

GEOMETRIA

pro vyšší gymnasia

od

Václava Jandečky,
učitele matematiky a fysiky na c. k. gymnasiu v Hradci Králové.

J. J. 4 = J. 1365.

Díl třetí.

TRIGONOMETRIA.

(Do textu vloženo 40 obrazců.)

Krámská cena: 50 nkr.



V PRAZE, 1865.

Nákladem spisovatelovým.

(V komisi kněžkupectví: I. L. Kober.)

ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA
PEDAGOGICKÉ FAKULTY
HRADEC KRÁLOVÉ

Signatura 4327/3

Inventář. č. 200942

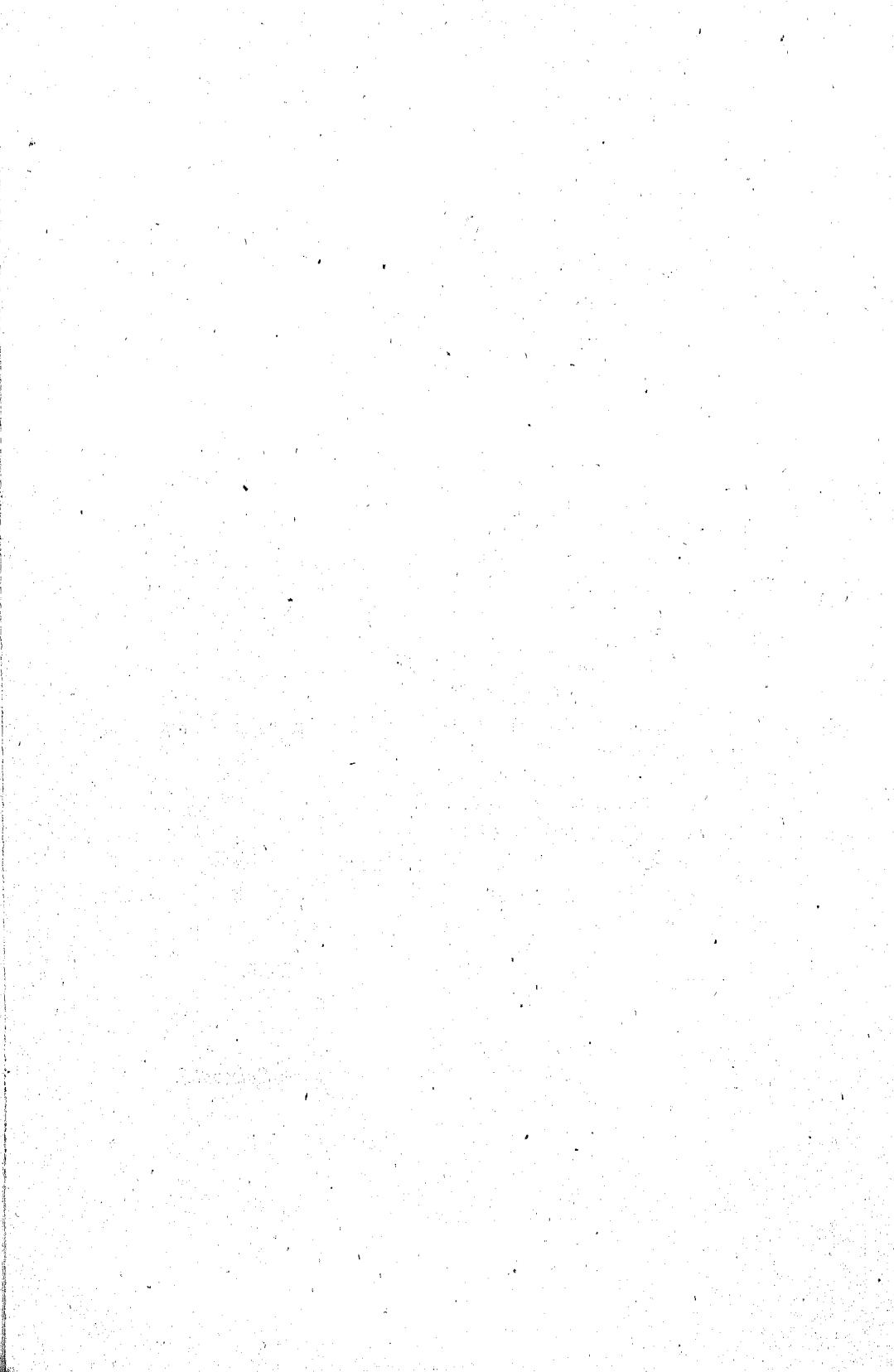
Národní kněhtiskárna : I. L. Koher.

P r e d m l u v a.

Přemýšleje, kterak by nejlépe bylo přednести trigonometrii ve vyšších třídách škol středních, nemohl jsem zůstat v pochybnosti, že přede všemi zaslhuje přednost způsob ten, který základná ponětí *pravidivě* a *přesně vymezuje* a v plném rozsahu jejich ohledává. Za tou příčinou přidržel jsem se u sepsání této nauky v jejich základech návodu geometrů novějších, maje za to, že jen po této cestě žák veden neomylně k samostatnosti dospěje a pevného kroku nabude. Ovšem ale kázal první počátek, abych chod zmírňoval a obzor zúžoval, jakož ku př. v §. VIII. 2., §. XIII. 2. 3. jsem učinil. Ještě nře sejiti, neměl jsem za prospěšné; neboť ačkoliv by zejména věty §. XIII. 2. 3. mnohem jednodušji a rychleji se vyvesti daly, postrádal by za to žák jiskry všeobecnosti, která jest s to ukázati mu dráhu k polygonometrii. V trigonometrii sférické musel jsem se ovšem z nedostatku místa spokojiti s vývodem potřebných vzorců z vět o trojúhelnících ploských. — V ostatních věcech veden jsem byl těmi potřebami, o kterýchž jsem v předmluvě k dílu I. zmínsku učinil.

V Hradci nad Labem na květnou neděli 1. P. 1865.

Spisovatel.



Úvod.

§. I.

1. Směr přímky, která dvěma body A i B prochází (obr. 1.), slouží rozeznávati dvojí: buďto od bodu A k bodu B , aneb od B k A . Znamenajíce směr i délku přímky píšeme v případě prvném AB , v druhém BA . — Oba směry jsou si navzájem protivny, i jmenujeme jeden z nich, ku př. AB *kladným* (positiv), druhý pak BA *záporným* (negativ), jakož i délku přímky v případě prvném zoveme *kladnou n. přičetnou* (additiv), v případě druhém *zápornou n. odečetnou* (subtractiv). — Rovnicemi to vypisujíce klademe $BA = -AB$, $AB = -BA$ a důsledně $AB + BA = BA + AB = o$.

obr. 1.



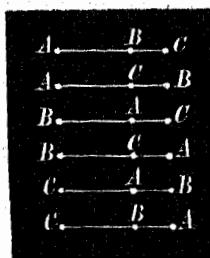
Dodatek. Vzorec $AB + BA = o$ má smysl ten: z místa A vyšel-li bod A cestou AB do B , odtud pak vrátil-li se cestou BA až do A : má posléz od svého počátku vzdálenost $= o$, ježto stanul na místě svém původním.

obr. 2.

2. Leží-li tré body A , B , C v jedné přímce, jest na všechn spůsob $AB + BC = AC$. (obr. 2.)

Nebot posloupnost bodů těch může být šestera: a) A, B, C ; b) A, C, B ; c) B, A, C ; d) B, C, A ; e) C, A, B ; f) C, B, A .

a) Že v případě prvném $AB + BC = AC$, jest zřejmo.



b) V případě druhém jest $AB = AC + CB$, $CB = -BC$; pročež dosazením $AB = AC - BC$, odkudž $AB + BC = AC$.

c) V případě třetím jest $BC = BA + AC$; $BA = -AB$; pročež dosazením $BC = -AB + AC$, odkudž opět $AB + BC = AC$.

Případy d), e), f) srovnávají se s případy b), c), a), jen že směry jsou protivné; poněvadž ale znamení v rovnici za protivná lze vyměnit, vyplývá i zde rovnice tvrzená.

3. Splyne-li bod C s bodem A v jediný (odst. 2.), vyjde ze vzorce $AB + BC = AC$ rovnice $AB + BA = AA$; ježto ale dle 1. odst. $AB + BA = o$: znamená $AA = o$.

4. Každou přímku AB , v jejímž směru leží bod Q, lze vyměnit za součet dvou přímek $AQ + QB$; neboť $AQ + QB = AB$, (odst. 2.)

5. Leží-li na jediné přímce v jakémkoliv po sobě pořádku bodové $A, B, C, D, \dots P, Q$: jest na všechn způsob $AB + BC + CD + \dots + PQ = AQ$.

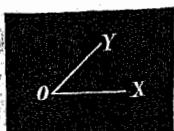
Důkaz dej čtenář.

6. Splyne-li z těchto bodů (odst. 5.) poslední Q s prvním A: jest součet $AB + BC + CD + \dots + PA = AA = o$. (odst. 5. a 3.).

7. Každou přímku AB můžeme zvolivše v jejím směru ($n-1$) bodů $M, N, P, \dots Q$ změnit za součet n přímek $AM, MN, NP, \dots QB$; neboť jest $AM + MN + NP + \dots + QB = AB$. (odst. 5.

§. II.

1. Úhel, jejž svírají dvě přímky $OX = x$, $OY = y$, (obr. 3.), vznikne, otočí-li se o bod O buď rameno y z pevného směru OX do směru OY od pravé k levé, aneb rameno x z pevného směru OY do směru OX od levé k pravé. — Znamenajíce směr otáčení i velikost úhlu píšeme v případě prvném (OX, OY) neb XOY neb x^y , a v případě druhém (OY, OX) , neb YOX neb y^x . — Oba v otáčení směry jsou si protivny, i jmenujeme jeden z nich (ku př. od pravé k levé) *kladným*, druhý pak *záporným*; podobně úhel $(OX, OY) = XOY = x^y$ *kladným č. příčetným*, úhel $(OY, OX) = YOX = y^x$ *záporným č. odečetným* zoveme. Rovnicemi to vypisujíce klademe: $(OY, OX) = -(OX, OY)$;



$(OX, OY) = -(OY, OX)$; neb $YOX = -XOY$, $XOY = -YOX$;
neb $y^a x = -x^a y$, $x^a y = -y^a x$; a důsledně též
 $(OX, OY) + (OY, OX) = XOY + YOX = x^a y + y^a x = 0$.

2. Chtějíce o úhlu nabyci pevnějšího ponětí, rozvažujme:

a) Otočí-li se rameno OX směrem kladným (obr. 3.) jednou
neb n -krát celým kolem, vznikne úhel $2\pi, n.2\pi$; byl-li ale směr
v otáčení záporný, zplozen jest úhel $-2\pi, -n.2\pi$; přímka OX
sama přišla do své polohy původní. Jest tedy $(OX, OX) = XOY = x^a x = \pm n.2\pi$, kdežto n znamená 0 aneb kterékoliv číslo celé.

b) Úhel XOY (obr. 3.) vznikne způsobem několikerým:

a) Rameno OY ze směru OX pootočí se směrem buď kladným
neb záporným, a každým bodem svým opíše oblouk celého obvodu
menší. V prvním případě zplodí se úhel kladný, v druhém záporný;
jeden i druhý úhel jest menší než 2π , a spolu doplňují se co do
číselných hodnot svých na 2π . — Znamená-li α onen úhel kladný,
jest úhel záporný $= -(2\pi - \alpha)$.

β) Aneb k tomuto pootočení necelým kruhem buď kladnému
buď zápornému přidáno ještě jednoduché aneb i několikanásobné
otočení kolem celým, a sice buď kladné, buď záporné; čímž se
zplodí úhel $\alpha + n.2\pi$ aneb $-(2\pi - \alpha) + m.2\pi$. A proto můžeme
položiti výbec $(OX, OY) = XOY = x^a y = \alpha \pm n.2\pi$, ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$).

c) Jedná-li se pouze o polohu přímky OY ku přímce OX
(obr. 3.), můžeme jedno i několikeré otočení jedné neb druhé
přímky celým kolem, poněvadž se jím poloha jejich nemění, mi-
nouti neb přidati. Z toho jde:

α) Místo úhlů $2\pi, 4\pi, 6\pi \dots n.2\pi$ můžeme úhel 0 položiti;

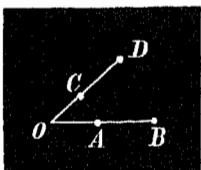
β) Z úhlu kladného $\omega > 2\pi$ můžeme tolíkkrát 2π odečísti, až
zbýtek $\omega - n.2\pi$ jest menší než 2π .

γ) K úhlu zápornému $-\omega$ můžeme tolíkkrát 2π přidati, až
by úhel $-\omega + n.2\pi$ se stal kladným.

δ) Místo úhlu vypuklého můžeme vzít dutý, ale ve smyslu
protivném a tak veliký, aby číselné hodnoty obou na 2π se do-
plňovaly.

3. Úhel přímky $AB = b$ s přímkou $CD = d$, jejž znamenáme
příseče (AB, CD) nebo $b^a d$, jest úhel, který vznikne otočením se
přímky CD z polohy AB kolem bodu O , kterým se byvše pro-
dlouženy obě protínají, do polohy CD , (obr. 4.).

obr. 4.

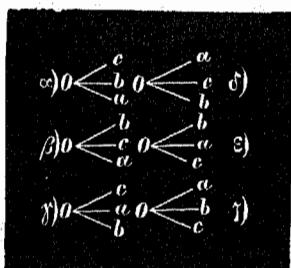


4. Změní-li jedno rameno úhlu (AB , CD) svůj směr v protivný, musí se půlkolem pootočit, čímž se úhel o π buď zvětší nebo zmensí: pročež jest $(AB, CD) = (BA, CD) \pm \pi$; $(AB, CD) = AB, DC \pm \pi$.

5. Změní-li obě ramena úhlu (AB , CD) své směry v protivném, musí se půlkolem pootočit buď ve smyslech souhlasných aneb protivných: čímž úhel se v prvném případě nemění, v případě druhém o 2π buď zvětší, nebo zmensí; a ježto pouze ku poloze přímek přihlížíme, a 2π za O vyměnití smíme, proto jest na všechnen spůsob $(AB, CD) = (BA, DC)$.

6. Vycházejí-li z jednoho bodu O tři přímky a , b , c úhly působice, jest na všechnen způsob $a^b + b^c = a^c$ (obr. 5).

obr. 5.



Neboť posloupnost přímek směrem kladným od sebe odchylených může být šestera: $\alpha)$ $a, b, c; \beta)$ $a, c, b; \gamma)$ $b, a, c; \delta)$ $b, c, a; \epsilon)$ $c, a, b; \zeta)$ c, b, a .

$\alpha)$ Že v prvném případě platí $a^b + b^c = a^c$, jest zřejmo.

$\beta)$ V druhém případě jest $a^b = a^c + c^b$ (dle α), a $c^b = -b^c$ (odst. 1.); pročež $a^b = a^c - b^c$, od kudž jde $a^b + b^c = a^c$.

$\gamma)$ V třetím případě jest $b^c = b^a + a^c$ (dle α), a $b^a = -a^b$ (odst. 1.): pročež $b^c = -a^b + a^c$, odkudž jde opět $a^b + b^c = a^c$.

Případy δ), ϵ), ζ) srovnávají se s β), γ), α), jen že směry odchylek jsou protivné; poněvadž ale v rovnici znamení za protivná změnití lze, vyjde i zde vzorec žádaný.

Poznam. V důkaze vzali jsme za pevné rameno nejprvnější to, od kterého jsme kladným pootočením nejkratším mohli dospěti ku přímákám druhým, a pak jsme použili též úhlů záporných a^b , a^c , b^c místo $-b^a$, $-c^a$, $-c^b$ kladouce. Žádaného výsledku dojdeme ale také, vycházejíce nejprvě a pokaždé od ramene a a pootáčejíce hybné rameno směrem kladným až do polohy ramene b , odtud pak týmž směrem až do polohy ramene c : tím vzniknou dva úhly po sobě a^b , b^c , celým ale otáčením od ramene a přes rameno b až k rameni c vznikl úhel a^c součtu obou předešlých roveň $a^b + b^c = a^c$, nechť přímky za sebou jakoukoliv mají po-

sloupnost. Dle tohoto názoru jest úhel $a^\wedge c$ v případ ech β , γ , δ , ε) o 2π , v případě ζ) o 4π větší, než při názoru hořejším: poněvadž ale přihlízejíce pouze ku poloze přímek 2π , 4π minouti neb přidati dovoleno jest (odst. 2. c.), vysvitá jednostejnost výsledku úplná, nechť důkaz vedeme způsobem dolejším neb hořejším.

7. Mají-li tři přímky $AA' = a'$, $BB' = b'$, $CC' = c'$ jakoukoliv v rovině k sobě polohu, jest na všechn způsob $a'^\wedge b' + b'^\wedge c' = a'^\wedge c'$. (obr. 6.).

Nebot vedeme-li z některého bodu O rovnoběžky $Oa \parallel AA'$, $Ob \parallel BB'$, $Oc \parallel CC'$, bude $a^\wedge b = a'^\wedge b'$, $b^\wedge c = b'^\wedge c'$, $a^\wedge c = a'^\wedge c'$. Dle odst. 6. jest $a^\wedge b + b^\wedge c = a^\wedge c$, pročež dosazením $a'^\wedge b' + b'^\wedge c' = a'^\wedge c'$, nechť přímky v jakékoliv jsou posloupnosti.

8. Je-li v rovině několik přímek jakkoliv rozpoložených a , b , c , d , ..., p , q , jest na všechn způsob $a^\wedge b + b^\wedge c + c^\wedge d + \dots + p^\wedge q = a^\wedge q$.

Nebot $a^\wedge b + b^\wedge c = a^\wedge c$, (odst. 7.); pročež $a^\wedge b + b^\wedge c + c^\wedge d = a^\wedge c + c^\wedge d = a^\wedge d$; a proto $a^\wedge b + b^\wedge c + c^\wedge d + d^\wedge e = a^\wedge d + d^\wedge e = a^\wedge e$, a t. p.

9. Splývá-li poslední přímka q s prvou a v jedinou, jest $a^\wedge b + b^\wedge c + c^\wedge d + \dots + p^\wedge a = a^\wedge a = n.2\pi$, aneb jedná-li se pouze o polohu $a^\wedge b + b^\wedge c + c^\wedge d + \dots + p^\wedge a = a^\wedge a = 0$.

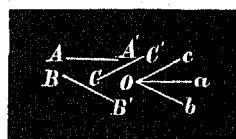
§. III.

1. Pata A' (obr. 7.) kolmice AA' spuštěné s bodu A na pevnou přímku OX nazývá se *pravoúhlý průmět* (orthogonalne. Normal-Projection) bodu A na přímku OX (na osu x -ovou). To písmem znamenáme $A' = \mathfrak{P}_x(A)$, a čteme: A' jest (pravoúhlý) průmět bodu A na osu x ovou OX .

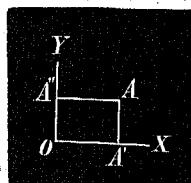
Kromě osy OX užívá se zhusta ještě osy druhé OY , která na ose OX kolmo stojí, osou y -ovou se zove a za *pobočnou* se pokládá. Pravoúhlý průmět A'' bodu A na OY slove *pobočným* a znamená se $A'' = \mathfrak{P}_y(A)$, kdežto pak A' průmětem *hlavním* se nazývá.

2. Veškerenstvo (pravoúhlých) průmětů všech bodů, které ne-přetřítě po sobě následujíce čáru působí, v souhlasné s promitnuty body posloupnosti pojato nazývá se (pravoúhlým) *průmětem té čáry*.

obr. 6.

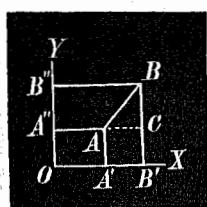


obr. 7.

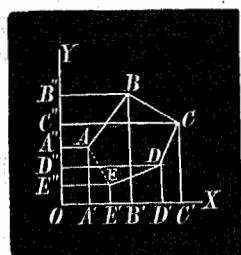


Z toho ponětí plyne:

- a) Průmět jakékoliv čáry na osu přímou jest přímka.
- b) Celý průmět jakékoliv čáry rovná se součtu průmětů částí jejich.
- c) Průmět přímky AB na osu OX (obr. 8.) jest přímka $A'B'$ obsažená mezi průměty A' i B' souhlasných konci A i B přímky AB . Znamenajíce píšeme $A'B' = \mathfrak{p}_x(AB)$; a podobě $A''B'' = \mathfrak{p}_y(AB)$.



obr. 8.



Nebot $\mathfrak{p}_x(ABCDE) = \mathfrak{p}_x(AB) + \mathfrak{p}_x(BC) + \mathfrak{p}_x(CD) + \mathfrak{p}_x(DE)$, dle 2. b.; jest ale dle 2. c.) $\mathfrak{p}_x(AB) = A'B'$; $\mathfrak{p}_x(BC) = B'C'$; $\mathfrak{p}_x(CD) = C'D'$; $\mathfrak{p}_x(DE) = D'E'$; a dle §. I. 5. jest $A'B' + B'C' + C'D' + D'E' = A'E'$, a konečně dle 2. c.) $A'E' = \mathfrak{p}_x(AE)$: pročež $\mathfrak{p}_x(ABCDE) = \mathfrak{p}_x(AE)$.

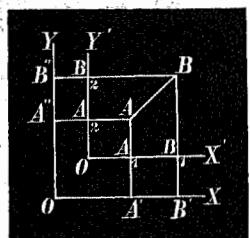
e) Průmět obvodu mnohoúhelníka $(ABCDE \dots A)$ na osu OX neb OY rovná se nule.

Nebot tehdy jest (obr. 9). $\mathfrak{p}_x(ABCDEA) = A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A' = A'A' = 0$, (§. I. 6.). A podobně $\mathfrak{p}_y(ABCDEA) = 0$.

§. IV.

1. Rovnoběžným pošinutím os nemění se ani směr ani délka průmětu přímky (obr. 10.).

obr. 10.



Nebot je-li $O'X' \parallel OX$, $O'Y' \parallel OY$: jest $A_1B_1 = A'B'$ i $A_2B_2 = A''B''$. Z té příčiny dovoleno jest, když se jedná o jedinou přímku a průměty její, za počátek obou os zvolit počátek O přímky OA (obr. 11.) samé; aneb osy pošinouti tak, aby osa X -ová počátkem A , osa Y -ová koncem B přímky AB procházela (obr. 12.). V případě druhém činí přímka AB se svými průměty AO a OB pravoúhlý trojúhelník, jehož jest podponou, průměty pak jsou odvěsnýma.

Osami XX' a YY' (obr. 13.) dělí se rovina na 4 čtvrti; první čtvrt XOY , druhá YOX' , třetí $X'OX$, čtvrtá $Y'OX$. O přímce OA , OB , OC , OD pravíme, že směruje do čtvrti první, druhé, třetí, čtvrté; aneb že v této čtvrti jest.

2. Čtverec přímky jest roven součtu čtverců obou průmětů jejich.

Nebot dle věty Pyth. (obr. 12.) jest

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2.$$

K výhledu krátkosti znamenejme $AB = r$, $OA = x$, $OB = y$, bude pak vzorec

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

3. Hlavní průmět přímky (obr. 13.) v první nebo ve čtvrté čtvrti jest kladný, v druhé a třetí čtvrti záporný; pobočný průmět její jest v první a v druhé čtvrti kladný; v třetí a v čtvrté záporný. Ve čtvrtích protějších (1st a 3rd nebo 2nd a 4th) mají jak hlavní, tak pobočné průměty směry protivné. Co do směru mají tedy hlavní a pobočný průmět přímky v první a třetí čtvrti vztažení souhlasné č. svorné, v druhé a čtvrté čtvrti ale vztažení protivné.

4. U přechodu z jedné čtvrti do druhé mění se pokaždé směr jednoho průmětu, a sice od prvné čtvrti počínajíc u přechodu do druhé čtvrti nejprve směr průmětu hlavního. Z toho vysvítá,

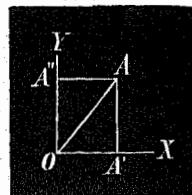
že směr průmětu $\left\{ \begin{array}{l} \text{hlavního} \\ \text{pobočného} \end{array} \right\}$ ve čtvrti následující jest se směrem $\left\{ \begin{array}{l} \text{pobočného} \\ \text{hlavního} \end{array} \right\}$ průmětu ve čtvrti předcházející ve vztažení $\left\{ \begin{array}{l} \text{svorném} \\ \text{protivném} \end{array} \right\}$.

5. Poměrná velikost průmětů u porovnání jednoho s druhým i obou s přímkou záleží na poloze přímky k hlavní ose; a sice:

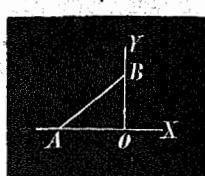
a) Pokud poloha přímky OA , (OB) k ose OX (obr. 14.) se nezmění, zachová se i hodnota poměru $x:y:r$ neporušena.

Nebot je-li OAB jediná přímka, bude za příčinou $AA' \parallel BB'$ (dle Pl. LXXXVII.) $OA':OB' = A'A:B'B = OA:OB$, čili

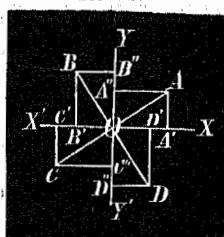
obr. 11.



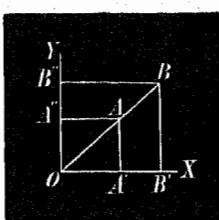
obr. 12.



obr. 13.



obr. 14.



$OA': OB' = OA'': OB'' = OA: OB$; pročež
 $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$; $\frac{OA''}{OA} = \frac{OB''}{OB}$; $\frac{OA''}{OA'} = \frac{OB''}{OB'}$;
 $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$; $\frac{OA}{OA''} = \frac{OB}{OB''}$; $\frac{OA'}{OA''} = \frac{OB'}{OB''}$;
jakož tvrzeno.

b) Pokud hodnota poměru $x:y:r$ se nezmění, zůstane poloha přímky stálá.

Nebot poněvadž předně hodnota poměru $x:y:r$ nevzala změnu co do známéní, musí přímka do jednostejné čtvrti směřovati; je-li tedy v případě jednom přímka OA ve čtvrti ku př. první, musí v případě jiném přímka OB býti též ve čtvrti první (obr. 14.). Dle podmínky jest tehdy za druhé $OA': OA'' : OA = OB': OB'' : OB$, a poněvadž $A'A \parallel OA'', B'B \parallel OB''$, bude též $OA': A'A : OA = OB': B'B : OB$; odtud pak (dle Pl. LXXXVII. 5.) vysvítá, že OAB jest přímka jediná, čili $\not XOA = \not XOB$, jakož tvrzeno.

c) Kdykoliv se tedy poloha přímky OA k hlavní ose změní, změní se též poměry $x:y:r$, a naopak.

6. Poněvadž hodnota poměru $x:y:r$ záleží na poloze přímky k hlavní ose čili na úhlu $x^r = \alpha$, jejž přímka r s hlavní osou svírá, a naopak: může se z velikosti úhlu x^r souditi na velikost poměru $x:y:r$ i naopak; čimž tyto poměry zvláštní důležitosti nabývají a ūkony úhloměrnými (goniometrische Functionen) se zovou. Z nich pak nazývá se:

poměr hlavního průmětu ku přímce ($x:r$) = *cosinus* (dostava);
poměr pobočného průmětu ku přímce ($y:r$) = *sinus* (vstava);
poměr průmětu pobočného k hlavnímu ($y:x$) = *tangens* (tečnice);
poměr přímky k průmětu hlavnímu ($r:x$) = *secans*, (sečnice);
poměr přímky k průmětu pobočnému ($r:y$) = *cosecans* (dosečnice);
poměr hlavního průmětu k pobočnému ($x:y$) = *cotangens* (dotičnice) úhlu x^r .

Výměry tyto počtárským písmem znamenáme:

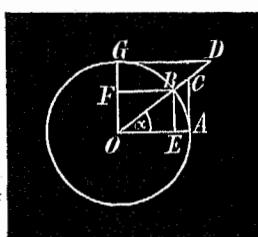
$\frac{x}{r} = \cos x^r$; $\frac{y}{r} = \sin x^r$; $\frac{y}{x} = \tan x^r$; $\frac{r}{x} = \sec x^r$; $\frac{r}{y} = \csc x^r$;
 $\frac{x}{y} = \cot x^r$. Místo r , x , y , můžeme také klásti AB , $\not p_x(AB)$,
 $\not p_y(AB)$, a místo x^r pak (OX, AB) , (obr. 14.).

Poznam. Názvy úhloměrných úkonů jsou původem geometrického. Je-li v kruhu O střed (obr. 15), OA osa hlavní, OG osa pobočná, úhel $AOB = \alpha$, $BE \parallel CA \perp OA$; $BF \parallel DG \perp OG$; jest dle hořejších výměrů $\frac{OE}{OB} = \cos \alpha$;

$$\frac{EB}{OB} = \sin \alpha; \frac{AC}{OA} = \operatorname{tang} \alpha; \frac{OC}{OA} = \sec \alpha$$

$$\frac{OD}{OG} = \operatorname{cosec} \alpha; \frac{GD}{OG} = \operatorname{cot} \alpha: \text{vezme-li se polo-}$$

obr. 15.



měr kruhu za míru přímek, a položí-li se místo něho 1; vyjde $OE = \cos \alpha$, $EB = \sin \alpha$, $AC = \operatorname{tang} \alpha$, $OC = \sec \alpha$, $OD = \operatorname{cosec} \alpha$, $GD = \operatorname{cot} \alpha$. Tím názvy *tangens* (tečnice), a *secans* (sečnice) samy sebou se vysvětlují; polovičné tetivě EB dáno ale jméno *sinus* oblouku AB neb úhlu α . Názvy *cosecans*, *cotangens*, *cosinus*, pokud předsuvky *co* se týče, později objasníme.

7. Poněvadž předně v trojúhelníku pravoúhlém odvěsné za průměty podpony jeho míti (odst. 1. obr. 12.); a za druhé ze známých délek přímky a průmětů jejich poměr nalezti, z jeho velikosti na velikost úhlu příslušného závěrek činiti, a konečně ze známého poměru toho a jednoho člene jeho člen druhý určiti lze: pročež vysvítá, že ze známých částí (úhlů n. stran), jimiž trojúhelník pravoúhlý dokonale se určuje, ostatní části určené ale neznámé vypočítati se dají. A ježto každý mnohoúhelník na trojúhelníky a kosý trojúhelník na dva pravoúhlé rozděliti se dá; vyplývá, že z určujících částí známých vypočisti lze neznámé části určené kteréhokoliv troj- neb mnohoúhelníka.

8. Nauka o vypočítávání určených ale neznámých částí (úhlů, stran, přeček, ploského obsahu a t. d.) trojúhelníka (mnohoúhelníka) z určujících částí daných (známých), nazývá se *troj- n. mnoho- hranoměrství* čili po řecku *trigonometria n. polygonometria*; a sice *ploská*, pokud se jedná o troj- neb mnohoúhelníky v rovině či ploské, a *sférická*, vztahuje-li se k troj- neb mnohoúhelníkům sférickým.

Díl trigonometrie, který jedná o vztazích poměrů úhloměrných, nazývá se *úhloměrství č. goniometria*.

Kniha první.

Trigonometria ploská.

Cást I.

Vztahy úkonů goniometrických.

§. V.

Vztahy úhloměrných úkonů jednoho úhlu.

1. Bud r délka přímky, x znamenej průmět její hlavní, y průmět pobočný, $x^2 + r^2 = \alpha$ konečně úhel přímky r s osou hlavní: jest pak dle §. IV. 2. a dle výměrů §. IV. 6.:

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots \alpha;$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \dots \beta; \quad 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2 \dots \gamma; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{y}\right)^2 \dots \delta;$$

$$\frac{x}{r} = \cos \alpha \dots \varepsilon; \quad \frac{y}{r} = \sin \alpha \dots \zeta; \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang} \alpha \dots \eta;$$

$$\frac{r}{x} = \sec \alpha \dots \vartheta; \quad \frac{r}{y} = \operatorname{cosec} \alpha \dots \iota; \quad \frac{x}{y} = \operatorname{cot} \alpha \dots \kappa.$$

Dosadíme-li do rovnic $\beta), \gamma), \delta)$ místo poměru $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{y}{x}$ atd. z následujících rovnic $\varepsilon) \dots \kappa)$ goniometrické výrazy jejich hodnot, dostaneme:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \dots 1);$$

$$1 + \operatorname{tang}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \dots 2); \quad 1 + \operatorname{cot}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha \dots 3).$$

Množice ale spolu $\varepsilon)$ a $\delta)$, pak $\zeta)$ a $\iota)$, konečně $\eta)$ a $\kappa)$, nabudeme: $\cos \alpha, \sec \alpha = 1 \dots 4); \sin \alpha, \operatorname{cosec} \alpha = 1 \dots 5); \operatorname{tang} \alpha, \operatorname{cot} \alpha = 1 \dots 6).$

Z rovnic $\varepsilon)$ a $\zeta)$ jednu druhou dělícse dostaneme $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}, \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y};$ což porovnajíce s rovnicemi $\eta)$ a $\kappa)$ dostaneme:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \dots \dots \dots 7); \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \dots \dots \dots 8);$$

2. Bedlivý pohled na vzorce 1) až 8) učí, že z jednoho známého dají se všechny ostatní úhloměrné úkony téhož úhlu počtem nalezti, což aby vykonal, čtenářovi zůstavujícé klademe zde pouze výsledky, a sice:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha} = \frac{1}{\cosec \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}; \dots 9)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{\cosec^2 \alpha - 1}}{\cosec \alpha}; \dots 10)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\cosec^2 \alpha - 1}}; \dots 11)$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha} = \frac{\cosec \alpha}{\sqrt{\cosec^2 \alpha - 1}}; \dots 12)$$

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\cosec^2 \alpha - 1}}; \dots 13)$$

$$\cosec \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha} = \frac{\sec \alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}; \dots 14)$$

§. VI.

O změnách úhloměrných úkonů ve všech čtyrech čtvrtích.

1. Majíce na paměti, že hlavní průměr v první a v čtvrté čtvrti kladný, v druhé a v třetí ale záporný; a průměr pobocný v první a v druhé čtvrti kladný, v třetí a ve čtvrté čtvrti záporný jest, (§. IV. 3.), a k výměření úhloměrných úkonů (§. IV. 6.) přihlízejíce poznáváme zřejmě:

a) *Cosinus* jest v I. a IV. čtvrti kladný, v II. a v III. čtvrti záporný;

b) *Sinus* jest v I. a II. čtvrti kladný, v III. a IV. čtvrti záporný;

c) *Tangens* i *Cotangens* jsou v I. a III. čtvrti kladné, v II. a IV. čtvrti záporné;

d) *Secans* jest s *Cosinusem*, a *Cosecans* jest se *Sinusem* zároveň kladná neb záporná.

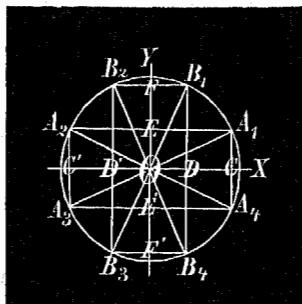
2. Přibývá-li úhlu, jež svírá přímka s osou hlavní, směrem kladným nepřetržitě od o až do 2π , běže též změnu ustavičně:

a) *Cosinus* v I. čtvrti od 1 klesaje až k 0; v II. čtvrti co do číselné hodnoty nepřetržitě se zvětšuje od $-o$ až do -1 ; v III.

čtvrti co do čísla opět nepřetržitě klesaje od -1 až do -0 ; ve IV. čtvrti opět se zvětšuje od $+0$ až do $+1$.

b) *Sinus* v I. čtvrti nepřetržitě se mění od 0 až do $+1$; v II. čtvrti od $+1$ až do $+0$; v III. čtvrti od -0 až do -1 ; v IV. čtvrti od -1 až do -0 .

obr. 16.



Důkaz. V obr. 16. buď OX osa hlavní, OY pobočná. Počátkem jejich O buďte po obou stranách hlavní osy rovnou měrou odchýleny přímky A_3A_1 , A_2A_4 , a rovněž tak odchýlenější přímky B_3B_1 a B_2B_4 . Sříznuvše $OA_1 = OB_1 = OB_2 = OA_2 = OA_3 = OB_3 = OB_4 = OA_4$, a vedše kol O poloměrem OA_1 kruh a v něm tetivy A_1A_4 , B_1B_4 , B_2B_3 , A_1A_3 , B_2B_1 , A_3A_1 , A_3A_4 , B_3B_4 ; budeme za příčinou $A_4OA_1 < B_4OB_1$, a tedy též za příčinou $A_1OA_2 > B_1OB_2$

míti $A_4A_1 < B_4B_1$, $A_2A_1 > B_2B_1$; a podobně $B_3B_2 > A_3A_2$, $B_3B_4 < A_3A_4$, (Pl. LXXIII. 3.). Polovičné tetivy tyto, a sice: $\frac{1}{2}A_2A_1$, $\frac{1}{2}B_2B_1$, $\frac{1}{2}B_1B_2$, $\frac{1}{2}A_1A_2$, $\frac{1}{2}A_4A_3$, $\frac{1}{2}B_4B_3$, $\frac{1}{2}B_3B_4$, $\frac{1}{2}A_3A_4$ jsou pořadem souhlasným rovny hlavním průmětům OC , OD , OD' , OC' , OD' , OD , OC přímek OA_1 , OB_1 , OB_2 , OA_2 , OA_3 , OB_3 , OB_4 , OA_4 ; a polovičné tetivy $\frac{1}{2}A_4A_1$, $\frac{1}{2}B_4B_1$, $\frac{1}{2}B_3B_4$, $\frac{1}{2}A_3A_2$, $\frac{1}{2}A_2A_3$, $\frac{1}{2}B_2B_3$, $\frac{1}{2}B_1B_4$, $\frac{1}{2}A_1A_4$, jsou v témž pořadku rovny pobočným průmětům OE , OF , OF' , OE' , OE , OF , OF' , OE' . Z toho tedy, položme-li $OA_1 = OB_1 = OB_2 = OA_2 = \dots = r$, vyplývá: $\frac{OC}{r} > \frac{OD}{r}$; $\frac{D'O}{r} < \frac{C'O}{r}$; $\frac{OE}{r} < \frac{OF}{r}$; $\frac{FO}{r} > \frac{EO}{r}$;

a povážme-li ještě, že hlavní průmět splyne s přímkou r aneb na O sklesne, když přímka r má směr s hlavní osou rovnoběžný aneb k ní kolmý; a že totéž platí o průmětu pobočném a ose pobočné: uznáme za dokázanou pravost vět o změně cosinusu a sinusu vyslovených.

c) Ježto $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\cota = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$,

$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, (§. V. vzor. 7. 8. 12. 14.), můžeme poznavše, kterak sinus i cosinus se mění, říci:

$\alpha)$ *Tangenty* (tečnice) v I. a III. čtvrti nepřetržitě přibývá od $+0$ až do $+\infty$; v II. a IV. čtvrti mění se co do číselné hodnoty klesajíc od $-\infty$ až do -0 .

$\beta)$ *Cotangenty* (dotečnice) v I. a III. čtvrti nepřetržitě ubývá od $+\infty$ až do $+0$; v II. a IV. čtvrti mění se co do číselné hodnoty se zvětšujíc od -0 až do $-\infty$.

$\gamma)$ *Secanty* (sečnice) v I. čtvrti přibývá od $+1$ až do $+\infty$; v II. čtvrti číselné hodnoty ubývá od $-\infty$ až do -1 ; v III. čtvrti mění se od -1 až do $-\infty$, a ve IV. čtvrti od $+\infty$ až do $+1$ nepřetržitě.

$\delta)$ *Cosecanty* (dosečnice) v I. čtvrti ubývá od $+\infty$ až do $+1$, v II. čtvrti přibývá od $+1$ až do $+\infty$; v III. čtvrti číselné hodnoty ubývá od $-\infty$ až do -1 , a v IV. čtvrti přibývá od -1 až do $-\infty$ nepřetržitě.

3. Je-li úhel $= 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$, pamatujeme zvláště:

$$\cos 0 = 1; \cos \frac{1}{2}\pi = 0; \cos \pi = -1; \cos \frac{3}{2}\pi = 0;$$

$$\sin 0 = 0; \sin \frac{1}{2}\pi = 1; \sin \pi = 0; \sin \frac{3}{2}\pi = -1;$$

$$\tan 0 = 0; \tan(\frac{1}{2}\pi \pm 0) = \pm\infty; \tan \pi = 0; \tan(\frac{3}{2}\pi \pm 0) = \mp\infty;$$

$$\cot 0 = \pm\infty; \cot \frac{1}{2}\pi = 0; \cot \pi = \mp\infty; \cot \frac{3}{2}\pi = 0;$$

$$\sec 0 = 1; \sec(\frac{1}{2}\pi \pm 0) = \mp\infty; \sec \pi = -1; \sec(\frac{3}{2}\pi \pm 0) = \pm\infty;$$

$$\csc 0 = \pm\infty; \csc \frac{1}{2}\pi = 1; \csc \pi = \mp\infty; \csc \frac{3}{2}\pi = -1.$$

§. VII.

1. a) $\left| \begin{matrix} \text{Cosinasy} \\ \text{Sinusy} \end{matrix} \right|$ dvou úhlů sobě rovných ale protivných jsou si rovny a $\left| \begin{matrix} \text{souhlasné} \\ \text{protivně} \end{matrix} \right|$.

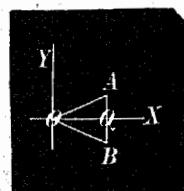
Důkaz. Buďtež (obr. 17.) $OA = OB = r$ dvě přímky po obou stranách hlavní osy OX o rovné si úhly od ní odchýlené; pročež $XOA = -XOB = \alpha$: i bude $\triangle OQA \cong \triangle OQB$, a tím $QA = QB$, $AB \perp OX$. Jest tedy OQ společným hlavním průmětem přímek OA i OB , a pobočné průměty jejich rovnající se délkám QA i QB jsou si rovny, ale směru protivných.

$$\text{Jest pak } \cos \alpha = \frac{OQ}{r}; \cos(-\alpha) = \frac{OQ}{r}; \sin \alpha = \frac{QA}{r},$$

$$\sin(-\alpha) = \frac{QB}{r} = -\frac{QA}{r}; \text{ z čehož vysvítá:}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \dots 15); \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \dots 16)$$

obr. 17-



b) Ze vzorečů 15) a 16) vychází:
 $\text{tang}(-\alpha) = -\text{tang} \alpha \dots 17); \text{sec}(-\alpha) = \text{sec} \alpha \dots 18)$
 $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha \dots 19); \text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec} \alpha \dots 20).$

Neboť jest: $\text{tang}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
 $= -\text{tang} \alpha.$

Takéž $\text{sec}(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \text{sec} \alpha.$

Podobně vyvedou se vzorce 19) a 20).

2. Přibude-li úhlu o $\frac{1}{2}\pi$, platí vzorce:

$\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\sin \alpha \dots 21); \sin(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = \cos \alpha \dots 22)$

$\text{tang}(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\cot \alpha \dots 23); \cot(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\text{tang} \alpha \dots 24)$

$\text{sec}(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\text{cosec} \alpha \dots 25); \text{cosec}(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = \text{sec} \alpha \dots 26)$

a je-li α úhel záporný:

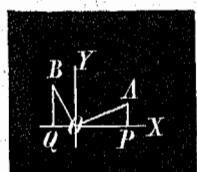
$\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin \alpha \dots 27); \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos \alpha \dots 28)$

$\text{tang}(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \cot \alpha \dots 29); \cot(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \text{tang} \alpha \dots 30)$

$\text{sec}(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \text{cosec} \alpha \dots 31); \text{cosec}(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \text{sec} \alpha \dots 32)$

obr. 18. *Důkaz.* Bud (obr. 18.) $XOA = \alpha$, $AOB = \frac{1}{2}\pi$;

učinivše $OB = OA = r$, a spustivše $AP \parallel BQ \perp OX$



máme $\cos \alpha = \frac{OP}{r}$; $\sin \alpha = \frac{PA}{r}$; $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = \frac{OQ}{r}$; $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = \frac{QB}{r}$. Zároveň jest

$\triangle OQB \cong \triangle APO$, pročež majíce zřetel k §. IV.

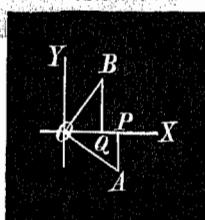
4. klademe $OQ = -PA$, $QB = OP$, nechť přímka OA v kterékoliv čtvrti leží. Z toho ale jde:

$$\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = \frac{OQ}{r} = -\frac{PA}{r} = -\sin \alpha;$$

$$\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = \frac{QB}{r} = \frac{OP}{r} = \cos \alpha$$

obr. 19.

Totéž platí do slova, když jest úhel α záporný (obr. 19.): jest tedy $\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha)$; $\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos(-\alpha)$; pročež dle odst. 1. také $\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin \alpha$; $\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos \alpha$. Ze vzorečů těchto o sinuších a kosinuších vyvede čtenář snadno tvrzené vzorce hořejší o úkonech ostatních, podobným jako v odst. 1. b. způsobem.



§. VIII.

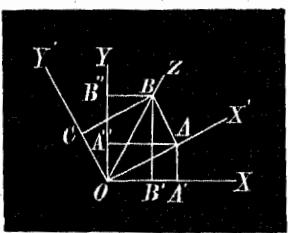
Vztahy úhloměrných úkonů dvou i více úhlů.

1. Průmět $\{ \begin{matrix} \text{hlavní } x \\ \text{pobočný } y \end{matrix} \}$ rovná se přímce samé r znásobene $\{ \begin{matrix} \text{cosinusem} \\ \text{sinusem} \end{matrix} \}$ odchylky její $x^a r$ od osy hlavní.

Nebot dle §. IV. 6. jest $x:r = \cos x^a r$, $y:r = \sin x^a r$, pročež $x = r \cdot \cos x^a r$, $y = r \cdot \sin x^a r$.

2. Najdi cosinus i sinus součtu a rozdílu dvou úhlů, jsou-li těchto cosinusy i sinusy dány.

obr. 22.



Řeš. Přímky OX , OX' , OZ , OY , OY' , (obr. 22) znamenejme písmeny x , x' , z , y , y' , a směry jejich za kladné mějme, položivše za výměnku $x^a y = x'^a y' = 1/2\pi$. Z přímky z sřízněme část OB , a zjednejme této části průměty přijmouce x' za osu hlavní, y' za osu pobočnou. Přihlížime-li spolu k odst. 1. dostaneme tehdy:

$$\left. \begin{aligned} OA &= \mathfrak{p}_x(OB) = OB \cdot \cos x^a z \\ AB &= \mathfrak{p}_{y'}(OB) = OB \cdot \sin x^a z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad I$$

Promitneme-li klikatou čáru OAB i přímku OB na hlavní osu OX i na pobočnou OY , nabudeme dle §. I. 2.:

$$OB' = OA' + A'B'; \quad OB'' = OA'' + A''B'';$$

aneb jinak znamenajícе:

$$\mathfrak{p}_x(OB) = \mathfrak{p}_x(OA) + \mathfrak{p}_x(AB); \quad \mathfrak{p}_y(OB) = \mathfrak{p}_y(OA) + \mathfrak{p}_y(AB);$$

z čehož přihlížejíce k odst. 1. dostaneme přímo:

$$OB \cdot \cos x^a z = OA \cdot \cos x^a x' + AB \cdot \cos x^a y';$$

$$OB \cdot \sin x^a z = OA \cdot \sin x^a x' + AB \cdot \sin x^a y'.$$

Dosadíme-li do posledních dvou rovnic místo OA i AB jejich hodnoty z rovnic I., a vynecháme-li pak společného všem členům činitele OB , vyjde nám:

$$\left. \begin{aligned} \cos x^a z &= \cos x^a x' \cdot \cos x^a z + \cos x^a y' \cdot \sin x^a z \\ \sin x^a z &= \sin x^a x' \cdot \cos x^a z + \sin x^a y' \cdot \sin x^a z. \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad II.$$

Dle §. II. 6. jest $x^a y' = x^a x' + x^a y'$, pročež $x^a y' = x^a x' + 1/2\pi$, nebot dle podmínky jest $x^a y' = 1/2\pi$. Proto jest dle §. VII. 2.): $\cos x^a y' = -\sin x^a x'$, $\sin x^a y' = \cos x^a x'$. Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic II., a položíme-li spolu $x^a z = x^a x' + x^a z$, dostaneme:

$$\begin{aligned} \cos(x^{\wedge}x' + x'^{\wedge}z) &= \cos x^{\wedge}x'.\cos x'^{\wedge}z - \sin x^{\wedge}x'.\sin x'^{\wedge}z, \\ \sin(x^{\wedge}x' + x'^{\wedge}z) &= \sin x^{\wedge}x'.\cos x'^{\wedge}z + \cos x^{\wedge}x'.\sin x'^{\wedge}z, \end{aligned} \quad \text{III.}$$

Vzorce III. mají platnost obecnou, necht úhly $x^{\wedge}x'$, $x'^{\wedge}z$ jsou jakékoliv. Je-li v jednom případě $x^{\wedge}x' = +\alpha$, $x'^{\wedge}z = +\beta$, a v případě druhém $x^{\wedge}x' = +\alpha$, $x'^{\wedge}z = -\beta$; nabudeme z nich pomnice, že (§. VII. 1. a) jest $\cos(-\beta) = \cos \beta$, $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ vzoreů zvláštních:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad \dots \quad 47)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad \dots \quad 48)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \dots \quad 49)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \dots \quad 50).$$

3. Dělíme-li každý z posledních čtyř vzoreů součinem $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, aneb $\sin \alpha \cdot \sin \beta$; a hledíme-li k §. V. (vzor. 7. 8.) dostaneme přímo následujících 8 vzorců:

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = 1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta \dots 51); \quad \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = 1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta \dots 52);$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \tan \alpha + \tan \beta \dots 53); \quad \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \tan \alpha - \tan \beta \dots 54);$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \cot \alpha \cdot \cot \beta - 1 \dots 55); \quad \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \cot \alpha \cdot \cot \beta + 1 \dots 56);$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \cot \alpha + \cot \beta \dots 57); \quad \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \cot \beta - \cot \alpha \dots 58).$$

Přidavek ku cvičení: Kterých vzorců lze nabytí, dělíme-li vzorce 47) až 50) součinem $\sin \alpha \cdot \cos \beta$ aneb $\cos \alpha \cdot \sin \beta$?

4. Dělíme-li vzorec 53) vzorcem 51), a vzorec 54) vzorcem 52), majíce opět zřetel k §. V. vz. 7. 8. dostaneme:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \dots 59); \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \dots 60);$$

Položíme-li v těchto dvou vzorcích $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, pomnice, že jest $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$, (§. VII. 2. vz. 30.), nabudeme:

$$\tan(\frac{1}{4}\pi + \beta) = \frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta} \dots 61); \quad \tan(\frac{1}{4}\pi - \beta) = \frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta} \dots 62);$$

Přidavek ku cvičení: Čtenář najdi, kterých vzorců lze nabytí, dělíme-li ze vzorců 51) až 58), jakož i z těch, jichž nalezení v odst. 3. čtenářovi uloženo, výběc jeden druhým.

5. Součin neb rozdíl dvou cosinusů neb sinusů má se vyměnit za součin úkonů úhloměrných.

Řeš. Sečtouce a odečtouce rovnice 48) a 47), pak 49) a 50) dostaneme:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta.\end{aligned}$$

Položíme-li $\alpha + \beta = \varphi$, $\alpha - \beta = \psi$; vyjde $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$,
 $\beta = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$: kteréžto hodnoty do vzorců zde položených dosa-
díce nabudeme:

$$\cos \varphi + \cos \psi = 2 \cdot \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cdot \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi - \psi) \quad . \quad 63)$$

$$\cos \varphi - \cos \psi = -2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi - \psi) \quad . \quad 64)$$

$$\sin \varphi + \sin \psi = 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cdot \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi - \psi) \quad . \quad 65)$$

$$\sin \varphi - \sin \psi = 2 \cdot \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi - \psi) \quad . \quad 66)$$

Přídavek ku cvičení: a) Čtenář maje naleti $\sin \varphi \pm \cos \psi$,
polož nejprv $\cos(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$ místo $\sin \varphi$, aneb $\sin(\frac{1}{2}\pi - \psi)$ místo
 $\cos \psi$, a pak užij vzorce 63) . . . 66).

b) Čtenář vyměň za součiny neb za podíly tyto součty a roz-
díly: $\tan \alpha + \tan \beta$, $\tan \alpha - \tan \beta$, $\cot \alpha + \cot \beta$, $\cot \alpha - \cot \beta$,
 $\cot \alpha + \tan \beta$, $\cot \alpha - \tan \beta$.

c) Kterých zvláštních vzorců nabudeme, položíme-li ve vzorcích
63 a 64) $\varphi = 0$, a ve vzorcích 65) a 66) $\varphi = \frac{1}{2}\pi$? a kterak se
mění vzorce, jež naleti v odst. b) čtenářovi uloženo, položíme-li
buďto $\beta = 0$, aneb $\beta = \frac{1}{2}\pi$? a kterak se všechny tyto vzorce změní,
když jest $\varphi + \psi = \frac{1}{2}\pi$ aneb $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$?

6. Dělíme-li vzorec 65) vzorcem 66) hledíce spolu k §. V.
vz. 7. dostaneme úměru:

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} = \frac{\tan^2 \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\tan^2 \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} \quad . \quad 67)$$

Přídavek ku cvičení: a) čtenář vyhledej vzorce, jichž nabysti
lze, dělíme-li ze vzorců 63) až 66) jakož i z těch, které čtenářovi
v odst. 5. a) b) naleti uloženo, vůbec jeden druhým, všude dříve
místo α a β položiv φ a ψ .

b) Čtenář pověz, kterou změnu vezmou tyto nové vzorce i se
vzorcem 67) položíme-li $\psi = 0$, aneb $\psi = \frac{1}{2}\pi$, aneb $\varphi + \psi = \frac{1}{2}\pi$.

7. a) Najdi úhloměrné úkony dvojnásobného úhlu, je-li dán
některý úkon úhlu jednoduchého.

Řeš. Položíce ve vzorcích 47), 49) a 59) $\beta = \alpha$, dostaneme
zjednodušivše:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad . \quad aneb: \cos \gamma = \cos^2 \frac{1}{2}\gamma - \sin^2 \frac{1}{2}\gamma \dots 68)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad . \quad aneb: \sin \gamma = 2 \sin \frac{1}{2}\gamma \cdot \cos \frac{1}{2}\gamma \dots 69)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{aneb: } \tan \gamma = \frac{2 \tan \frac{1}{2}\gamma}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}\gamma} \dots 70)$$

kdežto $\gamma = 2\alpha$ kladeno jest.

Aby čtenář vůbec vyhledal, kterýkoliv úkon úhlu 2α , je-li dán kterýkoliv úkon úhlu α , jemu samému již zůstaveno bude.

b) Rovnici 68) přičtouce a odečtouce od rovnice $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$, (§. V. vz. 1.) najdeme:

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \quad \text{aneb: } 1 + \cos \gamma = 2 \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\gamma \dots 71)$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \quad \text{aneb: } 1 - \cos \gamma = 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}\gamma \dots 72)$$

8. Najdi úhloměrné úkony polovičného úhlu, je-li dán některý úkon úhlu celého.

Dělíme-li vzorce 71) a 72) číslem 2, a odmocníme-li pak, vyjde:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad \text{aneb: } \cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}} \dots 73)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \quad \text{aneb: } \sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{2}} \dots 74).$$

Z těchto pak vzorců, dělíme-li jeden druhým, vyplývá:

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} \quad \text{aneb: } \tan \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma}} \dots 75)$$

$$\cot \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}} \quad \text{aneb: } \cot \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{1 - \cos \gamma}} \dots 76).$$

Aby čtenář kterýkoliv úkon úhlu α vyhledal, je-li dán kterýkoliv úkon úhlu 2α , jemu samému již zůstaveno budiž.

9. Rozličné vzorce ku cvičení v proměňování:

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 (\frac{1}{4}\pi \mp \frac{1}{2}\alpha) = 2 \sin^2 (\frac{1}{4}\pi \pm \frac{1}{2}\alpha)$$

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin (\frac{1}{4}\pi \pm \alpha) = \sqrt{2} \cdot \cos (\frac{1}{4}\pi \mp \alpha).$$

$$1 + \sin \alpha + \cos \alpha = 2 \sqrt{2} \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha \cdot \sin (\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{4}\pi) = 2 \sqrt{2} \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos (\frac{1}{2}\alpha \mp \frac{1}{4}\pi).$$

$$1 + \sin \alpha - \cos \alpha = 2 \sqrt{2} \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos (\frac{1}{2}\alpha \mp \frac{1}{4}\pi) = 2 \sqrt{2} \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha \cdot \sin (\frac{1}{4}\pi \pm \frac{1}{2}\alpha).$$

$$\cos \frac{1}{2}\alpha \pm \sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 \pm \sin \alpha}.$$

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha};$$

$$\cos \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha};$$

$$\tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}};$$

$$\tan (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha) = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}}.$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha.$$

Je-li $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, lze mezi jinými tyto vzorce vyvesti:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos \frac{1}{2}\beta \cdot \cos \frac{1}{2}\gamma,$$

$$\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{1}{2}\alpha \cdot \sin \frac{1}{2}\beta \cdot \cos \frac{1}{2}\gamma,$$

$$\begin{aligned}\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta + \text{tang } \gamma &= \text{tang } \alpha \cdot \text{tang } \beta \cdot \text{tang } \gamma, \\ \text{tang } \alpha - \cot \beta - \cot \gamma &= \text{tang } \alpha \cdot \cot \beta \cdot \cot \gamma.\end{aligned}$$

C á s t III.

O vypočítávání desk úhloměrných.

§. IX.

1. Má-li prospěch, o němž v §. IV. 7. zmíněno, skutečně vzejítí, jest třeba, abychom číselné hodnoty úhloměrných úkonů každého úhlu zvlášť vypočítati uměli a vypočítali. Aby dlouhavá práce ta k vůli každému příkladu zvlášť opakovati se nemusela, jest užitečno, řečené hodnoty i logaritmy jejich vypočítané a dobrě uspořádané k budoucí potřebě do zvláštních desk sestaviti.

2. Tehdy brává se za míru úhlu stupeň na 60 minut po 60 sekundách rozdelený, a do desk zapisují se úhloměrné úkony (neb jejich logaritmy) a příslušející k nim úhly od 0° po 10° neb aspoň po $1'$ pořád rostoucí. Ve dskách zevrubnějších jsou mezery úhlů po sobě přímo jdoucích ještě menší, a sice od $0^\circ 0'$ až do $1'$ pouze $0^\circ 1''$, od 0° až do 1° pouze $1''$ obnášejíce.

3. Takové dsky vyhoví potřebám úplně, obsahují-li úhly (i s úhloměrnými úkony neb logaritmy jejich) od 0° až do 45° ; neboť úhloměrné úkony všech zůstatních úhlů dají se vyměnit za úkony úhlu 45° nepřesahujícího, a sice:

- a) Je-li úhel záporný, zavede se kladný dle §. VII. 1.
- b) Je-li úhel přes 2π , dá se zavesti úhel $2\pi = 360^\circ$ nedosa-
hující dle §. VII. 4.
- c) Je-li úhel vypuklý, zavede se dutý odnětím přímého dle
§. VII. 3.
- d) Je-li úhel tupý, zavede se ostrý, který buďto s tupým na
přímý se doplňuje aneb o 90° menší jest dutého dle §. VII. 3,
neb §. VII. 2.
- e) Je-li úhel ostrý přes 45° , zavede se jeho doplněk na 90°
dle §. VII. 2., tedy úhel menší než 45° .

Příklady. Na místě $\sin 57^\circ$, $\sin 120^\circ$, $\sin 163^\circ$, $\sin 182^\circ$,
 $\sin 213^\circ$, $\sin 289^\circ$, $\sin 298^\circ$, $\sin (-69^\circ)$; $\cos 63^\circ$, $\cos 118^\circ$,
 $\cos 199^\circ$, $\cos 224^\circ$, $\cos 295^\circ$, $\cos 340^\circ$, $\cos 395^\circ$, $\cos (-450^\circ)$,
 $\text{tang } 49^\circ$, $\text{tang } 112^\circ$, $\text{tang } 134^\circ$, $\text{tang } 205^\circ$, $\text{tang } 231^\circ$, $\text{tang } 310^\circ$,
 $\text{tang } 498^\circ$, $\text{tang } (-256^\circ)$, $\cot 79^\circ$, $\cot 129^\circ$, $\cot 145^\circ$, $\cot 195^\circ$,
 $\cot 248^\circ$, $\cot 281^\circ$, $\cot 304^\circ$, $\cot 348^\circ$, $\cot 389^\circ$, $\cot 899^\circ$, $\cot (-560^\circ)$ zavedě příslušné úkony úhlů kladných, 45° nepřesahujících.

§. X.

1. Najdi úhloměrné úkony úhlů $45^\circ, 30^\circ, 18^\circ, 12^\circ$.

a) Poněvadž $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, jest dle §. VII. 2. vz. 33.

$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$. Z toho pak dle §. V. 2. najdeme

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sec 45^\circ = \cosec 45^\circ = \sqrt{2}.$$

b) Poněvadž $30^\circ + 2 \cdot 30^\circ = 90^\circ$, najdeme dle §. VII. 2. vz.

27. a dle §. VIII. 7. vz. 69.

$\cos 30^\circ = \sin 2 \cdot 30^\circ = 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$; a odtud $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; a dle §. V. 2. najdeme ze známé hodnoty $\sin 30^\circ$ všechny ostatní úkony úhlu 30° , a sice:

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \tan 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \cot 30^\circ = \sqrt{3}; \sec 30^\circ = \frac{2}{3}\sqrt{3}; \cosec 30^\circ = 2.$$

c) Poněvadž $2 \cdot 18^\circ + (2 \cdot 18^\circ + 18^\circ) = 90^\circ$, dostaneme dle §. VII.

$\sin 2 \cdot 18^\circ = \cos(2 \cdot 18^\circ + 18^\circ)$; odtud dle §. VIII. 1. vz. 47.

$\sin 2 \cdot 18^\circ = \cos 2 \cdot 18^\circ \cdot \cos 18^\circ - \sin 2 \cdot 18^\circ \cdot \sin 18^\circ$; a dle §. VIII. 7. vz. 68. a 69.,

$2 \cdot \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ = (1 - 2 \sin^2 18^\circ) \cdot \cos 18^\circ = 2 \sin^2 18^\circ \cdot \cos 18^\circ$; kteroužto rovnici dělíme-li činitelem $\cos 18^\circ$, dostaneme upravivše

$$4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin^2 18^\circ = 1, \text{ odkudž konečně vyjde:}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

Ostatní úkony vypočítáme dle §. V. 2. a sice:

$$\cos 18^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}; \tan 18^\circ = \sqrt{\frac{1}{5}(5 - 2\sqrt{5})};$$

$$\cot 18^\circ = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}; \sec 18^\circ = \sqrt{\frac{1}{5}(10 - 2\sqrt{5})};$$

$$\cosec 18^\circ = \sqrt{5} + 1.$$

d) Poněvadž jest $12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$, najde se $\cos 12^\circ$ a $\sin 12^\circ$ vzorci 48) a 50) §. VIII. 2., což aby vykonal a spolu ostatní úkony úhlu 12° vyhledal, čtenářovi zůstaveno.

2. Ze známé hodnoty $\cos 12^\circ$ najdeme vzorci 73), 74), 75), 76) §. VIII. 8. úhloměrné výkony úhlů polovičních, tedy nejprv 6° , pak $3^\circ, 1^\circ 30', 45', 22' 30'', 11' 15''$ atd.; odtud pak vzorcema 47) a 49) ustavičně k. p. $11' 15''$ neb $22' 30''$, neb $45''$ atd. přidávajíce celou řadu úkonů příslušejících k úhlům o týž rozdíl pořáde větším.

Než návod tento nepostačuje k vypočítání úhlov. úkonů každého úhlu, zvláště úhlů $1^\circ, 1', 1''$ a j., poněvadž ani úhel $45'$ ani kterýkoliv 2° -tý díl jeho není nírou úhlů $1^\circ, 1', 1''$ a j.

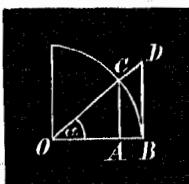
Proto jest třeba jiných ještě prostředků početních, o nichž v §. následujícím jednatí jest.

§. XI.

V tomto §. mějme za míru úhlů opět úhel středový, k němuž přísluší oblouk kruhový zdél poloměru; a vezmouce za míru oblouku poloměr klademe číselnou hodnotu oblouku za číselnou hodnotu úhlu, ježto obě si rovny jsou.

1. Číselná hodnota oblouku poloměrem měřeného jest větší, než sinus, a menší než tangens příslušného úhlu středového.

Důkaz. Buď (obr. 23.) $\angle BOC = \alpha$;
obr. 23.



$AC \parallel BD \perp OB$; tehdy (dle Pl. CVII. 1.) jest
 $BD > \text{arc } BC > AC$, pročež $\frac{BD}{OB} > \frac{\text{arc } BC}{OB} > \frac{AC}{OB}$
t. j. $\tan \alpha > \alpha > \sin \alpha$.

2. Výsledky. a) Z nerovnosti $\tan \alpha > \alpha$,
odvozujeme $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \alpha$, $\sin \alpha > \alpha \cos \alpha$, t. j. sinus
jest větší než oblouk cosinusem znásobený.

b) Z nerovnosti $\tan \alpha > \sin \alpha$ jde $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \sin \alpha$, odtud pak
 $\cos \alpha < 1$, t. j. pokud není $\sin \alpha = 0$, jest cosinus menší než 1.

3. a) Cosinus úhlu (středového) jest větší než rozdíl mezi 1 a polovičním čtvercem příslušného oblouku; a

b) Sinus jest větší než rozdíl mezi obloukem a mezi čtvrtinou zkrychleného oblouku: $\cos \beta > 1 - \frac{1}{4}\beta^2$; $\sin \beta > \beta - \frac{1}{4}\beta^3$.

Důkaz. a) Dle odst. 1. jest $\frac{1}{2}\beta > \sin \frac{1}{2}\beta$, pročež také
 $\frac{1}{4}\beta^2 > \sin^2 \frac{1}{2}\beta$, neb $\frac{1}{4}\beta^2 > 2\sin^2 \frac{1}{2}\beta$; dle § VIII. 7. vz. 72. jest
 $2\sin^2 \frac{1}{2}\beta = 1 - \cos \beta$, pročež $\frac{1}{4}\beta^2 > 1 - \cos \beta$, a odtud jde
 $\cos \beta > 1 - \frac{1}{4}\beta^2$.

b) Dle odst. 2. a) jest $\sin \frac{1}{2}\beta > \frac{1}{2}\beta \cdot \cos \frac{1}{2}\beta$; z čehož vyvedeme
znásobice činitelem $2 \cdot \cos \frac{1}{2}\beta$ obě strany, a pak na pravé straně
 $1 - \sin^2 \frac{1}{2}\beta$ místo $\cos^2 \frac{1}{2}\beta$ dle vz. 1. §. V. položíme:

$2 \cdot \sin \frac{1}{2}\beta \cdot \cos \frac{1}{2}\beta > \beta(1 - \sin^2 \frac{1}{2}\beta)$, a dle vzorce 69. §. VIII. 7.
 $\sin \beta > \beta(1 - \sin^2 \frac{1}{2}\beta)$;

a poněvadž $\sin^2 \frac{1}{2}\beta < \frac{1}{4}\beta^2$, tedy $\sin^2 \frac{1}{2}\beta < \frac{1}{4}\beta^2$: jest tím spíše
 $\sin \beta > \beta(1 - \frac{1}{4}\beta^2)$, aneb $\sin \beta > \beta - \frac{1}{4}\beta^3$.

4. Pokud jest úhel (na stupně měřený) menší než $1' 33''$, liší se cosinus jeho od 1, a pokud jest úhel menší než $25' 51''$, liší se sinus jeho od oblouka o méně než o 10^{-7} .

Nebot dle odst. 3. jest $1 - \cos\beta < \frac{1}{2}\beta^2$; i bude $1 - \cos\beta < 10^{-7}$, bude-li $\frac{1}{2}\beta^2 < 10^{-7}$. Této výmince ale aby se vyhovělo, žádáme $\beta^2 < \frac{2}{10^7}$ aneb $\beta^2 < \frac{20}{10^8}$; a proto $\beta < \frac{\sqrt{20}}{10000}$ t.j. $\beta < 0.0004472136$ kterýžto oblouk na stupně měřený činí $1' 33''$.

Dle téhož odst. 3. jest $\beta - \sin\beta < \frac{1}{4}\beta^3$; i bude opět $\beta - \sin\beta < 10^{-7}$, bude-li $\frac{1}{4}\beta^3 < 10^{-7}$. To ale stane se, je-li $\beta^3 < \frac{4}{10^7}$ aneb $\beta^3 < \frac{400}{10^9}$, pročež $\beta < \frac{\sqrt[3]{400}}{1000}$, t.j. $\beta < 0.007522346 \dots$, kterýžto oblouk na stupně měřený činí $25' 51''$.

5. Jedná-li se nám o známost pouze blíživých hodnot úkonů úhloměrných a postačuje-li nám k praktickým potřebám znáti jejich prvních sedm míst desetinných: můžeme pokud úhel jest menší než $1' 33''$ dle odst. 4. místo $\cos\beta$ položiti 1, a pokud úhel jest menší než $25' 51''$, smíme místo $\sin\beta$ dosaditi číselnou hodnotu oblouku β poloměrem měřeného.

Je-li tedy $\beta < 1' 33''$, můžeme k nabytí prvních sedmi míst desetinných vzorce 47), 48), 49), 50) §. VIII. 2. zjednodušiti takto:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha - \beta \cdot \sin\alpha; & \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha + \beta \cdot \sin\alpha; \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha + \beta \cdot \cos\alpha; & \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha - \beta \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

Ku př. Bud $\alpha = 56' 15'' = 45' + \frac{1}{4} \cdot 45'$, kteréhožto úhlu sinus i cosinus vypočítán bud dle návodu §. IX. odst. 2., a položme $\beta = 1' 22.5''$, což poloměrem měřeno činí $165\pi : 1296000$; tehdy najdeme $\cos 57' 37.5'' = \cos 56' 15'' - \beta \cdot \sin 56' 15''$

$$\sin 57' 37.5'' = \sin 56' 15'' + \beta \cdot \cos 56' 15''.$$

Hodnoty tyto vypočítavše můžeme opět položiti $\alpha = 57' 37.5''$, $\beta = 1' 22.5''$, tedy $(\alpha + \beta) = 59'$ a týmž spůsobem najdeme $\cos 59'$ i $\sin 59'$. Tyto poznavše položíme $\alpha = 59'$, $\beta = 1'$, pročež $\alpha + \beta = 1^{\circ}$ i najdeme $\cos 1^{\circ}$ i $\sin 1^{\circ}$; atd.

Přidavek. Vypočítáváme-li po sobě úkony úhlů $\alpha + \beta$, $\alpha + 2\beta$, $\alpha + 3\beta$, atd. $\beta < 1' 33''$, můžeme si počínajíc od $\alpha + 2\beta$ práci, usnadnit, užijíce vzorců 47) a 49) §. VIII., kteréžto se, položíme-li v nich $\alpha + \beta$ místo α , a $\cos\beta = 1$, takto zjednodušíme:

$$\cos(\alpha + 2\beta) = 2\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha.$$

$$\sin(\alpha + 2\beta) = 2 \cdot \sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha.$$

Poznam. Jiným ještě způsobem na vypočítávání úhloměrných úkonů ze známého úhlu neb oblouku jakož i logaritmů jejich učí algebraická analysis, o čemž vykládati zde na místě není.

Kterak se užiti má logaritmů úkonů úhloměrných, vysvětleno bývá v dskách logaritmů.

C á s t III.

O úhloměrném řešení obrazců přímočarých.

A. Řešení trojúhelníků pravoúhlých.

§. XII.

1. Vzpomenouče, co povídno jest v §. IV. 1. 6., můžeme výměry úhloměrných úkonů úhlu ostrého A takto učiniti:

a) *Sinus* (vstava) úhlu A v trojúhelníku pravoúhlém ABC (obr. 24.) jest poměr odvěsné protější k podponě;

b) *Cosinus* (dostava) jeho jest poměr přilehlé odvěsné k podponě;

c) *Tangens* (tečnice) jest poměr odvěsné protější k přilehlé;

d) *Cotangens* (dotečnice) jest poměr odvěsné přilehlé k protější. Což znamenámi vyjádřeno, klademe-li $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$, zní: $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\tan A = \frac{a}{b}$, $\cot A = \frac{b}{a}$.

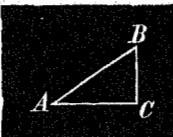
2. Z těchto ponětí rovnicemi vyjádřených odvozujeme vzorce, je samé přijímajice:

$$\sin A = \frac{a}{c} \dots \alpha; c = \frac{a}{\sin A} \dots \beta; a = c \cdot \sin A \dots \gamma;$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \dots \delta; c = \frac{b}{\cos A} \dots \varepsilon; b = c \cdot \cos A \dots \zeta;$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \dots \eta; a = b \cdot \tan A \dots \vartheta; b = a \cdot \cot A \dots \iota.$$

Tyto vzorce mají platnost, jakož patrno, i tenkrát, když se a za b , a spolu A za B vymění, a slouží k řešení trojúhelníků pravoúhlých t. j. k vypočítávání částí neznámých z částí určujících známých.



3. Jest pak prvopočátečných úloh o trojúhelníku pravoúhlém patero, a sice:

- a) dán jest úhel A a podpona c ;
- b) dán jest úhel A a protější odvěsná a , aneb
- c) úhel A a přilehlá odvěsná b ;
- d) dány jsou obě odvěsné a i b ;
- e) dána jest odvěsná a a podpona c :

i žádá se, aby vypočítány byly ostatní úhly a strany.

Řeš. a) Ježto v trojúhelníku pravoúhlém ostré úhly vzájemně se na pravý doplňují, jest $B = 90^\circ - A$; a dle odst. 2. najdeme $a = c \sin A$; $b = c \cdot \cos A$.

b) Podobně bude $B = 90^\circ - A$; $c = \frac{a}{\sin A}$; $b = a \cdot \cot A$;

c) Taktéž $B = 90^\circ - A$; $c = \frac{b}{\cos A}$; $a = b \cdot \tan A$;

d) Dány-li jsou obě odvěsné, najdeme větou Pyth. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

a dle odst. 2. úhly $\tan A = \cot B = \frac{a}{b}$.

Dodatek. Kdyby bylo nepohodlně vypočítávat $\sqrt{a^2 + b^2}$, najde-
me nejprv úhel A , a potom $c = \frac{a}{\sin A}$.

e) Podobně vyhledáme $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$;
 $\sin A = \cos B = \frac{a}{c}$.

Příklady. a) Buď $A = 50^\circ 46' 57''$; $c = 246.79$ stop.

Tehdy bude $B = 90^\circ - A = 39^\circ 13' 3''$.

Od vzorců $a = c \cdot \sin A$, $b = c \cdot \cos A$ k logaritmům se uchý-
líce dostaneme:

$$\log a = \log c + \log \sin A; \log b = \log c + \log \cos A;$$

Z desk logaritmů najdeme:

$$\log c = 2.3923270; \log \sin A = 9.8891623-10; \log \cos A = 9.8008998-10;$$

Tyto hodnoty do předcházejících rovnic dosadíce, vypočítáme:

$$\log a = 2.2814893; \log b = 2.1932268.$$

Z desk logaritmů pak najdeme: $a = 191.2007$, $b = 156.0367$
stop.

b) Buď úhel $A = 47^\circ 24' 12''$, odvěsná $a = 78.531$ stop.

Tehdy jest $B = 42^\circ 35' 48''$. Od vzorců a), i) odst. 2. k loga-
ritmům se uchýlíce najdeme:

$$\log c = \log a - \log \sin A; \log b = \log a + \log \cot A.$$

Z desk logaritmů vyhledáme:

$$\log a = 1.8950411; \log \sin A = 9.8669583-10; \log \cot A = 9.9635233-10;$$

Tyto hodnoty do předcházejících rovnic dosadíce vypočítáme:

$$\log c = 2.0280828; \log b = 1.8585644.$$

Konečně z desk logaritmů najdeme:

$$c = 106.679 \text{ stop}, b = 72.2045 \text{ stop}.$$

$$c) \text{ Bud úhel } A = 43^\circ 11' 15'', \text{ odvěsná } b = 0.79234 \text{ stop}.$$

Tehdy jest $B = 46^\circ 48' 45''$. Od vzorců s), d) odst. 2. k logaritmům se uchýlíce dostaneme:

$$\log c = \log b - \log \cos A; \log a = \log b + \log \tan A.$$

Z desk logaritmů najdeme:

$$\log b = 0.8989116-1; \log \cos A = 9.8627978-10; \log \tan A = 9.9725046-10.$$

Tyto hodnoty do předcházejících rovnic dosadíce vypočítáme:

$$\log c = 0.0361138; \log a = 0.8714162-1;$$

Z desk logaritmů pak najdeme:

$$c = 1.08671 \text{ stop}, a = 0.74373 \text{ stop}.$$

$$d) \text{ Bud odvěsná } a = 4.0236 \text{ stop}, \text{ odvěsná } b = 5.0706 \text{ stop}.$$

Tehdy ze vzorce η) odst. 2. k logaritmickému počítání najdeme:

$$\log \tan A = \log a - \log b.$$

Z desk logaritmů vyhledáme:

$$\log a = 0.6046148; \log b = 0.7050594.$$

i) vypočítáme dosadíce tyto hodnoty do rovnice předešlé:

$$\log \tan A = 9.8995554-10.$$

Z desk logaritmů pak najdeme $A = 38^\circ 25' 57''$, tedy
 $B = 51^\circ 34' 8''$.

K vypočítání podpony c užijeme nyní vzorce β) upravice ho logaritmicky:

$$\log c = \log a - \log \sin A.$$

Z desk log. najdeme:

$$\log \sin A = 9.7935055-10.$$

a dosadíce do rovnice předešlé vypočítáme:

$$\log c = 0.8111093;$$

Posléz z desk log. vyhledáme $c = 6.47305 \text{ stop}$.

$$e) \text{ Bud podpona } c = 67.243 \text{ odvěsná } a = 51.837 \text{ stop}.$$

Tehdy jest $b = \sqrt{(c+a)(c-a)} = \sqrt{119.07 \times 15.406} = 42.8298 \text{ stop}.$

Úhel A najdeme užijíce vzorce α) odst. 2. po logaritmicku:

$$\log \sin A = \log a - \log c.$$

$\log a = 1.7146399$; $\log c = 1.8276471$; pročež
 $\log \sin A = 9.8869928 - 10$; tedy $A = 50^\circ 26' 2''$; $B = 39^\circ 33' 58''$.

5. *Úlohy ku cvičení.* Najdi neznámé strany, úhly, ploský obsah pravoúhlého trojúhelníka, jsou-li dány

- (a) jeden úhel, a kromě něho ještě buď α) výška na podponu spuštěná, aneb β) úsečka podpony až k patě této výšky, aneb γ) součet odvěsných, aneb δ) rozdíl jejich aneb ϵ) součet jedné odvěsné a podpony, aneb ζ) rozdíl jejich, aneb η) rozdíl mezi jednou odvěsnou a součtem druhých dvou stran;
- b) výška na podponu, a kromě ní ještě buď α) podpona, neb β) odvěsná, neb γ) úsečka podpony až ku patě výšky, aneb δ) poměr dvou stran, a sice buďto obou odvěsných, aneb odvěsné a podpony;
- c) úsečka podpony až ku patě výšky, a kromě ní ještě buď α) druhá úsečka podpony, aneb β) podpora, aneb γ) přilehlá odvěsná, aneb δ) druhá odvěsná.

B. Řešení trojúhelníků kosouhlých.

§. XIII.

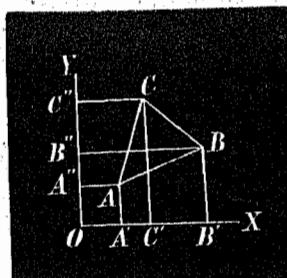
Základní věty.

1. Úhly trojúhelníka ABC budeme znamenati velkými (A, B, C) a protější strany malými a stejnozvukými písmeny a, b, c z lat. abecedy.

obr. 25.

2. V trojúhelníku jsou strany k sinusu protějších úhlů v poměru přímém.

Důkaz. Buď (obr. 25.) OY osa hlavní, OY pobočná; A'', B'', C'' budte pobočné průměty vrcholů A, B, C trojúhelníka ABC , jehož strany i co do délky i co do směru znamenejme píšice: $AB = c, BC = a, CA = b$; podobně $OX = x$.



Dle §. I. 6. jest

$$A''B'' + B''C'' + C''A'' = o,$$

$$\text{aneb } p_y(AB) + p_y(BC) + p_y(CA) = o;$$

pročež dle §. VIII. 1.

$$c \cdot \sin(\alpha^{\wedge} c) + a \cdot \sin(\alpha^{\wedge} a) + b \cdot \sin(\alpha^{\wedge} b) = o.$$

Tento vzorec má platnost všeobecnou, ať si směr hlavní osy jest jakýkoliv, pročež i tenkrát, když osa jest s některou stranou trojúhelníka rovnoběžná. Bud tedy nejprv $OX \parallel AB$: i sluší tu místo x položiti c , pokud se pouze směru týče, a pak bude

$$\sin(x^c) = \sin(c^c) = \sin 0 = 0.$$

Tím ale změní se vzorec α) a sice:

$$a \cdot \sin(c^a) + b \cdot \sin(c^b) = o \quad \dots \dots \dots \beta).$$

Chceme-li do vzorce $\beta)$ zavesti vnitřní úhly trojúhelníka ABC , pomněme, že jest $c^a = \pi - \angle CBA = \pi - B$, $c^b = \angle BAC + \pi = A + \pi$: pročež dle §. VII. 3. vz. 42. 36.

$$\sin c^a = \sin B, \sin c^b = -\sin A;$$

tyto dvě hodnoty do vzorce $\beta)$ dosadíce nabudeme:

$$a \cdot \sin B = b \cdot \sin A.$$

Podobným způsobem najdeme

$$a \cdot \sin C = c \cdot \sin A, b \cdot \sin C = c \cdot \sin B.$$

Vše to shrnouce píšeme:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C \quad \dots \dots \dots \gamma)$$

3. Součet dvou stran trojúhelníka, z nichž každá prvé se znásobila cosinusem vnitřní své odchylky od strany třetí, jest této třetí straně roven.

Důkaz. Znamenajíce jako v odst. 2. mějme A' , B' , C' průměty vrcholů trojúhelníka na osu hlavní: i bude opět dle §. I. 6.

$$A'B' + B'C' + C'A' = o; \text{ aneb}$$

$$\mathfrak{p}_x(AB) + \mathfrak{p}_x(BC) + \mathfrak{p}_x(CA) = o;$$

pročež dle §. VIII. 1.

$$c \cdot \cos(x^c) + a \cdot \cos(x^a) + b \cdot \cos(x^b) = o \quad \dots \dots \dots \alpha)$$

Položíme-li, jako svrchu $OX \parallel AB$, bude $x^c = o$, $\cos(x^c) = 1$; pročež c místo x , jelikož pouze směru se týče, kladouce, nabudeme ze vzorce α):

$$c + a \cdot \cos(c^a) + b \cdot \cos(c^b) = o \quad \dots \dots \dots \beta)$$

Zavedeme-li vnitřní úhly trojúhelníka ABC , pomněce, že jest $\cos(c^a) = \cos(\pi - B) = -\cos B$; $\cos c^b = \cos(A + \pi) = -\cos A$. vyjde nám ze vzorce $\beta)$:

$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A \quad \dots \dots \dots \gamma)$$

a podobným způsobem dostaneme:

$$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C \quad \dots \dots \dots \delta)$$

$$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B \quad \dots \dots \dots \epsilon)$$

jakož větu shora tvrzeno.

4. Čtverec kterékoliv strany trojúhelníka rovná se součtu ze

čtverci druhých dvou stran zmenšenému o dvojnásobný jejich součin zndobený cosinusem úhlu jima sevřeného. (Věta Carnotova.)

Důkaz. Rovnice γ , δ , ϵ) odst. 3. znásobíce stranami c , b , a dostaneme:

$$c^2 = ac \cdot \cos B + bc \cdot \cos A;$$

$$b^2 = bc \cdot \cos A + ab \cdot \cos C;$$

$$a^2 = ab \cdot \cos C + ac \cdot \cos B.$$

Odečouce rovnici jednu od součtu druhých dostaneme:

$$\left. \begin{array}{l} b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos A \\ a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cdot \cos B \\ a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot \cos C \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha) \\ \beta) \\ \gamma) \end{array}$$

Odkudž jde:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha) \\ \beta) \\ \gamma) \end{array}$$

5. Součet dvou stran trojúhelníka má se k jejich rozdílu, jako tangens polovičného součtu protějších úhlů k tangentě polovičného rozdílu jejich.

Důkaz. Dle odst. 2. jest $a:b = \sin A : \sin B$; pročež také

$$(a+b):(a-b) = (\sin A + \sin B) : (\sin A - \sin B);$$

ale dle §. VIII. 6. vz. 67. jest

$$(\sin A + \sin B) : (\sin A - \sin B) = \tan^{1/2}(A+B) : \tan^{1/2}(A-B);$$

pročež

$$(a+b):(a-b) = \tan^{1/2}(A+B) : \tan^{1/2}(A-B).$$

6. Vzorec I. α . odst. 4. má být k logaritmickému počítání přispůsoben.

Řeš. K tomu konci rovnici $2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$ jednou přičtěme, podruhé odečtěme od rovnice totožné $2bc = 2bc$: učiníce dostaneme upravivše:

$$2bc(1 + \cos A) = (b+c)^2 - a^2$$

$$2bc(1 - \cos A) = a^2 - (b-c)^2$$

Dle §. VIII. 7. vz. 71. 72. jest

$$1 + \cos A = 2\cos^{1/2} A, 1 - \cos A = 2\sin^{1/2} A;$$

tyto hodnoty do posledních dvou rovnic dosadíce, a pravé strany týchž rovnic roznásobíce dostaneme:

$$4bc \cos^{1/2} A = (a+b+c)(b+c-a),$$

$$4bc \sin^{1/2} A = (a+b-c)(a+c-b).$$

Položíme-li k vůli krátkosti $a + b + c = 2s$, pročež pak $a + b - c = 2(s - c)$, $a + c - b = 2(s - b)$, $b + c - a = 2(s - a)$, vyjde:

$bc \cos^2 \frac{1}{2}A = s(s - a)$; $bc \sin^2 \frac{1}{2}A = (s - b)(s - c)$; odkudž konečně se ustanoví:

$$\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \alpha; \quad \sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad \beta;$$

a vezmouce podíl a součin těchto dvou rovnic najdeme

$$\tan \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \gamma$$

$$\sin \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}A = \frac{1}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

aneb, máme-li zřetel ku vz. 69. §. VIII. 7.

$$\frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \delta$$

7. Ploský obsah \triangle trojúhelníka jest roven polovičnému součinu ze dvou stran znásobeném sinusem úhlu jima sevřeného.

obr. 26.

Důkaz. Buď (obr. 26.) DB výška na straně

$AC = b$ trojúhelníka $ABC = \triangle$ strmící: jest pak (dle Pl. CXIX. 2.).

$$\triangle = \frac{1}{2}b \cdot DB;$$

ale dle §. XII. 2. a) jest $DB = c \sin A$; pročež

$$\triangle = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

8. Výsledek. V trojúhelníku rovnoramenném, jehož vrchol jest A , máme $b = c$, pročež

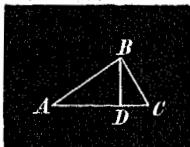
$$\triangle = \frac{1}{2}b^2 \sin A;$$

t. j. Ploský obsah trojúhelníka rovnoramenného jest roven polovičnému čtverci ramene znásobeném sinusem úhlu ramenoma sevřeného.

9. Jsou-li a, b, c strany, $2s$ obvod, \triangle ploský obsah trojúhelníka, jest vždy

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Neboť vzorec tento vyplývá přímo z odst. 7. a ze vzorce δ) odst. 6.



§. XIV.

Na větách v §. XIII. přednešených spočívá úhloměrné řešení trojúhelníků, t. j. vypočítávání neznámých částí určených ze známých částí určujících.

Jest pak prvopočátečních toho způsobu úloh tolik, kolikeré jest prvopočátečné sdružení částí určujících, tedy (dle Pl. §. XL—XLIX) čtvero, kteréžto zde za základ úloh vzaty budou.

1. **Úloha.** Dány jsou jedna strana a a přilehlé k ní úhly B i C : najdi úhel třetí, druhé dvě strany a ploský obsah trojúhelníka.

Řeš. $\angle A = 180^\circ - (B + C)$.

Strany b , c najdeme užijíce věty §. XIII. 2., a sice:

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{a \cdot \sin B}{\sin(B+C)}; c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{a \cdot \sin C}{\sin(B+C)}$$

Ploský obsah vyhledáme větou §. XIII. 7., a sice:

$$\Delta = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin(B+C)}.$$

Příklad. Bud $a = 45.705$, $B = 57^\circ 24'$; $C = 35^\circ 13'$. Jest pak $A = 87^\circ 23'$; a počítáme-li dále logaritmicky, dostaneme nejprv ze vzorců zde poručených:

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A;$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A;$$

$$\log \Delta = 2 \cdot \log a + \log \sin B + \log \sin C - (\log 2 + \log \sin A).$$

V dskách logaritmických najdeme:

$$\log a = 1.6599637; \log 2 = 0.3010300; \log \sin B = 9.9255454 - 10;$$

$$\log \sin C = 9.7609274 - 10; \log \sin A = 9.9995469 - 10$$

Tyto hodnoty zavedše do předcházejících tří rovnic vypočítáme:

$$\log b = 1.5859622; \log c = 1.4213442; \log \Delta = 2.7058233.$$

Z desk logaritmických najdeme pak:

$$b = 38.5448; c = 23.6842; \Delta = 507.9527 \square.$$

2. **Úloha.** Dány jsou dvě strany a , b , a úhel A proti delší straně a ležící: najdi třetí stranu c a druhé dva úhly a ploský obsah Δ trojúhelníka.

a) **Rozřeš.** Opět věty §. XIII. 2. užijíce najdeme úhel B vzorcem $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$; majíce úhly A i B určíme úhel $C = 180^\circ$

$-(A+B)$; po té ustanovíme třetí stranu c vzorcem $c = a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$;

konečně vypočítáme ploský obsah $\Delta = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$.

Dodatek. Hodnota $\sin B$ náleží vůbec ku dvěma úhlům, které se na 180° doplňují (§. VII. 3. vz. 42); pročež je-li B úhel dutý, k jednomu ostrému a k jednomu tupému zároveň. V naší úloze jest ale tupý úhel vyloučen, ježto dle výminky jest $b < a$ a tím $B < A$ (Pl. XLV.), tedy na všechn způsob $B < 90^\circ$. Kdyby ale bylo $b > a$, zůstala by dvojsmyslnost, což se srovnává s Pl. XLVII. 5.

Příklad. Bud $a = 60^\circ 23' 44''$, $b = 49^\circ 40' 5''$; $A = 108^\circ 10' 20''$.

Užijíce logaritmů dostaneme ze vzorců zde poručených:

$$\log \sin B = \log \sin A + \log b - \log a; \quad \dots \dots \dots \alpha)$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A; \quad \dots \dots \dots \beta)$$

$$\log \Delta = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2 \quad \dots \dots \dots \gamma)$$

Z desk logaritmických najdeme:

$$\log \sin A = \log \sin(180^\circ - A) = 9.9777800 - 10;$$

$$\log b = 1.6937790; \log a = 1.7798417.$$

Tyto hodnoty dosadíce do rovnice $\alpha)$ vypočítáme:

$$\log \sin B = 9.8917173 - 10; \text{ a pomocí desk logaritmů:}$$

$$B = 51^\circ 11' 54'', \text{ pročež } C = 20^\circ 37' 46''.$$

Znajíce již hodnotu $\log \sin B$ vypočítáme ze vzorců $\beta), \gamma)$:

$$\log c = 1.3490022; \log \Delta = 2.7195312; \text{ a pomocí desk:}$$

$$c = 22.3358; \Delta = 524.2412 \square.$$

3. *Úloha.* Dány jsou dvě strany a , b a úhel jima sevřený c : najdi druhé dva úhly, třetí stranu a ploský obsah trojúhelníka.

Řeš. Třetí stranu c mohli bychom nalezti přímo větou Carnotovou; chtějíce ale pohodlně logaritmů užiti, jdeme obyčejně oklikou; a sice:

Poněvadž jest $A + B = 180^\circ - C$, tedy $\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$: známe poloviční součet neznámých dvou úhlů. Rozdíl pak jejich vyhledáme dle věty §. XIII. 5. vzorcem

$$\tan \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \tan \frac{1}{2}(A + B). \text{ Znajíce pak i součet i roz-}$$

díl tento, najdeme velikost úhlů samých; neboť je-li $\frac{1}{2}(A + B) = \sigma$, $\frac{1}{2}(A - B) = \delta$: vyjde sečtením a odečtením $A = \sigma + \delta$, $B = \sigma - \delta$. Ježto pak všechny úhly jsou známy, najde se strana třetí dle §. XIII. 2. vzorcem:

$$c = b \cdot \frac{\sin C}{\sin B}; \text{ ploský obsah ale dle XIII. 7. přímo}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

Příklad. Bud $a = 7.2054$, $b = 6.3587$, $C = 70^\circ 40'$.

K logaritmickému počítání změníme si poručené vzorce takto:

$$\log \tan \frac{1}{2}(A-B) = \log \tan \frac{1}{2}(A+B) + \log(a-b) - \log(a+b) \dots \alpha)$$

$$\log c = \log b + \log \sin C - \log \sin B; \dots \beta)$$

$$\log \Delta = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2 \dots \gamma)$$

$$\text{Pak určíme } \frac{1}{2}(A+B) = 90 - \frac{1}{2}C = 54^\circ 40' = \sigma.$$

Potom najdeme z desk logaritmických:

$$\log(a-b) = \log 0.8467 = 0.9277296 - 1.$$

$$\log(a+b) = \log 13.5641 = 1.1323910$$

$$\log \tan \frac{1}{2}(A+B) = \log \tan 54^\circ 40' = 0.1494096.$$

Tyto hodnoty dosadíce do rovnice α) vypočítáme

$$\log \tan \frac{1}{2}(A-B) = 8.9447445 - 10;$$

tím pak z desk logaritmických najdeme:

$$\frac{1}{2}(A-B) = 5^\circ 1' 55.5'' = \delta.$$

$$\text{Nyní již najdeme } A = \sigma + \delta = 59^\circ 41' 55.5''$$

$$B = \sigma - \delta = 49^\circ 38' 4.5''$$

Po té vyhledáme z desk logaritmických:

$$\log b = 0.8033683; \log \sin C = 9.9747918 - 10;$$

$$\log a = 0.8576581; \log \sin B = 9.8819147 - 10;$$

a majíce tyto hodnoty vypočítáme z rovnic β), γ):

$$\log c = 0.8962454, \log \Delta = 1.3347882;$$

Konečně určíme pomocí desk logaritmických:

$$c = 7.874907; \Delta = 21.61664 \square.$$

4. Úloha. Dány jsou strany a, b, c: najdi úhly a ploský obsah trojúhelníka.

Řeš. Úhly určí se některým ze vzorců α), β), γ) §. XIII. 6.
a ploský obsah vzorcem §. XIII. 9.

Příklad. Bud $a = 378.24$, $b = 380.37$, $c = 391.49$.

Nejprv upravíme poručené vzorce, jak následuje:

$$\log \tan \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}[\log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a)],$$

$$\log \tan \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}[\log(s-a) + \log(s-c) - \log s - \log(s-b)],$$

$$\log \tan \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}[\log(s-a) + \log(s-b) - \log s - \log(s-c)],$$

$$\log \Delta = \frac{1}{2}[\log s + \log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c)].$$

Potom našedše $s = 575.07$, $s-a = 196.81$, $s-b = 194.68$,
 $s-c = 183.56$ vyhledáme z desk logaritmických:

$$\log s = 2.7597056; \log(s-a) = 2.2940472; \log(s-b) = 2.2893213,$$

$\log(s-c) = 2.2637780$: a tyto hodnoty do hořejších rovnic dosadíce vypočítáme:

$$\log \tan \frac{1}{2}A = 9.7496732 - 10; \log \tan \frac{1}{2}B = 9.7543991 - 10;$$

$$\log \tan \frac{1}{2}C = 9.7799425 - 10; \log \Delta = 4.8034260;$$

z čehož pomocí desk logaritmických určíme:

$\frac{1}{2}A = 29^\circ 19' 56\cdot8''$, tedy $A = 58^\circ 39' 53\cdot6''$; $\frac{1}{2}B = 29^\circ 35' 58''$, tedy $B = 59^\circ 11' 56''$; $\frac{1}{2}C = 31^\circ 4' 5\cdot2''$, tedy $C = 62^\circ 8' 10\cdot4''$, a $\Delta = 63595\cdot44\Box$.

5. Úlohy ku cvičení:

A. Rozřeš trojúhelník, jsou-li dány:

- a) Dva úhly, a kromě nich ještě buď α) součet, aneb β) rozdíl dvou stran, aneb γ) celý obvod, aneb δ) ploský obsah, aneb ϵ) výška;
- b) Dvě strany, a kromě nich buď α) výška některá, neb β) rozdíl protějších úhlů, aneb γ) ploský obsah;
- c) Dvě výšky, a buďto α) jeden úhel, aneb β) jedna strana, aneb γ) součet obou podstav, aneb δ) rozdíl jejich, aneb ϵ) ploský obsah.

B. Rozřeš trojúhelník rovnoramenný, je-li dán:

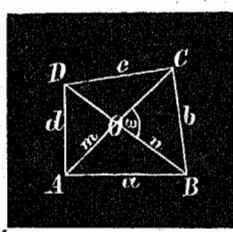
- a) Jeden úhel, a buďto α) podstava, neb β) rameno, neb γ) jedna výška, neb δ) obvod, neb ϵ) součet podstavy a ramene, neb ξ) rozdíl jejich, aneb η) ploský obsah;
- b) Podstava a buďto α) rameno, neb β) výška na podstavu, neb γ) výška na rameno spuštěná;
- c) Rameno a výška buďto α) na rameno, aneb β) na podstavu vztýčená.

C. Řešení čtyřúhelníků.

§. XV.

K řešení čtyřúhelníků, ano mnohoúhelníků vůbec lze způsobem, jehož jsme užili v §. XIII., vyvésti základní vzorce podobné vzorcům §. XIII. 2. α) β 3. α) β), na nichž pak celá polygonometria zbudovat se dá. Nauku tu z nedostatku místa zde obcházíme, a mnohoúhelník na trojúhelníky rozkládající trigonometricky řešíme.

obr. 27.



1. V čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 27.) znamenejme strany a úhlopříčné kladouce

$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = m$,

$BD = n$. Jest pak:

$$A + B + C + D = 360^\circ \dots \alpha), \text{ a dle §. XIII. 4. II.}$$

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B \dots \beta)$$

$$m^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D \dots \gamma)$$

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A \dots \delta)$$

$$n^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C \dots \epsilon)$$

Rovnice tyto postačují, aby z pěti daných částí, jimiž čtyřúhelník se určuje, ostatní počtem nalezti se daly.

2. Dle §. XIII. 7. dostaneme (obr. 27.):

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}ab \sin B; \Delta CDA = \frac{1}{2}cd \sin D;$$

odtud sečtením, znamená-li P ploský obsah čtyrúhelníka $ABCD$:

$$P = \frac{1}{2}ab \sin B + \frac{1}{2}cd \sin D \quad \dots \dots \dots \quad \zeta);$$

$$P = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C \quad \dots \dots \dots \quad \eta)$$

Z obou těchto rovnic vyplývá:

$$ab \sin B + cd \sin D = ad \sin A + bc \sin C \quad \dots \dots \dots \quad \vartheta)$$

3. Ploský obsah čtyrúhelníka rovná se polovičnému součinu z úhlopříčných znásobenému sinusem úhlu jima sevřeného.

Důkaz. Dle §. XIII. 7. jest, znamená-li ω úhel DOC (obr. 27.).

$$\triangle AOB = \frac{1}{2}AO \cdot OB \cdot \sin \omega, \quad \triangle BOC = \frac{1}{2}OC \cdot OB \cdot \sin \omega;$$

odtud jde sečtením $\triangle ABC = \frac{1}{2}m \cdot OB \cdot \sin \omega$;

podobně dostaneme $\triangle CDA = \frac{1}{2}m \cdot DO \cdot \sin \omega$:

posledních dvou rovnic součet jest $P = \frac{1}{2}mn \cdot \sin \omega$.

Zůstavující čtenářovi více přemýšleti o řešení čtyrúhelníků na těchto zásadách, zmíníme se v následujícím §. ještě o čtyrúhelníku z tetiv a některých úlohách k němu hledících.

§. XVI.

1. V čtyrúhelníku z tetiv jest $B + D = A + C = 180^\circ$, pročež $\sin A - \sin C = \sin B - \sin D = \cos A + \cos C = \cos B + \cos D = 0$. Tím nabudou vzorce §. XIV. jednodušší podoby; a sice:

$$A + C = B + D = 180^\circ \quad \dots \dots \dots \dots \quad \alpha)$$

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B \quad \dots \dots \dots \dots \quad \beta)$$

$$m^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos B \quad \dots \dots \dots \dots \quad \gamma)$$

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A \quad \dots \dots \dots \dots \quad \delta)$$

$$n^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \dots \dots \dots \dots \quad \epsilon)$$

$$P = \frac{1}{2}(ab + cd) \sin B = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin A \quad \dots \dots \dots \dots \quad \zeta)$$

$$(ab + cd) \sin B = (ad + bc) \sin A \quad \dots \dots \dots \dots \quad \eta)$$

2. Najdi úhel A , a ploský obsah P , jsou-li dány všechny strany čtyrúhelníka z tetiv.

Řeš. Ze vzorců $\delta)$ a $\epsilon)$ odst. 1. nabýváme:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \text{ odtud pak}$$

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)}{2(ad + bc)}.$$

Aby vzorec k logar. počtu přidoben byl, přičteme a podruhé odečteme jej od rovnice $1 = 1$; i nabudeme pomníce, že jest $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A$, $1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$: (VIII. 7. vz. 71. 72):

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{4(ad+bc)} = \frac{(a+b+c+d)(a-b+c+d)}{4(ad+bc)};$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{4(ad+bc)} = \frac{(a+b+c-d)(-a+b+c+d)}{4(ad+bc)};$$

a položíme $a+b+c+d = 2s$, vyjde:

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}} \quad \dots \dots \dots \alpha;$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}} \quad \dots \dots \dots \beta;$$

$$\tan \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}} \quad \dots \dots \dots \gamma.$$

Znásobíme-li spolu vzorce α a β , dostaneme upravivše:

$$\frac{1}{2}(ad+bc) \cdot \sin A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \dots \dots \dots \delta)$$

Porovnáme-li tento vzorec s vzorcem ζ odst 1., najdeme přímo plošký obsah:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \dots \dots \dots \varepsilon)$$

3. *Ku cvičení.* Maje za základ rovnice posud získané, najde bystrý čtenář kromě jiných ještě následující vzorce, z nichž mu pak mnohé k řešení zvláštních úloh poslouží mohou. Pro zrychlení práce může sem tam též planimetrických obrázků použít.

a) $m:n = \sin B : \sin A = (ad+bc) : (ab+cd);$

b) $m.n = ac+bd; \quad \text{je fóto měření}$

c) $a = \frac{b \cdot \sin C - d \cdot \sin B}{\sin(B+C)} = \frac{b \cdot \sin A - d \cdot \sin B}{\sin(A-B)};$

d) $c = \frac{b \cdot \sin B - d \cdot \sin C}{\sin(B+C)} = \frac{b \cdot \sin B - d \cdot \sin A}{\sin(A-B)};$

e) $b = \frac{a \cdot \sin A - c \cdot \sin B}{\sin(A+B)};$

f) $d = \frac{a \cdot \sin B - c \cdot \sin A}{\sin(A+B)};$

g) $\frac{a+c}{b-d} = \frac{\cos \frac{1}{2}(C-B)}{\cos \frac{1}{2}(C+B)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)};$

h) $\frac{a-c}{b+d} = \frac{\sin \frac{1}{2}(C-B)}{\sin \frac{1}{2}(C+B)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)};$

i) $P = \frac{1}{2}(a+c)(a-c) \cdot \frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin(A+B)}.$

D. Řešení mnohoúhelníků pravidelných.

§. XVII.

1. Úloha. *Strana a n-úhelníka pravidelného jest dána: najdi ploský obsah P jeho, jakoz i poloměry kruhů opsaného R i vepsaného r .*

Řeš. Bud (obr. 28.) $AB = a$ strana, O střed n -úhelníka pravidelného, $OC \perp AB$; i jest pak $OA = R$, $OC = r$, $\angle AOC = \frac{1}{n} \cdot 180^\circ$, $BC = CA = \frac{1}{2}a$.

Nejprv najdeme $OC = CA \cot \frac{180^\circ}{n}$,

$$OA = \frac{CA}{\sin \frac{180^\circ}{n}}, \text{ čili } r = \frac{1}{2}a \cdot \cot \frac{180^\circ}{n}; R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

Ploský obsah jest $P = n \cdot AOB$; $\triangle AOB = \frac{1}{2}a \cdot r$, pročež $P = \frac{1}{2}nar = \frac{1}{4}na^2 \cdot \cot \frac{180^\circ}{n}$.

2. Úloha. Dán jest poloměr r kruhu; najdi stranu a ploský obsah a) vepsaného, b) opsaného n -úhelníka pravidelného.

Řešení. a) Bud (obr. 28.) $OB = OA = r$, $AB = a$ strana vepsaného n -úhelníka pravidelného: i bude tehdy $CB = OB \cdot \sin \angle COB$, t. j. $\frac{1}{2}a = r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$, tedy $a = 2r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$. — Ploský obsah bude $P = n \cdot AOB = n \cdot \frac{1}{2}AO^2 \cdot \sin \angle AOB$; t. j. $P = \frac{1}{2}nr^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$.

b) Bud (obr. 28.) $OC = r$ poloměr kruhu, $AB = a$ strana opsaného n -úhelníka pravidelného: tehdy jest $CB = OC \cdot \tan \angle COB$ t. j. $a = 2r \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$; a ploský obsah $P = n \cdot AOB = n \cdot CB \cdot OC$, tedy $P = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$.

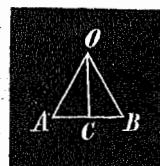
3. Úloha. Dán jest ploský obsah P n -úhelníka pravidelného: najdi stranu jeho a , i poloměry R a r opsaného a vepsaného kruhu.

V úl. 1. nalezeno $P = \frac{1}{4}na^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$; odtud jde $a = \sqrt{\frac{4P}{n} \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}}$

V úl. 2. a) nalezeno $P = \frac{1}{2}n \cdot R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$; odtud jde $R = \sqrt{\frac{2P}{n \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}}}$

V úl. 2. b) nalezeno $P = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$; odtud jde $r = \sqrt{\frac{P}{n} \cdot \cot \frac{180^\circ}{n}}$

obr. 28.



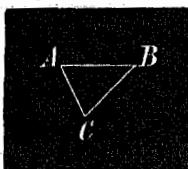
E. Řešení úloh z měřictví výkonného.

§. XVIII.

Měření v poli.

1. *Úloha.* Najdi vzdálenost dvou bodů v poli přístupných, kterou přímo změřiti nelze aneb nepohodlno.

obr. 29.



Řeš. Přístupné v poli body buděte A i B (obr. 29.), a mezi nima překážka, ku př. močaly, ves, les atp. Vyhlídni si místo C , z něhož oba body A i B dobře vidíš, a k nim přímou cestou CA , CB jítí můžeš. Změř $CB = a$, $CA = b$ a úhel $ACB = \gamma$; i najdeš pak vzdálenost $AB = c$ dle návodu daného v §. XIV. 3.

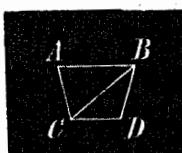
Příklad. Je-li $CA = 58^{\circ} 4'$, $CB = 65^{\circ} 3'$, $\angle ACB = 70^{\circ} 45'$: jak dlouhé jest AB ?

2. *Úloha.* Najdi vzdálenost dvou bodů A i B (obr. 29.) v poli je-li jen k jednomu z nich A přístup volný.

Řešení. a) Můžeš-li z přístupného bodu A bod druhý B dobře viděti, počínej si takto: Vyhlídni si v poli bod přístupný C , z kteréhož oba body A i B dobře viděti lze. Změř potom $AC = b$, a úhly A i C : to učiniv najdeš vzdálenost AB dle návodu daného v §. XIV. 1.

Příklad. Je-li $AC = 65^{\circ} 2'$, $\angle A = 58^{\circ} 35'$, $\angle C = 61^{\circ} 12'$: jak dlouhé jest AB ?

obr. 30.



b) Není-li ale z přístupného bodu A druhý bod B dobře viděti, vyhlídni si v poli přímou cestou na vzájem přístupné body dva C i D (obr. 30.), tak abys z obou dobře viděl bod B , a aspoň z jednoho z nich, ku př. z bodu C též bod A . Změř základ $CD = d$ a úhly BCD i BDC , a vypočítej (dle § XIV. 1.) stranu $CB = a$. Potom změř délku $CA = b$, úhel ACB , a vypočítej posléz (dle §. XIV. 3.) vzdálenost $AB = c$.

Příklad. Buď $CD = 42^{\circ} 5' 6''$; $AC = 72^{\circ} 3' 6''$; $\angle BCD = 73^{\circ} 12' 10''$, $\angle CDB = 98^{\circ} 42' 50''$, $\angle ACB = 62^{\circ} 17' 30''$: jak dlouhé jest AB ?

3. *Úloha.* Najdi vzdálenost dvou bodů A i B (obr. 31.) ne-přístupných.

Řeš. Vezmi za základ přístupnou přímku CD , z jejichž koncův C i D viděti lze bod A , a najdi dle návodu v úloze 2. daného vzdálenost AC . Je-li z týchž konců C i D také bod B viděti, najdi týmž způsobem délku BC . Maje pak v trojúh. ACB strany AC i BC , a změřiv úhel ACB , najdeš jako v úloze 1. vzdálenost AB . — Není-li ale z konců C i D viděti bodu B , vezmi za druhý základ přístupnou přímku EF , z jejichž obou konců bod B a z konce E též bod C dobré spatřuješ; najdi tehdy známým již způsobem délku BE ; vyměř délku CE i úhly ACE a CEB : konečně najdi ze čtyřúhelníka $ACEB$ stranu AB , což takto vykonati můžeš: v trojúh. CEB znaje strany CE i EB a úhel CEB vypočítáš stranu CB i úhel BCD ; pak se ti udá úhel $ACB = \angle ACE - \angle BCE$, z něhož posléz a ze stran AC i BC již známých vypočítáš AB .

Příklad. Bud $CD = 245$, $EF = 270$, $CE = 164\frac{3}{4}$ stop, $\angle ACD = 105^\circ 30'$, $\angle CDA = 50^\circ 15'$; $\angle BEF = 53^\circ 10'$; $\angle EFB = 100^\circ 20'$; $\angle CEB = 103^\circ 30'$; $\angle ACE = 117^\circ 40'$: jak dlouhé jest AB ?

4. Úloha. Najdi ploský obsah trojúhelníka ABC v poli ne-přístupného.

Řeš. Dle návodu v úl. 3. daného najdi strany AB , BC , CA a potom dle §. XIV. 4. ploský obsah.

§. XIX.

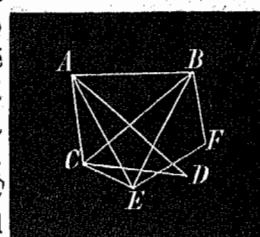
Měření výšky.

1. Úloha. Najdi výšku, k jejíž patě přístup jest volný cestou přímou.

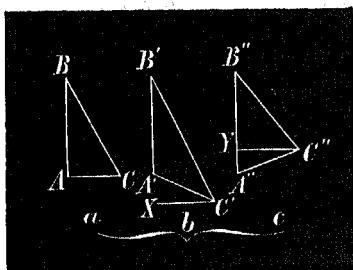
Řeš. a) Je-li pata A (obr. 32. a) s tvým stanoviskem C v rovině vodorovné, změř základ $CA = a$, úhel (výstupný) $\angle ACB = \gamma$, a pak vypočtej $AB = a \cdot \text{tang} \gamma$.

Příklad. Bud $CA = 12^\circ 3' 10''$, $\gamma = 72^\circ 25' 30''$, jak velké jest AB ?

obr. 31.



obr. 32.



jest výška $A'B'$?

c) Je-li pata A'' (obr. 33. c.) níže než tvé stanoviště C'' , změř opět základ $C''A''$, úhel výstupný $YC''B'' = s'$, a svahový $A''C''Y = s$: maje pak $\angle A''C''B'' = s + s'$ vypočítáš $A''B'' = C''A'' \cdot \frac{\sin(s' + s)}{\cos s'}$.

Příklad. Bud $C''A'' = 129\cdot 5$ stop, $s' = 52^\circ 0' 15''$, $s = 12^\circ 13' 45''$: jaká jest výška $A''B''$?

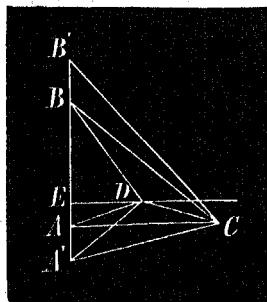
2. Úloha. Najdi výšku k jejíž patě není volného přístupu; a sice:

a) dál se přímka stanoviště čili základ položit v rovině kolmé, t. j. v rovině, v níž leží výška, kterou měřiti máš;

b) nedá se základ sice v rovině kolmé, ovšem ale v některé rovině vodorovné položit;

c) nedá se základ ani v kolmě ani ve vodorovné rovině položit.

obr. 33.



Řeš. a) Bud AB (obr. 33) výška, $CD = d$ změřený základ v rovině kolmé. Leží-li nejnižší bod C základu s patou A ve společné rovině vodorovné, změř výstupné úhly $ACD = \gamma$, $ACB = \gamma'$, $EDB = \delta$; pak bude $\angle DCB = \gamma' - \gamma$, $\angle BDC = 180^\circ - (\delta - \gamma)$, $\angle CBD = \delta - \gamma'$; pročež najdeš $CB = d \cdot \frac{\sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma')}$, odtud posléz

$$AB = CB \cdot \sin \gamma' = d \cdot \frac{\sin \gamma' \cdot \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma')}$$

Příklad. Bud $CD = 39^{\circ}2'$, $\gamma = 15^{\circ}20'$, $\gamma' = 58^{\circ}10'$, $\delta = 70^{\circ}50'$: jaká jest výška AB ?

Má-li ale ze základu CD změřiti se výška BB' , najdou se výšky AB' a AB dle návodu nyní daného, a určí se $BB' = AB' - AB$; aneb ustanoví se CB i CB' , a z trojúhelníka BCB' vypočítá se BB' . — Kterak zní v tomto druhém případě vzorec na vypočítání výšky BB' , položíme-li výstupní úhel $ACB' = \gamma''$?

Má-li se nalezti výška $A'B$, jejíž pata A' níže leží než základ CD ; určí se CB jako svrchu, změří se úhel svahový $ACA' = \gamma''$, čímž ustanoven, též úhel $ACB = \gamma'' + \gamma'$ i úhel $BA'C = 90^{\circ} - \gamma''$; a vypočítá se pak z trojúhelníka $A'BC$ hledaná výška

$$A'B = BC \cdot \frac{\sin(\gamma'' + \gamma')}{\cos \gamma''} = d \cdot \frac{\sin(\delta - \gamma) \cdot \sin(\gamma' + \gamma'')}{\sin(\delta - \gamma') \cdot \cos \gamma''}.$$

Čtenář vyhledej ještě vzorec pro výšku, když jest α pata mezi body E i A a týmě B , β když jest patou A' , a týmě leží mezi body E i A ; γ když týmě i pata leží níže než bod A (obr. 33).

b) Bud (obr. 33) AB výška, CD základ v rovině vodorovné, v kteréžto spolu pata A spočívej.

Tehdy základ $CD = d$, a v trojúhelníku vodorovném úhly $ACD = \gamma$, $CDA = \delta$ změřiv ustanov $AC = d \cdot \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$. Změř pak výstupní úhel $ACB = \epsilon$, a vypočítej posléz

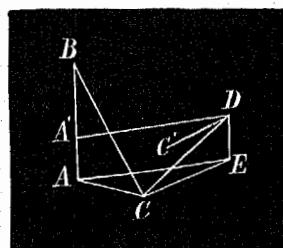
$$AB = AC \cdot \operatorname{tang} \epsilon = d \cdot \frac{\sin \delta \cdot \operatorname{tang} \epsilon}{\sin(\gamma + \delta)}.$$

Příklad. Bud $CD = 7 \cdot 13$ stop, $\gamma = 65^{\circ}12'$, $\delta = 57^{\circ}16'$, $\epsilon = 61^{\circ}15'$ jaká jest výška AB ?

Ku cvičení. Kterak se ustanoví výška AB , leží-li pata A bud výše neb níže, než základ CD ?

c) Bud (obr. 34.) AB hledaná výška, $CD = d$ změřený základ směrem CD nad vodorovnou rovinu ACE vystupující, bod C bud s patou A ve společné rovině vodorovné ACE . Rovina CED a přímka DE budte kolmo na vodorovně rovině ACE . Na stanovišti C změř úhel $ACE = \gamma$, a úhly výstupné $ECD = \epsilon$, $ACB = \epsilon'$, a vypočítej $CE = d \cdot \cos \epsilon$. Na stanovišti D vyměřiv směry

obr. 34.



$DC \parallel EC$, $DA' \parallel EA$ změří úhel $CDA' = CEA = \delta$; ustanov
 $AC = CE$. $\frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} = d \cdot \frac{\sin \delta \cdot \cos \varepsilon}{\sin(\gamma + \delta)}$, a posléz vypočítej
 $AB = AC \cdot \tan \varepsilon' = d \cdot \frac{\sin \delta \cdot \cos \varepsilon \cdot \tan \varepsilon'}{\sin(\gamma + \delta)}$.

Příklad. Bud $d = 213$ stop, $\gamma = 75^\circ 2'$, $\varepsilon = 11^\circ 20'$, $\varepsilon' = 40^\circ 14'$,
 $\delta = 50^\circ 25'$: jaká jest výška AB ?

Ku cvičení. Kterak se změří rozdíl výšek bodů D i B nad
vodorovnou rovinou ACE ? — Kterak se změří výška AB , když
pata A výše neb níže leží, než buďto bod D neb bod C ?

3. *Úlohy.* a) Kterak se změří vzdálenost dvou bodů nad
rovinou buď vodorovnou aneb schýléhou se vznášejících, ku př. délka
oblaku za povětří tichého? b) Kterak se změří výška koule (ku
př. balonu) nad obzorem se vznášející, je-li pravý průměr její
znám? a kterak se změří výška i průměr její neznámý?

Kniha druhá.

Trigonometria sférická.

C á s t I.

Základní vzorce k řešení trojúhelníků sférických.

§. XX.

Ježto trojúhelníky sférické tak, jako trojúhelníky tělesné třemi částmi určeny bývají, bude nám hledati vzorce, jimiž by vyjádřena byla vzájemná na sobě závislost částí čtyr, z nichž pak tré by určovalo část čtvrtou. Bude pak tolikero skupení vzorců těchto, kolikero rozličných po čtveru částech sdružení mysliti se dá; a sice:

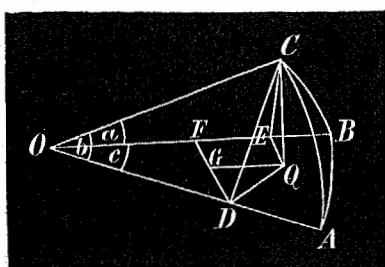
- a) vzorce o závislosti tří stran a jednoho úhlu;
- b) vzorce o závislosti dvou stran a úhlů protějších;
- c) vzorce o závislosti dvou stran, úhlu jima sevřeného a jednoho úhlu protějšího;
- d) vzorce o závislosti tří úhlů a jedné strany.

Vzorce ty hledajíce máme zřetel pouze k takovým trojúhelníkům, jejichž ani která strana ani který úhel nedosahuje 180° .

§. XXI.

1. *Závislost tří stran a jednoho úhlu.* Buď O (obr. 35) střed koule, $OABC$ jehlan kulový, ABC trojúhelník sférický. Spusť kolmice $CQ \perp$ rov. AOB , $CD \perp OA$, $CE \perp OB$, a ved přímky QE , QD , pak $DF \parallel QE$, $QG \parallel BO$. Poněvadž poloměry koule OA i OB ležící v rovině AOB dle sestrojení kolmo stojí na přímkách, CD a CE , musí též kolmo státi na průmětech jejich DQ a EQ (Stereom. §. VII. 6.), t. j. $QD \perp OA$, $QE \perp OB$, pročež i $DF \perp OB$,

obr. 35.



$QG \perp DF$. Z toho jde předně, že úhel CDQ jest odchylka roviny COA od roviny AOB (Ster. §. IX. 2) a tedy roveň úhlu sférickému $A = \measuredangle CDQ$ (Ster. §. XXXVIII. 2.), za druhé že podobně jest $B = \measuredangle CEQ$, a za třetí $\measuredangle QDF = \measuredangle AOB = c$, neboť ramena obou úhlů QDF i AOB na sobě kolmo jsou, a úhel AOB i strana c jedno

za druhé se berou, ježto poměrná čísla jejich si jsou rovná (Pl. CVIII.).

$$\text{Nyní jest } OE = OF + FE \quad \dots \dots \dots \dots \quad 1)$$

$$OF = OD \cdot \cos c, \quad OD = OC \cdot \cos b, \quad FE = GQ = DQ \cdot \sin c,$$

$$DQ = DC \cdot \cos A, \quad DC = OC \cdot \sin b, \quad \text{tedy}$$

$$OF = OC \cdot \cos b \cdot \cos c \quad \dots \dots \dots \dots \quad 2)$$

$$FE = OC \cdot \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \quad \dots \dots \dots \dots \quad 3)$$

Z rovnic 2) a 3) hodnoty do 1) dosadíce dostaneme

$$OE = OC \cdot \cos b \cdot \cos c + OC \cdot \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \quad \dots \dots \dots \quad 4)$$

$$\text{Dále jest přímo } OE = OC \cdot \cos a \quad \dots \dots \dots \quad 5)$$

Z rovnic 4) a 5) jde žádaný vzorec:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \quad \dots \dots \dots \quad \alpha)$$

podobně:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \quad \dots \dots \dots \quad \beta)$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \quad \dots \dots \dots \quad \gamma)$$

I.

II.

2. Závislost dvou stran a úhlů protějších. Sinusy stran mají se k sobě jako sinusy protějších úhlů.

Důkaz. Sestrojivše jako v odst. 1. dostaneme:

$$QC = DC \cdot \sin A = OC \cdot \sin b \cdot \sin A$$

$$QC = EC \cdot \sin B = OC \cdot \sin a \cdot \sin B, \quad \text{pročež}$$

$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A, \quad \text{aneb } \sin a : \sin b = \sin A : \sin B.$$

Podobně vyjde $\sin a : \sin c = \sin A : \sin C$, tedy

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad \dots \dots \dots \quad \text{II.}$$

3. Závislost dvou stran, jednoho úhlu sevřeného, a druhého protějšího.

Dosadíme-li v odst. 1. do rovnice I. α) místo $\cos c$ jeho hodnotu z rovnice I. γ), vyjde:

$$\cos a = \cos a \cdot \cos^2 b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

Od obou stran $\cos a \cdot \cos^2 b$ odečtěme, položíce $\cos a \cdot \sin^2 b$ místo $\cos a - \cos a \cdot \cos^2 b = \cos^2 a (1 - \cos^2 b)$; i vyjde:

$$\cos a \cdot \sin^2 b = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

Dělíme-li obě strany součinem $\sin a \cdot \sin b$, dostaneme:

$$\cot a \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos C + \frac{\sin c}{\sin a} \cdot \cos A;$$

dle odstavce 2. jest ale $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$, pročež dosadíce najdeme vzorec žádaný:

$$\cot a \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos C + \sin C \cdot \cot A \quad \dots \quad 1)$$

Změnou písmen nabudeme:

$$\cot a \cdot \sin c = \cos c \cdot \cos B + \sin B \cdot \cot A \quad \dots \quad 2)$$

$$\cot b \cdot \sin a = \cos a \cdot \cos C + \sin C \cdot \cot B \quad \dots \quad 3)$$

$$\cot b \cdot \sin c = \cos c \cdot \cos A + \sin A \cdot \cot B \quad \dots \quad 4)$$

$$\cot c \cdot \sin a = \cos a \cdot \cos B + \sin B \cdot \cot C \quad \dots \quad 5)$$

$$\cot c \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos A + \sin A \cdot \cot C \quad \dots \quad 6)$$

III.

4. Závislost tří úhlů a jedné strany. Vzorce I. a) β) γ) odstavce 1. mají, jak samo sebou patrno, platnost i o trojúhelnících polárných. Písmena, jimiž strany a úhly polárného trojúhelníka známenáme, čárkujíce klademe tedy:

$$\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos A'.$$

Dle St. §. XL. 3. jest ale $a' + A = a + A' = b' + B = c' + C = 180^\circ$, pročež (dle VII. 3. vz. 41. 42.) $\cos a' = -\cos A$, $\cos A' = -\cos a$, $\cos b' = -\cos B$, $\cos c' = -\cos C$, $\sin b' = \sin B$, $\sin c' = \sin C$; tyto hodnoty dosadíce najdeme vzorce žádané:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a; \quad \dots \quad 1)$$

$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b; \quad \dots \quad 2)$$

$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \sin c; \quad \dots \quad 3)$$

IV.

§. XXII.

Vzorce odst. 1. 3. 4. §. XXI. jsou k logaritmickému počítání nepohodlné. K tomu konci jest užitečno, jich patřičně změnit, i jest pak dovoleno, postavit rovnice třebas o pěti nebo šesti trojúhelnících částech na sobě závislých, pod tou ale výmínkou, když o týchž částech podají se rovnice dvě, tři, vůbec tolik, o kolik v jedné jest řečených částí nad tré více.

1. Ze skupení I. najdeme:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Rovnici tuto jednou přičouce, podruhé odečouce od rovnice $1=1$, a místo $1 + \cos A$ (dle VIII. 7. vz. 71. 72.) kladouce hodnotu $2\cos^2 \frac{1}{2}A$, $2\sin^2 \frac{1}{2}A$, dostaneme:

$$2\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{\sin b \sin c},$$

$$2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{-\cos a + (\cos b \cos c + \sin b \sin c)}{\sin b \sin c};$$

na čehož místo dle §. VIII. 2. vz. 47. 48. lze položiti:

$$2 \cdot \cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}.$$

$$2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c};$$

za čež opět dle VIII. 5. vz. 64. píšeme:

$$2 \cdot \cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin b \sin c}.$$

$$2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \sin c}.$$

Položíme-li $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, změní se vzorce takto:

$$\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c},$$

$$\sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c};$$

z nichž posléz plyne:

$$\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}; \quad \text{a)}$$

$$\sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}; \quad \text{b)}$$

Podobně dostaneme:

$$\cos \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}; \quad \text{c)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{I.}$$

$$\sin \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin a \sin c}}; \quad \text{d)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$\cos \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}; \quad \text{e)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$\sin \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}. \quad \text{f)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

2. Násobíme-li spolu rovnice právě získané, a sice α) a γ); $\beta)$ a δ); $\beta)$ a γ); $\alpha)$ a δ): dostaneme

$$\cos \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}B = \frac{\sin s}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin b}} = \frac{\sin s}{\sin c} \cdot \sin^{\frac{1}{2}} C \dots 1)$$

$$\sin^{\frac{1}{2}} A \cdot \sin^{\frac{1}{2}} B = \frac{\sin(s-c)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin b}} = \frac{\sin(s-c)}{\sin c} \cdot \sin^{\frac{1}{2}} C \dots 2)$$

$$\sin^{\frac{1}{2}} A \cdot \cos^{\frac{1}{2}} B = \frac{\sin(s-b)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin b}} = \frac{\sin(s-b)}{\sin c} \cdot \cos^{\frac{1}{2}} C \dots 3)$$

$$\cos^{\frac{1}{2}} A \cdot \sin^{\frac{1}{2}} B = \frac{\sin(s-a)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin b}} = \frac{\sin(s-a)}{\sin c} \cdot \cos^{\frac{1}{2}} C \dots 4)$$

Vezme-li se nejprv součet, po té rozdíl rovnic 1) a 2), pak 3) a 4), vyjde:

$$\cos^{\frac{1}{2}}(A-B) = \frac{\sin s + \sin(s-c)}{\sin c} \cdot \sin^{\frac{1}{2}} C \dots 5)$$

$$\cos^{\frac{1}{2}}(A+B) = \frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c} \cdot \sin^{\frac{1}{2}} C \dots 6)$$

$$\sin^{\frac{1}{2}}(A+B) = \frac{\sin(s-b) + \sin(s-a)}{\sin c} \cdot \cos^{\frac{1}{2}} C \dots 7)$$

$$\sin^{\frac{1}{2}}(A-B) = \frac{\sin(s-b) - \sin(s-a)}{\sin c} \cdot \cos^{\frac{1}{2}} C \dots 8)$$

Položíme-li místo s jeho hodnotu $\frac{1}{2}(a+b+c)$, dostaneme uživše vzorců 65) a 66) §. VIII. 5.

$$\sin s + \sin(s-c) = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b) \cdot \cos \frac{1}{2}c,$$

$$\sin s - \sin(s-c) = 2 \cdot \cos \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sin \frac{1}{2}c,$$

$$\sin(s-b) + \sin(s-a) = 2 \cdot \cos \frac{1}{2}(a-b) \cdot \sin \frac{1}{2}c,$$

$$\sin(s-b) - \sin(s-a) = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(a-b) \cdot \cos \frac{1}{2}c;$$

Položivše ještě $\sin c = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{1}{2}c$ (dle VIII. 7. vz. 69.) dosadme tyto hodnoty do rovnic 5) až 8), a společné činitele v počítateli a jmenovateli vynenechejme: tím nabudeme zlomka se zbavice:

$$\cos \frac{1}{2}(A-B) \cdot \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sin \frac{1}{2}C \dots \alpha)$$

$$\cos \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sin \frac{1}{2}C \dots \beta)$$

$$\sin \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a-b) \cdot \cos \frac{1}{2}C \dots \gamma)$$

$$\sin \frac{1}{2}(A-B) \cdot \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a-b) \cdot \cos \frac{1}{2}C \dots \delta)$$

Vzorce tyto po svém původci nazývají se rovnice *Gaussový*.

3. Z rovnic Gaussových dostaneme délce, a sice pořadem z γ a β), z δ) a β), z α) a β), z δ) a γ) vzorce, jež po svém původci slovou *obdobami Napierovými*, a sice:

$$\tan \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot \frac{1}{2}C, \dots \alpha)$$

$$\tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot \frac{1}{2}C, \dots \dots \beta)$$

$$\tan \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tan \frac{1}{2}c, \dots \dots \gamma)$$

$$\tan \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tan \frac{1}{2}c, \dots \dots \delta)$$

4. Podobným jako v odst. 1. způsobem změní čtenář vzorce skupení IV. §. XXI. 4., což jemu zůstaveno, a zde pouze výsledek položen bud.

$$\cos \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(S-B) \cdot \cos(S-C)}{\sin B \cdot \sin C}};$$

$$\sin \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-A)}{\sin B \cdot \sin C}};$$

$$\cos \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos(S-A) \cdot \cos(S-C)}{\sin A \cdot \sin C}};$$

$$\sin \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-B)}{\sin A \cdot \sin C}};$$

$$\cos \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos(S-A) \cdot \cos(S-B)}{\sin A \cdot \sin B}};$$

$$\sin \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-C)}{\sin A \cdot \sin B}}.$$

Ve vzorcích těch jest S místo $\frac{1}{2}(A+B+C)$ kladeno.

5. *Poznam.* a) Z Gaussovy rovnice $\delta)$ odst. 2. jde — ježto $\frac{1}{2}c < 90^\circ$, $\frac{1}{2}C < 90^\circ$ — že $\sin \frac{1}{2}(A-B)$ i $\sin \frac{1}{2}(a-b)$ mají co do směru vztah souhlasný: z té příčiny jest soudobně a) buďto $A-B=0$, $a-b=0$; b) aneb $A>B$, $a>b$; γ) aneb $A<B$, $a<b$; (Srovnej Stereom. §. XXXIX. 2.).

b) Z Gaussovy rovnice $\beta)$ odst. 2. plyne rovněž, že $\cos \frac{1}{2}(A+B)$ i $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ co do směru mají vztah souhlasný: a proto jest soudobně: a) buďto $A+B=180^\circ$, $a+b=180^\circ$; b) aneb $A+B>180^\circ$, $a+b>180^\circ$; γ) aneb $A+B<180^\circ$, $a+b<180^\circ$.

Kterak se tyto výsledky dají slovy pronest?

6. *Ku cvičení.* Kterých změn nabývají vzorce v §§. XXI. a XXII. uložené, je-li trojúhelník rovnoramenný, $a=b$, a tím též $A=B$? a jakých změn, je-li týž trojúhelník rovnostraný, t. $a=b=c$, a tím také $A=B=C$?

Č á s t II.

Řešení trojúhelníků sférických.

A. Pravoúhlých.

§. XXIII.

1. Položme-li úhel $A=90^\circ$, tedy $\cos A=0$, $\cot A=0$, $\sin A=1$; nabudou vzorce, jež v §. XXI. položeny jsou, jednodušší doby; i stane se:

$$\text{z odst. 1. vz. 1. §. XXI. : } \cos a = \cos b \cdot \cos c \quad \dots \dots \dots \quad 1)$$

$$\text{z odst. 2. §. XXI. : } \sin b = \sin a \cdot \sin B \quad \dots \dots \dots \quad 2)$$

$$\sin c = \sin a \cdot \sin C \quad \dots \dots \dots \quad 3)$$

$$\text{z odst. 3. vz. 2) : } \cos B = \cot a \cdot \tan c \quad \dots \dots \dots \quad 4)$$

$$\text{" " " 1) : } \cos C = \cot a \cdot \tan b \quad \dots \dots \dots \quad 5)$$

$$\text{z odst. 3. vz. 4) : } \cot B = \cot b \cdot \sin c \quad \dots \dots \dots \quad 6)$$

$$\text{" " " 6) : } \cot C = \cot c \cdot \sin b \quad \dots \dots \dots \quad 7)$$

$$\text{z odst. 4. vz. 1) : } \cos a = \cot B \cdot \cot C \quad \dots \dots \dots \quad 8)$$

$$\text{" " " 2) : } \cos B = \sin C \cdot \cos b \quad \dots \dots \dots \quad 9)$$

$$\text{" " " 3) : } \cos C = \sin B \cdot \cos c \quad \dots \dots \dots \quad 10)$$

2. Z rovnice 9) odst. 1. jde, ježto $\sin C > 0$, že $\cos B$ i $\cos b$ co do směru mají vztah souhlasný; proto jest soudobně: $\alpha)$ buďto $B=90^\circ$, $b=90^\circ$; $\beta)$ aneb $B > 90^\circ$, $b > 90^\circ$; $\gamma)$ aneb $B < 90^\circ$, $b < 90^\circ$. — Totéž o úhlu C i straně c platí dle rovnice 10).

§. XXIV.

1. Úloha. Dány jsou odvěsné b i c : najdi podporu a i úhly B a C k ni přilehlé.

Řeš. Dle §. XXIII. vz. 1. 6. 7. najdeš přímo části žádané.

Příklad. Bud $b=30^\circ 10'$, $c=28^\circ 15'$. — Tehdy bude:

$$\log \cos a = \log \cos b + \log \cos c,$$

$$\log \cot B = \log \cot b + \log \sin c,$$

$$\log \cot C = \log \cot c + \log \sin b.$$

Z desk logarithmů najdeme:

$$\log \cos b = 9.9367988 - 10; \log \cot b = 0.2356480; \log \cot c = 0.2697675;$$

$$\log \cos c = 9.9449220 - 10; \log \sin c = 9.6751546 - 10; \log \sin b = 9.7011508 - 10;$$

Z těchto hodnot vypočítáme:

$$\log \cos a = 9.8817208 - 10; \log \cot B = 9.9108026 - 10; \log \cot C = 9.9709183 - 10;$$

Vypočítavše najdeme v dskách logaritmů:

$$a = 40^\circ 23' 43.2''; B = 50^\circ 50' 34.4''; C = 46^\circ 55' 0.9''.$$

2. Úloha. Dána jest podpona a i odvěsná b; najdi druhou odvěsnou c a úhly B i C.

Řeš. Použiv z §. XXIII. vzorců 1), 2), 5) najdeš:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}; \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}; \cos C = \cot a \cdot \operatorname{tang} b.$$

Omezení. Aby úloha byla řešitelná, musí $\sin b < \sin a$ být; pročež je-li $a = 90^\circ$, musí být $b = 90^\circ$; je-li $a < 90^\circ$, musí být buďto $b < a$, aneb $b > 180^\circ - a$; a je-li $a > 90^\circ$, musí být buďto $b > a$, aneb $b < 180^\circ - a$.

Připomenutí. Úhel B musí se vzít tupý neb ostrý, jakož strana b jest větší neb menší než 90° , (§. XXIII. 2.).

Příklad. Buď $a = 72^\circ 20'$, $b = 140^\circ 40'$.

Poněvadž jest $b > 90^\circ$, tedy $\cos b$ i $\operatorname{tang} b$ záporné, musí dle poručených tuto vzorců též $\cos c$ i $\cos C$ záporné být, a proto $c > 90^\circ$, $C > 90^\circ$. Chtějíce počítati logaritmicky zavedme si úkony kladné položivše $c' = 180^\circ - c$, $C' = 180^\circ - C$, $b' = 180^\circ - b$, $B' = 180^\circ - B$, čímž ovšem číselnou hodnotu úhloměrných úkonů (§. VIII. 3. vz. 41—44) nic nezměníce pravost vzorců neporušenou zachováme. I bude pak:

$$\cos c' = \frac{\cos a}{\cos b'}, \quad \sin B' = \frac{\sin b'}{\sin a}, \quad \cos C' = \cot a \cdot \operatorname{tang} b';$$

a užijeme-li počtu logaritmického:

$$\log \cos c' = \log \cos a - \log \cos b',$$

$$\log \sin B' = \log \sin b' - \log \sin a,$$

$$\log \cos C' = \log \cot a - \log \operatorname{tang} b'.$$

V dskách logaritmů najdeme:

$$\begin{aligned} \log \cos a &= 9.4821283 - 10; \quad \log \sin b = 9.8019735 - 10; \quad \log \cot a = 9.5031092 - 10; \\ \log \cos b' &= 9.8884444 - 10; \quad \log \sin a = 9.9709192 - 10; \quad \log \operatorname{tang} b' = 9.9135291 - 10. \end{aligned}$$

Z těchto hodnot vypočítáme:

$$\log \cos c' = 9.5936839 - 10; \quad \log \sin B' = 9.8229543 - 10; \quad \log \cos C' = 9.4166383 - 10.$$

Posléz ve dskách logaritmů najdeme:

$$\begin{aligned} c' &= 66^\circ 53' 55''; \quad B' = 41^\circ 41' 53''; \quad C' = 74^\circ 52' 14''; \quad \text{pročež} \\ c &= 113^\circ 6' 5''; \quad B = 138^\circ 18' 7''; \quad C = 105^\circ 7' 46''. \end{aligned}$$

3. Úloha. Dána jest odvěsná b a protější úhel B: najdi podponu a, druhou odvěsnou c a protilehlý úhel C.

Řeš. Užije z §. XXIII. vzorců 2), 6), 9) najdeš:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}; \sin c = \tan b \cdot \cot B; \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

Připomenutí. Majíce na zřeteli též vzorce 1) a 5) z §. XXIII., z nichž vyplývá

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \cos C = \cot a \cdot \tan b,$$

vidíme, že strana c i úhel C úplně určeny jsou, jakmile strana a nalezena jest, ježto musí býti aneb $= 90^\circ$, je-li $a = 90^\circ$, aneb tupé nebo ostré, jakož hodnoty $\cos c$, $\cos C$ vyjdou buď záporné nebo kladné.

Že ale k určení strany a vzorcem 2) pouze \sinus její známe, jest nám zpytovati, zdali a pod kterými výmínkami strana ta se určiti dá čili nic. K tomu konci rozeznávejme případů tré, $B \geq 90^\circ$.

a) Buď $B = 90^\circ$; pak jest $A = B = 90^\circ$, pročež i $a = b = 90^\circ$, (dle §. XXIII. 2.); pak jest dle rovnice α) Gaussovy $c = C$ (§. XXII. 2.) a dle obdobu δ) Napierovy $\tan \frac{1}{2}c = \frac{b}{a}$ (§. XXII. 3.); pročež jest v tomto případě úloha neurčitá poskytuje rozrešení neskonale mnoho.

b) Buď $B > 90^\circ$, pak jest $A + B > 180^\circ$, pročež (dle §. XXII. 5.) také $a + b > 180^\circ$; a ježto jest $A < B$, musí také $a < b$, pročež aby výmince $a + b > 180^\circ$ výhověno bylo, $b > 90^\circ$ býti. Dle vzorce

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \text{ nesmí } \frac{\sin b}{\sin B} > 1, \text{ pročež ani } \sin b > \sin B, \text{ tedy ani}$$

$b < B$, nébrž pouze $b \geq B$ býti: jinak jest úloha neřešitelná.

α) Je-li předně $b = B$, vyjde $\sin a = 1$, $\sin c = 1$, $\sin C = 1$, pročež $a = 90^\circ$, $c = 90^\circ$, $C = 90^\circ$ zcela určité.

β) Je-li ale $b > B > 90^\circ$, dostaneme k hodnotě $\sin a$ oblouky dva, jeden tupý $a_1 = 90^\circ + x$, a druhý ostrý $a_2 = 90^\circ - x$, doplňující se na 180° , i výhovují oba výmínkám $a < b$, $a + b > 180^\circ$, jakož z následujícího rozjímání vysvítá. Ježto $B > 90^\circ$, pročež $\sin B < 1$, a tím $\frac{\sin b}{\sin B} > \sin b$, t. j. $\sin a > \sin b$: musí vyjít $a_1 < b$, jakož i tím více $a_2 < b$. Znamenejme tedy $b = 90^\circ + x + y$, i bude pak $a_1 + b = 180^\circ + 2x + y$; $a_2 + b = 180^\circ + y$, pročež v obou případech $a + b > 180^\circ$. — Úloha jest tedy dvojsmyslná, připouštějíc rozřešení dvoje.

c) Je-li $B < 90^\circ$, bude $A + B < 180^\circ$, pročež i $a + b < 180^\circ$; a ježto jest $A > B$, musí $a > b$, pročež aby výmínce $a + b < 180^\circ$

vyhověno bylo, $b < 90^\circ$ býti; mimo to žádá se, aby bylo $\sin b \leq \sin B$, pročež $b \leq B$.

a) Je-li $b = B$, vyjde jako svrchu $a = c = C = 90^\circ$, zcela určité.

b) Je-li ale $b < B$, dostaneme k hodnotě $\sin a$ opět dva oblouky, které se na 180° doplňují a oba položeným zde výminkám vyhovují, čímž úloha opět dvojsmyslnou se stává, o čemž čtenář podobným, jako v odst. b) β), rozjímáním přesvědčiti se dovede.

4. Úloha. Dána jest odvěsná b a přilehlý úhel C : najdi podponu a , druhou odvěsnou c a úhel B k ní přilehlý.

Řeš. Použije z §. XXIII. vzorců 5), 7), 9) najdeš:
 $\cot a = \cot b \cdot \cos C$; $\tan c = \tan C \sin b$; $\cos B = \sin C \cos b$.

Příklady: 1) Bud $b = 62^\circ 12' 15''$, $C = 69^\circ 14' 18''$;
2) $b = 98^\circ 17' 40''$, $C = 57^\circ 16' 30''$; 3) $b = 100^\circ 10' 20''$,
 $C = 120^\circ 13' 10''$.

5. Úloha. Dána jest podpona a , a jeden úhel B přilehlý: najdi úhel druhý C , a obě odvěsné b i c .

Řeš. Užije z §. XXIII. vzorců 2), 4), 8) najdeš:
 $\sin b = \sin a \cdot \sin B$; $\tan c = \tan a \cdot \cos B$; $\cot C = \tan B \cdot \cos a$.

Připomenutí. Zde jsou nejen c a C , nébrž i b dokonale určeny, ježto jest $b \geq 90^\circ$ soudobně s $B \geq 90^\circ$, (XXIII. 2.).

Příklady: 1) Bud $a = 57^\circ 4' 20''$, $B = 43^\circ 17' 25''$;
2) $a = 130^\circ 17'$, $B = 56^\circ 19' 50''$; 3) $a = 83^\circ 16' 5''$, $B = 102^\circ 5' 10''$;
4) $a = 95^\circ 23' 30''$; $B = 105^\circ 32' 10''$.

6. Úloha. Dány jsou oba kosé úhly B i C : najdi strany a , b , c .

Řeš. Užije z §. XXIII. vzorců 8), 9), 10) najdeš určité:

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C; \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}; \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Příklady: 1) Bud $B = 66^\circ 30' 15''$, $C = 77^\circ 27' 10''$;
2) $B = 48^\circ 35'$, $C = 104^\circ 30'$; 3) $B = 97^\circ 18' 25''$, $C = 103^\circ 51' 40''$.

B. Řešení trojúhelníků kosouhlých.

§. XXV.

1. Úloha. Dány jsou všechny strany a , b , c , najdi úhly A , B , C .

Řešení vykonáš užije z §. XXII. 1. vzorců I. b) zcela určité, ježto $\frac{1}{2}A < 90^\circ$, $\frac{1}{2}B < 90^\circ$, $\frac{1}{2}C < 90^\circ$.

Příklady: 1) Buď $a = 47^\circ 20' 10''$, $b = 53^\circ 17' 25''$, $c = 60^\circ 12' 5''$; 2) $a = 50^\circ 29' 15''$, $b = 70^\circ 35' 10''$, $c = 95^\circ 14' 45''$; 3) $a = 80^\circ 34' 30''$, $b = 93^\circ 54' 50''$, $c = 97^\circ 49' 40''$; 4) $a = 94^\circ 13' 50''$, $b = 98^\circ 28' 10''$, $c = 107^\circ 25' 45''$.

2. Úloha. Dány jsou dvě strany a i b a úhel C jima sevřený: najdi třetí stranu c, a úhly A i B k ní přilehlé.

Reš. Obdobami Napierovými α), β), γ) z §. XXII. 3. najdi nejprv $\frac{1}{2}(A+B)=\sigma$, $\frac{1}{2}(A-B)=\delta$, a potom stranu c. Z toho pak vypočítá se $A = \sigma + \delta$, $B = \sigma - \delta$.

Fříklad. Buď $a = 86^\circ 30'$, $b = 69^\circ 10'$, $C = 110^\circ 40'$.

Tehdy jest $\frac{1}{2}(a+b) = 77^\circ 50'$, $\frac{1}{2}(a-b) = 8^\circ 40'$, $\frac{1}{2}C = 55^\circ 20'$.

Logaritmicky počítajíce dostaneme ze vzorců α), β) Napierových (§. XXII.):

$$\log.\tan \frac{1}{2}(A+B) = \log.\cos \frac{1}{2}(a-b) + \log.\cot \frac{1}{2}C - \log.\cos \frac{1}{2}(a+b);$$

$$\log.\tan \frac{1}{2}(A-B) = \log.\sin \frac{1}{2}(a-b) + \log.\cot \frac{1}{2}C - \log.\sin \frac{1}{2}(a+b).$$

Z desk logaritmů najdeme:

$$\log.\cos \frac{1}{2}(a-b) = 9.9950126 - 10; \log.\sin \frac{1}{2}(a-b) = 9.1780721 - 10;$$

$$\log.\cot \frac{1}{2}C = 9.8398377 - 10; \log.\cot \frac{1}{2}C = 9.8398377 - 10;$$

$$\log.\cos \frac{1}{2}(a+b) = 9.3237802 - 10; \log.\sin \frac{1}{2}(a+b) = 9.9901339 - 10;$$

Tyto hodnoty do hořejších dvou rovnic dosadíce vypočítáme:

$$\log.\tan \frac{1}{2}(A+B) = 0.5110701; \log.\tan \frac{1}{2}(A-B) = 9.0277759 - 10.$$

Znajice logaritmy najdeme z desk:

$$\frac{1}{2}(A+B) = \sigma = 72^\circ 52' 1.5''; \frac{1}{2}(A-B) = \delta = 6^\circ 5' 6''; \text{ pročež } A = 78^\circ 57' 6.5'', B = 66^\circ 46' 55.5''.$$

Majíce již najiti stranu c, dostaneme z obdoby Napierovy γ) v §. XXII. 3.:

$$\log.\tan \frac{1}{2}c = \log.\tan \frac{1}{2}(a-b) + \log.\sin \frac{1}{2}(A+B) - \log.\sin \frac{1}{2}(A-B);$$

K tomu vyhledáme z desk logaritmů:

$$\log.\tan \frac{1}{2}(a-b) = 9.1830595 - 10,$$

$$\log.\sin \frac{1}{2}(A+B) = 9.9803221 - 10,$$

$$\log.\sin \frac{1}{2}(A-B) = 9.0253212 - 10;$$

Tyto hodnoty do předcházející rovnice dosadíce vypočítáme:

$$\log.\tan \frac{1}{2}c = 0.1380604; \text{ jest tedy } c = 107^\circ 54' 53.4''.$$

Jiné příklady: 1) Buď $a = 55^\circ 12' 40''$, $b = 98^\circ 17' 25''$, $C = 77^\circ 40''$;

2) $a = 93^\circ 16'$, $b = 102^\circ 7' 5''$, $C = 50^\circ 0' 15''$; 3) $a = 73^\circ 12'$,

$b = 119^\circ 18' 50''$, $C = 114^\circ 58' 40''$; 4) $a = 98^\circ 1' 15''$, $b = 112^\circ 57' 35''$,

$C = 109^\circ 2' 10''$.

3. Úloha. Dány jsou dvě strany a, b, a úhel A proti jedné z nich položený: najdi třetí stranu c a druhé dva úhly B, C.

Řeš. Užije vz. §. XXI. 2. najdeš nejprv úhel B , $\sin B = \frac{\sin A \cdot \sin b}{\sin a}$.

Znaje úhel B najdeš (§. XXIII. 3.) obdobami Napierovými δ) a β ;

$$\tan \frac{1}{2}c = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \cdot \tan \frac{1}{2}(a-b); \dots \dots \dots \delta)$$

$$\cot \frac{1}{2}C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} \cdot \tan \frac{1}{2}(A-B); \dots \dots \dots \beta)$$

aneb obdobami γ , α :

$$\tan \frac{1}{2}c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \cdot \tan \frac{1}{2}(a+b), \dots \dots \dots \gamma)$$

$$\cot \frac{1}{2}C = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} \cdot \tan \frac{1}{2}(A+B) \dots \dots \dots \alpha)$$

Připomenutí. Ježto úhel B ze svého Sinusu nalezti se má, jest nám zpytovati, zdali a pod kterými výmínkami úloha jedno, a kdy dvě rozšeření připouští.

Rozjímajíce rozeznávejme předně $A = 90^\circ$, za druhé $A < 90^\circ$, za třetí $A > 90^\circ$; ježto ale o případě prvém již v §. XXIV. 3. pojednáno, zbyvá tuto rozhodnouti o dvou druhých.

a) Je-li $A < 90^\circ$, opět rozeznávejme: $a+b=180^\circ$, $a+b < 180^\circ$, $a+b > 180^\circ$.

a) Bud $A < 90^\circ$, $a+b=180^\circ$, pročež (dle §. XXII. 5.) také $A+B=180^\circ$. Ježto $A < 90^\circ$, jest $B > 90^\circ$. Aby ale úloha byla řešitelná, jest třeba $a < b$, poněvadž jest $A < 90^\circ < B$.

β) Bud $A < 90^\circ$, $a+b < 180^\circ$, pročež (§. XXII. 5.) též $A+B < 180^\circ$. — Tehdy jest opět bud $a=b$, aneb $a < b$, aneb $a > b$. — V prvním případě jest úhel $B=A$ dokonale určen, a c i C najdeme z Nap. obdob γ a α zcela určitě. — Je-li $a < b$, musí též $A < B$ býti, kteréžto výmínce vyhověti lze způsobem dvojím, aneb $B < 90^\circ$, aneb $B > 90^\circ$, za kterou příčinou v tomto případě úloha jest dvojsmyslná. — Je-li posléz $a > b$, musí též $A > B$, pročež $B < 90^\circ$ býti, čimž úhel tento dokonale určen jest.

γ) Bud $A < 90^\circ$, $a+b > 180^\circ$, pročež (§. XXII. 5.) i $A+B > 180^\circ$. Odtud pak jde $B > 90^\circ$. Aby ale úloha byla řešitelná, musí být $a < b$, poněvadž jest $A < B$.

b) Je-li $A > 90^\circ$, sluší opět, jako svrchu, rozeznávat tré případů:

a) Bud $A > 90^\circ$, $a+b=180^\circ$, pročež $A+B=180^\circ$. Tehdy jest nezbytně $B < 90^\circ$, a má-li býti úloha řešitelná, musí $a > b$ býti, poněvadž jest $A > 90^\circ > B$.

β) Bud $A > 90^\circ$, $a+b < 180^\circ$, pročež $A+B < 180^\circ$. Tehdy

jest nezbytně $B < 90^\circ$; a má-li úloha býti řešitelná, také $a > b$, poněvadž jest $A > B$.

$\gamma)$ Budť $A > 90^\circ$, $a + b > 180^\circ$, pročež $A + B > 180^\circ$. — Je-li tu $a = b$, bude též $A = B > 90^\circ$. — Je-li $a < b$, tedy též $A < B$, musí býti $B > 90^\circ$. — Je-li posléz $a > b$, tedy také $A > B$, lze všem výmínkám vyhověti způsobem dvojím, budto $B > 90^\circ$, aneb $B < 90^\circ$; pročež úloha v tomto případě jest dvojsmyslná.

Příklady: 1) Budť $A = 80^\circ 20'$; $a = 97^\circ 14' 25''$, $b = 82^\circ 45' 35''$;
2) $A = 72^\circ 13' 20''$, $a = b = 69^\circ 15' 50''$; 3) $A = 58^\circ 35' 40''$,
 $a = 63^\circ 17' 10''$, $b = 85^\circ 21' 25''$; 4) $A = 65^\circ 37' 45''$, $a = 109^\circ 12' 50''$,
 $b = 60^\circ 29' 50''$; 5) $A = 54^\circ 43' 10''$, $a = 72^\circ 47' 20''$, $b = 122^\circ 53' 15''$;
6) $A = 103^\circ 51' 25''$, $a = 119^\circ 28' 5''$, $b = 60^\circ 31' 55''$; 7) $A = 98^\circ 11' 10''$,
 $a = 83^\circ 57' 10''$, $b = 70^\circ 12' 15''$; 8) $A = 101^\circ 24' 30''$,
 $a = b = 96^\circ 27' 35''$; 9) $A = 132^\circ 18'$, $a = 88^\circ 15' 45''$, $b = 119^\circ 47' 20''$;
10) $A = 140^\circ 20' 50''$, $a = 140^\circ 29' 10''$, $b = 105^\circ 20' 40''$.

4. Úloha. Dána jest jedna strana a , úhel protější A a jeden úhel přilehlý B : najdi druhé dvě strany b i c a třetí úhel C .

Řeš. Dle vz. §. XXI. najdi:

$$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \sin a;$$

maje stranu b najdeš jako v úloze 3. stranu c i úhel C obdobami Napierovými.

Připomenutí a omezení. Poněvadž stranu b ze sinusu určiti jest, slušno opět zpytovati, zdaž a kdy dokonale určena jest, či nic. Tehdy rozeznávějme opět případů tré: $a = 90^\circ$, $a < 90^\circ$, $a > 90^\circ$.

a) Budť $a = 90^\circ$. Tu jest buď $A+B=180^\circ$, neb $A+B<180^\circ$, neb $A+B>180^\circ$.

$\alpha)$ Je-li $a = 90^\circ$, $A+B=180^\circ$, pročež také $a+b=180^\circ$, bude $a=b=90^\circ$, a protó, nemá-li úloha nemožnou býti, $A=B=90^\circ$. Pak ale z Gaussových rovnic vyplývá $c=C$, a z Napierových $c=\emptyset$. Úloha jest neurčitá.

$\beta)$ Je li $a = 90^\circ$, $A+B < 180^\circ$, pročež $a+b < 180^\circ$, musí býti $b < 90^\circ$; spolu ale, má-li úloha řešitelnou býti, $A > B$, poněvadž jest $a > b$.

$\gamma)$ Je-li $a = 90^\circ$, $A+B > 180^\circ$, pročež $a+b > 180^\circ$, musí $b > 90^\circ$ býti. V tomto případě aby úloha řešiti se dala, klademe za výmínu $A < B$, poněvadž má vyjít $a < b$.

b) Budť $a < 90^\circ$; a tehdy opět buďto $A+B=180^\circ$ neb $A+B<180^\circ$, neb $A+B>180^\circ$.

a) Je-li $a < 90^\circ$, $A + B = 180^\circ$, pročež $a + b = 180^\circ$, musí $b > 90^\circ$; a spolu, aby úlohu lze bylo rozřešiti, $A < B$, poněvadž jest $a < 90^\circ < b$.

β) Je-li $a < 90^\circ$, $A + B < 180^\circ$, pročež $a + b < 180^\circ$; rozeznávejme $A = B$, $A < B$, $A > B$. — Máme-li $A = B$, bude

$a = b < 90^\circ$. — Máme-li $A < B$, bude $a < b$, pročež $b > 90^\circ$, a úloha jest dvojsmyslná, leč by $b = 90^\circ$ vyšlo. — Máme-li posléz $A > B$, bude $a > b$, pročež $b < 90^\circ$.

γ) Je-li $a < 90^\circ$, $A + B > 180^\circ$, bude také $a + b > 180^\circ$; pročež nezbytně $b > 90^\circ$. Aby ale úloha rozřešiti se dala, jest třeba $A < B$, poněvadž $a < b$.

c) Bud $a > 90^\circ$; a budto $A + B = 180^\circ$, aneb $A + B < 180^\circ$, aneb $A + B > 180^\circ$.

a) Je-li $a > 90^\circ$, $A + B = 180^\circ$, pročež $a + b = 180^\circ$, musí být $b < 90^\circ$; a má-li úloha řešiti se dáti, též $A > B$, poněvadž jest $a > b$.

β) Je-li $a > 90^\circ$, $A + B < 180^\circ$, pročež $a + b < 180^\circ$, musí $b < 90^\circ$, a má-li úloha řešiti se dáti, též $A > B$ být, poněvadž jest $a > b$.

γ) Je-li $a > 90^\circ$, $A + B > 180^\circ$, pročež $a + b > 180^\circ$, rozeznávejme: $A = B$, $A < B$, $A > B$. — Máme-li $A = B$, jest $a = b > 90^\circ$. — Máme-li $A < B$, jest též $a < b$, tedy $b > 90^\circ$.

— Máme-li posléz $A > B$, bude $a > b$, pročež $b < 90^\circ$, a úloha dvojsmyslná.

Příklady: 1) Bud $a = 90^\circ$, $A = 77^\circ 50'$, $B = 65^\circ 13'$; 2) $a = 90^\circ$, $A = 83^\circ 45'$, $B = 110^\circ 12'$; 3) $a = 60^\circ 13'$, $A = 79^\circ 11'$, $B = 100^\circ 49'$; 4) $a = 54^\circ 17'$, $A = B = 82^\circ$; 5) $a = 75^\circ 49'$, $A = 54^\circ 47'$, $B = 68^\circ 32'$; 6) $a = 51^\circ 6'$, $A = 83^\circ 5'$, $B = 70^\circ 2'$; 7) $a = 74^\circ 53'$, $A = 93^\circ 14'$, $B = 125^\circ 17'$; 8) $a = 141^\circ 8'$, $A = 109^\circ 20'$, $B = 70^\circ 40'$; 9) $a = 130^\circ 5'$, $A = 87^\circ 9'$, $B = 79^\circ 27'$; 10) $a = 129^\circ 8'$, $A = B = 99^\circ 53' 15''$; 11) $a = 117^\circ 38'$, $A = 78^\circ 56'$, $B = 137^\circ 25'$; 12) $a = 105^\circ 2'$, $A = 119^\circ 25'$, $B = 80^\circ 5'$.

5. Úloha. Dána jest strana c a přilehlé k ní úhly A i B : najdi druhé dvě strany a i b a třetí úhel C .

Řeš. Napierovými obdobami γ) δ) v §. XXII. 3. najdeš $\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(a-b)$, tedy $a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)$, $b = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)$; a znaje strany a , b , ustanovíš obdobou α) neb β) Napierovou úhel C .

Poznamenání. Je-li $A = B$, užije se obdob γ a α ; je-li $A + B = 180^\circ$, poslouží obdoby δ a β . Je-li $A = B = 90^\circ$, bude dle rovnice α) Gaussovy $c = C$, a dle obdob β), δ) Napierových $C = \frac{\alpha}{\beta}$, $c = \frac{\alpha}{\beta}$, neurčité.

Příklady: 1) Bud $c = 78^\circ 25' 40''$, $A = 83^\circ 12'$, $B = 56^\circ 0' 40''$.
2) $c = 96^\circ 4' 10''$, $A = B = 54^\circ 2' 30''$; 3) $c = 82^\circ 14' 30''$,
 $A = 79^\circ 21' 40''$, $B = 110^\circ 38' 20''$.

6. Úloha. Dány jsou všechny tři úhly A , B , C : najdi strany a , b , c .

Řešení vykonej užije vzorců v §. XXII. 4. vypsaných.

Omezení. Aby úloha řešitelná byla, musí $A + B + C > 180^\circ$ být, (Stereom. §. XXXIX. 2. b.).

Příklady: 1) Bud $A = 69^\circ 45' 30''$, $B = 76^\circ 28' 40''$, $C = 83^\circ 45' 20''$;
2) $A = 66^\circ 20' 50''$, $B = 82^\circ 41' 30''$, $C = 135^\circ 49' 50''$; 3) $A = 85^\circ 58' 40''$,
 $B = 127^\circ 47' 20''$, $C = 130^\circ 52' 10''$; 4) $A = 145^\circ 28' 30''$, $B = 167^\circ 23' 40''$,
 $C = 170^\circ 4' 50''$.

§. XXVI.

Úlohy z měřictví výkonného.

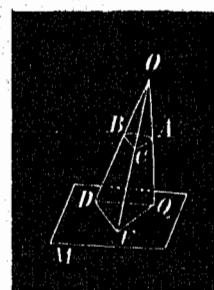
1. Najdi průměr daného v šikmě rovině úhlu na obzor učiněný.

Řeš. Bud (obr. 36.) M rovina obzoru, $\angle DOE = a$ úhel v rovině šikmé, $OQ \perp$ rov. M , pročež $\angle DQE$ průměr, jejž hledati jest. Položíme-li (v myslí) přímkami OD , OE , OQ roviny, a opříme-li kol středu O jakýmkoliv poloměrem $OA = OB = OC$ kouli, vznikne sférický trojúhelník ABC , v němž jest úhel $A = \angle DQE$. Změřme výstupné úhly $ODQ = \delta$, $OEQ = \varepsilon$; i jest pak $c = \text{arc. } AB = \angle AOB = 90^\circ - \delta$, $b = \text{arc. } AC = \angle AOC = 90^\circ - \varepsilon$; $a = \text{arc. } BC$ — Jsou tedy v trojúh. ABC všecky tři strany známy, i najde se úhel A dle §. XXII. 1. vyz. I. b.), a sice:

$$\text{budto } \cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon - a) \cdot \cos \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon + a)}{\cos \delta \cdot \cos \varepsilon}}$$

$$\text{aneb } \sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a - \delta + \varepsilon) \cdot \sin \frac{1}{2}(a + \delta - \varepsilon)}{\cos \delta \cdot \cos \varepsilon}}.$$

obr. 36.



2. Najdi vzdálenost dvou míst na povrchu zemské koule, jsou-li zeměpisné šířky i délky jejich známy.

Řeš. Budte (obr. 37.) M a N dvě místa na povrchu zemské

koule, MN oblouk hlavnho kruhu jima

obr. 37.

vedeného hledaný, P pol. zemský, AQ

rovník, $PAQP$ první poledník, PM' a

PN' poledníky míst M i N : tehdy jsou

oblouky $MM' = \varphi$, $NN' = \psi$ zeměp.

šířky, $AM' = \lambda$, $AN' = \lambda'$ zeměp. délky

míst M i N . — V trojúhelníku MPN

jsou dvě strany a úhel jima sevřený

známy, totiž $MP = 90^\circ - \varphi$,

$NP = 90^\circ - \psi$, $\angle MPN = \lambda' - \lambda$: pro-

čež lze stranu MN , jížto se ustanovuje

vzdálenost žádaná, nalezeni budto jako

v §. XXV. úl. 2., aneb způsobem následujícím:

Položíme-li $\tan \varphi = \tan b \cdot \cos A$, pročež $\tan \varphi \cdot \cos b = \sin b \cdot \cos A$, a dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce

$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$, změní se tento, jak násle-

duje: $\cos a = \frac{\cos b \cdot \cos(c - \varphi)}{\cos \varphi}$.

Dle tohoto návodu v úloze naší si počínajíce vypočítáme nejprv pomocný úhel φ vzorcem

$\tan \varphi = \cot \varphi \cdot \cos(\lambda' - \lambda)$; vypočítavše najdeme

$$\cos MN = \frac{\sin \varphi \cdot \sin(\psi + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Ku cvičení se položeny jsou zde šířky (sev.) a délky (východní) některých míst:

Benátky Vlašské	$45^\circ 25' 53''$ š.; $30^\circ 0' 46''$ d.
Berlín	$48^\circ 12' 35''$ š.; $34^\circ 2' 36''$ d.
Budějovice	$49^\circ 38' 0''$ š.; $33^\circ 26' 54''$ d.
Čáslav	$41^\circ 1' 27''$ š.; $46^\circ 35' 15''$ d.
Hora Koutná	$49^\circ 52' 0''$ š.; $32^\circ 15' 0''$ d.
Hradec Králové	$50^\circ 12' 38''$ š.; $33^\circ 29' 50''$ d.
Jerusalem	$31^\circ 47' 47''$ š.; $53^\circ 0' 0''$ d.
Klatovy	$40^\circ 23' 48''$ š.; $10^\circ 57' 38''$ d.
Londýn	$51^\circ 30' 49''$ š.; $17^\circ 34' 13''$ d.
Moskva	$49^\circ 45' 45''$ š.; $55^\circ 12' 45''$ d.
Olomouc	$49^\circ 35' 44''$ š.; $34^\circ 55' 0''$ d.
Pardubice	$50^\circ 2' 22''$ š.; $33^\circ 26' 39''$ d.

Paříž	$48^{\circ} 50' 14''$ š.; $20^{\circ} 0' 0''$ d.
Petrohrad	$59^{\circ} 56' 31''$ š.; $47^{\circ} 57' 57''$ d.
Písek	$49^{\circ} 18' 21''$ š.; $31^{\circ} 48' 41''$ d.
Plzeň	$49^{\circ} 44' 55''$ š.; $31^{\circ} 2' 32''$ d.
Praha	$50^{\circ} 5' 19''$ š.; $32^{\circ} 35' 39''$ d.
Řím	$41^{\circ} 53' 54''$ š.; $40^{\circ} 9' 30''$ d.
Tábor	$49^{\circ} 24' 57''$ š.; $32^{\circ} 19' 16''$ d.
Terst	$45^{\circ} 38' 37''$ š.; $31^{\circ} 26' 12''$ d.
Varšava	$52^{\circ} 14' 28''$ š.; $38^{\circ} 42' 30''$ d.
Vídeň	$48^{\circ} 12' 35''$ š.; $34^{\circ} 2' 36''$ d.

3. Úloha. Najdi poloviční oblouk denní, jsou-li dány výška polu (zeměpisná šířka) a odchylka téhož oblouku (od rovníku).

Řeš. Bud (obr. 38.) $HZRH$ ledník, HR obzor, AQ rovník, ND kruh s rovníkem rovnoběžný, tedy $SD=x$ poloviční oblouk denní, Z nadhlavník, P pol rovníka, ZS a PSE hlavní kruhy, pročež $ES=d$ odchylka rovnoběžného kruhu od rovníka, $HP=p$ výška polu. Mimo to jest $PE=90^{\circ}$, $AP=90^{\circ}$, $ZS=90^{\circ}$; jakož i úhel $\angle SPZ = EQ = \alpha$.

Tehdy máme v trojúhelníku SPZ všechny strany známy, totiž $SP=90^{\circ}-d$, $PZ=90^{\circ}-p$, $ZS=90^{\circ}$. Chtějíce nalezti úhel $SPZ=\alpha$ položme do vz. I. a) v §. XXI. 1. na místě tamějších a , b , c , A hodnoty ZS , SP , PZ , $SD=x$, i vyjde

$$\cos \alpha = -\tan d \cdot \tan p; \text{ aneb}$$

$$\cos(180^{\circ}-\alpha) = \tan d \cdot \tan p.$$

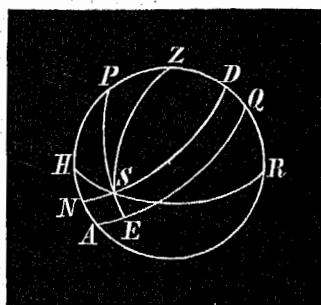
Připomenutí. Je-li odchylka jižná, běže se $-d$ místo $+d$, a pak jest vzorec pro poloviční oblouk denní

$$\cos \alpha = \tan d \cdot \tan p.$$

Poznaměnání. Dvojnásobný půloblouk činí celý oblouk denní. Dělíme-li stupně, minuty a sekundy oblouka číslem 15, dostaneme počet hodin, minut a sekund času celého dne — vztahujeme-li odchylku od rovníku na slunce. Jedná-li se o den nejdélší nebo nejkratší, sluší místo d dosaditi ekliptiky sklon $= \pm 23^{\circ} 27' 26''$.

Příklady. Jak dlouho trvá den ve Vídni, v Praze, v Hradci Králové, v Olomouci, v Petrohradě, v Paříži, v Londýně, v Římě, v Jeruzalemě dne 24. února, 24. dubna, 16. května, 6. června,

obr. 38.



4. července, 18. srpna, 28. září, 16. října, 23. listopadu, 6. prosince: v kteréžto dni odchylka slunce pořadem jest $-9^{\circ} 21'$, $+12^{\circ} 57'$, $+19^{\circ} 10'$, $+22^{\circ} 41'$, $+22^{\circ} 52'$, $+13^{\circ} 3'$, $-2^{\circ} 7'$, $-8^{\circ} 59'$, $-20^{\circ} 25'$, $-22^{\circ} 32'$.

Jak dlouho trvá nejdelší, a jak dlouho nejkratší den v městech shora jmenovaných?

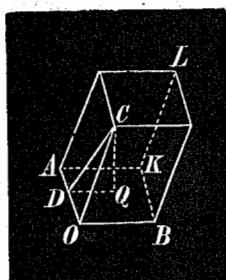
§. XXVII.

Úlohy z polyedrometrie.

Všechny zákony o závislosti stran a úhlů trojúhelníků sférických, mají platnost o bocích a koutech (plošných úhlech) trojúhelníků tělesných: jakož z odvození jejich původně vysvítá.

1. Úloha. Dány jsou tři hrany a , b , c rovnoběžnostěna i úhly jimi sevřené $b^c = \alpha$, $c^a = \beta$, $a^b = \gamma$: najdi krychlový obsah K jeho.

obr. 39.



Res. Budte (obr. 39.) $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ tři hrany rovnoběžnostěna $OL=K$, $CQ=v$, výška jeho z bodu C vrchní podstavy CL na dolejší OK spuštěná, $CD \perp OA$, pročež jest $\angle CDQ=\alpha$ kout boků AOB i AOC .

Znamená-li P plošný obsah podstavy, jest $P=ab\sin\gamma$, pročež $K=P.v=a.b.v\sin\gamma$. Jest ale $v=CQ=DC\sin QDC=DC\sin\alpha$; $DC=OC\sin AOC=c\sin\beta$: tedy

$$K=a.b.c\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha.$$

Položíce k vůli krátkosti $\alpha+\beta+\gamma=2\sigma$ dostaneme dle vzorce I. b. a) $\beta)$ v §. XXII. 1. spolu znásobených: $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=2\sqrt{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}$: a tuto hodnotu dosadíce:

$$K=2abc\sqrt{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}.$$

Kterak sě zjednoduší tento vzorec pro krychlový obsah *klence*?

Kterak se vypočítá krychlový obsah trojbokého buď hranolu neb jehlanu ze tří hran v jeden hrot se sbíhajících a z úhlů jimi sevřených?

2. Úloha. Ze známé strany a pravidelného p-stěna, který jsa omezen n-úhelníky má hroty (rohy) m-boké, vypočítaje najdi:

a) úhel $\angle AOB=\gamma$ (obr. 40.) sevřený přímkou OA ze středu O

těleso ku prostředku A hrany BB' a přímkou OB k jednomu konci této hrany vedenou;

obr. 40.

b) úhel $AOC = \beta$, přímky OA a OC kolmé na pomeznou plochu $B'BB''$;

c) úhel $BOC = \alpha$, přímek OB a OC ;

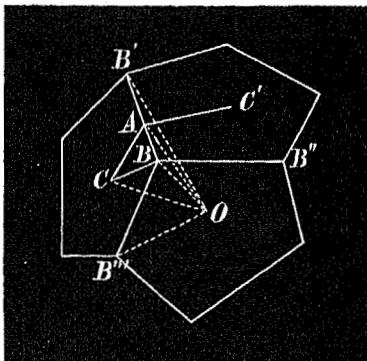
d) odchylku δ dvou sousedních ploch pomezných, (kout);

e) poloměr r koule vepsané;

f) poloměr R koule opsané;

g) povrch P mnohostěna; a

h) krychlový obsah K jeho.



Proprava. Vedeme-li ještě přímky CA i CB , máme před sebou tělesný trojúhelník $OABC$, jehož boky znamenejme $BOC = \alpha$, $COA = \beta$, $AOB = \gamma$, a protější kouty písmeny A , B , C .

Poněvadž jest $OC \perp_{\text{rov.}} B'AB''$, $OA \perp BB'$; vyplývá předně: $BA \perp AO$, $BA \perp AC$, pročež $BA \perp \text{rov.} CAO$, a proto také $\text{rov.} BAO \perp \text{rov.} CAO$, tedy $A = 90^\circ$; za druhé: $CB \perp CO$, $CA \perp CO$, pročež $B = \angle ACB = \frac{180^\circ}{n}$.

Přímka OB jest kolmo na rovině $B'B''B'''$, kterou vedeme konci všech hran v hrotu B se sbíhajících. Průměty všech m boků hrotu B na tuto rovinu jsou si rovny a činí pospolu 360° , pročež každý o sobě $\frac{360^\circ}{m}$. Průmět ten jest ale odchylka rovin $B'''OB$ a BOB' , kterážto opět rovinou BOC na dvě půle se dělí: pročež jest kout $B = \frac{180^\circ}{m}$. — Konečně připomínáme, že jest úhel CAO polovičné odchylce CAC' dvou stěn sousedních roveň. —

Řešení samé čtenářovi již zůstavujícé klademe zde výsledky:

$$a) \cos \gamma = \frac{\cos \frac{1}{n} 180^\circ}{\sin \frac{1}{m} 180^\circ};$$

$$b) \cos \beta = \frac{\cos \frac{1}{m} 180^\circ}{\sin \frac{1}{n} 180^\circ};$$

$$c) \cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma = \cot \frac{1}{n} 180^\circ \cdot \cot \frac{1}{m} 180^\circ;$$

$$d) \sin \frac{1}{2} \delta = \cos \beta = \frac{\cos \frac{1}{m} 180^\circ}{\sin \frac{1}{n} 180^\circ};$$

e) $r = \frac{1}{2}a \cdot \cot \frac{1}{n} 180^\circ \cdot \tan \frac{1}{2}\delta;$

f) $R = \frac{1}{2}a \cdot \tan \frac{1}{m} 180^\circ \cdot \tan \frac{1}{2}\delta;$

g) $P = \frac{1}{4} npa^2 \cdot \cot \frac{1}{n} 180^\circ;$

h) $K = \frac{1}{24} npa^3 \cdot \cot \frac{1}{m} 180^\circ \cdot \cot \frac{1}{n} 180^\circ \cdot \tan \frac{1}{2}\delta.$

O B S A H.

Uvod §. I—IV. str. 1—9. —

Kniha první. Trigonometria ploská. — Část I. Vztahy úkonů geometrických, §. V.—VIII. str. 10—20. — Část II. O vypočítávání desk úhloměrných, §. IX.—XI. str. 20—24. — Část III. O úhloměrném řešení obrazců přímočarých: A) Řešení trojúhelníků pravoúhlých, §. XII. str. 24—27; B) Řešení trojúhelníků kosoúhlých, §. XIII. XIV. str. 27—34; C) Řešení čtyrúhelníků §. XV—XVI. str. 34—36; D) Řešení mnohoúhelníků pravidelných §. XVII. str. 37; E) Úlohy z měřictví výkonného §. XVIII. XIX. str. 38—42.

Kniha druhá. Trigonometria sférická. — Část I. Základní vzorce k řešení trojúhelníků sférických §. XX—XXII. str. 43—48. — Část II. Řešení trojúhelníků sférických: A) pravoúhlých, §. XXIII. XXIV. str. 49—52; B) kosoúhlých §. XXV. str. 52—57; — Úlohy z měřictví výkonného §. XXVI. str. 57—60. — Úlohy z polyedrometrie §. XXVII. str. 60—62.
