO}{BO}, \text{ woraus}$$

$$BH \,.\, BO = \overline{BC}^2 \text{ und}$$

$$HO \,.\, BO = \overline{CO}^2, \text{ daher:}$$

$$BO\,(BH + HO) = \overline{BC}^2 + \overline{CO}^2.$$

Nun aber ist $BH + HO = BO$, daher $\overline{BO}^2 = \overline{BC}^2 + CO^2$.

Nun aber stellt BC den Sinus, CO den Kosinus des Winkels α und BO die Einheit vor, daher hat man:

$$1 = (sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2.$$

Gelegenheitlich sei bemerkt, dass man das Quadrat einer jeden, also auch einer trigonometrischen Funkzion $f(\alpha)$ durch $[f(\alpha)]^2 = f^2(\alpha)$; aber nicht durch $f(\alpha)^2$ ausdrücken soll.

Nebstbei sei noch erwähnt, dass der obige Saz $\overline{BO}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CO}^2$, weil BO die Hypothenuse, dann BC und CO die beiden Katheten in dem betreffenden rechtwinklichten Dreiecke sind, nur den nach dem Erfinder benannten **Pythagoras**'schen Lehrsaz vorstellt.

Durch Anwendung dieses Sazes und der Lehrsäze über die Proporzionalität der Linien in rechtwinklichten Dreiecken, findet man folgende 8 trigonometrische Hauptgleichungen:

1. $sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1,$
2. $tang^2\ \alpha + 1 = sec^2\ \alpha,$
3. $cotg^2\ \alpha + 1 = cosec^2\ \alpha,$
4. $tang\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha},$
5. $cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha},$
6. $cotg\ \alpha = \frac{1}{tang\ \alpha},$
7. $sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha},$
8. $cosec\ \alpha = \frac{1}{sin\ \alpha},$

welche von jedem Mathematik-Befliessenen sehr leicht dem Gedächtnisse eingeprägt werden können.

§. 6.

Diese Gleichungen reichen hin, um die 6 wichtigsten trigonometrischen Funkzionen durch einander auszudrücken. Es ist:

$$sin.\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\ \alpha} = \frac{tang\ \alpha}{\sqrt{1 + tang^2\ \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2\ \alpha}} =$$

$$= \frac{\sqrt{sec^2\ \alpha - 1}}{sec\ \alpha} = \frac{1}{cosec\ \alpha};$$

$$\cos.\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tang^2\alpha}} = \frac{\cotg\alpha}{\sqrt{1 + \cotg^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\sqrt{\cosec^2\alpha - 1}}{\cosec\alpha};$$

$$\tang.\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cotg\alpha} =$$

$$= \sqrt{\sec^2\alpha - 1} = \frac{1}{\sqrt{\cosec^2\alpha - 1}};$$

$$\cotg\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} = \frac{1}{\tang\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}} = \sqrt{\cosec^2\alpha - 1};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + \tang^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \cotg^2\alpha}}{\cotg\alpha} = \frac{\cosec\alpha}{\sqrt{\cosec^2\alpha - 1}};$$

$$\cosec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1 + \tang^2\alpha}}{\tang\alpha} =$$

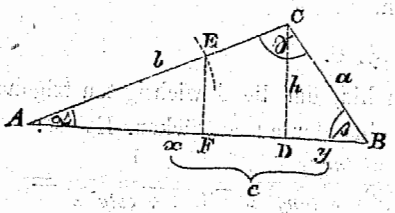
$$= \sqrt{1 + \cotg^2\alpha} = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}.$$

Der Quersinus und Querkosinus, welche sehr selten in den Rechnungen Anwendung finden, sind in folgender Weise vom Kosinus und Sinus abhängig. Es ist, wie man auf den ersten Blick ersieht:

$$\cos\alpha + \sinv\alpha = 1,$$
$$\sin\alpha + \cosv\alpha = 1.$$

§. 7.

Um die nöthigsten Grundsäze der Trigonometrie zu entwickeln, seien in nebenstehender Figur.



$$\left.\begin{aligned} BC &= a \\ AC &= b \\ AB &= c \end{aligned}\right\} \text{die Seiten,}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} BAC &= \alpha \\ ABC &= \beta \\ ACB &= \gamma \end{aligned}\right\} \text{die Winkel.}$$

Fällt man von C eine Senkrechte $CD = h$ auf c, wodurch AB in $AD = x$ und $BD = y$ getheilt wird, und schneidet man

von AC ein Stück $AE = 1$ ab, so ist das von E auf AB gefällte Loth EF der Sinus des Winkels α und AF der Kosinus dieses Winkels. Es folgt sofort aus der Proporzionalität der Linien:

$$\frac{\sin\alpha}{AE} = \frac{h}{b} \text{ und } \frac{\cos\alpha}{AE} = \frac{x}{b}.$$

Wegen $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tang\ \alpha = \frac{1}{cotg\ \alpha}$ ist ferner:

$$tang\ \alpha = \frac{h}{x} \text{ und } cotg\ \alpha = \frac{x}{h}.$$

Diese Gleichungen geben folgende gleichfalls leicht zu memorirende Lehrsäze:

In jedem rechtwinklichten Dreiecke ist immer eine Kathete

1. gleich der Hypothenuse multiplizirt mit dem Sinus des dieser Kathete gegenüber liegenden Winkels,

2. gleich der Hypothenuse multiplizirt mit dem Kosinus des dieser Kathete anliegenden (spizigen) Winkels,

3. gleich der anderen Kathete multiplizirt mit der Tangente des der ersten Kathete gegenüber liegenden Winkels,

4. gleich der anderen Kathete multiplizirt mit der Kotangente des der ersten Kathete anliegenden (spizigen) Winkels.

§. 8.

Es ist $h = b \,.\, \sin\alpha = a \,.\, \sin\beta$,

woraus

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \text{ und ganz analog } = \frac{c}{\sin\gamma},$$

d. h. **In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten gerade zu den Sinussen der diesen Seiten gegenüber liegenden Winkel.**

§. 9.

Es ist:

$$x = b \,.\, \cos\alpha \text{ und}$$

$$y = a \,.\, \cos\beta,$$

daher, wegen $x + y = c$

$$c = b \,.\, \cos\alpha + a \,.\, \cos\beta.$$

Ganz analog hat man auch:

$$b = a \,.\, \cos\gamma + c \,.\, \cos\alpha$$

$$\text{und } a = b \,.\, \cos\gamma + c \,.\, \cos\beta.$$

Wird nun die Gleichung von c mit c, die von b mit b, endlich die von a mit a multiplizirt, so erhält man;

$$c^2 = bc \,.\, \cos\alpha + ac \,.\, \cos\beta,$$
$$b^2 = ab \,.\, \cos\gamma + bc \,.\, \cos\alpha,$$
$$a^2 = ab \,.\, \cos\gamma + ac \,.\, \cos\beta.$$

Wird nun die Summe der beiden ersten Gleichungen von der lezten abgezogen, so erhält man:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \,.\, \cos\alpha,$$

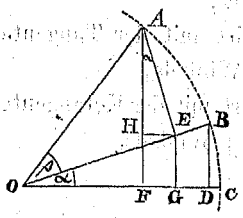
daher

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\alpha$$

den **Carnot**'schen Lehrsaz. Ganz analoge Ausdrücke erhält man auch für b^2 und c^2.

§. 10.

Um den **Sinus und Kosinus der Summe und Unterschiedes zweier Winkel** durch die einfachen Winkel auszudrücken, sei in nebenstehender Figur $AO = BO = CO = 1$,



ferner sei:

$$BOC = \alpha.$$
$$AOB = \beta,$$
$$AOC = \alpha + \beta.$$

Konstruirt man den Sinus des Winkels α, β, dann $\alpha + \beta$ und fällt man vom Fusspunkte E des Sinus von β eine Senkrechte auf den unbeweglichen Schenkel OC und auf den Sinus von $(\alpha + \beta)$, so ist:

$$BD = \sin\alpha; \qquad OD = \cos\alpha,$$
$$AE = \sin\beta; \qquad OE = \cos\beta,$$
$$AF = \sin(\alpha + \beta); \; OF = \cos(\alpha + \beta),$$

ferner ist:

$$\sin(\alpha + \beta) = EG + AH,$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = OG - EH.$$

Da nun $EAH = BOC = \alpha$, ist auch:

$$AH = \sin\beta \,.\, \cos\alpha,$$
$$EG = \sin\alpha \,.\, \cos\beta,$$
$$OG = \cos\alpha \,.\, \cos\beta,$$
$$EH = \sin\alpha \,.\, \sin\beta,$$

und man findet endlich durch Substituzion dieser Ausdrücke in die obigen für Sinus und Kosinus von $(\alpha + \beta)$ gegebenen Gleichungen:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta.$$

Diese Säze wird man stets erhalten, mag man nun einen oder jeden der beiden Winkel spizig oder stumpf annehmen. Wird aber der Winkel β negativ, so hat man in Rücksicht, dass ein negativer Winkel in einem Winkelsysteme blos einen Winkel im entgegengesezten Quadranten mit demselben unbeweglichen Schenkel bedeutet und dass ohne Rücksicht auf ein Zeichen die absolute Grösse des Sinus und Kosinus in einem negativen Winkel, wie in einem positiven gleich unverändert besteht, endlich der Kosinus in einem negativen Quadranten sogar das Zeichen des positiven Quadranten beibehält, welches sich jedoch beim Sinus ändert:

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta,$$
$$\cos(-\beta) = +\cos\beta$$

und daher:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \,.\, \sin\beta.$$

§. 11.

Aus den eben entwickelten Formeln:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta \pm \cos\alpha \,.\, \sin\beta;$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta \mp \sin\alpha \,.\, \sin\beta$$

erhält man den Ausdruck für die Tangente der Summe und des Unterschiedes zweier Winkel, wenn man den Ausdruck von $\sin(\alpha \pm \beta)$ durch den Ausdruck von $\cos(\alpha \pm \beta)$ dividirt, sowohl Zähler und Nenner durch das Produkt $\cos\alpha \,.\, \cos\beta$ theilt und wieder die zwischen Sinus, Kosinus und der Tangente bestehende Relazion in's Auge fasst.

Man hat sonach:

$$\tang(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha \,.\, \cos\beta \pm \cos\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta \mp \sin\alpha \,.\, \sin\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha \,.\, \cos\beta}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta} \pm \dfrac{\cos\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \,.\, \cos\beta}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta} \mp \dfrac{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta}} = \frac{\tang\alpha \pm \tang\beta}{1 \mp \tang\alpha \,.\, \tang\beta},$$

nämlich: $\tang(\alpha+\beta) = \dfrac{\tang\alpha + \tang\beta}{1 - \tang\alpha \,.\, \tang\beta}$

und $\tang(\alpha-\beta) = \dfrac{\tang\alpha - \tang\beta}{1 + \tang\alpha \,.\, \tang\beta}$

Für die Kotangente hat man die reziproken Werthe.

§. 12.

Reduzirt man die Ausdrücke für

$$\sin(\alpha+\beta) \pm \sin(\alpha-\beta) \text{ und für}$$

$$\cos(\alpha+\beta) \pm \cos(\alpha-\beta), \text{ so erhält man:}$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 . \sin\alpha . \cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 . \cos\alpha . \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 . \cos\alpha . \cos\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2 . \sin\alpha . \sin\beta.$$

Setzt man nun:

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta &= \varphi \\ \text{und}\quad \alpha-\beta &= \psi \end{aligned}\right\}$$

das ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varphi+\psi}{2} \\ \text{und}\quad \beta &= \frac{\varphi-\psi}{2} \end{aligned}\right\}$$

so erhält man:

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2 . \sin\frac{\varphi+\psi}{2} . \cos\frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2 . \cos\frac{\varphi+\psi}{2} . \sin\frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$\cos\varphi + \cos\psi = 2 . \cos\frac{\varphi+\psi}{2} . \cos\frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2 . \sin\frac{\varphi+\psi}{2} . \sin\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

Dividirt man nun die erste der so eben erhaltenen Gleichungen durch die zweite, so erhält man:

$$\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi} = \tang\frac{\varphi+\psi}{2} . \cotg\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{\tang\frac{\varphi+\psi}{2}}{\tang\frac{\varphi-\psi}{2}}.$$

§. 13.

Sezt man nun in den für Sinus und Kosinus von $(\alpha \pm \beta)$ erhaltenen Ausdrücken abwechselnd α positiv und negativ und $\beta = (+90^0, \pm 180^0, \pm 270^0, \pm 360^0)$ und berücksichtigt die Grösse der Sinusse und Kosinusse für die Winkel von 90^0, 180^0, 270^0, 360^0 (§. 4), so findet man die Werthe für Sinus und Kosinus der betreffenden Winkel, welche, wenn man bedenkt, dass $\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\cotg = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ auch für die Tangente und Kotangente ausgedehnt werden können.

Die in der nachstehenden Tabelle enthaltenen Ausdrücke bezeichnen die Grösse der Funkzionen sammt zugehörigen Zeichen für die Winkel $(x+\alpha)$, $(x-\alpha)$, $(\alpha-x)$, wobei $x=90^0$, 180^0, 270^0 und 360^0).

Tafel, zur Werthbestimmung trigonometrischer Funkzionen in allen Quadranten.

Winkel	Sinus	Kosinus	Tangente	Kotangente
$90+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot g\,\alpha$	$-tang\,\alpha$
$90-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot g\,\alpha$	$tang\,\alpha$
$\alpha-90$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot g\,\alpha$	$-tang\,\alpha$
$180+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tang\,\alpha$	$\cot g\,\alpha$
$180-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tang\,\alpha$	$-\cot g\,\alpha$
$\alpha-180$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tang\,\alpha$	$\cot g\,\alpha$
$270+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot g\,\alpha$	$-tang\,\alpha$
$270-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot g\,\alpha$	$tang\,\alpha$
$\alpha-270$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot g\,\alpha$	$-tang\,\alpha$
$360+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tang\,\alpha$	$\cot g\,\alpha$
$360-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tang\,\alpha$	$-\cot g\,\alpha$
$\alpha-360$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tang\,\alpha$	$\cot g\,\alpha$

§. 14.

Sezt man in den Ausdrücken für den Sinus und Kosinus von $(\alpha \pm \beta)$ das $\beta=\alpha$, so hat man:

$$\sin 2\alpha = 2.\cos\alpha.\sin\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\sin 0 = 0,$$
$$\cos 0 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha.$$

Subtrahirt man einmal die Gleichung $\cos 2\alpha$ von $1 = \cos\alpha^2 + \sin^2\alpha$, und addirt sie ein zweites Mal zu diesem Ausdruck, so erhält man, wenn man die Funkzionen des einfachen Winkels bestimmt:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

und

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

und, da diese Relazion eine allgemeine ist, muss sie auch gelten, wenn α in $\frac{\alpha}{2}$ übergeht. Es ist also:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\text{und} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

zwei zur Verwandlung des Sinus und Kosinus des ganzen Winkels in die Funkzionen des halben, oder umgekehrt, häufig angewandte Formeln.

Aus diesen beiden Formeln erhält man durch unmittelbare Division:

$$\tang\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

und ebenso:

$$\tang\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

es ist also:

$$\tang\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Für die Kotangente hat man die reziproken Ausdrücke.

§. 15.

Auf das Vorangeschickte (§. 11) gestüzt, glauben wir nachstehende Formel ohne weiterer Herleitung ansezen zu dürfen.

$$\tang(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tang\alpha + \tang\beta + \tang\gamma - \tang\alpha\,\tang\beta\,\tang\gamma}{1 - \tang\alpha\,\tang\beta - \tang\alpha\,\tang\gamma - \tang\beta\,\tang\gamma}$$

Sezt man

$$\begin{aligned} \tang\alpha &= x, \text{ somit } \alpha = \arc.\ \tang x \\ \tang\beta &= y \quad \text{„} \quad \beta = \arc.\ \tang y \\ \tang\gamma &= z \quad \text{„} \quad \gamma = \arc.\ \tang z, \end{aligned}$$

so ist:

$$\tang(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz},$$

folglich

$$\alpha+\beta+\gamma = \arc.\ \tang\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}\right)$$

und daher:

$$arc.\ tang\ x + arc.\ tang\ y + arc.\ tang\ z =$$
$$= arc.\ tang \left(\frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz} \right).$$

§. 16.

Diese Formel lässt sich nun sehr bequem zur Berechnung der **Ludolf**'schen Zahl benüzen, wenn man

$$\frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz} = A\pi$$

setzt, wobei A jede positive, reele Grösse bezeichnen kann; allein auch die Grössen x, y und z müssen so ausfallen, dass man zur wirklichen Berechnung die Reihe

$$arc.\ tang\ w = w - \frac{w^3}{3} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^7}{7} + \ldots$$

mit Vortheil anwenden kann. Der natürlichste Versuch ist

$$\frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz} = 1 \text{ zu sezen, wornach}$$

$$arc.\ tang\ x + arc.\ tang\ y + arc.\ tang\ z = arc.\ tang\ 1.$$

Bleibt man nun zur Bestimmung der Grössen x, y und z bei den reziproken Einheiten, so findet man bald, dass obigem Bruche die Werthe

$$x = \tfrac{1}{2}$$
$$y = \tfrac{1}{5}$$
$$z = \tfrac{1}{8}$$

Genüge leisten.

Nachdem nun aber *arc. tang* 1 einen Bogen, dessen Tangente die Einheit ist, bezeichnet, welches für $45^0 = \frac{360^0}{8}$ Statt hat, und der Umfang eines Kreises durch $360 = 2^0\pi$ (für den Halbmesser $= 1$) ausgedrückt wird, so ist der Bogen $45^0 = \frac{\pi}{4}$, daher endlich

$$\frac{\pi}{4} = arc.\ tang\ \tfrac{1}{2} + arc.\ tang\ \tfrac{1}{5} + arc.\ tang\ \tfrac{1}{8}.$$

Diese Formel rührt von dem verstorbenen Professor **Dr. L. C. Schulz v. Strassnitzki** her, welcher sie dem berühmten Kopfrechner Zacharias **Dase** zur Berechnung dieser, in der Mathematik so wichtigen, Grösse anwies.

Die von Dase berechneten 500 ersten Dezimalstellen sind:

3·14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971
69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899
86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502
84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196

Bereits 287 Jahre vor Christi Geburt berechnete **Archimedes** aus Syrakus das Verhältniss des Kreisumfanges zu seinem Durchmesser und fand dasselbe $\frac{22}{7}$. Andere halten dafür, dass bereits früher von den Gelehrten der ostindischen Kompagnie (Braminen) das noch genauere Verhältniss $\frac{3927}{1250}$ gefunden worden sei. In späterer Zeit wurde dieses Verhältniss von verschiedenen Mathematikern immer genauer bestimmt, unter welchen Bemühungen besonders jene des **Ludolf von Ceulen** merkwürdig sind, weshalb diese Zahl häufig nach seinem Namen genannt wird. Auch **Leibnitz** und Peter **Metius** gaben sich grosse Mühe. Das Verhältniss, welches Lezterer berechnete und zu Anfang des 17. Jahrhundertes durch seinen Sohn Adrian **Metius** bekannt wurde, wird durch die ersten ungeraden Ziffern, nämlich $\frac{355}{133}$, paarweise ausgedrückt.

Vieta, ein Franzose berechnete diese Grösse (1600) in 10 Dezimalstellen; um dieselbe Zeit Adrian **Romanus** (gest. 1616), ein Niederländer bis auf 17; **Ludolf von Ceulen** (1619) bis auf 32; **Sharp** zu Anfang des 17. Jahrhundert mit Hilfe der neueren Analyse bis auf 72; **Machin,** Professor in London (1706) bis auf 100; **Lagny** (1719), ein Franzose bis auf 127, **Vega** (gest. 1804) bis auf 140 Dezimalstellen, von denen jedoch Vega die lezten 4 nicht 3172, sondern 6136 angibt. Endlich wurde diese Zahl vor Dase noch in 154 Dezimalstellen berechnet, welche sich in Hofrath **Kästner's** Anfangsgründen der Mathematik, I. Theil, 5. Auflage Seite 330 vorfinden. In diesem Buche sind die lezten 2 Ziffern nicht 11, sondern 03.

Noch ist sehr bewerkenswerth, dass der kurz vor **Aristoteles** lebende Geometer **Antifon** bereits die Quadratur des Kreises auf eine obschon viel mühsamere Art, als mit Hilfe unserer elementaren Methoden, doch aber auf sehr razionelle Weise versuchte. Ob **Antifon** das Verhältniss selbst angab, ist unbekannt.

Wir wollen noch zum Schlusse folgende Grössen angeben:

$log.\ vulg.\ \pi = 0{\cdot}49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 12682\ 88290\ 89887$

$log.\ nat.\ \pi = 1{\cdot}14472\ 98858\ 49400\ 17414\ 342$

$\sqrt{\pi} = 1{\cdot}77245\ 38509\ 05516\ 027$

$\sqrt[3]{\pi} = 1{\cdot}46459\ 18875\ 61523\ 263$

$\frac{1}{\pi} = 0{\cdot}31830\ 98861\ 83790\ 67153\ 77679\ 26745\ 02872$

§. 17.

Sezt man in den bereits bekannten Ausdrücken für $sin\ (\varphi + \psi)$ und $cos\ (\varphi + \psi)$, §. 10, anstatt ψ die Werthe φ, $2\ \varphi$, $3\ \varphi$, u. s. f., so erhält man nach geschehener Redukzion:

$$sin\ 2\ \varphi = 2\ sin\ \varphi\ cos\ \varphi$$
$$sin\ 3\ \varphi = 3\ sin\ \varphi\ cos^2\ \varphi - sin^3\ \varphi$$
$$sin\ 4\ \varphi = 4\ sin\ \varphi\ cos^3\ \varphi - 4\ sin^3\ \varphi\ cos\ \varphi$$

u. s. f., ferner:

$$cos\ 2\ \varphi = cos^2\ \varphi - sin^2\ \varphi$$
$$cos\ 3\ \varphi = cos^3\ \varphi - 3\ cos\ \varphi\ sin^2\ \varphi$$
$$cos\ 4\ \varphi = cos^4\ \varphi - 6\ cos^2\ \varphi\ sin^2\ \varphi + sin^4\ \varphi \text{ u. s. f.}$$

Wenn man nun die zweiten Theile dieser Gleichungen mit dem sogenannten binomischen oder **Newton**'schen Lehrsaze:

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^{n-3}x^3 + \ldots\ldots$$

aufmerksam vergleicht, so sieht man leicht, dass die Summe aus dem Sinus und Kosinus eines $n$fachen Winkels dieselben Koeffizienten und Potenzen enthält, wie die $n$te Potenz der Summe aus dem Sinus und Kosinus des einfachen Winkels und sich sonach das im **Newton**'schen Saze befindliche **Paskal**'sche Dreieck auffinden lässt. Auch findet man sowohl in den Gleichungen für Sinus, als für Kosinus einen regelmässigen Zeichenwechsel. Die Gleichungen für die Sinusse der vielfachen Winkel enthalten den Sinus des einfachen Winkels nur in ungeraden Potenzen, während bei den Gleichungen für Kosinus das Gegentheil Statt hat. Unter diesen Voraussezungen gelangt man also, wenn man zur besseren Erkenntniss eine hinreichende Anzahl solcher Gleichungen (etwa 5) für Sinus und Kosinus der vielfachen

Winkel sich entwickelt und auch die Werthe für die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-[r-1])}{1.2.3\ldots\ldots(r-1)r},$$

wobei für unseren Fall n und r ganze + Zahlen sind, berechnet hat, zu folgenden Reihen:

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi \sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi \sin^3\varphi +$$

$$+ \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi \sin^5\varphi - \ldots\ldots \quad \text{und}$$

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi \sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi \sin^4\varphi - \ldots.$$

Nachdem der Sinus mit dem Abnehmen des entsprechenden Bogens immer kleiner und der Kosinus der Einheit immer näher wird, so kann man, wenn $n\varphi$ in x übergeht, wobei n sehr gross, daher φ sehr klein sein soll, gewiss statt $\sin\varphi = \varphi$ oder $= \frac{x}{n}$ und statt $\cos\varphi = 1$ sezen. Unter dieser Voraussezung aber, wenn nämlich n eine sehr grosse Grösse vorstellt, ist die Verminderung derselben um 1, 2, 3 u. s. f. ganz unbedeutend und man kann

$$n-1 = n-2 = n-3 = \ldots\ldots\ldots = n$$

sezen und hat endlich für den unendlich kleinen Bogen φ folgende Funkzionen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots,$$

wobei $m! = 1.2.3.4\ldots\ldots(m-1)m$.

Diese beiden Reihen werden im Späteren auf einem anderen Wege hergeleitet, erscheinen.

§. 18.

Wird die Reihe für $\sin x$ mit $\sqrt{-1}$ multiplizirt, und das Produkt zur Reihe für $\cos x$ addirt, so erhält man in Betracht:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1,\ (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^4 = +1,$$

u. s. f. den Ausdruck:

$$\cos x + \sqrt{-1}.\sin x = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1!} + \frac{(x\sqrt{-1})^2}{2!} +$$

$$+ \frac{(x\sqrt{-1})^3}{3!} + \ldots\ldots$$

woraus:

$$\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x = e^{x\sqrt{-1}} \quad *).$$

Wird nun statt x, nx gesezt, so ist:

$$\cos nx + \sqrt{-1}\,\sin nx = e^{nx\sqrt{-1}}$$

und da

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \left(e^{x\sqrt{-1}}\right)^n$$

ist endlich

$$\cos nx + \sqrt{-1}\,\sin nx = \left\{\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x\right\}^n$$

die **Moivre**'sche Binomialformel.

Aus den beiden für $\sin x$ und $\cos x$ gefundenen Reihen kann man bekanntlich sehr leicht folgende Reihe erhalten:

$$\tang x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.3.5.7} + \ldots$$

wenn man nämlich die beiden Reihen für Sinus und Kosinus durcheinander dividirt und die noch unbekannten Koeffizienten der Reihe für $\tang x$, welche analog der Sinusreihe nur ungerade Potenzen enthalten kann, nach der sogenannten Methode der unbestimmten Koeffizienten entwickelt.

Nebenbei sei noch erwähnt, dass man durch Umkehrung dieser Reihe eine sehr bequeme Reihe für den Bogen erhält. Es ist also

$$\arc x = \tang x - \frac{\tang^3 x}{3} + \frac{\tang^5 x}{5} - \ldots$$

§. 19.

Es ist noch nicht so lange her, dass man die **imaginären Grössen** mit einer eigenthümlichen Scheu betrachtete und dieselben mit Gewalt aus dem mathematischen Kalkule zu verbannen suchte. Man kannte nur ganze und gebrochene, positive und negative Grössen und betrachtete Grössen, wie $\pm n\sqrt{-1}$, als nichtsbedeutende Grössen, welche nur etwa *den* Zweck haben, in der Rech-

*) Denn es ist, wenn $e = 2{\cdot}718281828459\ldots$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet:

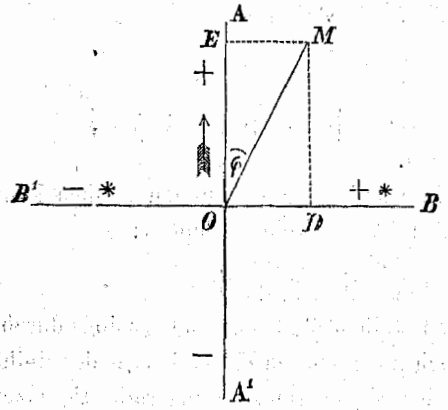
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

und wenn

x in $x\sqrt{-1}$ übergeht, gelangt man zu obiger Reihe.

nung durchzulaufen und anzuzeigen, dass ein gefundenes Resultat unbrauchbar sei.

Eine Grösse A mit einer Grösse B multipliziren, heisst: die Grösse A in ihrem ganzen Sein so oft nach dem Wesen der Grösse B anzusezen, als es diese verlangt.



Denkt man sich einen mathematischen Punkt O, von dem zwei entgegengesezte gerade Richtungen OA und OA' ausgehen sollen. OA sei normal, das ist positiv $+$, so ist OA' negativ $-$. Nun aber laufen in gleicher Entfernung zwischen beiden Richtungen ebenfalls entgegengesezt zwei andere Richtungen: die Lateralen OB und OB' aus. Da nun O das Zentrale und OA die normale Richtung bildet, so sei OB die positive Lateralrichtung und OB' die negative Lateralrichtung. Wird nun von O aus auf jede dieser 4 Richtungen eine bestimmte Einheit aufgetragen, welche beispielsweise die Punkte A, B, A' und B' erreichen soll, so dass $OA = +1$, $OA' = -1$, $OB = +*1$, $OB' = -*1$, so wird es, in Berücksichtigung, dass auch durch das Zeichen das Wesen einer Grösse bedingt wird, leicht sein, die verschiedenartigen Kombinazionen von je zwei oder auch mehr der Faktoren $+1$, -1, $*1$ und $-*1$ als Produkte darzustellen. So ergibt sich $*1 . *1 = -1$ †) oder $(*1)^2 = -1$ das heisst: $*1 = \sqrt{-1}$; es wird daher durch die sogenannte imaginäre Grösse $\sqrt{-1}$ eine reele Grösse jener Seitenrichtung vorgestellt, welche in unserem Systeme gleichweit von der positiven und negativen Richtung und bei obiger Annahme von der positiven Richtung gegen rechts entfernt ist. Allein ebenso wenig,

†) $*1$ entsteht aus der Normalen $+1$ dadurch, dass dieselbe um den Winkel von 90 Graden bei obiger Annahme gegen *rechts* gedreht wird; es wird daher $*1$ mit $*1$ multiplizirt, wenn $*1$ ebenfalls um einen rechten Winkel gegen *rechts* gedreht wird, wodurch der Schenkel -1 gedeckt wird.

als das Wesen und die Entwicklung der trigonometrischen Ausdrücke eine Aenderung erleidet, wenn man was immer für einen Quadranten als den ersten annimmt, ebenso wenig hat obige Annahme Einfluss auf die erlangten Resultate, mag man nun die positive Seitengrösse in der Richtung gegen rechts oder gegen links annehmen.

§. 20.

Allein diese spezielle Lateralrichtung, welche blos für den rechten Winkel gilt, lässt sich selbstverständlich für jeden beliebigen Winkel φ exponiren. Denkt man sich Behufs dessen von O aus gegen M eine Richtung, welche zwischen die Richtungen $+$ und $*$ unter dem Winkel φ fällt, so ist $AOM = \varphi$ und man bezeichnet die Grösse dieser Richtung, welche die gleiche Länge mit den einheitlichen OA, OA', OB und OB' repräsentirt, durch das Symbol $\binom{*}{\varphi} 1$. Um nun die Relazion des Symboles $\binom{*}{\varphi} 1$ zu bestimmen, fälle man von M senkrechte Linien: auf OA die ME und auf OB die MD. Es ist also, wegen $AOM = \varphi$, das $EM = * \sin\varphi$ und $OE = DM = \cos\varphi$, daher weil $\binom{*}{\varphi} 1$ nur mit dem Erreichen des Punktes M vollständig erreicht ist, zu welchem man gelangt, indem man den Weg $OE = \cos\varphi$ und $EM = * \sin\varphi$ zurücklegt, ist auch:

$$\binom{*}{\varphi} 1 = \cos\varphi + * \sin\varphi$$

und da kraft obiger Definizion $\sin\varphi$ mit $*1$ multipliziren, keine andere Bedeutung hat, als die Grösse $\sin\varphi$ Einmal lateral ansezen, ist auch:

$$\sin\varphi \,.\, * 1 = * \sin\varphi,$$

und wegen

$$* 1 = \sqrt{-1},$$

erhält man durch Substituzion.

$$\binom{*}{\varphi} 1 = \cos\varphi + \sqrt{-1} \,.\, \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Es ist daher auch:

$$\left[\binom{*}{\varphi} 1\right]^n = (\cos\varphi + \sqrt{-1} \,.\, \sin\varphi)^n.$$

Die Versinnlichung durch die Figur gibt deutlich:

$$\binom{*}{\varphi} 1 \,.\, \binom{*}{\varphi} 1 = \left[\binom{*}{\varphi} 1\right]^2 = \binom{*}{2\varphi} 1;$$

ebenso

$$\left[\binom{*}{\varphi} 1\right]^3 = \binom{*}{3\varphi} 1$$

und allgemein:

$$\left[\binom{*}{\varphi} 1\right]^n = \binom{*}{n\varphi} 1,$$

daher ist auch:

$$\binom{*}{n\varphi} 1 = (\cos\varphi + \sqrt{-1} \,.\, \sin\varphi)^n.$$

Ganz auf dieselbe Weise, wie früher (*I*) erhalten wurde, erhält man auch:

$$\binom{*}{n\varphi} 1 = \cos n\varphi + \sqrt{-1} \,.\, \sin n\varphi,$$

somit ist:

$$\cos n\varphi + \sqrt{-1} \sin n\varphi = (\cos\varphi + \sqrt{-1} \,.\, \sin\varphi)^n,$$

welche Formel die **Moivre**'sche oder die **trigonometrische Binomialformel** vorstellt, die **Gauss** (Karl Friedrich, geboren am 30. April 1777 zu Braunschweig, gestorben am 23. Februar 1855 zu Göttingen) auf eine so überraschende und elegante Weise entwickelt, während sie sonst nur auf höheren und langen Wegen erhalten wird.

Wird die in dieser Formel angezeigte Potenz nach dem **Newton**'schen Lehrsaze wirklich entwickelt und sezt man die reelen und imaginären Grössen einander gleich, so erhält man:

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1}\varphi \sin\varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3}\varphi \sin^3\varphi +$$
$$+ \binom{n}{5} \cos^{n-5}\varphi \sin\varphi - \ldots.$$
$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2}\varphi \sin^2\varphi +$$
$$+ \binom{n}{4} \cos^{n-4}\varphi \sin^4\varphi - \ldots.$$

§. 21.

Um den Sinus und Kosinus durch nach ihren Bogen fortschreitende Reihen zu entwickeln, erinnert man sich, dass je kleiner ein Bogen ist, desto mehr sich sein Sinus diesem Bogen nähert, man daher $\sin x = x + \delta x$ sezen kann, wo δx (Differenz x) eine von x in eben angegebener Weise abhängige Grösse bezeichnet, welche somit x als Faktor enthalten wird. Wie man leicht sieht, kann δx nicht αx sein, da man sonst für $\sin x$ den Ausdruck $(\alpha + 1) x$ erhielte, was mit obi-

ger Gleichung im Widerspruch stünde. In der zu entwickelnden Reihe können nur ungerade Potenzen von x erscheinen, weil mit dem Zeichenwechsel von x auch $\sin x$ das entgegengesezte Zeichen erhalten muss, denn es ist $\sin(-x) = -\sin x$, daher sei:

$$\sin x = x + C_3 x^3 + C_5 x^5 + C_7 x^7 + \ldots$$

in welcher Reihe nicht Sinnwidriges liegt.

Um nun die Reihe für den Kosinus zu erhalten, bedenkt man, dass sich $\cos x$ mit dem Immerkleinerwerden von x stets mehr der Einheit nähert, und dass wegen $\cos(-x) = \cos(+x)$ der aufzustellende Ausdruck unverändert bleiben muss, wenn auch x das Zeichen ändert, was nur bei geraden Potenzen der Fall ist, daher also:

$$\cos x = 1 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + C_6 x^6 + \ldots.$$

Um nun die Koeffizienten beider Reihen zu bestimmen, wird man die beiden Grundgleichungen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

in Anwendung bringen und hat:

$$\cos^2 x = 1 + 2C_2 x^2 + \left.\begin{matrix} 2C_4 \\ + C_2^2 \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 2C_6 \\ + 2C_2 C_4 \end{matrix}\right\} x^6 + \left.\begin{matrix} 2C_8 \\ + 2C_2 C_6 \\ + C_4^2 \end{matrix}\right\} x^8 + \ldots. \quad (1)$$

$$\sin^2 x = x^2 + 2C_3 x^4 + \left.\begin{matrix} 2C_5 \\ + C_3^2 \end{matrix}\right\} x^6 + \left.\begin{matrix} 2C_7 \\ + 2C_3 C_7 \end{matrix}\right\} x^8 + \left.\begin{matrix} 2C_9 \\ + 2C_3 C_7 \\ + C_5^2 \end{matrix}\right\} x^{10} + \ldots. \quad (2)$$

$$\cos 2x = 1 + 4C_2 x^2 + 16 C_4 x^4 + 64 C_6 x^6 + 256 C_8 x^8 + \ldots. \quad (3)$$

Durch unmittelbare Addizion und Subtrakzion der beiden Reihen (1) und (2) und bezüglich Gleichstellung mit (3) folgt also:

$$\left.\begin{matrix} 1 + 2C_2 \\ + 1 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2C_4 \\ + C_2^2 \\ + 2C_3 \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 2C_6 \\ + 2C_2 C_4 \\ + 2C_5 \\ + C_3^2 \end{matrix}\right\} x^6 + \left.\begin{matrix} 2C_8 \\ + 2C_2 C_6 \\ + C_4^2 \\ + 2C_7 \\ + 2C_3 C_5 \end{matrix}\right\} x^8 + \ldots. = 1$$

ferner

$$\left.\begin{matrix} 1 + 2C_2 \\ - 1 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2C_4 \\ + C_2^2 \\ - 2C_3 \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 2C_6 \\ + 2C_2 C_4 \\ - 2C_5 \\ - C_3^2 \end{matrix}\right\} x^6 + \left.\begin{matrix} 2C_8 \\ + 2C_3 C_6 \\ + C_4^2 \\ - 2C_7 \\ - 2C_3 C_5 \end{matrix}\right\} x^8 + \ldots. =$$

$$= 1 + 4C_2 x^2 + 16 C_4 x^4 + 64 C_6 x^6 + 256 C_8 x^8 + \ldots.$$

Diese Ausdrücke müssen aber für jeden Werth von x, daher auch für $x = 0$ identisch sein und man hat:

$$2\,C_2 + 1 = 0$$
$$2\,C_4 + 2\,C_3 + C_2^2 = 0$$
$$2\,C_6 + 2\,C_5 + 2\,C_2\,C_4 + C_3^2 = 0$$
$$2\,C_8 + 2\,C_7 + 2\,C_2\,C_6 + 2\,C_3\,C_5 + C_4^2 = 0 \quad \text{u. s. f.}$$

Aus dem zweiten Ausdrucke erhält man, wenn man die Koeffizienten derjenigen Glieder, welche gleiche Potenzen der Veränderlichen enthalten, einander gleich sezt:

$$2\,C_2 - 1 = 4\,C_2$$
$$2\,C_4 - 2\,C_3 + C_2^2 = 16\,C_4$$
$$2\,C_6 - 2\,C_5 + 2\,C_2\,C_4 - C_3^2 = 64\,C_6$$
$$2\,C_8 - 2\,C_7 + 2\,C_2\,C_6 - 2\,C_3\,C_5 + C_4^2 = 256\,C_8 \quad \text{u. s. f.}$$

Löset man nun diese Bedingungsgleichungen auf, so erhält man

$$C_2 = -\frac{1}{2}$$
$$C_3 = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{1.2.3}$$
$$C_4 = \frac{1}{24} = \frac{1}{1.2.3.4}$$
$$C_5 = \frac{1}{120} = \frac{1}{1.2.3.4.5}$$
$$C_6 = -\frac{1}{720} = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6} \quad \text{u. s. f.}$$

Wenn man diese entwickelten Koeffizienten in die angenommenen Reihen substituirt, so erhält man endlich:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

zwei zur Rechnung sehr bequeme Reihen.

§. 22.

Um auf ganz elementare Weise die Sinusse und Kosinusse zu berechnen, konstruire man sich ein gleichseitiges Dreieck und seze jede Seite gleich der Einheit. Es wird also der Sinus eines dieser Winkel, das ist $\sin \frac{180^0}{3} = \sin 60^0$ die Verbindungslinie eines Scheitels mit dem Halbirungspunkte der gegenüberliegenden Seite und der

Kosinus die Hälfte der einen auf diese Weise gehälfteten Dreiecksseite sein. Man hat daher nach dem bekannten Saze des Pythagoras:

$$\sin 60^0 = \sqrt{1 - \cos^2 60^0} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Werden nun sowohl Sinus als Kosinus des halben Winkels durch die Funkzionen des Ganzen ausgedrückt, so ist:

$$\sin 30^0 = \sqrt{\frac{1 - \cos 60^0}{2}} = \frac{1}{2} \text{ und}$$

$$\cos 30^0 = \sqrt{\frac{1 + \cos 60^0}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Berechnet man sich sofort stets die Sinusse und Kosinusse des halben Winkels der eben stets berechneten Funkzionen, so gelangt man nach kurzer Rechnung zu den Sinussen und Kosinussen von $\frac{15^0}{16}$. Vergleicht man nebenbei den Sinus des halben Winkels und den entsprechenden halben Sinus des ganzen Winkels, findet man, dass bei dem Immerkleinerwerden der Winkel sich diese Funkzionen immer näher kommen und die Sinusse aliquoter Theile der Winkel zu den zugehörigen aliquoten Sinussen der ganzen Winkel stets mehr proporzionirt werden, obschon diese Proporzionalität niemals vollkommen erreicht werden kann; denn es ist:

$$\sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2},$$

ferner muss jedenfalls $\cos\frac{x}{2} < 1$ sein, mag auch x dem Null noch so nahe kommen, daher findet man durch Substituzion dieser Ungleichung in die vorhin angeführte Gleichung für $\sin x$ und gleichzeitige Division durch $2 \sin\frac{x}{2}$ den Ausdruck $\frac{\sin x}{2 \sin\frac{x}{2}} < 1$, das heisst:

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x} > \frac{1}{2},$$

nämlich: wenn auch für sehr kleine Winkel bezüglich der Sinusse derselben sehr nahe dasselbe Verhältniss Statt hat, wird das Verhältniss der Sinusse doch stets grösser sein, als das ihrer zugehörigen Winkel.

Vermöge der früher besprochenen Proporzionalität wird sich $\sin\frac{1^0}{16}$ noch sehr gut durch $\frac{1}{15} \cdot \sin\frac{15^0}{16}$ ausdrücken lassen, während

doch $sin\,\frac{1^0}{16} > \frac{1}{15}.\,sin\,\frac{15^0}{16}$. Ferner ist zuverlässig das einem Winkel entsprechende Bogenstück grösser, als der zugehörige Sinus, daher auch

$$sin\,\frac{1^0}{16} < arc\,\frac{1^0}{16}.$$

Nun aber ist $arc\,1^0 = \frac{2\pi}{360} = 0{\cdot}01745329$ und $arc\,\frac{1^0}{16} = \frac{arc\,1^0}{16} = 0{\cdot}00109083$; ferner findet man durch Rechnung $\frac{1}{15}.\,sin\,\frac{15^0}{16} = 0{\cdot}00109078$.

Das arithmetische Mittel der durch $arc\,\frac{1^0}{16}$ zu gross und durch $\frac{1}{15}.\,sin\,\frac{15^0}{16}$ zu klein ausgedrückten Werthe für $sin\,\frac{1^0}{16}$ gibt den wahren Werth:

$$sin\,\frac{1^0}{16} = 0{\cdot}0010908.$$

Aus $sin\,\frac{1^0}{16}$ berechnet man leicht $cos\,\frac{1^0}{16} = 0{\cdot}9999994$ und findet endlich durch Anwendung der für $sin\,(\alpha + \beta)$ und $cos\,(\alpha + \beta)$ gegebenen Formeln:

$$sin\,1^0 = sin\left(\frac{15}{16} + \frac{1}{16}\right)^0 = 0{\cdot}0174524 \quad \text{und}$$

$$cos\,1^0 = cos\left(\frac{15}{16} + \frac{1}{16}\right)^0 = 0{\cdot}9998477.$$

Mittelst der Formel:

$$sin\,(\alpha + \beta) = 2\,\sin\alpha\,cos\,\beta - sin\,(\alpha - \beta),$$
$$cos\,(\alpha + \beta) = 2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,(\alpha - \beta),$$

welche man aus den für $sin\,(\alpha \pm \beta)$ und $cos\,(\alpha \pm \beta)$ bekannten Formeln durch wechselweise Addizion etc. erhält, findet man für die Substituzion

$$\alpha = n + 1$$
$$\beta = 1$$
$$cos\,1^0 = 0{\cdot}9998477$$

folgende Formeln:

$$sin\,(n + 2) = 1{\cdot}9996954\,sin\,(n + 1) - sin\,n$$
$$cos\,(n + 2) = 1{\cdot}9996954\,cos\,(n + 1) - cos\,n,$$

durch welche man für $n = o, 1, 2, 3, \ldots$ die Sinusse und Kosinusse von $2^0, 3^0, 4^0, 5^0, \ldots$ erhält.

§. 23.

Bevor wir zur Auflösung der Dreiecke übergehen, ist es nothwendig, weil mit Beispielen verbunden, Einiges über den Gebrauch der trigonometrischen Logarithmentafeln vorzutragen. Jede Funkzion spielt bekanntlich eine doppelte Rolle, weshalb die trigonometrischen Tafeln nur unmittelbar bis 45 Grad sich erstrecken. Die auf jeder Vertikalspalte oben vorkommenden Ueberschriften sind unten gewechselt; allein auch die lezte Vertikalspalte, in welcher abermals Grade vorkommen, fängt rückwärts mit 45 Grad an, steigt fortwährend gegen vorwärts und endet mit 90 Grad. Weil aber jede Funkzion die Kofunkzion des komplementären, des Ergänzungswinkels zu 90 Grad ist, ist auch $sin\ (45 + \alpha) = cos\ (45 - \alpha)$ und $tang\ (45 + \alpha) = cotg\ (45 - \alpha)$ und daher gelten derlei Tafeln für diese vier Funkzionen in allen Winkeln von 0 bis 90 Grad.

Die trigonometrischen Logarithmentafeln enthalten gewöhnlich ausser den beiden die Grenze bildenden Vertikalspalten, in welchen die Grösse der Winkel ersehen wird und jenen Spalten, welche mit **sinus, cosinus, tangens** und **cotangens** überschrieben sind, noch drei andere Spalten, welche meistens mit **Differenz** bezeichnet sind. Von diesen Spalten hat sowohl der Sinus als der Kosinus, jeder seine eigenen Unterschiede; die Tangente und Kotangente hingegen haben nur Eine gemeinschaftliche Spalte für die Differenzen, weil ihre Werthe reziprok sind, somit ihre Logarithmen sich dekadisch ergänzen. In dieser Hinsicht stimmen die trigonometrischen Logarithmentafeln miteinander vollkommen überein; nicht so bezüglich der Angabe der Differenzen selbst, da diese in einigen Tafeln so angegeben sind, wie man sie durch Subtrakzion von je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Logarithmen gleicher Art findet, während in anderen Tafeln die Differenz für die Sekundeneinheit zwischen je zwei aufeinander folgenden Logarithmen gleicher Art direkt gefunden wird.

Es seien A und B zwei unmittelbar aufeinander folgende Logarithmen in der Tafel, so wäre $A - B = \delta$ die Differenz für eine so grosse Sekundenzahl, als die Tafel zwischen A und B fortschreitet. Würde also die Tafel um s Sekunden zunehmen, so wäre $\frac{\delta}{s}$ die Differenz für die Sekundeneinheit zwischen den Logarithmen A und B.

Um nun einen trigonom. Logarithmus aus den Tafeln zu entnehmen, sucht man den Winkel entweder in der ersten oder in der lezten Spalte, — wovon sich die erste Spalte auf die oben angesezten Ueberschriften und die lezte Spalte auf die unten gewechselten Bezeichnungen bezieht. Ueberdiess wird der Logarithmus in jener Horizontalzeile aufgesucht, in welcher der exponirte Winkel entweder ebenso gross oder der nächst grösste zu jenem Winkel ist, zu welchem der trigonom. Logarithmus gesucht wird. Besteht nun eine Differenz zwischen diesen Winkeln in σ Sekunden, so hat man

$$\frac{d}{s} \cdot \sigma$$

eine Grösse *), welche $\pm$ zu dem in der Tafel gefundenen Logarithmus addirt wird, je nachdem der aufgesuchte Logarithmus einer Funkzion oder einer Kofunkzion angehört; was aus der Natur der Funkzion und daher der Tafel selbst hervorgeht, nachdem die Logarithmen der Funkzionen beständig wachsen und im Gegentheile jene der Kofunkzionen beständig abnehmen.

Beispiele.

1. Es soll *log . sin* $28^0\,31'\,23''{\cdot}2$ aufgefunden werden.

In Vega's Tafeln findet man in der Spalte (oben) **log sinus** für $28^0\,31'$ den Logarithmus 9·6788955 als für den nächst grössten Winkel, der in der Tafel verzeichnet ist. Die Differenz zwischen jenen beiden Winkeln, von denen der erste ($28^0 31'$) zu klein und der zweite ($28^0 32'$) zu gross ist, beträgt für die Sekundeneinheit, das ist für eine Sekunde 38·74, daher für 23·2 Sekunden

$$38{\cdot}74 \times 23{\cdot}2 = 899 \text{ nicht ganz,}$$

aber doch eher als 898. Da nun der zu suchende Logarithmus einer **Funkzion** (Sinus) angehört, hat man endlich durch **Addizion:**

$$log\ sin\ 28^0 31' 23''{\cdot}2 = 9{\cdot}6788955 + 0{\cdot}0000899 = 9{\cdot}6789854.$$

2. Es soll *log . sin* $118^0 31' 23''{\cdot}2$ gefunden werden. Nachdem, wie bekannt, die Tafeln nur bis 90^0 gehen, so wird man sich zur Auffindung dieses Logarithmus einer der beiden Formeln

$$sin\,(180 - \alpha) = sin\,\alpha$$

oder

$$sin\,(90 + \alpha) = cos\,\alpha$$

---

*) Die Einheiten dieser Grösse sind Einheiten der siebenten Dezimalstelle, wie aus der Natur der Sache leicht zu ersehen ist.

bedienen, weil der Winkel, dessen trigonometrischen Logarithmus man sucht, im zweiten Quadranten, das ist zwischen 90 und 180 Graden liegt, so dass man hat:

$$log\ sin\ 118^0 31' 23''\cdot 2 = log\ .\ sin\ 61^0 28' 36''\cdot 8 =$$
$$= log\ .\ cos\ 28^0 31' 23''\cdot 2.$$

Für den ersten Fall wird der Winkel von $61^0 28'$ in der lezten Spalte gefunden, daher hier die unten gewechselten Bezeichnungen zu gelten haben. Man findet in den Tafeln $log\ sin\ 61^0 28' = 9\cdot 9437612$ und als Differenz zwischen dem nächst grösseren und nächst kleineren Winkel 11·44, daher $36\cdot 8 \times 11\cdot 44 = 421$ additiv, daher

$$log\ .\ sin\ 61^0 28' 36\cdot 8 = 9\cdot 9438033.$$

3. Es soll $log\ cotg\ 53^0 7' 48''\cdot 43$ angegeben werden.

Auch der Winkel $53^0 7'$ ist in der lezten Spalte enthalten, daher die unteren Bezeichnungen gelten.

Man findet

$$log\ .\ cotg\ .\ 53^0 7' = 9\cdot 8752734$$

und hat ferner als Differenz für die Sekundeneinheit zwischen dem nächst grösseren und nächst kleineren Winkel 43·86, daher $43\cdot 86 \times 48\cdot 43 = 2124$ als **abzuziehende** Einheiten an der siebenten Dezimalstelle, weil man es mit einer **Konfunkzion** zu thun hat, welche mit dem Wachsen des Winkels stets kleiner wird.

Es ist also $log\ .\ cotg\ .\ 53^0 7' 48''\cdot 43 = 9\cdot 8750610.$

Wir halten es nunmehr für gänzlich überflüssig, über das Aufsuchen eines Winkels, wenn der Logarithmus der Funkzion gegeben ist, noch nähere Erörterungen zu machen, da hier natürlich nur die verkehrte Operazion Statt haben kann.

Beispiele.

1. Es sei 9·9566950 ein gegebener Logarithmus *sinus*. Man bestimme den entsprechenden Winkel. Nachdem nun dieser Logarithmus in der zweiten Spalte, welche **unten** mit *log sinus* bezeichnet ist, gefunden wird, wird der entsprechende Winkel in der lezten Grenzspalte abgelesen. Der in der Tafel befindliche nächst kleinere Logarithmus ist 9·9566844, welchem der Winkel $64^0 50'$ entspricht.

Der Unterschied der beiden Logarithmen beträgt 106, welcher durch die in den Tafeln befindliche Differenz 9·89 dividirt wird, um $10''\cdot 72$ jene Sekundenzahl zu finden, welche, weil eine Funkzion, zu

dem bereits abgelesenen Winkel nur addirt wird, um der Aufgabe zu genügen. Es ist demnach $9{\cdot}9566950 = log\ sin\ 64^0 50' 10{\cdot}''72$.

2. Es sei zu 9·9793306, als gegebenen Logarithmus *cosinus* der entsprechende Winkel anzugeben. Der diesem nächst grösste Logarithmus wird in der *oben* mit *log cos* überschriebenen Spalte gefunden und zwar $9{\cdot}9792998 = log\ cos\ 17^0 33'$. Es ist daher die Differenz zwischen den beiden Logarithmen 308, welche durch die in den Tafeln angegebene Differenz *per* 1 Sekunde 6·66 dividirt wird, um jene Grösse in Sekunden zu erhalten, welche, weil eine Kofunkzion, von obigem Winkel abgezogen wird. Man hat $308 : 6{\cdot}66 = 46''{\cdot}25$ daher die Grösse des Winkels $17^0 33' - 46''{\cdot}25 = 17^0 32' 13''{\cdot}75$.

3. Es sei 9·8781688 ein gegebener Logarithmus Sinus. In den Tafeln findet man $log\ sin\ 49^0 3' = 9{\cdot}8781090$ und die hiezu gehörige Differenz für 1 Sekunde 18·27. Man hat daher, wenn man blos die lezten Stellen berücksichtiget,

$$\frac{1688 - 1090}{18{\cdot}27} = \frac{598}{18{\cdot}27} = 32''{\cdot}73, \text{ daher}$$

$$9{\cdot}8781688 = log\ sin\ 49^0 3' 32''{\cdot}73.$$

Wäre nun das Erforderniss irgend einer Aufgabe so, dass der Winkel nicht im ersten, sondern im zweiten Quadranten liegt, so hätte man wegen:

$$sin\ (180 - \alpha) = sin\ \alpha$$

den gesuchten Winkel:

$$180^0 - 49^0 3' 32''{\cdot}73 = 130^0 56' 27''{\cdot}27.$$

§. 24.

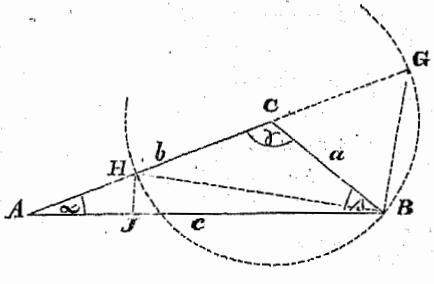
Ein **Dreieck auflösen,** heisst: aus den zur Bestimmung desselben erforderlichen bekannten Stücken, die übrigen durch Rechnung finden. Man unterscheidet Dreiecke auf einer ebenen Fläche: **ebene Dreiecke** und solche Dreiecke, welche auf einer krummen Fläche vorkommen, von denen wir in dem Nachfolgenden jene betrachten wollen, welche auf der Kugeloberfläche erscheinen; diese Dreiecke nennt man **sphärische Dreiecke.**

In jedem Dreiecke unterscheidet man drei Winkel und drei Seiten oder Bogen. Dass die drei Winkel eines jeden ebenen (geradlinigten) Dreieckes zusammen stets 180 Grade betragen müssen, erhellt, wenn man sich eine Seite des Dreieckes verlängert, in welchem Falle dann jener Winkel, von dessen Scheitel aus die Verlängerung

Statt hatte, mit dem nun entstandenen äusseren Winkel, der sich selbst durch das Führen einer Parallelen aus diesem Scheitel zu der diesem Winkel gegenüberliegenden Seite in die beiden anderen Winkel des Dreieckes zerlegen lässt, einen geraden Winkel, das ist 180 Grade bildet. Sehr häufig kommen bei Dreiecken **Einzelnfälle** vor, welche nur diesen, also nicht allen Dreiecken zukommen; es können nämlich alle drei Seiten einander gleich sein, wo dann auch alle drei Winkel einander gleich sein müssen und jeder derselben $\frac{3}{180} = 60$ Grade beträgt, man nennt ein solches Dreieck **gleichseitig**; oder es können zwei Seiten, folglich auch die diesen Seiten gegenüberliegenden (zwei) Winkel einander gleich sein, wo dann das Dreieck **gleichschenkelig** heisst; oder es kann ein Winkel 90 Grad, der grösste Winkel dieses Dreieckes sein, wo also, wie bekannt, die diesem Winkel gegenüberliegende Seite die grösste aller Seiten ist, welche Hypothenuse heisst, während die beiden anderen Seiten auf einander senkrecht stehen, die man Katheten nennt, ein solches Dreieck heisst **rechtwinklich**. Auch bei sphärischen Dreiecken kommen analoge spezielle Fälle vor.

§. 25.

Wir wollen nun mit der **Auflösung der schiefwinklichten ebenen Dreiecke** beginnen und aus diesen allgemeinen Fällen jene für das rechtwinklichte Dreieck schöpfen.



Es seien

$$\left.\begin{aligned} BC &= a \\ AC &= b \\ AB &= c \end{aligned}\right\} \text{die Seiten}$$

und

$$\left.\begin{aligned} CAB &= \alpha \\ ABC &= \beta \\ ACB &= \gamma \end{aligned}\right\} \text{die Winkel}$$

eines schiefwinklichten ebenen Dreiecks, so hat man zur Auflösung folgende Fälle:

Es kann gegeben sein:

1) a, b, c
2) a, b, γ

oder a, b, β, wo $a < b$

3) a, β, γ

4) a, α, β

in welchen Fällen das Dreieck stets vollkommen bestimmt ist, daher die fehlenden Stücke gefunden werden können.

§. 26.

1. Gegeben: **Alle drei Seiten:** a, b, c.

Aus dem **Carnot**'schen Saze folgt unmittelbar:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}.$$

Um nun diese Formeln für die logarithmische Rechnung geeignet herzustellen, gibt man zur Gleichung

$$1 = 1$$

den Ausdruck für $\cos \alpha$ u. d. Uebrige Einmal mit positivem; das andere Mal mit negativem Zeichen und erhält:

$$1 + \cos \alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$1 - \cos \alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,b\,c}$$

u. s. f., und findet in Betracht, dass

$$\frac{1 + \cos \alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{ und } \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

die Gleichungen:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(a + b + c)\,(b + c - a)}{4\,b\,c}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(a - b + c)\,(a + b - c)}{4\,b\,c}.$$

Bezeichnet man

$$\frac{a + b + c}{2} = s,$$

so hat man, wegen

$$a + b + c = 2\,s$$

$$b + c - a = a + b + c - 2\,a = 2\,s - 2\,a = 2\,(s - a)$$

$$a + c - b = a + b + c - 2\,b = 2\,s - 2\,b = 2\,(s - b)$$

$$a + b - c = a + b + c - 2\,c = 2\,s - 2\,c = 2\,(s - c).$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

und

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

und endlich:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

und

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man auch für die beiden anderen Winkel, nämlich:

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

und

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Dieser Fall lässt auch folgende Auflösung zu:

Es ist:

$$\cos^2 \alpha = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$$

Wird nun dieser Ausdruck von der Gleichung

$$1 = 1$$

abgezogen, so erhält man:

$$1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2},$$

daher

$$\sin^2 \alpha = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2},$$

weshalb

$$\begin{aligned} 4b^2c^2 \sin^2 \alpha &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] \\ &= (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b). \end{aligned}$$

Führt man nun, wie vorhin die Bezeichnung

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

ein, so erhält man durch Substituzion:

$$4\,b^2c^2\,sin^2\,\alpha = 2\,s.2\,(s-a).2\,(s-b).2\,(s-c)$$
$$= 4.4\,s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)$$

daher endlich

$$sin\,\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Die analogen Ausdrücke für die beiden anderen Winkel mögen unsere Leser finden.

Bekanntlich ist der Flächeninhalt eines jeden Dreieckes gleich der Grundlinie, multiplizirt mit der halben Höhe, daher nach Figur im §. 7, Seite 6

$$\Delta = \frac{ch}{2}.$$

Nun ist aber

$$h = b\,sin\,\alpha,$$

daher

$$\Delta = \frac{bc}{2}.\,sin\,\alpha,$$

das heisst: **der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte zweier Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels.**

Führt man statt des Sinus die Seiten ein, wodurch diesem Falle der Auflösung der Dreiecke Genüge geschieht, so hat man:

$$\Delta = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Beispiel.

$$\text{Gegeben}\begin{cases} a = 56 \\ b = 88{\cdot}2 \\ c = 96 \end{cases}$$

Man hat $a + b + c = 240{\cdot}2,$

daher

$$s = \frac{a+b+c}{2} = 120{\cdot}1.$$

somit

$$s - a = 64{\cdot}1$$
$$s - b = 31{\cdot}9$$
$$s - c = 24{\cdot}1$$

Man hat also nach der ersten Formel:

$$sin\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{31{\cdot}9\times 24{\cdot}1}{88{\cdot}2\times 96}}\text{ und }cos\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{120{\cdot}1\times 64{\cdot}1}{88{\cdot}2\times 96}}$$

Daher für den

Sinus		*Kosinus*	
log. 31·9	= 1·5037907	*log.* 120·1	= 2·0795430
log. 24·1	= 1·3820170	*log.* 64·1	= 1·8068580
log. Zähler	= 2·8858077	*log.* Zähler	= 3·8864010
log. 88·2	= 1·9454686	*log.* 88·2 × 96	= 3·9277398
log. 96	= 1·9822712	*log. Bruch*	= 9·9586612
log. Bruch	= 8·9580679	*log. Wurzel*	= 9·9793306.
log. Wurzel	= 9·4790339		

Wir halten es wohl mit Recht für überflüssig, Mehrfaches über die vorstehende Rechnung zu erörtern, da wir die Rechnung mit Logarithmen bei demjenigen, der Trigonometrie studirt, nothwendig voraussezen müssen; allein Einen Punkt können wir, obschon er höchst einfach ist, doch nicht übergehen, weil wir leider schon wahrgenommen haben, dass nachfolgender Punkt Einigen Schwierigkeiten verursachte. In obigem Beispiele wird vom log. Zähler eine Summe abgezogen, welche anscheinend grösser ist, als der log. Zähler, ebenso ist auch der entstandene Unterschied anscheinend grösser als Minuend und Subtrahend. Es ist klar, dass eine solche Ungereimtheit nur scheinbar ist; welches wir in Nachfolgenden aufklären wollen.

Wie wir aus den Betrachtungen über das Wachsen des Sinus und Kosinus im ersten Quadranten wissen, liegen die Grössen dieser beiden Funkzionen zwischen Null und der Einheit; es müssen daher die trigonometrischen Logarithmen lauter negative Karakteristiken haben, daher die Tafeln der trigonometrischen Logarithmen so eingerichtet sind, dass durchgängig die negativen Karakteristiken — 10 verstanden werden. So ist z. B. *log. sin* 28° 31′ 23·2″ = 9·6789854 — 10, u. s. w. Hievon in Kenntniss, wird man daher bei trigonometrischen Rechnungen, welche mittelst Logarithmen ausgeführt werden, stets bestrebt sein, solche Summen und Unterschiede zu erhalten, die die Karakteristik — 10 haben; man sich wird daher auch den log. Zähler in folgender gleichbedeutender Form

$$12{\cdot}8858077 - 10$$

denken und erhält also den Unterschied

$$8{\cdot}9580679 - 10;$$

dieser Logarithmus ist aber *log. sin*$^2 \frac{\alpha}{2}$ und muss, um den *log. sin* $\frac{\alpha}{2}$

zu erhalten, durch 2 dividirt werden. Auch bei dieser Operazion wird man bedenken, einen Quozienten mit der Karakteristik — 10 zu erhalten und daher zum Behufe der Operazion in Gedanken die gleichbedeutende Grösse

$$18{\cdot}9580679 - 20$$

behandeln, welche durch 2 dividirt,

$$9{\cdot}4790339 - 10$$

gibt, wozu man auf die bereits bekannte Weise aus den Tafeln den entsprechenden Winkel findet.

Nachdem aber das fortwährende Anschreiben der negativen Karakteristiken lästig ist, so wird es unterlassen. Wir rathen jedoch dem Anfänger sehr, diese Karakteristiken einige Zeit hindurch in den Rechnungen mitzuführen und dieselben erst dann aufzulassen, bis die vollkommene Einsicht in diesem Gegenstande erzielt ist.

Sucht man nun die entsprechenden Winkel, so hat man für den Sinus:

$$\begin{array}{l} 9{\cdot}4790339 \\ \underline{9{\cdot}4789423} = \log.\sin 17^0\,32' \\ \qquad 916 : 66{\cdot}62 = 13''{\cdot}75 \text{ mit dem Zeichen } + \\ \qquad 249{\cdot}8 \\ \qquad\quad 49{\cdot}9 \\ \qquad\quad\;\; 3{\cdot}3 \end{array}$$

daher $\frac{\alpha}{2} = 17^0\,32'\,13''{\cdot}75$

und für den Kosinus:

$$\begin{array}{l} 9{\cdot}9793306 \\ \underline{9{\cdot}9792998} = \log.\cos 17^0\,33' \\ \qquad 308 : 6{\cdot}66 = 46''{\cdot}25 \text{ mit dem Zeichen } - \\ \qquad 41{\cdot}6 \\ \qquad\quad 1{\cdot}6 \\ \qquad\quad\;\; {\cdot}3 \end{array}$$

daher $\frac{\alpha}{2} = 17^0\,33' - 46''{\cdot}25 = 17^0\,32'\,13''{\cdot}75$

ganz dieselben Resultate.

Verdoppelt man endlich den gefundenen Winkel, so hat man:

$$\alpha = 35^0\,4'\,27''{\cdot}50.$$

Um diesen Winkel nach der zweiten Formel zu berechnen, hat man:

$$
\begin{aligned}
\log.\ 120{\cdot}1 &= 2{\cdot}0795430\\
\log.\ 64{\cdot}1 &= 1{\cdot}8068580\\
\log.\ 31{\cdot}9 &= 1{\cdot}5037907\\
\log.\ 24{\cdot}1 &= 1{\cdot}3820170\\
&\overline{6{\cdot}7722087}\\
\log.\ \text{Wurzel} &= 3{\cdot}38610435\\
\log.\ 2 &= 0{\cdot}3010300\\
&= 3{\cdot}68713435\\
\log.\ 88{\cdot}2 &= 1{\cdot}9454686\\
\log.\ 96 &= 1{\cdot}9822712\\
\log.\ \sin\alpha &= 9{\cdot}75939455\\
&\ 9{\cdot}7593121 = \log.\ \sin 35^0 4'\\
&\ \overline{824{\cdot}5} : 29{\cdot}99 = 27''{\cdot}50\\
&\ 224{\cdot}7\\
&\ \ 14{\cdot}8.
\end{aligned}
$$

Es ist daher

$$\alpha = 36^0\,4'\,27''{\cdot}50.$$

Um nun auch die beiden anderen Winkel zu berechnen, hätte man nach der ersten Formel

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{64{\cdot}1 \times 24{\cdot}1}{56 \times 96}} \text{ und } \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{120{\cdot}1 \times 24{\cdot}1}{56 \times 88{\cdot}2}}$$

und daher für den

Sinus

$$
\begin{aligned}
\log.\ 64{\cdot}1 &= 1{\cdot}8068580\\
\log.\ 24{\cdot}1 &= 1{\cdot}3820170\\
&\overline{3{\cdot}1888750}\\
\log.\ 56 &= 1{\cdot}7481880\\
\log.\ 96 &= 1{\cdot}9822712\\
&\overline{9{\cdot}4584158}\\
\log.\ \sin\frac{\beta}{2} &= 9{\cdot}7292079,\ 32^0\,24'\\
&\ \ 0244\\
&\ \overline{1835} : 33{\cdot}17 = 55''{\cdot}32\\
&\ 176{\cdot}5\\
&\ \ 10{\cdot}6\\
&\ \ \ \ {\cdot}7
\end{aligned}
$$

Kosinus

$$\log.\ 120{\cdot}1 = 2{\cdot}0795430$$
$$\log.\ 31{\cdot}9 = 1{\cdot}5037907$$
$$3{\cdot}5833337$$
$$\log.\ 56 \times 96 = 3{\cdot}7304592$$
$$9{\cdot}8528745$$
$$\log.\ \cos\frac{\beta}{2} = 9{\cdot}92643725,\ 32^0\ 25'$$
$$4310$$
$$62{\cdot}5 : 13{\cdot}37 = 4''68$$
$$9{\cdot}0$$
$$1{\cdot}0$$

daher

$$\frac{\beta}{2} = 32^0\,24'\,55''{\cdot}32;$$

es ist also $\beta = 64^0\,49'\,50''{\cdot}64$.

Endlich hat man zur Berechnung des dritten Winkels:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{64{\cdot}1 \times 31{\cdot}9}{56 \times 88{\cdot}2}} \text{ und } \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{120{\cdot}1 \times 24{\cdot}1}{56 \times 88{\cdot}2}}$$

daher für den

Sinus

$$\log.\ 64{\cdot}1 = 1{\cdot}8068580$$
$$\log.\ 31{\cdot}9 = 1{\cdot}5037907$$
$$3{\cdot}3106487$$
$$\log.\ 56 = 1{\cdot}7481880$$
$$\log.\ 88{\cdot}2 = 1{\cdot}9454686$$
$$9{\cdot}6169921$$
$$\log.\ \sin\frac{\gamma}{2} = 9{\cdot}80849605,\ 40^0\,2'$$
$$3684$$
$$1276{\cdot}5 : 25{\cdot}06 = 50''{\cdot}94$$
$$23{\cdot}5$$
$$1{\cdot}0$$

Kosinus

$$\log.\ 120{\cdot}1 = 2{\cdot}0795430$$
$$\log.\ 24{\cdot}1 = 1{\cdot}3820170$$
$$3{\cdot}4615600$$
$$\log.\ 56 \times 88{\cdot}2 = 3{\cdot}6936566$$
$$9{\cdot}7679034$$

$$log.\ cos\frac{\beta}{2} = 9{\cdot}8839517,\ 40^0\,3'$$

$$\frac{357}{160} : 17{\cdot}69 = 9{\cdot}''05$$

$$0{\cdot}8$$

daher $$\frac{\gamma}{2} = 40^0\,2'\,50''{\cdot}94;$$

es ist also $\gamma = 80^0\,5'\,41''{\cdot}88$.

Summirt man nun diese drei gefundenen Winkel, so findet man ihre Summe um $0''{\cdot}02$ grösser, als 180 Grad, was nicht sein soll und seine Ursache in den Logarithmentafeln findet.

Um den Flächeninhalt des Dreieckes zu finden, hat man blos die entsprechende Zahl zu jenem Wurzel-Logarithmus aufzusuchen, welcher bereits bei der Berechnung des Winkels α nach der zweiten Formel (Seite 35) enthalten ist. Man hat $3{\cdot}3861043 = log.\,2432{\cdot}7886$, daher also $\Delta = 2432{\cdot}7886$ im Quadratmasse.

Nebenbei sei erwähnt, dass die Berechnung der drei Winkel aus den drei Seiten wohl am Kürzesten nach der zweiten Methode geschieht, da man nach derselben blos die doppelte Dreiecksfläche durch das Produckt von je zwei Seiten zu dividiren braucht, um den Sinus des von diesen zwei Seiten eingeschlossenen Winkels zu finden; anderseits aber hat die erste Methode den Vorzug der Kontrolle.

§. 27.

2. Gegeben: **zwei Seiten und Ein Winkel.**

a. Gegeben: **zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel** a, b, γ.

Wird b über C hinaus bis G verlängert, dass $CG = a$; ebenso werde das Stück von C auf b die Linie $CH = a$; endlich verbinde man B mit G und konstruire HJ parallel zu BG, so hat man:

$$AG = b + a$$

$$AH = b - a,$$

ferner

$$\frac{AG}{AH} = \frac{BG}{HJ},$$

endlich

$$BG = BH.\,tang\ CHB$$

$$HJ = BH.\,tang\ HBJ$$

oder es ist

$$\frac{BG}{HJ} = \frac{tang\ CHB}{tang\ HBJ}.$$

Da nun $BC = CH$,

ist $$CBH = CHB$$

und in Betracht der Dreiecke ACB und HCB:

$$(HBJ + CBH) + (180 - 2 \,.\, CBH) + \alpha = 180^0,$$

das heisst:

$$\left.\begin{array}{l} CBH - HBJ = \alpha \\ CBH + HBJ = \beta \end{array}\right\}$$

Es ist auch

somit
$$\left\{\begin{array}{l} CBH = \dfrac{\beta + \alpha}{2} \\ HBJ = \dfrac{\beta - \alpha}{2} \end{array}\right.$$

Durch Substituzion dieser Werthe in obige Proporzionen erhält man:

$$\frac{b + a}{b - a} = \frac{tang\,\dfrac{\beta + \alpha}{2}}{tang\,\dfrac{\beta - \alpha}{2}}$$

und wegen $\alpha + \beta = 180 - \gamma$ zur Bestimmung der beiden anderen Winkel:

$$\frac{b + a}{b - a} = \frac{tang\left(90 - \dfrac{\gamma}{2}\right)}{tang\,\dfrac{\beta - \alpha}{2}},$$

den **Fink**'schen Saz.

Es ist sodann:

$$\frac{\beta + \alpha}{2} - \frac{\beta - \alpha}{2} = \alpha$$

und
$$\frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} = \beta.$$

Wollte man sich aber auf andere bereits entwickelte Säze beziehen, so lässt dieser Lehrsaz noch folgende Auflösung zu. Es ist

$$\frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{b}{sin\,\beta}, \text{ daher } \frac{a}{b} = \frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta}$$

und daher auch

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{sin\,\alpha + sin\,\beta}{sin\,\alpha - sin\,\beta}.$$

Aus dem Vorhergehenden (§, 12) ist jedoch bekanntlich:

$$\frac{sin\,\alpha + sin\,\beta}{sin\,\alpha - sin\,\beta} = \frac{tang\,\dfrac{\alpha + \beta}{2}}{tang\,\dfrac{\alpha - \beta}{2}},$$

daher

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tang\ \frac{\alpha+\beta}{2}}{tang\ \frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Zur Bestimmung der dritten Seite hat man aber

$$c = \text{entweder } \frac{a \,.\, sin\,\gamma}{sin\,\alpha} \text{ oder } \frac{b \,.\, sin\,\gamma}{sin\,\beta}.$$

Man kann auch das c direkt bestimmen, ohne vorher die Winkel α und β zu kennen, auf folgende Weise.

Bekanntlich ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,cos\,\gamma$$

daher auch

$$c^2 = (a-b)^2 + 2\,ab\,(1 - cos\,\gamma) = (a-b)^2 + 2\,ab\,.\,2\,sin^2\frac{\gamma}{2} =$$

$$= (a-b)^2\left(1 + \frac{4\,a\,b\,sin^2\frac{\gamma}{2}}{(a-b)^2}\right).$$

Sezt man nun

$$\frac{4\,a\,b\,sin^2\frac{\gamma}{2}}{(a-b)^2} = tang^2\,\varphi,$$

so ist endlich

$$c = (a-b)\sqrt{1 + tang^2\,\varphi} = \frac{a-b}{cos\,\varphi}.$$

Für den Flächeninhalt hätte man:

$$\Delta = \frac{a\,b}{2}\,sin\,\gamma$$

Beispiel. Gegeben:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \\ \gamma = 46^0. \end{cases}$$

Man hat:

$$\frac{6+5}{6-5} = \frac{tang\left(90 - \frac{46}{2}\right)}{tang\,\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

oder

$$\frac{11}{1} = \frac{tang\ 67^0}{tang\,\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

daher

$$\begin{aligned} log\,.\,tang\,.\,67^0 &= 10{\cdot}3721481 \\ log\,.\,11 &= 1{\cdot}0413927 \\ \hline & 9{\cdot}3307554, \quad 12^0\,5' \\ & 5704 \\ \hline & 1850 : 102{\cdot}81 = 17''{\cdot}99 \\ & 821{\cdot}9 \\ & 102{\cdot}2 \\ & 9{\cdot}7 \\ & 5 \end{aligned}$$

daher $\frac{\beta - \alpha}{2} = 12^0\ 5'\ 17''{\cdot}99.$

Nun ist $\frac{\beta + \alpha}{2} = 67^0\ 0'\ \ 0''{\cdot}00$

daher

$$\begin{aligned} \beta &= 79^0\ 5'\ 17''{\cdot}99 \\ \alpha &= 54^0\ 54'\ 42''{\cdot}01. \end{aligned}$$

Endlich ist:

$$\begin{aligned} log\,.\ 5 &= 0{\cdot}6989700 \\ log\ sin\,.\,46^0 &= 9{\cdot}8569341 \\ & 10{\cdot}5559041 \\ log\,.\,sin\,\alpha &= 9{\cdot}9128949 \\ \hline log\,c &= 0{\cdot}6430092 \\ c &= 4{\cdot}395509. \end{aligned}$$

daher

Um nun diese Seite direkt aus den gegebenen Stücken zu berechnen, hat man:

$$tang\,\varphi = \frac{2\,sin\,\frac{\lambda}{2}\sqrt{a\,b}}{a - b} = \frac{2\,sin\,23^0\sqrt{5\,.\,6}}{6 - 5},$$

nachdem man a und b willkürlich miteinander verwechseln darf, da sowohl $(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2,$

als auch $(b - a)^2 = b^2 - 2\,b\,a + a^2,$

was ganz identisch ist.

Man hat also:

$$\begin{aligned} log\,.\,30 &= 1{\cdot}4771213 \\ \hline log\,.\,\sqrt{30} &= 0{\cdot}7385606 \\ log\,.\ 2 &= 0{\cdot}3010300 \\ log\,.\,sin\ 23^0 &= 9{\cdot}5918780 \\ & 0{\cdot}6314686 = log\,.\,tang\,\varphi \\ & 09063 \\ \hline & 5623 : 95{\cdot}00 = 59''{\cdot}19 \\ & 873{\cdot}0 \\ & 18{\cdot}0 \\ & 8{\cdot}5 \end{aligned}$$

$$\varphi = 76^0\ 50'\ 59''{\cdot}19.$$

Endlich ist $c = \frac{a-b}{\cos\varphi} = \frac{6-5}{\cos 76^0\, 50'\, 59''\, 19}$

$$\log.\cos 76^0\, 50'\, 59'''19 = 9{\cdot}35\,|\,75240$$

$$\begin{array}{r} 59{\cdot}19 \\ 90{\cdot}07 \\ \hline 5327{\cdot}1 \\ 4{\cdot}1 \\ \hline 5331{\cdot}2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 5331 \\ \hline 9{\cdot}35 & 69909 \end{array}$$

$$0{\cdot}64\,30091 = \log.c$$

daher $c = 4{\cdot}395509$

Für den Flächeninhalt hat man:

$$\begin{aligned} \log.\ 5 &= 0{\cdot}6989700 \\ \log.\ 6 &= 0{\cdot}7781513 \\ \log.\sin 46^0 &= 9{\cdot}8569341 \\ \hline & \ 1{\cdot}3340554 \\ \log.\ 2 &= 0{\cdot}3010300 \\ \hline & \ 1{\cdot}0330254 \end{aligned}$$

daher $\Delta = 10{\cdot}790098$ im Quadratmass.

§. 28.

2. *b)* Sind jedoch **zwei Seiten** a und b und statt des eingeschlossenen Winkels, **der der grösseren Seite** $(a < b)$ **gegenüberliegende Winkel** β **gegeben**, so ist:

$$\sin\alpha = \frac{a.\sin\beta}{b}$$

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

$$c = \frac{b.\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Wäre jedoch $a > b$, so kann der Winkel α sowohl spizig als stumpf sein, weil jedem dieser beiden Winkel derselbe Sinus entspricht, denn es ist:

$$\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha.$$

In diesem Falle bleibt also die Auflösung des Dreieckes zweideutig und unbestimmt und muss aus der Natur des Gegenstandes entschieden werden.

Zur Berechnung des Inhaltes ist:

$$\Delta = \frac{ac}{2}\sin\beta$$

und da wegen $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

wenn diese quadratische Gleichung nach c aufgelöst wird,

$$c = a\cos\beta \pm \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\beta}$$

so folgt durch Substituzion:

$$\Delta = \frac{a}{2} \sin \beta \left(a \cos \beta \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \beta} \right).$$

Ist $b > a$, so ist auch

$$b^2 - a^2 \sin^2 \beta > (a^2 - a^2 \sin^2 \beta = a^2 \cos^2 \beta),$$

daher, da Δ positiv sein muss, die Wurzel auch nur positiv sein kann; für $b < a$ können jedoch, ohne dass hiedurch Δ negativ ausfällt, beide Zeichen der Wurzel gelten.

Es ist also auch im lezteren Falle der Flächeninhalt des Dreieckes völlig unbestimmt.

Beispiel. Es sei

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \\ \beta = 140^0\ 51'\ 52'' \end{cases} \qquad \begin{aligned} \log. a &= 0{\cdot}4771213 \\ \log. b &= 0{\cdot}8450980 \\ \log. \sin \beta &= 9{\cdot}8001376 \end{aligned}$$

so findet man:

$$\begin{aligned} \log. c &= 0{\cdot}6446436 \\ \log. \sin \alpha &= 9{\cdot}4321609 \\ \log. \sin \gamma &= 9{\cdot}5996832 \\ \log. \Delta &= 0{\cdot}6208725 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c &= 4{\cdot}412083 \\ \alpha &= 15^0\ 41'\ 37''{\cdot}63 \\ \gamma &= 23^0\ 26'\ 30''{\cdot}37 \\ \Delta &= 4{\cdot}177077. \end{aligned}$$

§. 29.

3. Gegeben: **Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel** a, β, γ.

Man hat:

$$\alpha = 180 - (\beta + \gamma)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

und

$$\Delta = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)}.$$

Beispiel. Ist.

$$\begin{cases} a = 4 \\ \beta = 107^0\ 4'\ 5'' \\ \gamma = 38'\ 32'\ 21''{\cdot}72 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \log. \alpha &= 0{\cdot}6020600 \\ \log. \sin \beta &= 9{\cdot}9804382 \\ \log. \sin \gamma &= 9{\cdot}7945244 \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} \log. \sin a &= 9{\cdot}7519409 \\ \log. b &= 0{\cdot}8305573 \\ \log. c &= 0{\cdot}6446435 \\ \log. \Delta &= 0{\cdot}9261117 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha &= 34^0\ 23'\ 33''{\cdot}28 \\ b &= 6{\cdot}769512 \\ c &= 4{\cdot}412082 \\ \Delta &= 8{\cdot}435518. \end{aligned}$$

§. 30.

4. Gegeben: **Eine Seite, der dieser Seite gegenüber liegende und ein anliegender Winkel** a, α, β.

Man hat:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$c = \frac{a . \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

und

$$\Delta = \frac{a^2 \sin (\alpha + \beta) \sin \beta}{2 \sin \alpha}.$$

Beispiel. Ist

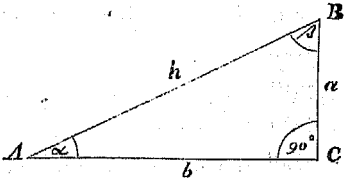
$$\begin{cases} a = 7 \\ \alpha = 67^0\ 0'\ 31''{\cdot}06 \\ \beta = 50^0\ 5'\ 10''{\cdot}91 \end{cases} \qquad \begin{aligned} log.\ 7 &= 0{\cdot}8450980 \\ log.\ sin\ \alpha &= 9{\cdot}9640538 \\ log.\ sin\ \beta &= 9{\cdot}8848024 \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} log.\ b &= 0{\cdot}7658466 \\ log.\ c &= 0{\cdot}8305575 \\ log.\ sin\ \gamma &= 9{\cdot}9495133 \\ log.\ \Delta &= 1{\cdot}2594279 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b &= 5{\cdot}832390 \\ c &= 6{\cdot}769515 \\ \gamma &= 62^0\ 54'\ 18''{\cdot}03 \\ \Delta &= 18{\cdot}173054. \end{aligned}$$

§. 31.

Sezt man im schiefwinklichten Dreiecke einen Winkel, z. B. den Winkel $\gamma = 90^0$, so erhält man das rechtwinklichte Dreieck.



Werden nun alle drei Seiten als bekannt*) vorausgesezt, so hat man zum beliebigen Gebrauche folgende bereits früher hergeleitete Formeln:

$$sin\ \alpha = \frac{a}{h},\ cos\ \alpha = \frac{b}{h},\ tang\ \alpha = \frac{a}{b},$$

$$sin\ \beta = \frac{b}{h},\ cos\ \beta = \frac{a}{h},\ tang\ \beta = \frac{b}{a}$$

und

$$\Delta = \frac{ab}{2} = \frac{a^2\ cotg\ \alpha}{2} = \frac{a^2\ tang\ \beta}{2}.$$

*) Diess kann man in der Trigonometrie um so eher thun, als jederzeit die *Hypothenuse* durch die Formel:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und jede der Katheten durch die Formel

$$a = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{(h+b)(h-b)}$$

und

$$b = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{(h+a)(h-a)},$$

von denen keine trigonometrisch ist, gefunden werden.

Wir halten es für nöthig, unsere Leser noch auf einen Punkt aufmerksam zu machen, der darin besteht, dass, wenn z. B. ein Winkel mittelst des Sinus und zur Kontrolle auch mittelst des Kosinus gerechnet wird, öfters in beiden Fällen in den Sekundentheilen abweichende Resultate gibt. Diese Differenz entsteht gar oft nicht durch die Schuld des Kalkulators, sondern durch die Einrichtung der Tafeln selbst, weil die Differenzen ungleich sind, woraus man sieht, dass die in den Tafeln enthaltenen trigonometrischen Logarithmen keine konstante Empfindlichkeit besizen; wovon im nächsten Paragrafe.

Jene Fälle, in welchen die Genauigkeit der Rechnung eine Sekunde nicht zu übersteigen hat, machen den Besiz bequem eingerichteter fünfstelliger trigonometrischer Logarithmentafeln wünschenswerth, welche blos mit den Rubriken für Sinus, Tangens und Kosinus ohne Differenzen, dagegen aber mit Proporzionaltheilen versehen sein, und um die Empfindlichkeit der Logarithmen zu berücksichtigen, für Sinus und Tangens etwa auf folgende Weise wachsen könnten:

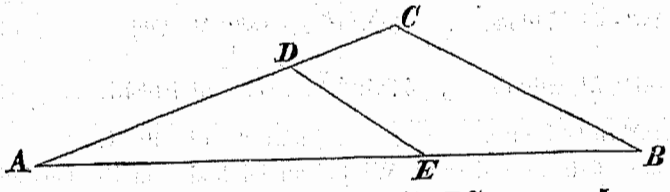
Von	0°	bis	1°	von	Sekunde zu Sekunde
„	1°	„	2°	um	2″
„	2°	„	5°	„	5″
„	5°	„	10°	„	10″
„	10°	„	20°	„	20″
„	20°	„	30°	„	30″
„	30°	„	45°	„	60″ = 1′.

Solche trigonometrische Logarithmentafeln beabsichtige ich, wenn ich einen Verleger hiezu finde, herauszugeben; sie hätten eine analoge Einrichtung zu meiner fünfstelligen Tafel der gemeinen Logarithmen, welche so bequem, wie nur irgend eine Logarithmentafel, zu gebrauchen ist und nur 1500 Logarithmen enthält, daher nur 6 Seiten Raum erfordert. Diese Tafel ist ein integrirender Theil meiner im nächsten Jahre erscheinenden „Anleitung zur Rechnung mit Dezimalen und mit Logarithmen,“ welche zum Selbststudium eingerichtet ist und gar keine mathematischen Vorkenntnisse voraussezt. Bei dieser Gelegenheit kann ich nicht unerwähnt lassen, dass ich auch fünfstellige Tafeln der Logarithmen von Logarithmen nach einem ganz analogen Geseze zusammen gestellt und für einen späteren Gebrauch vorbereitet habe.

§. 32.

Beispiel.

Es soll der Flächeninhalt eines Dreieckes ABC mit den Seiten



$$AB = c = 11,\ AC = b = 7,\ BC = a = 5,$$

von dem in der Seite AC liegenden Punkte D, welcher um 2 Einheiten vom Scheitel C absteht, $(CD = 2)$ durch eine Gerade in zwei gleiche Flächen abgetheilt werden.

Um dieser Aufgabe zu genügen, muss man vorerst die Winkel und den Flächeninhalt des Dreieckes kennen und hat:

$$\begin{aligned}
log.\ s &= log.\ 11{\cdot}5 = 1{\cdot}0606978,\\
log.\ (s-a) &= log.\ 6{\cdot}5 = 0{\cdot}8129134,\\
log.\ (s-b) &= log.\ 4{\cdot}5 = 0.6532125,\\
log.\ (s-c) &= log.\ 0{\cdot}5 = 0{\cdot}6989700 - 1,\\
log.\ bc &= log.\ 77 = 1{\cdot}8864907,\\
log.\ ac &= log.\ 55 = 1{\cdot}7403627,\\
log.\ ab &= log.\ 35 = 1{\cdot}5440680,
\end{aligned}$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Werden nun die Winkel $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$, $ACB = \gamma$ bezeichnet, so findet man auf die bereits bekannte Weise mittelst des log. trigonom. Handbuches von Vega:

$log.\ cos\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}99356025$,	daher	$\frac{\alpha}{2} = 9^0\ 50'\ 33''{\cdot}01$	wobei folgende Tafeldifferenzen	$3{\cdot}65$
$log.\ sin\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}2328459$,	„	$\frac{\alpha}{2} = 9^0\ 50'\ 33''{\cdot}11$		$121{\cdot}39$
$log.\ cos\frac{\beta}{2} = 9{\cdot}9867738$,	„	$\frac{\beta}{2} = 14^0\ 4'\ 7''{\cdot}54$		$5{\cdot}28$
$log.\ sin\frac{\beta}{2} = 9{\cdot}38576035$,	„	$\frac{\beta}{2} = 14^0\ 4'\ 7''{\cdot}55$		$83{\cdot}99$
$log.\ cos\frac{1}{2} = 9{\cdot}6077999$,	„	$\frac{\gamma}{2} = 66^0\ 5'\ 19''{\cdot}35$		$47{\cdot}50$
$log.\ sin\frac{\gamma}{2} = 9{\cdot}96102895$.	„	$\frac{\gamma}{2} = 66^0\ 5'\ 19''{\cdot}45$		$9{\cdot}33$

Bildet man nun die Summen der erhaltenen Winkel, so hat man nach ihrer Bestimmungsart für den

Kosinus:		*Sinus:*	
$\frac{\alpha}{2} =$ 9° 50′ 33″·01,	Diff. 3·65	$\frac{\alpha}{2} =$ 9° 50′ 33″·11,	Diff. 121·39
$\frac{\beta}{2} =$ 14° 4′ 7″·54.	„ 5·28	$\frac{\beta}{2} =$ 14° 4′ 7″·55,	„ 83·99
$\frac{\gamma}{2} =$ 66° 5′ 19″·35,	„ 47·50	$\frac{\gamma}{2} =$ 66° 5′ 19″·45,	„ 9·33
Sum. 89° 59′ 59″·90.		Sum. 90° 0′ 0″·11.	

Man sieht also, dass die Winkel ungleich sind und es beträgt für den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ der Unterschied = 0″·10, für $\frac{\beta}{2}$ Unt. = 0″·01, für $\frac{\gamma}{2}$ Unt. = 0″·10. Zugleich sieht man, dass die Summe jener Winkel, welche man mittelst des Kosinus erhielt, um 0″·10 zu klein ist, während die mittelst des Sinus erhaltenen Winkelsumme um 0″·11 zu gross wurde. Es ist klar, dass der grössere Theil dieser unvermeidlichen Fehler darin liegt, dass die trigonometrischen Logarithmen nach ungleichen Differenzen wachsen, wodurch eine ungleiche Empfindlichkeit der Funkzionen entsteht, und zwar ist bei der gewöhnlichen Einrichtung der Tafeln der Logarithmus um so unempfindlicher, eine je kleinere Differenz derselbe mit sich führt, daher die Fehlergrösse jedes einzelnen Winkels zur Differenzgrösse im verkehrten Verhältnisse steht. Vertheilt man also die Fehler auf besagte Weise, so erhält man folgende Verbesserungen und zwar, wenn man nicht die Winkelsumme, sondern jeden erhaltenen Winkel für sich berichtigt, für

Kosinus:	*Sinus:*
für $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{121·39 \times 0''·10}{3·65 + 121·39} = 0''·10$	für $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{3·65 \times 0''·10}{125·04} = 0''·00$
„ $\frac{\beta}{2}$, $\frac{83·99 \times 0''·01}{5·28 + 83·99} = 0''·01$	„ $\frac{\beta}{2}$, $\frac{5·28 \times 0''·01}{89·27} = 0''·00$
„ $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{9·33 \times 0''·10}{47·50 + 9·33} = 0''·02$	„ $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{47·50 \times 0''·10}{56·83} = 0''·08$

und man erhält sodann folgende Winkel und zwar für

Kosinus:

$\frac{\alpha}{2} =$ 9° 50′ (33″·01 + 0″·10 = 33″·11)

$\frac{\beta}{2} =$ 14. 4. (7·54 + 0·01 = 7·55)

$\frac{\gamma}{2} =$ 66. 5. (19·35 + 0·02 = 19·37)

Summa 89° 59′ (59″·90 + 0″·13 = 60″·03)

Sinus:

$$\frac{\alpha}{2} = 9^0\ 50'\ (33''11 - 0''00 = 33''11)$$

$$\frac{\beta}{2} = 14.\ \ 4.\ \ (7{\cdot}55 - 0{\cdot}00 = 7{\cdot}55)$$

$$\frac{\gamma}{2} = 66.\ \ 5.\ \ (19{\cdot}45 - 0{\cdot}08 = 19{\cdot}37)$$

$$\text{Summa } 89^0\ 59'\ (60''{\cdot}11 - 0''{\cdot}08 = 60''{\cdot}03)$$

Hier findet man, dass die Summe der drei Winkel um $0''{\cdot}03$ zu gross ist, was darin liegt, dass die Logarithmen der Zahlen sowohl, als der trigonometrischen Funkzionen, die man aus den Tafeln entnimmt, nur siebenstellig sind und man daher bald einen zu grossen, bald einen zu kleinen Logarithmus anwendet. Am einfachsten ist es, den Rest des Fehlers gleichmässig zu vertheilen. Man hätte also endlich:

$$\begin{array}{rrrr} \alpha = & 19^0 & 41' & 6''{\cdot}20 \\ \beta = & 28^0 & 8' & 15''{\cdot}08 \\ \gamma = & 132^0 & 10' & 38''{\cdot}72 \\ \hline \text{Summe} & 180^0 & 0' & 0''{\cdot}00 \end{array}$$

Berechnet man die Fläche des Dreieckes, so findet man:

$$log.\ \Delta = 1{\cdot}11289685, \qquad \text{daher}$$

$$\Delta = 12{\cdot}968713.$$

Um nun die Theilung in zwei gleiche Theile zu bewirken, hat man:

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{AD.x}{2} \cdot \sin \alpha,$$

wobei x ein noch unbekanntes Stück der Seite AB bezeichnet. Aus dieser Gleichung erhält man

$$x = \frac{\Delta}{AD.\sin \alpha},$$

und da

$$log.\ AD = 0{\cdot}6989700$$

$$log.\ \sin \alpha = 9{\cdot}5274362$$

ist auch

$$log.\ x = log.\ AE = 0{\cdot}8864907,$$

daher

$$AE = 7{\cdot}7000000.$$

Nun sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt und es ist also leicht, auch die beiden anderen Winkel bei D und dem eben bestimmten Punkte E und endlich die dritte Seite zu finden, indem man hat:

$$\frac{AE+AD}{AE-AD}=\frac{tang.\left(90-\frac{\alpha}{2}\right)}{tang\,\frac{D-E}{2}}$$

oder

$$\frac{12\cdot7000000}{2\cdot7000000}=\frac{cotang.\,\frac{\alpha}{2}}{tang\,\frac{D-E}{2}}$$

und da

$$log.\ 12\cdot7000000 = 1\cdot1038037$$
$$log.\ 2\cdot7000000 = 0\cdot4313638$$
$$log.\ cotg.\,\frac{\alpha}{2} = 10\cdot7607143$$

ist auch

$$log.\ tang\,\frac{D-E}{2} = 10\cdot0882744$$

somit

$$\frac{D-E}{2} = 50^0\ 46'\ 59''\cdot74$$

daher endlich

$$D = 130^0\ 56'\ 26''\cdot64$$
$$E = 29^0\ 22'\ 27''\cdot16$$

Endlich ist:

$$DE = \frac{AD.\sin\alpha}{\sin E} = \frac{AE.\sin\alpha}{\sin D},$$

daher wegen $log.\ sin.\ D = 9\cdot8781699$ und $log.\ sin.\ E = 9\cdot6906493$

$$log.\ DE = 0\cdot5357570$$

und

$$DE = 3\cdot433657$$

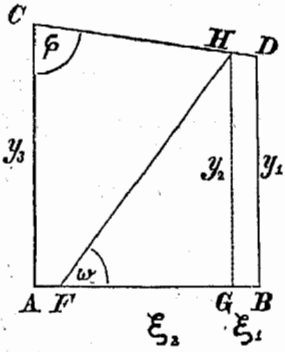
Die Fläche der zweiten Hälfte des Dreieckes liesse sich sehr leicht berechnen, wenn man dasselbe in zwei Dreiecke zertheilt denkt, da hier bereits alle Winkel und alle Seiten bekannt sind und man hat z. B.:

$$Fläche = \frac{BC.BE}{2}\sin\beta + \frac{CD.DE}{2}\sin D =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{BC.BE.\sin\beta + CD.DE.\sin D\right\}.$$

Eben so einfach, aber, ganz begreiflich, weitläufiger wäre die Theilung in eine grössere Anzahl gleicher oder solcher Theile, welche nach einem bestimmten Geseze abhängig sein sollen.

§. 33.

Beispiel. In dem Vierecke $ABCD$ sind die drei Seiten $AB = 4^0$, $BD = 4^0{\cdot}2$, $AC = 4^0{\cdot}8$ gegeben; ferner ist bekannt, dass die beiden Winkel bei A und B rechte Winkel sind, somit die Seiten AC und BD auf AB senkrecht stehen müssen. Es entsteht nun die Frage, wie weit ein gewisser Punkt F von dem Punkte B abstehen muss, wenn durch ihn mittelst einer, unter dem Winkel von 50 Graden gegen die Linie AB geneigten, Geraden, eine Fläche von 10 Quadrat Klftr. abgeschnitten werden soll.



Nennt man Behufs der allgemeinen Auflösung dieser Aufgabe Kürze wegen die Abszisse $AB = x$, die Ordinate $BD = y_1$, die mit y_1 durch den Punkt H (wo sich die Theilungslinie und die Seite CD schneiden) parallele Ordinate y_2, die zweite parallele Seite des Viereckes $AC = y_3$, das zwischen y_1 und y_2 liegende Stück der Abszisse $BG = \xi_1$, das zwischen y_2 und der Theilungslinie liegende Stück der Abszisse $FG = \xi_2$, dann den Neigungswinkel der Theilungslinie gegen die Abszisse $HFB = w$ und den spizigen Winkel des Viereckes $= \varphi$, endlich die abzuschneidende Fläche f, so folgt aus der Figur:

$$tang\ \varphi = \frac{\xi_1}{y_2 - y_1} = \frac{x}{y_3 - y_1},$$

$$tang\ w = \frac{y_2}{\xi_2},$$

$$f = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \xi_1 + \frac{y_2\,\xi_2}{2}$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_2\ tang\ w = y_2 \\ f = \frac{1}{2}\left\{\frac{x\,(y^2_2 - y^2_1)}{y_3 - y_1} + \left[y_2\ \xi_2 = \frac{y^2_2}{tang\ w}\right]\right\}, \end{array} \right.$$

woraus sich ξ_2 und y_2 bestimmen lassen.

Es ist $$y_2 = \sqrt{\frac{[2f(y_3 - y_1) + x\,y_1^2]\ tang\ w}{(y_3 - y_1) + x\,.\,tang\ w}}$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{2f(y_3 - y_1) + x\,y_1^2}{[(y_3 - y_1) + x\ tang\ w]\ tang\ w}}$$

Substituirt man in beiden Gleichungen die gegebenen Werthe und zwar $x = 4$, $y_1 = 4{\cdot}2$, $y_3 = 4{\cdot}8$, $f = 10$, $w = 50^0$, so hat man:

$$y_2 = \sqrt{\frac{[20 \times 0{\cdot}6 + 4 \times 17{\cdot}64]\, tang\, 50^0}{0{\cdot}6 + 4.\, tang\, 50^0}} = \sqrt{\frac{82{\cdot}56\, tang\, 50^0}{0{\cdot}6 + 4\, tang\, 50^0}}$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{82{\cdot}56}{(0{\cdot}6 + 4\, tang\, 50^0)\, tang\, 50^0}}$$

Nun aber ist $tang\, 50^0 = 1{\cdot}1917536$ daher

$$y_2 = \sqrt{\frac{89{\cdot}391177}{5{\cdot}3670144}} = 4^0{\cdot}281655,$$

$$\xi_3 = \frac{y_2}{tang\, 50^0} = 3^0{\cdot}592735$$

Nun ist

$$\xi_1 = \frac{y_2 - y_1}{tang\, \varphi} = \frac{0\,081655}{1{\cdot}191754} = 0{\cdot}068517$$

daher $BF = \xi_1 + \xi_2 = 3^0{\cdot}661252.$

Polygonometrie.

§. 34.

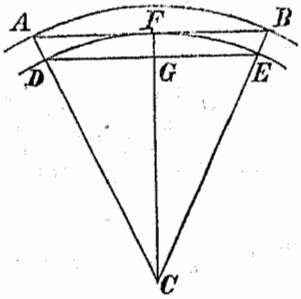
Ebene Vielecke oder Polygone heissen jene eckigen durch gerade Linien begrenzten Figuren, welche in einer ebenen Fläche liegen und man unterscheidet **regelmässige**, solche Polygone, deren Seiten sämmtlich einerlei Länge haben, und deren Ecken sämmtlich von einem ausserhalb der Figur liegenden Punkte gleichweit abstehen, und **unregelmässige** Polygone, welche keinen solchen Bedingungen unterworfen sind. Ueberdiess werden die Polygone noch speziell nach der Anzahl ihrer Seiten benannt.

§. 35.

Nachdem der Karakter des **regelmässigen Polygones** mit dem Kreise einige Gemeinschaft hat, so liegt auch die Idee am Nächsten, das regelmässige Polygon mit dem Kreise zu vergleichen, da sich sowohl jedem regelmässigen Polygone ein Kreis mit dem Halbmesser R umschreiben lässt, welcher jeden Endpunkt des Polygons berührt, während man jedem regelmässigen Polygone einen anderen Kreis mit dem Halbmesser r einschreiben kann, welcher jede Seite in ihrem Halbirungspunkte berührt. In gleicher Weise lässt sich jedem Kreise ein $n$eckiges regelmässiges Polygon sowohl um-, als ein-

schreiben, deren das Erstere den Kreis im Halbirungspunkte der Seiten und das Zweite in den Eckpunkten tangirt.

Zur Untersuchung der zwischen beiden Kreisen und dem um- und eingeschriebenen Polygone wechselseitig Statt habenden Relazionen bezeichne man durch



$AB = S$ die Vieleckseite des einem Kreise umgeschriebenen regelmässigen Polygones;

$DE = s$ die Vieleckseite des einem Kreise eingeschriebenen regelm. Polygones;

$BC = R$ den Halbmesser des einem regelm. Polygone umgeschriebenen Kreises;

$FC = EC = r$ den Halbmesser des einem regelm. Polygone eingeschriebenen Kreises;

$n.\ \Delta\ ABC = F$ den Flächeninhalt eines regelm. dem Kreise umgeschriebenen Polygones;

$n.\ \Delta\ DEC = f$ den Flächeninhalt eines regelm. dem Kreise eingeschriebenen Polygones; endlich

n die Anzahl der Vieleckseiten; so ist:

$$AF = BF = \frac{S}{2},$$

$$DG = GE = \frac{s}{2};$$

ferner, weil der Winkel im Umfange 360 Grade beträgt;

$$ACB = \frac{360}{n},$$

$$ACF = BCF = \frac{360}{2n} = \frac{180}{n},$$

$$FAC = FBC = GDC = GEC = 90 - \frac{180}{n}.$$

Man hat daher:

$$\frac{S}{R} = \frac{\sin\frac{360}{n}}{\sin\left(90 - \frac{180}{n}\right)} = \frac{2.\sin\frac{180}{n}.\cos\frac{180}{n}}{\cos\frac{180}{n}}$$

oder

$$\frac{S}{R} = 2.\sin\frac{180}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

Ferner:

$$\frac{\frac{S}{2}}{r} = \frac{\sin\frac{180}{n}}{\sin\left(90 - \frac{180}{n}\right)} = \frac{\sin\frac{180}{n}}{\cos\frac{180}{n}}$$

oder

$$\frac{S}{r} = 2.\tang\frac{180}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II)$$

Ferner:

$$\frac{\frac{s}{2}}{r} = \frac{\sin\frac{180}{n}}{\sin 90^0}$$

oder

$$\frac{s}{r} = 2.\sin\frac{180}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (III)$$

Ferner folgt wegen *(II)* und *(III)*:

$$r = \frac{S}{2.\tang\frac{180}{n}} = \frac{s}{2.\sin\frac{180}{n}},$$

$$\frac{s}{S} = \frac{\sin\frac{180}{n}.\cos\frac{180}{n}}{\sin\frac{180}{n}},$$

oder

$$\frac{s}{S} = \cos\frac{180}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (IV)$$

Ferner folgt aus *(I)* und *(II)*:

$$S = R.2.\sin\frac{180}{n} = r.2.\tang\frac{180}{n},$$

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin\frac{180}{n}.\cos\frac{180}{n}}{\sin\frac{180}{n}}$$

oder

$$\frac{r}{R} = \cos\frac{180}{n} \quad . \; . \; . \quad (V)$$

Wird dieser Werth r in *(III)* substituirt, so ist:

$$s = R \,.\, cos\frac{180}{n} \,.\, 2 \,.\, sin\,\frac{180}{n}$$

oder

$$\frac{s}{R} = sin\,\frac{360}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (VI)$$

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes hat man:

$$F = n \,.\, \frac{R^2}{2} \,.\, sin\frac{360}{n},$$

$$f = n \,.\, \frac{r^2}{2} \,.\, sin\frac{360}{n},$$

und man findet durch Substituzion der Werthe r und R folgende Ausdrücke:

$$F = r^2 \,.\, n\; tang\;\frac{180}{n} = R^2 \,.\, \frac{n}{2}\, sin\,\frac{360}{n} =$$

$$= s^2 \,.\, \frac{n}{2\, sin\,\frac{360}{n}} = S^2 \,.\, \frac{n}{4}\, cotg\;\frac{180}{n}$$

$$f = r^2 \,.\, \frac{n}{2}\, sin\frac{360}{n} = R^2 \,.\, n\; sin\frac{180}{n}\, cos^3\,\frac{180}{n} =$$

$$= s^2 \,.\, \frac{n}{4}\; cotg\;\frac{180}{n} = S^2 \,.\, \frac{n}{4} \,.\, \frac{cos^3\,\frac{180}{n}}{sin\;\frac{180}{n}}.$$

Hieraus folgt durch Division und Redukzion:

$$\frac{f}{F} = cos^2\,\frac{180}{n}.$$

§. 36.

Wir wollen nun zuerst die Ausdrücke für die ganzen und halben Winkel, welche in einem regelmässigen n ecke der Vieleckseite gegenüber liegen, für das Dreieck (Triangulum), Viereck (Quadratum), Fünfeck (Pentagonum), Sechseck (Hexagonum), Siebeneck (Heptagonum), Achteck (Octagonum), Neuneck (Nonagonum), Zehneck (Decagonum), Eilfeck (Undecagonum) und Zwölfeck (Dodecagonum) angeben und sodann die trigonometrischen Funkzionen und deren Logarithmen, welche zur Berechnung dieser Vielecke nothwendig sind, in Tafeln zusammengestellt, beifügen.

Mittelpunktswinkel für n seitige regelmässige Polygone.

n	$\frac{180^0}{n}$	$\frac{360^0}{n}$
3	60^0	120^0
4	45^0	90^0
5	36^0	72^0
6	30^0	60^0
7	$25^0\ 42'\ 51''{\cdot}429$	$51^0\ 25'\ 42{\cdot}''857$
8	$22^0\ 30'$	45^0
9	20^0	40^0
10	18^0	36^0
11	$16^0\ 21'\ 49{\cdot}''091$	$32^0\ 43'\ 38{\cdot}''182$
12	15^0	30^0

Tafel der zur Berechnung regelmässiger Polygone gehörigen trigonometrischen Funkzionen.

n	*Sinus* $\frac{180}{n}$	*Sinus* $\frac{360}{n}$	$cos\ \frac{180}{n}$	$tang\ \frac{180}{n}$	$cotg\ \frac{180}{n}$
3	0·8660254	0·8660254	0·5000000	1·7320508	0·5773503
4	0·7071068	1·0000000	0·7071068	1·0000000	1·0000000
5	0·5877853	0·9510565	0·8090170	0·7265425	1·3763819
6	0·5000000	0·8660254	0·8660254	0·5773503	1·7320508
7	0·4338838	0·7818315	0·9009688	0·4815746	2·0765215
8	0·3826834	0·7071068	0·9238795	0·4142136	2·4142136
9	0.3420201	0·6427876	0·9396926	0·3639702	2·7474774
10	0·3090170	0·5877853	0·9510565	0·3249197	3·0776835
11	0·2817326	0·5406408	0·9594930	0·2936265	3·4056878
12	0·2588190	0·5000000	0·9659258	0·2679492	3·7320508

Tafel der zur Berechnung regelmässiger Polygone gehörigen trigonometrischen Logarithmen.

n	*Log. sinus* $\frac{180}{n}$	*Log. sinus* $\frac{360}{n}$	$\log \cos \frac{180}{n}$	$\log \operatorname{tang} \frac{180}{n}$	$\log \operatorname{cotg} \frac{180}{n}$
3	9·9375306	9·9375306	9·6989700	10·2385606	9·7614394
4	9.8494850	10·0000000	9·8494850	10·0000000	10·0000000
5	9·7692187	9·9782063	9·9079576	9·8612610	10·1387390
6	9·6989700	9·9375306	9·9375306	9·7614394	10·2385606
7	9·6373733	9·8931132	9·9547098	9·6826636	10·3173364
8	9·5828397	9·8494850	9·9656153	9·6172243	10·3827757
9	9·5340517	9·8080675	9·9729858	9·5610659	10·4389341
10	9·4899824	9·7692187	9·9782063	9·5117760	10·4882240
11	9·4498371	9·7329088	9·9820418	9·4677952	10·5322048
12	9·4129962	9·6989700	9·9849438	9·4280525	10·5719475

§. 37.

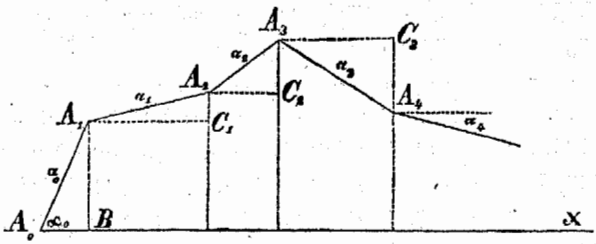
Um die Eigenschaften der **unregelmässigen Polygone** kennen zu lernen, sei zuerst zu untersuchen, wie gross die Summe aller inneren Winkel in jedem n eckigen Vielecke ist. Verbindet man irgend Einen Eckpunkt mit allen übrigen Eckpunkten durch Gerade, welche keine Polygonsseiten sind, so wird man sich gar bald überzeugen, dass nur $(n - 3)$ solcher Verbindungslinien möglich sind, weil die Verbindung mit dem Ausgangspunkte und mit den demselben zunächst liegenden zwei Polygonspunkten wegfällt. Durch diese Verbindungen entstehen aber $(n - 2)$ Dreiecke, das heisst um ein Dreieck mehr, als Verbindungslinien sind, weil jede der Verbindungslinien auf der gleichliegenden Seite ein Dreieck anliegt, während der letzten Verbindungslinie überdiess noch auf der ungleichliegenden Seite noch ein Dreieck anliegt.

Da nun die Summe aller Winkel eines ebenen Dreieckes 180 Grade beträgt, so beträgt die **Summe aller inneren Winkel eines jeden n seitigen Polygons** $(n - 2)\ 180^0$.

Die Summe aller äusseren Winkel beträgt aus ganz natürlichen Gründen $(n + 2)\ 180^0$.

§. 38.

Es sei $A_0 A_1 A_2 A_3 \ldots$ irgend ein unregelmässiges Polygon, in welchem $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Seiten, endlich $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ die inneren Winkel vorstellen sollen.



Projizirt man nun jeden Eckpunkt des Polygons auf eine durch den Punkt A_0 willkürlich gezogene, unbestimmt verlängerte Gerade $A_0\, x$ und führt durch jeden Eckpunkt Parallele zu dieser Seite, so hat man, wenn diese durch die einzelnen Polygonsseiten und durch diese Parallelen entstandenen Winkeln analog dem Obigen mit α_0, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ bezeichnet werden, folgende Relazionen:

$$A_1 = \alpha_1 + 90^0 + (90 - \alpha_0)$$
$$A_2 = \alpha_2 + 90^0 + (90 - \alpha_1)$$
$$A_3 = (90 - \alpha_3) + (90 - \alpha_2)$$
$$A_4 = (90 - \alpha_4) + (90 + \alpha_3) \quad \text{u. s. f.}$$

Es ist daher

$$\alpha_1 = A_1 - (90 + [90 - \alpha_0]) = A_1 + \alpha_0 - 180^0$$

und da

$$\alpha_0 = A_0$$

ist auch

$$\alpha_1 = A_0 + A_1 - 180^0,$$
$$\alpha_2 = A_2 + \alpha_1 - 180^0 = A_0 + A_1 + A_2 - 360^0,$$
$$\alpha_3 = 180^0 - \alpha_2 - A_3 = 540^0 - (A_0 + A_1 + A_2 + A_3),$$
$$\alpha_4 = 180^0 + \alpha_3 - A_4 = 720^0 - (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4),$$

u. s. f.

Endlich ist:

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = - \cos (A_0 + A_1) \\ \sin \alpha_1 = - \sin (A_0 + A_1) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cos \alpha_2 = + \cos (A_0 + A_1 + A_2) \\ \sin \alpha_2 = + \sin (A_0 + A_1 + A_2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cos \alpha_3 = - \cos (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) \\ \sin \alpha_3 = + \sin (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha_4 = + \cos (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\ \sin \alpha_4 = - \sin (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \end{cases}$$

u. s. f.

Nun aber ist:

$A_0 B = a_0 . \cos \alpha_0$	$A_1 B = a_0 . \sin \alpha_0$
$A_1 C_1 = a_1 . \cos \alpha_1$	$A_2 C_1 = a_1 . \sin \alpha_1$
$A_2 C_2 = a_2 . \cos \alpha_2$	$A_3 C_2 = a_2 . \sin \alpha_2$
$A_3 C_3 = a_3 . \cos \alpha_3$	$A_4 C_3 = a_3 . \sin \alpha_3$

Bezeichnet man nun die Gerade, auf welche alle Projekzionen geschehen, durch a_n, so hat man:

$$a_n = a_0 . \cos \alpha_0 + a_1 . \cos \alpha_1 + a_2 . \cos \alpha_2 + a_3 . . \cos \alpha_3 + \ldots .$$

und endlich:

$BA_1 + C_1 A_2 + C_2 A_3 - C_3 A_4 - \ldots\ldots = 0$, weil sobald der Wendepunkt erreicht ist, das Zeichen wechseln muss, oder

$$a_0 . \sin \alpha_0 + a_1 . \sin \alpha_1 + a_2 . \sin \alpha_2 - a_3 . \sin \alpha_3 - \ldots\ldots = 0.$$

Werden nun in beiden Gleichungen statt der Funkzionen ihre bereits früher bestimmten Werthe gesezt, und bedenkt man, dass bei einem $(n + 1)$ eckigen Polygone:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n = (n - 1)\, 180^0 = \\ = (n + 1)\, 180^0 - 360^0,$$

wo also der Kosinus gleich $\pm$ 1 und der Sinus Null ist, so erhält man die Werthe für folgende Grundgleichungen:

$$a_0 . \cos A_0 - a_1 . \cos (A_0 + A_1) + a_2 . \cos (A_0 + A_1 + A_2) - \\ - a_3 . \cos (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) + \ldots\ldots \pm a_n . \cos (A_0 + \\ + A_1 + A_2 + \ldots\ldots\ldots + A_n) = 0,$$

und

$$a_0 . \sin A_0 - a_1 . \sin (A_0 + A_1) + a_2 . \sin (A_0 + A_1 + A_2) - \\ - a_3 . \sin (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) + \ldots\ldots \pm a_n . \sin (A_0 + A_1 + \\ + A_2 + \ldots\ldots\ldots + A_n) = 0,$$

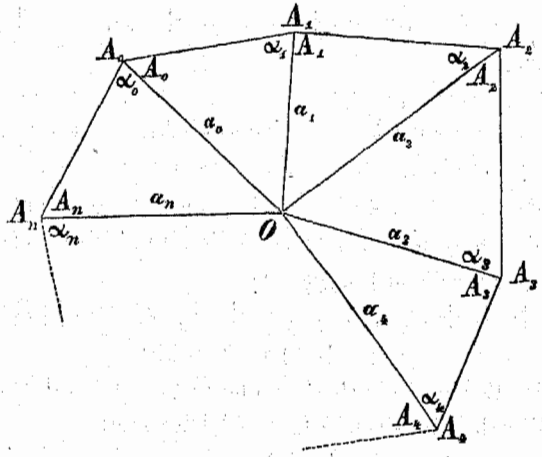
woraus sich leicht spezielle Formeln ergeben.

§. 39.

Es sei das Polygon $A_0 A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n$ mit dem Polygonsmittelpunkte O, in welchem $A_0 O = a_0$, $A_1 O = a_1$, $A_2 O = a_2$, $\ldots\ldots A_n O = a_n$, ferner die Winkel $OA_0A_1 = A_0$, $OA_1A_2 = A_1$, $OA_2A_3 = A_2$, $\ldots\ldots OA_nA_0 = A_n$, dann $OA_0A_n = \alpha_0$, $OA_1A_0 =$

$= \alpha_1$, $OA_2A_1 = \alpha_2$, ... $OA_nA_{n-1} = \alpha_n$ bezeichnet werden, so folgt, weil die Seiten sich gerade zu den Sinussen der gegenüber liegenden Winkel verhalten,

$$a_1 . \sin \alpha_1 = a_0 . \sin A_0$$
$$a_2 . \sin \alpha_2 = a_1 . \sin A_1$$
$$a_3 . \sin \alpha_3 = a_2 . \sin A_2$$
$$a_4 . \sin \alpha_4 = a_3 . \sin A_3$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$a_0 . \sin \alpha_0 = a_n . \sin A_n .$$



Wird nun diese Kette von Gleichungen multiplizirt, so folgt, da $a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \; . \; . \; . \; a_0 = a_0\, a_1\, a_2\, a_3 \; . \; . \; a_n$ folgender wichtige Saz: $\sin \alpha_0 \; \sin \alpha_1 \; \sin \alpha_2 \; \sin \alpha_3 \; \sin \alpha_4 \; . \; . \; . \; . \; \sin \alpha_n = \sin A_0 \; \sin A_1 \; \sin A_2 \; \sin A_3 \; \sin A_4 \; . \; . \; . \; \sin A_n$, welcher zur Richtigkeitsprobe häufige Anwendung findet.

§. 40.

Zur **Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades** auf trigonometrischem Wege hätte man

$$x^2 + a\,x \pm b = o$$

als allgemeine Form der quadratischen Gleichung.

Es ist aber auch:

$$x^2 + a\,x = \mp b$$

daher

$$x^2 + a\,x + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \mp b$$

oder

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \mp b,$$

das ist:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \mp b} = -\frac{a}{2}\left\{1 \mp \sqrt{1 \mp \frac{4\,b}{a^2}}\right\}.$$

Soll $\frac{4\,b}{a^2} = -$ sein, so können die Wurzelwerthe der Gleichung nur dann reel sein, wenn $\frac{4\,b}{a^2} < 1$, d. h. wenn sich die Quadratwurzel wirklich ausziehen lässt. Weil aber der Sinus jene trigonometrische Funkzion ist, welche dieser Anforderung Genüge leistet, so führe man für diesen Fall den $sin\ \vartheta = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ ein. Wird aber $\frac{4\,b}{a^2} = +$ genommen, so unterliegt die Grösse des Ausdruckes gar keiner Beschränkung und man kann für diesen Fall $tang\ \vartheta = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ sezen.

Um den ersten Fall:

$$x^2 + a\,x + b = o$$

zu betrachten, hat man also:

$$x = -\frac{a}{2}\left\{1 \mp \sqrt{1 - sin^2\,\vartheta}\right\} = -\frac{a}{2}(1 \mp cos\,\vartheta) =$$

$$= -\,a\,.\,\frac{1 \mp cos\,\vartheta}{2}$$

das heisst:

$$x = \begin{cases} -\,a\,.\,cos^2\frac{\vartheta}{2} \\ -\,a\,.\,sin^2\frac{\vartheta}{2}. \end{cases}$$

Wegen $a = \frac{2\sqrt{b}}{sin\,\vartheta} = \frac{2\sqrt{b}}{2\ sin\frac{\vartheta}{2}\,.\,cos\frac{\vartheta}{2}} = \frac{\sqrt{b}}{sin\frac{\vartheta}{2}\,.\,cos\frac{\vartheta}{2}}$

erhält man durch unmittelbare Substituzion:

$$x = \begin{cases} -\dfrac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}\,.\sqrt{b}}{\sin\frac{\vartheta}{2}\,.\cos\frac{\vartheta}{2}} = -\sqrt{b}\,.\,\cot g\,\frac{\vartheta}{2} \\ -\dfrac{\sin^2\frac{\vartheta}{2}\,.\sqrt{b}}{\sin\frac{\vartheta}{2}\,.\cos\frac{\vartheta}{2}} = -\sqrt{b}\,.\tan g\,\frac{\vartheta}{2}. \end{cases}$$

Für den zweiten Fall:

$$x^2 + a\,x - b = o$$

aber ist:

$$x = -\frac{a}{2}\left\{1 \mp \sqrt{1 + \tan g^2\,\vartheta}\right\} = -\frac{a}{2}\,(1 \mp \sec\vartheta) =$$

$$= -\frac{a}{2}\left\{1 \mp \frac{1}{\cos\vartheta}\right\} = -\frac{a}{2}\,.\,\frac{\cos\vartheta \mp 1}{\cos\vartheta} = -\frac{a}{\cos\vartheta}\,.\,\frac{\cos\vartheta \mp 1}{2},$$

daher

$$x = \begin{cases} \dfrac{a}{\cos\vartheta}\,.\,\dfrac{1 - \cos\vartheta}{2} = \dfrac{a}{\cos\vartheta}\,.\sin^2\frac{\vartheta}{2} \\ -\dfrac{a}{\cos\vartheta}\,.\,\dfrac{1 + \cos\vartheta}{2} = -\dfrac{a}{\cos\vartheta}\,.\cos^2\frac{\vartheta}{2} \end{cases}$$

Wegen $a = \dfrac{2\sqrt{b}}{\tan g\,\vartheta}$ erhält man:

$$x = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{b}}{\sin\vartheta}\,.\sin^2\frac{\vartheta}{2} \\ -\dfrac{2\sqrt{b}}{\sin\vartheta}\,.\cos^2\frac{\vartheta}{2} \end{cases}$$

Es ist aber $\sin\vartheta = 2\,\sin\frac{\vartheta}{2}\,.\cos\frac{\vartheta}{2}$, daher auch

$$x = \begin{cases} \sqrt{b}\,.\,\tan g\,\frac{\vartheta}{2} \\ -\sqrt{b}\,.\,\cot g\,\frac{\vartheta}{2}\,. \end{cases}$$

Man erhält somit für $x^2 + a\,x \pm b = o$, folgende Formeln:

$$\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{b}}{a} = \begin{pmatrix} \sin \\ \tan g \end{pmatrix}\vartheta \\ x = \begin{cases} -\cot g\,\frac{\vartheta}{2}\,.\sqrt{b}. \\ \mp \tan g\,\frac{\vartheta}{2}\,.\sqrt{b}. \end{cases} \end{cases}$$

Wenn nun a das Zeichen ändert, bekommen auch die Werthe des x das entgegengesezte Zeichen.

Beispiel.

$$x^2 - 2{\cdot}3\,x - 10{\cdot}58 = o$$

$$\frac{2\sqrt{10{\cdot}58}}{2{\cdot}3} = tang\ \varphi$$

$$0{\cdot}4515450 = log\,.\,tang\ 70^0\ 31'\ 43''.62$$

$$log\,.\,tang\ 35^0\ 15'\ 51''{\cdot}81 = 9{\cdot}8494850$$

$$x = \begin{cases} +\ 4{\cdot}6 \\ -\ 2{\cdot}3. \end{cases}$$

§. 41.

Die allgemeine Form einer jeden **kubischen Gleichung** ist:

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = o$$

Sezt man nun $x = y - \frac{a}{3}$, so erhält man*):

$$y^3 - \left(\frac{a^2}{3} - b\right) y + \frac{2\,a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = o$$

eine neue Gleichung, welche unter der allgemeinen Form

$$y^3 + A\,y + B = o$$

erscheint, wo also die zweite Potenz der Unbekannten gänzlich fehlt und dadurch eliminirt wurde, dass man statt der vorigen Unbekannten eine neue Unbekannte, welche um den Quozienten aus dem Koeffizienten der nächst höchsten Potenz und dem höchsten Potenzexponenten, vermindert wurde, substituirt.

Sezt man hier $y = u + v$, so hat man:

$$u^3 + v^3 + (3\,u\,v + A)\,y + B = o$$

und wenn man zur Bestimmung dieser beiden Werthe noch die Bedingungsgleichung

$$3\,u\,v + A = o$$

anwendet, wodurch das Produkt mit y verschwindet, also

$$u^3 + v^3 + B = o$$

oder $$u^3 - \frac{A^3}{27\,u^3} + B = o,$$

---

*) Die Methode aus der Gleichung:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots + Xx^2 + Yx + Z = o$$

das zweite Glied Ax^{n-1} durch die Substituzion

$$x = y - \frac{A}{n}$$

wegzuschaffen, rührt von Cartesius her, der sie im 3. Buche seiner Geometrie lehrte.

woraus

$$u = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}}.$$

Da nun

$$v^3 = -B - u^3,$$

ist natürlich

$$v = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} \mp \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}}.$$

Hieraus folgt endlich durch Substituzion:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}},$$

die sogenannte **Cardan**'sche Formel *).

Sezt man diese Formel, oder bezüglich diese beiden Wurzel, also $y = C + D$, so erhält man für die beiden anderen Werthe der Unbekannten:

$$y = -\frac{C+D}{2} \pm \frac{C-D}{2} \cdot \sqrt{-3}.$$

Wir wollen nun zur Transformazion dieser Formel, wie sie zur trigonometrischen Berechnung beschaffen sein soll, übergehen und haben zuvörderst die drei Fälle zu unterscheiden, in welchen der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}$$

entweder grösser oder gleich oder kleiner, wie Null ist, da, wie bekannt, von der $\pm$ Eigenschaft einer Grösse, aus welcher die $(2n)$ te Wurzel ausgezogen wird, die Beschaffenheit des Resultates, ob reel oder imaginär, abhängt.

1. Zur Betrachtung des ersten Falles, in welchem also

$$\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} > o,$$

sei $A = +$. Sezt man nun

$$\frac{4A^3}{27B^2} = tang^2\, \vartheta, \qquad (*)$$

*) Diese Formel rührt von **Scipio Ferreus**, einem Italiener her und hat ihren Namen daher, weil sie **Hyeronymus Cardanus** in seiner: *Ars magna, quam vulgo Cossam seu regulam Algebrae vocant*, 1545 zuerst öffentlich bekannt machte.

so erhält man:

$$y = \sqrt[3]{\frac{B(1 - \cos \vartheta)}{2 \,.\, \cos \vartheta}} - \sqrt[3]{\frac{B(1 + \cos \vartheta)}{2 \,.\, \cos \vartheta}}.$$

Sezt man nun Kürze wegen

$$2 \sqrt{\frac{A}{3}} = z,$$

so folgt nach gesehener Substitution

$$B = \frac{z^3 \cos \vartheta}{4 \sin \vartheta},$$

welcher Werth in den Ausdruck für y substituirt wird. Sezt man ferner

$$\sqrt[3]{tang \frac{\vartheta}{2}} = tang\, \varphi, \qquad (*)$$

so erhält man nach endlicher Redukzion

$$y = -2 \sqrt{\frac{A}{3}} \,.\, cotg\, 2\varphi \qquad (*)$$

als die erste reele Wurzel.

Ist aber $A = -$, so sei, da folgerichtig

$$\frac{4 A^3}{27 B^2} < 1,$$

$$\frac{4 A^3}{27 B^2} = \sin^2 \vartheta, \qquad (*)$$

und der zweite Substituzionswerth wie oben, so ist:

$$y = -\frac{2}{\sin 2\varphi} \sqrt{\frac{A}{3}}. \qquad (*)$$

Sowohl für den positiven, als für den negativen Werth von A sind die beiden anderen Wurzelwerthe imaginär.

2. Für den zweiten Fall, in welchem

$$\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} = o,$$

lassen sich die Wurzelgrössen unmittelbar logarithmisch berechnen, daher hier die Hilfsgrössen entbehrlich erscheinen. In diesem Falle sind alle drei Wurzeln reel und zwar sind zwei derselben einander gleich.

3. Im dritten Falle, in welchem A nothwendig negatif sein muss, hat man die zu untersuchende Gleichung:

$$y^3 - Ay + B = o.$$

Sezt man nun

$$y = r \,.\, \sin \vartheta, \qquad (*)$$

so erhält man wegen

$$sin^3 \vartheta - \frac{3}{4} sin \vartheta + \frac{1}{4} sin\, 3\, \vartheta = o,$$

welche Gleichung, wie leicht einzusehen, nur eine Umgestaltung des für $sin\, 3\, \vartheta$ bekannten Ausdruckes ist, die Relazion:

$$y^3 - \frac{3}{4} r^2 y + \frac{1}{4} r^3 sin\, 3\, \vartheta = o.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind sämmtlich in der früher angegebenen Bedingungsgleichung enthalten, unter der Bedingung jedoch, dass für ϑ alle Werthe gesezt werden, für welche $sin\, 3\, \vartheta$ keiner Veränderung unterliegt, was für

$$\frac{1}{3} . 3\vartheta, \frac{1}{3} (180 - 3\vartheta), \frac{1}{3} (3 . 180 - 3\vartheta), \frac{1}{3} (5 . 180 - 3\vartheta), \ldots.$$

$$\frac{1}{3} (360 + 3\vartheta), \frac{1}{3} (2 . 360 + 3\vartheta), \frac{1}{3} (3 . 360 + 3\vartheta), \ldots.$$

Statt hat. Da aber allen diesen Bogen nur die Sinusse

$$sin\, \vartheta$$
$$sin\, (60 - \vartheta)$$
$$\text{und} - sin\, (60 + \vartheta)$$

entsprechen, so entsprechen der Bedingungsgleichung für die abzulösende Gleichung nur jene Wurzeln, welche die Produkte von $r = 2 \sqrt{\frac{A}{3}}$ in diese drei verschiedenen Sinusse angeben.

Da nun, wie man sieht,

$$\frac{3 r^2}{4} = A, \qquad (*)$$

$$\frac{r^3 sin\, 3\, \vartheta}{4} = B. \qquad (*)$$

so ist es nunmehr leicht, die Wurzeln der Gleichung zu berechnen.

Dieser Fall wird **casus irreducibilis** genannt, weil die Wurzelwerthe in der **Cardan**'schen Formel in imaginärer Form erscheinen, obschon sie mit Hilfe der trigonometrischen Funkzionen, wie man sieht, sich sämmtlich reel zeigen.

Beispiel. Es sei die Unbekannte $x^3 - 3\, x + 2 = o$ zu bestimmen. Dieses Beispiel gehört zum zweiten Falle, den wir, weil er keine Hilfsgrössen erfordert, auch nicht näher beleuchten durften. Als Beispiel kann es aber gestattet sein, ohne die Grenzen dieses Buches zu verlezen, diesen Fall ganz kurz durchzuführen. Hier ist $A = -3$, $B = +2$ und da für diesen Fall

$$x_1 = -\sqrt[3]{4B}$$

und

$$x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{B}{2}}$$

hat man

$$x_1 = -\sqrt[3]{8} = -2$$

und

$$x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = +1.$$

Es sind daher -2, $+1$ und $+1$ die gesuchten Wurzeln der gegebenen Gleichung, daher
$(x-[-2])(x-[+1])(x-[+1]) = (x+2)(x-1)(x-1) =$
$= o$ die Gleichung selbst.

Beispiel. Es sollen die Wurzelwerthe der Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = o$$

gefunden werden.

Nachdem nun hier $A = -7$, $B = +7$, folglich

$$\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} < o,$$

hat man:

$$r = \sqrt{\frac{4A}{3}} = \sqrt{\frac{28}{3}},$$

$$\sin 3\vartheta = \frac{4B}{r^3} = \sqrt{\frac{27}{28}},$$

wo unter A und B blos der numerische Koeffizient ohne Rücksicht auf das Zeichen verstanden wird, nachdem dasselbe bereits in der speziellen Bedingung dieses Falles einbegriffen ist.

Man findet also

$$\log r = 0{\cdot}4850184$$

$$\log \sin 3\vartheta = 9{\cdot}9921029,$$

daher

$$3\vartheta = 79^0\ 6'\ 23''{\cdot}80$$

$$\vartheta = 26^0\ 22'\ 7''{\cdot}93$$

$$60 - \vartheta = 33^0\ 37'\ 52''{\cdot}07$$

$$60 + \vartheta = 86^0\ 22'\ 7''{\cdot}93.$$

Führt man die Rechnung durch, so findet man

$$\log.\ x_1 = 0{\cdot}1325465$$

$$\log.\ x_2 = 0{\cdot}2284059$$

$$\log.\ x_3 = 0{\cdot}4841456$$

und da, wie aus der allgemeinen Auflösung hervorgeht, sowohl x_1 als x_2 positiv sind, während x_3 negativ wird, endlich als Wurzelwerthe:

$$x_1 = +\ 1{\cdot}356896$$
$$x_2 = +\ 1{\cdot}692022$$
$$x_3 = -\ 3{\cdot}048917$$

Beispiel. Es soll die Gleichung $3y^3 + 3y^2 + 4y + 2 = o$ aufgelöst werden. Dividirt man die ganze Gleichung durch 3 und sezt $y = x - \frac{1}{3}$, um die zweite Potenz wegzubringen, so erhält man als neue, nach den bereits bekannten Formeln aufzulösende Gleichung

$$x^3 + x + \frac{8}{27} = o.$$

Hier ist $A = +1$, $B = +\frac{8}{27}$, daher, wie man auf den ersten Blick ersieht,

$$\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} > o;$$

man hat also

$$tang\ \vartheta = \sqrt{\frac{4A^3}{27B^2}} = \sqrt{\frac{27}{16}},$$

daher

$$log.\ tang\ \vartheta = 0{\cdot}1136219$$
$$\vartheta = 52^0\ 24'\ 39''{\cdot}29,$$

nun ist

$$\frac{\vartheta}{2} = 26^0\ 12'\ 19''{\cdot}64$$

daher wegen

$$tang\ \varphi = \sqrt[3]{tang\ \frac{\vartheta}{2}},$$

$$log.\ tang\ \frac{\vartheta}{2} = 9{\cdot}6921233$$

$$log.\ \sqrt[3]{tang\ \frac{\vartheta}{2}} = 9{\cdot}8973744 = log.\ tang\ \varphi$$

also

$$\varphi = 38^0\ 17'\ 33''{\cdot}07.$$

Nun aber ist:

$$x = -2\sqrt{\frac{A}{3}}\ .\ cotg\ 2\varphi = -2\sqrt{\frac{1}{3}}\ .\ cotg.\ 76^0\ 35'\ 6''{\cdot}14$$

$$log.\ cotg.\ 2\varphi = 9{\cdot}3775058,$$
$$log.\ x = 0{\cdot}4399751 - 1$$

daher

$$x = -\ 0{\cdot}2754071$$

Es ist also

$$y_1 = x - \frac{1}{3} = -0{\cdot}6087404.$$

Wird nun die gegebene Gleichung durch den Wurzelfaktor

$$y + 0{\cdot}6087404$$

dividirt, so erhält man die neue Gleichung

$$y^2 + 0{\cdot}3912596\,y + 1{\cdot}0951578 = 0$$

und somit auf dem aus der Arithmetik bekannten Wege die beiden anderen imaginären Wurzeln der Gleichung

$$y_2 = -0{\cdot}1956298 + 1{\cdot}0280500\sqrt{-1}$$

$$y_3 = -0{\cdot}1956298 - 1{\cdot}0280500\sqrt{-1}.$$

§. 42.

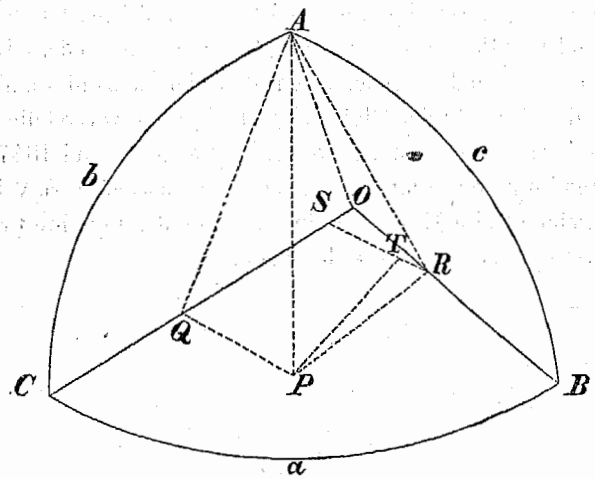
Um zur allgemeinen Auflösung von **Gleichungen des vierten Grades** auf trigonometrischem Wege zu gelangen, sucht man gewöhnlich durch Transformazion eine Gleichung des dritten Grades zu erhalten und verfährt nach der bereits bekannten Methode. Eine recht interessante Methode, Gleichungen des vierten Grades aufzulösen, wo man die Wurzeln der Gleichung erhält, ohne vorerst die Zeichen der Koeffizienten zu kennen, hat **Dr. Peche** am 4. Juni 1847 in der „Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften zu Wien“ gelehrt, welche Seite 19 u. s. w. im 3. Bande der Berichte pro 1847, Wien 1848, nachgesehen werden kann.

Zweiter Theil.

Sfärische Trigonometrie.

§. 43.

Sind AOB, AOC und BOC drei Ebenen von der Beschaffenheit, dass die Kanten AO, BO und CO dieser drei Ebenen sich wechselseitig berühren und O den Mittelpunkt einer Kugel vorstellt, von welcher AB, AC und BC Stücke der grössten Kreise sind, so nennt man die Begrenzung dieser drei Stücke ABC ein **sfärisches Dreieck.**



Die Winkel, welche diese drei Ebenen miteinander bilden, nennt man die **Winkel des sfärischen Dreiecks,** und da die Winkel, welche durch je zwei gegen denMittelpunkt des Kugelausschnittes einander zulaufende Kanten einer jeden solchen Ebene gebildet werden, genau so viel messen, als das mit dem Halbmesser $AO = BO = CO = 1$ beschriebene Bogenstück, welches zwischen den mehr erwähnten Kanten dieser Ebene eingeschlossen ist, so stellt ein solcher Winkel die Grösse der in der betreffenden Ebene liegenden **Seite des sfärischen Dreieckes** vor.

Wir rathen Denen, welche eine Erleichterung der Vorstellung wünschen und die sfärische Trigonometrie gründlich zu studiren beabsichtigen, recht sehr, Sich in einem kreisrunden Kartenpapier einen gut begrenzten Kreisausschnitt von etwa 200 Grad auszuschneiden und diesen Ausschnitt in drei ungleiche, doch nicht sehr verschiedene Theile etwa 56°, 64°, 80° abzutheilen, die Theilungspunkte mit dem Kreismittelpunkt zu verbinden und das Papier bei den gezogenen Halbmessern derart umzubiegen, dass die Kanten, welche die Grenzen des Kreisausschnittes waren, sich schliessen. Es können nun die kreisrunden Begrenzungen als die Seiten des sfärischen Dreiecks und das entstandene Körpereck als Mittelpunkt der Kugel gelten — und man ist in der Lage, wenn man die grösste Fläche zur Basis nimmt, alle nöthigen Hilfslinien zu konstruiren und zu beschreiben, oder mittelst Fäden einzuziehen und somit die deutlichste Vorstellung über diesen Gegenstand zu erlangen.

§. 44.

Zur Bestimmung der Relazionen der Seiten und Winkel eines sfärischen Dreieckes seien $BAC = A$, $ABC = B$ und $ACB = C$ die Winkel, ferner $BC = a$, $AC = b$ und $AB = c$ die diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten; ferner konstruire man vom Scheitelpunkte A des einen Winkels des sfärischen Dreieckes eine Senkrechte AP auf die gegenüber liegende Ebene BOC und von diesem Punkte P in derselben Ebene Senkrechte auf die beiden Seitenkanten dieser Ebene, nämlich $PQ \perp OC$ und $PR \perp OB$; ferner in dem Punkte R eine Senkrechte RS auf die gegenüber liegende Seitenkante OC dieser Ebene; endlich auf diese Senkrechte aus dem Punkte P wieder eine Senkrechte PT.

Verbindet man nun die Punkte Q und R mit A, so ist, weil $AP \perp$ pl. BOC und $PQ \perp OC$ auch $AQ \perp OC$ und aus einem analogen Grunde $AR \perp OB$.

Vermöge der Konstrukzion aber ist $APR = APQ = 90°$; ebenso ist $OSR = 90°$. Weil nun aber die Winkel des sfärischen Dreieckes durch die Lage der Ebenen bestimmt und sowohl PR als PQ in einer Ebene, als auch senkrecht auf die Seitenkanten sind und anderseits AR und AQ, welche gleichfalls senkrecht auf diese beiden vorgenannten Seitenkanten und in den an dieselben angrenzenden Ebenen liegen, ist $ARP = B$ und $AQP = C$.

Weil wir nun die Halbmesser der grössten Kreise = 1 sezen, so ist zufolge der früheren Annahme:

$$AQ = \sin b$$
$$OQ = \cos b$$
$$AR = \sin c$$
$$OR = \cos c.$$

Es ist ferner

$$OQ = OS + QS = OS + PT, \quad \text{wozu:}$$
$$OS = OR.\cos a$$
$$PT = PR.\sin PRT = PR.\sin a$$
$$PR = AR.\cos B.$$

Durch Substituzion in die Gleichung für OQ folgt:

$$\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\sin c.\cos B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Es ist auch

$$PQ = AQ.\cos C = \sin b.\cos C, \quad \text{und}$$
$$PQ = RS - RT = OR \sin a - PR \cos a$$
$$= \cos c.\sin a - \sin c.\cos B.\cos a,$$

daher

$$\sin b.\cos C = \sin a.\cos c - \sin c.\cos a.\cos B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ferner ist:

$$AP = AR.\sin B = AQ \sin C =$$
$$= \sin c.\sin B = \sin b.\sin C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

welche 3 Formeln die Grundformeln der sfärischen Trigonometrie bilden.

Durch Veränderung der Buchstaben ergeben sich ganz einfach die analogen Formeln.

§. 45.

Multiplizirt man die Gleichung (2) mit $\cos B$ und addirt zu ihr die zu (2) analoge Formel $\sin b.\cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$, so hat man:

$$\sin b\,(\cos A + \cos B \cos C) = \cos a.\sin c \sin^2 B.$$

Dividirt man nun diese Gleichung durch die Gleichung $\sin b \sin C = \sin c \sin B$ und bestimmt hieraus $\cos A$, so ist:

$$\cos A = -\cos B.\cos C + \cos a.\sin B \sin C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Für $\cos B$ und $\cos C$ findet man selbstverständlich ganz analoge Ausdrücke.

Wir wollen nun zuvörderst die wichtigsten Folgerungen ziehen.

Addirt und subtrahirt man den aus der Gleichung (1) bestimmten Werth für $\cos B$ zu und von der Gleichung $1 = 1$, so hat man wegen $\cos B = \cos^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{B}{2}$ nach geschehener Redukzion:

$$1 + \cos B = \frac{\cos b - \cos(a + c)}{\sin a . \sin c}$$

$$1 - \cos B = \frac{\cos(a - c) - \cos b}{\sin a . \sin c}.$$

Bringt man nun die Formel

$$\cos \varphi - \cos \psi = -2 . \sin \frac{\varphi + \psi}{2} . \sin \frac{\varphi - \psi}{2},$$

wobei für $1 + \cos B$ $\begin{cases} \text{das } \varphi = b \\ \text{und } \psi = a + c \end{cases}$

und für $1 - \cos B$ $\left\{\begin{matrix} \text{das } \varphi = a - c \\ \text{und } \psi = b \end{matrix}\right\}$ ist, in Anwendung und bedenkt, dass $1 + \cos B = 2 . \cos^2 \frac{B}{2}$ und $1 - \cos B = 2 . \sin^2 \frac{B}{2}$, so hat man:

$$2 . \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{-2 . \sin \frac{b + a + c}{2} . \sin \frac{b - a - c}{2}}{\sin a . \sin c}$$

$$2 . \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{-2 . \sin \frac{a - c + b}{2} . \sin \frac{a - q - c}{2}}{\sin a . \sin c}.$$

Führt man nun, wie es in der ebenen Trigonometrie geschehen, statt $\frac{a + b + c}{2} = s$ ein, streicht beiderseits den Faktor 2 ab, und zieht die Wurzel, so folgt:

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s . \sin(s - b)}{\sin a . \sin c}}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - a) \sin(s - c)}{\sin a . \sin c}}$$

Ganz analog erhält man auch

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s . \sin(s - a)}{\sin b . \sin c}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin b \sin c}}$$

und

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s . \sin(s - c)}{\sin a \sin b}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - a) \sin(s - b)}{\sin a . \sin b}}.$$

§. 46.

Aus (4) folgt ferner

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

daher

$$1 + \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C + \sin B \sin C}{\sin B \sin C}$$

$$1 - \cos a = \frac{-\cos A - \cos B \cos C + \sin B \sin C}{\sin B \sin C}$$

und somit

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos A + \cos (B - C)}{\sin B \sin C}$$

$$2 \sin^2 \frac{a}{2} = -\frac{\cos A + \cos (B + C)}{\sin B \sin C}.$$

Ist nun $\frac{A + B + C}{2} = S$,

so hat man, wenn man analoge Transformazionen vornimmt, wie früher geschehen,

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S - B) \cos (S - C)}{\sin B \sin C}},$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C}}.$$

Auch für die Sinusse und Kosinusse der beiden anderen Bogen erhält man ganz analoge Ausdrücke.

§. 47.

Aus obigen Gleichungen für die Winkel (§. 45) erhält man:

$$\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} = \frac{\sin s}{\sin c} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} = \frac{\sin (s-c)}{\sin c} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} = \frac{\sin (s-b)}{\sin c} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

$$\cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} = \frac{\sin (s-a)}{\sin c} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

Durch wechselweise Addizion und Subtrakzion dieser Gleichungen erhält man:

$$\cos \frac{A \mp B}{2} = \frac{\sin s \pm \sin (s - c)}{\sin c} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\sin \frac{A \pm B}{2} = \frac{\sin (s - b) \pm \sin (s - a)}{\sin c} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

Schafft man nun nach der bekannten Formel $\sin\varphi \pm \sin\psi$ die im Zähler des einen Faktors vorkommenden Summen weg und führt wieder s ein, so erhält man endlich die nach ihrem Erfinder benannten **Gauss**'schen **Analogien**:

$$\cos\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

Diese Gleichungen führen auch manchmal den Namen **Delambre'**-sche **Gleichungen.**

§. 48.

Wenn man nun aus diesen Gleichungen die Ausdrücke für $\tang\frac{A \pm B}{2}$ und $\tang\frac{a \pm b}{2}$ (durch einfache Division) bestimmt, so hat man die folgenden **Neper**'schen **Analogien**:

$$\tang\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cdot \cotg\frac{C}{2}$$

$$\tang\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cdot \cotg\frac{C}{2}$$

$$\tang\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \cdot \tang\frac{c}{2}$$

$$tang\,\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} \cdot tang\,\frac{c}{2}.$$

§. 49.

Bevor wir jedoch zur Auflösung des Dreieckes übergehen, ist es nothwendig, zu zeigen, dass die **Summe von je zwei Seiten desselben stets grösser ist, als die dritte Seite.**

Derjenige, welcher sich das in §. 42 anempfohlene Modell wirklich gemacht hat, wird ersehen haben, dass nur dann ein sfärisches Dreieck entsteht, wenn sich die umgebogenen Kreisausschnitte schliessen. Diess geschieht aber nur in dem einzigen Falle, wenn die Flächen dieser beiden Ausschnitte, und daher deren Bögen oder sfärische Begrenzungen (Seiten) zusammen grösser sind, als die Fläche des dritten Ausschnittes, daher dessen Bogen, sfärische Begrenzung (Seite).

§. 50.

Auch wird zugleich ersehen, dass **die Summe der drei sfärischen Begrenzungen (Seiten) stets kleiner sein muss, als 360 Grad,** weil nur dann ein sfärisches Dreieck entsteht, wenn man von der ausgeschnittenen Kreisfläche einen, wenn auch noch so kleinen, Kreisausschnitt gänzlich entfernt.

§. 51.

Wie aus der Entstehung des sfärischen Dreieckes bekannt ist, sind seine Winkel keine andern, als jene, welche durch die entsprechenden Ebenen, die sich im Mittelpunkte der Kugel schneiden, gebildet werden.

Um diese Winkel zu messen, kann man durch die Ecken des Dreieckes tangirende Ebenen legen und jenen Winkel als den Dreieckswinkel betrachten, welcher durch das Zusammentreffen von je zwei im Mittelpunkte der Kugel konvengirenden, unbestimmt verlängerten, Ebenen mit diesen Berührungsebenen entsteht. Jeder solche Winkel ist natürlich jedenfalls grösser, als der korrespondirende Winkel, der dadurch gebildet wird, dass man die Ecken des sfärischen Dreieckes durch Gerade verbindet. Da nun diese Eigenschaft jedem sfärischen Dreieckswinkel zukommt, ist jeder derselben grösser, als der entsprechende ebene Winkel und somit die **Summe aller Winkel eines sfärischen Dreieckes jedenfalls grösser, als 180 Grad.**

Der Ueberschuss heisst der **sfärische Exzess.**

§. 52.

Das grösste denkbare sfärische Dreieck kann durch Bogen begrenzt sein, von denen zwei, jeder 120^0 und der dritte nahe 120^0 misst. Ein solches Dreieck wird auch nahe den Flächeninhalt der halben Kugel zur Fläche haben und jeder Winkel wird nahe 180^0 messen*). Somit ist die nie zu erreichende Grenze der Summe der drei Winkel des grösst möglichen sfärischen Dreieckes

$$3.180^0 = 540^0.$$

Wird nun dieses Theorem mit dem Vorigen verglichen, so findet man, dass die Summe der drei Winkel eines sfärischen Dreieckes zwischen 180^0 und 540^0 und dass der sfärische Exzess zwischen 0^0 und 360^0 liegt.

§. 53.

Verlängert man zwei Seiten eines sfärischen Dreieckes von jenen Punkten aus, in welchen sie sich nicht schneiden, so lange, bis sie sich wieder treffen, was nur dort geschieht, wo sich der zum Schnittpunkte dieser beiden Dreiecksseiten entgegengesezte Pol befindet, weil die Seiten als Theile der grössten Kreise erscheinen, und sich zwei grösste Kreise immer nur in zwei (entgegengesezten) Polen schneiden können, so entsteht ein **sfärisches Zweieck**, welches das so Vielfache eines anderen sfärischen Zweieckes, dessen Bogen um einen Grad von einander abstehen, zur Fläche hat, als der Bogen beträgt, um welchen die Begrenzungen (Seiten) des sfärischen Dreieckes von einander abstehen. Nun aber hat das sfärische Zweieck, dessen Bogen um 1^0 von einander abstehen, eine Fläche, welche den 360sten Theil der Kugeloberfläche, das ist $\frac{4\pi r^2}{360^0}$ beträgt. Es wird daher die Fläche eines sfärischen Zweieckes, dessen Bogen um a^0 von einander abstehen, an Flächeninhalt $\frac{4\pi r^2}{360^0} . a^0$ haben.

---

*) Zieht man durch einen Punkt (Pol) an der Kugeloberfläche einen grössten Kreis, so ist der durch diesen Bogen entstehende (sfärische) Winkel die Hälfte des Winkels im Umfange oder des mit dem Pole konzentrischen Kreises, welcher 360^0 misst; daher der durch den grössten Kreis am Pole entstehende Winkel, dessen Mass der halbe, mit dem Pole konzentrische Kreisbogen ist, $\frac{360^0}{2} = 180^0$ beträgt.

§. 54.

Macht man alle Seiten eines sfärischen Dreieckes zu grössten Kreisen, so entstehen auf der Kugeloberfläche acht sfärische Dreiecke, von denen stets zwei zusammen ein sfärisches Zweieck bilden.

Um nun die Fläche F eines sfärischen Dreieckes zu erfahren, summirt man drei solche sfärische Zweiecke, welchen die verlangte Fläche gemeinschaftlich ist und hat:

$$F + \alpha = \frac{4\pi r^2}{360} \cdot A,$$

$$F + \beta = \frac{4\pi r^2}{360} \cdot B,$$

$$F + \gamma = \frac{4\pi r^2}{360} \cdot C,$$

wobei α, β, γ die zur Bildung des Zweieckes nöthigen Ergänzungsdreiecke, dann A, B, C die Winkel an den drei verschiedenen Polen bezeichnen. Es ist also:

$$3F + \alpha + \beta + \gamma = \frac{4\pi r^2}{360^0}(A + B + C).$$

Da nun auf der Kugeloberfläche ausser den Dreiecken F, α, β, γ nur noch die diesen entgegengesezten Dreiecke, welche genau so gross sind, wie diese, somit auch wie die Oberfläche der Halbkugel, übrig bleiben, so bildet

$$F + \alpha + \beta + \gamma = \frac{\textit{Kugelfläche}}{2} = 2\pi r^2,$$

daher auch

$$2F + 2\pi r^2 = \frac{4\pi r^2}{360^0}(A + B + C)$$

oder

$$F = \pi r^2 \left\{\frac{2(A + B + C)}{360^0} - 1\right\} = r^2(A + B + C - 180^0).$$

§. 55.

Um zur allgemeinen **Auflösung der schiefwinklichten sfärischen Dreiecke** überzugehen; wird man die Fälle betrachten, in welchen das Dreieck vollkommen bestimmt ist. Dieses ist der Fall, wenn

1. alle drei Seiten,
2. zwei Seiten und ein Winkel,
3. zwei Winkel und eine Seite,
4. alle drei Winkel

gegeben sind.

§. 56.

1. Gegeben alle drei Seiten a, b, c.

Zum Behufe der Berechnung sind die Sinusse und Kosinusse der halben Winkel bereits im §. 45 entwickelt.

Beispiel. Es sei
$$\begin{cases} a = 54^0\ 12'\ \ 0'' \\ b = 45^0\ 21'\ \ 0'' \\ c = 49^0\ 46'\ 30''. \end{cases}$$

Es ist also $s = \frac{a+b+c}{2} = 74^0\ 39'\ 45''$

daher
$$\begin{cases} s - a = 20^0\ 27'\ 45'' \\ s - b = 29^0\ 18'\ 45'' \\ s - c = 24^0\ 53'\ 15'' \end{cases}$$

ferner
$$\begin{aligned} log\,.\,sin\,a &= 9{\cdot}9090550 \\ log\,.\,sin\,b &= 9{\cdot}8521218 \\ log\,.\,sin\,c &= 9{\cdot}8828172 \\ log\,.\,sin\,s &= 9{\cdot}9842502 \\ log\,.\,sin\,(s-a) &= 9{\cdot}5435643 \\ log\,.\,sin\,(s-b) &= 9{\cdot}6898172 \\ log\,.\,sin\,(s-c) &= 9{\cdot}6241149 \end{aligned}$$

und somit
$$\begin{aligned} log\,.\,cos\,\frac{A}{2} &= 9{\cdot}89643775 \\ log\,.\,sin\,\frac{A}{2} &= 9{\cdot}78949655 \\ log\,.\,cos\,\frac{B}{2} &= 9{\cdot}94109760 \\ log\,.\,sin\,\frac{B}{2} &= 9{\cdot}68790350 \\ log\,.\,cos\,\frac{C}{2} &= 9{\cdot}92359415 \\ log\,.\,sin\,\frac{C}{2} &= 9{\cdot}73610235 \end{aligned}$$

daher die Winkel

	für *cos*	für *sin*
$\frac{A}{2} = 38^0\ \ 0'$	$57''{\cdot}36$	$57''{\cdot}38$
$\frac{B}{2} = 29^0\ 10'$	$16{\cdot}15$	$16{\cdot}16$
$\frac{C}{2} = 32^0\ 59'$	$57{\cdot}99$	$58{\cdot}02$

Man hat also folgende Winkel im gegebenen Dreiecke:

$$\begin{aligned} A &= 76^0\ 1'\ 54''\cdot 75 \\ B &= 58^0\ 20'\ 32\cdot 32 \\ C &= 65^0\ 59'\ 56\cdot 02 \\ \text{Summe} &= 200^0\ 22'\ 23''\cdot 09 \end{aligned}$$

wo

$$20^0\ 22'\ 23''\cdot 09$$

den sfärischen Exzess bildet.

Um nun den Flächeninhalt des sfärischen Dreieckes zu erhalten, braucht man den sfärischen Exzess bloss in das Bogenmass zu übertragen, was durch Multiplikazion mit $\frac{\pi}{180^0}$ geschieht, indem ein Faktor (das Quadrat des Kugelhalbmessers) wegfällt, da kein Halbmesser angegeben wurde, somit derselbe gleich Eins angenommen wird. Man hat also:

$$\begin{aligned} 20^0 &= 20^0 \\ 22' &= 0\cdot 3666667 \\ 23''\cdot 09 &= 0\cdot 0064139 \\ \hline 20^0\ 22'\ 23''\cdot 09 &= 20^0\cdot 3730806, \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} log.\ 20\cdot 373081 &= 1\cdot 3090567 \\ log.\ \pi &= 0\cdot 4971499 \\ \hline & \ 1\cdot 8062066 \\ log.\ 180 &= 2\cdot 2552725 \\ \hline & \ 0\cdot 5509341 - 1 \end{aligned}$$

somit

$$F = 0\cdot 3555774.$$

§. 57.

Wir wollen nun den Flächeninhalt des Dreieckes oder den sfärischen Exzess durch alle drei Seiten ausdrücken.

Man hat

$$F = A + B + C - 180^0$$

daher

$$tang\,\frac{F}{4} = tang\,\frac{1}{2}\left\{\frac{A+B}{2} - \frac{180^0 - C}{2}\right\}.$$

Aus den im §. 12 entwickelten Formeln erhält man

$$tang\,\frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{sin\,\varphi - sin\,\psi}{cos\,\varphi + cos\,\psi},$$

daher

$$tang\,\frac{F}{4} = \frac{sin\,\frac{A+B}{2} - sin\,\frac{180-C}{2}}{cos\,\frac{A+B}{2} + cos\,\frac{180-C}{2}}$$

woraus, nach Anwendung der **Gauss**'schen Analogien:

$$tang\,\frac{F}{4} = \frac{cos\,\frac{a-b}{2} - cos\,\frac{c}{2}}{cos\,\frac{a+b}{2} + cos\,\frac{c}{2}} \cdot \frac{cos\,\frac{C}{2}}{sin\,\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{sin\,\frac{a+c-b}{4} \,.\, sin\,\frac{b+c-a}{4}}{cos\,\frac{a+b+c}{4} \,.\, cos\,\frac{a+b-c}{4}} \cdot \sqrt{\frac{sin\,s\,.\,sin\,(s-c)}{sin\,(s-a)\,.\,sin\,(s-b)}}, \text{ wobei}$$

$s = \frac{a+b+c}{2}$. Es ist daher auch

$$tang\,\frac{F}{4} = \sqrt{tang\,\frac{s}{2} \,.\, tang\,\frac{s-a}{2} \,.\, tang\,\frac{s-b}{2} \,.\, tang\,\frac{s-c}{2}},$$

welcher Ausdruck nach seinem Urheber **L'huilier** benannt wird.

Beispiel.

Um diesen Fall durch das Beispiel des vorigen Paragrafes zu erläutern, hat man also:

$$\frac{s}{2} = 37^0\ 19'\ 52''{\cdot}5$$

$$\frac{s-a}{2} = 10^0\ 13'\ 52''{\cdot}5$$

$$\frac{s-b}{2} = 14^0\ 39'\ 22''{\cdot}5$$

$$\frac{s-c}{2} = 12^0\ 26'\ 37''{\cdot}5$$

$$log.\ tang\,\frac{s}{2} = 9{\cdot}8823299$$

$$log.\ tang\,\frac{s-a}{2} = 9{\cdot}2564568$$

$$log.\ tang\,\frac{s-b}{2} = 9{\cdot}4175200$$

$$log.\ tang\,\frac{s-c}{2} = 9{\cdot}3437332$$

somit

$$8{\cdot}9500200 = log.\ tang\,\frac{F}{4}$$

daher

$$\frac{F}{4} = 5^0\ 5'\ 35''{\cdot}764$$

$$F = 20^0\ 22'\ 23''{\cdot}06$$

der im vorigen Paragrafe gefundene sfärische Exzess.

§. 58.

Gegeben: zwei Seiten und ein Winkel.

2. Dieser **Winkel** sei **durch beide Seiten eingeschlossen,** somit also a, b und C gegeben.

Zur Bestimmung der beiden Winkel A und B wendet man die in §. 48 gegebenen, zwei ersten **Neper**'schen Gleichungen an, während man die unbekannte Seite mittelst der beiden lezten **Neper**'schen Formeln finden kann.

Wollte man aber die dritte Seite direkt berechnen, so seze man in der §. 44 entwickelten Grundformel

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

oder

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \tang a \sin b \cos C)$$

für

$$\tang a \cos C = \cotg \varphi,$$

so folgt

$$\cos c = \cos a \left(\cos b + \sin b \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right)$$

und nach geschehener Redukzion

$$\cos c = \frac{\cos a \sin (b + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Beispiel.

$$\text{Gegeben: } a = 39^0\ 10'$$
$$b = 66^0\ 14'$$
$$C = 110^0\ \ 8'$$

Man hat:

$$\tang \frac{B+A}{2} = \frac{\cos 13^0\ 32'}{\cos 52^0\ 42'} \cdot \cotg.\ 55^0\ 4'$$

$$\log.\cos 13^0\ 32' = 9{\cdot}9877708$$

$$\log.\cotg 55^0\ \ 4' = 9{\cdot}8441508$$

$$\log.\cos 52^0\ 42' = 9{\cdot}7824643$$

$$0{\cdot}0494573 = \log.\tang \frac{B+A}{2},$$

$$\frac{B+A}{2} = 48^0\ 15'\ 19''{\cdot}39,$$

und
$$tang\,\frac{B-A}{2} = \frac{sin\,13^0\,32'}{sin\,52^0\,42}\,.\,cotg.\,55^0\,4'$$
$$log.\,sin\,13^0\,32' = 9{\cdot}3692363$$
$$log.\,cotg\,55^0\;\;4' = 9{\cdot}8441508$$
$$log\,sin\,52^0\,42' = 9{\cdot}9006257$$
$$9{\cdot}3127614 = log\,tang\,\frac{B-A}{2},$$
$$\frac{B-A}{2} = 11^0\,36'\,40''{\cdot}69,$$
also
$$B = 59^0\,52'\,0''{\cdot}08,$$
$$A = 36^0\,38'\,38''{\cdot}70.$$

Ferner ist:
$$tang\,\frac{c}{2} = \frac{cos\,\frac{B+A}{2}}{cos\,\frac{B-A}{2}}\,.\,tang\,52^0\,42'$$
$$log.\,cos\,\frac{B+A}{2} = 9{\cdot}8233513$$
$$log.\,tang\,52^0\,42' = 10{\cdot}1181614$$
$$log.\,cos\,\frac{B-A}{2} = 9{\cdot}9910202$$
oder
$$tang\,\frac{c}{2} = \frac{sin\,\frac{B+A}{2}}{sin\,\frac{B-A}{2}}\,.\,tang\,13^0\,32'$$
$$log.\,sin\,\frac{B+A}{2} = 9{\cdot}8728087$$
$$log.\,tang\,13^0\,32' = 9{\cdot}3814655$$
$$log.\,sin\,\frac{B-A}{2} = 9{\cdot}3037816$$
daher
$$9{\cdot}9504925 = log.\,tang\,\frac{c}{2},$$
also:
$$c = 83^0\,28'\,57''{\cdot}56.$$

Um aber das c direkt zu berechnen, hat man:
$$cotg\,\varphi = tang\,39^0\,10'\,.\,cos\,110^0\,8',$$
$$log.\,tang\,39^0\,10' = 9{\cdot}9109507$$
$$(-)\,log.\,sin\;\;20^0\;\;8' = 9{\cdot}5368184$$
$$9{\cdot}4477691 = log.\,cotg\,\varphi,\,(-)$$
daher
$$\varphi = -\,74^0\,20'\,12''{\cdot}52,$$

ferner:

$$\cos c = \frac{\cos 39^0\ 10' . \sin 8^0\ 6'\ 12''\cdot 52}{\sin 74^0\ 20'\ 12''\cdot 52},$$

$$\log.\cos 39^0\ 10' = 9\cdot 8894765$$
$$\log.\sin\ 8^0\ 6'\ 12''\cdot 52 = 9\cdot 1490998$$
$$\log.\sin\ 74^0\ 20'\ 12''\cdot 52 = 9\cdot 9835656$$
$$9\cdot 0550107 = \log.\cos c,$$

daher

$$c = 83^0\ 28'\ 57''\cdot 58.$$

§. 59.

2. *b*) **Der gegebene Winkel soll der einen Seite gegenüber liegen,** so dass also A, a, b als bekannt angenommen sind.

Da zufolge der in §. 44 gegebenen (3) Grundformel die Sinusse der Seiten zu den Sinussen der gegenüberliegenden Winkel proporzional sind, so ist es nunmehr leicht, den Winkel B zu berechnen. Den dritten Winkel, so wie die dritte Seite, findet man mittelst der bekannten **Neper**'schen Gleichungen.

Es kann die Bemerkung nicht entgehen, dass der Werth B hier zweifelhaft ist, da $\sin(180 - B) = \sin B$, man daher mit gleichem Rechte sowol B, als auch $180 - B$, als den zweiten Winkel anerkennen wird.

Um zu untersuchen, wann B entschieden bestimmt oder wann dasselbe zweideutig ist, hat man:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

woraus

$$\frac{\tang \frac{a+b}{2}}{\tang \frac{a-b}{2}} = \frac{\tang \frac{A+B}{2}}{\tang \frac{A-B}{2}}.$$

Nun aber sind die Differenzen $a - b$ und $A - B$ in Beziehung auf das Zeichen einander gleich, und es sind, wie diese Gleichung zeigt, auch die Summen $a + b$ und $A + B$ ebenfalls beide entweder grösser oder kleiner, als 180 Grad. Nachdem nun B zu bestimmen ist, so wird man die möglichen Fälle von $a + b$ abhängig machen und hat:

1) $a + b < 180^0$, daher $B < 180 - A$.

a) Ist nun $A \geqq 90$, so ist $B < 90^0$;

b) ist aber $A < 90$, so ist für $a > b$ das $B < 90^0$; ist hingegen $a < b$, so ist B unbestimmt.

2) $a + b = 180^0$, daher $B = 180 - A$.

3) $a + b > 180^0$, daher $B > 180^0 - A$.

a) Ist nun $A \leqq 90^0$, so ist $B > 90^0$;

b) ist aber $A > 90^0$, so ist für $a < b$ das $B > 90^0$; ist hingegen $a > b$, so ist B unbestimmt.

Beispiel. Es sei gegeben:

$$\begin{cases} A = 50^0\ 26' \\ a = 60^0\ 40' \\ b = 80^0\ 20. \end{cases}$$

Man hat

$$\begin{aligned} log.\ sin\ A &= 9.8869890 \\ log.\ sin\ b &= 9{\cdot}9937894 \\ log.\ sin\ a &= 9{\cdot}9404091 \\ 9{\cdot}9403693 &= log.\ sin\ B. \end{aligned}$$

Da nun hier B grösser als A sein muss, so ist derselbe sowohl spizig als stumpf und man hat:

$$B = \begin{cases} 60^0\ 39'\ 26''{\cdot}36 \\ 119^0\ 20'\ 33''{\cdot}64. \end{cases}$$

Es sind somit zwei Dreiecke, die den obigen Bestimmungen entsprechen:

Für $B = 60^0\ 39'\ 26''{\cdot}36$

hat man:

$$cotg\ \frac{C}{2} = \frac{cos\ 70^0\ 30' \,.\, tang\ 55^0\ 32'\ 43''{\cdot}18}{cos\ \ 9^0\ 50}$$

$$= \frac{sin\ 70^0\ 30' \,.\, tang\ 5^0\ 6'\ 43''{\cdot}18}{sin\ \ 9^0\ 50'}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} log.\ cos\ \ 70^0\ 30' &= 9{\cdot}5234953 \\ log.\ tang\ 55^0\ 32'\ 43''{\cdot}18 &= 10{\cdot}1636019 \\ log.\ cos\ \ \ 9^0\ 50' &= 9{\cdot}9935723 \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} log.\ sin\ 70^0\ 30' &= 9{\cdot}9743466 \\ log.\ tang\ 5^0\ \ 6'\ 43''{\cdot}18 &= 8{\cdot}9516222 \\ log.\ sin\ \ 9^0\ 50' &= 9{\cdot}2324440 \end{aligned}$$

daher

$$9{\cdot}6935248 = log.\ cotg\ \frac{C}{2},$$

somit

$$C = 127^0\ 26'\ 32''{\cdot}74.$$

Ferner ist

$$tang\ \frac{c}{2} = \frac{tang\ 70^0\ 30'\ .\ cos\ 55^0\ 32'\ 43''\cdot 18}{cos\ 5^0\ 6'\ 43''\cdot 18}$$

$$= \frac{tang\ 9^0\ 50'\ \cdot\ sin\ 55^0\ 32'\ 43''\cdot 18}{sin\ 5^0\ 6'\ 43''\cdot 18}.$$

Nun ist

$$log.\ tang\ 70^0\ 30' = 10\cdot 4508513$$
$$log.\ cos\ 55^0\ 32'\ 43''\cdot 18 = 9\cdot 7526277$$
$$log.\ cos\ 5^0\ 6'\ 43''\cdot 18 = 9\cdot 9982691$$

ferner

$$log.\ tang\ 9^0\ 50' = 9\cdot 2388717$$
$$log.\ sin\ 55^0\ 32'\ 43''\cdot 18 = 9\cdot 9162297$$
$$log.\ sin\ 5^0\ 6'\ 43''\cdot 18 = 8\cdot 9498914$$

daher

$$10\cdot 2052100 = log.\ tang\ \frac{c}{2},$$

somit

$$c = 116^0\ 7'\ 6''\cdot 29.$$

Für $B = 119^0\ 20'\ 33''\cdot 64$ hat man aber:

$$cotg\ \frac{C}{2} = \frac{cos\ 70^0\ 30'\ .\ tang\ 84^0\ 53'\ 16''\cdot 82}{cos\ 9^0\ 50'}$$

$$= \frac{sin\ 70^0\ 30'\ \cdot\ tang\ 34^0\ 27'\ 16''\cdot 82}{sin\ 9^0\ 52'}.$$

Nun ist

$$log.\ tang\ 84^0\ 53'\ 16''\cdot 82 = 11\cdot 0483778,$$

ferner

$$log.\ tang\ 34^0\ 27'\ 16''\cdot 82 = 9\cdot 8363981,$$

daher

$$10\cdot 5783008 = log.\ cotg\ \frac{C}{2},$$

somit

$$C = 29^0\ 35'\ 0''\cdot 82.$$

Endlich ist

$$tang\ \frac{c}{2} = \frac{tang\ 70^0\ 30'\ .\ cos\ 84^0\ 53'\ 16''\cdot 82}{cos\ 34^0\ 27'\ 16''\cdot 82}$$

$$= \frac{tang\ 9^0\ 50\ .\ sin\ 84^0\ 53'\ 16''\cdot 82}{sin\ 34^0\ 27'\ 16''\cdot 82}.$$

Nun ist

$$log.\ cos\ 84^0\ 53'\ 16''\cdot 82 = 8\cdot 9498914$$
$$log.\ cos\ 34^0\ 27'\ 16''\cdot 82 = 9\cdot 9162297$$

ferner

$$log.\ sin\ 84^0\ 53'\ 16''\cdot 82 = 9\cdot 9982691$$
$$log.\ sin\ 34^0\ 27'\ 16''\cdot 82 = 9\cdot 7526277$$

daher

$$9{\cdot}4845130 = log.\ tang\ \frac{c}{2}$$

somit

$$c = 33^0\ 56'\ 20''{\cdot}78.$$

§. 60.

Zwei Winkel und eine Seite gegeben und zwar soll

3. *a*) **die gegebene Seite einem der beiden Winkel anliegen,** somit A, B und c gegeben sein.

Zur Auffindung aller fehlenden Stücke hat man die **Neper**'schen Analogien.

Wollte man aber das C direkt berechnen, so hätte man

$$cos\ C = -\ cos\ A\ .\ cos\ B + sin\ A\ .\ sin\ B\ .\ cos\ c,$$

welche die im §. 45 gegebene (4) Formel ist. Sezt man hier

$$tang\ A\ .\ cos\ c = cotg\ \vartheta,$$

so hat man

$$cos\ C = \frac{cos\ A\ .\ sin\ (B - \vartheta)}{sin\ \vartheta}.$$

Beispiel.

$$\text{Gegeben} \begin{cases} A = 40^0\ 40' \\ B = 70^0\ 20' \\ c = 120^0\ 32' \end{cases}$$

Man hat

$$tang\ \frac{b+a}{2} = \frac{cos\ 14^0\ 50'\ .\ tang\ 60^0\ 16'}{cos\ 55^0\ 30'},$$

$$tang\ \frac{b-a}{2} = \frac{sin\ 14^0\ 50'\ .\ tang\ 60^0\ 16'}{sin\ 55^0\ 30'},$$

daher

$$\begin{aligned} log.\ cos\ \ 14^0\ 50' &= 9{\cdot}9852803 \\ log.\ cos\ \ 55^0\ 30' &= 9{\cdot}7531280 \\ log.\ tang\ 60^0\ 16' &= 10{\cdot}2432413 \\ log.\ sin\ \ 14^0\ 50' &= 9{\cdot}4082539 \\ log.\ sin\ \ 55^0\ 30' &= 9{\cdot}9159937 \end{aligned}$$

somit

$$10{\cdot}4753936 = log.\ tang\ \frac{b+a}{2}$$

$$9{\cdot}7355015 = log.\ tang\ \frac{b-a}{2}$$

$$\frac{b+a}{2} = 71^0\ 29'\ 47''{\cdot}63$$

$$\frac{b-a}{2} = 28^0\ 32'\ 26''{\cdot}87$$
$$b = 100^0\ \ 2'\ 14''{\cdot}50$$
$$a = 42^0\ 57'\ 20''{\cdot}76.$$

Ferner ist

$$cotg\,\frac{C}{2} = \frac{tang\ 55^0\ 30'.\ cos\ 71^0\ 29'\ 47''{\cdot}63}{cos\ 28^0\ 32'\ 26''{\cdot}87}$$
$$= \frac{tang\ 14^0\ 50'.\ sin\ 71^0\ 29'\ 47{\cdot}63}{sin\ 28^0\ 32'\ 26{\cdot}87}.$$

Nun ist

$$log.\ tang\ 55^0\ 30' = 10{\cdot}1628657$$
$$log.\ cos\ \ 71^0\ 29'\ 47''{\cdot}63 = 9{\cdot}5015543$$
$$log.\ cos\ \ 28^0\ 32'\ 26''{\cdot}87 = 9{\cdot}9437305$$

ferner

$$log.\ tang\ 14^0\ 50' = 9{\cdot}4229735$$
$$log.\ sin\ \ 71^0\ 29'\ 47''{\cdot}63 = 9{\cdot}9769478$$
$$log.\ sin\ \ 28^0\ 32'\ 26''{\cdot}87 = 9{\cdot}6792320$$

daher

$$9{\cdot}7206894 = log.\ cotg\,\frac{C}{2}$$

somit

$$C = 124^0\ 32'\ 36''{\cdot}48.$$

Um C direkt zu berechnen, führt man die Hilfsgrösse

$$cotg\ \vartheta = tang\ 40^0\ 40'.\ cos\ 120^0\ 32'$$

ein und hat

$$log.\ tang\ 40^0\ 40' = 9{\cdot}9340559$$
$$(-)\ log.\ sin\ \ 30^0\ 32' = 9{\cdot}7058975$$

daher

$$9{\cdot}6399534 = log.\ cotg\ \vartheta,\ (-)$$
$$\vartheta = -\ 66^0\ 25'\ 12''{\cdot}80.$$

Endlich ist

$$cos\ C = \frac{cos\ 40^0\ 40'.\ cos\ 46^0\ 45'\ 12''{\cdot}80}{-\ sin\ 66^0\ 25'\ 12''{\cdot}80}.$$

Da nun

$$log.\ cos\ 40^0\ 40' = 9{\cdot}8799634$$
$$log.\ cos\ 46^0\ 45'\ 12''{\cdot}80 = 9{\cdot}8357779$$
$$(-)\ log.\ sin\ 66^0\ 25'\ 12''{\cdot}80 = 9{\cdot}9621344$$

folgt

$$9{\cdot}7536069 = log.\ cos\ C,\ (-)$$

also wegen

$$cos\ (180 - C) = -\ cos\ C$$
$$C = 124^0\ 32'\ 36''{\cdot}44.$$

§. 61.

3. *b*) Liegt dagegen **die gegebene Seite dem einen gegebenen Winkel gegenüber**, so dass A, B und a gegeben sind, so wird die zweite Seite gleichfalls durch das Proporzionalsezen der Sinusse der Winkel zu den Sinussen der Seiten gefunden und der Werth des b ist in der allgemeinen Auflösung abermals zweideutig. Die im §. 59 angestellten Betrachtungen gelten auch hier; man braucht blos die gleichen grossen und kleinen Buchstaben zu verwechseln und hat daher folgende Resultate:

$$b < 90 \begin{cases} \text{für } A + B < 180^0, \text{ wenn } a \geqq 90^0 \text{ und} \\ \qquad\qquad \text{wenn } \begin{cases} a < 90^0 \\ A > B \end{cases} \end{cases}$$

$$b = 180 - a \text{ für den einzigen Fall } A + B = 180^0$$

$$b > 90 \begin{cases} \text{für } A + B > 180^0, \text{ wenn } a \leqq 90^0 \text{ und} \\ \qquad\qquad \text{wenn } \begin{cases} a > 90^0 \\ A < B \end{cases} \end{cases}$$

In den beiden anderen Fällen kann b sowohl spizig, als stumpf sein.

Zur Bestimmung der beiden anderen Stücke hat man die **Neper'**-schen Analogien.

Beispiel.

$$\text{Gegeben} \begin{cases} A = 80^0\ 32' \\ B = 110^0\ 12' \\ a = 70^0\ 16'. \end{cases}$$

Man hat

$$\sin b = \frac{\sin 70^0\ 16' . \cos 20^0\ 12'}{\sin 80^0\ 32'}.$$

Da nun

$$\log. \sin 70^0\ 16' = 9.9737162$$
$$\log. \cos 20^0\ 12' = 9{\cdot}9724310$$
$$\log. \sin 80^0\ 32' = 9{\cdot}9940449$$

hat man

$$9{\cdot}9521023 = \log. \sin b.$$

Da man nun in den Tafeln für b den Winkel $63^0\ 34'\ 56''{\cdot}92$ findet, was aber mit den gegebenen Grössen im Widerspruch steht, weil den grösseren Seiten nur die grösseren Winkel gegenüber liegen können und umgekehrt, hat man wegen

$$\sin b = \sin (180 - b)$$
$$b = 116^0\, 25'\, 3''{\cdot}08.$$

Zu demselben Resultate führt auch die oben gegebene Zusammenstellung der Fälle, in welchen b grösser oder kleiner ist, als 90 Grad; denn man hat hier $A + B > 180^0$ und dazu $a < 90^0$, in welchem Falle $b > 90^0$.

Zur Bestimmung der beiden anderen Stücke hat man:

$$\cot g.\frac{C}{2} = \frac{\sin 3^0\, 20'\, 31''{\cdot}54 \,.\, \cot g\, 5^0\, 22'}{\cos 23^0\, 4'\, 31''{\cdot}54}$$
$$= \frac{\cos 3^0\, 20'\, 31''{\cdot}54 \,.\, \tan g\, 14^0\, 50'}{\sin 23^0\, 4'\, 31''{\cdot}54}$$

daher

log. cotg.	$5^0\, 22'$		$= 11{\cdot}0271453$
log. sin	$3^0\, 20'\, 31''{\cdot}54$		$= 8{\cdot}7656498$
log. cos	$23^0\, 4'\, 31''{\cdot}54$		$= 9{\cdot}9637829$
log. tang.	$14^0\, 50'$		$= 9{\cdot}4229735$
log. cos	$3^0\, 20'\, 31''{\cdot}54$		$= 9{\cdot}9992607$
log. sin	$23^0\, 4'\, 31''{\cdot}54$		$= 9{\cdot}5932225$

somit

$$9{\cdot}8290122 = \log.\cot g.\frac{C}{2}$$
$$C = 111^0\, 59'\, 49''{\cdot}10.$$

Ferner ist

$$\tan g\,\frac{c}{2} = \frac{\sin 5^0\, 22' \,.\, \cot g\, 3^0\, 20'\, 31''{\cdot}54}{\cos 14^0\, 50'}$$
$$= \frac{\cos 5^0\, 22' \,.\, \tan g\, 23^0\, 4'\, 31''{\cdot}54}{\sin 14^0\, 50'}$$

daher

log. sin	$5^0\, 22'$	$= 8{\cdot}9709468$
log. cotg.	$3^0\, 20'\, 31''{\cdot}54$	$= 11{\cdot}2336110$ *)

*) Wenn man grössere Tafeln hat, in welchen für die ersten Grade die Sinusse und Tangenten nicht von 10 zu 10 Sekunden, sondern z. B. von Sekunde zu Sekunde fortschreiten, wird man in diesem Falle am besten thun, den Logarithmus für die Tangente des Winkels aufzusuchen und davon die dekadische Ergänzung zu benützen. Will man aber die Genauigkeit der Rechnung nicht auf's Höchste treiben, so könnte man natürlich viel bequemer den zu suchenden Logarithmus aus den beiden bereits oben gefundenen Sinus- und Kosinuslogarithmen desselben Winkels durch Subtrakzion erhalten.

$$log.\ cos\ \ 14^0\ 50' = 9{\cdot}9852803$$
$$log.\ cos\ \ 5^0\ 22' = 9{\cdot}9980921$$
$$log.\ tang\ 23^0\ \ 4'\ 31''{\cdot}54 = 9{\cdot}6294395$$
$$log.\ sin\ \ 14^0\ 50' = 9{\cdot}4082539$$

somit

$$0{\cdot}2192776 = log.\ tang\ \frac{c}{2}$$
$$c = 117^0\ 46'\ 21''{\cdot}97.$$

Es sei noch nebenbei bemerkt, dass man sich zur Auflösung dieses Falles auch folgender Formeln bedienen kann

$$sin\ (C - \varphi) = \frac{cos\ A\ .\ sin\ \varphi}{cos\ B},$$

wozu

$$cotg\ \varphi = tang\ B\ .\ cos\ a,$$

ferner

$$sin\ (c - \psi) = cotg\ .\ A\ .\ tang\ B\ .\ sin\ \psi,$$

wozu

$$tang\ \psi = cos\ B\ .\ tang\ a.$$

Man hätte also:

$$(-)\ log\ .\ cotg\ 20^0\ 12' = 10{\cdot}4342367$$
$$log\ .\ cos\ \ 70^0\ 16' = 9.5284577$$
$$9{\cdot}9626944 = log\ cotg\ \varphi,\ (-)$$

und wegen

$$cotg\ (180 - \varphi) = -\ cotg.\ \varphi$$
$$\varphi = 132^0\ 32'\ 31''{\cdot}\ 87,$$

ferner

$$log\ .\ cos\ 80^0\ 32' = 9{\cdot}2160967$$
$$log\ .\ cos\ 42^0\ 32'\ 31''{\cdot}87 = 9{\cdot}8673377$$
$$(-)\ log\ .\ sin\ 20^0\ 12' = 9{\cdot}5381943$$
$$9{\cdot}5452401 = log.\ sin\ (C - \varphi),\ (-)$$

und wegen

$$-\ sin\ (C - \varphi) = sin\ (\varphi - C)$$
$$\varphi - C = 20^0\ 32^0\ 42''{\cdot}64,$$

daher

$$C = 111^0\ 59'\ 49''{\cdot}23.$$

Um endlich c zu bestimmen, hat man ferner

$$(-)\ log\ .\ sin\ \ 20^0\ 12' = 9{\cdot}5381943$$
$$log\ .\ tang\ 70^0\ 16' = 10{\cdot}4452585$$
$$9{\cdot}9834528 = log\ .\ tang\ \psi,\ (-)$$

und wegen

$$tang\ (180 - \psi) = -\ tang\ \psi$$
$$\psi = 136^0\ 5'\ 28''{\cdot}53,$$

Es ist auch

$$\begin{aligned} &log\,.\,cotg\ 80^0\ 32' &&= 9{\cdot}2220518 \\ (-)\ &log\,.\,cotg\ 20^0\ 12' &&= 10{\cdot}4342367 \\ &log\,.\,cos\ \ 46^0\ \ 5'28''{\cdot}53 &&= 9{\cdot}8410538 \\ &9{\cdot}4973423 = log\,.\,sin\,(c - \psi),\ (-) \end{aligned}$$

daher

$$\psi - c = 18^0\ 19'\ 6''{\cdot}50$$

und

$$c = 117^0\ 46'\ 22''{\cdot}03.$$

§. 62.

Es seien **alle Winkel gegeben** und alle Seiten zu finden. Hiezu hat man die §. 46 entwickelten Ausdrücke für die Kosinusse und Sinusse der halben Seiten.

Beispiel.

$$\text{Gegeben}\begin{cases} A = 100^0 \\ B = \ \ 80^0 \\ C = \ \ 96^0. \end{cases}$$

Demzufolge ist

$$\begin{aligned} S &= 138^0,\ log.\ cos\ S &&= 9{\cdot}8710735\ (-) \\ S - A &= \ \ 38^0,\ log.\ cos\ (S - A) &&= 9{\cdot}8965321 \\ S - B &= \ \ 58^0,\ log.\ cos\ (S - B) &&= 9{\cdot}7242097 \\ S - C &= \ \ 42^0,\ log.\ cos\ (S - C) &&= 9{\cdot}8710735 \\ &\qquad log.\ sin\ A &&= 9{\cdot}9933515 \\ &\qquad log.\ sin\ B &&= 9{\cdot}9933515 \\ &\qquad log.\ sin\ C &&= 9{\cdot}9976143 \end{aligned}$$

somit

$$9{\cdot}8021587 = log.\ cos\ \frac{a}{2}$$

$$9{\cdot}8883199 = log.\ sin\ \frac{a}{2}$$

$$9{\cdot}8883199 = log.\ cos\ \frac{b}{2}$$

$$9.8021587 = log.\ sin\ \frac{b}{2}$$

$$9.8170194 = log.\ cos\ \frac{c}{2}$$

$$9{\cdot}8777220 = log.\ sin\ \frac{c}{2}$$

und endlich

$$\begin{aligned} a &= 50^0\ 38'\ 47''{\cdot}88 \\ b &= 39^0\ 21'\ 12''{\cdot}12 \\ c &= 48^0\ 59'\ 28''{\cdot}42. \end{aligned}$$

§. 63.

Auflösung rechtwinklichter sfärischer Dreiecke.

Es ist bekanntlich:

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos C$$
$$\sin c \,.\, \cos B = \sin a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \sin b \,.\, \cos C$$
$$\sin c \,.\, \cos A = \cos a \,.\, \sin b - \sin a \,.\, \cos b \,.\, \cos C,$$

ferner

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

endlich

$$\cos A = -\cos B \,.\, \cos C + \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos a$$
$$\cos B = -\cos A \,.\, \cos C + \sin A \,.\, \sin C \,.\, \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \,.\, \cos B + \sin A \,.\, \sin B \,.\, \cos c.$$

Sezt man in diesen Gleichungen $C = 90^0$, so wird c die Hypothenuse und man hat, wegen $\cos C = 0$ und $\sin C = 1$, folgende zur Auflösung rechtwinklichter sfärischer Dreiecke genügende acht Gleichungen:

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b$$
$$\sin c \,.\, \cos B = \sin a \,.\, \cos b$$
$$\sin c \,.\, \cos A = \cos a \,.\, \sin b$$
$$\sin a = \sin A \,.\, \sin c$$
$$\sin b = \sin B \,.\, \sin c$$
$$\cos A = \sin B \,.\, \cos a$$
$$\cos B = \sin A \,.\, \cos b$$
$$\cos c = \cot g\, A \,.\, \cot g\, B.$$

Im Falle, wenn eine Kathete und der gegenüber liegende Winkel gegeben ist, ist es, da die zweite Kathete nur durch den Sinus ausgedrückt ist, zweifelhaft, ob dieser Sinus einem spizigen oder stumpfen Winkel angehört. Wenn also die Aufgabe nicht durch andere Angaben näher bestimmt ist, so muss dieselbe für beide Fälle durchgeführt werden.

Für anderweitige Fälle wird erinnert, dass der grösseren Seite stets nur der grössere Winkel gegenüber liegt und umgekehrt.

§. 64.

Der **Legendre**'sche Saz zeigt, wie man die Korrekzion der Winkel findet, wenn man zur grossen Erleichterung der bei praktischen Vermessungen vorkommenden Rechnungen an Stelle eines sfärischen

Dreieckes ein ebenes einführt, dessen Seiten wechselweise dieselbe Länge, wie die Bogenlängen der Seiten des sfärischen Dreieckes beträgt.

Es sei also das sfärische Dreieck ABC mit den Seiten $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, dann den Winkeln $BAC = A$, $ABC = B$, $ACB = C$, so ist aus der sfärischen Trigonometrie bekannt, dass

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A,$$

woraus

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}.$$

Da bei praktischen Messungen die Sfäre des gemessenen Dreiecks, selbst wenn sich die Triangulirung auf 15 Meilen erstreckt, nicht mehr, als einen Grad beträgt, so kann man, wenn man in obige Gleichung für $\cos A$ die Bogen einführt, jede Potenz, die grösser als 4 ist, vernachlässigen und hat Behufs der Substituzion:

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24},$$

$$\sin b = b - \frac{b^3}{6},$$

u. s. f., daher

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - \left(1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{24}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24}\right)}{\left(b - \frac{b^3}{6}\right)\left(c - \frac{c^3}{6}\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - \left(1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{24} - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24} + \frac{b^2 + c^2}{4}\right)}{bc - \frac{cb^3}{6} - \frac{bc^3}{6}}$$

$$= \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24} - \frac{b^2 c^2}{4}}{bc\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6}\right)},$$

daher

$$bc \,.\, \cos A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24} - \frac{b^2 c^2}{4}\right)\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24} - \frac{b^2 c^2}{4}\right)\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6}\right)^{*)}$$

---

*) Durch Multiplikazion mit $\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6}\right)\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6}\right)^{-1}$, wodurch natürlich der Ausdruck derselbe bleibt. Man hat

daher also

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2 b^2 - 2\,a^2 c^2 - 2\,b^2 c^2}{24\,bc}.$$

Denkt man sich nun ein ebenes Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$ mit den Seiten $B_1\,C_1 = a$, $A_1\,C_1 = b$, $A_1\,B_1 = c$, so ist bekannt, dass

$$\cos A_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc},$$

daher

$$\cos A = \cos A_1 + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2 b^2 - 2\,a^2 c^2 - 2\,b^2 c^2}{24\,bc}.$$

Nun aber ist auch

$$\cos^2 A_1 = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2 b^2 - 2\,a^2 c^2 + 2\,b^2 c^2}{4\,b^2 c^2},$$

daher auch

$$1 - \cos^2 A_1 = \sin^2 A_1 = \frac{4\,b^2 c^2 - (a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^2 c^2)}{4\,b^2 c^2},$$

daher

$$\cos A = \cos A_1 - \frac{bc \sin^2 A_1}{6}.$$

Ist nun $A = A_1 + \varphi$, wobei der Winkel φ sehr klein ist, so kann man alle höheren Potenzen, als die erste, vernachlässigen und hat:

$$\cos A = \cos (A_1 + \varphi) = \cos A_1 - \varphi \sin A_1$$

wobei also

$$\varphi = \frac{bc}{6} \cdot \sin A_1.$$

Um den Erdhalbmesser ρ einzuführen, wird man auch für die Seiten des ebenen Dreieckes andere Bezeichnungen einführen und zwar:

$$a = \frac{\alpha}{\rho},\ b = \frac{\beta}{\rho},\ c = \frac{\gamma}{\rho},$$

daher

$$bc = \frac{\beta\gamma}{\rho^2},$$

$$\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6}\right)^{-1}\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6}\right)^{-1} = \left\{1 - \frac{(b^2 + c^2)^2}{36}\right\}^{-1}$$

daher wenn auch hier alle vierten Potenzen und die Produkte jener Grössen, von denen die Summen der Potenzexponenten ebenso hoch kommen, als verschwindend klein, weggelassen werden

$$\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6}\right)\left\{1 - \frac{(b^2 + c^2)^2}{36}\right\}^{-1} = 1 + \frac{b^2 + c^2}{36}.$$

und

$$\varphi' = \frac{\beta\gamma}{6\rho^2} \cdot \sin A_1,$$

$$\varphi'' = \frac{\beta\gamma}{6\rho^2} \cdot \frac{\sin A_1}{\sin 1''}, \text{ (für Sekunden)}$$

die Korrekzion für den Winkel A.

Ebenso erhält man

$$\chi' = \frac{\alpha\gamma}{6\rho^2} \cdot \sin B_1,$$

$$\chi'' = \frac{\alpha\gamma}{6\rho^2} \cdot \frac{\sin B_1}{\sin 1''}, \text{ (in Sekunden)}$$

als Korrekzion für den Winkel B, und endlich

$$\psi' = \frac{\alpha\beta}{6\rho^2} \cdot \sin C_1,$$

$$\psi'' = \frac{\alpha\beta}{6\rho^2} \cdot \frac{\sin C_1}{\sin 1''}, \text{ (in Sekunden)}$$

die Korrekzion für den Winkel C.

Da nun aber

$$\beta\gamma \sin A_1 = \alpha\gamma \cdot \sin B_1 = \alpha\beta \sin C_1 = 2\Delta$$

gleich der doppelten Fläche des ebenen Dreieckes ist, hat man

$$\varphi = \chi = \psi = \frac{\Delta}{3\rho^2 \sin 1''}.$$

Da aber, weil das Dreieck um den sfärischen Exzess E korrigirt wird, die Summe der Korrekzionen der drei Winkel den sfärischen Exzess geben muss, ist

$$E = \varphi + \chi + \psi$$

daher auch

$$E = \frac{\Delta}{\rho^2 \sin 1''}.$$

Sezt man nun statt Δ obige Werthe, so folgt:

$$E = \frac{\beta\gamma \sin A_1}{2\rho^2 \sin 1''} = \frac{\alpha\gamma \sin B_1}{2\rho^2 \sin 1''} = \frac{\alpha\beta \sin C_1}{2\rho^2 \sin 1''},$$

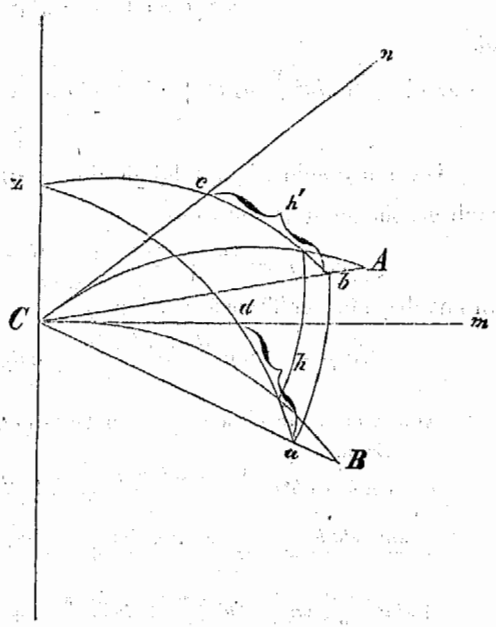
wobei α, β, γ die Seiten, und der zu jeder Zweiung gehörige Sinusfaktor, den Sinus des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels, im ebenen Dreiecke bedeutet.

Wie man leicht ersieht, sind die oben entwickelten Winkelkorrekzionen nichts Anderes, als der dritte Theil des sfärischen Exzesses. Hieraus folgt also, dass wenn die sfärischen Dreiecksseiten gegen den entsprechenden Kugelhalbmesser sehr klein sind, man ein

ebenes Dreieck von gleich grossen Seiten auf die bereits bekannte Weise substituiren kann. Dass dieser Saz blos approximativ richtig ist und um so unrichtiger wird, je grösser die Quozienten aus dem Kugelhalbmesser in die Dreiecksseiten werden, versteht sich wohl von selbst — und weil nun die Dreiecksseiten ungleich sind, ist auch die gleichmässige Vertheilung des Exzesses nicht ganz richtig, was **Delambre** zuerst bemerkte, aber erst von **Faber** vollständig gelöst wurde.

§. 65.

Legt man durch zwei einen sfärischen Winkel C bildende Bogen AC und BC vertikale Ebenen, zieht die Sehnen, und aus dem Scheitel C die Tangenten der Bogen, so werden sowohl diese Ebenen einander, als auch die Chorden und die vom Scheitel ausgehenden Tangenten der Bogen schneiden. Schneidet man nun sowohl die Bogen, als auch die Chorden aus C durch eine mit einem beliebigen Halbmesser beschriebene Kugelfläche, so wird die Ebene, in der die Chorden liegen, sfärisch begrenzt und man ersieht, dass sowohl der durch die beiden Tangenten gebildete, als der durch die Vertikalebenen bei z, entstandene Winkel dem ursprünglichen sfärischen Winkel gleich sind, weil dieselben gleiche Bogen zum Masse haben.



Es werden natürlich auch die Stücke der Vertikalbogen von dem Punkte, wo sie sich selbst schneiden, bis zu jenem Punkte, wo sie durch die Tangenten der horizontalen, ursprünglichen Bogen geschnitten werden, gleich und jeder 90 Grade sein.

Nun folgt aus dem sfärischen Vertikaldreiecke, dass zwischen dem zwischen den Chorden eingeschlossenen Bogen ab und dem sfärischen Winkel C ein gewisser Unterschied y (die Chorden-Redukzion), besteht, das heisst

$$ab = C - y,$$

ferner sind die Bogen

$$za = 90 + h$$
$$zb = 90 + h',$$

daher nach Formel (1), Seite 70

$$\cos(C - y) = \cos h \cos h' \cos C + \sin h \sin h' =$$
$$= \cos C \cos y + \sin C \sin y.$$

Wegen

$$\cos y = 1 - 2 \sin^2 \frac{y}{2}$$

ist

$$\cos C - 2 \sin^2 \frac{y}{2} \cos C + \sin C \sin y = \cos h \cos h' \cos C +$$
$$+ \sin h \sin h'.$$

Da nun y sehr klein, folglich $\sin \frac{y}{2} = 0$ gesezt werden kann, folgt nach geschehener Redukzion:

$$\sin y = \frac{(\cos h \cos h' - 1) \cos C + \sin h \sin h'}{\sin C}$$

und nach gehöriger Transformazion*)

$$\sin y = \tang \frac{C}{2} \sin^2 \frac{h + h'}{2} - \cotg \frac{C}{2} \sin^2 \frac{h - h'}{2}.$$

---

*) Wir wollen unseren Lesern zu Hilfe kommen.

Es ist

$$1 - \cos h \cos h' = \frac{1}{2} - \frac{\cos h \cos h'}{2} + \frac{\sin h \sin h'}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos h \cos h'}{2} -$$
$$- \frac{\sin h \sin h'}{2} = \frac{1 - \cos(h + h')}{2} + \frac{1 - \cos(h - h')}{2} = \sin^2 \frac{h + h'}{2} +$$
$$+ \sin^2 \frac{h - h'}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin \frac{h + h'}{2} + \sin \frac{h - h'}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sin \frac{h + h'}{2} - \sin \frac{h - h'}{2}\right)^2 =$$
$$= 2\left(\sin^2 \frac{h}{2} \cos^2 \frac{h'}{2} + \cos^2 \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h'}{2}\right),$$

daher also

$$(\cos h \cos h' - 1) \cos C + \sin h \sin h' = \sin h \sin h' -$$
$$- 2 \cos C \left(\sin^2 \frac{h}{2} \cos^2 \frac{h'}{2} + \cos^2 \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h'}{2}\right) = 2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2} . 2 \sin \frac{h'}{2} \cos \frac{h'}{2} -$$
$$- 2 \sin^2 \frac{h}{2} \cos^2 \frac{h'}{2} \cos C - 2 \cos^2 \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h'}{2} \cos C =$$

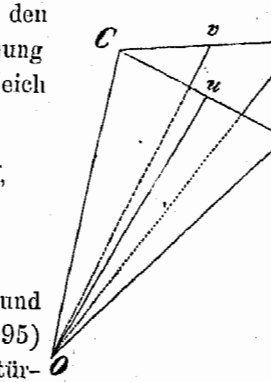
Nun aber ist

$$\sin y'' = y \sin 1''\ ^{*)},$$

daher

$$y = \frac{\tang \frac{C}{2} \sin^2 \frac{h+h'}{2} - \cotg \frac{C}{2} \sin^2 \frac{h-h'}{2}}{\sin 1''}.$$

Es seien nun die Sehnen $BC = R$ und $AC = L$; denkt man sich nun aus dem Mittelpunkte O der Erdkugel auf diese Chorden senkrechte Halbmesser, so hat man, da für den Erdball alle in nicht zu grosser Entfernung von einander liegenden Halbmesser als gleich angesehen werden können,



$$\text{Halbmesser } \rho = \frac{R}{2 \sin COu} = \frac{L}{2 \sin COv}$$

daher

$$\sin \frac{COB}{2} = \frac{R}{2\rho}, \ \sin \frac{COA}{2} = \frac{L}{2\rho}.$$

Da ferner $2.\ BCO = 180^0 - COB$ und wenn diese Figur mit der vorigen (Seite 95) in gehöriger Verbindung gedacht wird, natürlich der Winkel, welchen mC mit CO bildet, gleich 90^0 sein muss, weil die Tangente des Bogens in C immer nur senkrecht auf dem Halbmesser sein kann, so ist auch $mCB = 90 - BCO = \frac{COB}{2}$; daher

$$= \frac{\sin C}{\sin C}(1 - \cos C)\left(\sin \frac{h}{2} \cos \frac{h'}{2} + \cos \frac{h}{2} \sin \frac{h'}{2}\right)^2 -$$

$$- \frac{\sin C}{\sin C}(1 + + \cos C)\left(\sin \frac{h}{2} \cos \frac{h'}{2} - \cos \frac{h}{2} \sin \frac{h'}{2}\right)^2 =$$

$$= \sin C\left(\tang \frac{C}{2} \sin^2 \frac{h+h'}{2} - \cotg \frac{C}{2} \sin^2 \frac{h-h'}{2}\right).$$

*) Die Formel

$$\sin x'' = x \,.\, \sin 1''$$

findet, wenn man einen Fehler von Einer Einheit in der lezten Dezimalstelle nicht berücksichtigt,

bei einer Genauigkeit von 10 Dezimalstellen bis 5'',
» » » » 7 » » 180'' = 3',
» » » » 5 » » 1800'' = 30',

und bei dieser lezten Genauigkeit, wenn man sich in der lezten Dezimalstelle sogar einen Fehler von zwei Einheiten erlaubt, selbst bis 3600'' = 60' = 1° und darüber noch volle Anwendung. In 10 Dezimalstellen hat man:

$$\log. \sin 1'' = 4{\cdot}6855748668.$$

$$COB = 2 \,.\, mCB = 2\,h$$
$$COA = 2 \,.\, nCA = 2\,h'$$

man hat also

$$\sin h = \frac{R}{2\rho},\ \sin h' = \frac{L}{2\rho}$$

und da h und h' sehr klein sind, hat man auch

$$h = \frac{R}{2\,\rho \sin 1''} \text{ und } h' = \frac{L}{2\,\rho \sin 1''}$$

daher

$$\frac{h+h'}{2} = \frac{R+L}{4\,\rho \sin 1''}$$
$$\frac{h-h'}{2} = \frac{R-L}{4\,\rho \sin 1''}$$

und

$$\sin \frac{h+h'}{2} = \frac{R+L}{4\,\rho}$$
$$\sin \frac{h-h'}{2} = \frac{R-L}{4\,\rho}$$

somit

$$y = \frac{(R+L)^2 \tang \frac{C}{2} - (R-L)^2 \cotg \frac{C}{2}}{16\,\rho^2 \sin 1''},$$

die vom sfärischen Winkel C abzuziehende Redukzion.

Um nun diese Formel für den Gebrauch bequemer einzurichten, wenn nämlich der sfärische Exzess bereits bekannt ist, hat man ferner:

$$y = \frac{1}{16\,\rho^2 \sin 1''}\left\{(R^2 + 2\,RL + L^2) \tang \frac{C}{2} - \right.$$
$$\left. - (R^2 - 2\,RL + L^2) \cotg \frac{C}{2}\right\} = \frac{1}{16\,\rho^2 \sin 1''}\left\{R^2\left(\tang \frac{C}{2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \cotg \frac{C}{2}\right) + 2\,RL\left(\tang \frac{C}{2} + \cotg \frac{C}{2}\right) + L^2\left(\tang \frac{C}{2} - \cotg \frac{C}{2}\right)\right\}.$$

Wegen

$$\tang \frac{C}{2} = \frac{1 - \cos C}{\sin C},\ \cotg \frac{C}{2} = \frac{1 + \cos C}{\sin C}$$

aber ist

$$\tang \frac{C}{2} - \cotg \frac{C}{2} = -\,2 \cotg C$$
$$\tang \frac{C}{2} + \cotg \frac{C}{2} = \frac{2}{\sin C}$$

daher also

$$y = \frac{1}{4\,\rho^2 \sin 1''}\left\{\frac{RL}{\sin C} - \frac{(R^2 + L^2) \cotg C}{2}\right\}.$$

Da nun zufolge des **Carnot**'schen Sazes

$$R^2 + L^2 = K^2 + 2\,RL\cos C,$$

wo über die Bedeutung des K kein Zweifel sein kann, so folgt ferner

$$y = \frac{1}{4\,\rho^2 \sin 1''}\left\{\frac{RL}{\sin C} - \frac{(K^2 + 2\,RL\cos C)\cot g\,C}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\,\rho^2 \sin 1''}\left\{\frac{RL}{\sin C}(1 - \cos^2 C) - \frac{K^2 \cot g\,C}{2}\right\}$$

daher endlich

$$y = \frac{RL \sin C}{4\,\rho \sin 1''} - \frac{K^2 \cot g\,C}{8\,\rho^2 \sin 1''},$$

in welcher Formel, wie man leicht ersieht, das erste Glied den halben sfärischen Exzess bildet.

Beispiel. Ein wirklich gemessenes Dreieck auf der Erde ist das Dreieck mit den Winkeln

$$S = 62^0\ 52'\ 47''{\cdot}24$$
$$W = 59^0\ 45'\ 17''{\cdot}55$$
$$R = 57^0\ 21'\ 55''{\cdot}80.$$

Bei der sfärischen Ausgleichung des trigonometrischen Nezes wurden die Winkel und zwar

$$S \text{ um } + 0''{\cdot}36$$
$$W \text{ „ } - 0''{\cdot}34$$
$$R \text{ „ } - 0''{\cdot}61$$

verbessert, so dass die aus den sfärischen abgeleiteten ebenen Winkel des Dreieckes folgende waren

$$S = 62^0\ 52'\ 47''{\cdot}60$$
$$W = 59^0\ 45'\ 17''{\cdot}21$$
$$R = 57^0\ 21'\ 55''{\cdot}19.$$

Endlich wurde die Seite $RW = 16825{\cdot}34$ Wiener Klafter, oder besser $log.\ RW = 4{\cdot}2259638$ abgeleitet.

Wir wollen nun zuerst den sfärischen Exzess mittelst aller drei Winkel und dann die Chorden-Redukzionen berechnen, um sodann dieses Dreieck sfärisch aufzulösen. Da man auch die beiden anderen Seiten kennen muss, ist eine vorläufige Berechnung des Dreiecks nothwendig, wozu man hat:

$$log.\ \sin S = 9{\cdot}9494158$$
$$log.\ \sin W = 9{\cdot}9364522$$
$$log.\ \sin R = 9{\cdot}9253772$$

und daher in zusammenhängender Anschreibweise:

$$\begin{aligned}
\log.\ WR &= 4{\cdot}2259638 \\
\text{Compl. } \log.\ \sin S &= 0{\cdot}0505842 \\
\log.\ \sin W &= 9{\cdot}9364522 \\
\log.\ SR &= 4{\cdot}2130002 \\
\log WR + \text{Compl. } \log.\ \sin S &= 4{\cdot}2765480 \\
\log.\ \sin R &= 9{\cdot}9253772 \\
\log.\ SW &= 4{\cdot}2019252.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des sfärischen Exzesses und der Chorden Redukzion, werden gewöhnlich die Grössen

$$\log.\ (2\,\rho^2 \sin 1'')^{-1} = 1{\cdot}96173$$

und

$$\log.\ (8\,\rho^2 \sin 1'')^{-1} = 1{\cdot}35968$$

als additive Konstante behandelt.

Berechnung des sfärischen Exzesses mittelst des Winkels

	S	W	R
Logarithmen zweier Seiten . . . =	4·21300	4·22596	4·22596
	4·20193	4·20193	4·21300
Log. sin. des eingeschloss. Winkels =	9·94942	9·93645	9·92538
log. Constans . . . . . =	1·96173	1·96173	1·96173
log. Exzess . . . . . =	0·32608	0·32607	0·32607

daher

$$Exzess = 2{\cdot}119.$$

Chorden Redukzionen der Winkel

	S	W	R
Doppelter Log. der Gegenseite =	8·45193	8·42600	8·40385
log. cotg. des Winkels . . . . =	9·70941	9·76572	9·80644
log. Constans . . . . . =	1·35968	1·35968	1·35968
log. des einen Gliedes . . . . =	9·52102	9·55140	9·56997
Glied . . . . . =	0·332	0·356	0·372
Halber sfärischer Exzess . . . =	1·059	1·059	1·059
Chorden Redukzion . . . . . =	0·727	0·703	0·687.

Probe der Redu' zion

für S	0·73″
„ W	0·70
„ R	0·69
Exzess	2·12.

Es ist also das sfärische Dreieck folgendes:

$$S \quad 62^0\ 52'\ 48''{\cdot}33,\ \log.\sin S = 9{\cdot}9494166$$
$$W \quad 59^0\ 45'\ 17''{\cdot}91,\ \log.\sin W = 9{\cdot}9364530$$
$$R \quad 57^0\ 21'\ 55''{\cdot}88,\ \log.\sin R = 9{\cdot}9253781$$
$$\text{Summa} \quad 180^0\ \ 0'\ \ 2''{\cdot}12.$$

daher

$$\Sigma = 90^0\ \ 0'\ \ 1''{\cdot}06,\ \log.\cos \Sigma = 4{\cdot}7108808$$
$$\Sigma - S = 27^0\ \ 7'\ 12''{\cdot}73,\ \log.\cos(\Sigma - S) = 9{\cdot}9494155$$
$$\Sigma - W = 30^0\ 14'\ 43''{\cdot}15,\ \log.\cos(\Sigma - W) = 9{\cdot}9364517$$
$$\Sigma - R = 32^0\ 38'\ \ 5''{\cdot}18,\ \log.\cos(\Sigma - R) = 9{\cdot}9253767.$$

Man erhält somit

$$7{\cdot}3992326 = \log.\sin\frac{WR}{2}$$

$$7{\cdot}3862689 = \log.\sin\frac{SR}{2}$$

$$7{\cdot}3751939 = \log.\sin\frac{SW}{2}.$$

Da nun bekanntlich für kleine Bogen

$$\sin x'' = x\ .\ \sin 1'',$$

auf welche Art auch oben $\log.\cos 90^0\ 0'\ 1''{\cdot}06 = -\log.\sin 1''{\cdot}06$ gefunden wurde, wird man auch die bereits berechneten, jezt noch unbekannten Bogen des Dreieckes durch Subtrakzion von

$$\log.\sin 1'' = 4{\cdot}6855749$$

in Sekunden bestimmen können und hat

$$2{\cdot}7136577 = \log.\frac{WR}{2}$$

$$2{\cdot}7006940 = \log.\frac{SR}{2}$$

$$2{\cdot}6896190 = \log.\frac{SW}{2}$$

daher

$$\frac{WR}{2} = 517''{\cdot}199 = 8'\ 37''{\cdot}199$$

$$\frac{SR}{2} = 501''{\cdot}989 = 8'\ 21''{\cdot}989$$

$$\frac{SW}{2} = 489''{\cdot}349 = 8'\ \ 9''{\cdot}349$$

daher endlich

$$WR = 17'\ 14''{\cdot}40$$
$$SR = 16'\ 43''{\cdot}98$$
$$SW = 16'\ 18''{\cdot}70.$$

Wollte man nun die beiden anderen Seiten bestimmen, so hätte man

$$SR = WR \cdot \frac{501 \cdot 989}{517 \cdot 199},$$

$$SW = WR \cdot \frac{489 \cdot 319}{517 \cdot 199},$$

wobei $WR = 16825 \cdot 34$ Klafter als bekannt vorausgesezt wird. Es ist also

$$SR = 16330 \cdot 52 \text{ Klftr.}$$
$$SW = 15919 \cdot 34 \text{ Klftr.}$$

Um nun aus diesen Angaben und Berechnungen die Grösse eines Grades und den Erdhalbmesser für diesen Theil der Triangulirung zu berechnen, hat man, da $WR = 16825 \cdot 34$ Klftr., welche sich auf eine Ausdehnung von $2 \cdot 517'' \cdot 199 = 1034'' \cdot 398$ beziehen, für den Bogen von

$$1^0 = 3600 \cdot \frac{16825 \cdot 34}{1034 \cdot 398} \text{ Klftr.},$$

daher

$$log.\ arc\ 1^0 = 4 \cdot 7675786$$
$$arc\ 1^0 = 58556 \cdot 97 \text{ Wr. Klftr.}$$

Da nun ferner der halbe grösste Kreis der Erde, der durch die Punkte WR durchgeht,

$$\pi \varrho = 180 \cdot 58556 \cdot 97$$

Klafter beträgt, so folgt der Erdhalbmesser

$$\varrho = \frac{180}{\pi} \cdot 58556 \cdot 97,$$

daher

$$log.\ \varrho = 6 \cdot 5257012$$
$$\varrho = 3355067 \text{ Wr. Klftr.}$$

§. 66.

Sfärische Polygone.

Da die Fläche des sfärischen Dreieckes bekanntlich

$$= (A + B + C - 180) \frac{\pi r^2}{180},$$

so wird die Fläche P eines sfärischen Vieleckes, welches aus n Dreiecken besteht,

$$P = (S - 180\, n) \frac{\pi r^2}{180^0}$$

sein, wobei S die Summe aller Winkel dieser Dreiecke bezeichnet.

Da nun aber jedes Polygon eine solche Eintheilung in Dreiecke zulässt, dass ein willkürlicher Punkt innerhalb der durch die Polygonsgrenze bezeichneten Fläche existirt, welcher mit den Polygonsecken verbunden, eine eben so grosse Anzahl Dreiecke als Polygonsecken gibt, so ist klar, dass sich S in die Summe Σ aller inneren Polygonswinkel und die Summe aller um diesen einen Punkt liegenden Winkel $= 360^0$ zertheilen lässt, somit

$$S = \Sigma + 360^0.$$

Es ist also

$$P = (\Sigma + 360 - 180\,n)\frac{\pi r^2}{180} = [\Sigma - 180\,(n-2)]\frac{\pi r^2}{180}$$

wobei sich $\frac{\pi}{180}$ nur auf die Verwandlung des Bogenausdruckes und r^2 auf den Kugelhalbmesser bezieht.

§. 67.

Auch bei sfärischen Polygonen gilt der Saz, dass, wenn jeder Polygonseckpunkt mit einem auf der Kugelfläche, jedoch ausserhalb der Polygonslinie, aber innerhalb der Polygonsfläche, liegenden willkürlichen Punkte verbunden wird, die Produkte aus den Sinussen der gleichartig liegenden inneren Winkel an den Polygonsecken, den Produkten aus den Sinussen der anderen unter sich ebenfalls gleichartig liegenden inneren Winkel an den Polygonsecken, vollkommen gleich sind.

§. 68.

Um zu untersuchen, wie viele gleiche, regelmässige sfärische Vielecke auf der Kugelfläche denkbar sind, bezeichne x die Seitenzahl eines Vieleckes, y die Anzahl der um einen Punkt liegenden Winkel, endlich z die Zahl der Vielecke, so ist kraft des Obigen

$$P = \Sigma - (x-2)\,\pi$$

wobei der Halbmesser gleich Eins verstanden wird; daher

$$\text{Kugelfläche} = z\,\{\Sigma - (x-2)\,\pi\} = 4\,\pi$$

also

$$\Sigma = \frac{4\,\pi}{z} + (x-2)\,\pi.$$

Ist ferner φ der Polygonswinkel, so ist

$$\Sigma = \varphi\,x,$$

daher

$$\varphi = \frac{4\,\pi}{x\,z} + \frac{(x-2)\,\pi}{x}.$$

Da ferner

$$\varphi y = 2\pi$$

ist auch

$$\frac{2}{y} = \frac{4}{xz} + \frac{(x-2)}{x},$$

woraus

$$z = \frac{4y}{2x - (x-2)y}.$$

Da nun unmöglich weder x, noch y, noch z kleiner als 3 sein kann, so folgt:

$$2x > (x-2)y.$$

Nun ist für $x = 3$ das $y < 6$, daher y nur die Werthe 3, 4 und 5 annehmen kann.

Das Uebrige überlassen wir unseren Lesern.

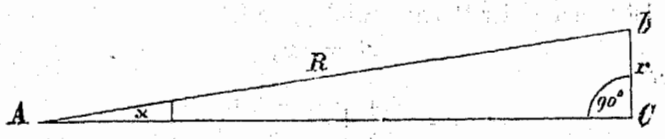
§. 69.

Zum Schlusse sei es uns noch erlaubt, zwei bei praktischen Triangulirungen häufig nöthige Redukzionen zu berühren.

Nachdem man öfters nicht die Achse, sondern nur eine der beleuchteten Flächen des entfernten Signales in ihrer Mitte pointiren kann, ist ersichtlich, dass der beobachtete Winkel entweder zu gross oder zu klein ausfällt, je nachdem diese Fläche vom zweiten entfernten Signale, (welches mit dem ersten und dem Signale am Standorte das Dreieck bildet), mehr entfernt oder diesem näher zugewendet ist.

Die Aufgabe der **Achsen-Redukzion** besteht in der Ermittlung des wahren Winkels und zunächst darin, zu dem beobachteten Winkel A' je nachdem derselbe grösser oder kleiner ist, als der wahre Winkel, eine Grösse $\mp x$ zu addiren, damit man den wahren Winkel A erhält.

Zur Bestimmung dieses Winkels x wird der Visirstrahl R so lange verlängert, bis er die auf den wahren Kollimazionspunkt C konstruirte Senkrechte schneidet. Bezeichnet man nun die Grösse dieser Senkrechten durch r und die Seite des Dreieckes



vom Beobachtungspunkte A bis zum anvisirten Punkte durch R, so hat man:

$$\sin x = \frac{r}{R}$$

und da x stets nur wenige Sekunden beträgt:

$$x = \frac{r}{R \cdot \sin 1''}$$

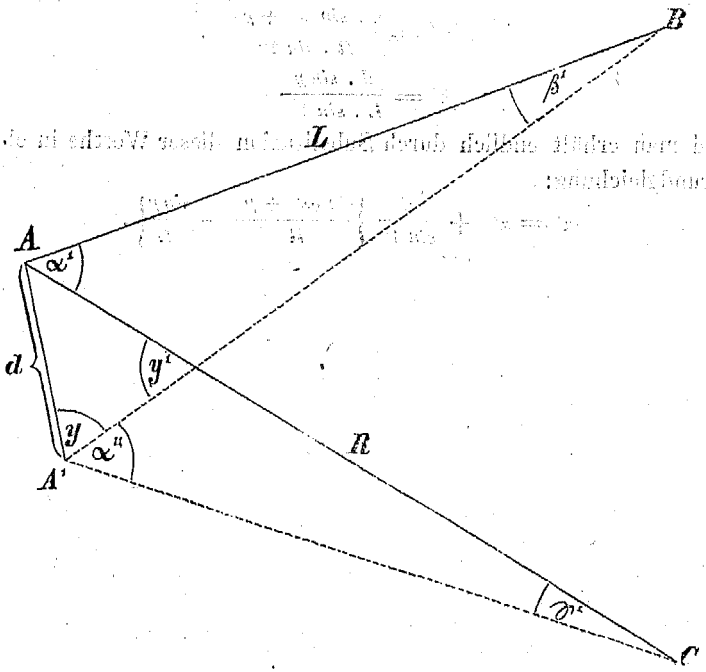
und endlich

$$A = A' \pm \frac{r}{R \sin 1''}.$$

§. 70.

Befindet man sich nicht in der Lage, das Beobachtungs-Instrument in die Achse A des Signales aufzustellen, so ist eine **Reduktion** des beobachteten Winkels **auf das Zentrum** nothwendig.

Es sei nun der Ausstellungspunkt A' um d von der Achse des Signales entfernt; ferner bezeichne man den zu bestimmenden wahren Winkel durch α' und den beobachteten Winkel durch α'', ferner den Winkel, welchen die Visirlinie (aus dem Standpunkte des Instrumentes) mit dem Abstande d bildet, durch y, dann die



Winkel, welche die entfernten Standpunkte B und C sowohl mit dem wahren als mit dem eigentlichen Beobachtungspunkte bilden, durch β' und γ', so beträgt die Grösse des dem Abstande d gegenüber liegenden Winkels y', welcher durch das Schneiden der (rechts liegenden) wahren und der (links liegenden) beobachteten Dreiecksseite gebildet wird,

$$y' = \alpha' + \beta' = \alpha'' + \gamma',$$

wie man auf den ersten Blick ersieht.

Es ist daher

$$\alpha' = \alpha'' + (\gamma' - \beta').$$

Sind ferner R und L die Seitenlängen des beobachteten Dreieckes, welche den Winkeln bei B und C im Dreiecke gegenüber liegen, oder mit anderen Worten die Entfernungen von der Achse des Signales am Standorte bis zu den entfernten Signalen, so folgt:

$$\sin \gamma' = \frac{d \sin (\alpha'' + y)}{R}$$

$$\sin \beta' = \frac{d \sin y}{L}$$

und weil gleichfalls die Winkel γ' und β' nur sehr klein sind

$$\gamma' = \frac{d \,.\, \sin (\alpha'' + y)}{R \,.\, \sin 1''}$$

$$\beta' = \frac{d \,.\, \sin y}{L \,.\, \sin 1''}$$

und man erhält endlich durch Substituzion dieser Werthe in obige Grundgleichung:

$$\alpha' = \alpha'' + \frac{d}{\sin 1''} \left\{ \frac{\sin (\alpha'' + y)}{R} - \frac{\sin y}{L} \right\}.$$

ANHANG.

Grafische Darstellung der Ellipse, und Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte, durch senkrechte Koordinaten.

Wie wichtig die Konstrukzion einer, den Zeichner sehr häufig beschäftigenden Figur der **Ellipse** ist, bedarf keiner Erörterung. Wohl sind viele Methoden, Ellipsen grafisch darzustellen; allein jede hat mehr oder weniger Beschwerliches und Umständliches an sich — und es lässt sich keine derselben auffinden, welche mit Nuzen eine allgemeine Anwendung hat, obschon nicht zu läugnen ist, dass jede ihre eigenen Verehrer hat, die sich nicht leicht bequemen, eine andere, wenn auch in speziellen Fällen, geeignetere Konstrukzion anzuwenden. Da nun selbst die einfachsten Methoden zur Zeichnung dieser Kurve auf eine gewisse Differenz zwischen der grossen und kleinen Achse beschränkt sind, so sind gewiss bessere Konstrukzionsmethoden Bedürfniss.

In dem Nachfolgenden werde ich die Methode meines hochverehrten Lehrers, des k. k. Professors der Mathematik in Wien, **Dr. Karl Leopold Schulz und Strassnitzki** (geb. am 31. März 1803 zu Krakau, gest. am 10. Juni 1852 zu Vöslau bei Wien) entwickeln, welche sich durch Genauigkeit und Einfachheit der Konstrukzion vor allen übrigen bereits bekannten Methoden auszeichnet.

Nennt man den spizigen Winkel, welchen der Radius ρ irgend eines Punktes der Ellipse mit der Abszissenachse bildet ϑ, ferner den äusseren (stumpfen) Winkel, den die Tangente desselben Punktes der Ellipse mit der Abszissenachse bildet φ, endlich x die Abszisse, y die Ordinate dieses Punktes, a die grosse, b die kleine Halbachse und e (den Quozienten aus dem Stücke vom Mittelpunkt der Ellipse bis zum Brennpunkt in die grosse Halbachse, das ist) die Exzentrizität, so hat man für das rechtwinklichte Koordinatensystem, in welchem der Mittelpunkt der Ellipse als Anfangspunkt der Koordinaten gilt:

$$x = \rho \,.\, \cos \vartheta$$

und

$$y = \rho \,.\, \sin \vartheta.$$

Substituirt man nun in diese quadrirten Ausdrücke den bekannten Werth

$$\varrho^2 = b^2 + e^2 x^2,$$

so erhält man

$$x^2 = b^2 \cos^2 \vartheta + e^2 x^2 \cos^2 \vartheta = \frac{b^2 \cos^2 \vartheta}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$y^2 = b^2 \sin^2 \vartheta + e^2 x^2 \sin^2 \vartheta = \frac{b^2 \sin^2 \vartheta}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

denn es ist:

$$x^2 = \frac{y^2}{tang^2 \vartheta}.$$

Ebenso ist

$$tang\,(180 - \varphi) = \frac{x\,y}{a^2 - x^2},$$

gleich der Ordinate, getheilt durch die Subtangente dieses Punktes der Ellipse, daher

$$tang\,\varphi = -\frac{x\,y}{a^2 - x^2}.$$

Sezt man nun das aus der Gleichung der Ellipse bestimmte

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$$

in den Ausdruck für *tang* φ, so hat man

$$tang\,\varphi = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

daher

$$tang^2 \varphi = \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}.$$

Führt man nun statt des Quadrates der Tangente einmal das Quadrat des Sinus; das andere Mal das Quadrat des Kosinus ein, so hat man:

$$\sin^2 \varphi = \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2 \left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)} = \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2 + b^4 x^2}$$

und

$$\cos^2 \varphi = \frac{a^4 y^2}{a^4 y^2 + b^4 x^2}.$$

Addirt man nun zu dem durch a^2 multiplizirten, quadrirten Werthe des Sinus, den durch b^2 multiplizirten, quadrirten Werth des Kosinus, so erhält man:

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = \frac{a^2 b^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2)}{a^4 y^2 + b^4 x^2}.$$

Nun aber ist in der Gleichung der Ellipse

$$a^2 b^2 = b^2 x^2 + a^2 y^2,$$

daher

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = \frac{a^4 b^4}{a^4 y^2 + b^4 x^2}$$

und wenn man in den zweiten Theil dieser Gleichung das $\sin^2 \varphi$ einführt, so erhält man

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = \frac{a^4 \sin^2 \varphi}{x^2},$$

woraus

$$x^2 = \frac{a^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

ebenso folgt durch Einführung des Kosinus

$$y^2 = \frac{b^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Ist nun für einen Punkt der Ellipse $\vartheta = 45^0$ und für einen zweiten Punkt $\varphi = 45^0$, so erhält man durch Substituzion in (1), (2), (3) und (4) wegen

$$\sin^2 \vartheta = \cos^2 \vartheta = \tfrac{1}{2}$$

und

$$\sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi = \tfrac{1}{2}$$

nach geschehener Redukzion die Werthe der Koordinaten dieser Punkte für den Winkel ϑ wegen $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$

$$x = \frac{a b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ und } y = \frac{a b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

zwei gleiche Koordinaten; dann für den Winkel φ

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ und } y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

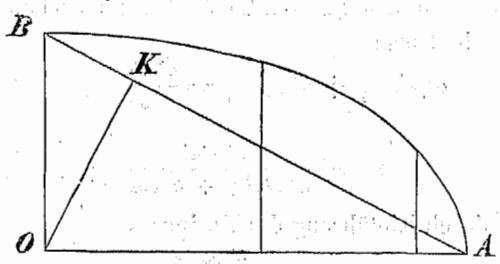
Um diese analytische Sprache auszulegen, hat man

$$\frac{a b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

Nun aber ist bekannt: dass **erstens** $\sqrt{a^2 + b^2}$ die Hypothenuse eines rechtwinkelichten Dreieckes ist, in welchem die grosse Halbachse a und die kleine Halbachse b als Katheten erscheinen; dass **zweitens** das Quadrat einer Kathete dividirt durch die Hypothenuse, gleich demjenigen Stücke der Hypothenuse ist, welches dieser Kathete anliegt, und durch Fällen einer Lothrechten vom Scheitel des rechten Winkels des Dreieckes auf die Hypothenuse entsteht; endlich

drittens, dass die Quadratwurzel aus dem Produkte der zwei, auf diese Weise möglichen, Theile der Hypothenuse, diese Senkrechte selbst ist; daher also:

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{AK \,.\, BK} = OK$$



Ist somit OK eine solche Lothrechse, so ist für den Winkel ϑ

$$x = y = OK,$$

dann für den Winkel φ

$$x = AK \text{ und } y = BK.$$

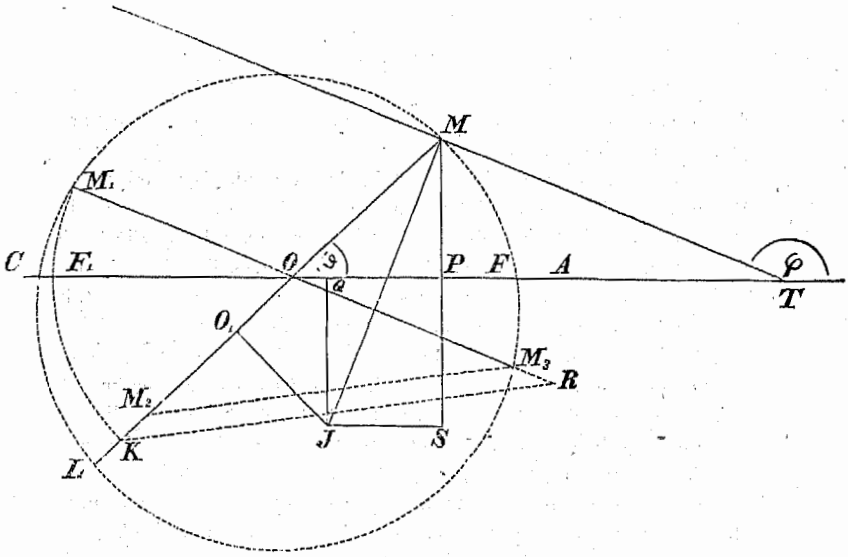
Man hat also zur Konstrukzion folgende Regel:

Man verbindet die Endpunkte der kleinen Achse mit den Endpunkten der grossen Achse, und fällt vom Mittelpunkte der Ellipse auf diese Verbindungslinien Lothe, wodurch die Verbindungslinien in zwei ungleiche Stücke getheilt werden. Dann trägt man die Länge dieses Lothes vom Mittelpunkte der Ellipse auf die Abszissenachse auf und bemerkt den Punkt, der durch das Auftragen dieses Lothes auf eine in diesem Punkte errichtete Senkrechte entsteht, als einen Punkt der Ellipse. Man trägt ferner die Länge des grösseren Stückes der Verbindungslinie auf die Abszissenachse vom Mittelpunkte der Ellipse auf und errichtet in dem Schnittpunkte eine Senkrechte, von dem man ein dem kleineren Stücke der erwähnten Verbindungslinie gleiches Stück abschneidet, wodurch man den Durchschnittspunkt als zweiten Punkt der Ellipse erhält. Nun führt man die Kurve von den Endpunkten der Achsen durch die, auf die eben angegebene Weise, konstruirten Punkte der Ellipse.

Das Empfehlenswerthe dieser Methode, durch welche man ohne vieler Umstände gerade jene Punkte der Ellipse zu bestimmen fähig ist, bei denen sich die Krümmungsrichtung dieser Figur am bedeutendsten ändert, fällt gar bald in die Augen; ja diese Methode sezt sogar den im Zeichnen minder Geübten auf eine überraschende

Weise in den Stand, mit und ohne Kurvenlinial schöne Ellipsen darzustellen, die gewiss richtiger sind, als die durch andere Methoden gezeichneten Ellipsen.

Bis hieher habe ich bereits diese Methode im März 1847 in der „Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien“ vorgetragen; worüber der II. Band der „Berichte“ Aufschluss gibt. Nachdem jedoch meines Wissens ausser meiner diessfälligen Veröffentlichung und meinen mathematischen Vorträgen im Pionnier-Offizierskollegium, in den Jahren 1851 und 1852, diese werthvolle Methode und um so weniger die hieher gehörige Methode, die Ellipse mittelst Krümmungskreisen einzuzeichnen, nicht bekannt wurde, so werde ich auch diese in dem Nachfolgenden entwickeln.



Es seien in obiger Figur die Radien

$$\left.\begin{aligned} \frac{M\,M_2}{2} &= OM = a, \\ \frac{M_1\,M_3}{2} &= OM_1 = b, \end{aligned}\right\} \text{ zwei konjugirte Halbmesser *).}$$

*) Konjugirte Durchmesser sind zwei (durch den Mittelpunkt der Ellipse) gezogene Sehnen von der Eigenschaft, dass jeder alle zum anderen Durchmesser gleichlaufenden Sehnen der Ellipse halbirt.

Verlängert man nun $OM_2 = OM$ bis zur Grösse $OK = OM_1 = OM_3$, verbindet man M_2 mit M_3 und macht KR parallel mit $M_2 M_3$, so folgt aus der Proporzionalität der Linien $OR = \frac{b_,^2}{a_,}$. Behält man ferner die Eingangs angenommenen Winkel φ und ϑ bei, und konstruirt um den Krümmungshalbmesser *) $R = JM$ zu erhalten, den halben Parameter MO_1, ferner $JO_1 \perp MM_2$ und $JM \perp MT$, so folgt

$$R = \frac{MO_1}{\cos O_1MJ}.$$

Nun aber ist O_1MJ der Winkel, der 90^0 zum Winkel $MOM_1 = \varphi - \vartheta$ ergänzt oder

$$O_1MJ = \varphi - \vartheta - 90 = -(90 - [\varphi - \vartheta]).$$

---

*) Denkt man sich zwei Punkte in der Ellipse unendlich nahe an einem Berührungspunkte, so ist auch der Halbirungspunkt, der durch die obigen zwei Punkte gelegten Sehne, dem Berührungspunkte unendlich nahe.

Jeder Kreis, dessen Mittelpunkt in der Normale liegt und dessen Halbmesser bis zum Berührungspunkte reicht, muss sowohl die Tangente, als die Ellipse im Berührungspunkte tangiren. Ein Kreis von dieser Eigenschaft, welcher zugleich durch die dem Berührungspunkte nächsten zwei Punkte geht, hat die innigste Berührung mit der Ellipse und wird Krümmungskreis und der zugehörige Halbmesser Krümmungshalbmesser genannt.

Um den Krümmungskreis der Ellipse bezüglich eines bestimmten Berührungspunktes zu finden, führt man durch diesen und die beiden Endpunkte des konjugirten Durchmessers einen Kreisbogen, welcher zugleich einen Punkt in dem, dem Berührungspunkte angehörigen (manchmal verlängerten) Durchmesser bezeichnet, dessen Entfernung vom Mittelpunkte der Ellipse, vom Berührungspunkte auf den zugehörigen Durchmesser aufgetragen, einen Punkt angibt, welcher der Halbirungspunkt einer Sehne des Krümmungskreises ist. Diese Sehne ist der Parameter des zugehörigen Durchmessers. Nachdem aber der Mittelpunkt des Krümmungskreises, welcher auch Krümmungsmittelpunkt genannt wird, nur in der Normale liegen kann, so errichtet man im Halbirungspunkte dieser Sehne ein Perpendikel, bis die Normale geschnitten wird; welcher Schnittpunkt der Krümmungsmittelpunkt und seine Entfernung vom Berührungspunkte der Krümmungshalbmesser ist.

Ferner ist

$$\cos - (90 - [\varphi - \vartheta]) = \cos(90 - [\varphi - \vartheta]) = \sin(\varphi - \vartheta)$$

und

$$MO_1 = \frac{p'}{2} = \frac{b_1^2}{a_1},$$

daher

$$R = \frac{b_1^2}{a_1} \cdot \frac{1}{\sin(\varphi - \vartheta)}.$$

Von früher ist bekannt

$$\tang \varphi = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Nun aber ist

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\tang \vartheta}$$

daher

$$\tang \varphi = -\frac{b^2}{a^2 \tang \vartheta}.$$

Es ist aber auch

$$\tang \vartheta = \frac{-b^2}{a^2 \tang \varphi}$$

daher

$$\sin \vartheta = \frac{-b^2}{\sqrt{a^4 \tang^2 \varphi + b^4}} = \frac{-b^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^4 \sin^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi}}$$

$$\cos \vartheta = \frac{a^2 \tang \varphi}{\sqrt{a^4 \tang^2 \varphi + b^4}} = \frac{a^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^4 \sin^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi}}.$$

Nun aber ist

$$\sin(\varphi - \vartheta) = \sin \varphi \cos \vartheta - \cos \varphi \sin \vartheta,$$

daher

$$\sin(\varphi - \vartheta) = \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{a^4 \sin^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi}}.$$

Addirt man die beiden allgemein giltigen Gleichungen (1) und (2), so hat man

$$x^2 + y^2 = a_1^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}.$$

Sezt man nun statt

$$e^2 \cos^2 \vartheta = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \tang^2 \vartheta} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b^4}{a^4 \tang^2 \varphi}} =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)\, a^2 \tang^2 \varphi}{a^4 \tang^2 \varphi + b^4},$$

so hat man

$$a_1^2 = \frac{b^2}{1 - \frac{(a^2 - b^2)\, a^2 \tang^2 \varphi}{a^4 \tang^2 \varphi + b^4}} = \frac{a^4 \tang^2 \varphi + b^4}{a^2 \tang^2 \varphi + b^2} = \frac{a^4 \sin^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Ganz dasselbe Resultat erhält man auch durch Summazion der Gleichungen (3) und (4); was ganz natürlich ist.

Man hat ferner

$$b_{,}^2 = \frac{a^4 \tan g^2 \vartheta + b^4}{a^2 \tan g^2 \vartheta + b^2} = \frac{a^4 \cdot \frac{b^4}{a^4 \tan g^2 \varphi} + b^4}{a^2 \cdot \frac{b^4}{a^4 \tan g^2 \varphi} + b^2} = \frac{a^2 b^2 + a^2 b^2 \tan g^2 \varphi}{b^2 + a^2 \tan g^2 \varphi} =$$

$$= \frac{a^2 b^2 \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Multiplizirt man nun die Werthe $a_{,}$ und $b_{,}$, so erhält man

$$a_{,} b_{,} = \frac{a b \sqrt{a^4 \sin^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi}}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi},$$

daher

$$\frac{a_{,} b_{,}}{a b} = \frac{1}{\sin(\varphi - \vartheta)}$$

und endlich

$$R = \frac{b_{,}^2}{a_{,}} \cdot \frac{a_{,} b_{,}}{a b} = \frac{b_{,}^3}{a b}.$$

Nun aber ist

$$b_{,}^3 = \frac{a^3 b^3}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

somit

$$R = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes zu bestimmen, hat man

$$OQ = \xi = x - JS$$
$$JQ = \eta = -(MS - y).$$

Ferner ist $JMS = 180 - \varphi$

$$JS = R \,.\, \sin(180 - \varphi) = R \,.\, \sin \varphi$$
$$MS = R \,.\, \cos(180 - \varphi) = -R \,.\, \cos \varphi.$$

daher

$$\xi = x - R \sin \varphi$$
$$\eta = y + R \cos \varphi.$$

Substituirt man nun die betreffenden, bereits bekannten, Werthe so erhält man

$$\xi = \frac{a^2 \sin \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2 b^2 \sin \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{a^2 \sin \varphi (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi - b^2)}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2 \sin \varphi (a^2 \sin^2 \varphi - b^2 [1 - \cos^2 \varphi])}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{a^2 \sin^3 \varphi (a^2 - b^2)}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ebenso folgt

$$\eta = \frac{b^2 \cos^3 \varphi (a^2 - b^2)}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hiebei kann die Bemerkung nicht entgehen, dass, weil η seiner Natur nach ein Unterschied ist, die Werthe für y und R, welche Wurzelausdrücke sind und daher ein doppeltes Zeichen haben, auch mit verschiedenem Zeichen addirt werden müssen.

Nachdem nun die Grösse des Krümmungshalbmessers und die Lage des Krümmungsmittelpunktes mittelst Abzissen und Ordinaten allgemein bestimmt sind, wollen wir diese Stücke auch speziell bestimmen.

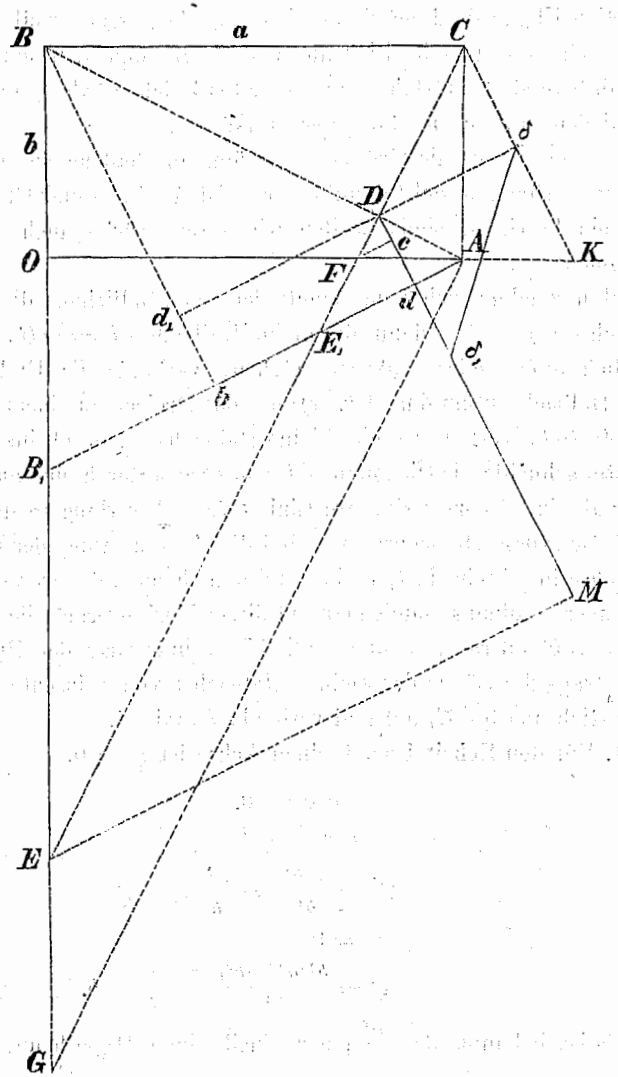
Man zeichne sich zum Behufe der Verständlichung die grosse Halbachse $a = OA$, dann die kleine Halbachse $b = OB$, welche natürlich aufeinander senkrecht stehen, verbinde die Endpunkte dieser Halbachsen miteinander, ergänze das Dreieck zu einem Rechtecke $ACBO$, verlängere die kleine Halbachse über O ins Unbestimmte, schneide die Diagonale AB von C aus, durch eine auf diese Diagonale in D perpendikuläre Linie CD und verlängere dieselbe, bis sie die grosse Halbachse in F und die Verlängerung der kleinen Halbachse in E schneidet, verlängere endlich auch die grosse Halbachse über A hinaus, damit man auf dieser Verlängerung die Grösse $AK = AF$ auftragen kann; endlich verbinde man den Punkt K mit C, trage die Länge der kleinen Halbachse von O in entgegengesezter Richtung bis $B_{,}$ auf und verbinde $B_{,}$ mit A.

1. Für den Scheitel der kleinen Achse ist $\varphi = 0$,

daher
$$\sin \varphi = 0$$
$$\cos \varphi = 1$$

somit
$$R = \frac{a^2 b^2}{b^3} = \frac{a^2}{b}$$
$$\xi = 0$$
$$\eta = \frac{b^2 (a^2 - b^2)}{b^3} = \frac{a^2}{b} - b.$$

Es ist bekannt, dass $\frac{a^2}{b}$ jener Theil einen Hypothenuse vorstellt, welcher mit b die Hypothenuse bildet; a ist hiebei das Loth, welches vom Scheitel des rechten Winkels auf den Schnittpunkt gefällt wurde. Um nun dieser Bedingung zu entsprechen, wird man im Punkte A auf die Linie AB eine Senkrechte AG errichten und hat $GO = \frac{a^2}{b}$. Da nun Parallele zwischen Parallelen einander gleich sind und man sich in O sehr leicht eine Senkrechte OK auf



AB denken kann, welche ebenso gross ist, wie CD und auch ebenso weit von B abstehen wird, als diese von A, kann man leicht durch D zu AG eine Parallele DE oder $CE = AG$ führen, so dass

$$R = OG = BE.$$

also E der Krümmungsmittelpunkt für B.

Da nun $\eta = BE - b$ und $b = OB$, folgt ferner $\eta = OE$.

2. Für den Scheitel der grossen Achse ist $\varphi = 90^0$, daher

$$\sin \varphi = 1$$
$$\cos \varphi = 0.$$

somit

$$R = \frac{b^2}{a}$$
$$\xi = a - \frac{b^2}{a}$$
$$\eta = 0.$$

Der Ausdruck $\frac{b^2}{a}$ stellt die zur Kathete b eines ähnlichen Dreieckes analoge Kathete vor; die zweite Kathete b korrespondirt mit der Kathete a des ähnlichen Dreieckes.

In obiger Figur hat man

$$ABO \backsim CFA$$

daher

$$R = AF$$

also F der Krümmungsmittelpunkt von A; ferner ist

$$\xi = OF.$$

3. Für $\varphi = 45^0$ ist $\sin \varphi = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

somit

$$R = \frac{a^2 b^2}{[\frac{1}{2}(a^2+b^2)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich in folgende Faktoren auflösen:

$$R = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{\sin 45^0}.$$

Der erste Faktor ist von früher bereits bekannt; es ist

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = CD.$$

Sezt man nun, um die Bedeutung des zweiten Faktors zu finden, $\tang \psi = \frac{b}{a}$, so ist

$$\sin \psi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ und } \cos \psi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

daher

$$\sin 2\psi = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Wegen $\tang \psi = \frac{b}{a}$ ist aber jedenfalls $\psi = OAB = FCA = ACK$, somit $2\psi = FCK$.

Macht man nun $D\delta$ senkrecht auf CK, so ist $D\delta = CD \sin 2\psi$, daher $R = D\delta : \sin 45^0$; führt man nun aus D zu CK eine Pa-

rallele und schneidet auf derselben ein Stück $D\delta_1 = D\delta$ ab und verbindet die beiden Punkte δ und δ' miteinander, so folgt $\delta\delta_1 = \frac{D\delta}{\sin 45^0}$. daher endlich

$$R = \delta\delta_1.$$

Ferner ist

$$\xi = \frac{a^2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\eta = \frac{b^2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Der Werth der Brüche

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = BD$$

und

$$\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = AD$$

ist von früher schon bekannt. Um nun auch die Bedeutung von $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ zu erfahren, seze man, wie früher, $ABC = OAB = \psi$, so folgt

$$\tang \psi = \frac{b}{a},$$

daher

$$\frac{1-\tang^2\psi}{1+\tang^2\psi} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Nun aber ist

$$\frac{1-\tang^2\psi}{1+\tang^2\psi} = \frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{\cos^2\psi + \sin^2\psi} = \cos 2\psi,$$

daher

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \cos 2\psi.$$

Man hat sonach

$$\xi = BD \,.\, \cos 2\psi$$
$$\eta = AD \,.\, \cos 2\psi.$$

Nun muss man trachten, zwei rechtwinkelichte Dreiecke zu erhalten, in welchen BD und AD die Hypothenusen sind; ferner muss der Winkel 2ψ durch diese Hypothenusen und durch die gesuchten Katheten ξ und η eingeschlossen sein.

Der Winkel 2ψ ist bereits von früher bekannt und die beiden erforderlichen, einander ähnlichen Dreiecke BDd, und DAd, in welchen beziehungsweise bei D und A der Winkel 2ψ erscheint,

werden gebildet, indem man vom Scheitel B der kleinen Halbachse auf die gegenüber liegende Verbindungslinie des Scheitels $B_{,}$ der anderen kleinen Halbachse mit dem Scheitel A der grossen Halbachse, eine Senkrechte Bb und von dem Schnittpunkte D der Verbindungslinie AB sowohl auf diese Senkrechte Bb, als auf jene Verbindungslinie $AB_{,}$ die Perpendikeln $Dd_{,}$ und Dd errichtet.

Man hat sonach

$$Dd_{,} = bd = BD \,.\, cos\, 2\,\psi$$

und

$$Ad = AD \,.\, cos\, 2\,\psi,$$

daher

$$\xi = bd \text{ und } \eta = Ad.$$

4. Für $\vartheta = 45^0$ (nahe an dem Scheitel der kleinen Halbachse) hat man $sin\,\vartheta = cos\,\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ganz auf dieselbe Weise, wie früher die Werthe von $sin\,\vartheta$ und $cos\,\vartheta$ durch die Funkzionen von φ und die beiden Halbmesser ausgedrückt wurden, lässt sich auch $sin\,\varphi$ und $cos\,\varphi$ ausdrücken. Man erhält sonach in ganz analoger Form

$$sin^2\,\varphi = \frac{b^4\,cos^2\,\vartheta}{a^4\,sin^2\,\vartheta + b^4\,cos^2\,\vartheta}$$

und

$$cos^2\,\varphi = \frac{a^4 sin^2\,\vartheta}{a^4\,sin^2\,\vartheta + b^4\,cos^2\,\vartheta}.$$

Substituirt man hier für $sin^2\,\vartheta$ und $cos^2\,\vartheta$, so erhält man

$$sin^2\,\varphi = \frac{b^4}{a^4+b^4}$$

$$cos^2\,\varphi = \frac{a^4}{a^4+b^4},$$

daher

$$R = \frac{a^2\,b^2}{\left(a^2 \cdot \frac{b^4}{a^4+b^4} + b^2 \cdot \frac{a^4}{a^4+b^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2\,b^2\,(a^4+b^4)^{\frac{3}{2}}}{a^3\,b^3\,(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a\,b}\left(\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Bei der sehr elementaren Konstrukzion dieses Ausdruckes wollen wir unseren Lesern nur mit Nachfolgendem zu Hilfe kommen.

Man hat

$$\left(\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{a^4}{a^2+b^2} + \frac{b^4}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Der Ausdruck $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$ bezeichnet aber offenbar das Quadrat einer Hypothenuse z, welche die Katheten BD und AD zu einem rechtwinkeligen Dreiecke ergänzt. Man hat also nur noch die Bedeutung des nun sehr einfachen Ausdruckes $R = \frac{z^3}{ab}$ zu ermitteln. Trägt man die Grösse z von O (Mittelpunkt der Ellipse) sowohl auf der grossen, als auf der kleinen verlängerten Halbachse auf; verbindet den Endpunkt der grossen Halbachse mit dem Schnittpunkte des z in der verlängerten kleinen Achse; führt zu dieser Verbindungslinie aus dem Endpunkte der kleinen Achse eine Parallele zwischen beiden Achsen, damit (von O aus) an der grossen Halbachse eine Liniengrösse o abgeschnitten werde; verbindet den durch diese Parallele enstandenen Schnittpunkt in der grossen Halbachse mit dem durch das Auftragen des z enstandenen Schnittpunkt in der Verlängerung der kleinen Halbachse und führt endlich zu dieser Verbindungslinie aus dem durch Auftragen des z in der grossen Halbachse enstandenen Schnittpunkt eine Parallele zwischen den beiden Achsen, damit (von O aus) an der Verlängerung der kleinen Achse eine Liniengrösse R abgeschnitten wird, so hat man vermöge der Proporzionalität der Linien

$$\frac{z}{b} = \frac{a}{o} \text{ und } \frac{R}{z} = \frac{z}{o},$$

woraus man durch Eliminazion des o den verlangten Ausdruck erhält.

Ferner ist

$$\xi = \frac{a^2 \left(\frac{b^4}{a^4+b^4}\right)^{\frac{3}{2}} (a^2 - b^2)}{\left(a^2 \cdot \frac{b^4}{a^4+b^4} + b^2 \cdot \frac{a^4}{a^4+b^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2 b^6 (a^2 - b^2)}{a^3 b^3 (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\eta = \frac{b^2 \left(\frac{a^4}{a^4+b^4}\right)^{\frac{3}{2}} (a^2 - b^2)}{\left(a^2 \cdot \frac{b^4}{a^4+b^4} + b^2 \cdot \frac{a^4}{a^4+b^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^6 b^2 (a^2 - b^2)}{a^3 b^3 (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{a^3}{b\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Um diese Werthe zu bestimmen, hat man

$$\frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{a^2+b^2-a^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{b^4}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{b^4}{a^2} - \frac{b^4}{a^2+b^2}} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}.$$

Der Werth der beiden unter dem Wurzelzeichen befindlichen Ausdrücke ist bereits bekannt; denn es ist

$$\frac{b^2}{a} = AF \text{ und } \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = AD.$$

Es ist somit der Werth von $\frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}}$ nichts Anderes, als die Kathete FD des Dreieckes ADF.

Auf dieselbe Weise findet man

$$\frac{a^3}{b\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2} = \sqrt{\overline{BE}^2 - \overline{BD}^2}$$

als Kathete ED des Dreieckes EDB.

Nachdem nun bekanntlich

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \cos 2\psi$$

so hat man

$$\xi = FD \,.\, \cos 2\psi$$
$$\eta = ED \,.\, \cos 2\psi.$$

Es wird nun ebenfalls darauf ankommen, zwei rechtwinklichte Dreiecke von der Beschaffenheit zu finden, dass der Winkel 2ψ durch die Hypothenusen FD, ED und die Katheten ξ, η eingeschlossen ist.

Um das erste Dreieck zu erhalten, und dem Werthe von ξ zu genügen, konstruirt man Fcf parallel zu B_1A, ferner Dcd parallel zu Bb; es ist sodann $FDc = 2\psi$ daher

$$Dc = FD \,.\, \cos 2\psi$$

somit

$$\xi = Dc.$$

Um das zweite Dreieck zu erhalten, wird die Linie Dcd so lange verlängert, bis sie durch die von E auf dieselbe gefällte Perpendikuläre in M geschnitten wird.

Es ist sodann

$$DM = DE \,.\, \cos 2\psi$$

somit

$$\eta = DM.$$

Zum Schlusse wollen wir noch die Ausdrücke für den Krümmungshalbmesser und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes, durch den Winkel ϑ geben, welche, auf das Vorausgegangene gestüzt, sehr leicht zu entwickeln sind, und durch spezielle Substituzionen ganz dieselben Resultate geben, die wir oben erhielten.

$$R = \frac{(a^4 \sin^2 \vartheta + b^4 \cos^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}{ab\,(a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xi = \frac{b^3 \cos^3 \vartheta\,(a^2 - b^2)}{a\,(a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\eta = \frac{a^3 \sin^3 \vartheta\,(a^2 - b^2)}{b\,(a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Endlich sei noch bemerkt, dass man sich auch ganz leicht den Krümmungshalbmesser und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes speziell für die Winkel 30 und 60 Grad bestimmen kann; was wir unseren Lesern überlassen.

ÚK VŠP HK
100000202083