D 75.

GEOMETRIA

pro vyšší gymnasia

od

Václava Jandečky,
učitele matematiky a fysiky na č. k. gymnasiu v Hradci Králové.

Díl prvý.

PLANIMETRIA.

(Do textu vloženo přes 150 obrazců.)

Bibliotheca Gymnasii Stc. Cruciferorum

Krámská cena: 90 nkr. r. č.

V PRAZE 1864.
Nákladem spisovatelovým.

(V kommissí kněhkupectví: I. L. Kober.)

ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA
PEDAGOGICKÉ FAKULTY
HRADEC KRÁLOVÉ
Sign. 0327/1
Inventár. 200940

Národní knihtiskárna: I. L. Kober v Praze.

Předmluva.

Podávaje veřejnosti prvý díl geometrie pro vyšší gymnasia pokládám za slušné, abych několika slovy pověděl, kterými věcmi při své práci jsem se řídil. Z látky planimetrické přijal jsem do své knížky část nejpotřebnější, jakož i v jiných knihách podobného spůsobu vykládána bývá. Na některých místech pojímal jsem ji ovšem poněkud všeobecněji, než se jinde stává; domníval ť jsem se, že žáci odbyvše již gymnasium nižší dostatek mají i přípravy i schopnosti i chuti, aby mysl jejich povzletla o něco výše. Dlouholetá zkušenost, jíž jsem v úřadě učitelském nabyl, potvrzovala mne v úmyslu tom. Však nicméně maje zřetel i k chatrnější chápavosti hleděl jsem vedle této všeobecnosti také jednotlivé vztahy geometrické, ač ve všeobecných již obsaženy byly, o sobě spůsobem obvyklým vyložiti, tak aby možná bylo učiteli, kdyby náhodou některý ročník takovouto úlevu žádal, onen skrovný počet vět všeobecnějších zcela vynechati, a jen se zvláštními, jichž vysvětlení v knížce též se nalézá, pro ten rok spokojiti se. Při roztřídění látky měl jsem na paměti, aby nauka o úměrnosti nepřišla dříve, než žáci páté školy v algebře o poměrech a úměrách vycvičení nabyli. Z té příčiny nejednáno o kruhu a jeho vlastnostech i rozměrech zvlášť a pohromadě, nébrž nauka ta rozdělena a v rozličných hlavách, jak dle shodnosti neb úměrnosti neb velikosti tu obměru tu plochy přirozeně i logicky se vykazovalo, odbývána jest. Nauku o ellipse, hyperbole a parabole nepřijal jsem, maje za to, že zůstatní látkou dostačuje i schopnějšího žáka po celý rok přiměřeně zaměstnávati, a že o dvě léta později v geometrii analytické tyto křivky poznány budou v pravý čas ku studiu dynamiky. V důkazech bedliv jsem byl přesnosti; důkazu neshodou (deductio ad absurdum) vyhýbal jsem se všemožně, a jen zřídka mu místa popřál. Hned z počátku postavil jsem před oči protivu

směrů i úhlů a příbuzenství v myšlení algebraickém i geometrickém, hledě připravovati půdu jednak pro všeobecnější pojímání vět planimetrických, jednak pro pozdější nauky matematické. Přede vším ale chtěje vzbuzovati při žácích mysl k samostatnosti ponechal jsem čtenářovi, aby sám dokázal neb rozřešil znamenitý počet i vět naučných i úloh. Aby tím snáze účel byl dosažen, přijal jsem tu i tam některé úlohy za vzorné příklady, ano na příležitém místě i některá methodická připomenutí i krátké navedení ku řešení úloh podal jsem, chtěje žákovi vyzraditi, kterak při svém myšlení aby žádaného konce došel, počínati si má. Mezi větami, jichž důkaz čtenářovi zůstaven jest, nacházejí se mnohé, na které později se odvolávám, ježto tedy žák dokázati musí stůj co stůj, má-li rozuměti větám pozdějším. Myslím, že tato věc nebude za vadu pokládána, pováží-li se, že žák má učitele za buditele a vůdce myšlení svého, kterýž přijde ku pomoci, bude-li toho potřeba nezbytná. Některé věty a úlohy, které by se těžšími zdály pro žáka slabšího, zachová zkušený vůdce mládeže, není-li to celé osnově na ujmu, dílem přesně soukromému zaměstnání žáků výbornějších, dílem do osmé školy při opakování celého gymnasialního v matematice učení všem žákům v této nauce během tří roků pokročilejším.

V Hradci nad Labem na den sv. Václava l. P. 1863.

Spisovatel.

Obsah.

(Římská cifra znamená §, arabská stránku.)

Knihy druhé část **třetí.** O shodnosti č. jednostejnosti obrazcův vůbec, trojúhelníkův zvlášť. XXXVII.—L. 29—39; a sice:

A) O shodnosti obrazcův vůbec. Ponětí o shodnosti XXXVII. 29. — Kolik částí k dokonalému určení mnohoúhelníka třeba XXXVIII. 30. — B) O dokonalé určenosti trojúhelníka. Které části k tomu nepostačují, a vypočítání těch zůstatních XXXIX. 31. — a) Určenost trojúh. jednou stranou a přilehlýma k ní úhloma XL. 32. — Kterak rovnost stran na rovnosti protějších úhlů záleží XLI. 32. — Kterak proti většímu úhlu delší strana leží XLII. 32. — b) Určenost trojúh. dvěma stranama a úhlem jima sevřeným XLIII. 33. Trojúh. rovnoramenného úhly na podstavě XLIV. 34. — Kterak proti delší straně větší úhel leží XLV. 35. — Délka příčných v trojúhel. rovnoramenném XLVI. 35. — c) Určenost trojúh. dvěma stranama a úhlem protějším XLVII. 35. — d) Určenost trojúh. třemi stranami XLVIII. 36. — Neurčenost trojúh. dvěma stranama, a vzájemná závislost velikosti třetí strany a úhlu protějšího XLIX. 37. — Připomenutí methodické o důkazu nepřímém L. 38. —

Knihy druhé část **čtvrtá.** Věty o trojúh. rovnoramenném a pravoúhlém a úlohy na základě jednostejnosti trojúhelníků. LI.—LIV. 39—45., a sice:

Trojúhelníky rovnoramené na společné podstavě a přímky jejich vrcholoma jdoucí LI. 39. — Trojúhelník rovnoramený a výška jeho LII. 40. — Přímka úhel rozpolující a vzdálenost bodů jejich od ramenou úhlů LIII. 40. — Úlohy. Sestrojiti trojúh. ze tří stran; sest. trojúhelník rovnoramený; okresliti úhel; rozpoliti úhel, přímku; postaviti a spustiti kolmou; vésti rovnoběžnou; roztřetiti úhel pravý LIV. 41—45. —

Přídavek. Některá navedení k řešení úloh. Co jest úloha, co úl. určitá, co neurčitá LV. 45. — Řešení a omezení úlohy LVI. 46. — Sestrojení LVII. 46. — Rozbor geometrický LVIII. 47. — Některé úlohy za příklady LIX. 47—51.

Knihy druhé část **pátá.** O čtyrúhelnících. LX—LXIX. 51—57; a sice:

Rozličné tvary a druhy čtyrúhelníka LX. 51. — Vnitřní úhly v rovnoběžníku LXI. 52. — Protější strany v rovnoběžníku LXII, LXIII. 52, 53. — Druhové rovnoběžníka LXIV. 53. — Úhlopříčné v rovnoběžníku LXV—LXVII. 54, 55. — Lichoběžník rovnoramený LXVIII. 55. — Určenost čtyrúhelníka LXIX. 58.

Knihy druhé část **šestá.** O mnohoúhelnících pravidelných, a sice:

Střed, paprsky ze středu ku hranám, kolmice ze středu na strany, úhly vnitřní, úhly paprsků, a vzájemná jejich velikost a k sobě poloha LXX. 57. — Vznikání a sestrojování mnohoúh. pravidelných LXXI. 59.

Kniha třetí. O kruhu. LXXII.—LXXXV. 60—79; a sice:

Poloha středu k tetivě LXXII. 60. — Úhel středový, tetiva, oblouk a jejich vzájemná závislost LXXIII. 62. — Rozdělování kruhu na 3.2n neb 2n rovných částí LXXIV. 63. — Závislost tetivy a svislé LXXV. 64. — Závislost úhlů středového i obvodového jednoho na druhém. Sestrojování kruhu nad tetivou s určitým úhlem obvodovým LXXVI. 65. — Tečná a sečná, i poloha jejich k poloměru v bodě dotyčném neb průsečném LXXVII. 69. Sestrojování tečných LXXVIII. 71. — Dvé a více tečných téhož kruhu LXXIX. 72. — Tečná, tetiva tečných a úhel jima sevřený LXXX. 73. — Čtyrúhelník z tečných LXXXI. 74. — Opisování pravidelného mnohoúhelníka o kruh a vpisování kruhu do mnohoúh. prav. LXXXII. 74. — Rozličná délka přímek z jednoho bodu ke kruhu vedených LXXXIII. 75. — Vzájemná poloha dvou kruhů a přímka středná č. osa LXXXIV. LXXXV. 76—79.

Knihy čtvrté část **prvá.** O úměrnosti přímek, a sice:

Co jsou stejnolehlé paprsky, body, příčky, úsečky, úhly LXXXVI. 80. — Úměrnost stejnolehlých paprsků rovnoběžnými příčkami sříznutých LXXXVII. 81. — Vzájemná závislost některých zvláštních vlastností obrazcův stejnolehlých LXXXVIII. 83.

Knihy čtvrté část **druhá.** O podobnosti obrazcův, obzvláště trojúhelníkův, a sice:

Jaké obrazce slovou podobnými, vlastnosti podobných mnohoúhelníků LXXXIX. 86. — O znacích podobnosti trojúhelníkův XC. 88. —

Knihy čtvrté část **třetí.** O některých přímkách v trojúhelníku a v kruhu, a sice:

O příčce v trojúhelníku, která rozpoluje buď úhel neb protější stranu XCI. 89. — O výšce pravoúhelného trojúhelníka a úměrnosti jak její tak úseček podpony XCII. 90. — Usečky dvou sečných neb tetiv, které se protínají; úměrnost strany desítiúhelníka pravidelného, jenž do kruhu vepsán jest XCIII. 91. —

Knihy čtvrté část **čtvrtá.** Některé úlohy na úměrnosti neb podobnosti se zakládající XCIV. 92.

Knihy čtvrté část **pátá.** O dělení harmonickém. XCV. XCVI. 96—99.

Knihy čtvrté část **šestá.** Algebraické pojímání veličin i vět geometrických; a sice:

Kterak a proč s těmito veličinami po algebraicku lze zacházeti XCVII. 99. — Za příklady několik vět geom. po algebraicku pojatých XCVIII. 99. — Některé úlohy na tomto základě XCIX. 101.

Knihy páté část **prvá.** O obvodě mnohoúhelníků; a sice:

Poměr obvodu úhelníků podobných ku stranám stejnolehlým C. 103. — Porovnávání vepsaných a opsaných do kruhu mnohoúhelníkův pravidelných CI. 103. — Vypočítávání obvodu opsaných a vepsaných do kruhu mnohoúhelníkův pravidelných. CII. 104. —

Knihy páté část **druhá.** O obměru kruhu; a sice:

Poměr oblouků k příslušným úhlům středovým CIII. 106. — Poměr podobných oblouků k celým obměrům CIV. 106. — Kruh lze míti za pravidelný mnohoúhelník o počtu stran neskonale velikém CV. 107. — Poměr obměru k poloměru CVI. 107. — Porovnání obměru kruhového s obvodem vepsaného a opsaného mnohoúhelníka pravidelného; vypočítání čísla Ludolfského CVII. 108. — Ustanovení délky oblouka CVIII. 109.

Knihy šesté část **prvá.** O velikosti ploch poměrné; a sice:

Poměr pravoúhelníků CIX. 110. — Poměr rovnoběžníků CX. 111. — Poměr trojúhelníků CXI. 112. — Poměr mnohoúhelníků pravidelných CXII. 113. — Porovnání lichoběžníka s trojúh. a s rovnoběžníkem CXIII. 114. — Věta Pythagorovská CXIV. 115. — Rozšíření té věty na obrazce podobné CXV. 115. — Věty ku cvičení CXVI. 116. —

Knihy šesté část **druhá.** Vypočítávání ploského obsahu mnohoúhelníků, a sice:

Míra ploskosti a jméno její CXVII. 117. — Ploskost pravoúhelníka CXVIII. 117. — Ploskost zůstatních úhelníků CXIX. 118.

Knihy šesté část **třetí.** O ploském obsahu kruhu CXX. 120.

Knihy šesté část **čtvrtá.** O proměňování a dělení obrazcův CXXI. CXXII. 122—125.

Omyly tisku:

Na str.	10.	řád.	1.	zdola	místo	UAX' čti: UAX
„ „	30.	„	18.	shora	„	$AB=a$ čti: $AB=b$
„ „	30.	„	19.	„	„	$BC=b$ čti: $BB=c$
„ „	32.	„	7.	zdola	„	$A'C$ čti: $A'C'$
„ „	35.	„	7.	shora	„	za $\sphericalangle ABC$ přidej: (XXXII. 3. f.)
„ „	45.	„	9.	„	„	$\frac{2}{3}\frac{1}{3}R$, R, čti: $\frac{2}{3}R$, $\frac{1}{3}R$,
„ „	58.	„	16.	zdola	místo:	době čti: bodě.
„ „	60.	„	19.	shora	místo	$2n$ čti: 2^n .
„ „	60.	„	22.	„	„	$2n$ „ 2^n .
„ „	63.	„	5.	zdola	„	BQD čti: BOD.
„ „	80.	v obr.	95.	dole	místo	J, G čti: J', G'
„ „	84.	v obr.	95.	dole	místo	J, G čti: J', G'
„ „	89.	řád.	13.	shora	místo:	jednóm čti: jednom
„ „	92.	„	7.	zdola	„	XCIX čtí: XCIV.

Bibliotheca Gymnasii Slanensis

Úvod.

§. I.

1. Hmota, jež vyplňuje prostor omezený, slove *tělesem fysickým*, omezený pak prostor sám *tělesem matematickým* č. *geometrickým* (mathematischer, geometrischer Körper).

Tělo, jsouc v prostoře roztaženo, má trojí *rozměr* (Dimension): *a) délku* (Länge), *b) šířku* (Breite), *c) výšku* č. *hloubku* neb *tloušťku* (Höhe, Tiefe, Dicke).

Meze tělesa jsou plochy. *Plocha* (Fläche) má rozměr dvojí, schází jí tloušťka.

Meze plochy jsou *čáry* (Linien), majíce jediný rozměr, t. pouze délku.

Meze čáry jsou *body* (Puncte), nemajíce v prostoře roztaženosti, pročež nižádného rozměru.

Tělo, plocha, čára jsou *veličiny prostorové* (Raumgrössen) t. j. veličiny v prostoru roztažené.

Při veličině prostorové rozeznáváme *tvar* i *polohu* i *velikost* její.

Nauka o tvaru, poloze a velikosti veličin prostorových slove geometria (měřictví).

Bod, ač nemaje roztaženosti není veličinou, přece jsa mezí čar z geometrie se nevylučuje. Znamená se písmenem.

2. *Čára* jest veličina prostorová mající jediný rozměr. Vzniká *a)* průřezem či setkáním se dvou ploch; *b)* stopou, již po sobě ostavuje bod od místa k místu prostorem vedený.

Čára jest buď *a) přímá* č. *přímka* (gerade), mají-li všecky její částky týž směr; aneb *b) křivá* č. *křivka* (krumme, Curve), jejíž některý díl není přím.

3. *Plocha* jest veličina prostorová mající dva rozměry. Vzniká stopou, již po sobě ostavuje čára od místa k místu prostorem vedená; a jest buď *a) rovná* č. *rovina* (ebene Fläche), na kteréž

se dá kterýmakoliv dvěma bodoma jejíma položiti přímka, aneb *b) křivá* (krumme Fl.), jejíž nižádná část není rovná.

4. *Tělo* jest veličina prostorová mající trojí rozměr, a jest buď *a) hranaté* (eckig), když rovnými, neb *b) kulovité* (rund), když aspoň z části plochami křivými omezeno jest.

5. Nákres tvaru geometrického slove *obrazec* (Figur); a sice *ploský*, když rovina, a *tělesný*, když tělo neb plocha křivá nákresem jest zobrazena.

Obrazec ploský jest buď *přímočarý*, když přímkami, aneb *křivočarý*, když křivkami omezen jest.

Úhrn pomezných čar ploského obrazce slove *obvod* (perimeter, Umfang) jeho; a velikost plochy omezené nazývá se *ploskost* č. *ploský obsah* (area, Flächeninhalt).

Úhrn pomezných ploch tělesa jmenuje se *povrch* (superficies, Oberfläche), a velikost omezeného prostoru zoveme *tělesností* č. *tělesným obsahem* (Körperinhalt).

6. Geometria rozvrhuje se na dvě části: *a)* na *geometrii v rovině* č. *planimetrii*, *b)* na *geometrii v prostoře* č. *stereometrii*. Onano zabývá se s veličinami v jedné rovině, tato s veličinami v prostoru vůbec rozpoloženými. Jinému ještě rozvržení nauky geometrické může teprv později porozumíno býti.

DIL PRVÝ.

Planimetria.

Knihy prvé část prvá.

O přímce.

U přímky rozeznávejme *a) polohu, b) tvar, c) velikost* její. K tomu přidejme úlohu *d)* o *sestrojení* přímky.

§. II.

1. *Poloha* přímky (die Lage der G.) dokonale jest určena: *a) jedním bodem A* (obr. 1.) jímž přímka procházeti, a *směrem AX*, jímž se vésti má. Každá jiná přímka, kteráž by těmto dvěma výmínkám zadost učinila, splyne s prvou dokonale.

obr. 1.

b) Aneb *dvěma bodoma A* i *B*, *kudy* přímce běžeti jest. Neboť bodem *B* jest ustanoven *směr*, jímž přímka z bodu *A* vycházející ubírati se má.

Odtud plyne věta:

2. *Dvě přímky rozličných směrů nemohou se stýkati leč v bodě jediném.*

3. Jedním bodem lze vésti přímek nesčíslných; každá však z nich má pak jiný směr.

4. Rovněž mohu vésti nesčíslných přímek téhož směru. Ale žádná z nich s nižádnou nemá bodu společného, nesplývá-li s ní po celé délce své.

§. III.

Co se týče *tvaru*, stačí připomenouti, že přímka *ve všech svých částech má týž směr*. Pročež když odříznuvše kdes jeden její díl přeneseme a položíme na její díl jiný, pokryjeme jej tím dokonale.

§. IV.

1. *Velikost* přímky spočívá na délce její; i může býti *a)* bez konce, neb bez konců, t. *neskončeně dlouhá*, aneb *b)* má konce, a délka její jest *konečná*.

2. V prostoru neb na rovině jest délka přímky dokonale určena svým bodem počátečným a bodem koncovým.

3. Délku konečnou *měříme*, t. j. vyhledáváme, kolikkrát v ní obsažena jest jiná délka určitá, jižto zoveme *mírou* (Mass). Měříce klademe míru podél přímky a počítáme, kolikkrát kladení musí se opětovati, než od počátku přímky dojdeme konce jejího. Nalezený počet zoveme *číslem poměrným*, č. zkrátka *poměrem*, někdy též *číslem délkovým* (Mass-, Verhältniss-, Längenzahl).

4. Tehdy udati se může věc dvojí: *a)* buďto konec míry posléz položené a konec přímky splývají v jediný bod; i jsme hotovi; aneb *b)* z přímky zbývá část menší než jest míra.

5. V této druhé případnosti hledíme za novou mírku užiti několikáté části z míry předešlé, což se zjednává způsobem tímto:

obr. 2.

Dejme tomu, že v přímce AB (obr. 2.) míra m jest obsažena α-krát, a že zůstaví se zbytek $CB = m_1 < m$: tu vezma m_1 za míru shledám, že v přímce m jest obsaženo α_1 krát, kromě zbytku $m_2 < m_1$; tu opět m_2 za míru pojma měřím přímku m_1 a t. p. I bude pak:

$$
\begin{aligned}
m &= \alpha_1 . m_1 + m_2 \\
m_1 &= \alpha_2 . m_2 + m_3 \\
m_2 &= \alpha_3 . m_3 + m_4 \\
m_{r-3} &= \alpha_{r-2} . m_{r-2} + m_{r-1} \\
m_{r-2} &= \alpha_{r-1} . m_{r-1} + m_r \\
m_{r-1} &= \alpha_{r-1} . m_r + m_{r+1}
\end{aligned}
$$

Tohoto počínání může býti výsledek opět dvojí; buďto měření *pojde* aneb *nepojde*.

6. Pojde-li měření, jest zbytek $m_{r+1} = 0$, a pak jest poslední

mírka m_r několikátým dílem míry původní m, a zbytek m_1 má v sobě několik těchto mírek obsažených, což se dokonale ustanoví takto:

Poměrná čísla, jichž jsme nabyli, sestavíme do řady převrácené, totiž:

$$\alpha_r, \alpha_{r-1}, \alpha_{r-2}, \ldots \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1.$$

Z této řady násobíme spolu prvá dvě čísla, jedničku přičtouce, $\alpha_r \cdot \alpha_{r-1} + 1 = \beta_{r-1}$; získaný výsledek násobíme číslem v řadě následujícím, a přičteme prvé číslo řady, totiž $\beta_{r-1} \cdot \alpha_{r-2} + \alpha_r = \beta_{r-2}$.

Tento, jakož i každý budoucí výsledek násobíme číslem v řadě následujícím, a přičteme výsledek předešlý, totiž $\beta_{r-2} \cdot \alpha_{r-3} + \beta_{r-1} = \beta_{r-3}$.

To tak dlouho opakujeme, až jsme násobili číslem α_1 v řadě posledním. Obdrževše za poslední výsledek číslo β_1 a za předposlední β_2, položíme $m_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot m$.

O pravosti tohoto spůsobu přesvědčíš se, v hořejších rovnicích položiv $m_{r+1} = 0$, a potom do předposlední rovnice místo m_{r-1} dosadiv jeho hodnotu z rovnice poslední, a tím spůsobem určiv hodnotu m_{r-2} dosadíš-li ji do rovnice odzadu třetí a t. p.

Ku př. Čísla poměrná buďtež 2, 3, 1, 4; pročež v pořádku převráceném 4, 1, 3, 2, i jest $\beta_3 = 4.1 + 1 = 5$, $\beta_2 = 5.3 + 4 = 19$, $\beta_1 = 19.2 + 5 = 43$, a $m_1 = \frac{19}{43} \cdot m$.

7. V tomto případě dají se i přímka AB i přímka m *společnou mírou* m_r změřiti: pročež se *souměřitelnými* (commensurabel) nazývají.

8. Kdyby však měření nikdy nepošlo, nemají přímky AB a m míry společné, a slovou *nesouměřitelnými* (incommensurabel).

Tehdy nelze přímky AB ani mírou m ani několikátým dílcem jejím dokonale změřiti, nébrž třeba jest spokojiti se v potřebách obecných s měřením *blíživým* (approximativ), kdežto malitký zbytek m_{r+1} se opomíjí, jakoby ho nebylo.

Poznam. K obecným potřebám míváme míru na rovné části již napřed rozdělenou; ku př. meter na 10 decimetrů, na 100 centimetrů, na 1000 millimetrů.

§. V.

1. Abychom přímku řádně sestrojili, musíme znáti i *polohu* i *délku* její.

Co do *polohy* nakreslíme správně, vedouce hyblivý bod od bodu daného A (obr. 1) směrem AX nám rovněž napřed známým.

Co do *délky* nakreslíme správně, položíce danou délku m podél AX, tak aby počátek přímky m na bod A padl, a zaznamenajíce pak na přímce AX bod B, kde přímka m svým koncem leží.

Poznam. K výkresu polohy slouží pravítko, k výkresu délky kružidlo.

2. K písemnému znamenání přímky užíváme buď jediného písmene, na př. m, jímž se nám udává zároveň *číslo* poměrné; aneb slouží nám k tomu dvé písmen AB, jimaž některé dva body (obyčejně konce přímky) se značí. I tento spůsob může udávati známkou AB *číslo poměrné*, mimo to ale ještě *směr* přímky od bodu A k bodu B, kdežto BA totéž číslo znamenajíc udává směr *protivný* z bodu B k bodu A.

Poznam. Protiva směrů přímek AB a BA jedinym písmenem m znamenaných dá se vytknouti též znameními *kladu* a *záporu* (+ a —), tak že $AB = +m$, a $BA = -m$ rozumíno jest.

3. *Délka* přímky, ~~již nakresliti máme~~, udává se nám na spůsob kolikerý, ji žádáno, by se rovnala

a) délce m některé jiné přímky, o čemž v odst. 1 již rozhodnuto;

b) délkám $m, n, p, \ldots$ pospolu vzatým;

c) rozdílu délek m a n;

d) délce m několikkráte vzaté;

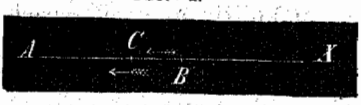
e) několika několikátým dílcům délky m.

O této poslední úloze bude později jednáno.

4. Má-li délka x nakreslené přímky rovnati se $\left\{\begin{matrix}\text{součtu}\\ \text{rozdílu}\end{matrix}\right\}$ dvou délek m a n, odřízneme (obr. 3. a 4.) $AB = m$; a pak konec B za počátek následující délky n majíce, a jdouce směrem $\left\{\begin{matrix}\text{týmž}\\ \text{protivným}\end{matrix}\right\}$ odřízneme $BC = \pm n$, i bude přímka AC, t. j. vzdálenost posledního bodu C od počátku A míti délku žádanou; totiž

obr. 3.

obr. 4.



$$AC = m + n \quad \ldots \text{(obr. 3.)}$$

$$AC = m - n \quad \ldots \text{(obr. 4.)}$$

Poznam. Spůsoby, jimiž tu součet, tam rozdíl dvou délek sestrojujeme, pouze tím se od sebe liší, že přímku n, když jest *sčítancem*, týmž směrem jako přímku m, když ale jest *menšitelem*, směrem *protivným* na přímku AX uvádíme. To abychom i písmem vytkli, klademe v prvém případě $BC = +n$, a v druhém $BC = -n$, což se srovnává s pozn. v odst. 2. — Tento-li spůsob psaní zavedeme, budeme v obojím případě míti $AB + BC = AC$, nechť jest $AC = m + n$ aneb $AC = m - n$.

5. Podobně, jako v odst. 4. počínáme si, když žádaná délka se má rovnati ku př. $x = a + b - c + d - e$. Učiňme tehdy (obr. 5.) $AB = a$, $BC = b$, $CD = -c$, $DE = d$, $EF = -e$; i bude AF délka žádaná, a

obr. 5.

$$AF = AB + BC + CD + DE + EF = a + b - c + d - e.$$

6. Má-li se přímka žádaná rovnati délce m několikkráte (α-kráte) vzaté, sřízneme přímku m na přímce AX α-krát po sobě, počínajíce od bodu A a směrem AX pokračujíce.

Knihy prvé část druhá.

Dvé přímek. Úhel.

§. VI.

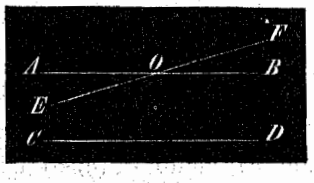
Dvě přímky mají *směr* buď

a) *týž* (neb i *protivný*), a slovou *rovnoběžné*, jako AB a CD, (obr. 6.), což se v písmě znamená takto:

$$AB \parallel CD;$$

b) aneb mají *směr rozličný*, jako AB a EF (obr. 6.) a tu opět

obr. 6.



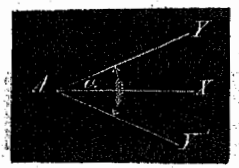
α) buďto v některém bodě O (obr. 6.) se stýkají, jenž jim jest společný, a pak slovou, pokud k tomuto bodu směřují, *sbíhavými* (convergent), a pokud z tohoto bodu každá jinam směřuje, *rozbíhavými* (divergent); vůbec *různoběžnými;* bod O slove *průsečný;*

β) aneb jedna přímka leží mimo druhou zúplna, i slovou pak *mimoběžnými;* ku př. když by přímka AB ležela v rovině tohoto papíru, a EF nad rovinou jeho.

§. VII.

1. Rozdíl směrů dvou přímek rozbíhavých AX a AY (obr. 7.) čili odchylka jedné přímky ode druhé slove *úhel ploský* č. zkrátka *úhel* (angulus, Winkel). Bod A, kde se obě přímky stýkají, nazývá se *vrcholem* (vertex, Scheitel), a přímky AX a AY od sebe se od-

obr. 7.



chylující *ramenoma* (crura, Schenkel) úhlu. Na délce ramenou nezáleží velikost úhlu.

2. Úhel vznikne průsekem dvou přímek. Jinak se tvoří, když přímka AX (obr. 7.) o svůj počátek A v rovině se *otáčí* přicházejíc do směru nového AY. Původní poloha AX nazývej se ramenem *prvým* neb *pevným*, a poloha AY otočením získaná sluj ramenem *druhým* neb *hybným*.

3. Směry, jimaž se přímka AX v rovině otáčí, jsou *dva* na vzájem *protivné*, a sice buď od pravé k levé do polohy AY, aneb od levé k pravé do polohy AY'.

Po algebraicku značíme tuto protivu znamením kladu a záporu ($\pm$), i jest ku př. směr od pravé k levé kladným, a od levé ku pravé záporným.

Úhel vzniklý otáčením $\left\{\begin{matrix}\text{kladným}\\ \text{záporným}\end{matrix}\right\}$ slove též $\left\{\begin{matrix}\text{kladný}\\ \text{záporný}\end{matrix}\right\}$.

4. V písmě znamená se úhel, jejž pevné rameno AX svírá s ramenem hybným AY, na spůsob několikerý, a sice:

a) udává se pouze vrchol A; pro větší jasnost klade se též $\sphericalangle A$;

b) píše se jiné písmeno, ku př. α, jež v obrazci do koutka úhlu se klade;

c) udávají se ramena úhlu tak, jako se vůbec přímky naznačují, a sice napřed rameno pevné a po něm rameno hybné, i píše se; α) buďto $\sphericalangle(a, b)$ čili $(a\hat{\ }b)$, kdežto a znamená přímku AX, b přímku AY; β) aneb $\sphericalangle(XA, AY)$ či $(XA\hat{\ }AY)$, a tehdy sluší pamatovati, že písmeno A vrchol znamenající pokaždé uprostřed položeno býti má; γ) aneb $\sphericalangle XAY$ čili XAY, což jest skráceno na místě spůsobu předešlého.

§. VIII.

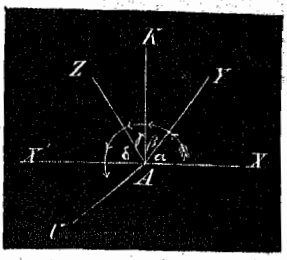
1. Dva úhly, které na sebe jsouce položeny ~~jeden druhým~~ pokryti se dají dokonale, slovou sobě *rovnými*, jinak jsou sobě *nerovny*; a z těchto jest větší ten, jehož část úhlem druhým zůstává nepokryta.

2. Čím více přímka AX (obr. 8.) od své původní polohy otáčením se odchyluje, tím více úhlu přibývá, i jest

$$XAY < XAK < XAZ < XAX' < XAU < XAX \text{ atd.}$$

3. Takto otáčená přibude AX i do polohy AX', jejíž směr jest původnímu protivný. Úhel XAX', jehož ramena mají směry protivné, slove úhel *přímý* (gerader, gestreckter Winkel).

obr. 8.



4. Úhel přímého menší slove *dutým* (concav); ku př. XAZ.

5. Úhel přímého větší slove *vypuklým* (convex); ku př. XAU.

6. Úhel, který jest roveň polovičce přímého, slove *pravým* (rectus, rechter W.) jako XAK, je-li totiž

$$XAK = KAX' = \frac{1}{2}\, XAX'.$$

7. Úhel dutý nejsa pravý slove *kosým* (obliquus, schief), a ten jest buď menší pravého, a slove *ostrým* (acutus, spitzig), ku př. XAY, aneb větší, a slove *tupým* (obtusus, stumpf) ku př. XAZ.

§. IX.

1. Přímka AK (obr. 8.) od jiné přímky základné v úhel pravý odchýlená slove *kolmou, kolmicí* (perpendicularis, Senkrechte, Lothrechte), někdy, obzvláště ve fysice, *svislou, prostopádnou*, i pravíme, že KA kolmo stojí na AX.

Mimo to sluší pamatovati tyto spůsoby proslovení. V bodě A *vztyčujeme* č. *stavíme* kolmici AK na přímku $X'X$; a s bodu K *spouštíme* (č. na bodě K *zavěšujeme*) kolmici KA na přímku (ku přímce) $X'X$.

2. Přímka AY neb AZ jinou mající odchylku od přímky základné $X'X$ než o úhel pravý, slove *šikmou* (schief) a stojí na $X'X$ *šikmo*.

3. Rozdíl úchylky kolmice a šikmé stanoví *sklon* (Neigung, inclinatio) přímky šikmé k přímce *základné*.

Poznam. Jinde nesprávně *sklon* s *odchylkou* se mate.

§. X.

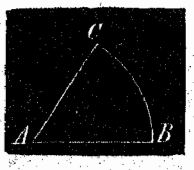
Za míru úhlů brává se:

a) buďto úhel přímý, jejž znamenáme $= 2R$.

b) aneb úhel pravý, jejž znamenáme písmenem R.

c) aneb úhel BAC (obr. 9.), jenž vznikl, když bod B přímky

obr. 9.



točené tak dlouhý *oblouk BC* v rovině opsal, jak veliká jest téhož bodu *B* od počátku *A* vzdálenost.

d) aneb 360tý díl dvojnásobného úhlu přímého, čili 90tý díl úhlu pravého. Této míře díme *stupeň* (Grad) a dělíme jej na 60 *minut*, minutu na 60 *sekund*, sekundu na 60 *tercií* úhlových, a znamenáme ku př. $57^0\ 18'\ 3''\ 34'''$ t. j. 57 stupňů, 18 minut, 3 sekundy, 34 tercií.

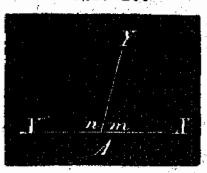
§. XI.

1. Dva úhly, mající týž vrchol a jedno rameno společné, slovou *stýkavými* č. *stečnými* (a. contigui) ku př. *XAY* a *YAZ* (obr. 8.) Takových úhlů stýkavých může i více po sobě býti ku př.

XAY, YAK, KAZ, ZAX', X'AU, atd. (obr. 8.).

2. Dva úhly stečné, jejichž vlastní (t. ne společná) ramena *AX* a *AX'* (obr. 10.) mají směr protivný, slovou *vedlejšími* (anguli deinceps positi, Nebenwinkel) ku př. *XAY* a *YAX'* (obr. 10.)

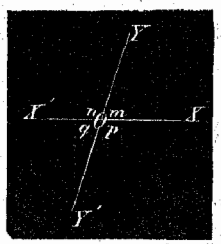
obr. 10.



3. Dva úhly, jejichž ramena z téhož vrcholu *O* (obr. 11.) mají směry protivné, slovou *vrcholovými* (verticales, Scheitelwinkel) ku př. *XOY* a *X'OY'*.

§. XII.

obr. 11.



Ze zásady: *Částky celku pospolu vzaté rovnají se celku*, plynou věty:

1. *Součet dvou úhlů vedlejších rovná se přímému čili dvěma pravým.* $m + n = 2R$ (obr. 10.)

Dodatek. Je-li jeden z vedlejších úhlů pravý, jest i druhý pravý.

2. *Součet všech úhlů stečných, jejichž krajná ramena AX a AX'* (obr. 8.) *mají směr protivný, rovná se přímému č. dvěma pravým.*

$$XAY + YAK + KAZ + ZAX' = 2R.$$

3. *Součet všech úhlů stečných, jejichž krajná ramena v jedno splývají* (kolem některého bodu *A*) *rovná se dvěma přímým č. čtyrem pravým*, ku př.

$$XAY + YAZ + ZAU + UAX' = 2.\ 2R = 4R \text{ (obr. 8.).}$$

Tyto věty dají se převrátiti, poněvadž úhel přímý jest veličina určitá, a sice:

4. *Rovná-li se součet dvou úhlů stečných přímému, mají jejich vlastní ramena směr protivný.*

Neboť kdyby jinak bylo, musel by součet částí úhlu buď dutého neb vypuklého rovnati se úhlu buď dutému neb vypuklému, nikoliv ale přímému.

5. *Rovná-li se součet všech úhlů stečných po sobě jdoucích úhlu přímému* $\left\{\begin{matrix}\textit{jednoduchému}\\ \textit{dvojnásobnému}\end{matrix}\right\}$, *mají krajná jejich ramena směr* $\left\{\begin{matrix}\textit{protivný}\\ \textit{týž}\end{matrix}\right\}$.

Důvod, jako svrchu v odst. 4.

§. XIII.

1. *Úhly vrcholové jsou si rovny* (obr. 11.).

Důkaz. $\left.\begin{matrix} m + n = 2R \\ n + q = 2R \end{matrix}\right\}$ §. XII. 1.

pročež i $m + n = n + q$, tudíž $m = q$.

Podobně vyplývá, že jest $n = p$.

2. *Dva úhly m a q mající vrchol O týž a dvě ramenou OX a OX' směru protivného, jsou-li sobě rovny, mají též druhé dvě ramenou OY a OY' směrem protivným* (obr. 11.).

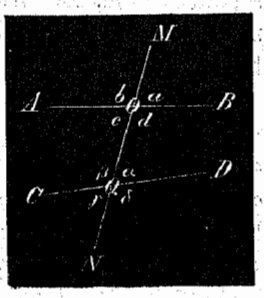
Důkaz. Poněvadž jest $m = q$, bude též $m + p = p + q$; poněvadž ale OX a OX' mají směr protivný, jest $p + q = 2R$; z těchto dvou rovnic vyjde $m + p = 2R$; pročež OY a OY' mají směr protivný (§. XII. 4.).

Knihy prvé část třetí.

Tré přímek. Rovno- a různoběžnost zvlášť.

§. XIV.

obr. 12.



1. Když v rovině dvě přímek AB a CD (obr. 12.) protne se přímkou MN, vznikne kol bodů průsečných O i Q dvakrát čtvero úhlů. Z každého čtvera po jednom berouce a na dvé skládajíce rozeznávejme:

a) úhly *přilehlé* (anliegende W.), kteréž na téže straně průsečné přímky MN položeny jsou, ku př. d i α, neb a i δ,

b) úhly *střídavé* (Wechselwinkel), které na protivných stranách přímky *MN* leží; ku př. a, β; a, γ.

Úhly *přilehlé* rozvrhujeme opět:

α) na úhly *souhlasné* (correspondirend), které jsou na souhlasných stranách přímek proťatých; totiž: a, α; b, β; c, γ; d, δ;

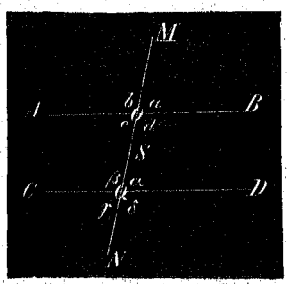
β) úhly *vnitřní* (innere), které na protivných, a to vnitřních stranách přímek proťatých leží; totiž: c, β; d, α;

γ) úhly *vnější* (äussere), ležící na jejich stranách vnějších: a, δ; b, γ.

Rovněž úhly *střídavé* jsou buď souhlasné (a, β; b, α; c, δ; d, γ), aneb vnitřní (c, α; d, β), aneb vnější (a, γ; b, δ).

§. XV.

obr. 13.



1. Kdykoliv se protínají dvě přímek AB a CD (obr. 13.) *přímkou jinou MN a z povstalých úhlů dva přilehlé i souhlasné sobě jsou rovny* (ku př. $a = \alpha$); *tehdy jsou sobě též rovny:*

a) kterékoliv jiné dva přilehlé úhly souhlasné ($b = \beta$; $c = \gamma$; $d = \delta$);

b) kterékoliv dva střídavé buď vnitřní ($c = \alpha$, $d = \beta$), *buď vnější* ($a = \gamma$, $b = \delta$);

mimo to rovná se úhlu přímému součet

c) kterýchkoli dvou přilehlých úhlů buď vnitřních ($d + \alpha = 2R$, $c + \beta = 2R$), *buď vnějších* ($b + \gamma = 2R$, $a + \delta = 2R$);

d) kterýchkoliv dvou střídavých úhlů souhlasných ($a + \beta = 2R$, $b + \alpha = 2R$, $c + \delta = 2R$, $d + \gamma = 2R$).

Důkaz. Přetnouce v mysli přímku *MN* v bodě *S* převeďme a položme vrchol *Q* na vrchol *O*, a přímku *CD* podél přímky *AB*, i padne nám, za příčinou rovnosti úhlu $a = \alpha$, přímka *SN* dokonale podél přímky *MS*, a úhlové $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pokryjí každý svůj souhlasný úhel přilehlý; pročež jest v skutku $b = \beta$, $c = \gamma$, $d = \delta$ . . . *a)*

Dále víme, že $c = a$, $d = b$ (§. XIII. 1.); dosadíme-li do těchto dvou rovnic místo a, b, c, d po jednom úhly souhlasné $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jim rovné; vyjde

$c = \alpha$, $d = \beta$, $\gamma = a$, $\delta = b$; . . . . . *b)*

Konečně jest (dle §. XII. 1.) $a + d = 2R$, $b + c = 2R$, $a + b = 2R$, $c + d = 2R$; do těchto rovnic dosadíce týmž spůsobem hodnoty stejné, obdržíme

$\alpha + d = 2R,\ \beta + c = 2R,\ a + \delta = 2R,\ b + \gamma = 2R\ \ldots\ c)$
$a + \beta = 2R,\ \alpha + b = 2R,\ c + \delta = 2R,\ \gamma + d = 2R\ \ldots\ d)$

2. Setrvajíce při obr. 13. a jeho znameních, jako v odstavci 1. pronášíme větu:

Kdykoliv z následujících 16 rovnic některá jest $\left\{\begin{matrix}\textit{pravá}\\ \textit{nepravá}\end{matrix}\right\}$,

jsou $\left\{\begin{matrix}\textit{pravými}\\ \textit{nepravými}\end{matrix}\right\}$ *všechny.*

$$\text{I.}\begin{pmatrix}1)\ a=\alpha\\ 2)\ b=\beta\\ 3)\ c=\gamma\\ 4)\ d=\delta\end{pmatrix};\quad \text{II.}\left\{\begin{matrix}5)\ c=\alpha\\ 6)\ d=\beta\end{matrix}\right\};\quad \text{IV.}\left\{\begin{matrix}9)\ \alpha+d=2R\\ 10)\ \beta+c=2R\end{matrix}\right\};\quad \text{VI.}\begin{pmatrix}13)\ a+\beta=2R\\ 14)\ b+\alpha=2R\\ 15)\ c+\delta=2R\\ 16)\ \gamma+d=2R\end{pmatrix}$$

$$\text{III.}\left\{\begin{matrix}7)\ \gamma=a\\ 8)\ \delta=b\end{matrix}\right\};\quad \text{V.}\left\{\begin{matrix}11)\ a+\delta=2R\\ 12)\ b+\gamma=2R\end{matrix}\right\};$$

Důkaz. A) Je li $a = \alpha$, platí všech 16 rovnic, jakož v odst. 1. již dokázáno. Rozumí se, že i věta i týž spůsob důkazu setrvá, jinou-li kteroukoliv rovnici ze skup. I. napřed za pravou vyhlásíme.

Buď ze skup. II. rovnice $c = \alpha$, tehdy jest $c = a$ (§. XIII. 1.), pročež $a = \alpha$, a tudíž všech 16 rovnic pravých dle odst. 1.

Buď ze skup. III. $\gamma = a$, tehdy jest $\gamma = \alpha$, (§. XIII. 1.) pročež $a = \alpha$, pročež všecky rovnice pravé dle odst. 1.

Buď ze skup. IV. $\alpha + d = 2R$, tehdy jest $a + d = 2R$, (§. XII. 1.), pročež $a + d = \alpha + d$, odkudž na obou stranách d odejmouce, obdržíme $a = \alpha$, pročež všechny rovnice jsou pravé (odst. 1.).

Buď ze skup. V. $a + \delta = 2R$, tehdy jest opět $a + \delta = 2R$ (§. XII. 1.), pročež $a + \delta = \alpha + \delta$, a tím $a = \alpha$, všechny rovnice jsou pravé (odst. 1.).

Buď konečně ze skup. VI. $a + \beta = 2R$, tehdy jest $\beta + \alpha = 2R$ (§. XII. 1.), pročež i $a + \beta = \beta + \alpha$, a tím $a = \alpha$, pročež opět dle odst. 1. všechny rovnice jsou pravé.

B) Co se druhé části položené zde věty, t. *nepravosti* rovnic týče, vysvítá z dokázané části prvé. Neboť kdyby nebyly *všecky* rovnice nepravými, musela by aspoň *jedna* z nich býti *pravou*: tehdy však by musely býti pravými všecky, a mezi nimi i ta nepravá, což jest nemožná.

3. Čtenář hleď ještě dokázati: Je-li (obr. 12.) $a > \alpha$, musí též býti $c > \gamma$, $b < \beta$, $d < \delta$, $\alpha + d < 2R$, $c + \beta > 2R$.

§. XVI.

1. *Kdykoliv dvě přímek rovnoběžných* $AB \parallel CD$ (obr. 13.) *jinou přímkou* MN *se protíná, jsou přilehlé úhly souhlasné sobě rovny;* a naopak:

2. *Kdy-koliv přilehlé úhly souhlasné sobě jsou rovny, jsou dvě přímky, jinou přímkou proťaté, rovnoběžnými.*

Pravost těchto dvou vět plyne z ponětí o rovnoběžnosti a úhlu. Zajisté přímky AB i CD jsouce rovnoběžnými mají týž směr, a týž směr majíce musí od jiné přímky MN, a tato od nich v tuže stranu *rovnou měrou* t. *o rovnou část* odchýleny býti; tato odchýlka jest ale úhel; pročež je-li $AB \parallel CD$, musí též býti $\alpha = \alpha$. — Naopak jsou-li přímky AB i CD od přímky MN v tuž stranu *rovnou měrou* t. o *rovnou část* odchýleny, nemůže býti rozdílu mezi jejich vlastníma směroma, přímky tedy mají směr týž, jsou *rovnoběžné* t. j. je-li $\alpha = \alpha$, jest i $AB \parallel CD$.

3. Z těchto dvou vět 1. a 2. a z §. XV. vyplývá toto souvětí:

a) kdykoliv 2 přímky AB a CD jsou { *rovnoběžné* / *různoběžné* }, *jest veškerých 16 rovnic v §. XV. 2. položených* { *platných* / *neplatných* };

b) kdykoliv některá a kterákoliv rovnice v §. XV. 2. položená, jest { *pravá* / *nepravá* }, *jsou přímky AB a CD* { *rovnoběžné* / *různoběžné* } (obr. 13.12.)

4. V tomto souvětí obsaženo jest 4krát šestero vět zvláštních, z nichž některé zde klademe, zůstatní by pronesl, čtenářovi zůstavujíce; a sice:

a) Souhlasné úhly přilehlé mezi rovnoběžnými jsou si rovny.

b) Vnitřní úhly střídavé mezi rovnoběžnými jsou si rovny.

c) Vnitřní úhly přilehlé mezi rovnoběžnými, pospolu vzaté, rovnají se úhlu přímému čili dvěma pravým.

d) Jsou-li mezi přímkama souhlasné úhly přilehlé sobě rovny, jsou přímky rovnoběžné.

e) Jsou-li mezi přímkama vnitřní úhly střídavé sobě rovny, jsou přímky rovnoběžné.

f) Rovná-li se součet vnitřních úhlů přilehlých úhlu přímému čili dvěma pravým, jsou přímky rovnoběžné.

g) Je-li součet vnitřních úhlů přilehlých roveň úhlu kosému, jsou přímky různoběžné.

5. Čtenář vysvětlí si též pravost výsledných vět těchto:

a) Dvě přímky, stojíce kolmo na téže přímce jiné, jsou spolu rovnoběžné.

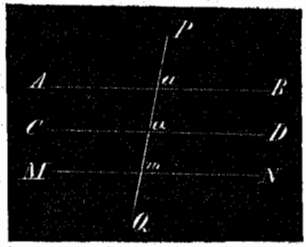
b) Stojí-li jedna ze dvou přímek rovnoběžných { kolmo / šikmo } na přímce jiné, stojí na téže přímce i druhá z nich { kolmo / šikmo }.

§. XVII.

1. *Dvě přímky AB i CD* (obr. 14.), *z nichž jedna i druhá jest rovnoběžná s přímkou třetí MN, jsou též spolu rovnoběžné.*

Neboť přímky AB i CD majíce týž směr, co přímka MN, mají nezbytně směr jednostejný: pročež jsou rovnoběžné.

obr. 14.



Jiným spůsobem dokáže se věta takto: protněme přímkou PQ dvě krajné z těchto tří přímek, tehdy se protne dozajista i přímka vnitřní; z podpovědi $AB \parallel MN$ a $CD \parallel MN$ plyne $a=m, \alpha=m$, (§. XVI. 1.); pročež $a=\alpha$, tudíž $AB \parallel CD$ (§. XVI. 2.)

2. *Jsou-li bodem O* (obr. 15.) *vedeny dvě přímky rozbíhavé, a z nich jedna ($A'B'$) rovnoběžně s přímkou třetí (CD), bude druhá (AB) s třetí různoběžná.*

obr. 15.

Důkaz. Bodem O veď OQ i jest $\alpha + QOB' = 2R$ (§. XVI. 4. c.), dále jest zřejmo, $QOB < QOB'$ pročež i $\alpha + QOB < \alpha + QOB'$, čili $\alpha + QOB < 2R$, pročež jsou přímky AB a CD různoběžné (§. XVI. 4. *g.*).

3. Výsledek. *Jedním bodem lze toliko jednu přímku vésti rovnoběžně s přímkou jinou.*

§. XVIII.

1. *Přímky různoběžné sbíhají se v tu stranu, na které součet přílehlých úhlů vnitřních jest přímého čili dvou pravých menší.*

Buď (obr. 15.) $\alpha + d < 2R$; tehdy hleďme úhel d zvětšiti, až by součet vnitřních úhlů přílehlých roveň se stal přímému, což dejme tomu že jest, když přímka AB do polohy $A'B'$ přijde. Od této polohy odchyluje se původní OB dovnitř ku přímce CD, a OA na ven od přímky DC: z čehož jest patrno, že přímky AB i CD v tu stranu se sbíhají, jakož větou tvrzeno jest.

2. Ze *stálosti směrů* přímek OB a QD (obr. 15.) sbíhavých vyplývá, že blížíce se k sobě konečně se musí v některém bodě *setkati*. Tuto větu bez důkazu za pravou přijímáme, za patrnou a zřejmou ji uznávajíce.

Z ní pak vyplývá:

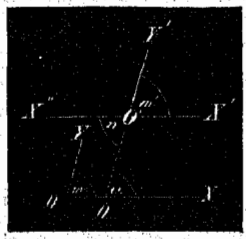
3. *Přímka MS* (obr. 13.), *která ze dvou rovnoběžných jednu (AB) protíná, protne, jsouc dostatečně prodloužena, i druhou (CD).*

Neboť poněvadž jest $AB \parallel CD$, a přímka MS s přímkou AB různoběžná, pročež jest MS i s CD přímka různoběžná (§. XVII. 2.), tudíž se obě musí spolu setkati (odst. 2.).

§. XIX.

1. *Dva úhly, jichž ramena vzájemně jsou rovnoběžná a mají směr buď obě souhlasný aneb obě protivný, jsou si rovny.*

obr. 16.



Buď (obr. 16.) $OX' \parallel OX$, $OY' \parallel OY$; tehdy majíce ramena úhlů m' a m vzájemně týž směr, musí jednoho úhlu rameno od ramena druhého stejnou míti v tuže stranu odchylku, jako při úhlu druhém t. j. $m'=m$.— Jsou-li ale směry protivné, jako $OX \parallel X''O'$, $OY \parallel QO'$; vznikne prodloužením ramenou $X''O'$ a QO' úhel vrcholový, i jest $n=m'$ (§. XIII. 1.); avšak $m'=m$, pročež i $n=m$.

Jiným spůsobem lze důkaz vésti — ač jsou-li m' a m v jedné rovině — takto: Rameno $Y'O'$ prodloužíme, až se setká s ramenem OX v bodě Q; jest pak $m'=\alpha$, $\alpha=m$ (§. XVI. 1.) pročež $m'=m$.

2. *Dva úhly, jichž ramena vzájemně jsou rovnoběžná, ale jedno dvě má směr souhlasný, a druhé dvě směr protivný, rovnají se pospolu vzatému úhlu přímému.*

Důkaz této i následující věty zůstaven čtenářovi.

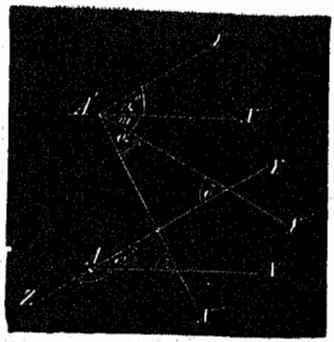
3. *Jsou-li dvě ramena sobě rovných úhlů rovnoběžná, jsou i druhá dvě ramena jejich spolu rovnoběžná.*

4. *Dva úhly, jichž ramena střídavě, t. j. jak hybná tak pevná o stejně veliký úhel v tuže stranu jsou odchýlena, jsou si buď rovny aneb činí úhrnem dva pravé úhly, a sice: vzniknou-li oba úhly tyto odchýlením se ramenou hybných od ramenou pevných směrem* **souhlasným**, *tehdy si jsou rovny; vzniknouli ale odchýlením se* **protivným** *směrem, činí dva pravé.*

Důkaz. Úhly $XAY=\alpha$, $X'A'Y'=\alpha'$ (obr. 17.) buďtež vzniklé souhlasným otáčením hybných ramenou AY a $A'Y'$ o body A a A', počínajíc od ramenou pevných AX a $A'X'$; dále buďtež jak pevná tak hybná ramena od sebe odchýlena v tuže stranu o úhel stejně veliký; tedy $\delta=\varepsilon$: i máme dokázati, že jest $\alpha'=\alpha$. K tomu konci

popošiňme v mysli celý úhel XAY neměníce velikosti jeho, tak aby vrchol A padl na bod A', a rameno AX nezměnivši směru svého nabylo polohy $A'X'' \parallel AX$; rameno druhé AY přijde tu do polohy $A'Y''$, i bude $A'Y'' \parallel AY$ (§. XIX. 3.), neboť jest $\alpha''=\alpha$. Nyní jest patrně $\delta=\alpha''+m$ a $\varepsilon=\alpha'+m$ (§. XVI. 4. b.), a poněvadž jest $\delta=\varepsilon$, pročež z obou těchto rovnic vychází $\alpha''+m=\alpha'+m$; a na obou stranách odejmeme-li m, dostaneme $\alpha''=\alpha'$, čili, poněvadž $\alpha''=\alpha$, konečně $\alpha=\alpha'$, jakož bylo dokázati.

obr. 17.



Kdyby však úhel A vzniknul byl otáčením protivným, jako XAZ, tu bychom měli: $XAZ+\alpha=2R$, $\alpha=\alpha'$ pročež $XAZ+\alpha'=2R$.

5. Je-li $\delta=\varepsilon=R$, zní hořejší (4.) věta takto: *Dva úhly, jichž ramena střídavě kolmo na sobě stojí, jsou si buď rovny aneb činí pospolu úhel přímý, a sice: vzniknou-li oba odchýlením se ramenou hybných od ramenou pevných, jež kolmo na sobě stojí, směrem* **souhlasným,** *jsou si rovny; vzniknou-li odchylkami směrů* **protivných,** *činí úhel přímý.*

V tomto druhém případě jest jeden úhel ostrý, druhý tupý. Víme-li napřed, že oba úhly jsou buď ostré, neb oba tupé, nemůže místa míti případ druhý, nébrž prvý případ jest nezbytný, a pročež můžeme pronésti tyto věty:

a) Dva ostré úhly, jejichž ramena střídavě na sobě kolmo stojí, jsou si rovny;

b) Dva tupé úhly, jejichž ramena střídavě na sobě kolmo stojí, jsou si rovny.

6. *Dvě přímky, jimaž se vnitřní úhly přilehlé dvou přímek rozbíhavých rozpolují, jsou sbíhavými v tutéž stranu, v kterou dané přímky se rozbíhají.*

Důkaz. V obr. 18. buďtež AX a BY přímky rozbíhavé; XAB a YBA úhly uvnitř přilehlé; dále buďtež AU a BV přímky rozpolovací; pročež jest $BAU=\frac{1}{2}BAX$; a $ABV=\frac{1}{2}ABY$; jest však $BAX<2R$, $ABY<2R$, pročež $\frac{1}{2}BAX<R$, $\frac{1}{2}ABY<R$, tedy i $BAU<R$, $ABV<R$, pročež $BAU+ABV<2R$, a z té příčiny jsou AU a BV přímky sbíhavé (§. XVIII.).

obr. 18.

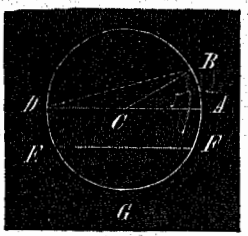
Přídavek k prvé knize.

Kruh. Místo geometrické.

§. XX.

1. Křivka v rovině, jejíž veškeří bodové od určitého v téže rovině bodu C (obr. 19.) stejnou mají vzdálenost ($CA = CB = CD =$ atd.), slove *kružnicí* (Kreislinie); rovná plocha jí obmezená jmenuje se *kruh* (Kreis, circulus); zmíněný bod C slove *středem* (centrum, Mittelpunkt) kruhu. Však i kružnici, ale jen tehdy, když by tím nevznikl zmatek, říkáme jednoduše *kruh*.

obr. 19.



2. Vznikne pak kružnice stopou, již ostaví po sobě konec A přímky CA kolem svého počátku C otočené; a plocha rovná, jíž tehdy proběhne přímka otočená, jest kruh.

3. Majíce zřetel k omezené *ploše* kruhové, zoveme kružnici *obvodem* (peripheria) a přihlížejíce k měření její délky též *obměrem* (perimeter) kruhu.

4. Přímka vedená ze středu k některému bodu na obvodě, slove *paprsek* (radius), když ku směru, a *poloměr* (semidiameter, Halbmesser), když k délce její hledíme.

5. Každá část křivky jmenuje se *oblouk* (arcus, Bogen); část kružnice slove *oblouk kruhový* (Kreisbogen).

6. Přímka EF vedená od jednoho konce oblouka ku druhému slove *tetiva* (chorda, Sehne); i pravíme, že *se tetivou oblouk napíná*. Tetiva středem kruhu procházející (ku př. DA) nazývá se *průměr* (diameter, Durchmesser).

7. Část kruhu omezená tetivou a obloukem (ku př. EGF) slove *úseč* nebo *skrojek* (segmentum, Abschnitt) kruhu. Tetivou přetíná se kruh na dvě úseče.

8. Část kruhu omezená dvěma poloměry a obloukem (ku př. ABC) slove *výseč* č. *výkrojek* (sector, Ausschnitt) kruhu.

9. Úhel, jehož vrchol leží ve středu kruhu, slove *středným* (Centriwinkel) ku př. ACB; a úhel, jehož vrchol leží na obvodě kruhu, slove *obvodovým* (Peripherienwinkel) ku př. ADB.

§. XXI.

1. *Kruh jest určen středem a poloměrem svým.*

K sestrojení kruhu slouží *kružidlo*.

2. *Všechny poloměry téhož kruhu jsou si rovny t. j. mají délku stejnou.*

Plyne z ponětí o kruhu.

3. *Vzdálenost kteréhokoliv bodu uvnitř kruhu jest menší a vzdálenost kteréhokoliv bodu za kruhem jest větší než poloměr;*

pročež naopak:

4. *Bod leží buď na obvodě, buď uvnitř kruhu, buď mimo kruh, je-li jeho od středu vzdálenost aneb rovna poloměru, aneb menší aneb větší.*

5. *Průměr jest roveň dvojnásobnému poloměru;* odtud jméno poloměru. Pročež

6. *Všechny průměry téhož kruhu jsou si rovny.*

7. *Průměrem přetíná se kruh na dvě části sobě rovné čili na dva* **polokruhy** (Halbkreise). Neboť otočíme-li jednu část kolem průměru, splyne s částí druhou za příčinou rovnosti všech poloměrů.

8. *Každou jinou tetivou přetíná se kruh na dvé části nerovných; ve větší leží střed.*

§. XXII.

1. *Geometrické místo* (geometrischer Ort) jest nepřetržitá soustava čili osnova bodů (pročež čára neb plocha), z nichž jedenkaždý, avšak mimo ně nižádný jiný, určité podmínce zadost činí.

2. Za místa geometrická dají se pojmouti takové výměry (definice) a takové věty naučné, v kterých se nějaká vlastnost výhradně přikládá celému pásmu bodů, t. každému bodu některé čáry neb plochy; ku př. výměr kruhu:

3. *Pro všechny body, které od bodu určitého C* (obr. 19.) *mají vzdálenost určitou* r, *jest místem geometrickým kruh opsaný kolem středu C poloměrem* r.

4. Týž výměr kruhu vede nás k této větě: *Geometrické místo pro středy všech kruhů, kteří jsouce opsáni určitým poloměrem* r, *mají probíhati určitým bodem A, jest kruh týmž poloměrem* r *kolem středu A opsaný.*

5. Poznavše některé místo geometrické čerpáme z něho ihned pravidlo k potřebám výkonu. Z odst. 3. plyne pravidlo toto:

Kdykoliv hledáš bod, jenžby od určitého bodu C měl určitou vzdálenost r, *vykresli poloměrem* r *kolem středu C kruh, a na jeho obvodě hledej bod žádaný.*

Tak i z věty 4. važíme pravidlo:

Kdykoliv hledáš střed kruhu, jenž o poloměru určitém r *má*

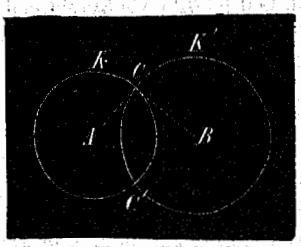
procházeti bodem určitým A, vykresli poloměrem r kolem středu A kruh; i leží na jeho obvodě střed, jejž hledáš.

6. Samo sebou jest patrno, kterak známost geometrických míst ku řešení úloh je prospěšna. Neboť tehdy záleží obyčejně na tom, abychom našli některý bod, jenžby vyhověl jistým podmínkám. Známe-li dvě jeho místa geometrická, a umíme-li je sestrojiti, vyskytne se nám i bod hledaný, ležící tam, kde místa tato spolu se protínají. Příklad v následujícím §. vysvětlí to lépe.

§. XXIII.

Úloha: Na rovině dané vyhledej bod, jenžby ode dvou bodů daných A i B měl vzdálenosti dané b i a.

obr. 20.



Sestrojení: Kolem středu A (obr. 20.) opiš poloměrem b kruh K, a kolem středu B poloměřem a kruh K'; průsečný bod C neb i C' jest bod žádaný.

Důkaz: AC jest poloměr kruhu K, pročež $AC=b$; BC jest poloměr kruhu K', pročež $BC=a$. Taktéž je $AC'=b$, $BC'=a$

2. Ku cvičení stůjte zde ještě úlohy tyto:

a) Vyhledej bod, jenžby ode dvou určitých bodů A i B (obr. 20.) měl stejnou vzdálenost r.

b) Ku dvěma bodům určitým A i B vyhledej bod třetí, tak, aby všickni tři bodové jeden ode druhého měli stejnou vzdálenost.

c) Daným poloměrem r vykresli kruh, jenžby procházel dvěma bodoma A i B; aneb:

d) Sestroj kruh, dány-li jsou tetiva dle své polohy i dle délky své, a poloměr dle délky své.

e) Na přímce neb na kruhu daném najdi bod, jenžby od nějakého bodu A měl určitou vzdálenost.

Knihy druhé část prvá.

O obrazcích přímočarých vůbec.

§. XXIV.

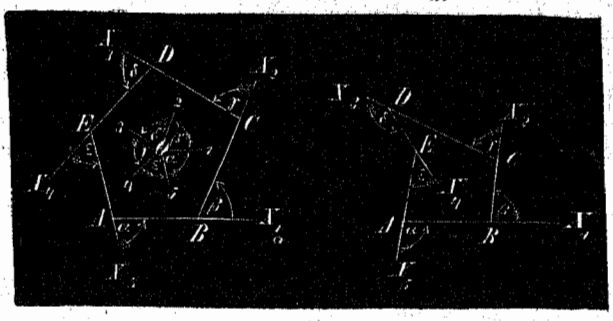
K omezení plochy přímkami jest třeba aspoň tří různoběžných přímek. Vznik obrazce přímočarého lze si pak mysliti na spůsob trojí, a po vzniku svém jmenují se obrazcové buď *mnohoúhelníky*, neb *mnohostrany*, aneb *mnohohrany*.

A. O mnohoúhelnících.

§. XXV.

1. Z přímky AX_1 (obr. 21.) sřízni určitou část AB; BX_1 otáčej o B, až dojde polohy BX_2; sřízni BC, CX_2 otáčej o C do po-

a. obr. 21. b.



lohy CX_3 atp. až otáčená přímka opět bodem A prochází, majíc směr EX_5, od této sřízni EA, otáčej AX_5 o A do původní polohy AB. Omezená plocha $ABCDEA$ tímto spůsobem vzniklá slove *mnohoúhelník* (Polygon); úhly β, γ, δ, ε, α točením z jedné polohy do následující polohy povstalé slovou *úhly vnějšími* (äussere), a jejich vedlejší úhlové (ku př. ABC) uvnitř plochy nazývají se *vnitřními* (innere) úhly mnohoúhelníka. — Vrcholové řečených úhlů slovou též hranami (Ecke) a přímky AB, BC atd., jimiž se plocha omezuje, *stranami* (Seiten) mnohoúhelníka. — Dle počtu vnitřních úhlů rozeznáváme *troj-, čtyr-, petiúhelník* atd. Zároveň jest patrno: *kolik v mnohoúhelníku jest úhlů, tolik jest tam i hran i stran.*

2. Jsou-li veškeré úhly vnitřní a veškeré strany sobě rovny, slove mnohoúhelník *pravidelný* (regulär).

3. Otáčení přímky AX děje se buď ve všech částech jedním směrem (obr. 21. a) aneb v některé neb některých částech i směrem protivným jako v bodě E (obr. 21. b). V prvém případě vzniknou uvnitř úhly vesměs duté; změníme-li ale na kteréms místě otáčecí směr, nabudeme tam úhlu vypuklého (jako $\sphericalangle DEA$ v obr. 21. b), jenž i úhlem vbíhajícím (einspringender W.) slove; vnější úhel X_4EA v tomto případě jest *záporný* (§. VII. 3) a padne dovnitř plochy.

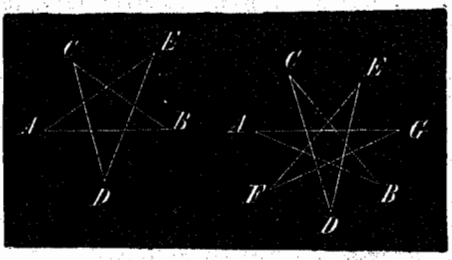
V trojúhelníku není vypuklých úhlů vnitřních.

4. V těchto případech (obr. 21.) otočili jsme přímkou, než do původní polohy přišla, z úplna *jednou* kolem, a nikde jsme ji

neprodloužili tak silně, žeby protínala stranu již hotovou. Takové mnohoúhelníky nazýváme *obecnými* neb *m. prvého řádu.*

5. Vedle obecných mnohoúhelníků zasluhují povšimnutí *hvězdovité č. m. řádů vyšších* (Sternpolygone), jež vzniknou, otočíme-li přímkou, než do původní polohy přijde a obrazec uzavře, *dva i vícekráte,* jako ku př. pětiúhelník řádu 2ho (obr. 22. a) jenž dvojnásobným, neb sedmiúhl. řádu třetího (obr. 22. b). jenž trojnásobným otočením vzejde.

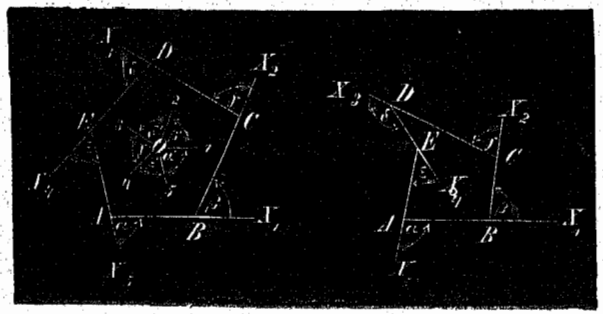
a. obr. 22. b.



§. XXVI.

1. *V mnohoúhelníku obecném rovná se součet vnějších úhlů dvěma přímým č. čtyrem pravým.*

a. obr. 21. b.



Důkaz. a) Vnější úhly vznikly odchylováním se přímky od svého původního směru; a poněvadž přímka, než se obrazec uzavřel, z úplna jednou kolem otočiti se musela, aby veškeré tyto úhly vnější vzešly, a poněvadž úplným takovým otočením vznikne úhel dvojnásobnému přímému rovný: pročež součet jejich v skutku jest $2.2R=4R$.

b) K lepšímu vyjasnění stůj zde důkaz jiný. Buďtež nejprv všechny vnitřní úhly duté, jako v obr. 21. a. Z některého bodu O veď přímky ku stranám rovnoběžné, $O_1 \parallel AX_1$, $O_2 \parallel BX_2$ atd. i jsou pak jejich od sebe odchylky střídavě rovny úhlům vnějším $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$, $\delta'=\delta$, $\varepsilon'=\varepsilon$, $\alpha'=\alpha$ (§. XIX. 1.); tyto rovnice sečetše máme:

$$\beta'+\gamma'+\delta'+\varepsilon'+\alpha'=\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha;$$

Jest ale

$$\beta'+\gamma'+\delta'+\varepsilon'+\alpha'=4R \text{ (§. XII. 3.)};$$

pročež i

$$\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha=4R.$$

Totéž platí o mnohoúhelníku s úhly vbíhajícími (obr. 21. b), jen že příslušný úhel ε musí brán býti *záporně*, t j.

$$\beta+\gamma+\delta-\varepsilon+\alpha=4R.$$

2. Poněvadž každým úplným otočením přímky vznikne úhel, jenž jest roveň čtyrem pravým; pročež jest *součet úhlů vnějších v mnohoúhelníku hvězdovitém* — který vznikl otáčením přímky směrem jednostejným — *roveň tolikkráte 4R, kolikkrát se přímka otočila, než původního směru opět nabyla.* Ku př. V obr. 22. a. činí tento součet $2.4R=8R$, v obr. 22. b. činí $3.4R=12R$, a vůbec otočila-li se přímka m-krát, jest součet ten $= m.4R=2m.2R$.

§. XXVII.

1. V každém mnohoúhelníku činí úhel vnitřní se svým vedlejším vnějším pospolu $2R$ (§. XII. 1.); nevyjímaje ani úhel vypuklý, poněvadž se v tom případě jeho vedlejší úhel ε (obr. 21. b.) béře záporně. Pročež má-li mnohoúhelník n úhlů vnitřních a tolikéž vnějších; bude součet všech jeho úhlů i vnitřních i vnějších obnášeti $= n.2R$. Odtud odejme-li se součet S úhlů vnějších, obdržíme

$$\Sigma=n.2R-S$$

součet Σ úhlů vnitřních.

Tím způsobem poznáváme:

1. *V n-úhelníku obecném obnáší součet úhlů vnitřních* $=n.2R-4R$, *čili* $=(n-2).2R$: *Pročež*

a) v trojúhelníků $=(3-2).2R=2R$
b) v čtyrúhelníků $=(4-2).2R=4R$
c) v pětiúhelníků $=(5-2).2R=6R$
d) v šestiúhelníků $=(6-2).2R=8R$ atd.

2. *V* n-*úhelníku hvězdovitém* m-*tého řádu, (který vznikl* m-*násobným otočením přímky), jest součet úhlů vnitřních*

$$=n.2R-2m.2R$$

čili $=(n-2m)2R$; *pročež*

a) V 5-úhelníku 2ho řádu (*t. j.* $m=2$) jest tento součet $(5-2.2)2R=2R$.

b) V 7-úhelníku 2ho řádu ($m=2$) jest $=(7-2.2)2R=6R$.

c) V 7-úhelníku 3ho řádů ($m=3$) jest $=(7-2.3).2R=2R$. atd.

§. XXVIII.

V pravidelném n-úhelníku činí každý vnitřní úhel n-tou část celého součtu úhlů vnitřních, pročež jest jeho velikost:

1. v obecném n-úhelníku pravidelném $=\frac{n-2}{n}.2R$, pročež v ob. trojúhelníku prav.

$$=\frac{3-2}{3}.2R=\frac{1}{3}.2R=60^0$$

v ob. čtyrúhelníku prav.

$$=\frac{4-2}{4}.2R=R=90^0$$

v ob. pětiúhelníku prav.

$$\frac{5-2}{5}.2R=\frac{3}{5}.2R=108^0 \text{ atd.}$$

2. Ve hvězdovitém n-úhelníku pravidelném m-tého řádu $=\frac{n-2m}{n}.2R$; pročež ku př. v pětiúhelníku 2ho řádu

$$=\frac{5-4}{5}.2R=\frac{2}{5}.R=36^0.$$

Dodatek. Podobné platí o úhlích *vnějších* n-úhelníku pravidelných.

§. XXIX.

1. Dva úhly, neb dvě hrany, které v mnohoúhelníku jednou stranou jsou spojeny, slovou *sousedné*; ku př. A i B (obr. 21.)

Rovněž *sousednými* nazývají se strany, které mají společnou hranu; ku př. AB a BC (obr. 21.)

Hrany, úhly a strany, které nejsou sousedné, slovou vůbec *protějšími*. Každá přímka z některého bodu na obvodě k jinému bodu na obvodě vedená slove *příčná* (Transversale), obzvláště, je-li jeden z těchto dvou bodů vrcholem, čili hranou. Jde-li příčná hranama protějšíma, slove *úhlopříčná* (Diagonale).

2. V n-úhelníku lze vésti od každé hrany ke všem protějším, pročež k $(n-3)$ hranám tolikéž $(n-3)$ úhlopříčných: pročež by bylo množství všech úhlopříčných $n(n-3)$, avšak v tomto počtu jest každá úhlopříčná počítána dvakrát, totiž od A k C a od C k A vedená; i jest tedy *pravý počet všech úhlopříčných v* n-*úhelníku* $=\frac{n(n-3)}{2}$; pročež v trojúhelníku $=\frac{3(3-3)}{2}=0$

v čtyrúhelníku $=\frac{4(4-3)}{2}=2$

v pětiúhelníku $=\frac{5(5-3)}{2}=5$ atd.

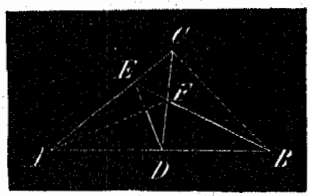
B. O mnohostranech.

§. XXX.

1. Prodloužíme-li n přímek různoběžných, jejichž poloha nám jest dána, až se protnou: obdržíme obrazec uzavřený, jemuž díme n-*stran* (*mnohostran*, Vielseit).

Dle počtu těchto přímek, jimž *strany* (Seiten) díme, rozeznáváme *troj-*, *čtyr-* *pětistran* atd. Obr. 23. podává tvar čtyrstranu.

obr. 23.



Body A, B, C, D, E, F, kde se strany protínají, slovou *hranami* (Ecke) n-stranu. Hrany, které neleží v jedné přímce, slovou *protějšími* (ku př. A a F).

Přímky protějšíma hranama probíhající, jmenují se *úhlopříčné*, jako: AF, ED, CB.

2. Mnohostran tuto popsaný slove *úplným* (vollständig) a skládá se z mnohostranů *jednoduchých* (einfach), jichž lze nabyti tahem nepřetržitým; ku př. v obr. 23. jsou čtyrstrany jednoduché $AEFDA$, $FBDCEF$, $ACFBA$.

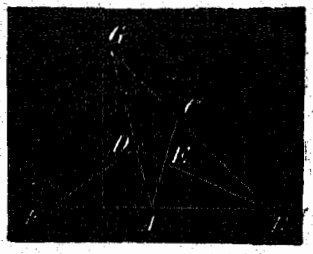
3. Poněvadž každá z daných přímek různoběžných s každou jinou se protne, vznikne na této přímce $(n-1)$ hran, pročež na všech stranách mělo by vzejíti $n(n-1)$ hran; v tomto počtu jest však každá hrana počítána dvakráte, pročež jest počet všech hran v n-stranu $=\frac{n(n-1)}{2}$, ku př. ve čtyrstranu $\frac{4.3}{2}=6$.

4. Počet úhlopříčných $=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ vyhledati zůstavuje se pilnému čtenáři

C. O mnohohranech.

§. XXXI.

obr. 24.



1. Spojíme-li přímkami n bodů daných (hran, Ecke), jež v různých směrech leží, vznikne nám n *hran* (mnohohran, Vieleck).

Dle počtu hran (A, B, C, D obr. 24.) rozeznáváme *troj-*, *čtyr-*, *pětihran* atd. Obr. 24. poskytuje tvar čtyrhranu.

Přímky, jimiž se hrany A, B, C, D spojují, slovou *strany* (AB, AC, AD, BC, CD). Strany, které nemají společné hrany, slovou *protějšími* (DB a AC, DC a AB, AD a BC).

2. Prodloužíme-li strany protější, až se protnou, obdržíme *průseky* stran (E, F, G).

Mnohohran tutu popsaný slove *úplný* a skládá se z *jednoduchých* nepřetržitým tahem vznikajících, jako jsou: $ABCDA$, $ABDCA$, $ADBCA$.

3. Všech stran v n-hranu jest $=\frac{n(n-1)}{2}$; avšak průseků jest $=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$, což odůvodniti zůstaveno jest pilnému čtenáři.

Knihy druhé část druhá.

O trojúhelníku vůbec.

§. XXXII.

1. *V trojúhelníku jest součet úhlů vnitřních přímému roveň.*

obr. 25.

Mimo důkaz v §. XXVII. 1. vedený stůj zde ještě tento zvláštní: Vrcholem A (obr. 25.) trojúhelníka ABC veď $B'C' \parallel BC$, i jest pak $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$ (§. XVI. 4. b); pročež

$$\beta'+\alpha+\gamma'=\beta+\alpha+\gamma;$$ avšak

$$\beta'+\alpha+\gamma'=2R,$$ (§. XII. 2); tedy též

$$\beta+\alpha+\gamma=2R.$$

2. V trojúhelníku ABC (obr. 25.) nazývají se vnitřní úhly α i β, které nejsou k vnějšímu úhlu ω vedlejší, *protějšími:* i platí o nich věta:

V trojúhelníku rovná se úhel vnější součtu vnitřních úhlů protějších.

Důkaz. Vrcholem A (obr. 25.) buď vedena s podstavou BC rovnoběžná $B'C' \parallel BC$, i jest $\omega=\beta'+\alpha$, $\beta=\beta'$ (§. XVI. 4. b), pročež $\omega=\beta+\alpha$.

3. *Výsledky:* a) V trojúhelníku může toliko jeden úhel býti pravý neb tupý, aspoň dva úhly jsou ostré.

b) Je-li jeden úhel pravý, jest součet zůstatních dvou též pravému roveň.

c) Je-li součet dvou úhlů trojúhelníka roveň úhlu třetímu, jest tento třetí úhel pravý.

d) Je-li jeden úhel v trojhranu tupý, jest součet druhých dvou menší pravého.

e) Jsou-li všichni tři úhlové ostří, jest součet kterých-koliv dvou větší, než úhel pravý.

f) Úhel vnější v trojuhelníku jest větší protějšího vnitřního.

g) Mají-li dva trojúhelníky po dvou úhlech sobě rovných, jsou i třetí úhly jejich sobě rovny.

h) Jsou-li dva úhly v trojúhelníku známy, dá se třetí vypočísti, i lze jej též pokládati za známý.

§. XXXIII.

1. Dle velikosti největšího úhlu rozeznáváme trojúhelník: a) *pravoúhlý* (rechtwinkliges Dreieck), v němž jeden úhel jest pravý, b) *tupoúhlý* (stumpfwinklig), v němž jest jeden úhel tupý, a c) *ostroúhlý* (spitzwinklig), v němž všickni tři úhlové jsou ostří. —

Trojúhelníkům *tupo-* a *ostroúhlým* díme *kosoúhlé* (schiefwinklig).

V trojúhelníku pravoúhlém slovou strany, jimiž se pravý úhel svírá, *odvěsné* (Katheten) a třetí strana proti pravému úhlu položená nazývá se *podpona* (Hypotenuse).

2. Dle poměrné délky stran rozeznáváme trojúhelník a) *rovnostraný* (gleichseitig), jehož všechny tři strany jsou si rovny; b) *rovnoramený* (gleichschenklig), jenž má toliko dvé stran sobě rovných, a třetí lichou; c) *nerovnostraný* (ungleichseitig), jenž nemá nikterých dvé stran sobě rovných.

§. XXXIV.

1. Straně, na níž trojúhelníku dáme spočívati, říkáme *podstava* (*basis*, Grundlinie, jiní zovou ji též *základna*, *základ*, *spod*), protější hraně díme *vrchol* a druhým dvěma stranám *ramena* trojúhelníka.

2. při trojúhelníku rovnoramenném pokládá se obyčejně lichá strana za podstavu.

3. Kolmice s vrcholu trojúhelníka na podstavu (třeba-li, prodlouženou) spuštěná slove *výška* (Höhe) trojúhelníka. —

§. XXXV.

1. *Na dané přímce AB* (obr. 26.) *v určitém bodě C lze toliko jednu kolmici postaviti.*

obr. 26.

Důkaz. Buď $CK \perp AB$ pročež $KCB = R$; jest pak $SCB < KCB$ dle zásady, že částka jest menší než celek; pročež $SCB < R$ a tudíž každá přímka CS, která nesplývá s CK, stojí šikmo na AB; i jest CK jediná kolmice na AB.

2. *S daného bodu C* (obr. 27.), *lze na danou přímku AB toliko jednu kolmici spustiti.*

obr. 27.

Důkaz: Buď $CD \perp AB$, vedeme-li s C ku kterémukoliv jinému bodu E na přímce AB ležícímu přímku CE, vznikne trojúhelník CDE pravoúhlý, i jest $\varepsilon < R$ (§. XXXII. 3. a.) tudíž přímka CE šikmo, pročež CD edinou kolmicí.

3. *Přímka šikmá tím více se kloní ku přímce dané, čím více se vzdaluje pata její* (t. průsek její s přímkou danou) *od paty kolmice s téhož bodu na přímku danou spuštěné.*

Důkaz. Buď (obr. 27.) $CD \perp AB$, CE a CB dvě šikmé s téhož bodu C k dané přímce AB vycházející; a $DB > DE$; i jest v trojúhelníku CEB (dle §. XXXII. 3. f.) $\varepsilon > \beta$, jakož věta tvrdí.

4. *Kolmice s některého bodu C* (obr. 27.) *jednoho ramene úhlu AEC neb CEB na rameno druhé spuštěná dopadne v tu stranu, na níž jest úhel ostrý.*

Důkaz: Buď CEA úhel ostrý; kolmice s bodu C na rameno AE (třeba-li, prodloužené AB) spuštěná může vůbec: a) buďto splynouti s přímkou CE; což ale nemožná, poněvadž CE jest šikmo; aneb b) padne na stranu úhlu tupého, jako CB, což ale opět jest nemožná, poněvadž CB má ještě větší sklon než CE k přímce AB (odst. 3.), aneb c) na stranu úhlu ostrého, jako CD, a to jest nezbytno, poněvadž předešlé dvě polohy jsou nemožné:

5. *Výsledek.* Poloha výšky trojúhelníka závisí na úhlech ku podstavě přilehajících, a sice:

a) jsou-li oba úhly ostré, leží výška uvnitř trojúhelníka.

b) je-li jeden úhel pravý, splyne výška s druhou odvěsnou;

c) je-li jeden úhel tupý, padne výška mimo trojúhelník na podstavu za tupým úhlem prodlouženou.

§. XXXVI.

1. Přijímajíce za zřejmou a patrnou pravdu, že přímka mezi dvěma bodoma jest nejkratší ze všech čar klikatých neb křivých, vyslovujeme větu: *Kterákoliv strana trojúhelníka jest menší než součet dvou jeho stran druhých.* Jako (v obr. 25.) $BC < BA + AC$.

2. Z této nerovnosti plyne $BC - BA < CA$, t. j. *kterákoliv strana v trojúhelníku jest větší než rozdíl dvou jeho stran druhých.*

3. *Výsledek.* Má-li se ze tří daných stran sestrojiti trojúhelník, musí každá z nich menší býti než součet dvou druhých.

Knihy druhé část třetí.

O shodnosti č. jednostejnosti obrazcův vůbec, trojúhelníkův zvlášť.

A. O shodnosti obrazcův vůbec.

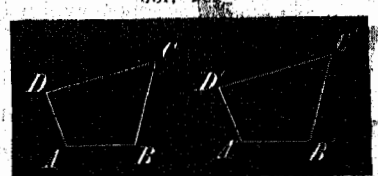
§. XXXVII.

1. Obrazce, které mají i stejný tvar i stejnou velikost slovou *jednostejnými* čili *shodnými* (congruent). Znamení shodnosti jest: $\cong$.

2. Shodní obrazcové jsouce náležitě na sebe položeni pokrývají se na vzájem dokonale; a naopak, které obrazce na vzájem se dokonale pokrývají, ty jsou jistě shodné.

3. Při shodných mnohoúhelnících jsou strany a úhly, které na sebe připadnouce se kryjí, v témž pořádku sobě rovny a slovou *shodnými* č. *souhlasnými* (übereinstimmend), a pokud tutéž polohu buď mají neb jí nabyti mohou, též *stejnolehlými*, (homolog), jako v obr. 28. $A'B' = AB$, $B'C = BC$, $CD' = CD$, $D'A' = DA$, $A' = A$, $B' = B$, $C = C$, $D' = D$. — A naopak:

obr. 28.

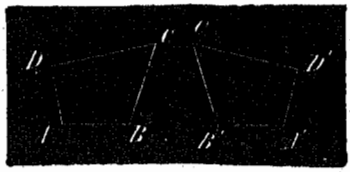


4. Dva mnohoúhelníky jsou dozajista shodnými, jsou-li všechny jejich úhly střídavě v témž pořádku sobě rovny, a jsou-li i strany souhlasné v témž pořádku sobě rovny.

Neboť položíme-li $A'B'$ na AB, padne $A'D'$ podél AD, D' na D, $D'C'$ podél DC atp. proto, že $A = A'$, $A'D' = AD$, $D' = D$. a td. Oba obrazce pokryjí se tehdy na vzájem dokonale, pročež jsou shodnými.

5. Převrátíme-li jeden ze dvou mnohoúhelníků, jejichž všechny strany byvše střídavě rovnoběžné, měly též střídavě stejnou polohu, tak aby bývalá vrchní plocha nyní vespod, a bývalá spodní nyní na vrch přišla (jakož to jest v obr. 29.), pak máme souhlasné strany a úhly v pořádku za sebou *převráceném*: i nazýváme pak obrazce *souměrnými* (symmetrisch), majíce zřetel i ku *poloze* jejich. Poněvadž ale při *shodnosti* obrazcův ploských ku poloze nepřihlížíme, jsou i tito *souměrní* obrazcové *shodnými* č. *jednostejnými*. Aby se však jeden druhým pokryl, musí prvé jeden z nich se převrátiti, a převrácen teprv na druhý položiti.

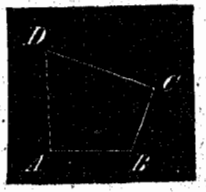
obr. 29.



§. XXXVIII.

1. Kdybychom měli sestrojiti mnohoúhelník (ku př. čtyrúhelník), jehož strany po pořádku by měly míti délku b, c, d, a, a úhlové velikost β, γ, δ, α; takto bychom sobě počínali: Na rovině (obr. 30.) položili bychom přímku $AB=a$, učinili úhel $ABC=\beta$, odřízli $BC=b$, učinili úhel $BCD=\gamma$, odřízli $CD=d$. Nyní — kdežto nám ještě tři dané veličiny (δ, a, α) zbývají — nemůžeme již ničeho učiniti, než vésti přímku DA: a pročež zůstatních tří výmínek, totiž aby $D=\delta$, $A=\alpha$, $DA=a$ bylo, nelze vyplniti, lečby šťastnou náhodou jim zadost učiněno bylo.

obr. 30.



2. Z toho vidíme, že v mnohoúhelníku jsou jedna strana a přílehlé k ní úhly závislými na velikosti částí zůstatních. A jako tyto tři jmenované, tak i jiné tré částí může závislým učiněno býti na rozměru částí druhých.

3. Z tohoto opět vyplývá, že tvar i velikost n-úhelníka dokonale jest určen, když jest dáno z n stran a z n úhlů jeho pouze $(2n-3)$ částí. Říkáme pak, že n-úhelník jest *dokonale určen*, když jest dáno výmínek tolik a takových (ku př. stran a úhlův) co jich třeba i dostatek, aby jim vyhověl obrazec pouze jeden, i aby každý jiný, jenž by těm výmínkám zadost činil, s prvým byl jednostejný.

4. Pročež, majíce rozhodnouti o shodnosti dvou mnohoúhelníků, není třeba, bychom napřed měli vědomost o rovnosti všech jejich úhlův a stran, nébrž postačuje a požaduje se věděti o jednostejnosti pouze všech těch částí, jimiž mnohoúhelník dokonale určen bývá.

5. Kterými pak částmí mnohoúhelník, přede vším ale trojúhelník, se dokonale určuje, o tom nám v následujících §§. jednati jest.

6. K závěrce připomínáme zde pouze ještě, že v n-úhelníku jeden úhel vždy jest závislý na zůstatních, poněvadž součet všechněch jest určitý (§. XXVII.). Pročež v trojúhelníku mohou pouze *dva* úhly býti nezávislé a dány; třetí jest závislý, a jest znám, když zůstatní dva jsou ustanoveny (§. XXXII. 3. h.).

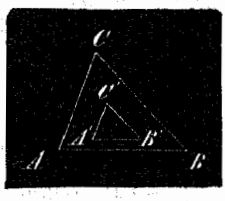
B. O dokonalé určenosti trojúhelníka. O shodnosti trojúhelníků.

§. XXXIX.

1. *Dva úhly α, β, nepostačují, aby trojúhelník dokonale určen byl.*

Neboť jsou-li tyto úhly $A=\alpha$, $B=\beta$ v trojúhelníku ABC (obr. 31): veďme kdekoliv přímku jakkoliv dlouhou $A'B' \parallel AB$, a jejíma koncema veďme $A'C' \parallel AC$, $B'C' \parallel BC$; i bude též $A'=A=\alpha$, $B'=B=\beta$ (§. XIX. 1.), ačkoliv velikosti trojúh. $A'B'C'$ a ABC jsou nestejné.

obr. 31



2. *Výsledek. Ku shodnosti trojúhelníků nepostačuje rovnost dvou* (pročež ani rovnost všech tří) *úhlův.*

3. *Dvé stran nepostačuje k dokonalému určení trojúhelníka.* Neboť dvě strany mohou svírati úhly nerovné velikosti, a tím již nabývá mnohoúhelník rozličného tvaru. Pročež:

4. *Ku shodnosti trojúhelníkův nepostačuje rovnost dvou stran.*

5. I zbývá nám zpytovati, zdaž jest trojúhelník dokonale určen, když jsou dány:

a) buď jedna strana a přilehlé k ní úhly;

b) aneb dvé stran a úhel jima sevřený;

c) aneb dvé stran a úhel ku třetí straně přilehlý;

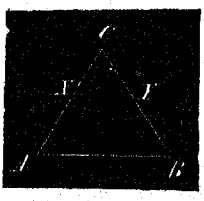
d) aneb tré stran.

§. XL.

a) Určenost trojúhelníka jednou stranou a přilehlýma úhloma.

1. Jednou stranou c a přilehlýma k ní úhloma α, β, jest trojúhelník dokonale určen.

obr. 32.



Neboť, chtějíce míti trojúhelník žádaný, učiníme $AB=c$, $BAX=\alpha$, $ABY=\beta$; konečně prodloužíme AX i BY, až se protnou v C, i obdržíme $\triangle ABC$ *jediný*, neboť dvé přímek AX a BY nemůže se protínati leč v bodě jediném C.

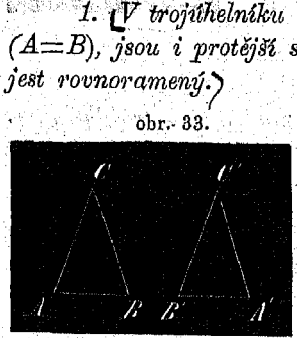
2. Trojúhelníky, jejichž jedna strana s přilehlýma k ní úhloma jsou sobě střídavě rovny, jsou shodnými č. jednostejnými.

3. *Všeobecné připomenutí.* Všechny souhlasné části shodných trojúhelníků shodují se. Pročež kdykoliv shodnost trojúhelníků jest dokázána, lze uzavírati na rovnost souhlasných částí jejich, o níž před tím známosti nebylo. Díme pak obyčejně: *proti rovným stranám leží rovné úhly, a proti rovným úhlům leží rovné strany.*

§. XLI.

1. V trojúhelníku ABC (obr. 33.), *jehož dva úhly jsou si rovny* ($A=B$), *jsou i protější strany sobě rovny* ($BC=AC$) t. j. *trojúhelník jest rovnoramený.*

obr. 33.



Důkaz. Převraťme trojúh. ABC, i obdržíme $\triangle B'A'C'$, kdežto jest $AB=B'A'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, $A=B$, $B'=A'$. Poněvadž pak jest $AB=B'A'$, $A=B'$, $B=A'$, pročež $\triangle ABC \cong \triangle B'A'C'$ (§. XL. 2.), tedy (§. XL. 3.) $BC=A'C'$, víme ale, že $A'C'=AC$, pročež vyplýva $BC=AC$.

2. Trojúhelník, jehož všechny tři úhly jsou si rovny, jest rovnostranným. Výsledek odst. 1.

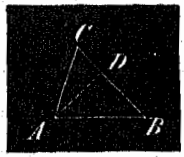
§. XLII.

1. V trojúhelníku leží proti většímu úhlu též větší strana.

Důkaz. Buď v $\triangle ABC$ (obr. 34.) $\sphericalangle B < \sphericalangle CAB$; pročež bude

část BAD úhlu BAC rovnati se úhlu B, t. $\sphericalangle BAD = B$; z toho pak jde $BD = AD$ (§. XLI. 1.) pročež i $BD + DC = AD + DC$, čili $BC = AD + DC$; jest ale $AD + DC > AC$ (§. XXXV. 1.), pročež také $BC > AC$.

obr. 34.



2. *Výsledky.* a) V trojúhelníku pravoúhlém jest podpona stranou nejdelší;

b) V trojúhelníku tupoúhlém leží nejdelší strana proti úhlu tupému.

c) Mezi přímkami (obr. 27.), které z některého bodu C na danou přímku AB vedeme, jest kolmice nejkratší; zůstatní pak jsou tím delší, čím více od kolmice jsou odchýleny.

Řečenou kolmicí CD určuje se *vzdálenost* bodu C od přímky AB.

d) Na téže straně kolmice nelze tudíž více, než *jednu* šikmou přímku vésti, kteráž by měla určitou velikost, ovšem délky kolmice přesahujíc.

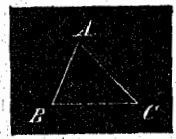
§. XLIII.

b) Určenost trojúhelníka dvěma stranama a úhlem jima sevřeným.

1. *Dvěma stranama a úhlem jima sevřeným jest trojúhelník dokonale určen.*

Neboť je-li úhel daný A (obr. 35.) hotov, a jsou-li ramena AB a AC učiněna tak dlouhá, jako mají býti strany trojúhelníka, týž úhel svírající: nezbývá, než abychom vedli přímku AB; a poněvadž dvěma bodoma vésti se dá přímka jediná, pročež nelze než jediného trojúhelníka ABC nabyti.

obr. 35.



2. *Dva trojúhelníky, jejichž dvě strany i s úhlem sevřeným jsou si střídavě rovny, jsou shodnými č. jednostejnými.* Neboť náležitě na sebe položeny pokrývají se dokonale.

3. *Výsledky:* a) Trojúhelníky pravoúhlé, jejichž odvěsnice střídavě jsou si rovny, jsou jednostejnými.

b) Dvě přímky CE a CE' z téhož bodu C (obr. 27.) k dané přímce AB šikmo vedené, jsou si rovny, mají-li jejich paty E a E' od paty D kolmice CD z téhož bodu vedené rovné vzdálenosti. Mimo to mají obě přímky šikmé od kolmice CD na protivných stranách stejně velikou odchylku; t. j. $\sphericalangle E'CD = \sphericalangle DCE$. Naopak:

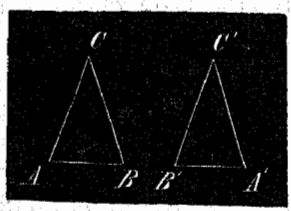
c) Mají-li dvě přímky CE' a CE (obr. 27.) od kolmice CD z téhož bodu C na tutéž přímku $E'E$ spuštěné stejně velikou odchylku: tehdy jsou si rovny, a paty jejich E' a E mají od paty D kolmice CD rovné vzdálenosti ($E'D=DE$).

d) Z téhož bodu C (obr. 27.) lze k dané přímce AB vésti pokaždé dvé přímek šikmých, stejně dlouhých — jen když každá z nich jest delší, než kolmice s téhož bodu na tuž přímku AB spuštěná.

§. XLIV.

1. *V trojúhelníku rovnoramenném jsou úhly na podstavě sobě rovny.*

obr. 33.



Důkaz. Buď v trojúh. ABC (obr. 33) $AC=CB$; převrať $\triangle ABC$ i nabudeš $\triangle B'A'C'$; jest tehdy $A'=A$, $B'=B$, $C'=C$, $C'A'=CA=CB=C'B'$, $AB=B'A'$. A poněvadž jest $AC=B'C'$, $BC=A'C'$, $C=C'$, proto vyplývá $\triangle ABC \cong \triangle B'A'C'$ (§. XLIII. 2), z čehož uzavíráme $A=B'$ (§. XL. 3); a poněvadž jest $B'=B$ pročež jest i $A=B$.

2. *V trojúhelníku rovnostraném jsou všechny tři úhly sobě rovny, a každý z nich* $= \frac{2}{3}R = 60^0$.

3. *Trojúhelník rovnostraný jest obrazec pravidelný.*

4. *Výsledky*: a) V trojúhelníku rovnoramenném jest jedním úhlem určen již i druhý i třetí, a úhly na podstavě jsou *ostré*.

b) Trojúhelník rovnoramený jest dokonale určen jednou stranou a jedním úhlem; toliko třeba výslovně udati, má-li strana býti podstavou aneb ramenem, a má-li daný úhel býti na vrcholu aneb na podstavě. Proč?

c) Dva trojúhelníky rovnoramené jsou shodnými, jsou-li střídavě sobě rovny buď

α) podstavy a úhly na vrcholu, aneb

β) podstavy a jedno dvé úhlů ra podstavě, aneb

γ) jedno dvé ramenou, a úhly na vrcholu, aneb

δ) jedno dvé ramenou, a jedno dvé úhlů na podstavě.

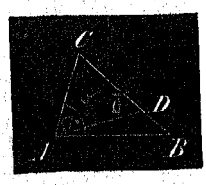
d) Trojúhelník rovnostraný jest stranou svou dokonale určen.

e) Trojúhelníky rovnostrané jsou shodnými, jsou-li podstavy jejich sobě rovny.

§. XLV.

V trojúhelníku leží proti větší straně též větší úhel.

obr. 36.

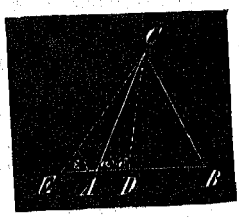


Důkaz. Buď v $\triangle ABC$ (obr. 36.) $BC > AC$, tehdy učiň $CD = CA$, a veď přímku AD. Jest pak $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC$ (§. LXIV. 1.), avšak $\sphericalangle CAB > \sphericalangle CAD$, a $\sphericalangle ADC > \sphericalangle ABC$, pročež tím více $\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC$.

§. XLVI.

1. V trojúhelníku rovnoramenném jest každá přímka, s vrcholu uvnitř k podstavě vedená, menší; a každá přímka s téhož vrcholu vně vedená k prodloužené podstavě jest větší, než rameno jeho.

obr. 37.



Důkaz. Buď (obr. 37.) v troújh. ABC rovnoramenném $AC = CB$; pročež $\alpha = B$ (§. XLIV. 1.) a zároveň $\alpha = B < R$. — Přímka CD jest buď kolmo na AB aneb šikmo. Je-li kolmo, jest zajisté $CD < CA$ (§. XLII. 2. c.). Je-li šikmo, jest jeden úhel ku př. CDB ostrý a druhý tupý, buď $\delta > R$, tu však jest $CD < CA$ (§. XLII. 2. b.); pročež na všechen způsob $CD < CA$. —

Za to ale přímka CE jest větší než CA, neboť $\alpha < R$, pročež $\sphericalangle CAE > R$, a proto $CE > CA$ (§. XLII. 2. b.).

2. V trojúhelníku rovnoramenném padne každá přímka s vrcholu k podstavě vedená, je-li menší než rameno, dovnitř trojúhelníka; je-li ale větší než rameno, mimo trojúhelník.

Důkaz vede se z nemožnosti záporu, a jest zůstaven čtenářovi.

3. Výsledky z odst. 1. a) Z daného bodu C (obr. 37.) nelze k dané přímce AB více než dvé rovných sobě přímek vésti,

b) Kruh nemůže přímku leč nanejvýše ve dvou bodech protínati.

§. XLVII.

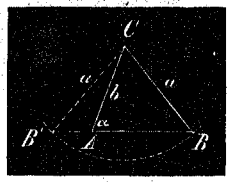
c) Určenost trojúhelníka dvěma stranama a úhlem protilehlým.

1. Rozeznávejme: Dané strany jsou si buď rovny, aneb jest jedna větší. Jsou-li si rovny, jest jima a jedním úhlem protějším trojúhelník rovnoramený dokonale určen, o čemž již §. XLIV. 4. b. c. rozhodnuto jest. Je-li ale jedna strana větší než druhá, tu opět sluší rozeznávati:

α) buď jest dán úhel proti *větší* straně, aneb β) proti *menší* straně položený.

2. *Dvěma stranama* a, b *a úhlem α proti větší straně* a *ležícím jest trojúhelník dokonale určen.*

obr. 38.



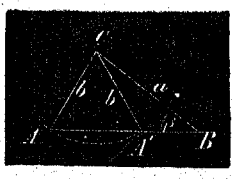
Důkaz. Buď (obr. 38.) $\sphericalangle CAB = \alpha$, $AC = b$ strana kratší; nyní jest na rameni AB hledati bod B, jenž by měl od bodu C vzdálenost a. K tomu konci (§. XXII. 5.) opíšeme okolo C poloměrem a kruh, kterýž přímku AB protne ve dvou bodech B a B'. Vedeme-li přímky CB a CB', leží zajisté přímka CA jsouc kratší *mezi* nima (§. XLVI. 2.), a pročež činí pouze $\triangle ABC$ zadost výmínkám daným, nikoliv $\triangle AB'C$, v němž není úhlu α.

3. *Trojúhelníky, jejichž dvě strany a úhel proti delší straně ležící jsou si střídavě rovny, jsou jednostejnými čili shodnými;* neboť náležitě na sebe položeny pokrývají se úplně.

4. *Trojúhelníky pravoúhlé jejichž podpony a jedno dvé odvěsnic střídavě se shodují, jsou jednostejnými či shodnými.*

5. *Dvěma stranama* a, b, *a úhlem β proti kratší straně* b *ležícím není trojúhelník dokonale určen, nébrž připouští tvar i velikost dvojí.*

obr. 39.



Důkaz. Buď (obr. 39.) $\sphericalangle CBA = \beta$, $BC = a$ strana delší; okolo C opiš poloměrem b kruh, ten protne přímku BA ve dvou bodech A i A'; vedeme-li CA i CA', leží zajisté CB (jsouc delší než CA i CA') mimo trojúhelník rovnoramený ACA' (§. XLVI. 2.) a pročež činí daným výmínkám zadost i $\triangle ABC$ i $\triangle A'BC$; tehdy dva trojúhelníky tvarem i velikostí od sebe se lišící.

6. *Rovnost dvou stran a úhlu proti menším stranám ležícího nepostačuje k jednostejnosti trojúhelníků.*

Dodatek. Vyhovují-li ale tři trojúhelníky těmto třem výmínkám (t. mají-li po dvou stranách sobě střídavě rovných i po rovném úhlu, jenž leží proti menší straně), musí aspoň dva z nich býti shodnými. Proč?

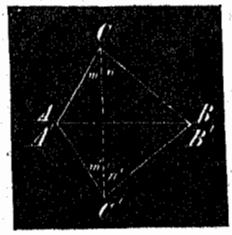
§. XLVIII.

d) Určenost trojúhelníka třemi stranami.

Třemi stranami a, b, c jest trojúhelník dokonale určen; čili:

Dva trojúhelníky, jejichž všechny tři strany jsou si střídavě rovny, jsou jednostejnými č. shodnými.

obr. 40.



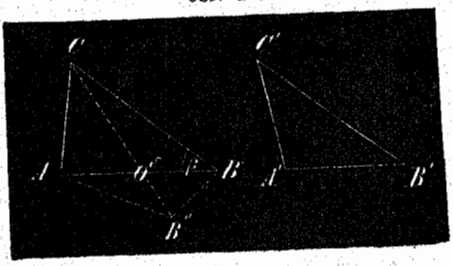
Důkaz. Buď $\triangle ABC$ (obr. 40.) z těchto tří stran sestrojen, a v něm buď strana AB nejdelší, tedy úhly A i B ostré. Dejme tomu, že z těchže tří stran jest sestrojen ještě jeden trojúh. $A'B'C'$ — v němž hrany souhlasné stejnými písmeny naznačujeme. I převraťme $\triangle A'B'C'$, aby měl s $\triangle ABC$ polohu souměrnou, a položme $A'B'$ na AB: tu přijde bodům C' a C ležeti na protivných stranách přímky AB č. $A'B'$. Poněvadž úhly A a B, pročež i A' a B' jsou *ostré*, musí býti $A+A'$ a $B+B'$ t. j. $\sphericalangle CAC'$ a $\sphericalangle CBC'$ úhly duté: vedeme-li tedy přímku CC', padne nám celá pod duté úhly řečené, čili dovnitř čtyrúhelníka $ACBC'$; tím nám vzniknou dva trojúhelníky rovnoramené, totiž $\triangle CAC'$ a CBC', poněvadž jest $AC=A'C'$ a $BC=B'C'$. Z toho jde $m=m'$, $n=n'$ (§. XLIV. 1.), pročež $m+n=m'+n'$; čili $\sphericalangle ACB=\sphericalangle A'C'B'$; a poněvadž jest $AC=A'C'$, $CB=C'B'$ pročež $\triangle ACB \cong \triangle A'C'B'$ (§. XLIII. 2.).

§. XLIX.

Neurčenost trojúhelníka dvěma stranama, a vzájemná závislost třetí strany a protějšího úhlu.

1. *Ve dvou trojúhelnících, jejichž dvě a dvě strany střídavě jsou si rovny, úhly ale jima sevřené nerovny, jsou třetí strany jejich též nerovny, a sice jest třetí strana toho trojúhelníka větší, v kterém jest protější úhel větší.*

obr. 41.



Důkaz. Buď (obr. 41.) $A'C'=AC$, $B'C'=BC$, $\sphericalangle ACB > \sphericalangle A'C'B'$; $\sphericalangle CAB=\alpha$. Dejme tomu, že jest $AC \geqq BC$, pročež i $A'C' \geqq B'C'$. Stranu $A'C'$ (t. j. kratší, jsou-li obě nestejné délky) položme na stranu AC; i sřízne nám strana $C'B'$, kteráž padne směrem CB'', z úhlu ACB část $ACB''=A'C'B'$. Poněvadž jest $AC \geqq BC$, jest $\alpha \geqq \beta$; (§. XLIV. a XLV.); mimo to jest $\delta > \alpha$ (§. XXXII. 3. f.), pročež $\delta > \beta$; odtud plyne $CO < CB$ (§. XLII. 1.). Pročež bod B' strany $C'B'$ padne mimo trojúh.

ABC, pod podstavu AB do B''. Veďme přímky AB'' a BB'', jest tu $\triangle AB''C \cong \triangle A'B'C'$, a $AB''=A'B'$; tedy máme $C'B''=CB$, pročež $\sphericalangle CB''B = \sphericalangle B''BC$ (§. XLIV); ale úhel $AB''B > CB''B = B''BC > B''BA$, pročež $AB''B > B''BA$; tedy $AB > AB''$ (§. XLII.), a poněvadž jest $AB''=A'B'$, tedy též $AB > A'B'$.

2. *Ve dvou trojúhelnících, jejichž dvě a dvě strany střídavě jsou si rovny, třetí strany ale nerovny, jsou úhly proti třetím stranám ležící nerovny, a sice jest úhel v tom trojúhelníku větší, který má třetí stranu větší.*

Důkaz. Buď (obr. 41.) $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, $AB>A'B'$: tvrdíme, že jest $\sphericalangle ACB > \sphericalangle A'C'B'$; čili $C>C'$. Vůbec jest možný a nutný jeden z tří případů: Buďto $C=C'$ aneb $C<C'$ aneb $C>C'$; avšak $C=C'$ je nemožno, neboť pak by bylo $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (§. XLIII.), a tudíž $AB=A'B'$, což se příčí podpovědi $AB>A'B'$. Taktéž jest $C<C'$ nemožno; neboť pak by bylo $AB<A'B'$ (dle odst. 1.), což opět se podpovědi příčí: nezbývá již, než $C>C'$, což jest nezbytno a nutno: poněvadž všeliký zápor se příčí podpovědi.

§. L.

Připomenutí metodické o důkazu nepřímém.

Důkaz v §. XLIX. 2. vedený slove *nepřímý*, i odvozuje nezbytnou pravdu věci z nemožnosti záporu. Přednost dáváme důkazu *přímému*, jenž z podmínky samé vyvinuje výrok, čímž i pravdu i důvody pravdy poznáváme. Někdy však sotva se dovedeme vyhnouti důkazu nepřímému. To bývá tehdy, když jsme nějakou vlastnost dokázali o jedné věci, a tvrdíme, že tuž vlastnost má i jiná věc, rodem svým od prvé se lišící; ku př. když to, co platí o dvou veličinách souměřitelných, za platné dokázati se má i o veličinách nesouměřitelných. V této příčině odkazujíce čtenáře k §§. budoucím, připomínáme zde případu, kdy se důkazu nepřímého vždy užiti dá; kdykoliv totiž máme celé pásmo (ku př. 2, 3 a více) již dokázaných vět podmínečných takového způsobu, že i podmínky jejich i výroky jejich činí dvě úplné řady členů protivných: tehdy lze všechny věty převrátiti (t. podmínku a výrok za sebe vyměniti), a o pravosti vět převrácených vésti důkaz nepřímý či neshodou. Ku př. Znamenáme-li dvě strany a sevřený úhel trojúhelníka písmeny a, b, C, třetí stranu c, a rovněž v druhém trojúhelníku a', c', C', c': měli jsme věty:

1. Je-li $a=a'$, $b=b'$, $C=C'$, (podmínka); jest též $c=c'$ (výrok) (§. XLIII.).
2. Je-li $a=a'$, $b=b'$, $C>C'$ (podmínka) jest též $c>c'$ (výrok) (§. XLIX. 1.);
3. Je-li $a=a'$, $b=b'$, $C<C'$ (podmínka); jest též $c<c'$ (výrok) (§. XLIX. 1.);

podmínky $C=C'$, $C>C'$, $C<C'$ činí úplnou řadu protiv a rovněž i výroky $c=c'$, $c>c'$, $c<c'$ tvoří úplnou řadu protiv. Pročež dá se tvrditi naopak:

1. Je-li $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$: jest i $C=C'$
2. Je-li $a=a'$, $b=b'$, $c>c'$: jest i $C>C'$ } §. XLIX. 2.
3. Je-li $a=a''$ $b=b'$, $c<c'$: jest i $C<C'$

a všechny tyto věty převrácené, ani 1. nevyjímaje, dají se dokázati neshodou: ač my jsme větu 1. dokázali přímo (§. XLVIII.).

Jiný příklad měli jsme zhora. Znamenáme-li písmeny b a c strany, a písmeny B, C protější úhly v trojúhelníku, bylo:

1. Je-li $B=C$ jest i $b=c$ (§. XLI.);
2. Je-li $B>C$ jest i $b>c$ (§. XLII.);
3. Je-li $B<C$ jest i $b<c$ (§. XLII.);

poněvadž i podmínky i výroky činí úplnou řadu protiv, pročež platí naopak:

1. Je-li $b=c$, jest i $B=C$;
2. Je-li $b>c$, jest i $B>C$;
3. Je-li $b<c$, jest i $B<C$;

a všechny tyto obrácené věty dají se opět dokázati nepřímo; my ovšem svrchu vedli jsme důkaz přímý (§. XLIV. a XLV.). Jak zní důkaz těchto vět nepřímý?

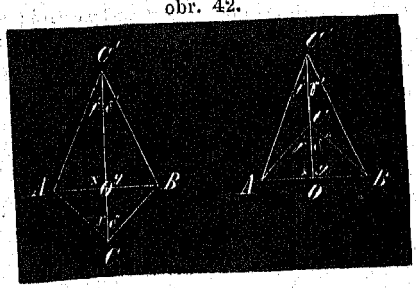
Druhé knihy část čtvrtá.

Věty o trojúhelnících rovnoramenném a pravoúhelném a úlohy na základě jednostejnosti trojúhelníkův.

§. LI.

Přímka vedená vrcholoma C i C' trojúhelníků rovnoramenných na společné podstavě AB (obr. 42.) *postavených rozpoluje i úhly na vrcholu i společnou podstavu a stojí na ní kolmo.*

obr. 42.



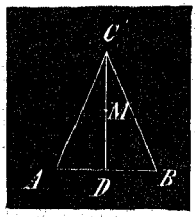
Důkaz. Poněvadž jest $AC=BC$, $AC'=BC'$, $CC'=CC'$ pročež jest (§. XLVIII), $\triangle AC'C \cong BC'C$, a proto $\gamma=\delta$, $\gamma'=\delta'$, (pročež také $\gamma''=\delta''$); odtudzase plyne $\triangle AC'O \cong \triangle BC'O$ (§. XLIII), a proto jest $AO=OB$, a $x=y=R$, čili $C'C \perp AB$.

§. LII.

1. Přímka CD (obr. 43), která úhel C na vrcholu trojúhelníka rovnoramenného rozpoluje, rozpoluje též jeho podstavu AB, a stojí na ní kolmo.

Důkaz z §. XLIII.

obr. 43.



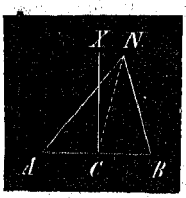
2. Výškou trojúhelníka rovnoramenného rozpoluje se i úhel na vrcholu i podstava jeho.

Důkaz z §. XLVII. 4.

3. Přímka vedená s vrcholu trojúhelníka rovnoramenného ku prostředku podstavy rozpoluje úhel na vrcholu a stojí na podstavě kolmo.

Důkaz z §. XLVIII.

obr. 44.



4. Kterýkoliv bod M (obr. 43.) kolmice CD postavené uprostřed na přímce AB, má od jejich konců A i B rovné vzdálenosti.

Důkaz z §. XLIII.

5. Každý bod N (obr. 44.) mimo kolmou CX, která na přímce AB uprostřed stojí, má od konců A i B základné přímky AB nerovné vzdálenosti; a sice jest tomu konci blíže, s kterým na jedné straně kolmé přímky leží.

Důkaz. Veď (obr. 44.) přímku CN, i jest $\sphericalangle ACN > R$, $\sphericalangle BCN < R$: pročež $ACN > BCN$, a pročež (v trojúhelnících $\triangle ACN$ a $\triangle BCN$) též $AN > BN$ (§. XLIX. 1.)

6. Přímka na podstavu trojúhelníka rovnoramenného v jejím prostředku kolmo postavená, probíhá jsouc prodloužena vrcholem jeho a rozpoluje úhel na vrcholu.

Důkaz z odst. 3. a z §. XXXV. 1.

7. Z vět 4. a 6. pospolu vyplývá tato:

a) Geometrické místo všech bodů, z nichž každý má ode dvou bodů daných A i B rovné vzdálenosti, jest kolmice uprostřed přímky AB vztyčená; aneb:

b) Geometrické místo pro vše vrcholy trojúhelníků rovnoramenných na dané podstavě AB stojících, jest kolmice uprostřed této podstavy vztyčená.

Odtud vážíme pravidlo.

Kdykoliv jest nám hledati bod ode dvou bodů daných rovně vzdálený, spojme body dané přímkou, přímku rozpolme, a uprostřed vztyčme kolmici: v této jest bod žádaný.

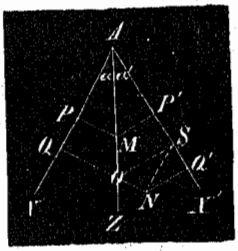
Podobné pravidlo slouží, bychom vyhledali vrchol trojúhelníka rovnoramenného, dána-li jest podstava jeho.

LIII.

1. Kterýkoliv bod přímky, která rozpoluje úhel, má od ramenou jeho rovné vzdálenosti.

Důkaz. Přímkou AZ (obr. 45) buď úhel XAX' rozpolen,

obr. 45.



$\alpha = \alpha'$; s bodu M na přímce AZ ležícím spuštěny buďte kolmice na ramena úhlu $MP \perp AX$, $MP' \perp AX'$; i jest pak $APM \cong AP'M$ (§. XL.) a pročež $MP = MP'$.

2. *Kterýkoliv bod* N (obr. 45.) *ležící mimo přímku* AZ, *jíž se úhel* XAX' *rozpoluje, jest tomu ramenu* (AX') *blíže, s kterým na téže straně rozpolovací přímky leží.*

Důkaz. Buď $NQ \perp AX$, $NQ' \perp OX'$; s bodu O, kde se NQ a AZ protínají, spusť $OS \perp AX'$; konečně veď NS; i jest $OQ = OS$ (odst. 1.) pročež $NO + OQ = NO + OS$ čili $NQ = NO + OS$; ale $NO + OS > NS$ (§. XXXVI. 1.), $NS > NQ'$ (§. XLII. 2. a.): pročež $NQ > NQ'$.

4. Z těchto dvou vět pospolu vyplývá:

Geometrické místo všech bodů, z nichž kterýkoliv a každý ode dvou rozbíhavých přímek má rovné vzdálenosti, jest přímka, jež rozpoluje úhel jejich.

Jak zní pravidlo odtud vážené?

Poznam. Poněvadž dvě rozbíhavých přímek na svém bodu průsečném působí dva úhly vedlejší (se dvěma vrcholovýma), pročež lze nabyti dvou přímek tyto úhly rozpolujících a na sobě kolmo stojících, i jsou obě místem geometrickým.

4. Pomocí vět 1. 2. v tomto §. dokázaných lze ještě tyto dokázati:

a) Každá přímka, která úhel A (obr. 45.) na nerovné části dělí, pohřešuje řečené zde vlastnosti přímky AZ; jakož jí pohřešuje

b) každá jiná přímka, která bodem A ani neprobíhá.

c) Má-li ale některá přímka OZ tu vlastnost, že kterýkoliv a každý bod její má od ramenou některého úhlu XAX' rovné vzdálenosti: musí probíhati přímka ta vrcholem úhlu tohoto (obr. 45.)

Čehož důkaz zůstaven jest [illegible]ářovi.

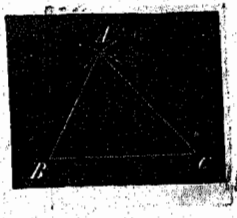
[illegible]. LIV.

Úlohy.

1. Nakresli trojúhelník, jehož strany a, b, c jsou dány. Jinými slovy:

Nakresli trojúhelník, jenžby byl jednostejný s trojúhelníkem daným.—

obr. 46.



Sestroj. Polož přímku $BC = a$, (obr. 46.) vezma b a c za poloměry, opiš kolem středů B a C kruhové oblouky a jejich průsek A spoj přímkama s body B i C, i bude $\triangle ABC$ žádaný. (Srovn. §. XXIII. 1.)

Omezení. Součet kterýchkoliv dvou stran musí větší býti, než strana třetí.

2. Na dané podstava a sestroj trojúhelník rovnoramený, jehož rameno buď b.

Sestrojení jako v odst. 1., jen že jest $b=c$. (Srovn. §. XXIII. 2. a.).

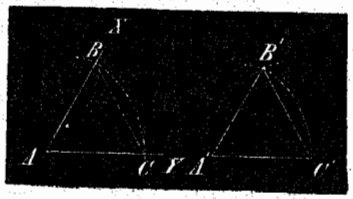
3. Sestroj trojúhelník rovnostraný na dané podstavě a.

Sestrojení jako v odst. 1. jen že $b=c=a$. (Srovn. §. XXII. 2. b.).

4. Nakresli úhel, jenž by se rovnal jinému úhlu danému.

Rozřeš. Okolo vrcholu A (obr. 47.) daného úhlu XAY opiš kterýmkoliv poloměrem kruhový oblouk, jenž protne ramena v bodech B i C; veď přímku BC a nyní sestroj $\triangle B'A'C'$, jenž by byl jednostejný s $\triangle BAC$, i jest $A'=A$. — Chcešli ale míti vrchol nového úhlu v bodě A' již napřed určeném, a má-li jeho rameno míti směr $A'C'$ rovněž již napřed ustanovený: opiš týmž poloměrem AB ze středu A' též kruhový oblouk dosti dlouhý; tím nabuda bodu C' opiš kolem C' kruhový oblouk druhý poloměrem BC; bod B', v němž se oblouky protínají, spoj s bodem A', i jest $A'=A$.

obr. 47.

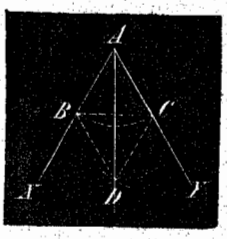


5. Rozpol úhel daný.

K rozřešení dává nám přímo věta §. LI. naučení takto:

Kolem vrcholu A (obr. 48.) úhlu daného XAY opiš poloměrem kterýmkoliv kruhový oblouk, jenž protne ramena v bodech B a C; z těchto bodů B i C opiš opět poloměrem kterýmkoliv (avšak dosti dlouhým) kruhové oblouky, jež se vespolek protnou v bodě D; *přímka AD rozpoluje úhel daný.*

obr. 48.



Důkaz. Veď přímky BD a CD; jest $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (§. XLXIII.), pročež $XAD=DAY$

6. Rozpol přímku danou.

Rozřeš. Kolem konců A a B (obr. 49). přímky dané opiš poloměrem kterýmkoliv, však dostatečně dlouhým, dva kruhy, jež se protnou ve dvou bodech C a D; *přímka CD, již vedeš, rozpoluje v O přímku danou AB.*

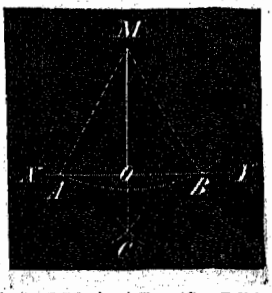
obr. 49.

Důkaz. Vedeme-li od bodů A i B přímky k bodům C i D, vzniknou dva trojúhelníky ABC a ADB rovnoramené na společné podstavě AB spočívající a protož jest $AO = OB$ (§. LI.)

7. Na přímku danou spusť kolmici s bodu daného.

Sestroj. Kolem bodu daného M (obr. 50.) opiš poloměrem dostatečně velikým kruhový oblouk, jímž se daná přímka XY protne v bodech A i B; kolem bodu A i B opiš poloměrem kterýmkoliv avšak jedním a dostatečně dlouhým oblouky, které se protnou v bodě C; *přímka MC, již vedeš, stojí na přímce dané kolmo v bodě O.*

obr. 50.



Důkaz. Veď přímky MA, MB, CA, CB, i stojí opět na společné podstavě AB trojúhelníky rovnoramené AMB a ACB, pročež $MO \perp AB$. (§. LI.)

8. V daném bodě na přímce dané postav kolmici.

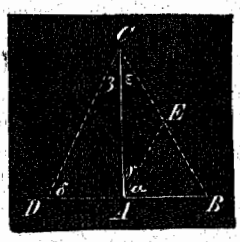
Sestroj. Na přímce XY (obr 50.) od bodu daného O vycházeje sřízni dvě úsečky po obou stranách bodu O jakkoliv dlouhé, však sobě rovné $AO = OB$; na přímce AB postav nějaký trojúhelník rovnoramený AMB a veď s jeho vrcholu M přímku MO, *a ta stojí kolmo na XY.*

Důkaz. §. LII. 3.

9. Na počátku (na konci) A dané přímky AX (obr. 51.) vztyč kolmici neprodlouživ přímky XA.

Rozbor. Buď $AC \perp AX$, t. j. buď kolmice žádaná již hotova. Kdybychom mohli prodloužiti BA, učinili bychom $DA = AB$, na DB postavili bychom trojúhelník rovnoramený DBC a kolmici CA bylo by snadno vésti. — Že však prostor nám nedovoluje míti úhel CAD, pročež místo přímky CD ohlídněme se po jiné v prostoru nám přístupném. I veďme $AE \parallel DC$, jest pak $\alpha = \delta$; $\gamma = \zeta$ (§. XVI. 4. a. b.).

obr. 51.



A poněvadž $\triangle CAD \cong CAB$, tedy $\zeta = \varepsilon$, $\delta = B$, pročež jest též $\alpha = B$, a $\gamma = \varepsilon$, pročež $AE = BE$, $AE = EC$ (§. XLI.) tudíž $BE = EC$. — Nyní rozjímejme: bod A jest dán, bod B můžeme zvoliti; na přímce AB spočívá trojúhelník AEB rovnoramený, a jeho strana BE jest na dvojnásobnou délku do C prodloužena a bodem C jde kolmice CA. Z toho jde:

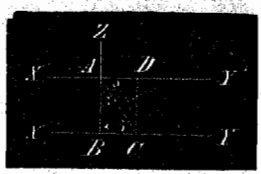
Sestroj. Odřízni přímku AB jakkoliv dlouhou, postav na ni

trojúhelník rovnoramený AEB (pročež $AE=BE$), prodluž BE, sřízni $EC=BE$, a veď CA, i jest $CAX=R$.

Důkaz. Poněvadž jest $AE=EB$, jest též $\alpha=B$ (§. XLIV.), a poněvadž jest $EC=BE=EA$, pročež jest též $\gamma=\varepsilon$ (§. XLIV.), pročež také $\alpha+\gamma=B+\varepsilon$, čili $\sphericalangle CAB=\varepsilon+B$, pročež $\sphericalangle CAB=R$, (§. XXXII. 3. c.)

10. Daným bodem A veď přímku rovnoběžně s přímkou danou XY (obr. 52.)

obr. 52.



Rozřeš. 1. S bodu A spusť kolmou $AB \perp XY$, na přímce AB v bodě A postav opět $AY' \perp AB$; i jest $AY' \parallel XY$.

Důkaz. §. XVI. 5. a.

Rozřeš. 2. Veď kterýmkoliv směrem z bodu A k dané přímce XY přímku AB, a odřízni BC jakékoliv velikosti na přímce XY; poloměrem BC kolem A a poloměrem AB kolem B opiš kruhové oblouky, jež se setkají v bodě D; *přímka AD, již vedeš, jest žádaná.*

Důkaz. Veď přímky AC a CD, i jest $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (§. XLVIII.), pročež $\varrho=\sigma$, tudíž $AD \parallel XY$, (§. XVI. 4. c.)

Ku cvičení podáváme ještě několik úloh, jak následuje:

11. Sestroj trojúhelník, jsou-li dány:

a) buď jedna strana a přilehlé k ní úhly (vůbec dva úhly),

b) aneb dvě strany a úhel jima sevřený,

c) aneb dvě strany a úhel proti delší straně položený.

12. Sestroj trojúhelník pravoúhlý, jsou-li dány:

a) buďto obě odvěsnice,

b) aneb jedna odvěsnice a podpona, aneb

c) jeden úhel ostrý a kromě něho ještě

α) buď podpona aneb β) odvěsnice přilehlá, aneb γ) odvěsnice protější.

d) aneb výška na podponu spuštěná a kromě ní ještě α) buď jedna odvěsna, β) neb jeden úhel ostrý, γ) neb jedna část (úseč) přetaté výškou podpony.

13. Sestroj trojúhelník rovnoramený, dány-li jsou:

a) buď podstava a jeden úhel buď α) přilehlý, aneb β) protější,

b) aneb podstava a výška příslušná,

c) aneb rameno a jeden úhel,

d) aneb rameno a výška na podstavu spuštěná,

e) aneb rameno a výška jemu příslušná,

f) aneb výška k ramenu příslušící a jeden úhel, α) buď na podstavě aneb β) na vrcholu,

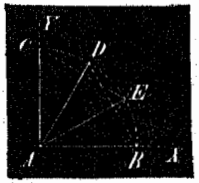
g) aneb výška k podstavě příslušící a úhel na vrcholu.

14. Rozděl pravý úhel na tré části sobě rovných.

Rozřeš. Kolem vrcholu A pravého úhlu XAY (obr. 53.)

kterýmkoliv poloměrem opiš čtvrt kruhu, jenž protne ramena v bodech B a C; kolem těchto bodů týmže poloměrem $AB=AC$ opiš kruhové oblouky, jimiž ona čtvrt kruhu se protne v bodech D a E; odtud veď přímky DA, EA, a *těma se dělí úhel, jak žádáno.*

obr. 53.



Důkaz čtonář veda zjednej si nejprv přímky CE a DB, a pak se opírej o §. XLIV. 2.

15. a) Sestroj úhel, jenž by se rovnal $=\frac{2}{3}R, \frac{1}{3}R, \frac{1}{6}R, \frac{1}{12}R$, atd. aneb $\frac{1}{2}R, \frac{1}{4}R, \frac{1}{8}R$, atd.

b) Sestroj trojúhelník rovnostraný, dána-li jest jeho výška.

c) Sestroj úhel, jenž by se rovnal součtu neb rozdílu úhlů daných.

d) Sestroj úhel $=\frac{11}{24}R=\frac{1}{3}R+\frac{1}{8}R$, aneb $=\frac{5}{24}R=\frac{1}{3}R-\frac{1}{8}R$.

e) Sestroj úhel, jenž by se rovnal několikonásobnému úhlu danému.

Přídavek.

Některá navedení k řešení úloh.

§. LV.

1. *Úlohou* (problema, Aufgabe) slove každá věta, jíž se projevuje žádost či rozkaz, aby vykreslen byl tvar, jenž by jistým vysloveným podmínkám zadost učinil.

2. Úloha jest buď *určitá* (bestimmt) aneb *neurčitá* (unbestimmt). *Určitá* jest, která toliko jeden tvar aneb toliko určitý počet tvarů od sebe rozdílných; *neurčitá* pak, která neobmezený počet rozdílných od sebe tvarů sestrojiti připouští.

Všechny hořejší úlohy (LIV.) byly určité, neurčitá jest ku př. tato: *na dané podstavě sestroj trojúhelník rovnoramený.*

3. Aby úloha byla určitou, musí býti dán dostatečný počet nezávislých na sobě podmínek; je-li o jednu neb o několik podmínek méně dáno, než třeba, stane se úloha neurčitou.

K sestrojení trojúhelníka jest třeba tří podmínek.

Někdy se zdá, jakoby podmínek dán byl počet nedostatečný, ačkoliv úloha přece jest určitá. Tehdy zajisté podmínky, kolik jich k žádanému počtu schází, jsou ve výpovědi skryty, i jest bedliti, aby se zřejmými ukázaly. Ku př. v úloze: *na dané podstavě sestroj trojúhelník rovnostraný* → jest na oko pouze *podstava* dána, v skutku však i *úhly* na ní položené aneb i druhé dvě strany.

4. Jako počet daných podmínek má býti dostatečný, tak s druhé strany nesmí určité meze přestoupiti, sice úloha stane se obyčejně *nemožnou.* (Srovn. §. XXXVIII.)

§. LVI.

1. Úlohy se *řeší*. K *řešení* (Lösung) patří: a) skutečné zdělání žádaného tvaru, což slove *sestrojením* (Construction); b) jest třeba, by se důvody dokázalo, že sestrojený tvar v skutku zadost činí výmínkám položeným, kteréžto provedení slove *důkaz* (Beweis). Důkazu smíme časem pominouti, kdykoliv ze sestrojení s úplnou jasností jde, že tvar výmínkám zadost činí.

2. Některá úloha dá se rozřešiti bez rozdílu, buďtež si dané podmínky v jakémkoliv, buď k sobě, buď k jiným určitým veličinám porovnání; ku př. *S bodu daného spusť kolmici na přímku danou.* — Jindy řešitelnost má své meze, které jsou položeny určitým porovnáním daných výmínek, buď k sobě, buď k jiným určitým veličinám. Řešíce úlohu musíme tyto meze vytknouti, což slove *omezením* (determinatio) úlohy; ku př. v úloze §. LIV. 1. musí *součet dvou stran býti větší, než strana třetí;* v úloze *11.* a) musí býti *součet úhlů daných menší než úhel přímý.*

3. Omezení úlohy týká se buď *velikosti* daných přímek, úhlů atd. jako v předchozích příkladech; aneb pouhé *polohy* jejich; ku př. majíce za úlohu opsati kruh, jenž by procházel třemi body danými, položíme omezení: *dané body nesmí ležeti v jediné přímce* (§. XLVI. 3. b.)

4. Omezení *odůvodňujeme*, i béřeme důvody buď ze známých vět naučných (jako v případech tuto uvedených) aneb z naskytlých se nám při sestrojování shod a neshod, jakož za příležité doby z příkladů poznáme.

§. LVII.

1. Nejhlavnější věcí při řešení úloh jest *sestrojení.* Ku zdařilému sestrojení vodí nás:

a) Známost *vět naučných*, kteréž zhusta přímo, kterak úlohu rozřešiti jest, ukazuje. Tak bylo ku př. v úloze §. LIV. 6.

b) Známost *geometrických míst*, k nimžto nám však opět dopomahá známost vět naučných. Srovn. §. XXII.

c) Známost úloh jiných — neboť

α) často postačí, danou úlohu *převésti* na úlohu jinou, jako bylo ku př. v úloze 4. §. LIV. na úlohu 1. převedené. Je-li nám řešení této jiné úlohy známo, dovedeme rozřešiti i danou;

β) jindy nám úloha jiná podává *obdobu* (Analogie) dle níž se spravujíce a při řešení příslušnou změnu činíce rozřešíme úlohu danou.

Obdoba v sestrojení má místa, když i mezi podmínkami jest obdoba jakási, t. j. když podmínky souhlasíce v podstatných stránkách v něčem se rozcházejí, což však opět na jediný vyšší rod uvésti se dá; jako ku př., když se má rozpoliti úhel *dutý*, a jinde zase úhel *přímý* t. j. když se má vztyčiti kolmice (§. LIV. 5. 8).

d) Známost *dat č. daného*, o čemž vysvětlení podáváme, jakož následuje:

2. Jako úlohu lze převáděti na úlohu jinou, jednodušší, známější: tak i dané podmínky na jiné převésti bývá prospěšno při řešení úloh. Místo daných přímek, úhlů, atd. zjednáváme si jiné, a to takové, které by se nám hodily a které z daných podmínek snadno si dovedeme sestrojiti. Je-li nám ku př. dán i součet

i rozdíl dvou stran trojúhelníka a úhel těmato stranama sevřený, najdeme si ze součtu a rozdílu daného strany samé i máme pak za to, jakoby nám dány byly dvě strany a sevřený jima úhel.

Tomuto prostředku díme po latinsku *data*, (řecky *δεδόμενα*) č. *dané*.

Za dané můžeme pak pokládati vše to, čehož nabyti dovedeme sestrojením nám již známým; ku př. dána-li poloha přímky a některý mimo ni bod, jest *dána* též pata kolmice s onoho bodu na přímku spuštěné; dány-li jsou úhel, jeho vrchol a poloha jednoho ramena, jest též dána poloha ramene druhého; dány-li jsou odvěsné, jest dána též podpona i výška k ní příslušná, atd.

§. LVIII.

1. Často jest úloha jednoduchá, i postačuje vzpomenouti si na některou větu neb na některé místo geometrické, abychom ji hned rozřešili. A vzpomenutí přichází samoděk jsouc vyslovenými výmínkami vzbuzeno, jako v skutku bylo téměř ve všech úlohách až posud řešených. Jindy bývá úloha složitější, a sestrojení žádaného tvaru nevznikne mžikem v mysli.

Tehdy vyhledávajíce, kterak bychom úlohu rozřešili, podnikáme *rozbor geometrický*.

2. Jest pak *rozbor geometrický* (geom. Analysis) protivou skladu či sboru (Synthesis). Podstata *skladu* záleží na vyvozování věci neznámé z věcí známých, i děje se takto: poněvadž mám a i b, mohu nalezti (sestaviti, učiniti atd.) c, a poněvadž mám pak a, b, c, dovedu učiniti d, a pročež i e, kteréž se žádalo. *Rozbor* jde cestou zpátečnou, a hledí se dovtípiti těch věcí, z kterých by neznámá nejprv přímo, pak nepřímo vyvésti se dala; i přemítáme na mysli, takto: abychom obdrželi (učinili, sestavili atd.) e, museli bychom míti d; d abychom měli, museli bychom míti (muselo by pravdou býti) c, k tomu však jest potřebí b i a; avšak b i a máme (jest pravdou, učiniti dovedeme atd.), pročež i c i d i e za povědomé pokládati sluší.

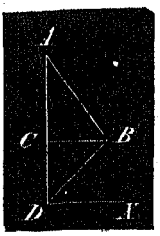
3. Nastupujíce na cestu geometrického rozboru pokládáme úlohu za rozřešenou, pročež žádaný tvar za hotový, a zpytujeme v něm všechny veličiny a body i dané i neznámé, kterak na sobě vespolek jsou zavěšeny, abychom od daných mohli dovodmo znenáhla přijíti k neznámým a žádaným. Jsme-li s rozborem u konce, t. j. podařilo-li se nám vyzpytovati, kterak k neznáným od daných lze dojíti: nemá již ani sestrojení ani důkaz obtíží, a třeba toliko nastoupiti na cestu směrem protivným. Však příklady to vysvětlí lépe.

§. LIX.

1. Sestroj trojúhelník pravoúhlý, dány-li jsou na podponě úhel α a součet s odvěsnic jeho.

Rozbor. Žádaný trojúhelník ABC (obr. 54.) buď hotov a v něm $\sphericalangle CAB = \alpha$, $AC + CB = s$, $\sphericalangle ACB = R$. Úhel $CAB = \alpha$ dovedeme sestrojiti (LIV. 4.), pročež prokládáme za dány jak vrchol A tak polohu přímek AC, AB, i jedná se o nalezení bodů B a C. Nyní

obr. 54.



hleďme danou přímku s do obrazce uvésti: to se stane, prodloužíme-li AC o část CB, t. $CD=CB$, i jest $AC+CD=AC+CB$ čili $AD=s$. Aby pak AD přišla do obrazce omezeného, veďme DB, a vedše zpytujme, čeho jsme nabyli.

Vyskytuje se nám předně trojúhelník BCD pravoúhlý a rovnoramený $(CDB=R,\ CD=CB)$; pročež jest $\sphericalangle CDB=\sphericalangle DBC=\frac{1}{2}R$. Za druhé máme trojúh. $\triangle ADB$ a v něm $AD=s$, $A=\alpha$, $ADB=\frac{1}{2}R$. Tento trojúhelník dovedeme sestrojiti (LIV. 11. a), pročež lze jej pokládati za daný; pročež jsou již body A, B, D dány; BC jest ale kolmice s bodu B na přímku AD spuštěná, již rovněž sestrojiti umíme (LIV. 7.), pročež jest i bod B dán a celý trojúhelník žádaný.

Sestrojení. Učiň $AD=s$, $\sphericalangle DAB=\alpha$ (§. LIV. 4.), $\sphericalangle ADX=R$ (LIV. 8. 9.); rozpol tento úhel (LIV. 5.) přímkou DB; s bodu B, kde se AB a DB setkají, spusť kolmou na AD (LIV. 7.), $BC\perp AD$: i jest $\triangle BAC$ trojúhelník žádaný.

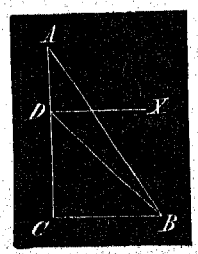
Důkaz. Poněvadž jest pravý úhel CDX přímkou DB rozpolen, máme v trojúh. BCD též $\sphericalangle DBC=\frac{1}{2}R$, a tudíž $CDB=DBC$, pročež $CB=CD$ (§. XLI.), tudíž $AC+CB=AC+CD$ čili $AC+CB=AD=s$.

Omezení. Úhel α musí býti ostrý.

2. Sestroj trojúhelník pravoúhlý, dány-li jsou úhel α na podponě a rozdíl d odvěsnic.

Rozbor. Buď žádaný trojúhel. $\triangle BAC$ hotov, a v něm $C=R$, $A=\alpha$, $AC-CB=d$. Abychom přímku d uvedli do obrazce (55.), sřízněme $CD=BC$, čímž bude $AD=AC-DC=AC-CB=d$.

obr. 55.



Tím jsme opět nabyli trojúh. $\triangle BCD$, v němž jest $\sphericalangle CDB=\sphericalangle DBC=\frac{1}{2}R$, pročež v trojúh. ADB jest $\sphericalangle ADB=R+\frac{1}{2}R$, i může se $\triangle ADB$ pokládati za daný, a spustíme-li pak kolmici $BC\perp AD$, jest i trojúh. BAC dán.

Sestrojení. Učiň $AD=d$, $DAB=\alpha$, $ADX=R$ prodluž AD a rozpol $\sphericalangle CDX$ přímkou DB, jež se s přímkou AB setká v B, s bodu B spusť na AC kolmici $BC\perp AC$: *i jest* $\triangle ABC$ *žádaný trojúh.*

Důkaz zůstaven čtenářovi.

Poznam. V této úloze přijato, že jest $AC > CB$. Jak pak by se rozbor i sestrojení přispůsobily, kdyby naopak $AC < CB$ bylo?

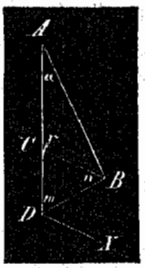
Dodatek. Mezi úl. 1. a 2. jest patrná *obdoba*: tam byl součet $b+a$, zde rozdíl $b-a$: vše jiné jest společné. V skutku i rozbor i sestrojení tu i tam jest velmi podobné, a protiva jeví se pouze tím, že strana CB na straně AC v obr. 54. sřízla se směrem AC, na obr. 55. směrem CA od bodu C počínajíc. V sestrojení rozpolil se v obr. 54. úhel ADX, v obr. 55. ale jeho úhel vedlejší.

3. Sestroj trojúhelník, jsou-li dány součet s dvou stran, úhel γ jima sevřený a úhel α ku třetí straně přílehlý.

Rozbor bude opět předešlému podoben, neboť úloha 3. liší se od úl. 1. pouze svou větší všeobecností.

I buď (obr. 56.) žádaný trojúhel. ABC hotov, a v něm $A=\alpha$, $\sphericalangle ACB=\gamma$, $AC+CB=s$. Prodluž AC, učiň $CD=CB$, a veď DB; i jest pak $AD=s$ a trojúhelník BCD rovnoramený, pročež $m=n$; avšak $\gamma=m+n$ (XXXII. 2.), tedy $m=\frac{1}{2}\gamma$. Tím jest dán trojúh. ABD, a poněvadž úhel $n=\frac{1}{2}\gamma$, jest dána i poloha přímky BC a pročež jest dán trojúh. žádaný.

obr. 56.



Sestrojení. Učiň $AD=s$, $DAB=\alpha$, $ADX=\gamma$; rozpol úhel ADX přímkou DB, jež protne přímku AB v bodě B, odtud veď $BC \parallel XD$, i jest $\triangle ABC$ trojúhelník žádaný.

Důkaz zůstaven čtenářovi.

Omezení. Součet úhlů daných musí býti menší přímého.

4. Sestroj trojúhelník, jsou-li dány rozdíl dvou stran, úhel jima sevřený, a úhel ku třetí straně přílehlý.

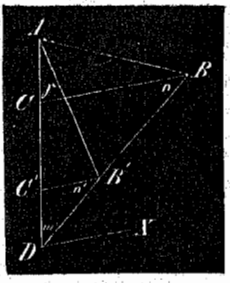
Rozřešení zůstaveno čtenářovi.

5. Sestroj trojúhelník, jsou-li dány součet s dvou stran, úhel γ jima sevřený a strana třetí c.

Rozbor bude předešlému podoben za příčinou podobnosti úloh.

Buď (obr. 57.) trojúhelník žádaný ACB hotov, a v něm $AC+CB=s$, $ACB=\gamma$, $AB=c$. Prodluž AC, sřízni $CD=CB$, a veď DB, i jest pak $DA=s$, $m=n$, a poněvadž $\gamma=m+n$, pročež $m=n=\frac{1}{2}\gamma$. V trojúhl. ABD jsou tedy známy dvě strany AD a AB a úhel m proti menší straně AB ležící: takový trojúhelník (vlastně dva §. XLVII. 5.) dovedeme sestrojiti, pročež jest dán i směr BC, tudíž i trojúh. žádaný.

obr. 57.



Sestrojení. Učiň $AD=s$, $ADX=\gamma$, rozpol ADX přímkou DB, kolem A opiš poloměrem c kruh, jenž protne přímku DB ve dvou bodech B i B', těma veď přímky rovnoběžné s DX, t. $BC \parallel B'C' \parallel DX$, i jest $\triangle ABC$ jakož i $\triangle AB'C'$ žádaný.

Důkaz zůstaven čtenářovi.

Omezení. Nejprv musí býti $s>c$ (§. XXXVI.); za druhé nesmí c býti menší než kolmice s bodu A na přímku DB spuštěná.

Poznam. 1. Je-li c tak veliké jako kolmice s A na DB spuštěná, vznikne trojúhelník rovnoramený. Proč?

Poznam. 2. Výsledek úlohy 5. liší se od předešlých i tím, že nakresliti lze dvou obrazců rozdílných, které vyhovují daným podmínkám, kdežto v předešlých úlohách pokaždé pouze jednoho obrazce jsme nabyli. V oněch úlohách položené výmínky postačují ku shodnosti obrazcův, v úloze poslední nepostačují, ačkoliv úloha sama též mezi určité náleží.

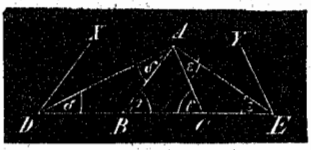
6. Sestroj trojúhelník, jsou-li dány rozdíl dvou stran, úhel jima sevřený a strana třetí.

Rozřešení zůstaveno čtenářovi.

7. Sestroj trojúhelník, jsou-li dány dva úhly β, γ a obvod s jeho.

Rozbor. Buď žádaný trojúhelník ABC (obr. 58,) hotov, a v něm $AB+BC+CA=s$; $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle BCA=\gamma$. Abychom do obrazce uvedli přímku s, prodlužme BC na obě strany a sřízněme $DB=AB$, $CE=CA$, a veďme přímky AD i AE: tím nabudeme $DE=s$, $\delta=\delta'$, $\varepsilon=\varepsilon'$; mimo to jest

obr. 58.



$\beta=\delta+\delta'$, $\gamma=\varepsilon+\varepsilon'$; pročež $\delta=\frac{1}{2}\beta$, $\varepsilon=\frac{1}{2}\gamma$: z toho jde, že trojúhel. BAC jest dán a poněvadž $\delta'=\frac{1}{2}\beta$, $\varepsilon'=\frac{1}{2}\gamma$, jest dána též poloha přímek AB i AC, pročež jest dán trojúhelník žádaný.

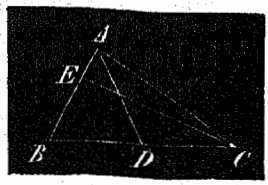
Sestrojení. Učiň $DE=s$, $EDX=\beta$, $DEY=\gamma$; tyto dva úhly rozpol přímkami DA i EA; průsekem A těchto přímek veď rovnoběžky s rameny DX a EY, t. $AB \parallel DX$, $AC \parallel EY$, i bude $\triangle ABC$ trojúh. žádaný.

Důkaz zůstaven čtenářovi.

8. Sestroj trojúhelník, jsou-li dány jedna strana a, příčná p k jejímu prostředku z protějšího vrchole vedená, a výška v na jinou stranu spuštěná.

Rozbor. Buď žádaný trojúhelník $\triangle ABC$ (obr. 59.) hotov, a vněm $BC=a, BD=DC=\frac{1}{2}a, AD=p, CE \perp AB,$ $CE=v$. Pouhým na obr. pohledem poznáváme, že pravoúhlý trojúhelník BEC lze za daný pokládati (LIV. 12. b.), pročež jsou dány body B, C, E, D; i třeba pouze vyhledati bod A. Tento však leží na prodloužené přímce BE, kteráž tedy jest jeho místem geometrickým; mimo to víme, že týž bod A má od daného bodu D danou vzdálenost p; apročež leží na kruhu, jejž poloměrem p opíšeme kolem středu D (XXII. 3.): a pročež jest i bod A dán, a tím i $\triangle ABC$.

obr. 59.



Sestrojení i *důkaz* i *omezení* zůstaveno čtenářovi.

9. Ku cvičení stůjte zde ještě tyto úlohy:

Sestroj trojúhelník, dány-li jsou:

a) buďto součet aneb *b*) rozdíl dvou stran, mimo to ale ještě třetí strana a jeden úhel ku třetí straně přilehlý;

c) aneb dvě strany a jedna výška příslušná buď ku třetí straně aneb k některé dané straně.

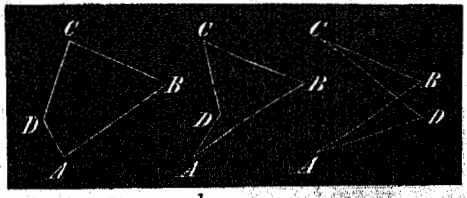
Knihy druhé část pátá.

O čtyrúhelnicích.

§. LX.

1. Čtyrúhelník má trojí tvar (obr. 60. a. b. c.) Ve čtyrúhelníku *a* jsou všecky úhly *duté*; otočíme-li o osu AC trojúh. CDA, vznikne čtyrúh. *b* aneb *c*. Čtyrúh. *b* má jeden úhel D vypuklý, zůstatní *duté*. Čtyrúh. *c* vznikne též z čtyrúhel. *b* proměnou; pošinujeme-li totiž na prodloužené straně CD vrchol D ku předu, zvětšuje se úhel vypuklý D a zmenšuje úhel dutý A až konečně tento netoliko zmizí, nébrž i na druhé straně přímky AB se vyskytne. Měli-li jsme v *a*. všechny úhly za

obr. 60.



a. b. c.

kladné, musíme v *c.* majíce úhly *B* a *C* za kladné míti úhel *DAB* za *záporný*, a za čtvrtý úhel jest pak míti úhel vypuklý *CDA*. Zůstatně sluší připomenouti, že čtyrúhelníka *c* obyčejně se ani nevzpomíná, když se o čtyrúhelnících mluví; nicméně pro úplnost a k uvarování některých poklesků nemohli jsme ho v této knize mlčením pominouti.

2. Dle vzájemné polohy stran rozeznáváme:

a) *rovnoběžník* (Parallelogramm), jehož oboje strany protější jsou rovnoběžné;

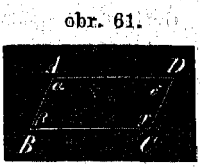
b) *lichoběžník* (Trapez) jehož jedny dvě protější strany jsou rovnoběžné, a druhé dvě různoběžné;

c) *různoběžník* (Trapezoid), jehož veškeré strany jsou různoběžné.

§. LXI.

1. O vnitřních úhlech v rovnoběžníku platí tyto věty:

obr. 61.



a) Součet dvou úhlů k téže straně přilehlých jest roveň přímému. Ku př. $\alpha+\beta=2R$ (obr. 61.)

Důkaz §. XVI. 4. c.

b) Úhly protější jsou si rovny, $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$.

Důkaz §. XIX. 1.

Z těchto vět vyplývá:

c) Je-li jeden úhel pravý, jsou i zůstatní pravými; a je-li jeden úhel kosý, jsou i zůstatní kosými, a sice dva z nich (protější) *ostrými, a dva* (protější) *tupými.*

2. Dle velikosti vnitřních úhlů rozeznáváme rovnoběžník *pravoúhlý* a *kosoúhlý* č. *pravoúhelník* a *kosoúhelník.*

§. LXII.

1. Úhlopříčnou rozpoluje se rovnoběžník na trojúhelníky jednostejné č. shodné.

obr. 62.

Důkaz. Buď (obr. 62.) $AB \parallel DC$, a $AD \parallel BC$; i jest pak $\alpha'=\gamma'$ $\alpha''=\gamma''$ (XVI. 4. b.) pročež $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (XL. 2.)

Z této shodnosti vyplývá $AD=BC$, $AB=DC$ (XL. 3.) to jest:

2. V rovnoběžníku jsou protější strany sobě rovny, čili: přímky rovnoběžné mezi rovnoběžnými jsou si rovny.

Z této zase věty a z §. *XVI. 5. a.* plyne výsledek:

3. *Kolmice mezi rovnoběžnými jsou si rovny*; čili: *všechny body jedné přímky mají od jiné přímky rovnoběžné stejnou vzdálenost.*

Tato věta dá se vysloviti i takto:

4. *a*) Geometrické místo všech bodů, které mají od dané přímky P určitou vzdálenost a, jest přímka s přímkou P rovnoběžná, jež prochází koncem kolmice zdélí a na přímce P kdekoliv postavené. Aneb:

b) Geometrické místo vrcholů všech trojúhelníků o určité výšce a na určité podstavě P spočívajících jest přímka s přímkou P rovnoběžná atd. jako svrchu.

Na základě věty 2. dá se toto místo všeobecněji vysloviti takto:

5. Geometrické místo všech bodů ležících na konci přímek zdélí a od dané přímky P odchýlených o úhel α jest rovnoběžná Q s přímkou danou P, již vedeme koncem přímky šikmé zdélí a k dekoliv na P postavené a o úhel α od P odchýlené.

Kterak znějí pravidla odtud vážená?

§. LXIII.

1. *Čtyrúhelník, jehož protější strany jsou si rovny, jest rovnoběžníkem.*

Důkaz. Buď (obr. 62.) $AB=DC$, $BC=AD$, vedeme-li úhlopříčnou AC, bude $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (§. XLVIII.), pročež $\alpha'=\gamma'$, $\alpha''=\gamma''$ (XL. 3.); odtud plyne $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$ (§. XVI. 4. e).

2. *Čtyrúhelník, jehož dvě protější strany jsou si rovny a rovnoběžny, jest rovnoběžníkem.*

Důkaz. Buď (obr. 62.) $AD=BC$, $AD \parallel BC$, pročež vedeme-li AC, jest $\alpha''=\gamma''$ (XVI. 4. b.) a proto $\triangle ACB \cong \triangle CAD$ (§. XLIII. 2); odtud jde $\alpha'=\gamma'$ pročež $BA \parallel CD$.

3. *Přímka, jejíž dva body od jiné přímky mají rovné vzdálenosti, jest s touto jinou přímkou rovnoběžná.*

Důkaz zůstaven čtenářovi.

§. LXIV.

1. Dle poměru stran rozeznává se rovnoběžník *rovnostranný*, jehož všechny čtyry strany jsou si rovny; a rovnoběžník *nerovnostranný*, jehož sousedné strany jsou si nerovny.

2. Majíce zřetel k poměru i úhlů i stran rozeznáváme:

a) rovnoběžník pravoúhlý rovnostranný č. *čtverec* (Quadrat); kterýž jest zároveň čtyrúhelníkem pravidelným;

b) rovnoběžník kosoúhlý rovnostranný č. *kosočtverec* (Rhombus);

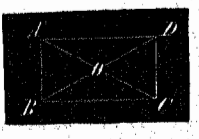
c) rovnoběžník pravoúhlý nerovnostraný č. *obdélník* (Oblongum);

d) rovnoběžník kosoúhlý nerovnostraný č. *kosodélník* (Rhomboid). Čtverec a obdélník mají společné jmeno *pravoúhelníka*.

§. LXV.

1. *V pravoúhelníku jsou úhlopříčné sobě rovny.*

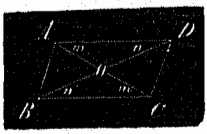
obr. 63.



Důkaz. Buď (obr. 63.) $ABCD$ pravoúhelník, AC a BD jeho úhlopříčné: jest pak $AB=DC$ (LXII. 2.) a pročež $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (XLIII. 2.) odtud $AC=BD$.

2. *V kosoúhelníku jest úhlopříčná, která protíná úhel ostrý, delší, než druhá.*

obr. 64.



Důkaz. Buď (obr. 64.) $ABCD$ kosoúhelník, a v něm úhly A i C tupé, B i D ostré, AB a BD úhlopříčné. V trojúh. ABC a BCD jest pak $BC=BC$, $AB=DC$, $\sphericalangle ABC < \sphericalangle DCB$, pročež $AC<BD$ (XLIX. 1.).

3. *Rovnoběžník, jehož úhlopříčné si jsou rovny, jest pravoúhelným; jsou-li ale jeho úhlopříčné si nerovny, jest on sám kosoúhlým.*

Důkaz zůstaven čtenářovi.

§. LXVI.

1. *V rovnoběžníku rozpolují se úhlopříčné na vzájem.*

Důkaz. Buď (obr. 64.) $ABCD$ rovnoběžník, pročež jest $AD \parallel BC$, tudíž $m=m'$, $n=n'$, a (dle §. LXII. 2.) $AD=BC$, z toho jde $\triangle AOD \cong \triangle COB$ (§. XL. 2.), pročež $DO=OB$, $AO=OC$.

2. *Čtyrúhelník, jehož úhlopříčné na vzájem se rozpolují, jest rovnoběžníkem.*

Důkaz. Buď (obr. 64.) $AO=OC$, $DO=OB$, i jest též $\sphericalangle AOD = \sphericalangle COB$, pročež $\triangle AOD \cong \triangle COB$ (§. XLIII. 2), tudíž $n=n'$, $m=m'$, a proto $AD \parallel BC$. Týmž spůsobem dokáže se $AB \parallel DC$.

3. Každá příčka průsekem úhlopříčných k protějším stranám rovnoběžníka vedená, rozpoluje se v řečeném průseku.

Důkaz dej čtenář.

§. LXVII.

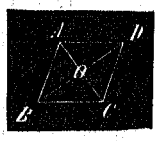
1. *V rovnoběžníku rovnostraném stojí úhlopříčné na sobě kolmo a rozpolují vnitřní úhly* (obr. 65.).

Důkaz veď čtenář jako v §. LI.

2. *Rovnoběžník, jehož úhlopříčné na sobě kolmo stojí, jest rovnostraným.*

Důkaz. Buď (obr. 65.) $ABCD$ rovnoběžník, a v něm $DB \perp AC$; i jest $AO = OC$ (§. LXVI. 1.), $OD = OD$, $AOD = DOC = R$, pročež $\triangle AOD \cong \triangle COD$ (§. XLIII. 2), tudíž $AD = CD$. Rovněž se dokáže $AB = AD$ atd.

obr. 65.



3. Čtyrúhelník, jehož úhly se úhlopříčnými rozpolují, jest rovnoběžníkem rovnostraným.

Čtenář podej důkaz, a zároveň rozhodni o výmínce, kdy rovnoběžník jest čtvercem a kdy kosočtvercem.

4. a) V rovnoběžníku nerovnostraném stojí úhlopříčné na sobě šikmo, a dělí úhly rovnoběžníka na části nerovné.

b) Rovnoběžník, jehož úhlopříčné na sobě šikmo stojí, jest nerovnostraný.

c) Rovnoběžník, jehož úhly vnitřní úhlopříčnými se dělí na části nerovné, jest nerovnostraným.

Čtenářovi zůstaveno, by podal důkaz a vyzpytoval, který z řečených úhlů, aneb která část jest větší, neb menší.

§. LXVIII.

1. *Dvě přímky mezi rovnoběžnými, majíce k nim stejnou sklonitost, ale na stranách protivných, jsou si rovny a sbíhavy.*

Důkaz. Buď (obr. 66.) $AD \parallel BC$, $B = C < R$, pročež jsou BA a CD přímky sbíhavé; veď $DE \parallel AB$, i bude $\varepsilon = B$, a $DE = AB$, pročež také $\varepsilon = C$, a proto $CD = ED = BA$.

obr. 66.

2. Čtenář ku cvičení se v důkazích hleď o lichoběžníku odůvodniti tuto větu:

Je-li jedna z následujících podmínek pravá neb křivá (nepravá), jsou pravými neb křivými (nepravými) i všecky zůstatní: *a*) Rovnost dvou úhlů B a C (obr. 66) přílehlých k jedné straně rovnoběžné; *b*) rovnost úhlů přílehlých ku straně protější; *c*) rovnost stran různoběžných; *d*) rovnost úhlopříčných; *e*) rovnost jejich úsečí, k jedné straně rovnoběžné přílehlých; *f*) kolmé postavení přímky na stranách rovnoběžných vedené k jejich prostředkům; *g*) setkání se stran roznoběžných s kolmicí na prostředku jedné rovnoběžné strany postavené v jediném bodě společném.

§. LXIX.

Určenost čtyrúhelníkův.

1. Čtyrúhelník má čtyry strany a čtyry úhly. Z úhlů mohou toliko tři nezávislými býti, čtvrtý jest závislý: neboť součet všech jest $=4R$. Zůstatně musí aspoň dva z nich býti duté a kladné (srov. §. LX.), druhé dva jsou buď oba duté i kladné, neb jeden z nich jest vypuklý, a druhý dutý, buď kladný, buď záporný; kladný, když součet prvých tří nedosahuje $4R$, záporný, když sončet oněch převyšuje $4R$.

2. Z těchto osmero částí postačuje k dokonalému určení čtyrúhelníka vůbec patero, a sice, když jsou dány:

a) tři úhly, a dvě strany sousedné;

b) tři strany, a sevřené jimi dva úhly;

c) tři strany, a dva úhly protější.

Jinými pěti částmi nebývá čtyrúhelník dokonale určen, a ~~sice~~, to když jsou dány:

d) tři úhly, a dvě strany protější;

e) tři strany, a dva úhly přilehlé ku straně čtvrté;

f) tři strany, a dva úhly sousedné, z nichž jeden ku straně čtvrté přiléhá;

g) čtyry strany a jeden úhel.

3. V lichoběžníku, který má samé duté úhly, spočívá jedna podmínka již v rovnoběžnosti dvou jeho stran, a z toho jde:

α) jsou-li dva úhly dány, které přiléhají k jedné straně rovnoběžné, jsou i druhé dva dány, jsouce na oněch závislými; vůbec z každého dvé úhlů, k různoběžné straně přílehlých, jeden jest závislý na druhém;

β) k dokonalému určení lichoběžníka jest třeba a postačuje čtvero částí, na sobě nezávislých, a to:

a) dva úhly přilehlé k jedné rovnoběžné straně, aneb i dva úhly protější, a mimo ně ještě dvě strany sousedné;

přidej *b) tytéž dva úhly a dvě strany rovnoběžné;*

c) jeden úhel, strany jej svírající, a druhá strana rovnoběžná;

d) všechny strany.

4. V rovnoběžníku jsou již dvě podmínky mlčky dány, t. j., že protější strany jedny i druhé jsou rovnoběžné. Z toho vysvítá, že toliko jeden úhel jest nezávislý; a poněvadž protější strany

si jsou rovny, pročež jsou pouze dvě strany sousedné nezávislými; konečně jest patrno, že k dokonalému určení rovnoběžníka jest třeba i postačuje tré částí na sobě nezávislých. I díme:

a) Rovnoběžník jest dokonale určen dvěma sousedními stranami a jedním úhlem.

Podobné rozjimání vede nás k větám:

b) Pravoúhelník jest dokonale určen dvěma stranami sousednými;

c) Kosočtverec jest dokonale určen jednou stranou a jedním úhlem.

d) Čtverec jest dokonale určen jednou stranou.

Čtenář hleď z částí zde (v odst. 2. 3. 4.) daných sestrojiti příslušné obrazce, a co tuto o dokonalé určenosti tvrzeno jest, dokázati.

5. Ku cvičení stůjte zde ještě tyto úlohy:

a) Sestroj rovnoběžník, jsou-li dány:
- *α)* dvě strany sousedné a úhlopříčná;
- *β)* jedna strana a obě úhlopříčné;
- *γ)* obě úhlopříčné, a úhel, jejž na svém průseku svírají;
- *δ)* podstava, výška (t. kolmice mezi podstavou a protější stranou), a úhlopříčná.

b) Sestroj pravoúhelník, jsou-li dány:
- *α)* jedna strana a úhlopříčná;
- *β)* úhlopříčná a úhel, jejž svírají obě úhlopříčné.

c) Sestroj kosočtverec, jsou-li dány:
- *α)* úhlopříčná a úhel protější;
- *β)* úhlopříčná a vnitřní úhel, jejž protíná.
- *γ)* obě úhlopříčné.

d) Sestroj čtverec, je-li dána úhlopříčná.

Knihy druhé část šestá.

O mnohoúhelnících pravidelných.

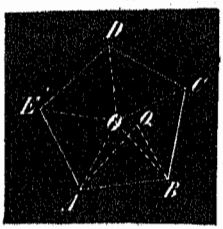
§. LXX.

1. *Středem* mnohoúhelníka pravidelného nazývají bod *O*, který má ode všech hran rovné vzdálenosti (obr. 67.). Přímky od středu ku hranám vedené zovou se *paprsky*.

2. *Mnohoúhelník pravidelný nemůže míti více než jednoho středu.*

Důkaz. Buď (obr. 67.) *O* střed mnohoúhelníka pravidelného *ABCDE*, pročež $OA = OB = OC$; buď pak *Q* jiný bod v témž úhelníku; veďme *QA* i *QB*. Z rovnosti $OA = OB$ plyne $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$

obr. 67.

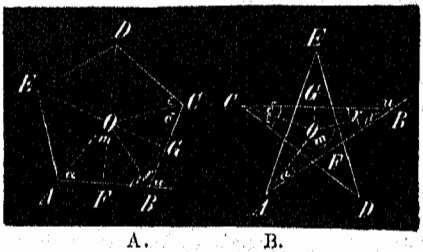


pročež $QAB < QBA$, tedy $QA > QB$ t. j. Q nemůže býti středem zároveň s bodem O. Totéž platí, kdyby Q ležel na paprsku OB.

3. *Přímky, jimiž se vnitřní úhly mnohoúhelníka pravidelného rozpolují, procházejí středem jeho, kdež se vesměs protínají.*

Důkaz. Buď (obr. 68.) mnohoúhelník pravidelný; O buď průsek přímek AO i BO, jimiž se dva sousedné úhly rozpolují (§. XIX. 6.); i vznikne trojúhelník AOB, v němž jest $\alpha = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B = \beta$, pročež $OA = OB$. — Veďme nyní OC, i bude $\beta = \gamma = \frac{1}{2}B$, $AB = BC$, $OB = OB$, pročež $\triangle AOB \cong \triangle BOC$, a

obr. 68.



A. B.

tím $OC = OA = OB$, $\delta = \alpha = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}C$; odtud i $\varepsilon = \frac{1}{2}C$. Co jsme poznali o paprsku OC, lze nyní dokázati o paprsku následujícím OD atd. Bod O tedy jest ode všech hran stejně daleko položen, tudíž středem. Pročež každá přímka rozpolující úhel jde středem, a poněvadž není více než jednoho středu, protínají se všecky ty přímky rozpolovací v době jediném.

4. *Paprsky rozdělují mnohoúhelník pravidelný na samé rovnoramené i shodné trojúhelníky; a rozpolují úhly vnitřní.*

Důkaz zůstaven čtenářovi.

5. *Všechny úhly, sousednými paprsky (t. j. těmi, které jsou vedeny k hranám sousedným) sevřené, jsou si rovny.*

Důkaz zůstaven čtenářovi.

6. *Úhel, dvěma paprsky sousednými sevřený, rovná se úhlu vnějšímu mnohoúhelníka pravidelného.*

Důkaz. Vnější úhel buď u (obr. 68.) při B; jest pak $u + \gamma + \beta = 2R$; ale v trojúhelníku AOB jest $\alpha + \beta + m = 2R$; pročež $u + \gamma + \beta = \alpha + \beta + m$; jest ale $\gamma = \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}A = \alpha$, pročež $u = m$.

Z toho plyne:

7. *V n-úhelníku pravidelném m-tého řádu jest úhel na středu* t. j. *úhel dvěma sousednými paprsky sevřený roven* $= \frac{2m.2R}{n}$; pročež v n-úhelníku obecném (prvého řádu) $= \frac{4R}{n}$;

v n-úhelníku druhého řádu $=\frac{8R}{n}$,

v n-úhelníku třetího řádu $=\frac{12R}{n}$ atd.

8. *Střed mnohoúhelníka pravidelného má ode všech stran jeho rovné vzdálenosti*; a *kolmice se středu na stranu spuštěná rozpoluje i úhel středový* (t. sousednýma paprsky sevřený) *i stranu.*

Důkaz. Buďtež OF i OG (obr. 68.) kolmice na strany AB i BC, mnohoúh. spravidelného, puštěné; i jest $\beta=\gamma$, $\sphericalangle OFB=\sphericalangle OGB=R$, pročež i $\sphericalangle BOF=\sphericalangle BOG$ a tím $\triangle OBF\cong\triangle OBG$, odtud $OF=OG$. Za druhé: poněvadž $\triangle AOB$ jest trojúh. rovnoramený, pročež se jeho výškou OF rozpoluje i podstava AB i úhel m na vrcholu.

9. *Všechny kolmice uprostřed stran mnohoúh. pravidelného vztyčené procházejí středem O, kdež se vesměs protínají.* Důkaz dej čtenář.

10. Čtenářovi zůstavuje se o mnohoúhelníku pravidelném dokázati ještě tyto věty:

a) Je-li počet stran sudý (v sudoúhelníku), leží proti každé straně jiná strana rovnoběžná; je-li však počet stran lichý (v lichoúhelníku), jsou všechny strany jeho různoběžné.

b) V sudoúhelníku každý paprsek protivným směrem prodloužen prochází ještě druhou hranou protější; a každá příčná středem až k obvodu vedená protíná se středem na dvé rovných si části. (Odtud jmeno střed).

c) V lichoúhelníhu paprsek protivným směrem prodloužen přichází na protější stranu, již rozpoluje, kolmo; a mezi příčkami středem k obvodu vedenými ku stranám protějším, jest vždy jen jedna, která se ve středu rozpoluje, všecky jiné dělí se na části nerovné. (Z té příčiny mluvíme o *středu* lichoúhelníka toliko ve smyslu rozšířeném).

§. LXXI.

1. V n-úhelníku pravidelném jest již každý vnitřní úhel napřed určen, jsa roveň $=\frac{n-2m}{n}\cdot 2R$, pročež v obecném n-úhelníku $=\frac{n-2}{n}\cdot 2R$, a strany jeho jsou si vesměs rovny. Z toho jde, že k dokonalému určení n-úhelníka pravidelného postačuje a jest třeba udati *délku strany*, a *řád* jeho: t. j. má-li to býti n-úhelník obecný č. řádu 2ho, 3ho atd. (hvězdovitý).

2. *Spojíme-li přímkami konce sousedných paprsků sobě rovných, kteréž z téhož bodu O* (obr. 68.) *vycházejíce působí vesměs úhly sobě rovné, z nichž jedenkaždý obnáší několikátou část čtyr pravých aneb m-násobné této části: tehdy vznikne mnohoúhelník pravidelný obecný aneb hvězdovitý řádu m-tého.*

Důkaz. Buď (obr. 68.). $OA = OB = OC = OD$ atd. pak $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD =$ atd. $= m\frac{4R}{n}$; tehdy máme samé úhly stečné, jichž krajná ramena v jedno splývají. Z té příčiny vznikne zajisté n-úhelník.

Zároveň jest $\triangle AOB \cong \triangle BOC \cong \triangle COD \cong$ atd. (§. XLIII.), protož $AB = BC = CD$ atd. t. j. všechny strany n-úhelníka jsou si rovny. A poněvadž tyto trojúhelníky jsou zároveň rovnoramené, pročež jest $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon$ atd.; odtud plyne $\beta + \gamma = \delta + \varepsilon$ či $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$ a týmž spůsobem $\sphericalangle BCD = CDE$ atd. t. j. všechny vnitřní úhly jsou si rovny. Pročež n-úhelník jest pravidelným.

Z toho poznáváme:

3. Dovedeme-li sestrojiti úhel tak veliký, jaký se požaduje na středu n-úhelníka pravidelného; a dovedeme-li (§. LIV. 13. a.) pak sestrojiti trojúhelník rovnoramený (AOB. obr. 68.), jehož podstava (AB) i s protějším úhlem jsou dány: pak dovedeme též sestaviti mnohoúhelník pravidelný.

4. Pravý úhel umíme sestrojiti; též jej umíme na 2 neb 3 rovné části a každý úhel na dvé rovných částí rozděliti: pročež lze sestrojiti úhel, jenž by se rovnal buďto $= \frac{R}{3.2n}$ aneb $= \frac{R}{2n}$, a máme-li jej, dovedeme sestrojiti i každé násobné jeho.

Pročež majíce to, dovedeme sestrojiti troj-, čtyr-, šesti-, osmi-, dvanácti-, šestnácti-, vůbec *2n-úhelník* i *3.2n-úhelník* buď obecný, buď kteréhokoliv vyššího řádu hvězdovitý (odst. 2.).

Kniha třetí.

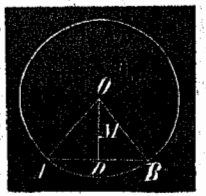
O kruhu.

§. LXXII.

Poloha středu k tetivě.

1. Vedeme-li ze středu O (obr. 69.) v kruhu poloměry ku koncům tetivy AB, vznikne trojúhelník rovnoramený AOB t. j. $OA = OB$ (§. XXI. 2.). Změníme-li pak názvy, říkajíce *tetiva, poloměr, střed kruhu, úhel středový, svislá* na místě *podstava, rameno, vrchol, úhel na vrcholu, výška* trojúhelníka rovnoramenného: uznáme jednostejnost vět v §. LII. dokázaných s větami těmito:

obr. 69.



a) Přímka, která rozpoluje úhel středový, stojí kolmo na tetivě u prostředku jejím (§. LII. 1.).

b) Svislá (OD obr. 69.) rozpoluje tetivu i úhel středový. (§. LII. 2.)

c) Přímka vedená ode středu kruhu ku prostředku tetivy, rozpoluje úhel středový a stojí na tetivě kolmo (§. LII. 3.).

d) Kterýkoliv bod M na přímce, která uprostřed tetivy kolmo jest vztyčena, má od konců tetivy rovné vzdálenosti; a každý bod mimo tuto kolmou položený má od těchže dvou bodů nerovné vzdálenosti (§. LII. 4. 5.); pročež:

e) Střed kruhu nemůže ležeti mimo přímku, která jest uprostřed tetivy jeho vztyčena; a

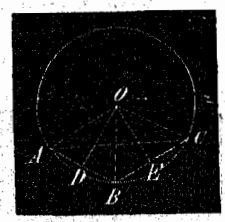
f) Kolmice na tetivě u jejím prostředku vztyčená prochází středem kruhu a rozpoluje úhel středový (§. LII. 6.).

2. Z vět *e)* a *f)* následuje:

Geometrické místo pro středy všech kruhův, které dvěma bodoma *A* i *B* (obr. 69) probíhají (aneb: které nad tetivou *AB* danou opsány jsou), jest kolmice v prostředku přímky *AB* vztyčená.

Kterak zní pravidlo odtud vážené?

obr. 70.



Příklady. a) Vyhledej střed daného kruhu aneb daného oblouku kruhového.

Rozř. Veď v kruhu aneb oblouku *ABC* (obr. 70.) dvé tetiv různoběžných *AB* a *BC*, rozpol je a v rozpolovacích bodech *D* a *E* postav kolmice: jejich průsek *O* jest střed hledaný.

Poznam. Je-li dán celý kruh, postačuje jedna tetiva a uprostřed ní kolmice; tuto kolmici prodlužme, až na obou stranách se dotkne obvodu; i majíce tak průměr rozpolme jej, a obdržíme střed.

b) Třemi body danými A, B, C veď kruh.

Rozřeš. Veď přímky *AB, BC,* (obr. 70.) rozpol je v *D* a *E,* v jejich prostředku postav na ně kolmice *DO* i *EO,* a kolem jejich průseku *O* opiš poloměrem *OA* kruh, jenž jest žádaný.

Důkaz. $OA = OB = OC$ (odst. 1. *d.*)

Omezení. Aby se kolmice *DO* i *EO* protaly, nesmějí býti rovnoběžné; aby nebyly rovnoběžné, nesmí býti úhel *ABC* přímý; t. j. dané body *A, B, C* nesmějí ležeti na jedné přímce (srovnej XLVI. 3. b.).

Poznam. Jindy se tato úloha pronášívá těmito slovy:

c) Opiš kruh, jenžby probíhal vrcholy trojúhelníka daného; aneb: opiš kruh o trojúhelník daný *ABC.*

3. Poněvadž střed kruhu třemi body A, B, C (obr. 70.) vedeného nemůže ležeti ani mimo kolmici DO ani mimo EO (odst. 1. e.), pročež nemůže středem býti než jediný bod O, v němž se řečené kolmice protínají. Odtud věta:

a) Třemi body danými lze pouze jeden kruh vésti, čili: *Třemi body danými jest kruh dokonale určen;* a pročež také:

b) Dva kruhy nemohou se protínati ve třech ani ve více bodech.

4. Čtenář hleď dokázati větu:

Kolmice na stranách trojúhelníka v jejich prostředku vztyčené protínají se v bodě jediném, jenž ode všech hran má rovné vzdálenosti.

§. LXXIII.

Úhel středový, tetiva a oblouk.

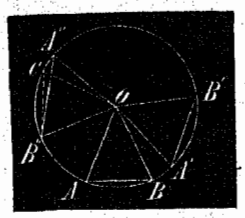
1. *V témž kruhu* (aneb ve dvou jednostejných kruzích) *přísluší:*

a) ku stejným úhlům středovým stejné oblouky i stejné tetivy;

b) k větším úhlům středovým větší oblouky a tetivy.

Důkaz. Buď a) (v obr. 71.) $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$, tehdy náležitě na sebe položeny pokryjí se tyto úhly, a za příčinou rovnosti všech poloměrů téhož kruhu pokryjí se též příslušné tetivy i oblouky, a pročež jest $AB = A'B'$, a *arc.* $AB =$ *arc.* $A'B'$. Buď b) $\sphericalangle A''OB'' > \sphericalangle AOB$; učiňme tehdy $\sphericalangle COB'' = \sphericalangle AOB$, i jest pak

obr. 71.



arc. $A''B'' >$ *arc.* $CB'' =$ *arc.* AB.

Z těchto dvou vět pospolu jde, že přísluší:

c) ku stejným obloukům stejné úhly středové i stejné tetivy;

d) k větším obloukům větší úhly středové;

Důkaz vede se buď z nemožnosti záporu, aneb přímo z úplného neb částečného pokrytí.

Mimo to tvrdíme:

2. *Každá tětiva přísluší ku dvěma úhlům středovým, které se doplňují na 4R, jakož i ku dvěma obloukům, které se doplňují na celý obvod.*

3. *K větším úhlům středovým jsou-li* { *duté* / *vypuklé* } *přísluší a témž kruhu* { *větší* / *menší* } *tětivy.*

Důkaz. Buď (obr. 71.) $\sphericalangle AOB < A''OB'' < 2R$, i bude v $\triangle AOB$ a $\triangle A''OB''$ (dle §. XLIX. 1.) $AB < A''B''$. — Buď ale (obr. 71.) $2R < A''OB'' < AOB$, pak jsou doplňky těchto vypuklých úhlů na $4R$ tím menší, čím větší jsou ty úhly samy, a tím opět $AB < A''B''$.

4. *Ku stejným tetivám příslušící úhly jsou si buď rovny, aneb se na 4R doplňují;* a taktéž *oblouky jsou si buď rovny, aneb se na celý obvod doplňují.*

5. *K větším tetivám přísluší větší úhly středové duté,* a *menší vypuklé; a rovněž k nim přísluší* $\left\{\begin{matrix}\text{větší}\\ \text{menší}\end{matrix}\right\}$ *oblouky, jsou-li napnuty nad příslušnými úhly středovými* $\left\{\begin{matrix}\text{dutými}\\ \text{vypuklými}\end{matrix}\right\}$.

Důkazy zůstaveny jsou čtenářovi.

§. LXXIV.

1. *Je-li úhel středový roveň* $\frac{2}{3}R$, *rovná se příslušící k němu, tetiva poloměru;* naopak: *rovná-li se tetiva poloměru, jest příslušný k ní úhel dutý roveň* $\frac{2}{3}R$.

Důkaz dej čtenář.

2. *Přímka, jíž se středový úhel rozpoluje, rozpoluje též příslušný oblouk; a přímkami, jimiž se středový úhel dělí na části rovné, dělí se též příslušný oblouk na tolikéž částí sobě rovných* (§. LXXIII. 1.).

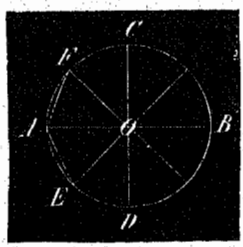
Pročež:

Je-li úhel 4R kolem středu O rozdělen na samé části rovné, dělí se i obvod kruhu na tolikéž částí sobě rovných: a naopak

Je-li obvod na samé rovné částí rozdělen, dělí se též paprsky ze středu vedenými úhel 4R středový na tolikéž rovných částí.

3. Rozděl kruh na 2, 4, 8, 16, 32 atd. částí sobě rovných.

obr. 72.



Rozř. α) Veď (obr. 72.) průměr AB, i jest kruh rozpolen (§. XXI. 7.). —

β) na průměru AB v středu postav kolmo $CD \perp AB$, i jest kruh rozčtvrcen, neboť $\sphericalangle AOC = COB = BQD = DOA = R$, a pročež *arc.* $AC =$ *arc.* $CB =$ *arc.* $BD =$ *arc.* DA.

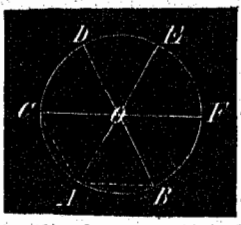
γ) Rozpol každý úhel středový, tím se i oblouky rozpoltí, a bude kruh na 8 rovných částí rozdělen.

δ) Podobně pokračuje rozdělíš na 16, 32, 64 atd. rovných částí.

Poznam. Tento výkon dá se zjednodušiti, užije-li se věty LXXIII. 4. Rozpolíme totiž pouze jeden úhel AOD, změříme tetivu AE a položíme tetivu $AF = AE$ a t. p.

4. Rozděl kruh na 3, 6, 12, 24, 48 atd. rovných částí.

obr. 73.



Rozřeš. *α*) Poloměrem daného kruhu opiš kolem kteréhokoliv na obvodě bodu A (obr. 73), oblouk, jenž protne kruh v bodech B a C; těmito třemi body veď průměry, kterýmiž se kruh dělí na 6 rovných částí.

Důkaz spočívá na odst. 1.

β) Vezma po 2 šestinách kruhu máš jej na tré rovných částí (v bodech A, D, F), jestli ale rozpolíš oblouky (č. úhly středové) máš na 12, a tyto opět rozpoliv, na 24, atd. rovných částí rozdělen.

Poznam. 1. Kterak na 5, 10, 20, 40 a t. d., jakož i na 15, 30, 60 atd. rovných částí kruh se dělí, bude později vysvětleno.

Poznam. 2. Nabyvše několikáté části obvodu ustanovíme snadno oblouk, jenžby několikkráte větší byl, spojíme-li tolikéž rovných části do částí jediné.

5. V daném kruhu opiš n-úhelník pravidelný.

Rozřešení. Obvod rozděl na n rovných částí a sousednými body dělícími veď tetivy. (Srovnej LXXI.)

Úlohy zvláštní znějí: opiš v daném kruhu čtverec, aneb pravidelný 8-, 16-, 32-, 64úhelník atd.; aneb pravidelný 3-, 6-, 12-, 24-, 48-úhelník atd.

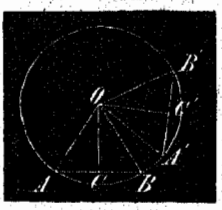
6. Opiš kruh, dána-li jest tetiva a příslušný úhel středový.

§. LXXV.

Tetiva a svislá.

1. *V témž kruhu* (aneb v jednostejných kruzích) *přísluší*:
a) *ku stejným tetivám stejné svislé,*
b) *k delším tetivám kratší svislé.*

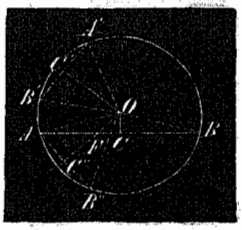
obr. 74.



Důkaz. a) Buď (obr. 74.) $AB = A'B'$, $OC \perp AB$, $OC \perp A'B'$. V trojúhelníku rovnoramenném rozpoluje se výškou podstava, pročež jest $AC = BC = \frac{1}{2}\ AB$, $A'C' = C'B' = \frac{1}{2} A'B'$, a poněvadž jest $AB = A'B'$, pročež také $AC = A'C'$, a proto $\triangle AOC \cong \triangle A'OC'$ (§. XLVII. 4.); z toho plyne $OC = OC'$.

b) Buď (obr. 75.) $AB > A'B'$; $OC \perp AB$; $OC \perp A'B'$; jest nám dokázati $OC' > OC$. Veď poloměry OA, OB, OA', OB'; i jest $\sphericalangle AOB < 2R$, $\sphericalangle A'OB' < 2R$, a poněvadž jest $AB > A'B'$, pročež i $\sphericalangle AOB > A'OB'$ (§. LXXIII. 5.); učiň tehdy $\sphericalangle AOB'' = \sphericalangle A'OB'$; veď AB'' a spusť kolmou $OC'' \perp AB''$; tu jest $AB'' = A'B'$ (§. LXXIII. 1. a), a $OC'' = OC'$ (odst. 1. a.). Přímka OC'' protíná tetivu AB v bodě F, a jest $OC'' > OF$, v trojúh. pravoúhlém OCF jest $OF > OC$ (XLII. 2. a.): z toho jde $OC' = OC'' > OF > OC$ t. j. $OC' > OC$.

obr. 75.



2. Z těch dvou vět vyvozujeme převrácené:

V témž kruhu (aneb v kruzích jednostejných) *přísluší:*

a) *ku stejným svislým stejné tetivy;*

b) *k delším svislým kratší tetivy.*

Důkaz zůstaven čtenářovi.

3. *Průměr kruhu jest nejdelší tetivou;* neboť jeho od středu vzdálenosť jest nejkratší jsouc rovna = 0. Zůstatně hleď tuto větu ještě jiným způsobem dokázati.

§. LXXVI.

Úhel středový a obvodový.

1. *Úhel středový v kruhu rovná se dvojnásobnému úhlu obvodovému nad týmž obloukem sestrojenému.*

Majíce vésti důkaz rozeznávejme:

a) úhel středový jest *dutý*; a tu opět

α) střed kruhu leží na *jednom* ramoni úhlu obvodového (obr. 76); aneb

β) *uvnitř* (obr. 77); aneb

γ) *vně* obou ramen (obr. 78);

b) úhel středový jest *přímý* (obr. 79);

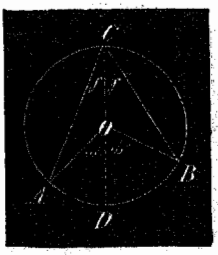
c) úhel středový jest *vypuklý* (obr. 80).

obr. 76.

Důkaz. a. *α)* Buď (obr. 76.) $AOB = \omega$ úhel středový, $ACB = \gamma$ úhel obvodový; i jest $\omega = \gamma + \beta$ (XXXII. 2.); ale $\beta = \gamma$ (XLIV 1.), pročež $\omega = \gamma + \gamma = 2\gamma$.

a. *β)* Buď (obr. 77.) opět $AOB = \omega$ středový, $ACB = \gamma$ obvodový úhel; veď průměr CD; tím se rozštěpí jeden i druhý úhel na dvé částí

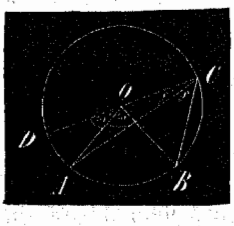
obr. 77.



$\omega' + \omega''$ a $\gamma' + \gamma''$; i jest [dle aα)] $\omega' = 2\gamma'$, $\omega'' = 2\gamma''$, pročež $\omega' + \omega'' = 2\gamma' + 2\gamma''$ čili $\omega' + \omega'' = 2(\gamma' + \gamma'')$ t. j. $\omega = 2\gamma$.

a. γ) Buď (obr. 78) úhel $AOB = \omega$ středový a $\sphericalangle ACB = \gamma$ obvodový; veď průměr CD, tím vzniknou na středu úhly $(\omega' + \omega)$ a ω', a k nim příslušné $(\gamma' + \gamma)$ a γ' na obvodě; i jest [dle aα)] $\omega + \omega' = 2(\gamma + \gamma') = 2\gamma + 2\gamma'$; $\omega' = 2\gamma'$: pročež také $\omega = 2\gamma$.

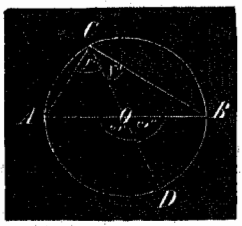
obr. 78.



b) i c). Buď (obr. 79.) úhel středový $AOB = 2R$ [aneb $AOB > 2R$ (obr. 80.)]; úhel obvodový $ACB = \gamma$. Veď průměr CD; i uzavíráme jako při aβ) $\omega' = 2\gamma'$, $\omega'' = 2\gamma''$, pročež $\omega' + \omega'' = 2\gamma' + 2\gamma'' = 2(\gamma' + \gamma'')$ čili $\omega = 2\gamma$.

2. Poněvadž každý z úhlů obvodových nad společným obloukem čnějících jest roveň polovici úhlu středovému nad týmž obloukem, pročež následují věty:

obr. 79.

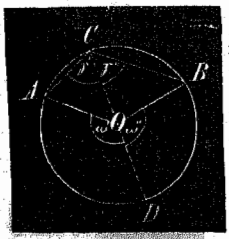


a) *Všechny úhly obvodové nad společným obloukem v témž kruhu jsou si rovny.*

A poněvadž také k stejným obloukům v témž kruhu neb i ve dvou jednostejných kruzích náležejí stejné úhly středové, pročež pravíme všeobecněji:

b) *Všechny úhly obvodové nad stejnými oblouky téhož kruhu neb i dvou kruhů stejných čnějící jsou si rovny.*

obr. 80.



A poněvadž k stejným úhlům obvodovým přísluší stejné a k větším větší oblouky, pročež platí též:

c) *Ku* $\left\{ \frac{\text{stejným}}{\text{větším}} \right\}$ *úhlům obvodovým přísluší v témž kruhu* $\left\{ \frac{\text{stejné}}{\text{větší}} \right\}$ *oblouky.*

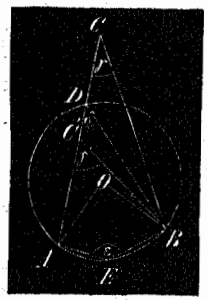
3. Oblouk, nad nímž stojí úhel obvodový, jest buď polokruhu roveň, neb větší, neb menší. V prvém případě jest středový úhel roveň přímému, v druhém jest dutý, v třetím vypuklý: a pročež jeho polovička čili úhel obvodový nad týmž obloukem v prvém případě jest pravý, v druhém ostrý, v třetím tupý, což se pronáší takto:

a) *Úhel na obvodě polokruhu jest pravý.*

b) *Úhel obvodový ve* { větší / menší } *úseči kruhové jest* { ostrý / tupý }

4. *Úhel nad obloukem kruhu, maje vrchol* { vně / uvnitř } *kruhu jest* { menší / větší } *než úhel obvodový nad týmž obloukem.*

obr. 81.



Důkaz. Buď (obr. 81.) C vně kruhu a C' uvnitř kruhu vrchol úhlů γ a γ' nad týmž obloukem AB; vedeme-li DB, obdržíme úhel δ vrcholový nad týmž obloukem. Jest ale $\gamma' > \delta > \gamma$ (§. XXXII. 3. f.)

Dodatek. Mnoho-li činí rozdíl těchto úhlů?

5. *Každý úhel nad obloukem kruhu, který jest roveň polovičce příslušného úhlu středového, má svůj vrchol na obvodě;* { menšího / většího } *úhlu vrchol ale leží* { vně / uvnitř } *kruhu.*

6. *Vrchol pravého úhlu, jehož ramena procházejí konci téhož průměru, leží na obvodě kruhu.*

7. *a) Součet dvou úhlů obvodových, jejichž příslušné oblouky se doplňují na celý obvod kruhu, rovná se úhlu přímému.*

b) Je-li však jeden vrchol jejich na obvodě, druhý ale { vně / uvnitř } *kruhu, pak jest součet jejich* { menší / větší } *než úhel přímý.*

Důkaz. Veď (obr. 81.) poloměry OA i OB, jest pak $\sphericalangle AOB = 2\delta$; a vypuklý úhel $\sphericalangle BOA = 2\varepsilon$, pročež $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOA = 2\delta + 2\varepsilon$, jest však $AOB + BOA = 4R$, pročež $\delta + \varepsilon = 2R$. A poněvadž $\gamma' > \delta > \gamma$, pročež jest $\gamma' + \varepsilon > 2R$, $\gamma + \varepsilon < 2R$.

Poznamenání. Věta a) pronášívá se i takto:

Součet protějších úhlův ve čtveruhelníku z tetiv (aneb ve čtveruhelníku do kruhu vepsaném) *rovná se dvěma pravým.*

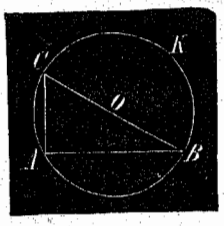
8. Ze souvětí 7. vyplývají věty převrácené:

a) Je-li ve čtveruhelníku součet protějších úhlů roveň přímému: leží všechny čtyry vrcholy jeho na témž kruhu.

b) Je-li ale součet tento { menší / větší } *než úhel přímý, pak leží jeden vrchol jejich* { vně / uvnit } *kruhu, jenž probíhá vrcholy zůstatními.*

9. Opiš kruh (neb kruhový oblouk) nad tetivou danou a, jehož příslušný na obvodě úhel měj určitou velikost α.

obr. 82.



Rozbor. Buď (obr. 82.) K kruh žádaný, O jeho střed, $AB=a$ tetiva. Veďme průměr BC a tetivu CA, i bude $C=\alpha$, a zároveň $A=R$ (3. a). Tím jest úloha převedena na úlohu jinou: totiž: by se sestrojil trojúhelník pravoúhlý, dány-li jsou odvěsná AB a protější úhel C.

Sestrojení a *důkaz* zůstavují se čtenářovi.

Poznam. Daným zde výminkám vyhoví dva kruhy pouze polohou od sebe se lišící; které to jsou?

10. Z vět 2. a 5. pospolu, a majíce zřetel k úloze 9. nabýváme opět:

a) Geometrické místo pro vrcholy všech úhlův určité velikosti α, jichž ramena probíhají dvěma bodoma danýma A i B, jest kruhový oblouk nad tetivou AB opsaný, jehož úhel na obvodě rovná se úhlu α danému. Jinými slovy:

b) Geometrické místo pro vrcholy všech trojúhelníkův na dané podstavě a postavených a majících na vrcholu úhel dané velikosti α, jest kruhový oblouk nad tetivou a opsaný, jehož na obvodě úhel jest danému α roven.

Z vět 3. *a)* a *b)* zvláště plyne:

c) Geometrické místo pro vrcholy všech pravých úhlů, jejichž ramena probíhají dvěma bodoma danýma A a B, jest polokruh nad poloměrem AB opsaný. Jinými slovy: *d)* Geometrické místo pro vrcholy všech trojúhelníkův pravoúhlých na dané podponě a sestrojených jest polokruh nad poloměrem a opsaný.

Kterak znějí pravidla odtud vážená?

Úlohy ku cvičení:

a) Sestroj trojúhelník pravoúhlý, dány-li jsou:

α) podpona a příslušná výška; aneb

β) obě úsečky, na něž se podpona příslušnou výškou přetíná.

b) Sestroj trojúhelník, dány-li jsou podstava, protější úhel, a mimo to ještě

α) buď příslušná výška, aneb

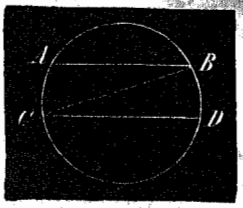
β) příslušná příčka vedená k prostředku podstavy od protějšího vrcholu.

c) Sestroj rovnoběžník, dány-li jsou strany sousedné a úhel, jejž na svém průsečku svírají úhlopříčné jeho.

d) Sestroj lichoběžník, dány-li jsou dvě strany sousedné, úhel druhýma dvěma stranama sevřený, a úhlopříčná proti danému úhlu ležící.

e) Sestroj čtyrúhelník, jsou-li dány dvě strany sousedné, obě úhlopříčné a úhel druhýma dvěma stranama sevřený.

12. *Oblouky kruhové mezi tetivama rovnoběžnýma jsou si rovny.* obr. 83.



Důkaz. Buď (obr. 83.) $AB \parallel CD$ veď BC i jest $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$, pročež

$$arc.\ AC = arc.\ BD \text{ (2. c.)}$$

13. Pro cvičení v důkazu stůjte zde ještě tyto věty:

a) Spojíme-li konce jednoho ze dvou sobě rovných oblouků s koncema oblouku druhého v témž kruhu, jsou spojovací tyto přímky buď rovnoběžné, aneb se uvnitř rozdělují na části vzájemně rovné.

b) Jsou-li v kruhu tři rovnoběžné tetivy, a vedeme-li nové tetivy od koncův jedné ke koncům druhé: odříznou se jima z třetí tetivy od obou koncův jejich rovné části.

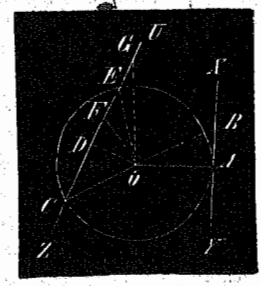
§. LXXVII.

Tečná a sečná.

1. Přímka, jíž se kruh ve dvou bodech protíná, slove *sečná* (secans); přímka mající s kruhem jediný bod společný, *tečnou* (tangens) se nazývá. Společný bod slove *dotyčným*.

2. *Přímka na konci poloměru kolmo vztyčená jest tečnou kruhu.*

Důkaz. Buď (obr. 84.) $XY \perp OA$; bod A jest i přímce i kruhu společný. Vedeme-li ze středu ku kterémukoliv jinému bodu B na přímce XY přímku OB, vznikne trojúhelník pravoúhlý OAB a v něm jest OB podponou, pročež $OB > OA$: tudíž leží B mimo kruh. obr. 84.



Dodatek. Stojí-li na konci poloměru kolmice leží celý kruh na té straně její, na které se nachází jeho střed; a stojí-li na koncích průměru kolmice, jest mezi nima položen celý kruh.

3. *Přímka na konci poloměru šikmo postavená jest sečnou kruhu.*

Důkaz. Buď (obr. 84.) UZ na konci C poloměru OC šikmo, i jest pak jeden úhel u C ostrý; budiž to úhel $OCU < R$; spusť s O na UZ kolmou $OD \perp UZ$ (XXXV. 4.), odřízni $DE = CD$, a veď EO Tehdy jest $\triangle CDO \cong \triangle EDO$, a pročež $OE = OC$, z čehož plyne, že leží E na obvodě kruhu. Nyní snadno dokázati, že EC všecky

své body vyjímajíc C i E má uvnitř kruhu, a že zůstatní části přímky UZ mimo kruh leží; neboť jest $OF < OE < OG$ (§. XLII. 2. c.).

4. Z vět těchto jde:

a) *Mezi tečnou a obloukem nelze bodem dotyčným vésti přímku jinou.* A odtud opět vyplývá:

b) *Oblouk kruhu a tečná mají v bodě dotyčném týž směr;* čili: *Tečnou udává se směr, jejž má oblouk na místě dotyčném.*

5. a) *Poloměr k bodu dotyčnému vedený stojí na tečné kolmo.* Neboť, kdyby šikmo stál, byla by přímka sečnou (3).

Odtud a z věty 4. b) jde:

b) *Všechny poloměry stojí na kruhu kolmo.*

6. Z věty 5. a z §. XXV. 1. 2. uzavíráme dále:

a) *Kolmá na tečné v bodě dotyčném postavená prochází středem kruhu;*

b) *Kolmá ze středu na tečnou spuštěná má za patu bod dotyčný.*

7. a) *Poloměr jsa na tečné v bodě dotyčném kolmo, udává vzdálenost středu od tečné.*

Odtud věta:

b) Geometrické místo pro středy všech kruhův, které určitým poloměrem r opsány jsouce mají se dotýkati přímky dané XY, jest přímka u vzdálenosti r rovnoběžně s přímkou danou XY vedená.

Kterak zní pravidlo odtud vážené?

8. Úlohy ku cvičení:

Daným poloměrem r opiš kruh jenž by se dotýkal:

a) dvou přímek daných;

b) jedné přímky dané, a mimo to ještě

α) buď procházel bodem daným, aneb

β) měl střed od jiné přímky dané vzdálený o délku danou a; aneb

γ) měl střed na jiné čáře dané (buď přímé, buď křivé) položený; aneb

δ) odřízl od jiné přímky dané tetivu dané velikosti a.

9. Z věty 6. a) plyne:

Geometrické místo pro středy všech kruhův, které se dané přímky XY v daném bodě A dotýkají, jest kolmice v bodě A na danou přímku XY postavená. Obr. 84.

Kterak zní pravidlo odtud vážené?

10. Úlohy ku cvičení.

Opiš kruh, jenž by přímky dané se dotýkal v bodě daném, a mimo to buď

a) procházel jiným bodem daným; aneb

b) měl poloměr daný; aneb

c) měl střed vzdálený od jiné přímky dané o délku danou.

§. LXXVIII.

Sestrojování tečných.

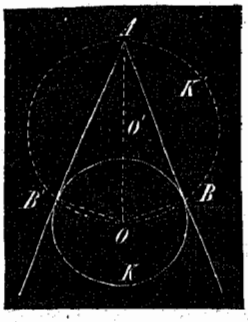
1. Veď tečnou bodem na obvodě daným.

Rozb. Buď (obr. 84.) A bod na obvodě, jenž má býti dotyčným; veď poloměr OA, a postav na něm v bodě A kolmici XY, kterážto jest tečnou žádanou (§. LXXVII. 2).

2. Veď tečnou k danému kruhu bodem vně kruhu daným.

Rozbor. Buď (obr. 85) O střed daného kruhu K, k němuž s bodu A vésti tečnou uloženo jest. Touto tečnou buď přímka AB, a B bodem dotyčným, na jehož nalezení záleží zdar úlohy. Leží pak tento bod B na obvodě daného kruhu, jenž jest jeho místem geometrickým. Vedeme-li poloměr OB, jest $\sphericalangle OBA = R$ (§. LXXVII. 5.); a týž bod B leží na vrcholu pravého úhlu, jehož ramena procházejí dvěma bodoma danýma A i O, a pročež leží bod B na obvodě kruhu, jejž opíšeme nad průměrem AO (LXXVI. 10. c.).

obr. 85.

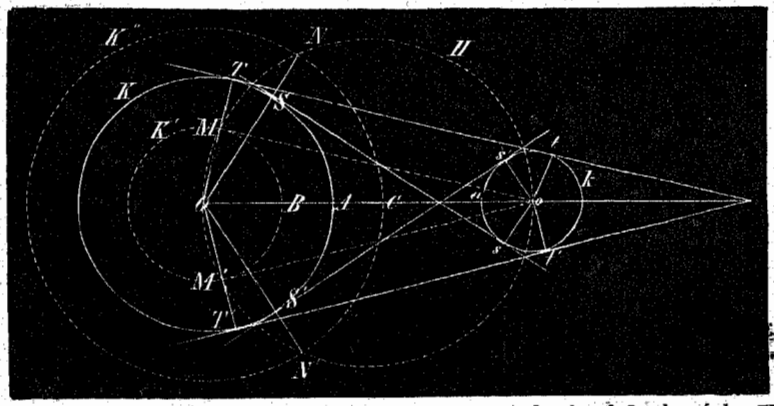


Sestrojení. Veď přímku AO, rozpol ji v bodě O', kolem bodu O' opiš poloměrem $O'A$ kruh K', jímž se protne daný kruh K v bodech B i B'; přímka AB i AB' bude tečná žádaná.

Důkaz zůstaven čtenářovi.

3. Ku dvěma kruhům daným veď tečnou společnou.

obr. 86.



Rozbor. Buďtež O i o (obr. 86.) středy kruhů daných K i k, Tt jejich tečná společná, T a t body dotyčné. Vedeme-li osu

Oo a poloměry OT i ot, vznikne nám lichoběžník $OotT$; poněvadž ale snáze jest zacházeti s rovnoběžníkem neb trojúhelníkem, pročež veďme $oM \parallel tT$; tím nabudeme trojúhelníka pravoúhlého OMo, jehož podpona Oo i co do velikosti i co do polohy jest dána, a jehož odvěsná OM se rovná rozdílu poloměrů daných kruhů, a pročež jest sestrojitelný, jako v úl. 2. Máme-li bod M, máme též bod T, a tím polohu tečné Tt.

Sestrojení. Veď osu Oo, poloměrem ao kruhu menšího kolem bodu A opiš oblouk, jenž osu protne v bodech B i C; nyní kolem bodu O opiš poloměrem OB i OC kruhy K' a K'' a nad průměrem Oo rovněž opiš kruh H, kterýž ti protne kruh K' v bodech M a M', a kruh K'' v bodech N a N'; k těmto průsekům veď z bodu O poloměry a prodluž je, třeba-li, až se daný kruh K protne v bodech T a T' jakož i v bodech S a S'. V těchto bodech sestroj tečné ku kruhu K, i budou ony tečnými kruhu druhého k; a sice Tt, $T't'$ vnějšími, Ss a $S's'$ vnitřními.

Důkaz zůstaven čtenářovi.

Poznam. Čtenář hleď dokázati:

Osa Oo a vnější tečné dvěma kruhům společné setkají se v bodě jediném. Podobně platí o tečných vnitřních.

§. LXXIX.

1. Dvě tečné z téhož bodu mimo obvod ležícího ku kruhu vedené jsou si rovny a mají od přímky, která jejich průsekem a středem kruhu prochází, stejnou odchýlenost.

Důkaz. Budtež (obr. 85.) AB i AB' tečné kruhu K; B a B' body dotyčné. Vedeme-li poloměry OB i OB', jest $\sphericalangle ABO = OB'A = R$, $OB = OB'$, $OA = OA$, pročež $\triangle ABO \cong \triangle AB'O$ (XLVII. 4.), pročež $AB = AB'$, $\sphericalangle OAB = \sphericalangle B'AO$.

2. Přímka, jíž se rozpoluje úhel dvěma tečnými sevřený, prochází středem kruhu.

Důkaz. Přímka AO (obr. 85.) vedená od průseku A dvou tečných AB i AB' středem O kruhu, rozpoluje (dle odst. 1.) úhel $B'AB$; a poněvadž každá jiná přímka týmž vrcholem A vedená řečený úhel na dvě nerovné části dělí: pročež musí přímka, kterákoliv rozpoluje ten úhel, splynouti s přímkou AO, t. j. musí procházeti středem kruhu.

Odtud plyne:

3. Geometrické místo pro středy všech kruhův, které se dotýkají dvou přímek daných, jest přímka úhel jejich rozpolující.

Kterak zní pravidlo odtud vážené?

Poznam. Mají-li dané přímky délku neobmezenou, svírají dva úhly vedlejší, z nichž i jeden i druhý rozpoltiti se dá přímkama, kteréžto obě budou místem geometrickým.

Přídavek. Jsou-li ale přímky dané rovnoběžky, jest geometrickým místem pro středy všech kruhů, které se jich dotýkají, přímka rovnoběžná, vedena prostředkem jejich od sebe vzdálenosti. — Čehož důkaz zůstavuje se čtenářovi.

4. Příklady ku cvičení:

A) Opiš kruh, jenž by se dotýkal

a) tří přímek daných,

b) dvou přímek daných, a sice jedné z nich v bodě daném.

c) dvou přímek daných, i aby střed jeho od jiné přímky dané měl určitou vzdálenost.

B) Do trojúhelníka daného vkresli kruh, jenž by se všech tří stran dotýkal.

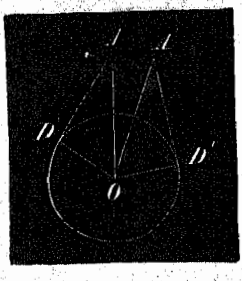
K závěrce dokáže čtenář ještě větu:

C) Přímky, jimiž se vnitřní úhly trojúhelníka rozpolují, setkají se v bodě jediném, jenž má ode všech tří stran rovné vzdálenosti. Rozpolíme-li ale dva úhly vnější, leží průsek přímek rozpolovacích na prodloužené přímce, již se třetí úhel vnitřní rozpoluje, a má ode všech tří stran (třeba-li prodloužených) taktéž rovné vzdálenosti.

5. *Konce všech tečných stejně dlouhých k jednomu kruhu vedených mají od jeho středu rovné vzdálenosti.*

Důkaz. Buďtež (obr. 87.) AD a $A'D'$ přímky tečné téhož kruhu, jehož střed jest O; a zároveň buď $AD = A'D'$; jest pak též $ADO \cong A'D'O$ pročež $AO = A'O$.

obr. 87.



6. *Čím delší jest tečná, tím větší jest jejího konce od středu kruhového vzdálenost.*

Důkaz čtenářovi zůstaven.

7. Čtenář pověz, kterak zní věta, jež vyslovuje *místo geometrické* z vět 5. a 6. plynoucí?

§. LXXX.

1. *Úhel, jejž svírají dvě tečné z jednoho bodu k témuž kruhu vedené, doplňuje příslušný úhel na středu, jejž svírají poloměry jdoucí k bodům dotyčným, na úhel přímý.*

Důkaz. V obr. 85. jest ve čtverúhelníku $AB'OB$ úhel $B'=R=B$, pročež musí součet dvou zůstatních úhlů BAB' a $B'OB$ rovnati se úhlu přímému.

2. Nazývejme úhel dvěma tečnýma z téhož bodu ku kruhu vedenýma *vnitřním úhlem tečných;* úhel, jejž poloměry k dotyčným bodům vedené svírají, *středovým úhlem protějším;* tetivu dotyčnými body vedenou *tetivou tečných;* oblouk, který mezi tečnými a touto tetivou jest, *obloukem příslušným;* i můžeme tvrditi:

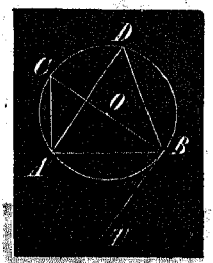
a) Jsou-li vnitřní úhly tečných k témuž kruhu vedených sobě rovny, jsou si rovny též protější úhly středové a pročež i tetivy tečných i příslušné oblouky.

b) Přímka jdoucí od průseku tečných středem kruhu rozpoluje netoliko vnitřní úhel tečných, nébrž i protější úhel středový i tetivu tečných, na níž kolmo stojí.

c) Jsou-li tetivy tečných aneb příslušné oblouky sobě rovny; jsou si rovny též veškeré tečné a vnitřní úhly jejich; a pročež i vzdálenosti jejich průsečných bodů ode středu kruhového.

Důkazy podej čtenář.

obr. 88.



3. *Úhel, jejž svírá tečná s tetivou, jest roveň úhlu na obvodě v protější úseči kruhu.*

Důkaz. Buď (obr. 88.) AB tetiva kruhu, O jeho střed, BT tečná. Vedeme-li průměr BC a tetivu CA, jest $TBC=R$ (LXXVII. 5.), $CAB=R$. (LXXVI. 3. a.), pročež $TBA=BCA$ (XIX. 5. a). A poněvadž jest $BCA=BDA$ (LXXVI. 2.), pročež i $TBA=BDA$.

§. LXXXI.

1. Čtyrúhelník, jehož strany se dotýkají téhož kruhu, slove *čtyrúhelníkem z tečných* (Tangenten-Viereck.)

2. *V čtyrúhelníku z tečných jest součet dvou protějších stran roveň součtu druhých dvou stran protějších.*

Důkaz podej čtenář.

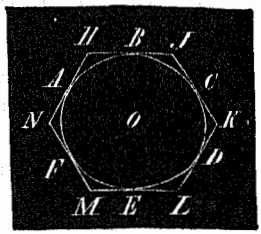
§. LXXXII.

1. *Mnohoúhelníkem o kruh opsaným* slove, jehož veškeré strany se kruhu dotýkají; kruh ten slove *do mnohoúhelníka vepsaným.*

2. *Je-li kruh na* n *rovných částí rozvržen, a vedeme-li dělicími body tečné přímky, vznikne opsaný* n*-úhelník pravidelný.*

Důkaz. Buď (obr. 89.) kruh O rozdělen v bodech A, B, C, D, E, F na části rovné, a týmiž body buďtež vedeny tečné NH, HJ, JK, KL, LM, MN. Jest pak (dle §. LXXX 2. c.) $\sphericalangle H = \sphericalangle J = \sphericalangle K = \sphericalangle L = \sphericalangle M = \sphericalangle N$; jakož i $AH = HB = BJ = JC =$ atd., pročež také $HJ = JK = KL =$ atd.

obr. 89.



3. Opiš o kruh 4—, 8—, 16—, 32—, atd. vůbec 2^n-úhelník pravidelný; jakož pravidelný 3—, 6—, 12—, 24— atd. vůbec 3.2^n-úhelník.

Do každého n*-úhelníka pravidelného dá se vepsati kruh.* (LXX. 8. 9.)

5. Do n-úhelníka pravidelného vpiš kruh.

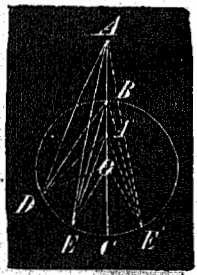
§. LXXXIII.

Délka přímek k obvodu kruhu vedených.

1. *Ze všech přímek, z bodu mimostředného vedených k obvodu kruhu, jest nejdelší ta, která běží středem; a nejkratší jest ta, která by prodloužena bvnší středem kruhu procházela. Zůstatní přímky jsou tím delší, čím více pata jejich na obvodě vzdaluje se od paty přímky nejkratší.*

Důkaz. Bod mimostředný (obr. 90.) leží buď na obvodě, jako B, aneb vnitř kruhu, jako A', aneb mimo kruh, jako A.

obr. 90.



Leží-li α) na obvodě, tu jest $BD < BE < BC$ (LXXIII. 3.).

Leží-li β) uvnitř kruhu; tu jest nejprv v trojúhel. $A'OD$ (XXXVI) $OD - OA' \leq A'D$ a poněvadž jest $OD = OB$, pročež i $OB - OA' < A'D$ čili $A'B < A'D$ t. j. přímka $A'B$ jest nejkratší.

Za druhé jest v témž trojúh. $A'O + OD > A'D$, a poněvadž $OD = OC$, pročež i $A'O + OC > A'D$, čili $A'C > A'D$ t. j. přímka $A'C$ jest ze všech nejdelší.

Za třetí: v trojúhelnících $A'OD$ i $A'OE$ jest $OA' = OA'$, $OD = OE$ ale $\sphericalangle A'OD < \sphericalangle A'OE$, pročež $A'D < A'E$ (§. XLIX. 1.).

Podobně vede se důkaz, že jest $AB < AD < AE < AC$.

2. *Z každého bodu mimostředného dá se k obvodu kruhu vésti toliko dvé přímek sobě rovných.*

Důkaz. Buď (obr. 90.) AE (neb i $A'E$) přímka z bodu A k obvodu vedená. Veď poloměr OE, učiň $\sphericalangle AOE' = \sphericalangle AOE$, i bude $\triangle AOE \cong \triangle AOE'$, pročež $AE' = AE$ (podobně $A'E = A'E'$.) Pročež *dvé* přímek sobě rovných lze vésti k obvodu, ovšem vyjímaje body B a C, k nimž toliko jedna (nejkratší neb nejdelší) vésti se dá. Že však nelze více než dvé vésti, vysvítá z odst. 1., neboť kterákoliv jiná jest buď kratší, buď delší.

Dva kruhy.

§. LXXXIV.

1. Dva kruhy nestejné, mají-li společný střed, slovou *soustředními* (concentrisch).

Části paprsků mezi kruhoma soustředňýma jsou si vesměs rovny; neboť každá z nich rovná se rozdílu poloměrů těchto dvou kruhů.

2. Kruhy, mají-li středy různé, slovou *výstředními* (excentrisch); a přímka od jednoho středu jejich ku druhému vedená jmenuje se *střednou* (Centrilinie), a přihlížíme-li pouze k její poloze, též *osou* (Achse) kruhů.

3. Kruhy výstředné mohou míti buď *dva* body společné — protínajíce se, — aneb jediný — dotýkajíce se, — aneb nemají nižádného bodu společného.

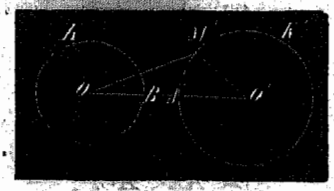
§. LXXXV.

O poloze dvou kruhů platí tyto věty:

1. a) *Kdykoliv jest střední delší než součet poloměrů, leží jeden kruh mimo druhý;* a naopak:

b) *kdykoliv kruhy mimo sebe leží, jest střední delší než součet poloměrů.*

obr. 91.



Důkaz. a) Buďtež (obr. 91.) O i O' středy dvou kruhů K a K', jejichž poloměry r a r' pospolu kratší jsou než střední OO' t. j. $OO' > r + r'$. Učiň $OB = r$, $A'O' = r'$; i bude $OO' > OB + A'O'$ čili $OB + BO' > OB + A'O'$ pročež $BO' > A'O' = r'$, pročež B leží na kruhu

K a mimo kruh K'. Podobně se dokáže, že leží A' na kruhu K' a mimo kruh K.

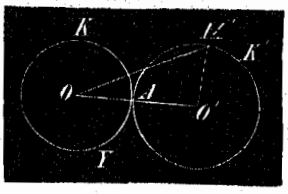
Nyní vezměme na kterémkoliv kruhu (ku př. na K') bod M' kterýkoliv; i jest $OM' > OA' > r$ (LXXXIII. 1.), pročež leží M mimo K.

b) Střednou OO' (obr. 91.) protínají se kruhy v bodech B a A'; i jest $OB = r$, $BO' > r'$ (poněvadž B leží mimo K'), pročež $OB + BO' > r + r'$ čili $OO' > r + r'$.

2. a) *Kdykoliv střední jest rovna součtu poloměrů, dotýkají se kruhy vně, a dotýčný bod jejich leží na přímce střední;* a naopak:

b) *kdykoliv se kruhy vně dotýkají, běží střední bodem dotýčným a rovná se součtu poloměrů* (obr. 92.).

obr. 92.



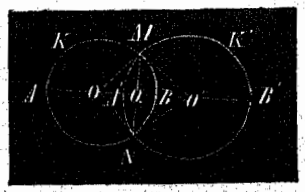
Důkaz. Na střední $OO' = r + r'$ odřízni $OA = r$, i bude $AO' = OO' - OA = r + r' - r = r'$, pročež jest A bod oběma kruhům společný. — Vezměme na kterémkoliv kruhu bod kterýkoliv (ku př. M' na kruhu K'), i bude $OM' > OA = r$ (LXXXIII); pročež M' mimo K.

b) Střední kruhů vně se dotýkajících musí běžeti bodem dotýčným; nebo kdyby jinady šla, proťala by kruh K v bodě Y mimo K' položeném, i bylo by pak $OY = r$, $YO' > r'$, pročež $OY + YO' > r + r'$, poněvadž ale O, Y, O' na jedné přímce leží, tedy byloby $OY + YO' = OO'$, a tím $OO' > r + r'$, tu ale musely by kruhy ležeti mimo sebe (1. b.). — A poněvadž tedy střední prochází bodem dotyčným A, pročež jest patrno $OO' = OA + AO' = r + r'$.

3. a) *Je-li střední menší než součet, ale větší než rozdíl poloměrů, protínají se kruhy ve dvou bodech na konci společné tetivy po obou stranách od přímky střední stejně vzdálených;* a naopak.

b) *kdykoliv se dva kruhy protínají ve dvou bodech, jest střední větší než rozdíl, menší než součet jejich poloměrů, stojí na společné tetivě kolmo, a rozpoluje ji.*

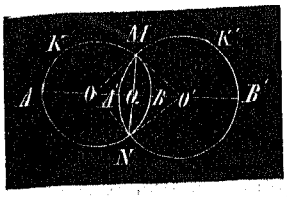
obr. 93.



Důkaz. a) Střednou $OO' = d$ (obr. 93.) prodluž v obojím směru, a pak odřízni $AO = OB = r$, $A'O' = O'B' = r'$; a buď $r' \geqq r$. I lze tvrditi, že bod A leží mimo kruh K', bod B' mimo kruh K, bod B uvnitř K', a bod A' uvnitř K. Neboť:

Předně jest $AO' = AO + OO' = r + d$; dle podmínky jest ale

obr. 93.



$d > r' - r$, pročež $r + d > r'$, pročež $AO' > r'$; t. j. bod A leží mimo K'.

Za druhé jest $OB' = OO' + O'B' = d + r'$; a poněvadž jest $r' \geqq r$, pročež $d + r' > r$, tedy $OB' > r$. t. j. bod B' leží mimo K.

Za třetí: poněvadž jest $r' + r > d$, vyplývá $r' > d - r$, pročež i $r' + r' > d + r' - r$ čili $A'O' + O'B' > OO' + O'B' - OB$ čili $A'B' > OB' - OB$ aneb $A'B' > BB'$: z toho jde, že leží bod B mezi bodoma A' i B', pročež na průměru $A'B'$ uvnitř kruhu K'.

Za čtvrté. Poněvadž jest $r + r' > d$, vyplývá $r > d - r'$, pročež i $r + r > r + d - r'$ čili $AO + OB > AO + OO' - A'O'$ aneb $AB > AO' - A'O'$ aneb $AB > AA'$, t. j. bod A' leží mezi bodoma A i B, pročež na průměru AB uvnitř kruhu K.

A nyní díme: poněvadž každý kruh K i K' má aspoň *jeden* bod *mimo* kruh druhý, a aspoň jeden bod *uvnitř* kruhu druhého, pročež musí nezbytně jeden kruh do druhého vniknouti a z něho vyniknouti; a poněvadž oba kruhy jsou obrazci uzavřenými, pročež musí se nezbytně vespolek *protínati*, jinak by jeden do druhého vniknouti nemohly. — Vizme již, kde jich průsek hledati sluší.

Tento průsek nemůže ležeti na středné, poněvadž by pak muselo býti $r + r' = d$; pročež leží mimo střednou. Buď tedy M bod průsečný. Spusťme odtud na střednou OO' kolmici $MQ \perp OO'$, a prodlužme, aby bylo $MQ = QN$: tehdy tvrdíme, že jest též bod N průsekem obou kruhů. Neboť pak jest $\triangle ONQ \cong \triangle OMQ$, $\triangle O'NQ \cong \triangle O'MQ$, pročež $ON = OM = r$, $O'N = O'M = r'$, t. j. i bod M i bod N leží na obvodě obou kruhů. A poněvadž dva kruhy nemohou míti tří neb více bodů společných, pročež se kruhy K i K' protínají ve dvou bodech M i N, od osy stejně vzdálených, majíce přímku MN za tetivu společnou.

b) Buďtež M i N (obr. 93.) průsečky kruhů K i K'. Veď střednou OO', a z obou středů poloměry k bodům průsečným. I jest pak $OM + MO' > OO'$ č. $r + r' > d$; zároveň také $OO' > MO' - MO$ č. $d > r' - r$. Že konečně $MN \perp OO'$ a $MQ = QN$, to dokazuje §. LI.

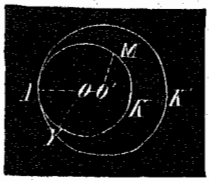
4. a) *Rovná-li se střední rozdílu poloměrů, dotýkají se kruhy uvnitř a dotyčný bod leží na jejich ose.*

b) *Dotýkají-li se kruhy uvnitř, běží střední jsouc prodloužena bodem dotyčným, a rovná se rozdílu poloměrů.*

Důkaz. a) Buď $r < r'$; střednou $OO' = d$ (obr. 94.) prodluž směrem $O'O$, a sřízni na ní $AO = r$; i jest pak $AO' - AO = OO'$,

čili $AO'-r=d$, pročež $AO'=r'$; pročež jest A společným bodem obou kruhů. — Vezmi nyní na kruhu K kterýkoliv bod M, i jest $MO'<AO'$ (LXXXIII.), pročež leží M uvnitř většího kruhu K'.

obr. 94.



b) Středná OO' kruhů K i K' (obr. 94.) jsouc prodloužena, musí jíti bodem dotyčným A; neboť kdyby šla jinady, proťala by kruh K ku př. v bodě Y a čára $O'OY$ byla by přímkou, za to však čára $O'OA$ klikatou; a proto by pak bylo dle LXXXIII. $YO+OO'<AO'$ t. j. $r+d<r'$; a dle XXXVI. $AO+OO'>AO'$ t. j. $r+d>r'$ což si ovšem odporuje. Z toho plyne, že prochází přímka $O'O$ prodloužená bodem dotyčným A, a tudíž jest též $O'O=AO'-AO$ čili $d=r'-r$.

5. a) *Je-li středná menší než rozdíl poloměrů, leží menší kruh ve větším;* a

b) *leží-li jeden kruh úplně ve druhém, jest středná menší než rozdíl poloměrů.*

6. Z vět 2. a 4. vyplývá:

a) Geometrické místo pro středy všech kruhů, které mají opsány býti poloměrem daným r a dotýkati se $\left\{\begin{matrix}\text{vně}\\ \text{uvnitř}\end{matrix}\right\}$ kruhu daného K, jest kruh soustředný, opsán poloměrem, jenž jest roveň $\left\{\begin{matrix}\text{součtu}\\ \text{rozdílu}\end{matrix}\right\}$ poloměrův obou kruhů (t. jak daného tak hledaného).

b) Geometrické místo pro středy všech kruhův, jež se mají dotýkati daného kruhu K v bodě daném A, jest přímka vedená bodem dotyčným i středem kruhu daného K.

7. Příklady ku cvičení.

a) Poloměrem daným r opiš kruh, jenž by se dotýkal

α) buď dvou kruhů daných;

β) aneb jednoho kruhu a jedné přímky daných;

γ) aneb kruhu daného, a zároveň probíhal nějakým bodem daným.

b) Opiš kruh, jenž se dotýkej:

α) kruhu daného v bodě daném a přímky dané;

β) přímky dané v bodě daném a kruhu daného;

γ) dvou kruhů, a sice jednoho z nich v bodě daném.

8. Věty ku cvičení v důkazích:

a) Vedeme-li dotyčným bodem dvou kruhů přímku až k obvodům jejich; jsou poloměry ku koncům vzniklých tetiv jdoucí spolu rovnoběžné.

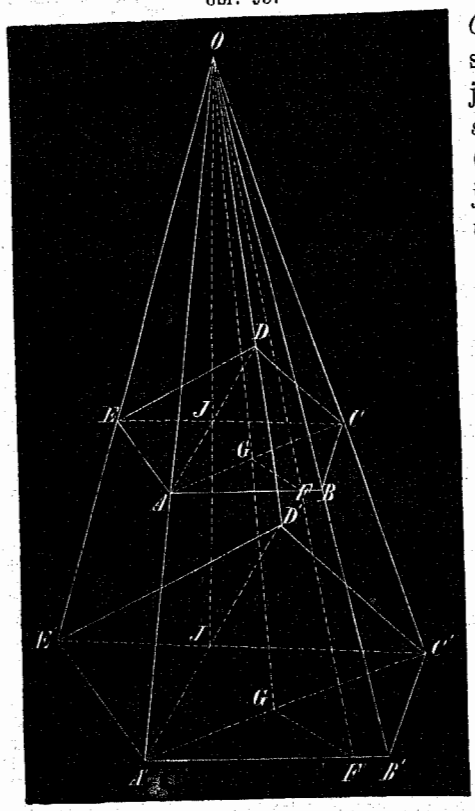
b) Vedeme-li ve dvou kruzích, které se $\left\{\begin{matrix}\text{vně}\\ \text{uvnitř}\end{matrix}\right\}$ dotýkají, poloměry rovnoběžné směrem $\left\{\begin{matrix}\text{protivným}\\ \text{souhlasným}\end{matrix}\right\}$; prochází přímka, která jde koncema poloměrů, bodem dotyčným.

Knihy čtvrté část prvá.

O úměrnosti přímek.

§. LXXXVI.

obr. 95.



1. Přímky OA, OB, OC, OD, OE, atd. (obr. 95.) ze společného bodu O vybíhající nazýváme *paprsky* neb *sběžky* č. *rozběžky* (Strahlen, Convergenten), společný bod jejich slove *střed* neb *počátek paprsků* (Strahlenmittelpunkt).

2. Zvolíme-li na paprscích ze středu O (obr. 95.) vycházejících dvě řady bodů A, B, C, D, E . . . A', B', C', D', E' . . ., a vedeme-li od prvého k druhému, odtud ku třetímu a t. d. přímky (*příčky*) AB, BC, CD . . ., $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ . . ., vzniknou dva obrazce $ABCDE$ a $A'B'C'D'E'$, kteréžto majíce hrany na společných paprscích, nazývají se *stejnolehlými* (homolog).

Tímto jmenem („*stejnolehlé*") zoveme též

a) *body* A i A', B i B' atd. na společném paprsku ležící;

b) *příčky* (Transversalen) AB i $A'B'$.; BC i $B'C'$, atd. proti společnému úhlu položené;

c) *úsečky* (Abschnitte, Segmente) rozběžek OA i OA', OB i OB' atd. které jdou od společného středu O k bodům stejnolehlým;

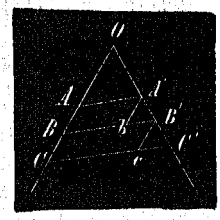
d) *úhly* stejnolehlými příčkami sevřené, ku př. úhel ABC i $A'B'C'$.

§. LXXXVII.

1. a) Je-li na jednom paprsku sříznuto několik částí sobě rovných, a vedeme-li pomeznými body jejich rovnoběžné příčky: objeví se na druhém paprsku tolikéž sobě rovných částí těmito příčkami sříznutých.

Důkaz. Buď (obr. 96.) $AB=BC$, $AA' \parallel BB' \parallel CC'$; jest dokázati, že jest též $A'B'=B'C'$. K tomu konci veď $A'b \parallel B'c \parallel OC$, jest $A'b=AB$, $B'c=BC$ (LXII. 2); pročež také $A'b=B'c$. Mimo to jest $\sphericalangle B'A'b=\sphericalangle C'B'c$ (XVI. 4. a), $\sphericalangle A'bB'=\sphericalangle B'cC'$ (XIX.): z toho jde $\triangle A'bB' \cong \triangle B'cC'$ (XL.), pročež $A'B'=B'C'$.

obr. 96.



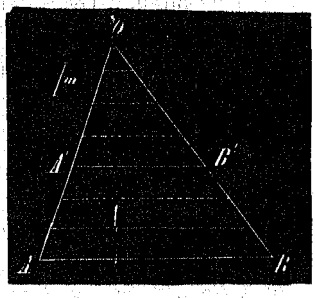
b) Výsledek. Je-li jeden paprsek na samé rovné části rozdělen (aneb ze samých rovných částí složen), rozdělí se paprsek druhý příčkami rovnoběžnými na tolikéž rovných částí.

2. Stejnolehlé úsečky dvou paprsků, způsobené příčkama rovnoběžnýma, jsou úměrny, čili v poměru stálém.

Důkaz. Rozeznávejme: Buďto jsou stejnolehlé úsečky OA' i OA paprsku jednoho souměřitelné aneb nesouměřitelné.

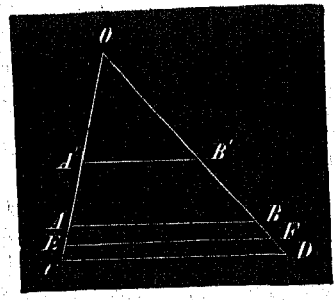
a) Buďtež OA' i OA (obr. 97.) souměřitelné, majíce za míru společnou ku př. délku m, kteráž buď v úsečce OA obsažena α-krát, v OA' pak α'-krát; i jest $OA=\alpha.m$, $OA'=\alpha'.m$, pročež poměr $OA:OA'=\alpha:\alpha'$. Rozdělivše touto měrou obě úsečky, veďme rozdělovacími body příčky rovnoběžné s příčkami $AB \parallel A'B'$; tím se úsečky OB a OB' rozdělí (dle 1. b.) na tolikéž částí sobě rovných zdélí ku př. n, i bude $OB=\alpha.n$, $OB'=\alpha'.n$, odkudž poměr: $OB:OB'=\alpha:\alpha'$ hořejšímu poměru rovný. Pročež jest $OA:OA'=OB:OB'$, jakož bylo dokázati.

obr. 97.



b) Buďtež OA' i OA (obr. 98.) nesouměřitelné; $A'B' \parallel AB$, i musí opět býti $OA':OA=OB':OB$. Neboť kdyby jinak bylo, musel by jeden z těchto dvou poměrů větším býti; i dejme tomu, že by bylo $OA':OA<OB':OB$, pak bychom, chtějíce obdržeti rovnost obou poměrů, museli poměr druhý zmenšiti, což by se stalo zvětšením jeho sledu, tedy položením OD místo OB; dejme tomu, že by bylo $OA':OA=OB':OD$. Veďme $DC \parallel BA$, i bude $OC>OA$.

obr. 98.



Rozdělme nyní OA' nějakou měrou, která jest menší než AC, i padne jeden bod dělicí na A', a pokračujeme-li, jeden bod mezi A i C ku př. na E; i jsou pak OA' i OE souměřitelné; pročež vedeme-li $EF \parallel A'B'$, bude $OA' : OE = OB' : OF$. Svrchu měli jsme úměru $OA' : OA = OB' : OD$; z těchto dvou úměr vyplývá $OE : OA = OF : OD$, což býti nemůže, poněvadž jest $OE : OA > 1$, $OF : OD < 1$. Z toho jde, že jest úměra $OA' : OA = OB' : OD$ nepravá, leč by body D a B v jedno splývaly; t. j. úměra $OA' : OA = OB' : OB$ jest nezbytná.

3. Z úměry $OA' : OA = OB' : OB$ . . . . $a\alpha)$

vyplývá $OA' : OB' = OA : OB$ . . . . $a\beta)$

potom $OA' : (OA - OA') = OB' : (OB - OB')$

čili $OA' : A'A = OB' : B'B$ . . . . $b\alpha)$

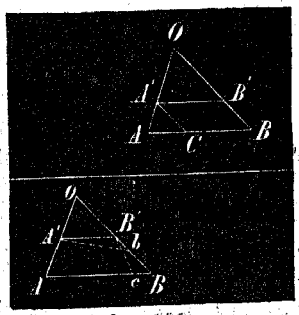
odtud $OA' : OB' = A'A : B'B$ . . . . $b\beta)$

Z úměr $a\alpha)$ i $b\beta)$ vychází dále:

$OA : OB = A'A : B'B$ . . . . $c\alpha)$

odkudž $OA : A'A = OB : B'B$ . . . . $c\beta)$

obr. 99.



obr. 100.

Vedeme-li $A'C \parallel OB$, bod A za střed paprsků majíce (obr. 99.), bude dle úměry $c\beta)$

$AO : A'O = AB : CB$,

a poněvadž jest $CB = A'B'$ (LXII. 2.), pročež položíce $OA : OA'$ místo $AO : A'O$, nabudeme

$OA : OA' = AB : A'B'$ . . . . $d\alpha)$

odkudž $OA : AB = OA' : A'B'$ . . . . $d\beta)$.

1. *Poznam.* Kterak se dá slovy pronésti těchto osmero úměr?

2. *Poznam.* Je-li jedna z těchto osmi úměr pravá, jsou pravými všecky. —

4. *Stejnolehlé příčky, příslušejí-li k úsečkám dvou paprsků stejnolehlým úměrným, jsou rovnoběžné.*

Důkaz. Buď (obr. 100.) $OA' : OA = OB' : OB$, $OA'A$ i $OB'B$ paprsky přímé; tvrdíme, že jest $A'B' \parallel AB$. Neboť kdyby bylo $A'b \parallel AB$, následovalo by $OA' : OA = Ob : OB$ pročež $OB' = Ob$, což jen tehdy možná, když bod b splývá s bodem B' t. j. $A'B' \parallel AB$.

Výsledek. Je-li $OA' = A'A$, $OB' = B'B$ (obr. 100.), jest také $A'B' \parallel AB$, a tím $A'B' = \frac{1}{2}AB$.

5. *Jsou-li dvě rovnoběžné příčky $A'B'$ i AB, které se na témž paprsku OA* (obr. 100.) *počínají, k stejnolehlým onoho paprsku úsečkám úměrnými: tehdy jejich konce B' a B leží oba na jiném paprsku společném.*

Důkaz. Buď $A'B' \parallel AB$, $A'B' : AB = OA' : OA$, $OA'A = 2R$; prodlužme paprslek OB', až protne příčku AB v bodě dejme tomu c; i jest pak $A'B' : Ac = OA' : OA$, pročež $Ac = AB$ t. j. bod c musí splynouti s bodem B, pročež $OB'B = 2R$.

6. Čtenář snadno dokáže ještě tyto věty:

a) Paprsky (tři neb i více) z jednoho středu vedené protínají přímky rovnoběžné tak, že stejnolehlé jejich části jsou k sobě v poměru stálém.

b) Tři rovnoběžky odetínají od paprskův z téhož středu vycházejících částky, jež jsou k sobě v poměru stálém.

c) Jsou-li dvě rovnoběžky rozděleny na části úměrné, scházejí se přímky stejnolehlými body vedené v bodě jediném.

§. LXXXVIII.

1. Jsou-li ve dvou stejnolehlých obrazcích (obr. 95.) stejnolehlé úsečky všech paprskův v poměru k sobě stálém, platí zároveň tyto věty:

a) *Stejnolehlé příčky* (strany, úhlopříčné mnohoúhelníků) *jsou rovnoběžné, a k sobě v témž poměru stálém;*

b) *stejnolehlé úsečky každého jiného paprsku, jenž se vede kterýmkoliv bodem, a na kterékoliv příčce ležícím jsou k sobě v témž poměru stálém, a protínají příslušné příčky* (strany, úhlopříčné, neb i jiné příčky mnohoúhelníkův) *na části v témž poměru stálém;*

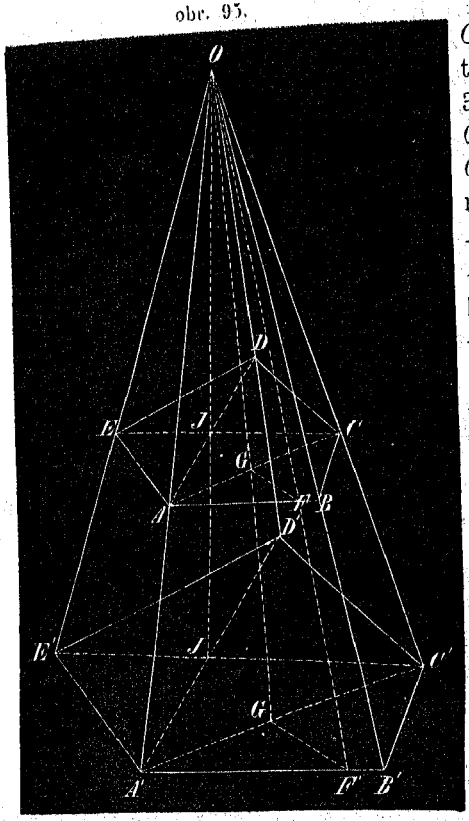
c) *příčky, jimiž se spojují body stejnolehlé buď na obvodě, buď na jiných přímkách ležící, jsou rovnoběžné a k sobě v témž poměru stálém;*

d) *příčky střídavě stejnolehlé protínají se v bodech stejnolehlých* (t. j. průsečné body jejich leží na témž paprsku) *a stejnolehlé části jejich jsou k sobě v témž poměru stálém;*

e) *úhly stejnolehlé jsou si rovny.*

Důkaz a) Buď (obr. 95.) $OA : OA' = OB : OB' = \ldots = q$; tehdy jest (LXXXVII. 4.) $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ atd. jakož i $AC \parallel A'C'$, $AD \parallel A'D'$ atd. Z této rovnoběžnosti vyplývá [LXXII. 3. dα)] $AB : A'B' = OA : OA' = q$, $AD : A'D' = OA : OA' = q$, a tím způsobem i o zůstatních příčkách stejnolehlých.

obr. 95.



b) Vedeme-li OF (neb OG) ku příčce AB (neb AC); tehdy jest opět [LXXXVII. 3. aα)]
$OF : OF' = OA : OA' = q$;
$OG : OG' = OA : OA' = q$; a mimo to [LXXXVII. 3. dα)]
$AF : A'F' = OF : OF' = q$,
$FB : F'B' = OF : OF' = q$;
pročež
$AF : A'F' = FB : F'B' = q$ a taktéž
$AG : A'G' = GC : G'C' = q$.

c) Body G a G', pak F a F' (obr. 95.) jsou stejnolehlé; i jest jakož jsme již dokázali
$OF : OF' = q = OG : OG'$; pročež $GF \parallel G'F'$ (LXXXVII. 4.) a tím
$GF : G'F' = OF : OF' = q$
(LXXXVII. 3. d α)

d) Buďtež AD i $A'D'$, pak EC i $E'C'$ příčky stejnolehlé, J a J' jejich body průsečné. Veďme paprsek OJ, jenž prodloužen protne příčku $A'D'$ v bodě i ještě neurčeném; i jest pak dle b) $AJ : A'i = JD : iD' = q$. Vedeme-li z bodu i přímku k bodu E' a C'; nabudeme dle c) $EJ \parallel E'i$, $CJ \parallel C'i$, pročež $\sphericalangle E'iC' = \sphericalangle EJC = 2R$; t. j. $E'iC'$ jest čára přímá, a tudíž splývá bod i s bodem J', kde se příčky $A'D'$ a $E'C'$ protínají. Odtud pak jde
$AJ : A'J' = JD : J'D' = EJ : E'J' = JD : J'D' = q$.

e) Rovnost úhlův stejnolehlých vyplývá z rovnoběžnosti ramenou jejich stejnolehlých.

2. *Jsou-li ve dvou stejnolehlých* n-*úhelnících* (n-1) *strany (příčky) stejnolehlé rovnoběžnými; jsou též* n-*té strany (příčky) rovnoběžné, a stejnolehlé úsečky paprskův jsou k sobě vesměs v poměru stálém; i platí pak též všecky věty v odst. 1. pronešené.*

Důkaz. Buď (obr. 95.) $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, $DE \parallel D'E'$; pak jest (LXXXVII. 3. d. α) $OA : OA' = AB : A'B' = q$,

a též $OB : OB' = AB : A'B' = q$, pročež $OA : OA' = OB : OB' = q$. Týmž způsobem lze dokázati, že jest $OB : OB' = OC : OC' = q$; $OC : OC' = OD : OD' = q$, $OD : OD' = OE : OE' = q$. A poněvadž jest pak $OE : OE' = q = OA : OA'$, následuje (LXXXVII. 4.) $EA \parallel E'A'$.

3. *Jsou-li strany dvou* n-*úhelníků střídavě rovnoběžné a v stálém k sobě poměru; musí býti též stejnolehlými*; t. j. přímky, které se vedou vrcholoma úhlův stranami rovnoběžnými sevřených, musí se vesměs setkati v bodě jediném. Taktéž platí všecky potom věty v odst. 2. i 1. pronešené.

Důkaz. Buď (obr. 95.) $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, atd.; jakož i $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' : \ldots . q = q$. Průsečný bod přímek $A'A$ a $B'B$ buď O; a průsek zatím neurčitý přímek $B'B$ a $C'C$ sluj O'. Z rovnoběžnosti $AB \parallel A'B'$ jde úměra $AB : A'B' = OB : OB' = q$; a z podmínky jest známo $AB : A'B' = BC : B'C' = q$; pročež jest $OBOB' := BC : B'C'$. Z rovnoběžnosti $BC \parallel B'C'$ jde $BC : B'C' = O'B : O'B'$; z těchto posledních dvou úměr vyplývá $OB : OB' = O'B : O'B'$ čili $OB : (OB + BB') = O'B : (O'B + BB')$; odtud nabudeme odnětím předů ode sledů $OB : BB' = O'B : BB'$, což jen tehdy může býti pravé, když jest $O'B = OB$, t. j. bod O' splyne s bodem O; čili $C'C$ jde bodem O. Totéž platí dále o přímkách $D'D$, $E'E$ atd.

4. *Jsou-li ve dvou* n-*úhelnících všechny úhly střídavě v témž pořádku sobě rovny, a jsou-li zároveň strany jejich, které se končí na vrcholích úhlův střídavě rovných, k sobě vesměs v poměru stálém: tehdy nabudou oba* n-*úhelníky stejnolehlosti, jak mile se dva úhly sobě rovné tak položí, aby ramena jejich úměrná byla střídavě spolu rovnoběžná.* I platí pak o nich všecky věty v předu uvedené.

Důkaz. Buď (obr. 95.) v obrazcích $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ předně $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, $D = D'$, $E = E'$, za druhé $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \ldots . = q$. Položme oba n-úhelníky tak, aby bylo $EA \parallel E'A'$, $AB \parallel A'B'$, což ovšem jest možná, poněvadž jest $A = A'$; pak musí též býti $BC \parallel B'C'$, poněvadž jest $AB \parallel A'B'$ a $B = B'$; a z podobné příčiny jest $CD \parallel C'D'$ atd. A proto jsou (dle odst. 3.) oba n-úhelníky stejnolehlé.

Knihy čtvrté část druhá.

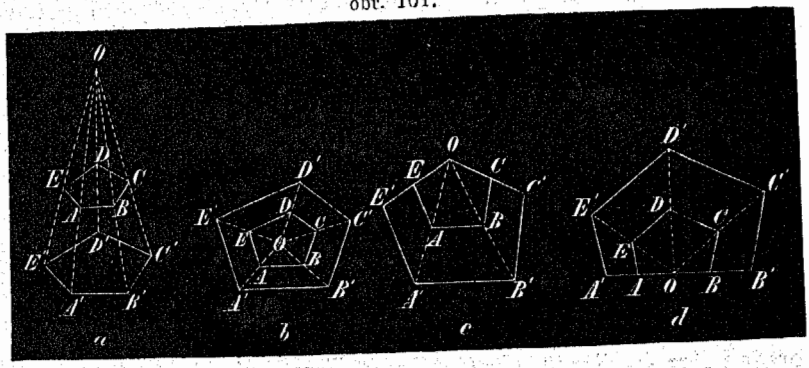
O podobnosti obrazcův, obzvláště trojúhelníkův.

§. LXXXIX.

1. Obrazcové, kteří se tak dají postaviti neb položiti, že veškeré paprsky z jistého bodu O vycházející na jejich obvodu se přetínají na úsečky v poměru stálém, mají stejný tvar, a slovou *podobní* (ähnlich). Bod O nazývá se *bodem podobnosti*, i může ležeti buď vně (obr. 101. a), aneb uvnitř obrazců (101. b), aneb na společném vrcholu (101. c), aneb kdekoliv jinde na obvodě jejich (101. d). Znamení podobnosti jest $\sim$.

Poznam. Mluvíce o stejnolehlosti bodů a čar obrazcův podobných, rozumíme body a čáry, které se stanou stejnolehlými ve smyslu §. LXXXVI, když se prvé obrazcové do stejnolehlosti postaví. (LXXVIII. 4.)

obr. 101.



2. Všechny věty, které v §. LXXXVIII. pronešeny jsou o stejnolehlých obrazcích, v nichž stejnolehlé paprsky k sobě jsou v poměru stálém, platí tudíž o obrazcích podobných. Z nich tuto opakujeme:

a) *V obrazcích podobných jsou veškeré stejnolehlé úhly střídavě sobě rovny; a stejnolehlé strany jsou k sobě v poměru stálém;*

b) *stejnolehlé jak úhlopříčné, tak příčné vůbec jsou k sobě v témž poměru stálém;*

c) *stejnolehlými příčkami rozdělují se stejnolehlé strany na úsečky úměrné v témž poměru stálém;*

d) *stejnolehlé jak úhlopříčné tak příčné vůbec přetínají se v bodech opět stejnolehlých na částky úměrné v témž poměru stálém.*

K tomu dodáváme:

e) *Mnohoúhelníky podobné dělí se stejnolehlými úhlopříčnými na trojúhelníky podobné;*

f) *obrazce, které vzniknou průřezy příček stejnolehlých, jsou si opět podobny, a strany jejich stejnolehlé jsou k sobě v témž poměru stálém.*

Poznam. Rovnoběžnost všech přímek stejnolehlých objeví se, když se obrazcové do stejnolehlosti postavili.

3. *Dva mnohoúhelníky jsou podobny, jejichž veškeré úhly v témž pořádku jsou si rovny, a jejichž strany jdoucí vrcholoma úhlů střídavě si rovných jsou k sobě v poměru stálém.*

Neboť takové mnohoúhelníky dají se (dle LXXXVIII. 4.) položiti do stejnolehlosti, tak že stejnolehlé strany spolu jsou rovnoběžnými; i jsou pak i stejnolehlé úsečky paprskův v témž stálém poměru.

Poznam. Druhdy přijímány jsou za původní znaky do výměru podobnosti známky touto (3.) větou pronešené. Uznáváme sice, že jsou vnitřnější, než ty, jež my v §. LXXXIX. 1. jsme položili, však nicméně při svém výměru setrváme, proto že ho lze užiti docela všeobecně jak při obrazích přímo — tak křivočarých, jak ploských tak tělesných.

Dodatek. Dva n-úhelníky pravidelné jsou si tudíž podobny. Proč?

4. *Dva mnohoúhelníky jsou podobny, jejichž veškeré strany v témž za sebou pořádku jsouce k sobě v poměru stálém leží střídavě buď spolu rovnoběžně, buď na sobě kolmo, buď vůbec o rovnou část od sebe střídavě odchýleny.*

Neboť ve všech třech případech jsou úhly oněma rovnoběžkama neb kolmicema neb stranama o rovnou část od sebe odchylenýma sevřené v témž pořádku sobě rovny (XIX.), a pročež obrazcové dle 3. sobě podobni.

5. Jako k dokonalému určení n-úhelníka (t. jeho tvaru a velikosti) není třeba napřed znáti všechny jeho i strany i úhly, nébrž postačuje známost ($2n—3$) částí těchto: tak i k dokonalému určení pouhého tvaru (podobnosti) n-úhelníka požadujeme pouze ($2n—4$) podmínek, totiž o jednu méně než při shodnosti, protože nám tuto na velikosti obrazce nebývá záleženo. Z té příčiny neudává se prostá délka stran, nébrž pouze *poměr* jejich. Které

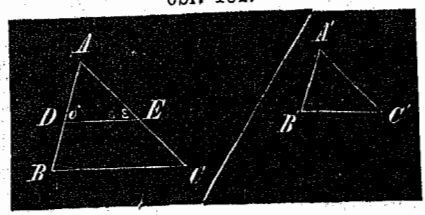
to podmínky jsou, jimiž tvar mnohoúhelníka, obzvláště trojúhelníka se určuje, tak že všechny n-úhelníky, při nichž tyto podmínky jsou naplněny, týž tvar mají: o tom nyní jednáno býti má.

§. XC.

O znacích podobnosti trojúhelníkův.

1. *Dva trojúhelníky o společném vrcholu a rovnoběžných podstavách jsou si podobny.*

obr. 102.



Důkaz. V trojúh. ABC (obr. 102.) buď $DE \parallel BC$; i tvrdíme, že jest $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Tomu jest tak; neboť $A = A$ $\delta = B$, $\varepsilon = C$ (poněvadž jest $DE \parallel BC$); a z té příčiny máme: $AD : AB = DE : BC = EA : CA$ (LXXXVII. 3.) pročež, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (LXXXIX. 3).

2. *Je-li ze dvou shodných obrazců jeden podoben obrazci třetímu: tehdy jest i druhý z nich tomuto třetímu podoben.*

Ta věta jsouc zřejmá, nežádá důkazu.

3. *Dva trojúhelníky ABC i $A'B'C'$ (obr. 102.) jsou si podobny:*

a) buďto, *jsou-li v nich dva a dva* (pročež i třetí) *úhly střídavě sobě rovny;*

b) aneb *jsou-li v nich dvě a dvě strany v témž poměru, a sevřené jima úhly střídavě sobě rovny;*

c) aneb *jsou-li v nich dvě a dvě strany v témž poměru, a úhly proti delším stranám položené sobě rovny;*

d) aneb *jsou-li všechny tři strany jejich střídavě k sobě v témž poměru.*

Důkaz. Odřízni (obr. 102.) $AD = A'B'$, a veď $DE \parallel B'C'$, tím vznikne $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Nyní hleď dokázati, že jest ve všech čtyrech případech $\triangle A'B'C' \cong \triangle ADE$, z čehož pokaždé uzavírej $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Důkaz o jednostejnosti $\triangle A'B'C' \cong ADE$ vede se, jak následuje:

a) Buď $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$; i jest též $\delta = B = B'$, pročež $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C$ (XL. 2.).

b) Buď $AB:A'B'=AC:A'C'$, $A=A'$; tu máme $AB:AD=AC:AE$ (LXXXVII. 2.). Z těchto dvou úměr, v nichž prvé tři členy jsou střídavě si rovny, plyne rovnost i čtvrtých členů jejich t. j. $A'C'=AE$, pročež jest $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (XLIII. 2.)

c) Buď $AB:A'B'=AC:A'C'$, $AC>AB$, $A'C'>A'B'$, $B=B'$; tu opět máme (LXXXVII.) $AB:AD=AC:AE$, z kterýchžto obou úměr, jako svrchu, vyplývá $AE=A'C'$, pročež jest opět $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (XLVII. 3).

d) Buď konečně $AB:A'B'=BC:B'C'=CA:C'A'$; tu opět máme (LXXXVII. 2.) $AB:AD=BC:DE=CA:EA$, odkudž jako svrchu vyplývá $DE=B'C'$, $EA=C'A'$, a pročež $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, (XLVIII.). Pročež jest ve všech čtyrech případech $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

4. *Výsledky:* a) Trojúhelníky pravoúhlé, mají-li po jedném ostrém úhlu stejném, jsou si podobny.

b) Trojúhelníky rovnoramené, mají-li buď na vrcholu aneb na podstavě po jedném úhlu stejném, jsou si podobny.

c) Veškeré trojúhelníky rovnostrané jsou si podobny.

d) Dva trojúhelníky, jejichž veškeré strany jsou střídavě buď rovnoběžné, buď na sobě kolmo, jsou si podobny (XIX).

Knihy čtvrté část třetí.

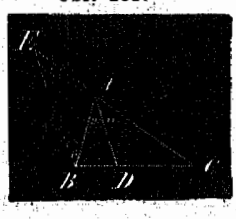
O některých přímkách v trojúhelníku a v kruhu.

§. XCI.

1. *Příčka AD* (obr. 103.), *která v trojúhelníku ABC rozpoluje úhel A, dělí protější stranu BC na části s přilehlýma stranama úměrné.*

Důkaz. Buď v $\triangle ABC$ úhel A rozpolen příčkou AD tedy $m=n$. Prodluž stranu CA a veď $BE \parallel DA$ i bude pak (LXXXVII. 3. bβ) $BD:EA=DC:AC$; mimo to jest $n=\varepsilon$, $m=\beta$ (XVI. 4. a. b.); odtud $\beta=\varepsilon$, pročež (XLI.) $EA=BA$, tuto hodnotu dosadíce do hořejší úměry nabudeme $BD:BA=ED:CA$.

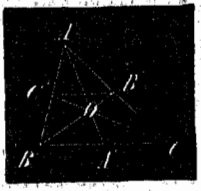
obr. 103.



Poznam. Kterak zní úměra, rozpolíme-li úhel vnější ku př. BAE?

2. *Příčky s vrcholu trojúhelníka ku prostředkům protějších stran vedené protínají se v bodě jediném, jehož vzdálenost od vrcholu obnáší dvě třetiny příslušné příčky.*

obr. 104.



Důkaz. Buď v trojúh. ABC (obr. 104.) $AC'=C'B$, $BA'=A'C$, $CB'=B'A$. Veďme prozatím dvě příčky BB' a CC', které se protnou v bodě O; i bude přímka $C'B' \parallel BC$ (LXXXVII. 4.) pročež $C'B':BC=AC':AB=1:2$ a poněvadž jest $\triangle B'OC \sim \triangle BOC$ za příčinou rovnosti úhlů, pročež jest také $CB':BC=B'O:OB=C'O:OC$, z čehož vyplývá $B'O:OB=C'O:OC=1:2$; odtud $(B'O+OB):OB=(C'O+OC):OC=(1+2):2$ čili $B'B:OB=C'C:OC=3:2$, tudíž $OB=\frac{2}{3}B'B$; $OC=\frac{2}{3}C'C$.

Vedeme-li ale příčky BB' a AA', kteréž se protnou v bodě O' ještě neurčeném, nabudeme podobně $O'B=\frac{2}{3}B'B$, $O'A=\frac{2}{3}A'A$: odtud a z předešlého výsledku uzavíráme $OB=O'B$ t. j. bod O' musí splynouti s bodem O t. j. všecky tři příčky protínají se tak, jak tvrzeno bylo.

Poznam. Tomuto bodu O děje v mechanice *těžiště* trojúhelníka.

3. *Tři příčky z vrcholův trojúhelníka, z nichž jedna rozpoluje podstavu, druhé dvě ale vedeny jsou ku koncům přímky s podstavou rovnoběžné, protínají se v bodě jediném.*

Což dokázati čtenářovi jest zůstaveno.

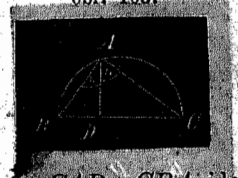
§. XCII.

1. a) *Trojúhelník pravoúhlý BAC* (obr. 105.) *rozděluje se výškou AD na dva jemu i sobě podobné*, a mimo to jest:

b) *odvěsna daného trojúhelníka prostřední úměrnou mezi přilehlou úsečkou a mezi celou podponou;*

c) *výška jeho jest prostřední úměrnou mezi úsečkama podpony.*

obr. 105.



Důkaz. a) Buď (obr. 105.) $\sphericalangle BAC=R$, $AD \perp BC$, jest pak $m+n=R$, $m+B=R$, $n+C=R$ (XXXII. 3. b.), pročež $n=B$, $m=C$; z toho jde $\triangle ABD \sim \triangle CAD \sim \triangle CBA$ (XC. 3. a.)

b) Z podobnosti $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ jde $BD:BA=BA:BC$, a z podobnosti $\triangle CAD \sim CBA$ jde $CD:CA=CA:CB$.

c) Z podobnosti $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ jde $BD : DA = DA : DC$.

2. Vedeme-li z některého bodu A (obr. 105.) na obvodě polokruhu BAC ku koncům průměru BC tětivy AB i AC, a spustíme-li z téhož bodu A kolmici AD na průměr; platí věty:

a) tetiva v polokruhu jest prostřední úměrnou mezi přilehlou úsečkou a mezi celým průměrem;

b) kolmice s obvodu na průměr spuštěná jest prostřední úměrnou mezi úsečkama průměru.

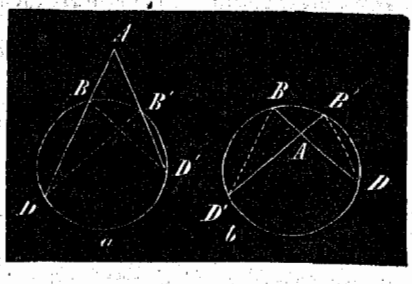
Důkaz. Úhel $BAC = R$ (LXXVI. 3. a.), pročež $\triangle BAC$ jest pravoúhlý; vyměníce názvy obdržíme z vět 1. b) a 1. c) věty v odst. 2. pronešené.

§. XCIII.

1. *Úsečky, na něž se přímky z téhož bodu vycházející obvodem kruhu přetínají, jsou k sobě v poměru převráceném.*

Důkaz. Z bodu A (obr. 106.) vycházejte dvě přímky AB i AB', které prodlouženy protínejte kruh v bodech B i B', pak v D i D'. Nyní veď přímky BD' i $B'D$; i lze dokázati, že jest $\triangle ABD' \sim \triangle AB'D$; neboť jest v nich $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B'AD$, $\sphericalangle AD'B = \sphericalangle ADB'$, (LXXVI. 2. b), pročež i třetí úhly sobě rovny $D'BA = DB'A$; a tudíž $\triangle ABD' \sim \triangle AB'D$ (XC. 3. a); odtud jde $AD' : AD = AB : AB'$; jakož bylo dokázati.

obr. 106.



Tato poučka pronášívá se zhusta větama:

a) Sečné kruhu z téhož bodu vedené jsou ku svým vnějším úsečkám v poměru převráceném (obr. 106. a).

b) Úsečky dvou tetiv kruhu na vzájem se protínajících jsou k sobě v poměru převráceném (obr. 106. b).

Poznam. Je-li (obr. 106. b) jedna ze dvou tetiv průměrem, a druhá na ní kolmo, tehdy se tato rozpoluje (LXXII. 1. b.), a tu přechází naše věta na větu XCII. 2. b.

2. *Tečná přímka z některého bodu ke kruhu vedená jest prostřední úměrnou mezi sečnou z téhož bodu vycházející a mezi její vnější úsečkou.*

obr. 107.

Důkaz. Buď (obr. 107.) AE tečná, AD sečná, AB vnější úsečka její; vedeme-li přímku EB, a ED, jest $\varepsilon=\delta$ (LXXX. 3.), mimo to jest $A=A$, pročež $\triangle BEA \sim \triangle EAD$ (XC. 3. a.), odkuž plyne $AB:AE=AE:AD$.

Poznam. Tato věta vyplývá též z odst. 1.; splynou-li totiž B' i D' (obr. 106. a.) v bod jediný E, stane se ze sečné AD' tečná AE, a hořejší úměra změní se na tuto poslední.

3. Strana pravidelného deseti-úhelníka prvého řádu jest prostřední úměrnou mezi poloměrem opsaného kruhu a mezi rozdílem tohoto poloměru a strany deseti-úhelníka.

obr. 108.

Důkaz. Buď (obr. 108.) AB strana desetiúh. pravidelného. O střed, $OA=OB$ poloměr opsaného kruhu. Tehdy $\sphericalangle O=\frac{4R}{10}=\frac{2}{5}R$; z toho jde $\sphericalangle OAB=\sphericalangle ABO=\frac{4}{5}R$. Rozpolíme-li tedy úhel A přímkou AC, jest $BAC=\frac{2}{5}R$, $ACB=ABC=\frac{4}{5}R$, a rovněž $CAO=AOC=\frac{2}{5}R$ pročež $OC=AC=AB$; mimo to jest $\triangle BAC \sim \triangle AOB$, tedy $OB:AB=AB:CB$ aneb $OB:AB=AB:(OB-OC)$ čili $OB:AB=AB:(OB-AB)$.

Knihy čtvrté část čtvrtá.

Některé úlohy na úměrnosti neb podobnosti se zakládající.

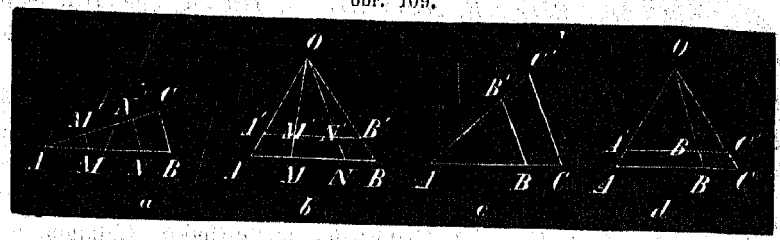
§. XCIX.

1. Poměr dvou čísel $\alpha:\beta$ buď udán poměrem dvou přímek.

Rozřeš. Kteroukoliv přímku m za míru pojma opětovaným přikládáním učiň přímku α-*krát* a druhou přímku β-*krát* delší, než jest míra m; tím nabudeš dvou přímek a i b, jichž poměr jest $a:b=\alpha.m:\beta.m=\alpha:\beta$ žádaný.

2. Danou přímku rozděl na části poměrem daným.

obr. 109.



Rozřeš. Buď (obr. 109. a) AB přímka daná. Vyjádřiv daný poměr přímkami $a:b:c$ veď z bodu A kterýmkoliv směrem přímku jinou AC, na té odměř $AM'=a$, $M'N'=b$, $N'C=c$, a naměřiv poslední přímku c, veď CB, a potom $M'M \parallel N'N \parallel CB$, i bude $AM:MN:NB=a:b:c$.

Aneb: položiv (obr. 109. b.) $A'B' \parallel AB$, a naměřiv $A'M'=a$, $M'N'=b$, $N'B'=c$, veď AA' i BB', a prodluž tyto přímky, až se setkají v bodě O; odtud veď pomeznými body M' i N' paprsky OM', i ON', kteréž dělí přímku danou v bodech M, N na části žádané.

Důkaz o pravosti ponechán čtenářovi.

3. Danou přímku sobě rozděl na několik části sobě rovných.

Rozřešení jest předešlému podobno, jen že se (obr. 109 a. b) učiní $AM'=M'N=N'C$ atd.

4. Ku třem daným přímkám a, b, c najdi čtvrtou úměrnou, čili: najdi přímku, jež by byla ku přímce dané v určitém poměru.

Rozřeš. Z téhož bodu A (obr. 109. c.) vycházejte dvě přímky AC i AC'; sřízni $AB=a$, $AC=b$, $AB'=c$, veď BB' a $CC' \parallel BB'$ i bude AC' přímka hledaná.

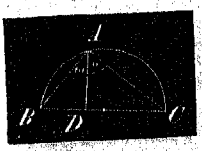
Aneb: Mějme dvě přímky rovnoběžné $A'C' \parallel AC$ (obr. 109. d), sřízni $AB=a$, $AC=b$; $A'B=c$; veď AA', BB', a prodluž do průseku O odtud veď paprsek OC, i bude $A'C'$ přímka hledaná.

Aneb: Na přímce AC (obr. 109. c.) odřízni $AB=a$, $AC=b$; veda pak směrem kterýmkoliv učiň $BB'=c$, veď paprsek AB', a učiň $CC' \parallel BB'$, i bude CC' přímka hledaná.

Důkaz pravosti zůstaven čtenářovi.

5. Ku dvěma daným přímkám a i b najdi přímku x spojitě úměrnou; $(a:b=b:x)$.

obr. 106.



Rozřeš. Učiň (obr. 105) úhel pravý $BDA=R$, sřízni $BD=a$, $DA=b$, veď BA, učiň $BAC=R$, prodluž BD až se protne s AC; i jest DC přímka hledaná.

Poznam. Víme-li že jest buď $a>b$, aneb $a<b$, rozřešíme i jiným spůsobem, a sice: je-li $a>b$, sestrojíme trojúhelník pravoúhlý, jehož podponou jest a, a odvěsnou b; s vrcholu pravého úhlu spustíme kolmici na podponu; úsečka podpony k odvěsné b přiléhající jest přímkou žádanou. — Je-li ale $a<b$, učiníme $BDA=R$ $BD=a$, $BA=b$, $BAC=R$, i bude BC přímka žádaná.

Důkazy zůstavuji se čtenářovi.

6. Mezi přímkama danýma a i b najdi prostřední přímku úměrnou.

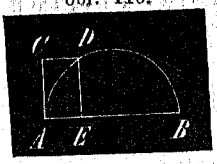
Rozř. Sřízni (obr. 105.) $BD=a$. $DC=b$; nad průměrem BC opiš polokruh BAC, vztyč $DA \perp BC$, i jest pak DA přímka hledaná.

Aneb: Delší přímku b vezmi za průměr, učiniv $BC=b$ (obr. 105.), nad průměrem tím opiš polokruh, do něho vlož tetivu $BA=a$, s bodu A spusť kolmici na průměr $AD \perp BC$, i bude úsečka BD přímkou žádanou.

Důkaz zůstaven čtenářovi.

7. Rozděl přímku danou a na dvě části, mezinimiž by jiná přímka daná b byla prostřední úměrnou.

obr. 110.

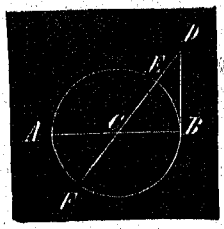


Rozř. Nad průměrem $AB=a$ (obr. 110.) opiš polokruh ADB, postav $AC \perp AB$, učiň $AC=b$, veď $CD \parallel AB$, spusť $DE \perp AB$; i budou AE i EB části žádané.

Důkaz podej čtenář.

8. Prodluž přímku danou a tak, aby jiná přímka daná b byla prostřední úměrnou mezi přírůstkem a mezi zvětšenou přímkou celou.

obr. 111.



Rozř. Nad průměrem $AB=a$ (obr. 111.) opiš kruh $AEBF$, vztyč tečnou $BD=b$, středem C veď sečnou, jež protne kruh v bodech E i F; její vnější úsečka ED jest část, o niž přímku AB prodloužiti třeba, aby úloha byla rozřešena.

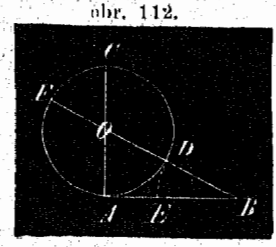
Důkaz zůstaven čtenářovi.

9. Rozděl přímku danou a v poměru vnějším i vnitřním, t. j. tak na dvě

části, aby jedna z nich byla prostřední úměrnou mezi částí druhou a mezi přímkou celou.

Rozbor. Buď (obr. 112.) $AB=a$ přímka daná v bodě E tak rozdělena, že jest $AE:EB=EB:AB$. Z této úměry vyjde $(AE+EB):EB=(AB+EB):AB$, čili $AB:EB=(AB+EB):AB$, aneb $EB:AB=AB:(AB+EB)$; čímž úloha převedena jest na předešlou (8), položíme-li tam $b=a$. Aurea sectio - zlatý řez.

obr. 112.



Rozř. Učiň $AB=a$, vztyč $AC\perp AB$, nad průměrem $AC=a$ opiš kruh, jeho středem O veď sečnou BF, vnější úsečku BD sřízni z přímky dané $BE=BD$, i jest AB v bodě E rozdělena, jako žádáno.

Důkaz. $DB:AB=AB:FB$ (XCIII. 2.), pročež také $DB:AB=AB:(FD+DB)$ aneb $EB:AB=AB:(AB+EB)$; odtud jde $EB:(AB-EB)=AB:(AB+EB-AB)$ čili $EB:AE=AB:EB$, pročež $AE:EB=EB:AB$.

Poznam. Tato úloha zní všeobecněji: Na přímce AB dané najdi bod C, jehož vzdálenost od konce jednoho A buď prostřední úměrnou mezi jeho vzdáleností od konce druhého B a mezi přímkou celou AB.

10. Najdi stranu pravidelného desetiúhelníka do kruhu vepsaného.

Rozř. Poloměr kruhu rozděl v poměru vnějším i vnitřním; delší část jeho jest stranou žádanou (XCIII. 3.).

11. Rozděl obvod kruhu na 10, 5, 20, 40, 80 atd. rovných částí.

12. Na straně dané a nakresli mnohoúhelník danému podobný.

Rozř. Polož přímku, $AB=a$ (obr. 101. a. b.) rovnoběžně se stranou $A'B'$ daného mnohoúhelníka $A'B'C'D'E'$, ku které má daná strana býti úměrná. Veď paprsky $A'A$, $B'B$, a prodluž do průseku O; odtud veď paprsky OC', D', OE' atd., a potom příčky stejnolehlé $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, $DE \parallel D'E'$ a konečně EA, i bude $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

Důkaz zůstaven čtenářovi.

Poznam. Není-li strana a dána, nébrž její poměr k straně

stejnolehlé jiného n-úhelníka, najdi nejprv stranu a (dle odst. 1.), a pak sestroj obrazec, jak tuto povědíno.

13. Sestroj kruh, jenž by
a) probíhaje dvěma bodoma danýma dotýkal se přímky dané;
b) dotýkaje se dvou přímek daných procházel bodem daným;
c) dotýkaje se kruhu a přímky daných procházel bodem daným.

Knihy čtvrté část pátá.

O dělení harmonickém.

§. XCV.

1. Poměr dvou poměrů slove poměr *dvojitý* (Doppelverhältniss), ku př. $(a:b):(c:d)$ čili $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$.

2. Poměr dvojitý, mající za hodnotu — 1, slove *harmonický*, ku př. $\frac{5}{3}:\frac{12-17}{11-8}=-1$.

3. Je-li čtvero bodův A, B, C, D, (obr. 113.) na jedné přímce položených tak jeden od druhých vzdálen, že poměr $\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{DC}$ jest harmonický: slovou tyto body též *harmonickými*; o přímce AC pravíme pak, *že jest rozdělena v poměru harmonickém v bodě B k bodu D*; a rovněž přímka BD rozdělena jest pak *v poměru harmonickém v bodě C k bodu A*. Bodové A i C slovou *spřežitými* (conjugirt), rovněž bodové B i D.

obr. 113.

4. Paprsky OA, OB, OC, OD, z kteréhokoliv bodu O k bodům harmonickým vedené, slovou též *harmonickými*; a sice jsou opět OA i OC *spřežitými*, rovněž OB i OD.

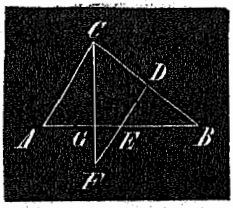
čili konjugované

§. ~~XCVI.~~ 90

1. Je-li v trojúhelníku ABC (obr. 114.) rovnoběžná se stranou CA příčka DE prodloužena na dvojnásobnou svou délku; a vedeme-li z jejího konce F k protějšímu vrcholu C přímku: tehdy se protne přímka AE v bodě G k bodu B v poměru harmonickém.

Důkaz. Z $DE \parallel CA$ jde $AB:EB=CA:DE$; a poněvadž jest $EF \parallel CA$, pročež vyplývá $CA:EF=AG:GE$; avšak $DE=EF$, pročež jest $AB:EB=AG:GE$, čili $\frac{AB}{EB}:\frac{AG}{GE}=1$, z čehož jde $\frac{AB}{BE}:\frac{AG}{GE}=-1$, (neboť $EB=-BE$).

obr. 114.



Poznam. Tato věta platí též převrácená; totiž: *je-li* (obr. 114.) *přímka AE* v bodě *G* k bodu *B harmonicky rozdělena, a příčka DE || CA: pak musí též býti DE=EF.*

Což čtenář dokáže.

2. Dokázaná tuto věta učí nás řešiti úlohy tyto:

a) Ku třem bodům daným najdi čtvrtý harmonický;

b) Danou přímku rozděl v poměru harmonickém k určitému bodu;

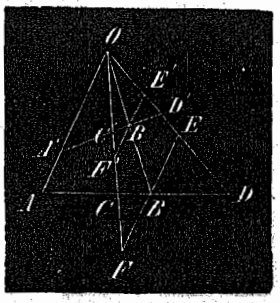
c) Ku třem paprskům najdi čtvrtý harmonický.

Rozřešení i důkaz zůstavují se čtenáři.

3. *Harmonické paprsky protínají se každou příčnou v bodech harmonických.*

Důkaz. Buďtež (obr. 115.) *OA*, *OC*, *OB*, *OD* paprsky harmonické; veďme $BE \parallel AO$, a prodlužme *OC*, i jest pak $FB=BE$ (1. *Poznam.*). Veďme nyní bodem B' přímku $F'E' \parallel FE$, i jest rovněž $F'B'=B'E'$, a z té příčiny jest dle odst. 1. v trojúh. $OA'D'$, v němž jest $E'B' \parallel OA'$, strana $A'B'$ v bodě C' k bodu D' harmonicky rozdělena.

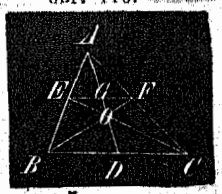
obr. 115.



4. *Příčka AD* (obr. 116.) *v trojúh. ABC s vrcholu A ku prostředku D podstavy BC vedená dělí se harmonicky příčkama ode druhých dvou vrcholů vedenýma ku koncům příčky EF s podstavou rovnoběžné.*

Důkaz. Pokládáme-li paprsky *CA*, *CO*, *CD* za harmonické, tedy jest bod *G* (dle 1.) spřežitý bod harmonický k bodu *D*, poněvadž jest $EG=GF$.

obr. 116.

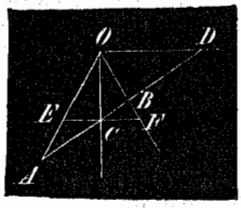


5. *Spojíme-li příčkami rozpolovací body D, E, F,* (obr. 116.) *stran trojúhelníka ABC: tehdy*

se jimi všecky příčky od vrcholu k těmto bodům rozpolovacím vedené dělí harmonicky.

6. *Ramena úhlu (AO i BO), a přímky (OC i OD), jimaž se on sám i vedlejší úhel jeho rozpolují, jsou paprsky harmonickými* (obr. 117.).

obr. 117.



Důkaz. Veď kterýmkoliv směrem příčnou AD, i jest (dle §. XCI.) $AC:CB=OA:OB$ a $AD:BD=OA:OB$, pročež $AC:CB=AD:BD$ čili $\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=-1$.

7. *Harmonický paprsek OC* (obr. 117.) *jímž se úhel AOB dvou jiných spřežitých paprsků rozpoluje, stojí na svém spřežitém paprsku OD kolmo.*

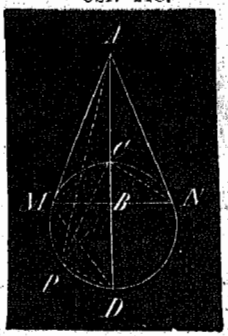
Důkaz. Bodem C veď $EF \parallel OD$; i jest $EC=CF$, (odst. 1. Poznam.) pročež i $OE=OF$ (XCI. 1.), tedy $\triangle OCE \cong \triangle OCF$, pročež $OC \perp EF$, proto i $OC \perp OD$.

8. *Harmonický paprsek OC* (obr. 117.), *jenž na svém spřežitém OD kolmo stojí, rozpoluje úhel AOB dvou zůstatních paprsků spřežitých.*

Důkaz. Veď bodem C opět $EF \parallel OD$, i bude $OC \perp EF$, a $EC=CF$, tudíž $\triangle ECO \cong \triangle OCF$, pročež $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COB$.

9. *Průseky sečné středem procházející s kruhem, s tečnou a s tetivou tečných jsou body harmonické.*

obr. 118.



Důkaz. Veď (obr. 118.) CM i DM a bod M za střed paprsků pokládej. Jest $CMD=R$ (LXXVI. 3. a.), $AMC=CDM$ (LXXX. 3.), $CDM=CMN$ (LXXXVI. 2. b.), pročež $AMC=CMN$, pročež (dle 6.) A, C, B, D body harmonické.

10. *Vzdálenosti průseků sečné středem procházející s tečnou a s tetivou tečných od kteréhokoliv bodu na obvodě kruhu jsou k sobě v poměru stálém.*

Důkaz. Veď z kteréhokoliv bodu P (obr. 118) na obvodě kruhu paprsky k bodům (harmonickým) A, C, B, D; jest pak $CPD=R$, tehdy musí býti $\sphericalangle APC = \sphericalangle CPB$ (8.), a pročež $PA:PB=AC:CB$. (XCI.).

11. *Poznam.* Kdykoliv jest hledati bod, jehož ode dvou bodů daných A i B odlehlosti by k sobě byly v poměru určitém: rozděl nejprvé přímku AB (obr. 118.) v poměru žádaném na části AC i CB, vyhledej bod D, k němuž by přímka AB v bodě C byla

harmonicky rozdělená, a konečně opiš nad průměrem CD kruh, jenž bude geometrickým místem bodu hledaného.

12. *Úkoly:* Sestroj trojúhelník, dána-li jest podstava, poměr druhých dvou stran, a mimo to

a) buď výška, b) neb úhel proti podstavě, c) aneb úhel na podstavě d) aneb příčka k prostřed podstavě od protějšího vrcholu vedená.

Knihy čtvrté část šestá.

Algebraické pojímání veličin i vět geometrických.

§. ~~XCVII.~~ 97.

1. Jedná-li se o velikost přímek, sluší udati, *kolikkráte* jest míra v přímce obsažena; pročež žádáme jmenovati nejprv *číslo*, a pak *míru*, chtějíce zvěděti velikost přímky. Z toho jde, že lze s přímkou zacházeti jako s čísly pojmenovanými. Totéž platí o plochách i tělesích, pokud o jejich velikost běží.

2. Při vědeckém zpytování nezáležívá na tom, *jak veliká* jest míra sama, toliko se žádá, aby se míra během věty *neměnila*. Pak ovšem na čísla dbáti budeme, a ta nám budou udávati *poměrnou* velikost jedné přímky ku druhé, jednoho oblouku ku druhému, jedné plochy ku druhé, jednoho tělesa ku druhému.

3. S těmito čísly lze všechny výkony počtářské před se bráti, tedy sčítati je, odnímati, spolu násobiti, děliti, zmocňovati, odmocňovati atd.

4. Však majíce na mysli tato čísla poměrná přikládáme jim pro krátkost i pro vyrozumění jejich původu jména měřených veličin samých, i díme ku př. že se násobí spolu dvě *přímky*, a rozumíme, že se násobí dvě čísla, kteráž udávají poměry jejich délek ku zvolené míře.

§. ~~XCVIII.~~ 98

Na těchto základech stavíce vyvozujeme z některých vět v předešlých §§. vyslovených, jako následuje; a sice:

Z §. XCII. 1. b. c.

1. *Čtverec odvěsné rovná se součinu z podpony a z přilehlé úsečky* (z přilehlého průmětu) *její.*

Neboť tamž bylo $BD:BA=BA:BC$, odtud $\overline{BA}^2=BC.BD$ a rovněž jest $\overline{AC}^2=BC.DC$ (obr. 105.)

2. *Čtverec výšky trojúhelníka pravoúhlého rovná se součinu z obou úseček podpony.*

Neboť tam bylo $BD:DA=DA:DC$ odtud $\overline{DA}^2=BD.DC$. (obr. 105.).

3. Z rovnic v odst. 1. uvedených plyne:

$\overline{BA}^2:\overline{AC}^2=BD:DC$; t. j. *čtvercové odvěsných jsou k přilehlým úsečkám podpony v poměru přímém.*

4. Poněvadž jest $\overline{BC}^2=BC.BC$, a $\overline{BA}^2=BC.BD$ (odst. 1.), pročež jest $\overline{BC}^2:\overline{BA}^2=BC:BD$ t. j. *čtverec podpony má se ku čtverci odvěsné, jako podpona k přilehlé úsečce.*

5. Sečteme-li rovnice v odst. 1. uvedené, nabudeme:

$\overline{BA}^2+\overline{AC}^2=BC.BD+BC.DC$ čili

$\overline{BA}^2+\overline{AC}^2=BC\ (BD+DC)$, aneb

$\overline{BA}^2+\overline{AC}^2=BC.BC$, aneb $\overline{BA}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$,

odkudž také jde $\overline{BA}^2=\overline{BC}^2-\overline{AC}^2$; t. j.

a) čtverec podpony jest roveň součtu odvěsných zčtvercovaných;

b) čtverec odvěsné jest roveň rozdílu mezi čtvercem podpony a mezi čtvercem odvěsné druhé.

6. Z téhož §. XCII. 2. vyvodíme podobným spůsobem:

a) čtverec tetivy kruhové rovná se součinu z průměru a z přilehlé úsečky;

b) čtverec kolmice s obvodu na průměr kruhu spuštěné rovná se součinu z obou úseček průměru.

7. Z §. XCIII. 1. a 2. vyvodíme:

a) Součiny z úseček sečných z jediného bodu ku kruhu vedených jsou si rovny. Neboť bylo: $AD':AD=AB:AB'$, odtud $AD'.AB'=AD.AB$ (obr. 106.).

b) Součiny z úseček tetiv v jednom bodě uvnitř kruhu se protínajících jsou si rovny.

c) Čtverec tečné při kruhu rovná se součinu ze sečné a z její vnější úsečky.

Neboť bylo $AB:AE=AE:AD$ odtud $\overline{AE}^2=AD.AB$ (obr. 107).

8. K §. XCVI. můžeme přidati:

Jsou-li A, B, C, D (obr. 113.) *body harmonické a mezi nimi A i C, pak B i D spřežitými; jest součin z krajných úseček celé přímky AD roveň součinu z úsečky prostřední a z přímky celé.*

Neboť jest $\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{DC}=-1$. čili $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$, odtud $AB.CD=BC.AD$.

§. XCIX.

Na základě vyslovených tímto spůsobem vět dá se opět mnoho úloh rozřešiti. Zde stůjte některé, a sice:

1. Najdi přímku, jejíž čtverec se rovnej součtu čtverců dvou přímek daných.

Rozřeš. Sestroj trojúhelník pravoúhlý, v němž dané přímky buďte odvěsnýma; jeho pak podpona jest přímkou žádanou.

2. Najdi přímku, jejíž čtverec rovnej se rozdílu čtverců dvou přímek daných.

Rozřeš. Sestroj trojúhelník pravoúhlý vezma delší z daných přímek za podponu, a kratší za odvěsnou jeho; druhá pak odvěsná jest přímkou žádanou.

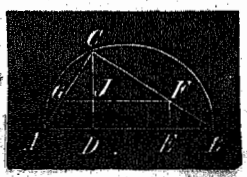
3. Najdi přímku, jejíž čtverec se rovná součinu dvou přímek daných.

Rozřeš. Vyhledej mezi danýma přímkama jejich prostřední úměrnou, a ta jest přímkou žádanou.

4. Najdi přímku, kteráž buď k dané přímce a v poměru čtverců dvou přímek daných m i n.

Rozřeš. Sestroj trojúhelník pravoúhlý ACB (obr. 119.) vezma $AC=m$, $BC=n$ za odvěsné; s vrcholu C spusť kolmici na podponu $CD \perp AB$, odřízni $DE=a$, veď $EF \parallel DC$ a $FG \parallel BA$, i bude GJ přímkou žádanou.

obr. 119.



Důkaz zůstaven jest čtenářovi.

5. Najdi přímku, jejíž čtverec buď ku čtverci jiné přímky dané a v poměru dvou přímek daných $m:n$.

Rozřeš. Učiň (obr. 119.) $AD=m$, $AD=n$; nad průměrem AB opiš polokruh, postav $DC \perp AB$, veď tetivy AC i BC, sřízni $CF=a$, veď $FG \parallel BA$: pak jest CG přímkou žádanou.

Důkaz dej čtenář.

6. Vypočitej délku strany desetiúhelníka pravidelného, známa-li délka poloměru r opsaného kruhu.

Rozřeš. Buď x délka hledaná, dle §. XCIII. 3. jest $(r-x):x=x:r$; odtud $r:x=(x+r):r$, a odtud $x^2+rx=r^2$; pročež i $x^2+rx+\left(\frac{r}{2}\right)^2=r^2+\frac{r^2}{2}$ čili $\left(x+\frac{r}{2}\right)^2=r^2+\frac{r^2}{4}$, odtud $x+\frac{r}{2}=\sqrt{5\frac{r^2}{4}}$, pročež $x=\sqrt{5.\frac{r^2}{4}}-\frac{r}{2}$, aneb $x=\frac{r}{2}\sqrt{5}-\frac{r}{2}$, aneb $x=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Knihy páté část prvá.

O obvodě mnohoúhelníků.

§. C.

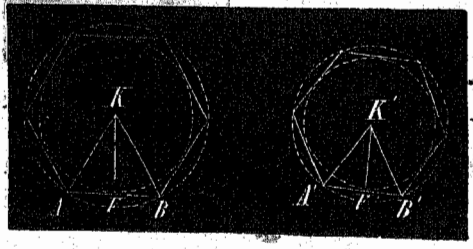
1. *Obvody* **O** *i* **O'** n-*úhelníků podobných jsou ku stranám stejnolehlým v poměru přímém.*

Důkaz: Jsou-li $a, b, c, d \ldots$ strany jednoho, $a', b', c', d' \ldots$ stejnolehlé strany druhého n-úhelníka, jest za příčinou jejich podobnosti $a:a'=b:b'=c:c'=d:d'=\ldots$, odkudž nabýváme $(a+b+c+d+\ldots):(a'+b'+c'+d'+\ldots)=a:a'$ čili $O:O'=a:a'$.

2. *Obvody* **O** *i* **O'** n-*úhelníků pravidelných mají se k sobě jako poloměry (průměry) kruhů buď opsaných buď vepsaných.*

Důkaz. Buď pravidelného n-úhelníka strana $AB=a$ (obr. 120.), a jiného $A'B'=a'$; jest pak obvod prvého $O=n.a$ a druhého $O'=n.a'$; pročež $O:O'=a:a'=AB:A'B'$. Vedeme-li ze středu K i K' opsaných kruhů poloměry KA, KB; $K'A'$, $K'B'$; bude úhel

obr. 120.



$AKB=\frac{4R}{n}=A'K'B'$, pročež $\triangle AKB \sim \triangle A'K'B'$ (XC. 4. b.) pročež $AB:A'B'=KA:K'A'$ a tím $O:O'=KA:K'A'$ $=2.KA:2.K'A'$. — Spustíme-li se středu kolmice na strany $KV \perp AB$, $K'V' \perp A'B'$; jsou ony za

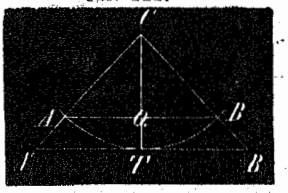
jedno výškami trojúhelníků, za druhé poloměry kruhů vepsaných; z podobnosti $\triangle AKB \sim \triangle A'K'B'$ jde $AB : A'B' = KV : K'V'$, pročež $O : O' = KV : KV' = 2.KV : 2.K'V'$.

§. CI.

1. *Obvod* **O** *pravidelného* **n**-*úhelníka vepsaného do kruhu jest menší než obvod* **O'** *pravid.* **n**-*úhelníka o týž kruh opsaného.*

Důkaz. Buď (obr. 121.) C střed, $CA = CB = r$ poloměr kruhu, $AB = a$ strana pravidelného n-úhelníka vepsaného; pročež $\sphericalangle ACB = \frac{4R}{n}$.

obr. 121.

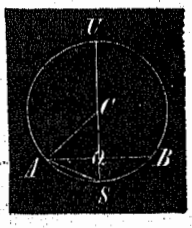


Spustíme-li $CQ \perp AB$, a prodloužívše do T vedeme-li $A'B' \parallel AB$, bude $A'B' = a'$ strana pravid. n-úhelníka opsaného, poněvadž jest $\sphericalangle ACB' = \frac{4R}{n}$. Jest pak $O = n.a$, $O' = n.a'$, pročež $O : O' = a : a'$; za příčinou $A'B' \parallel AB$ jest $AB : A'B' = a : a' = CA : CA' < 1$, pročež $O : O' < 1$ t. j. $O < O'$.

2. *Obvod* $\mathbf{O_{2n}}$ *vepsaného do kruhu* **2n**-*úhelníka pravidelného jest větší, než obvod* $\mathbf{O_n}$ *vepsaného do téhož kruhu* **n**-*úhelníka pravidelného.*

Důkaz. Buď (obr. 122. $AB = a_n$ strana vepsaného n-úhelníka, C střed kruhu; spustíme-li $CQ \perp AB$, rozpolí se i tetiva i oblouk AB, i bude $AS = a_{2n}$ stranou vepsaného $2n$-úhelníka pravidelného. Jest ale $AS > AQ$ t. j. $a_{2n} > \frac{1}{2} a_n$ čili $2.a_{2n} > a_n$, pročež $2n.a_{2n} > n.a_n$ t. j. $O_{2n} > O_n$.

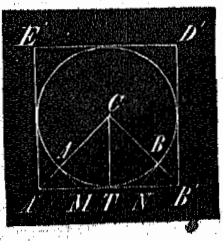
obr. 122.



3. *Obvod* $\mathbf{O'_{2n}}$ *opsaného o kruh* **2n**-*úhelníka pravidelného jest menší než obvod* $\mathbf{O'_n}$ *opsaného o týž kruh* **n**-*úhelníka pravidelného.*

Důkaz. Buď $A'B' = a'$ strana opsaného n-úhelníka pravidelného, T bod dotyčný, C střed, $CT = r$ poloměr kruhu (obr. 123.). Vedeme-li CA' i CB', rozpolí se úhel A' i B' n-úhelníka §. LXX. 4.), a $\triangle A'CB'$ jest rovnoramený, t. j. $A'C = B'C$. Mimo to jest $CT \perp A'B'$ (§. LXXVII. 5.), pročež $\triangle A'TC \cong \triangle CTB'$, odkudž

obr. 123.



$A'T = TB' = \frac{1}{2}a'_n$. A poněvadž jest $\sphericalangle A'CT = \sphericalangle TCB$, pročež jest i $arc.\ AT = arc.\ TB$. Postavíme-li tedy $AM \perp CA$, $BN \perp CB$, bude $MN = a'_{2n}$; $AM = \frac{1}{2}a'_{2n} = MT = TN$. Jest ale $AM < A'M$, pročež i $MT + AM < A'M + MT$, aneb $MT + TN < A'M + MT$ čili $MN < A'T$ t. j. $a'_{2n} < \frac{1}{2}a'_n$, pročež také $2n.a'_{2n} < n.a'_n$, t. j. $O'_{2n} < O'_n$.

§. CII.

1. Jsou-li dány strana a_n n-úhelníka pravidelného (prvého řádu), a poloměr r kruhu opsaného: vypočti stranu a_{2n} pravidelného $2n$-úhelníka (prvého řádu) do téhož kruhu vepsaného.

Rozřeš. Buď (obr. 122.) $AB = a_n$, $CS \perp AB$, $AS = a_{2n}$ strana, jejíž délku určiti máme. Prodlužme SC až k obvodu; pak jest $AS^2 = SU.SQ$ (XCVIII. 6. a), čili $a_{2n}^2 = 2r.SQ$. Jest ale $SQ = SC - QC = r - QC$; $\overline{QC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AQ}^2$ (XCVIII. 5. b) čili $\overline{QC}^2 = r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$, pročež $QC = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a_2}{2}\right)^2}$ Z toho plyne

$$a_{2n}^2 = 2r.SQ = 2r(r - QC) = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)$$ odkudžjde

$$a_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}} \quad \ldots\ldots \alpha)$$

$$\frac{a_{2n}}{r} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2r}\right)^2}} \quad \ldots\ldots \beta)$$

2. Jsou-li dány poloměr r kruhu, strana a_n pravidelného n-úhelníka (prvého řádu) vepsaného; vypočítej stranu A_n pravidelného n-úhelníka (prvého řádu) o týž kruh opsaného.

Rozřeš. Buď (obr. 121.) $AB = a_n$, $A'B' = A_n$, $CA = CT = CB = r$. Poněvadž tam jest $AB \parallel A'B'$, plyne $A'B' : AB = CT : CQ$ čili $A_n : a_n = r : CQ$, odtud $A_n = a_n \frac{r}{CQ}$. — V trojúh. CQA jest ale $\overline{CQ}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{AQ}^2$ (XCVIII. 5. b) čili $\overline{CQ}^2 = r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$, odtud $CQ = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$. Pročež jest

$$A_n = \frac{a_n \cdot r}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}} = \frac{a_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2r}\right)^2}} \quad \ldots\ldots \gamma).$$

$$\frac{A_n}{r} = \frac{a_n : r}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2r}\right)^2}} \quad \ldots\ldots \delta).$$

3. V šestiúhelníku pravidelném do kruhu vepsaném jest strana poloměru rovna. Posadivše do vzorce α) v odst. 1. místo a_n hodnotu r, obdržíme $a_{2n} = a_{12}$ stranu *12*-úhelníka, tuto pak hodnotu opět do vzorce α) dosadíce, obdržíme stranu *24*-úhelníka vepsaného; a tímž spůsobem vypočítáme stranu *48-, 96-, 192-, 384*-úhelníka atd. vepsaného. Majíce tyto, vypočteme dle vzorce γ) strany úhelníků opsaných. Béřeme-li r za míru, počítáme dle vzorců β) a δ). Majíce vypočteny strany vyhledáme obvod, znásobíce stranu počtem stran. Výsledky těchto počtů (dle vzorců β) a δ)) jsou v následující tabulce zapsány; z níž také jest viděti, že obvod vepsaného úhelníka počtem stran se zvětšuje, obvod opsaného úhelníka ale zmenšuje, a tudíž oba k sobě se přibližují, jak to vychází z §. CI.

Kolik stran má mnohoúhelník	Jak dlouhá jest strana mnohoúhelníka		Jak velký jest obměr mnohoúhelníka	
	vepsaného	opsaného	vepsaného	opsaného
6	1.000000000	1.154700538 ..	6.000000	6.928203..
12	0.517638180 ..	0.535898478 ..	6.211658..	6.430782..
24	0.261052384 ..	0.263304993 ..	6.265257..	6.319320..
48	0.130806258 ..	0.131086925 ..	6.278700...	6.292172..
96	0.065438173 ..	0.065473230 ..	6.282065...	6.285430..
192	0.032723463 ..	0.032727844 ..	6.282905...	6.283746..
384	0.016362279 ..	0.016362827 ..	6.283115...	6.283325..
768	0.008181208 ..	0.008181276 ..	6.283168...	6.283220..
1536	0.004090613 ..	0.004090621 ..	6.283181...	6.283194..
3072	0.002045307 ..	0.002045308 ..	6.283183...	6.283187...

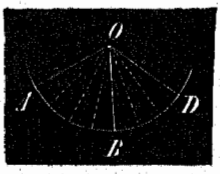
Knihy páté část druhá.

O obměru kruhu.

§. CIII.

1. *Oblouky téhož kruhu* (neb dvou stejných kruhů) *mají se k sobě jako příslušné k nim úhly středové.*

obr. 124.



Důkaz. Buďtež AB a BD (obr. 124.) oblouky jednoho kruhu, AOB i BOD příslušné k nim úhly středové.

Rozeznávejme: jak úhly tak oblouky jsou buď souměřitelné aneb jsou nesouměřitelné.

Jsou-li úhly AOB i BOD souměřitelné majíce za společnou míru úhel α, rozdělme touto mírou i jeden i druhý úhel na samé rovné části, i bude $AOB = m.\alpha$, $BOD = n.\alpha$, pročež $\sphericalangle AOB : \sphericalangle BOD = m : n$. — Tím se však i oblouky na samé rovné části β rozdělí (LXXIII. 1. a.), i bude $arc.\ AB = m.\beta$, $arc.\ BD = n.\beta$, pročež $arc.\ AB : arc\ BD = m : n$. Z obou úměr jde
$arc.\ AB : arc.\ BD = \sphericalangle AOB : \sphericalangle BOD$.

Jsou-li tyto úhly nesouměřitelné, platí táž úměra, což čtenář sám dokáže podobným spůsobem jako v §. LXXXVII. 2. b.

2. Přibývá-li úhlu BOD (obr. 124.) až na $4R$, vzroste příslušný k němu oblouk BD na celý obměr; odkudž vážíme větu:

Oblouk se má k celému obměru kruhu, jako příslušný jeho úhel středový ku čtyrem pravým.

§. CIV.

1. Postavivše dva kruhy tak, aby soustřednými byly, přijmeme-li společný střed jejich za střed paprsků, shledáme, že se tito paprskové obvodoma protínají v poměru stálém, t. v poměru poloměrů $r : r'$ obou kruhů. — I pravíme proto:

a) Všechny kruhy jsou obrazci podobnými.

b) Z téže příčiny jsou podobnými též oblouky dvou kruhů, jsou-li příslušné úhly středové sobě rovny. jsou podobny.

2. *Podobné oblouky jsou k celým obměrům kruhů v poměru přímém.*

obr. 125.

Důkaz. Buď (obr. 125.) *arc.* $AB \sim$ *arc.* $A'B'$, C společný střed; obměry znamenejme písmeny O i O', máme pak (CIII. 2.)

$$arc.\ AB : O = \sphericalangle ACB : 4R$$
$$arc.\ A'B' : O' = \sphericalangle A'CB' : 4R$$

odtud jde

$$arc.\ AB : arc.\ A'B' = O : O'.$$

§. CV.

obr. 126.

1. Kruh jest čára křivá; nikterý díl její není přím (§. I. 2.). Každá částka má jiný směr, odchylující se od směru částky vedlejší. Směr kruhu na kteréms místě A (obr. 126.) určuje se tečnou AX (LXXVII. 4. b.), na místě B rovněž tečnou BY. Rozdíl směrů, jež má kruh na řečených místech A i B udá se tedy rozdílem směrů příslušících tečných AX i BY, totiž úhlem $YOX = \tau$. Tento úhel τ rovná se však úhlu středovému α nad obloukem AB (XIX. 5.).

2. Je-li oblouk AB (obr. 126.) neskončeně malý, jest i úhel α, pročež i úhel τ neskončeně malý t. j. během z bodu A až do bodu B čára svůj směr změní *neskončeně málo*; pročež si tehdy dovolujeme pokládati oblouček neskončeně krátký za čáreczku *přímou*.

3. Pokládajíce neskončeně krátký oblouček za přímku, můžeme též kruh míti za mnohoúhelník pravidelný. Neboť si pak myslíme, že celý obvod jest složen z částeček přímých stejně dlouhých, jichž množství jest ovšem neskončeně veliké; za druhé každý úhel, jejž svírá dvé těchto částeček sousedních, jest roveň přímému zmenšenému o příslušný úhel středový, který jest neskončeně malý a pro všechny částky stejně veliký. Má tudíž mnohoúhelník ten všechny strany sobě rovny, i všechny vnitřní úhly sobě rovny.

§. CVI.

1. *Obměry dvou kruhů mají se k sobě jako poloměry aneb jako průměry jejich.*

Důkaz. Buď (obr. 125.) C společný střed dvou kruhů, AB i $A'B'$ podobné oblouky neskončeně malé; pročež je lze pokládati

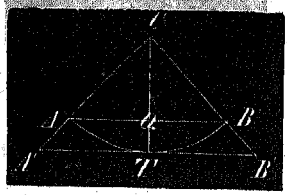
za přímky (CV. 2.). Jest ale $CA : CA' = CB : CB'$ (poněvadž $CA = CB$, $CA' = CB'$); odtud jde $AB \parallel A'B'$ (LXXXVII. 4.), a proto zase $AB : A'B' = CA : CA' = r : r'$ (LXXXVII. 3.); mimo to jest $AB : A'B' = O : O'$ (CIV. 2.) pročež $O : O' = r : r' = 2r : 2r'$.

2. Z té úměry jde $\frac{O}{2r} = \frac{O'}{2r'} = \pi$, t. j. *poměr obvodu k průměru kruhu jest všem kruhům společný.* Znamená se pak poměr tento písmenem π, i slove obyčejně *číslem Ludolfským.*

§. CVII.

Obměr kruhu jest větší než obvod vepsaného, ale menší než obvod opsaného mnohoúhelníka.

obr. 121.



Důkaz. Buď (obr. 121.) AB strana vepsaného, $A'B'$ strana opsaného mnohoúhelníka, C střed kruhu, T bod dotyčný, zároveň $CQ \perp AB$, $CT \perp A'B'$. Oblouk AT buď neskončeně krátký, i lze jej pokládati za *přímku*; tu bude $AT > AQ$ (poněvadž $\triangle AQT$ trojúhelník pravoúhlý); a zase $AT < A'T$ (poněvadž $CA \perp AT$ dle LXXVII. 5.), pročež $A'B' > arcATB > AB$, násobíme-li počtem n stran, bude $n.A'B' > n.arcATB > n.AB$, čili $O_o > O_k > O_v$; kdežto nám O_o, O_k, O_v znamenají obměr n-úhelníka opsaného, obměr kruhu a obměr n-úhelníka vepsaného.

Není-li ale oblouk AT neskončeně malý, tehdy jest O_o ještě větší, O_v ještě menší (§. CI.), kdežto O_k zůstává neproměněno.

2. Vypočítej číslo Ludolfské.

Znamená-li O obměr kruhu, r jeho poloměr, O_n obměr n-úhelníka vepsaného, O'_n obměr n-úhelníka opsaného, jest dle 1. odst.

$$O_n < O < O'_n$$

pročež také $\frac{O_n}{2r} < \frac{O}{2r} < \frac{O'_n}{2r}$ čili $\frac{O_n}{2r} < \pi < \frac{O'_n}{2r}$ t. j. *Ludolfské číslo leží mezi poměrem obvodu vepsaného n-úhelníka k průměru kruhu, a mezi poměrem obvodu opsaného n-úhelníka k témuž průměru.*

Poněvadž ale poměr $\frac{O_n}{2r} : \frac{O'_n}{2r}$ k jedničce se přibližuje (§. CII. 3.), čím větší jest počet n stran mnohoúhelníka, pročež bude tehdy i $\frac{O_n}{2r} : \pi$ k jedničce ještě bližší, t. j. bude bez mála $\pi \doteq \frac{O_n}{2r} \doteq \frac{O'_n}{2r}$;

a je-li $n=\infty$, lze dokonce položiti $\pi=\frac{O_n}{2r}=\frac{O'_n}{2r}$. Pročež chtějíce ustanoviti číslo Ludolfské π, co možná zevrubně, vypočítáme $\frac{O_n}{2r}$ i $\frac{O'_n}{2r}$ o značném počtu n stran: a pokud tyto dva poměry se spolu srovnávají, srovnává se s nima i poměr π. V §. CII. 3. vypsány jsou poměry $\frac{O_n}{r}$, $\frac{O'_n}{r}$ (t. j. udány jsou obvody poloměrem měřené); vezmeme-li polovičná čísla ona, obdržíme poměry $\frac{O_n}{2r}$; $\frac{O'_n}{2r}$. Tím nabudeme ku př. pro 3072-úhelníky:

$O_{3072}:2r=3{\cdot}141592\ldots$ $O'_{3072}:2r=3{\cdot}141593\ldots$, pročež dozajista $\pi=3{\cdot}14159\ldots$.

Zevrubnějším počtem vyjde: $\pi=3{\cdot}14159265358979323864\ldots$

3. *Obměr kruhu rovná se průměru (aneb dvojnásobnému poloměru) znásobenému číslem Ludolfským.*

Neboť dle §. CVI. jest $\frac{O}{2r}=\pi$, pročež $O=2r\pi$.

§. CVIII.

1. Najdi délku a oblouku kruhového, dán-li příslušný úhel ω středový, a poloměr r kruhu.

Rozřeš. Dle CIII. 2. jest $a:O=\omega:4R$, kdež nám O znamená obměr kruhu; ale $O=2r.\pi$ (CVII. 3); pročež $a:2\pi r=\omega:4R$, odkudž $a=2\pi r.\frac{\omega}{4R}$.

2. *Poznam.* Při tomto vzorci sluší pozor míti na to, aby v poměru $\frac{\omega}{4R}$ oba členy byly *jednorodými.* Je-li ω udáno počtem *stupňů*, jichž na úhel pravý jde 90, položíme 4.90 místo $4R$; je-li ω udáno minutami aneb sekundami, položíme 4.90.60 aneb 4.90.60.60 místo $4R$; pročež

$$a=2\pi r.\frac{\omega^0}{360^0}=\pi r.\frac{\omega^0}{180^0}=\pi r.\frac{\omega'}{180.60'}=\pi r.\frac{\omega''}{180.60.60''}.$$

3. *Poznam.* Velmi zhusta však, obzvláště při zpytování vědeckém, brává se za jedničku úhel středový, jehož příslušný oblouk má délku poloměru.

Znamená-li ϱ takovouto míru, máme $\varrho:4R=r:O$ (CIII. 2.) a poněvadž jest $O=2r\pi$, pročež $\varrho:4R=r:2r\pi$ aneb $\varrho:4R=1:2\pi$;

a poněvadž jest ϱ mírou, tedy $\varrho=1$, pročež $1:4R=1:2\pi$, tedy $4R=2\pi$ a $2R=\pi$ a $R=\frac{1}{2}\pi$; t. j. π měří potom úhel přímý, $\frac{1}{2}\pi$ úhel pravý.

V této případnosti jest $a=2r\pi.\frac{\omega}{2\pi}$ čili $a=\omega.r$; je-li $r=1$, jde $a=\omega$, t. j. poměrná čísla oblouku a středového úhlu jsou si rovná, je-li poloměr kruhu=1.

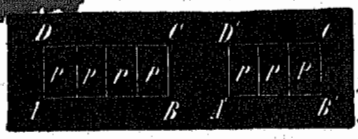
Knihy šesté část prvá.

O velikosti ploch poměrné.

§. CIX.

Ploské obsahy P a P' dvou pravoúhelníků o stejných výškách k podstavám v přímém poměru.

obr. 127.



Důkaz. Buďtež nejprv (obr. 127.) AB a $A'B'$ podstavy *souměřitelné* pravoúhelníků $ABCD$ i $A'B'C'D'$ mající výšky sobě rovné $AD=A'D'$. Rozdělme tedy společnou mírou m podstavy AB a $A'B'$ na samé rovné části, i bude $AB=\alpha.m$, $A'B'=\alpha'.m$, pročež $AB:A'B'=\alpha:\alpha'$ (α i α' jsou čísla, udávající, kolikkrát jest míra m obsažena v podstavách AB i $A'B'$). Vedeme-li nyní rozdělovacími body kolmice na podstavy, nabudeme z daných pravoúhelníků tolikéž menších a jednostejných pravoúhelníků p, na kolik částí jejich podstavy rozděleny jsou: t. j. $P=\alpha.p$; $P'=\alpha'.p$; pročež jest $P:P'=\alpha:\alpha'$. Z této a hořejší úměry jde $P:P'=AB:A'B'$.

Jsou-li podstavy AB i $A'B'$ nesouměřitelnými, platí též úměra, což dokážeš spůsobem jako v §. LXXXVII. 2. b.

2. Poněvadž v pravoúhelníku lze výšku vyměniti za podstavu a naopak, pročež vyplývá též věta:

Ploské obsahy dvou pravoúhelníků o stejných podstavách, jsou ku svým výškám v poměru přímém.

3. *Ploské obsahy P a P' dvou pravoúhelníků jsou v poměru složeném svých výšek i podstav.*

Důkaz. Jsou-li z i z' podstavy, v i v' výšky pravoúhelníků P i P', přimysleme k nim pravoúhelník p třetí o podstavě z' a výšce v.

I bude $\frac{P}{p}=\frac{z}{z'}$, $\frac{p}{P'}=\frac{v}{v'}$; pročež $\frac{P}{p}\cdot\frac{p}{P'}=\frac{z}{z'}\cdot\frac{v}{v'}$, aneb $\frac{P}{P'}=\frac{z}{z'}\cdot\frac{v}{v'}$.

Poznam. Pojímáme-li P, z, v za poměrná čísla, smíme též psáti $\frac{P}{P'}=\frac{z.v}{z'.v'}$ a říci:

Ploské obsahy pravoúhelníků mají se k sobě jako součiny z jejich podstav a výšek.

4. Jsou-li pravoúhelníky P i P' sobě podobny jest $\frac{z}{z'}=\frac{v}{v'}$, tudíž $\frac{P}{P'}=\left(\frac{z}{z'}\right)^2=\left(\frac{v}{v'}\right)^2=\frac{z^2}{z'^2}=\frac{v^2}{v'^2}$. t. j. *ploské obsahy podobných pravoúhelníků jsou v poměru podstav neb výšek zčtvercovaném,* aneb: *mají se k sobě jako čtvercové podstav neb výšek jejich.*

Poněvadž čtvercové jsou sobě podobni, pročež jejich ploské obsahy jsou v poměru stran jejich čtvercovaném.

6. Jsou-li ploské obsahy P a P' sobě rovny, jest $\frac{z}{z'}\cdot\frac{v}{v'}=1$ odtud $\frac{z}{z'}=\frac{v'}{v}$, t. j. *Podstavy dvou sobě rovných pravoúhelníků jsou k svým výškám v poměru převráceném.*

§. CX.

1. *Rovnoběžníky, které mají stejně dlouhé jednak podstavy, jednak výšky, mají též ploský obsah stejně velký.*

obr. 128.

Důkaz. Položme rovnoběžníky $ABCD$ i $A'B'C'D'$ (obr. 128.) tak, aby podstavy jejich $AB=A'B'$ a protější strany $DC=D'C'$ připadly na dvě rovnoběžky, což jest za příčinou stejných výšek možná. I bude pak $AA'D'D\cong BB'C'C$ poněvadž v těchto lichoběžnících všechny i strany i úhly střídavě a v témž pořádku si jsou rovny; pročež jest také $AA'D'D-BA'D'C=BB'C'C-BA'D'C$ čili $ABCD=A'B'C'D'$.

2. Předešlá věta platí, i když jeden rovnoběžník jest pravoúhlý; odtud věta: *Rovnoběžník jest roveň pravoúhelníku, s kterým má i výšku i podstavu společnou č. stejně dlouhou.*

Odtud opět jde:

3. a) Rovnoběžníky o společné výšce mají se k sobě jako podstávy jejich;

b) Rovnoběžníky o společné podstavě mají se k sobě jako výšky jejich.

c) Rovnoběžníky jsou v složeném poměru svých podstav a výšek;

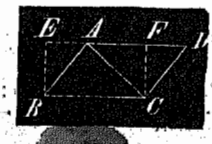
d) Rovnoběžníky podobné jsou v čtvercovaném poměru svých stran stejnolehlých anch výšek stejnolehlých;

e) Kosočtvercové mají se k sobě jako čtvercové stran jejich;

f) Podstavy dvou sobě rovných rovnoběžníků jsou ku svým výškám v poměru převráceném.

§. CXI.

obr. 129.



1. a) *Trojúhelník rovná se polovici rovnoběžníka, s nímž má společnou (stejně velikou) i podstavu i výšku.*

Důkaz. V trojúh. ABC (obr. 129.) veď $AD \parallel BC$, $CD \parallel BA$; i jest pak $ABCD$ rovnoběžník, a $\triangle ABC = \triangle DCA$, a pročež $\triangle ABC = \frac{1}{2} ACD = \frac{1}{2} ABCD$. —

Jsou-li na též podstavě BC postaven o stejné výšce jiný rovnoběžník $BCFE$, jest (dle CX.) $BCFE = ABCD$; pročež i $\triangle ABC = \frac{1}{2} BCFE$.

b) Tato rovnost platí též, když jest $BCFE$ pravoúhelník. Odtud věta:

Trojúhelník rovná se polovici pravoúhelníka, s nímž má společnou (stejně velikou) i podstavu i výšku.

2. Z odst. 1. jakož i z §. CIX. a CX. odvozujeme dále:

a) Trojúhelníky o stejně velikých i podstavách i výškách mají ploské obsahy stejně veliké;

b) Ploské obsahy trojúhelníků o stejně velikých { podstavách / výškách } jsou k { výškám / podstavám } v poměru přímém.

c) Ploské obsahy trojúhelníků jsou v složeném poměru svých podstav a výšek.

d) Podstavy trojúhelníků sobě rovných jsou k výškám v poměru převráceném;

e) Ploské obsahy trojúhelníků o společné podstavě, jejichž vrcholy leží na přímce s podstavou rovnoběžné, jsou si rovny.

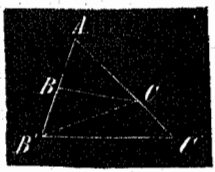
f) Vrcholy trojúhelníků sobě rovných o společné podstavě leží na přímce s podstavou rovnoběžné; — kterážto rovnoběžka

g) jest místem geometrickým pro vrcholy všech trojúhelníků stojících na dané podstavě a majících velikost plochy určitou.

3. *Ploské obsahy trojúhelníků, majících úhel společný (stejně veliký), jsou v složeném poměru stran tento úhel svírajících.*

Důkaz: Trojúhelníky ABC i $AB'C'$ (obr. 130.) mějte společný úhel A; veď přímku CB' i bude dle odst. 2) *b*.

obr. 130.



$\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C} = \frac{AB}{AB'}$; jakož i $\frac{\triangle AB'C}{\triangle AB'C'} = \frac{AC}{AC'}$,

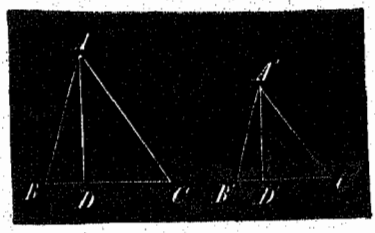
pročež $\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C'} = \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{AC}{AC'}$ anebo

$\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C'} = \frac{AB.AC}{AB'.AC'}$.

4. *Plochy trojúhelníků podobných mají se k sobě, jako čtvercové jejich stran (anebo výšek anebo příček vůbec) stejnolehlých.*

Důkaz. Buď (obr. 131.) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; i jest $A = A'$, pročež (dle odst. 3.)

obr. 131.



$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'}$.

Z podobnosti vyplývá

$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$, a jsou-li AD i $A'D'$ buď výšky buď příčky vůbec stejnolehlé,

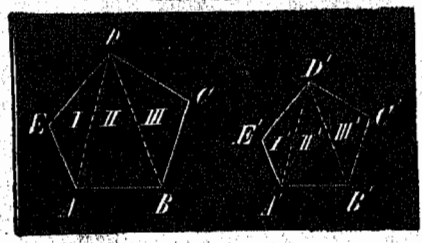
jest i $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'}$, pročež $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2}$.

§. CXII.

1. *Plochy mnohoúhelníků podobných mají se k sobě, jako čtvercové jejich stran (neb příček vůbec) stejnolehlých.*

Důkaz: Buď (obr. 132.) $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$. Mnohoúhelníky podobné dají se stejnolehlými úhlopříčkami rozvrci na trojúhelníky v témž pořádku podobné (LXXXIX. 2. e.), pročež jest pak

obr. 132.



$I : I' = \overline{EA}^2 : \overline{E'A'}^2$ (CXI. 4).

$II : II' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$

$III : III' = \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$

Z podobnosti mnohoúhelníků jde:

$EA : E'A' = AB : A'B' = BC : B'C'$ pročež i

$(EA : E'A')^2 = (AB : A'B')^2 = (BC : B'C')^2$ čili

$\overline{EA}^2 : \overline{E'A'}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$; proto z hořejších tří úměr nabýváme

$(I + II + III) : (I' + II' + III') = \overline{EA}^2 : \overline{E'A'}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$ atd.

t. j. $ABCDE : A'B'C'D'E' = \overline{EA}^2 : \overline{E'A'}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$ atd.

2. *Plochy P a P' n-úhelníků pravidelných mají se k sobě:*

a) jako čtvercové jejich stran **a** *i* **a'**; *aneb*

b) jako čtvercové poloměrů R i R' (průměrů 2R a 2R') kruhů opsaných; aneb

c) jako čtvercové poloměrů **r** *i* **r'** *(průměrů* **2r** *a* **2r'**) *kruhů vepsaných.*

Důkaz. Pravidelné *n*-úhelníky jsou si podobny (LXXXIX. 3.) pročež jest dle 1. odst.

$P : P' = a^2 : a^2$. A jakož z důkazu v §. C. 2. vysvítá, jest

$a : a' = R : R' = r : r'$ pročež i

$P : P' = a^2 : a'^2 = R^2 : R'^2 = r^2 : r'^2$. Podobně jest

$P : P' = (2R)^2 : (2R')^2 = (2r)^2 : (2r')^2$.

§. CXIII.

1. *Ploský obsah lichoběžníka rovná se ploskému obsahu*

a) trojúhelníka o stejné výšce, za jehož podstavu slouží součet stran rovnoběžných;

b) rovnoběžníka o stejné výšce, za jehož podstavu slouží přímka prostředkem různoběžných stran vedená.

obr. 133.

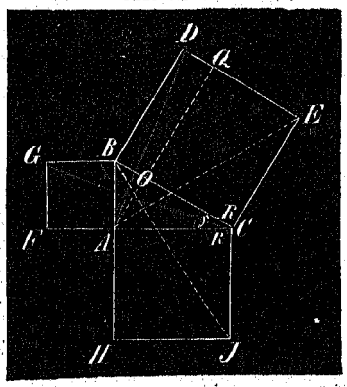
Důkaz: a) Buď (obr. 133.) $ABCD$ lichoběžník $AB \parallel CD$, $BE = DC$, pročež $AE = AB + DC$; z rovnoběžnosti jde $\sphericalangle FBE = \sphericalangle DCF$, $\sphericalangle BEF = \sphericalangle FDC$, pročež $\triangle CDF \cong \triangle BEF$ pročež i $\triangle CDF + DABF = DABF + \triangle BEF$ čili $ABCD = \triangle ADE$.

b) Ze shodnosti $\triangle BEF \cong \triangle CDF$ plyne též $BF = FC$, $FE = DF$; rozpolíme-li DA v G, bude pak $GF \parallel AE$ (LXXXVII. 4. výsl.). Vedeme-li bodem F přímku $HJ \parallel DA$, jest $\triangle FHC \cong \triangle FJB$ (proč?), pročež $CDAJF + FJB = CDAJF + \triangle FHC$, čili $ABCD = AJHD$. Avšak $AJHD$ jest rovnoběžník o stejné výšce, jehož podstava jest $HJ = GF$.

§. CXIV.

1. *V trojúhelníku pravoúhlém jest ploský obsah čtverce na podponě tak veliký, jako součet ploských obsahů čtverců na odvěsnách jeho (Věta Pythagorovská).* (Srovnej XCVIII. 5. a.)

obr. 134.



Důkaz. Buď ACB (obr. 134.) trojúhelník pravoúhelný, $BCED$, $ABGF$, $ACJH$ buďtež čtvercové na podponě a odvěsných jeho. Vedeme-li $AQ \parallel BD$, rozdělí se čtverec $BCED$ na dva pravoúhelníky $BOQD$ i $OCEQ$; i tvrdíme, že jest $BOQD = AFGB = \square AB$, a $OCEQ = AHJC = \square AC$. Veďme přímky AE i BJ; jest pak $\triangle ACE \cong JCB$, poněvadž jest $AC = JC$, $CE = CB$, $\sphericalangle ACE = R + \gamma = JCB$; odtud jde $\triangle ACE \cong \triangle JCB$; avšak $\triangle ACE = \frac{1}{2} OCEQ$ (CXI. 1. b.) a rovněž $\triangle JCB = \frac{1}{2} AHJC$ pročež $OCEQ = AHJC = \square AC$. Týmž spůsobem dokáže se, že jest $BOQD = AFGB = \square AB$. Z těch dvou rovnic sečtením nabudeme:

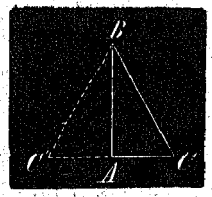
$$OCEQ + BOQD = \square AC + \square AB \text{ čili } \square BC = \square AC + \square AB.$$

2. *Výsledky.* a) Z poslední rovnice jde $\square AC = \square BC - \square AB$; (srovnej XCVIII. 5. b.). Kterak zní tato věta?

b) $BOQD : OCEQ : BCED = BO : OC : BC$ (§. CIX.), anebo $\square AB : \square AC : \square BC = BO : OC : BC$ (srovnej XCVIII. 3. 4.).

3. *Trojúhelník, na jehož jedné straně čtverec rovná se součtu čtverců na dvou stranách druhých, jest pravoúhlý, a v něm jest prvá strana podponou.*

obr. 135.



Důkaz: Buď (obr. 135.) $\square BC = \square AB + \square AC$; učiň $\sphericalangle C'AB = R$, $C'A = AC$, i bude pak $\square BC = \square AB + \square C'A$; poněvadž ale jest $C'A = AC$, jesti $\square C'A = \square AC$, pročež $\square BC = \square BA + \square AC = \square BC$, pročež i $BC' = BC$, z čehož jde $\triangle BC'A \cong BAC$, pročež $\sphericalangle BAC = \sphericalangle C'AB = R$.

§. CXV.

Jsou-li strany trojúhelníka pravoúhlého, stejnolehlými podstavami, na nichž spočívají mnohoúhelníky podobné: rovná se ploský

obsah mnohoúhelníka na podponě součtu ploských obsahů druhých dvou mnohoúhelníků.

Důkaz: Znamenejte p a p' plochy mnohoúhelníků na odvěsných a i a', P plochu na podponě A; i jest pak $P:p:p'=A^2:a^2:a'^2$ (CXII. 1.); avšak $\square BC:\square AB:\square AC=A^2:a^2:a'^2$, (obr. 134.); pročež $P:p:p'=\square BC:\square AB:\square AC$. Z úměry $p:p'=\square AB:\square AC$ nabýváme $(p+p'):p'=(\square AB+\square AC):\square AC=\square BC:\square AC$; jest ale též $P:p'=\square BC:\square AC$, pročež $(p+p'):p'=P:p'$; z čehož jde $P=p+p'$.

§. CXVI.

Věty ku cvičení.

1. a) Rozpolivše dvě strany trojúhelníka a spojivše body rozpolovací, vedeme-li jima ku třetí straně kterým směrem koliv dvé přímek rovnoběžných, vznikne rovnoběžník, jehož ploský obsah rovná se polovičce trojúhelníka.

b) Rozpolivše všecky strany čtyrúhelníka spojíme-li rozpolovací body sousedných stran přímkami, vznikne rovnoběžník, jehož ploský obsah rovná se polovičce čtyrúhelníka daného.

c) Rozpolivše dvé protějších stran čtyrúhelníka vedeme-li od bodů rozpolovacích příčné k vrcholům úhlů protějších, vzniknou dva trojúhelníky omezené těmito přímkami a stranami protějšími, a jejich plochy sečtěné rovnají se ploše čtyrúhelníka daného.

d) Vedeme-li bodem kterým koliv, jenž leží na úhlopříčné v rovnoběžníku, dvé příček se stranama rovnoběžníka rovnoběžných: vzniknou u protějších vrcholů, kudy úhlopříčná neprochází, dva rovnoběžníky, jichž ploské obsahy jsou stejně veliké.

2. a) Rozdíl dvou čtverců rovná se pravoúhelníku, jenž má za podstavu součet, a za výšku rozdíl stran čtverců daných.

b) Čtverec na součtu dvou přímek postavený jest tak veliký, jako součet čtverců na každé přímce zvlášť postavených a dvojnásobného pravoúhelníka z těchto dvou stran sestrojeného.

c) V trojúhelníku jest čtverec strany proti { ostrému / tupému } úhlu položené tak veliký, jako součet čtverců stojících na druhých dvou stranách { zmenšen / zvětšen } jsa o dvojnásobný pravoúhelník, jehož podstavou jest jedna z těchto dvou stran a výškou úsečka této strany, jež sahá od vrcholu ostrého úhlu svrchu zmíněného až ku patě příslušné výšky.

d) V rovnoběžníku rovná se součet čtverců na obou úhlopříčkách součtu čtverců na všech čtyrech stranách.

3. Rovnoběžník rozděluje se úhlopříčkami na čtvero trojúhelníků sobě rovných.

Knihy šesté část druhá.

Vypočítávání ploského obsahu mnohoúhelníků.

§. CXVII.

Za míru ploch zvykli jsme bráti čtverec, jehož strana má známou neb určitou délku. Dle jména této délky dáváme název i čtverci, jejž za míru pojímáme, čtvercového palce, čtvercové stopy atd.

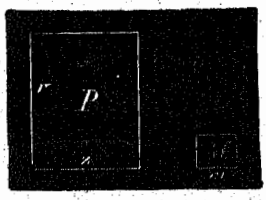
Měříce vyhledáváme, kolikkrát jest míra v ploše obsažena; hledáme tedy poměrné číslo plochy. Pojímajíce pak plochu co do velikosti za číslo pojmenované přikládáme i tomuto číslu poměrnému k vůli krátkosti a pro vyrozumění jeho původu jméno „*plochy*“ aneb „*obsahu ploského.*“

§. CXVIII.

1. Ustanov ploský obsah pravoúhelníka.

Rozřeš. Znamenejte (obr. 136.) Z podstavu, V výšku P plochu pravoúhelníka; M buď čtverec za míru pojatý, m jeho strana, pročež i podstava i výška. Jest pak (dle CIX. 3.) $\frac{P}{M}=\frac{Z}{m}.\frac{V}{m}$ Poměr $\frac{P}{M}=p$ udává, kolikkrát jest čtverec M obsažen v ploše pravoúhelníka P; poměry $\frac{Z}{m}=z$, $\frac{V}{m}=v$ udávají, kolikkrát jest délka m obsažena v podstavě Z a ve výšce V. Chtějíce tedy najíti číslo p, t. j. ploský obsah pravoúhelníka, změřme jeho i podstavu i výšku touž měrou délkovou m, nalezená měřením čísla z a v znásobme, i udává se nám touto násobou ploský obsah hledaný; t. j. $p=z.v$.

obr. 136.



Pročež pravíme: *Ploský obsah pravoúhelníka rovná se součinu z jeho podstavy a výšky.*

2. Je-li $z=v$, jako v každém čtverci bývá, tu jest $p=z^2$. pročež:

a) Ploský obsah čtverce jest roveň druhé mocnosti strany jeho.

Jeli tedy za míru k. p. 1″, bude strana čtvercové stopy = 12″, pročež ploský obsah $1\square' = 12^2\square'' = 144\square''$. Taktéž jest $1\square'' = 6^2\square' = 36\square' = 36\times144\square''$ a t. d.

b) Naopak jest $z=\sqrt{p}$ t. j. *strana čtverce rovná se druhému kořenu z ploského obsahu jeho.*

Připomenutí. Ve skutečnosti sluší míti pozor, aby se míry nemátly; ku př. Podstava pravoúhelníka buď 8′, výška 9″, jak veliký jest ploský obsah? Chyba bylo by říci 8.9□′, nébrž $8.\frac{9}{12}$□′=6□′.

Poznam. Plocha tak veliká, jako čtverec, jehož strana má 40° zdélí, slove *jitro.* Výměr jitra jest tedy 40·40□°=1600□°. Čtverečná míle drží 4000×4000□°=16000000□°=10000 jiter.

3. *Úlohy.* a) Pole pravoúhelné jest 23° 5′ 7″ široké a 487° 4′ dlouhé, jak veliký jest ploský obsah jeho?

b) Jak široké by muselo býti pole pravoúhelné, aby, jsouc 293° 4′ dlouhé, mělo 12 jiter 575□° obsahu ploského?

c) Jak veliká jest strana čtverce, jehož ploský obsah jest 3 *jitra* 250□° 25□′?

§. CXIX.

1. *Ploský obsah rovnoběžníka jest roveň součinu podstavy a výšky jeho:* p=z.v.

Neboť rovnoběžník jest roveň pravoúhelníku p' o stejných výšce i podstavě (§. CX. 2); jest ale $p'=z.v$ (CXVIII.), pročež $p=z.v$.

2. a) *Ploský obsah trojúhelníka jest roveň polovičce součinu podstavy a příslušné výšky.* p=½z.v.

Neboť (dle CXI. 1.) jest trojúhelník roveň polovičce rovnoběžníka p' o stejných výšce a podstavě, jest ale $p'=z.v$ (odst 1.) pročež $p=\frac{1}{2}z.v$.

b) *Ploský obsah trojúhelníka pravoúhlého jest tedy roveň buď polovičnému součinu odvěsných* p=½a.b, *aneb polovičnému součinu podpony* c *a výšky* v *příslušné,* p=½c.v.

Z těchto dvou rovnic jde $a.b=c.v$.

3. *Ploský obsah lichoúhelníka jest roveň:*

a) *součinu z výšky* v *a arithmetického průměru stran rovnoběžných* a, b; *t. j.* $p=\frac{a+b}{2}.v$ (důvod CXIII. a)

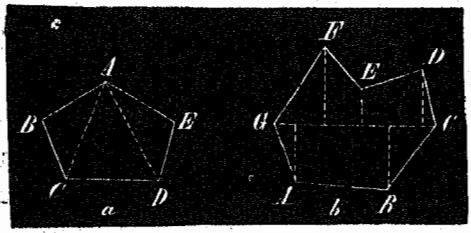
b) *součinu z výšky* v *a prostřední strany rovnoběžné* c, p=c.v (důvod CXIII. b.)

4. *Ustanov ploský obsah mnohoúhelníka.*

Rozřeš. Mnohoúhelník (obr. 137. a) rozděl úhlopříčnými *AC*, *AD* . . . na samé trojúhelníky, jejichž ploské obsahy vypočítej

a sečti. Aneb (obr. 137 b.) veď úhlopříčnou GC; a ze zůstatních vrcholů spusť na ni kolmice, vzniklých trojúhelníků i lichoběžníků plochý obsah vypočítej a sečti.

obr. 137.



5. *Plochý obsah n-úhelníka pravidelného jest roveň součinu z polovičného obvodu svého* **O** *a z poloměru* **r** *kruhu vepsaného.*

Neboť vedenými se středu paprsky rozdělí se n-úhelník P pravidelný (obr. 120.) na n shodných, pročež i sobě rovných trojúhelníků $\triangle$, z nichž každý má za podstavu stranu a n-úhelníka a za příslušnou výšku poloměr r kruhu vepsaného; pročež jest $P = n.\triangle = n.\frac{1}{2}a.r = \frac{1}{2}n.a.r = \frac{1}{2}O.r.$

6. Věty ku cvičení:

a) Čtverec na úhlopříčné daného čtverce jest tomuto zdvojnásobenému roveň

b) Strana čtverce má se k úhlopříčné, jako $1 : \sqrt{2}$.

c) Plochý obsah rovnoběžníka rovnostranného jest roveň polovičnému pravoúhelníku z obou úhlopříčných sestrojenému.

d) Plochý obsah trojúhelníka jest roveň součinu z polovičného obvodu svého a z poloměru kruhu opsaného.

e) Plochý obsah trojúhelníka jest roveň součinu ze tří jeho stran dělenému dvojnásobným průměrem kruhu opsaného.

7. Úlohy ku cvičení:

a) Najdi plochý obsah trojúhelníka rovnostranného, dána-li jest:

α) jeho strana a; (odp. $P = \frac{1}{4}a^2.\sqrt{3}$)

β) jeho výška v; (odp. $P = \frac{1}{3}v^2.\sqrt{3}$)

γ) poloměr R kruhu opsaného; (odp. $P = \frac{3}{4}R^2.\sqrt{3}$)

d) poloměr r kruhu vepsaného; (odp. $P = 3r^2.\sqrt{3}$)

b) Najdi plochý obsah pravidelného 6—, 12—, 24—, 48—, atd. úhelníka, dána-li jest

α) jeho strana, aneb

β) poloměr opsaného, ~~aneb~~ 12cm.

γ) poloměr vepsaného kruhu.

c) Najdi plochý obsah pravidelného 4—, 8—, 16— atd. úhelníka, dána-li jest

α) jeho strana,

β) poloměr opsaného,

γ) poloměr vepsaného kruhu.

d) O těchž výminkách najdi plochý obsah o 5—, 10—, 20— atd. úhelníka pravidelného.

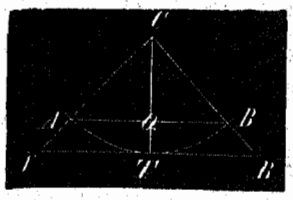
Knihy šesté část třetí.

O ploském obsahu kruhu.

§. CXX.

1. *Ploské obsahy dvou výkrojků ACT a TCB* (obr. 121.) *v témž kruhu nad stejně dlouhými oblouky (AT=TB) jsou si rovny.*

obr. 121.



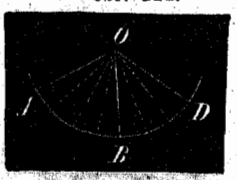
Důkaz. Za příčinou *arc.AT=arc.TB* jest též $\sphericalangle ACT = \sphericalangle TCB$ (LXXIII. 1. c.), a pročež musí plocha *ACT* plochu *TCB* dokonale pokrývati a tudíž jest *plocha ACT=pl.TCB.*

2. *Ze dvou výkrojků v témž kruhu má větší obsah ploský ten, jehož oblouk příslušící jest delší.*

3. *Jsou-li plochy dvou výkrojků v témž kruhu sobě rovny, mají též k nim příslušící oblouky stejnou délku.*

4. *Ploské obsahy dvou výkrojků v témž kruhu mají se k sobě jako příslušné oblouky.*

obr. 124.



Důkaz. Buďtež (obr. 124.) *AOB* a *BOD* výkrojky téhož kruhu *AB* i *BD* příslušné k nim oblouky. Jsou-li předně oblouky *AB* i *BD* souměřitelné, rozdělme je společnou mírou jejich β na samé rovné části, jichž nabudeme ku př. m i n; t. j. $arc.AB = m.\beta$, $arc.BD = n.\beta$; odtud jde $arc.AB : arc.BD = m : n$; potom vedše paprsky k bodům rozdělovacím nabudeme z výkrojků daných tolikéž samých rovných částí p; i bude $AOB = m.p$, $BOD = n.p$; odtud $AOB : BOD = m : n$; z těch dvou úměr plyne
$AOB : BOD = arc.AB : arc.BD$.

Jsou-li oblouky nesouměřitelné, platí táž úměra, což čtenář sám dokáže spůsobem jako v §. LXXXVII. 2. b.

5. Zvětšuje-li se oblouk *BD* (ob. 124.) na celý obměr *O*, vzrůstá výkrojek *BOD* na plochu celého kruhu *K*; odtud věta:

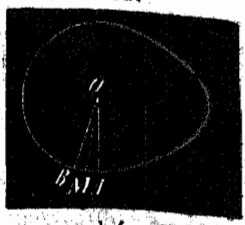
Ploský obsah výkrojku má se k ploskému obsahu celého kruhu, jako příslušný oblouk k celému obvodu.

$AOB : K = arc.\ AB : O$.

6. Je-li oblouk *AB* (obr. 138.) neskončeně malý, může se za

přímku a pročež výkrojek AOB za trojúhelník rovnoramený pokládati, jehož výškou jest $OM=r$ poloměr kruhu.

obr. 138.



I bude pak ploský obsah tohoto výkrojku $AOB=\frac{1}{2}AB.r$.

Tuto hodnotu uvedeme-li do úměry v odst. 5. obdržíme $\frac{1}{2}AB.r : K=AB : O$.

A pokládáme-li jako obyčejně AB, r, K, O za pouhá **čísla** poměrná, plyne z této úměry $K=\frac{1}{2}O.r$ t. j.

a) *Ploský obsah kruhu jest roveň polovici součinu z obměru a poloměru.*

A poněvadž jest $O=2r\pi$ (CVII. 3.) pročež jest $K=\frac{1}{2}O.r=\frac{1}{2}2.r.\pi.r=\pi r^2$; t. j.

b) *Ploský obsah kruhu jest roveň čtverci poloměru Ludolfským číslem znásobenému.*

Poznam. Téhož výsledku dojdeme pokládajíce kruh za mnohoúhelník pravidelný (CV.) dle věty CXIX. 5.

7. Ustanov ploský obsah výkrojku kruhového, BOA (obr. 138.)

Dle věty 5. jest $AOB : K=arc.\ AB : O$, avšak $K=\frac{1}{2}O.r$, pročež $AOB : \frac{1}{2}O.r=arc.\ AB : O$, odkudž $AOB=\frac{1}{2}AB.r$, t. j. *ploský obsah výkrojku rovná se polovici součinu z příslušného oblouku a z poloměru.*

Dodatek. Je-li místo oblouku dán úhel středový $AOB=\omega$, jest $AB=2\pi r\frac{\omega}{4R}$ (CVIII), i bude pak $AOB=\frac{1}{2}2\pi r.\frac{\omega}{4R}r$ čili

$$AOB=\pi r^2\frac{\omega}{4R}.$$

8. Ustanov ploský obsah mezikruží t. j. plochy omezené kruhoma soustřednýma (obr. 125.).

Rozřeš. Jsou-li poloměry R, r kruhů K, k jest dle 6. $K=\pi R^2$, $k=\pi r^2$, mezikruží k' jest rozdíl ploch kruhů těchto, pročež $k'=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)$.

9. Z rovnic $K=\pi R^2$, $k=\pi r^2$ jde $K : k=R^2 : r^2$ t. j. ploské obsahy kruhů jsou ke čtvercům svých poloměrů v poměru přímém. (Srovnej CXII. 2.)

10. Úlohy ku cvičení:

a) Je-li z veličin: poloměr r, obměr O, ploský obsah K kruhu, kterákoliv dána, najdi dvě zůstatní.

b) Najdi ploský obsah skrojku, dán-li jest poloměr a obnáší-li úhel středový $\frac{4R}{6}$ aneb $\frac{4R}{12}$, $\frac{4R}{24}$ atd., aneb R, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{4}$ atd, aneb $\frac{4R}{5}$, $\frac{4R}{10}$, $\frac{4R}{20}$ atd.

Knihy šesté část čtvrtá.

O proměňování a dělení obrazcův.

§. CXXI.

Obrazec za jiný proměniti znamená: sestrojiti obrazec, jenž by s obrazcem daným měl plochu stejně velikou.

1. Proměň trojúhelník za jiný, jenž by:

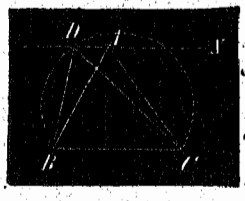
a) s daným měl stejnou výšku i podstavu a mimo to v něm byl úhel daný ω (kosý neb pravý) a sice

α) buď na podstavě, aneb β) na vrcholu;

b) jenž by měl jinou (menší neb větší) buď podstavu, buď výšku;

c) jenž by byl rovnoramený.

obr. 139.

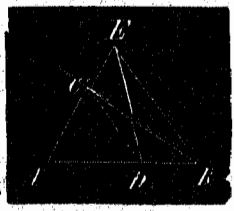


Rozřeš. aα) Buď ABC (obr. 139.) trojúh. daný, veď $AX \parallel BC$, učiň $\sphericalangle CBD = \omega$, a veď DC. Trojúhelník DBC jest žádaný.

aβ) Nad tetivou BC (obr. 139) opiš kruh, jehož na obvodě úhel by se rovnal $= \omega$ (§. LXXVI. 9.); kde kruh přímku $AX \parallel BC$ protíná, tam jest vrchol D hledaného trojúhelníka DBC.

Omezení a důkaz zůstavují se čtenářovi,

obr. 140.



b) Buď ABC (obr. 140.) trojúhelník daný, AD podstava žádaná; veď DC, pak $BE \parallel DC$ i bude $\triangle ADE$ trojúhelník žádaný. — Neboť z $BE \parallel DC$ plyne $\triangle CDE = \triangle CDB$, (CXI. 2. e.) pročež $\triangle ACD + \triangle CDE = \triangle ACD + \triangle CDB$ čili $\triangle ADE = \triangle ABC$.

Trojúhelník sestrojiti ojiné výšce zůstavuje se čtenáři.

obr. 141.

c) Buď ABC (obr. 141). trojúhelník daný. Veď $AE \parallel BC$, rozpol BC v D, postav kolmici DE; trojúh. EBC jest pak žádaný.

2. Trojúhelník rovnoramený proměň se za rovnostraný.

Rozbor. Buď $\triangle ABC$ (obr. 142.) daný, CF jeho výška, $\triangle DOE$ žádaný, a vrchol jeho O na CF. Veďme $AQ \parallel DO$, i bude též $BQ \parallel EO$, a $AB = BQ = QA$ (proč? zodpovídej čtenář). Jest pak

$\triangle AQB : \triangle ACB = FQ : FC$ (CXI. 2. b.); a poněvadž jest $\triangle DOE = \triangle ACB$, pročež jest též $\triangle AQB : \triangle DOE = FQ : FC$; avšak $\triangle AQB \sim \triangle DOE$, pročež

$\triangle AQB : \triangle DOE = \overline{FQ}^2 : \overline{FO}^2$ (CXI. 4.); z těchto dvou úměr jde $FQ : FC = \overline{FQ}^2 : \overline{FO}^2$ pročež $FQ : FO = FO : FC$.

obr. 142.

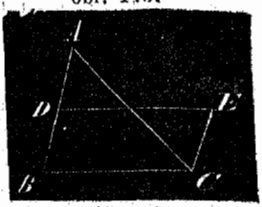
Sestrojení. Na podstavě AB sestroj trojúhelník rovnostraný AQB, veď CQ, prodluž do F, nad průměrem CF opiš polokruh, postav $OG \perp CF$, sřízni $FO = FG$, veď $OD \parallel QA$, $OE \parallel QB$, i jest DOE trojúhelník žádaný.

Důkaz zůstaven čtenářovi.

Trojúhelník proměň za rovnoběžník.

Rozřeš. Buď $\triangle ABC$ daný trojúh. (obr. 143.); rozpol AB v D, veď $DE \parallel BC$, $CE \parallel BD$, i jest $BCED = \triangle ABC$.

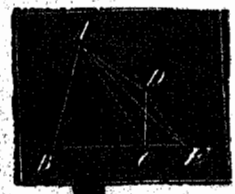
obr. 143.



Důkaz dej čtenář.

4. Čtyrúhelník $ABCD$ (obr. 144.) proměň za trojúhelník tak, aby dva vrcholy A i B a směry dvou stran AB a BC zůstaly neporušeny.

obr. 144.



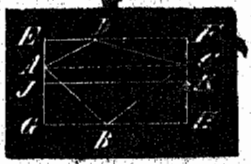
Rozřeš. Veď AC, $DE \parallel AC$; prodluž BC do E a veď AC; jest pak $\triangle ABE$ trojúhelník žádaný.

Důkaz (jako v odst. 1. 2.) jest zůstaven čtenářovi.

5. Čtyrúhelník $ABCD$ (obr. 145.) proměň na pravoúhelník.

Rozřeš. Veď úhlopříčnou AC, bodoma B a D veď $EF \parallel GH \parallel AC$, a bodoma A i C veď $EG \parallel FH \perp AC$; rozpol EG v J a veď $JK \parallel GH$: i bude $JGHK$ pravoúhelník žádaný.

obr. 145.



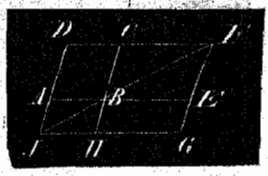
Důkaz dej čtenář.

6. Rovnoběžník proměň v pravoúhelník.

7. Rovnoběžník $ABCD$ (obr. 146.) proměň za jiný o dané podstavě a.

Rozřeš. Prodluž strany daného rovnoběžníka, pak učiň $BE = a$, bodem E veď $GF \parallel AD$, bodoma F i B veď FB a prodluž do J, bodem J veď $JG \parallel DC$, i bude $BEGH$ rovnoběžník žádaný.

Obr. 146.



Důkaz dej čtenář.

8. Pravoúhelník proměň za čtverec. (Srovnej XCIX 3.)

9. Daný n-úhelník proměň za $(n-1)$-úhelník.

Rozřešení jako v odst. 4.

10. Najdi čtverec, jenž by se rovnal a) součtu, b) rozdílu dvou čtverců daných. (Srovnej XCIX. 1. 2.)

11. Každá plocha přímočará dá se proměniti na čtverec. Ku př. majíce 7-úhelník uděláme z něho nejprvé šestiúhelník, z tohoto 5ti-, z toho čtyrúhelník, tento proměníme za pravoúhelník a pravoúhelník za čtverec.

12. Sestroj kruh, jenž by byl roveň a) součtu, b) rozdílu dvou kruhů daných.

Rozbor. Buďtež r a ϱ poloměry kruhů daných, R poloměr neznámý kruhu žádaného, jsou pak ploské obsahy jejich πr^2, $\pi\varrho^2$, πR^2 a dle podmínky má býti $\pi r^2 \pm \pi\varrho^2 = \pi R^2$, pročež také $r^2 \pm \varrho^2 = R^2$.

Tím jest úloha převedena na úl. 10.

Sestrojení a *důkaz* zůstavují se čtenářovi.

13. Ku cvičení stůjte zde ještě úlohy:

a) Trojúhelník daný proměň za jiný, jehož vrchol jest dán, a jehož podstava má týmž směrem běžeti, jako některá strana daného trojúhelníka.

b) Rovnoběžník proměň za kosočtverec.

c) Kosočtverec proměň za jiný, jehož úhel aneb jedna úhlopříčná, neb výška jest dána.

d) Čverec proměň za pravoúhelník, jehož podstava jest dána.

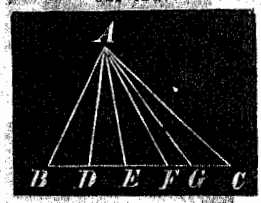
e) Sestroj čtverec, jehož ploský obsah by se měl k obsahu daného čtverce, jako dvě přímky aneb dvě čísla daná. (Srovnej XCIX. 5.)

f) Sestroj mnohoúhelník, jenž by byl podoben dvěma daným, a tak velký jako α) součet β) rozdíl jejich. (CXV.)

g) Sestroj mnohoúhelník, jenž by jinému danému byl podoben, a co do velikosti k němu byl v poměru daném.

§. CXXII.

obr. 147.



1. Rozděl trojúh. ABC (obr. 147.) přímkami téhož vrcholu A vybíhajícími na části v poměru daném $m:n:p:q:r$.

Rozřeš. Podstavu BC rozděl na části v témž poměru daném

$BD:DE:EF:FG:GC = m:n:p:q:r$ (CIV. 2.)

a veď k bodům rozdělovacím příčky AD, AE, AF, AG, jimiž stane se rozdělení, jak žádáno.

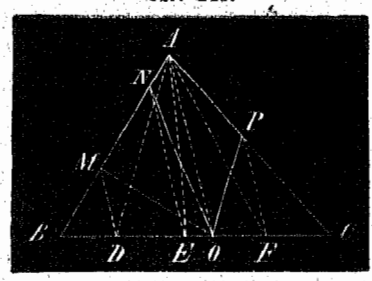
Důkaz veď čtenář sám (opíraje se o CXI. 2. b.)

Poznam. Kdyby všecky díly měly sobě býti rovny, rozdělí se podstava BC na tolikéž částí sobě rovných.

2. Rozděl trojúhelník ABC (obr. 148.) přímkami z téhož bodu O na obvodě vedenými na části v poměru $m:n:p:q:\ldots$ daném.

Rozbor. Rozděl BC v poměru daném $BD:DE:EF:FC=m:n:p:q$, čímž i $\triangle ABC$ rozdělen jest dle 1. Buď pak přímkami z O vybíhajícími OM, ON, OP rovněž týž trojúhelník rozdělen jako jest žádáno; i musí pak býti $\triangle BOM=\triangle ABD$ čili $\triangle BDM+\triangle DMO=\triangle BDM+\triangle DMA$; pročež $\triangle DMO=\triangle DMA$, pročež i nezbytně $DM \parallel OA$ (CXI. 2. f.). Rovněž jest $EN \parallel OA$, $FP \parallel OA$.

obr. 148.



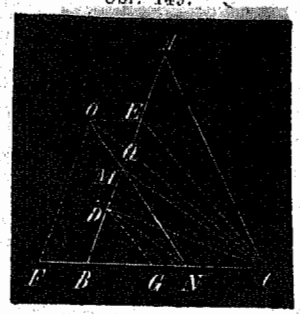
Sestrojení i *důkaz* zůstavon jest čtenářovi.

Poznam. Má-li se trojúhelník daný pod touž výminkou na části sobě rovné rozděliti, třeba toliko stranu BC též na tolikéž částí sobě rovných rozděliti.

3. Rozděl trojúhelník daný v poměru daném $m:n$ na dvé částí přímkou, kteráž vychází z bodu O mimo obvod vně trojúhelníka daného.

Rozbor. Buď (obr. 149.) daný trojúhelník ABC přímkou ON rozdělen tak, že jest $\triangle BMN:\triangle BAC=m:(m+n)$. Rozdělivše BA v bodě D tak, aby bylo $BD:BA=m:(m+n)$, máme též $\triangle BDC:\triangle BAC=m:(m+n)$ (odst. 1.), pročež $\triangle BMN=\triangle BDC$. Tyto dva trojúhelníky mají část společnou $\triangle BDN$, pročež i druhé jejich části jsou si rovny, t. $\triangle DNM=\triangle DNC$; odtud plyne $MC \parallel DN$ (CXI. 2. f.), pročež $BD:BM=BN:BC\ldots\alpha)$

obr. 149.



Poněvadž v této úměře dva členy a tím dva body jsou neznámy, hleďme získati ještě jiných úměr. K tomu konci veďme $OF \parallel AB$, EC $OE \parallel BC$, $DG \parallel EC$; tím vážíme úměry

$$BM:FO=BN:FN\ldots\beta)$$

a $$BE:BD=BC:BG\ldots\gamma).$$

Násobením těchto tří úměr, a pomníce, že v rovnoběžníku

$OEBF$ jest $FO=BE$, obdržíme $1:1=\overline{BN}^2:FN.BG$; odtud jde
$$FN:BN=BN:BG.$$

V této úměře, ač jediný bod N jest neznámý, jsou tři členy neznámé, avšak odnětím sledu od předu vychází
$(FN-BN):BN=(BN-BG):BG$ čili
$FB:BN=(BN-BG):BG$, v kteréžto úměře již toliko jedna délka najíti se má, totiž BN. Místo toho lze též psáti
$FB:BN=GN:BG$ aneb $BN.GN=FB.BG$. Najdeme-li ještě prostřední úměrnou a mezi FB a BG, obdržíme $BN.GN=a^2$, a tím jest úloha převedena na úl. XCIV. 8.

Sestrojení i *důkaz* zůstavují se čtenářovi.

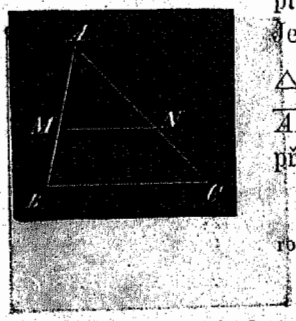
Poznam. a) Kdykoliv bod D (obr. 149.) padne mezi body Q i A, padne bod N na prodlouženou stranu BC za C. Tehdy vyměniv stranu BC za stranu AC pokračuj jako svrchu.

b) Maje pod touže výminkou trojúhelník daný rozděliti na více částí v poměru daném $m:n:p:q$ . . . ., rozděl nejprv na dvé v poměru $m:(n+p+q+ \ldots)$; pak týž trojúhelník pouze na dvé v poměru $(m+n):(p+q+ \ldots)$ a t. p.

c) Maje pod touž výminkou trojúhelník daný rozděliti na několik rovných částí, pokračuj jako v b) učiniv $m=n=p=q= \ldots$

4. Daný trojúhelník ABC (obr. 150.) rozděl na dvé částí v poměru daném $m:n$ přímkou k podstavě rovnoběžnou.

obr. 150.



Rozbor. Buď $\triangle AMN:\triangle ABC=m:(m+n)$, pročež $MN \parallel BC$ žádaná přímka rozdělovací. Jest pak za příčinou podobnosti těchto trojúh. $\triangle AMN:\triangle ABC=\overline{AM}^2:\overline{AB}^2$, pročež $\overline{AM}^2:\overline{AB}^2=m:(m+n)$. Tím ale jest úloha převedena na úl. XCIX. 5.

Sestrojení i *důkaz* dej čtenář.

b) Rozděl trojúhelník přímkami s podstavou rovnoběžnými na několik částí,

α) v poměru $m:n:p:q$ . . . .

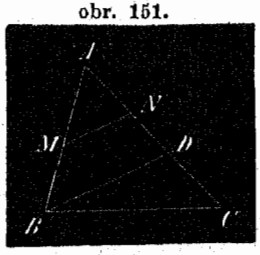
β) sobě rovných.

5. a) Rozděl trojúhelník ABC (obr. 151.) na dvě části v poměru daném $m:n$ přímkou určitého směru.

Rozbor. Buď MN přímkou rozdělovací, pročež
$\triangle AMN:\triangle ABC=m:(m+n)$. Avšak dle CXI. 3. jest též
$\triangle AMN:\triangle ABC=AM.AN:AB.AC$ pročež
$AM.AN:AB.AC=m:(m+n)$. Veď $BD \parallel MN$, i jest bod D znám, poněvadž směr přímky MN, tudíž i přímky BD dán jest; mimo

to jest $AM : AB = AN : AD$; z této a z předposlední úměry vymýtivše AM, obdržíme $\overline{AN}^2 = \frac{m}{m+n} . AC.AD$, a najdeme-li prvé prostřední úměrnou g mezi AC a AD, bude $\overline{AN}^2 = \frac{m}{m+n} . g^2$, čímž opět úloha převedena jest na úl. XCIX. 5.

obr. 151.



Sestrojení a *důkaz* dej čtenář.

b) Rozděl trojúh. daný pod touž výmínkou na více částí.

α) v poměru daném,

β) sobě rovných.

c) Rozděl trojúhelník daný na několik částí

α) v poměru daném,

β) sobě rovných,

přímkami na některé jeho straně kolmými.

6) Rozděl trojúhelník daný na několik částí

α) v poměru daném,

β) sobě rovných,

přímkami z daného uvnitř trojúhelníka bodu vycházejícími.

7. Rozděl trojúhelník daný na tré částí

α) v poměru daném,

β) sobě rovných,

přímkami z vrcholů vybíhajícími a v jedném bodě uvnitř trojúhelníka se protínajícími a končícími.

8. Rozděl rovnoběžník na několik částí v poměru daném.

9. Rozděl lichoběžník na několik částí v poměru daném.

Nicolai Samuelis Stainerus