GEOMETRIA

pro vyšší gymnasia

od

Václava Jandečky,
učitele matematiky a fysiky na c. k. gymnasiu v Hradci Králové.

Díl druhý.

STEREOMETRIA.

(Do textu vloženo 98 obrazců.)

Krámská cena: 64 nkr.

V PRAZE, 1865.
Nákladem spisovatelovým.
(V komisí kněhkupectví I. L. Kober.)

Národní kněhtiskárna: I. L. Kober v Praze.

Obsah.

Opravy:

Na str.	3.	řád.	17.	zdola	čti:	*vedená* místo: *vedené.*
„ „	5.	„	10.	„		slovo: *kolmo* vynechej.
„ „	16.	„	16.	„	čti:	*faisceau* místo: *faisseau.*
„ „	24.	„	19.	„	„	*tři kouty* „ *třikouty.*
„ „	32.	„	11.	„	„	$AF:AF' = AE$ místo: $AF:AF':AE$
„ „	45.	„	1.	shora	„	*střídavě* místo *stří davě.*
„ „	47.	„	6.	„	„	*z n-násobné hrany* místo: *hrany.*
„ „	63.	„	19.	„	„	*součtů* místo: *součtu.*

Stereometria.

Kniha první.

O přímkách a rovinách v prostoře.

Část prvá.

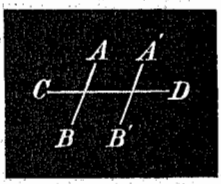
I. O vzájemné poloze přímek a rovin v prostoře.

§. I.

1. *Rovina* jest plocha, na kteréž kterýmakoliv dvěma body dá se položiti přímka.

2. Rovina vznikne rovnoběžným pohybováním přímky AB po přímce jiné CD (obr. 1.).

obr. 1.



Rovnoběžné slove pohybování, když přímka AB na všech místech jednostejný směr zachovává, tak že kterékoliv dvě polohy její spolu jsou rovnoběžné ($AB \parallel A'B'$).

3. Jednou přímkou CD (obr. 1.) dá se položiti rovin neskonale mnoho. — Neboť majíce přímku AB pevně spojenou s přímkou CD můžeme jí pootáčením kol CD přivesti do neskonale mnoha poloh jiných, a vedouce ji v každé té poloze po přímce CD během rovnoběžným nabudeme roviny nové.

4. *Poloha roviny* jest dokonale určena (i nelze než jedinou rovinu položiti):

a) úhlem č. dvěma přímkama rozbíhavýma;

b) třemi body, které neleží v jediné přímce;

c) přímkou a bodem mimo tu přímku ležícím;

d) dvěma přímkama rovnoběžnýma.

5. Leží-li v rovině dva body přímky, leží v ní přímka celá; pročež

6. Přímka, která mimo rovinu leží, nemůže se s ní protínati leč v bodě jediném.

7. Průsečnice dvou rovin jest čára přímá; neboť kdyby aspoň tři body té průsečnice neležely v přímce jediné, splynuly by obě roviny v jedinou, (odst. 4. b.).

8. Rovinou dělí se celý prostor na dvě polovice neskončeně veliké.

§. II.

1. Přímky co *do polohy* v prostoru jsou: a) *rovnoběžné* (parallel); b) *rozbíhavé* n. *sbíhavé* (divergent, convergent), ležíce v obou případech v jedné rovině; c) *mimoběžné*, neležíce obě v rovině jediné.

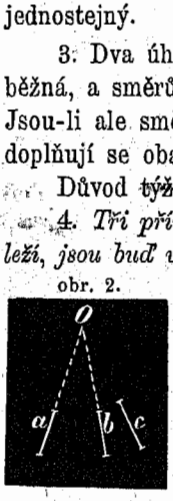
2. Dvě přímky s třetí rovnoběžné jsou i spolu rovnoběžné. — Neboť majíce s třetí přímkou směr společný, mají též spolu směr jednostejný.

3. Dva úhly v prostoře, jejichž ramena střídavě jsou rovnoběžná, a směrů buď souhlasných buď protivných, jsou si rovny. — Jsou-li ale směry jedněch ramenou souhlasné, a druhých protivné: doplňují se oba na úhel přímý.

Důvod ~~týž~~ jako v *Pl. §. XIX. odst. 1.**)

4. *Tři přímky, které nejsou mimoběžné a v jediné rovině neleží, jsou buď všechny rovnoběžné, aneb se protínají v bodě jediném.*

obr. 2.



Důkaz. Přímka c (obr. 2.) nemůže přímky a i b ve dvou *rozličných* bodech protínati, poněvadž by pak s nima v jediné rovině ležela. Je-li tedy $a \parallel b$, nemůže c protíti ani jednu, ani druhou, i jest pak též $c \parallel a \parallel b$. — Jsou-li ale a i b sbíhavé v bod O, nemůže ani $c \parallel a$, ani $c \parallel b$ býti, poněvadž by tehdy také $a \parallel c \parallel b$ bylo: pročež musí c protnouti přímky obě, a sice v bodě oběma společném O.

5. *Přímky, z nichž aspoň tři v jedné rovině neleží a žádné dvě mimoběžné nejsou, protínají se v bodě jediném aneb jsou všechny spolu rovnoběžné.*

Důkaz zůstaven čtenářovi.

---

*) Odvolávání se na *Pl.* znamená na: Planimetrii od Václava Jandečky v Praze 1864.

§. III.

1. *Poloha přímky k rovině* jest čtvera:

a) buď leží celá přímka v rovině, aneb

b) celá mimo rovinu, jsouc s ní rovnoběžná; aneb

c) protíná se s rovinou v jediném bodě, jenž *stopou* čili *patou* (Fusspunkt) její slove; a tehdy jest přímka:

α) buď na rovině *kolmo*, když se všemi přímkami od její paty po rovině vedenými činí úhly pravé;

β) aneb jest na rovině *šikmo*, když řečené úhly nejsou veskrz pravé.

2. Stopa kolmice s některého bodu A na rovinu spuštěné slove *pravoúhlým průmětem* (orthogonale nebo Normal-Projection) bodu A na tuto rovinu, kteráž se pak nazývá *rovinou průmětnou* (Projectionsebene). Pásmo průmětů veškerých bodů nějaké čáry neb nějakého obrazce vůbec na plochu průmětnou slove průmětem čáry neb obrazce.

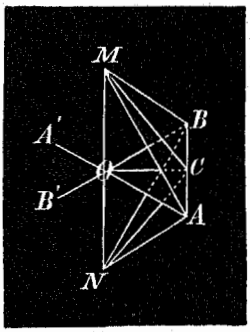
Kromě pravoúhlého zasluhuje zvláštního povšimnutí *průmět středový* čili *polární* (Central- nebo Polarprojection), t. stopa, kterou na ploše ostaví přímka z jediného bodu, jejž pak pólem nebo středem nazýváme, vybíhající, a veškerými body nějaké čáry neb obrazce nějakého, jehož průmět zjednati se má, vedené.

§. IV.

1. *Přímka, která stojí kolmo na obou ramenou úhlu dutého, stojí též kolmo na rovině tímto úhlem položené.*

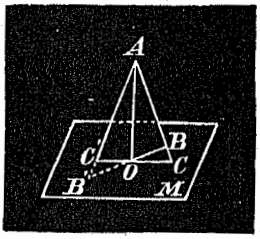
Důkaz. Buď na rovině AOB (obr. 3.) $MO \perp OA$, $MO \perp OB$; prodluž přímku MO, sřízni $ON = MO$; i bude pak $\triangle MOA \cong \triangle NOA$, poněvadž mají po dvou odvěsných střídavě si rovných; odtud jde $MA = NA$. Podobně dokáže se $MB = NB$. Nyní již soudíme: $\triangle MAB \cong \triangle NAB$, ješto všechny tři strany střídavě si rovny jsou; z čehož plyne $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NAB$. Vedeme-li již z kteréhokoliv bodu C na přímce AB přímku CO, bude $\triangle MAC \cong \triangle NAC$, ježto dvě strany a sevřené jima úhly střídavě si rovny jsou; z čehož vysvítá $MC = NC$. Konečně z rovnosti všech tří stran uzavíráme $\triangle MOC \cong \triangle NOC$,

obr. 3.



a proto $\sphericalangle MOC = \sphericalangle NOC = R$; t. j. přímka MO jest kolmo na každé přímce OC v rovině úhlu AOB od paty O vedené. A podobné platí o částech roviny $A'OB, AOB', A'OB'$, z příčin týchž: pročež stojí přímka MO kolmo na celé rovině.

obr. 4.

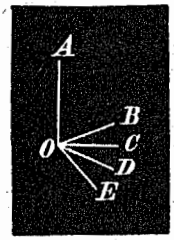


2. *Kolmice* **OA** *strmící na rovině* **M** *stojí šikmo na každé přímce, která vycházejíc od paty kolmice nad rovinu* **M** *vyniká* (**OB**), *aneb pod rovinu* **M** *se sklání* (**OB'**). (Obr. 4.)

Důkaz. Položená úhlem AOB (AOB') rovina protne rovinu M přímkou OC (OC'); i jest pak dle podmínky $\sphericalangle AOC = R = \sphericalangle AOC'$; spolu jest ale $\sphericalangle AOB < \sphericalangle AOC$, $\sphericalangle AOB' > \sphericalangle AOC'$, pročež $\sphericalangle AOB < R$, $\sphericalangle AOB' > R$.

3. *Tré neb více přímek rozbíhavých* (OB, OC, OD, OE, (obr. 5.), *na nichž stojí společná kolmice* (OA), *leží v jedné rovině.*

obr. 5.



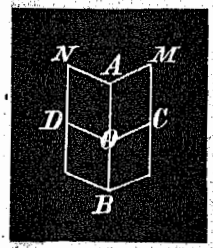
Důkaz. Neboť řečená kolmice OA strmí dle odst. 1. kolmo na rovině úhlu BOC dvou těchto přímek, z kteréžto roviny nemůže dle odst. 2. žádná ze zůstatních přímek BD, BE atd. vynikati, leč by šikmá byla.

4. Rovina tedy vznikne také otočením jednoho ramene úhlu pravého okolo ramene druhého.

5. *Úloha.* Daným bodem polož rovinu kolmo na přímku danou.

Rozřešení. a) Daný bod O lež na přímce dané AB (obr. 6.). Tehdy polož touto přímkou dvě roviny M i N kterýmikoliv směry, a v nich postav na přímku danou v bodě daném kolmice $OC \perp AB$, $OD \perp AB$, rovina DOC úhlem jejich položená jest žádaná. (Důkaz: odst. 1.)

obr. 6.



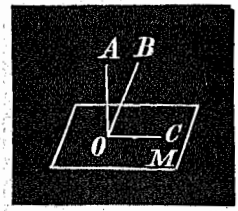
b) Daný bod D lež mimo přímku danou AB (obr. 6.). Tehdy polož přímkou danou opět dvě roviny, z nichž ale jedna (N) procházej bodem D: s bodu D spusť po rovině N na přímku AB kolmici $DO \perp AB$, a v patě její O vztyč po rovině druhé na touž přímku AB kolmou OC; rovina úhlem DOC položená jest žádaná. (Důkaz: z odst. 1.)

§. V.

1. V jednom bodě může na rovině jen jedna kolmice strměti.

Důkaz. Buď (obr. 7.) OA kolmice na rovině M, a OB jiná přímka na rovinu v témž bodě postavená. Položená úhlem AOB rovina protne rovinu M přímkou OC; jest pak $\sphericalangle AOC = R$, ale $\sphericalangle BOC < \sphericalangle AOC$, pročež $\sphericalangle BOC < R$, t. j. mimo OA stojí každá jiná přímka OB v témž bodě šikmo: tedy jest OA kolmice v bodě O jediná.

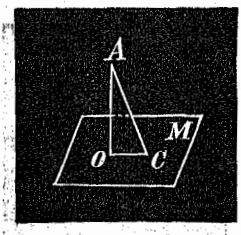
obr. 7.



2. S jednoho bodu lze na rovinu jen jednu kolmici spustiti.

Důkaz. Buď (obr. 8.) AO kolmice s bodu A na rovinu M spuštěná; AC buď jiná přímka z bodu A k některému na rovině bodu C vedená. Rovina úhlem OAC položená protne rovinu M přímkou OC, čímž vznikne trojúhelník v bodě O pravoúhlý, a proto jest $\sphericalangle ACO < R$, tedy přímka AC šikmá a tím AO kolmice jediná.

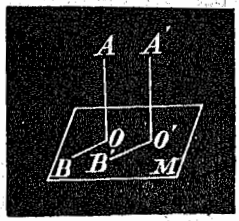
obr. 8.



3. Stojí-li jedna ze dvou (neb i z více) *rovnoběžek na rovině kolmo, strmí též druhá* (neb všechny zůstatní) *na též rovině kolmo.*

Důkaz. Buď (obr. 9.) $AO \parallel A'O'$, $AO \perp M$. Veďme po rovině M od pat O i O' směrem kterýmkoliv rovnoběžky $OB \parallel O'B'$, i bude $\sphericalangle A'O'B' = \sphericalangle AOB$, (§. II. 3.); a dle podmínky jest $\sphericalangle AOB = R$, tedy také $\sphericalangle A'O'B' = R$, t. j. přímka $A'O'$ stojí kolmo na kterékoliv, tedy na každé přímce z bodu O' po rovině M vedené kolmo, čili $A'O' \perp M$.

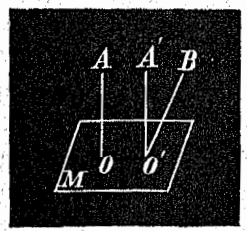
obr. 9.



4. Přímky, které na jedné rovině kolmo strmí, jsou spolu rovnoběžné.

Důkaz. Buď (obr. 10.) $OA \perp M$, $O'A' \perp M$; tvrdíme, že jest $OA \parallel O'A'$. Kdyby tomu jinak bylo, musela by přímka bodem O' s přímkou OA rovnoběžně vedená jiný míti směr než $O'A'$, ku př. $O'B \parallel OA$; pak by ale dle odst. 3. bylo $O'B \perp M$, což se příčí

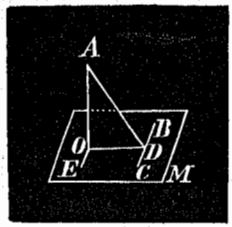
obr. 10.



odst. 1. lečby $O'B$ s přímkou $O'A'$ splývala v jedinou: jest tedy $O'A' \parallel OA$.

5. *Úloha. S daného bodu* **A** *spusť kolmici na rovinu danou* **M** (obr. 11.).

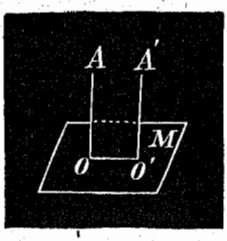
obr. 11.



Rozř. Po rovině M veď kteroukoliv přímku BC; bodem A polož rovinu ADO na přímku BC kolmo (§. IV. 5. b.), na průsečnici DO té roviny s rovinou M spusť s bodu A kolmici $AO \perp DO$, kterážto jest kolmicí žádanou.

Důkaz. Po rovině M veď $OE \parallel BC$, i jest $EO \perp rov.\ AOD$ (odst. 3.), pročež $\sphericalangle AOE = R$, $\sphericalangle AOD = R$, tedy $AO \perp M$ (§. IV. 1.).

obr. 12.

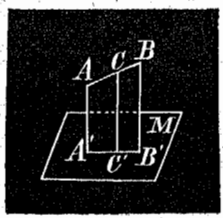


6. *Úloha.* V daném bodě **O** vztyč kolmici na rovinu danou **M** (obr. 12.).

Rozř. S kteréhokoliv v prostoře bodu A' spusť na rovinu M kolmici $A'O'$, úhlem $A'O'O$ polož rovinu, a po ní veď $OA \parallel O'A'$, i jest $OA \perp M$. — Důkaz z odst. 3.

§. VI.

obr. 13.



1. *Průmět* (pravoúhlý) *přímky na rovinu jest čára přímá.*

Důkaz. Buď AB (obr. 13) přímka mimo rovinu M. S některého bodu A přímky té spusť $AA' \perp M$, a polož rovinu BAA', jejíž s rovinou M průsečnice buď $A'B'$. V rovině $BAA'B'$ veď z kteréhokoliv bodu přímky AB rovnoběžku $CC' \parallel AA'$, $(BB' \parallel AA')$: i jest $CC' \perp M$, $(BB' \perp M)$ (§. V. 3.), a bod C', (B') na průsečnici $A'B'$ jest (pravoúhlým) průmětem bodu C, (B). Odtud jde, že průměty veškerých bodů přímky AB leží na průsečnici $A'B'$, kterážto přímka jest tedy průmětem přímky AB na rovinu M.

2. Průmět čáry pravoúhlý na rovinu zřídíme rovnoběžným kolmice po čáře pohybováním. Kolmice ta opíše plochu, již zoveme plochou *promítající.* — Průmět čáry polárný č. středový zřídíme, přímku kolem pevného bodu (pólu, středu) otáčejíce a po čáře, již promítáme, vedouce.

3. Úhel, jejž svírají přímka a pravoúhlý na rovině průmět její, slove *odchylkou* (Declination, Abweichung) přímky od roviny; úhel, jejž přímka s kolmicí svírá, nazývá se *sklon* (Inclination, Neigung) přímky k rovině.

Odchylka a sklon doplňují se na úhel pravý.

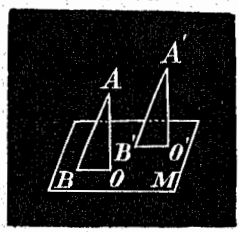
Pozn. Jinde ač nesprávně nazývají sklonem, co my zde odchylkou.

§. VII.

1. *Přímky rovnoběžné mají k jedné rovině rovné sklony, jakož i rovné od ní odchylky.*

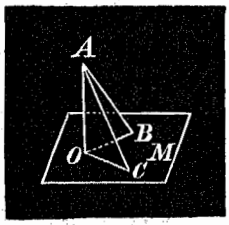
Důkaz. Buď (obr. 14.) $AB \parallel A'B'$; s bodů A i A' spusť na rovinu M kolmice AO i $A'O'$: jest pak (§. V. 4.) $AO \parallel A'O'$, pročež (§. II. 3.) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$; a proto též $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$.

obr. 14.



2. *Je-li při veškerých šikmých přímkách z jednoho bodu* **A** (obr. 15.) *v prostoře k rovině* **M** *vedených buď délka jejich pravoúhlých průmětů, aneb jejich vlastní délka, aneb jejich od roviny* **M** *odchylka, aneb k rovině této sklon veličinou stálou: jest i každá jiná z těchto čtverých veličin stálou.*

obr. 15.



Důkaz. Jsou-li AB i AC dvě přímky z bodu A k rovině M vedené, a $AO \perp M$: jest ve všech těch čtyrech případech $\triangle AOB \cong \triangle AOC$; a proto jest soudobně $OB = OC$, $AB = AC$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OAC$.

Přídavek. Věty o prvých dvou případech pronášívají se též těmito slovy:

a) Všechny přímky vedené z některého bodu v ose kruhu (t. j. v kolmici na kruhu uprostřed strmící) ležícího k obvodu jeho jsou si rovny.

b) Je-li z jednoho bodu několik sobě rovných přímek vedeno k jedné rovině: musí paty všechněch vězeti na obvodě kruhu, a kolmice se společného jejich bodu průsečného na kruh spuštěná jest osou jeho, t. j. padne do středu jeho.

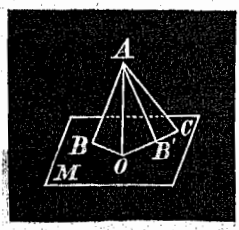
3. O přímkách šikmých z jednoho bodu prostorem k rovině vedených platí též:

a) čím delší pravoúhlý průmět, tím delší přímka sama, a tím větší její k rovině sklon, ale tím menší od roviny odchylka;

b) čím delší přímka, tím větší její pravoúhlý průmět i sklon, a tím menší odchylka;

c) čím { větší sklon / menší odchylka } *přímky, tím* { menší odchylka / větší sklon }, *a tím delší přímka i pravoúhlý průmět její.*

obr. 16.



Důkaz. a) Buď (obr. 16.) $AO \perp M$, $OC > OB$; učiň $OB' = OB$; jest pak (odst. 2.) $AB' = AB$, a $AC > AB'$, pročež $AC > AB$; mimo to jest $\sphericalangle OAC > \sphericalangle OAB' = \sphericalangle OAB$, konečně $\sphericalangle ACO < \sphericalangle AB'O = \sphericalangle ABO$.

b) Buď $AO \perp M$, $AC > AB$; tehdy nemůže býti $OC \overset{=}{<} OB$, sice by bylo $AC \overset{=}{<} AB$, pročež jest $OC > OB$, a proto dle a) též $\sphericalangle OAC > \sphericalangle OAB$, $\sphericalangle ACO < \sphericalangle ABO$.

c) Buď $AO \perp M$, $\sphericalangle OAC > \sphericalangle OAB$: tehdy učiň $\sphericalangle OAB' = \sphericalangle OAB$, i jest pak $AC > AB' = AB$, $CO > B'O = BO$, konečně $\sphericalangle ACO < \sphericalangle AB'O = ABO$. — Je-li ale $AO \perp M$, a $\sphericalangle ABO > \sphericalangle ACO$, tedy musí býti $\sphericalangle OAC > \sphericalangle OAB$, a proto též $OC > OB$, $AC > AB$.

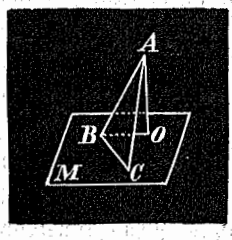
4. *Kolmice* **AO** *s bodu* **A** *v prostoře na rovinu* **M** *spuštěná jest nejkratší ze všech přímek z téhož bodu* **A** *k rovině* **M** *vedených*, (obr. 16.).

Důkaz. Neboť každá jiná přímka AB činí se svým průmětem a řečenou kolmicí trojúhelník pravoúhlý AOB, v němž jest podponou, tedy nejdelší stranou, pročež $AO < AB$.

Přídavek. Kolmicí **AO** měříme *vzdálenost* bodu **A** od roviny **M**.

5. *Odchylka šikmé přímky od pravoúhlého průmětu jejího jest menší, než odchylka její od kterékoliv jiné přímky, která patou její po rovině běží* (obr. 17.).

obr. 17.



Důkaz. Buď $AO \perp M$, AB přímka šikmá: veď BC směrem kterýmkoliv, sřízni $BC = BO$ a veď AC; jest pak dle 4. odst. $AC > AO$, pročež v $\triangle ABO$ a $\triangle ABC$ (dle Pl. XLIX. 2.) $\sphericalangle ABO < \sphericalangle ABC$.

6. *Věta ku cvičení.* Odchylka šikmé přímky z prostoru k rovině vedené od jiné přímky na rovině, jest tím větší, čím více tato v rovině přímka odchýlena jest od pravoúhlého průmětu přímky šikmé. Stojí-li přímka po rovině bě-

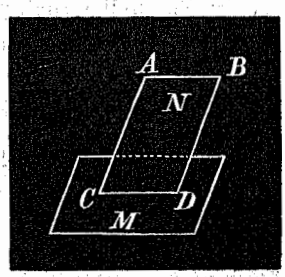
žící na řečeném průmětu kolmo, jest i na přímce šikmé kolmo; má-li od průmětu aneb větší aneb menší odchylku, jest i odchylka její od šikmé přímky aneb úhel tupý aneb ostrý. Největší odchylku má šikmá od té přímky, která má s průmětem směr protivný; s těma ale po dvou přímkama, které mají rovné od průmětu po obou jeho stranách odchylky, činí šikmá úhly rovné.

§. VIII.

1. *Přímka AB v prostoře, je-li rovnoběžná s přímkou CD ležící v rovině M, jest i s touto rovinou rovnoběžná.* (Obr. 18.)

Důkaz. Rovina položená rovnoběžkama *AB* i *CD* nemá s rovinou *M* společného bodu mimo průsečnici *CD;* kdyby tedy přímka *AB* protnouti měla rovinu *M*, muselo by se to státi v některém bodě přímky *CD*, což se příčí podmínce $AB \parallel CD$. Pročež nesetká se *AB* nikde s *M*, t. j. $AB \parallel M$.

obr. 18.



2. *Přímka* **AB** *v rovině* **N** *ležící a s rovinou* **M** *rovnoběžná jest též rovnoběžná s průsečnicí* **CD** *obou rovin.* (Obr. 18.)

Důkaz. Přímky *AB* a *CD* ležíce obě v rovině *N* nejsou mimoběžné; nejsou ale ani sbíhavé, neboť tehdy by se protnouti musely a společný bod jejich ležel by i v rovině *M*, v které jest přímka *CD;* tedy by přímka *AB* rovinu *M* v témž bodě proťala, což se příčí výmínce $AB \parallel M$: pročež jest nezbytně $AB \parallel CD$.

3. *Veškeří bodové přímky* **AB** *rovnoběžné s rovinou* **M** *mají od roviny* **M** *stejně veliké vzdálenosti.* (Obr. 18.)

Důkaz. Spusť s kterýchkoliv dvou bodů *A* i *B* v přímce *AB* ležících na rovinu kolmice *AC* i *BD;* i bude (§. V. 4.) $AC \parallel BD$; rovina kolmicema *AC* i *BD* položená protne rovinu *M* přímkou *CD*, i jest $CD \parallel AB$ (odst. 2.); tedy jest *ABCD* pravoúhelník, a v něm $AC = BD$.

4. *Věty ku cvičení.*

a) Je-li jedna ze dvou (neb i více) rovnoběžek s rovinou rovnoběžná, jest i druhá (i zůstatní) s rovinou rovnoběžná.

b) Průsečnice dvou rovin, z nichž každá jednou ze dvou rovnoběžek položena jest, jest s těmito rovnoběžkami též rovnoběžná.

c) Průsečnice dvou rovin, s nimiž přímka nějaká jest rovnoběžná, jest s touž přímkou rovnoběžná.

5. *Úloha.* Danou přímkou polož rovinu rovnoběžnou s jinou přímkou danou.

II. O poloze rovin a přímek k rovinám.

§. IX.

1. Poloha dvou rovin v prostoře jest dvojí:

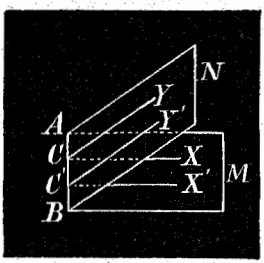
a) roviny byť i do nekonečna rozestřené jsou úplně jedna *mimo* druhou: a nazývají se tehdy *rovnoběžnými;*

b) aneb dostatečně rozprostřeny byvše protínají se, a slovou pak od sebe *odchýlenými.*

2. Odchylka roviny jedné ode druhé měří se úhlem, jejž svírají dvě přímky na průsečnici rovin v kterémkoliv jejím bodě kolmo postavené a v řečených rovinách položené. Úhlu tomuto díme *kout* (Flächenwinkel), jiní nazývají jej *úhlem plošným.*

Chtějíce jasného o něm nabyti ponětí položme (obr. 19.) přímkou AB dvě roviny spolu splývající, a postavme v nich na přímku AB v kterémkoliv bodě C neb C' kolmici $CX \perp AB$ neb $C'X' \perp AB$; potom otáčejme o přímku AB rovinu N odchylujíce ji od roviny M; i bude spolu kolmice CX neb $C'X'$ otáčeti se opisujíc rovinu na přímce AB kolmou (§. IV. 4.), a úhel $\sphericalangle XCY$ neb $X'C'Y'$. Tehdy patrno jest: a) že tento úhel tím větší jest, čím více roviny jednu ode druhé jsme odchýlili, a b) že úhel ten má jednostejnou velikost, ať si v kterémkoliv bodě C kolmice CX postavena jest; neboť $CX \parallel C'X'$ $CY \parallel C'Y'$, pročež $XCY = X'C'Y'$, (§. II. 3.). A z těchto příčin přijat jest úhel XCY za míru odchylky rovin se protínajících.

obr. 19.



3. Je-li odchylka dvou rovin úhel pravý, díme, že roviny na sobě *kolmo* stojí č. strmí; pakli jest úhel kosý, pravíme, že roviny na sobě *šikmo* stojí, neb že k sobě *skloněny* jsou.

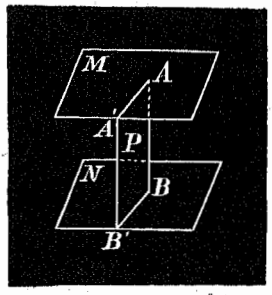
Doplněk odchylky na úhel pravý udává *sklon* rovin.

§. X.

1. *Dvě přímky, které leží ve dvou rovinách rovnoběžných, nemohou býti sbíhavé.* Neboť nemohouce ze svých rovin, které nikde se nesetkají, vyniknouti, nemohou se ani samy spolu setkati.

2. *Průsečnice* **AA'** *i* **BB'** *roviny* **P** *se dvěma rovinama rovnoběžnýma* **M** *i* **N** *jsou spolu rovnoběžné.* (Obr. 20.)

obr. 20.



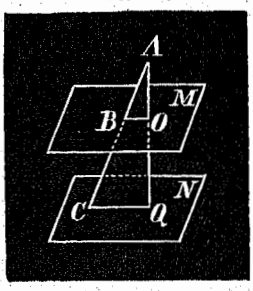
Důkaz. Že přímky AA' i BB' obě v jedné rovině P leží, nejsou mimoběžné; a že leží v rovinách rovnoběžných M i N, nejsou sbíhavé (odst. 1.): pročež jsou nezbytně rovnoběžné.

3. *Přímka, která kolmo strmí na jedné ze dvou rovin rovnoběžných, stojí též na druhé rovině kolmo.*

Důkaz. Buď (obr. 20.) $M \parallel N$, $AB \perp N$. Přímkou AB polož rovinu P směrem kterýmkoliv, i vzniknou rovnoběžné na rovinách daných průsečnice $AA' \parallel BB'$ (odst. 2.), a že $\sphericalangle ABB' = R$, jest také $\sphericalangle BAA' = R$: t. j. přímka BA stojí též kolmo na kterékoliv, tedy na každé přímce, která se vede od paty její po rovině M, pročež $BA \perp M$.

4. *Šikmá přímka má od rovin rovnoběžných na souhlasných stranách jejich rovné odchylky, a k nim rovné sklony.*

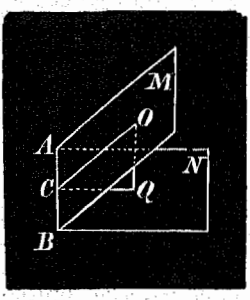
obr. 21.



Důkaz. Buď (obr. 21.) $M \parallel N$, ABC buď přímka šikmá. S bodu A spusť na rov. N kolmici AQ, kterážto v bodě průsečném O též na rovině M kolmo strmí (odst. 3.). Rovina úhlem CAQ položená protne roviny M i N rovnoběžkami $BO \parallel CQ$ (odst. 2.): pročež jest $\sphericalangle ABO = \sphericalangle ACQ$, tedy i $R - ABO = R - ACQ$, jakož tvrzeno.

5. *Roviny, které se protínají, nemají společné kolmice.*

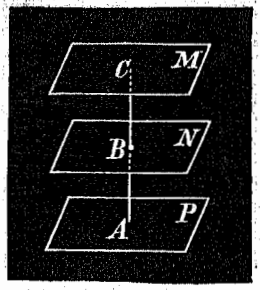
obr. 22.



Důkaz. Buď AB (obr. 22.) průsečnice rovin M i N. S kteréhokoliv bodu O v rovině M spusť kolmici OQ na rovinu druhou N; od bodů O i Q veď přímky OC, QC ku kterémukoliv na průsečnici bodu C, i leží OC v rovině M, QC v rovině N; tím vznikl trojúh. pravoúhlý OQC, a že jest $\sphericalangle CQO = R$, musí býti $\sphericalangle COQ < R$; přímka QO, která kolmo strmí na rovině N, stojí šikmo na rovině M: i nemají ty roviny kolmice společné.

6. *Roviny, které mají společnou kolmici, jsou rovnoběžné.*

obr. 23.



Neboť kdyby se protínaly, neměly by kolmice společné. (Odst. 5.).

7. *Roviny, z nichž každá o sobě jest rovnoběžná s rovinou třetí, jsou též spolu rovnoběžné* (obr. 23.).

Důkaz. Buď $M \parallel P$; $N \parallel P$; z některého bodu A jedné vnější roviny spusť kolmici na druhou rovinu vnější: její na rovinách paty buďte B i C. Že jest $AC \perp M$, a $M \parallel P$, jest také $AC \perp P$ (odst. 3.); a že jest $P \parallel N$, jest i $AC \perp N$ (odst. 3.); a proto $M \parallel N$ (odst. 6.).

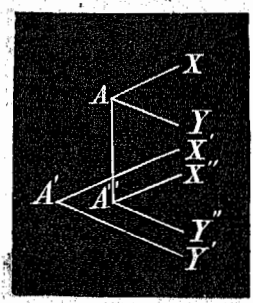
8. *Rovina, která protíná jednu ze dvou rovin rovnoběžných, protne dostatečně prodloužená i druhou.* Neboť jinak by s ní byla rovnoběžná, a proto dle odst. 7. musila by býti rovnoběžná i s rovinou první.

9. *Přímka, která jest rovnoběžná s jednou ze dvou rovin rovnoběžných, jest i s druhou rovnoběžná; a protíná-li jednu rovinu, protne dostatečně prodloužená i druhou.*

Důkaz dej čtenář (položiv přímkou a některým v dané rovině bodem rovinu třetí).

10. *Roviny dvou úhlů, jichž ramena v prostoře střídavě jsou rovnoběžná, jsou spolu též rovnoběžné.*

obr. 24.



Důkaz. Buď (obr. 24.) $AX \parallel A'X'$, $AY \parallel A'Y'$. Na rovinu $X'A'Y'$ spusť s bodu A kolmou AA'', a v též rovině $X'A'Y'$ veď $A''X'' \parallel A'X'$, $A''Y'' \parallel A'Y'$: i bude (§. II. 2.) též $AX \parallel A''X''$, $AY \parallel A''Y''$; poněvadž ale jest $AA'' \perp$ rov. $X'A'Y'$, tudíž $AA'' \perp A''X''$ i $AA'' \perp A''Y''$, proto vyplývá $AA'' \perp AX$, $AA'' \perp AY$, tedy (§. IV. 1.) $AA'' \perp$ rov. XAY odkudž jde (odst. 6.) rov. $XAY \parallel$ rov. $X'A'Y'$.

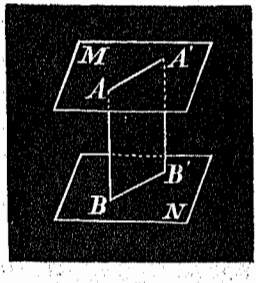
11. *Jsou-li dvě roviny jedna i druhá se dvěma různoběžkama rovnoběžné, jsou i spolu rovnoběžné.* — *Důkaz* dej čtenář.

12. *Přímky rovnoběžné (tedy i kolmice) mezi rovinama rovnoběžnýma jsou stejně dlouhé, a paty jejich na obou rovinách mají též rovné od sebe vzdálenosti.*

Důkaz. Buď (obr. 25.) $M \parallel N$, $AB \parallel A'B'$. Rovina přímkama těma položená protne dané roviny rovnoběžkama $AA' \parallel BB'$ (odst. 2.),

tím jest $ABB'A'$ rovnoběžník a v něm $AB = A'B'$, $AA' = BB'$. (Pl. LXII. 2.)

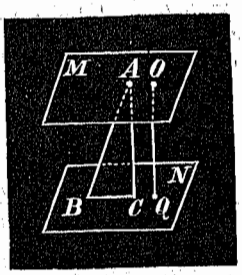
obr. 25.



13. *Jsou-li v prostoře tři přímky,* **AA'**, **BB'**, **CC'** *rovnoběžné a stejně dlouhé, jsou též roviny* **ABC** *i* **A'B'C'** *spolu rovnoběžné, a trojúhelníky* **ABC** i **A'B'C'** *shodné.* — Důkaz dej čtenář.

14. *Kolmice jest ze všech přímek mezi rovnoběžnýma rovinama M i N stojících nejkratší* (obr. 26.).

obr. 26.



Důkaz. Buď OQ kolmice, AB šikmá mezi rovinami $M \parallel N$; s bodu A spusť na rov. N kolmici AC, i jest pak (§. V. 4.) $AC \parallel OQ$, a (odst. 12.) $AC = OQ$; rovina úhlem BAC položená protne rov. N přímkou BC, i vznikne trojúhelník ACB u C pravoúhlý, jehož podponou jest šikmá AB, tedy $AC < AB$ pročež i $OQ < AB$.

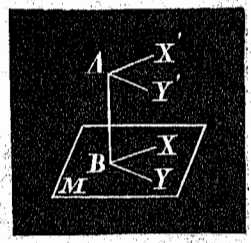
Přídavek. Společná kolmice mezi rovinama rovnoběžnýma jsouc nejkratší přímkou měří jejich od sebe *vzdálenost.*

Hledíce k odst. 12. díme: Roviny rovnoběžné mají na všech místech jednostejnou od sebe vzdálenost.

15. *Pravoúhlé průměty přímek rovnoběžných na rovinu jsou přímky rovnoběžné.*

Důkaz dej čtenář.

obr. 27.



16. *Úlohy:* a) *Daným v prostoře bodem A polož rovinu rovnoběžně s jinou rovinou danou M* (obr. 27.).

Rozř. S bodu A veď přímku AB k rovině M; přímkou AB polož dvě roviny, kteréž se s rovinou M protnou přímkama BX i BY; v rovinách těch veď k průsečnicím rovnoběžky $AX' \parallel BX$, $AY' \parallel BY$, a úhlem $X'AY'$ polož rovinu, kteráž bude žádanou.

Důkaz z odst. 10.

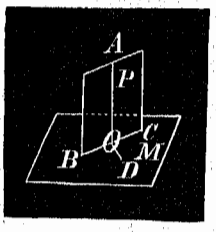
b) *Dvěma přímkama mimoběžnýma polož roviny rovnoběžné.*

c) *Daným v prostoře bodem veď přímku, která by obě mimoběžky protínala.*

§. XI.

1. *Rovina* **P** *položená přímkou* **AO** *na jiné rovině* **M** *kolmou strmí též na rovině* **M** *kolmo* (obr. 28.).

obr. 28.



Důkaz. Na průsečnici BC obou rovin v bodě O postav v rovině M kolmici OD, i bude úhel AOD odchylkou rovin; týž úhel jest ale pravý, protože $AO \perp M$: tedy jest $P \perp M$.

2. *Jsou-li dvě roviny* **P** *i* **M** *na sobě kolmo, strmí též každá přímka* **OA**, *která v jedné rovině* **P** *na průsečnici kolmo jest, na druhé rovině* **M** *kolmo* (obr. 28.).

Důkaz. V rovině M postav na průsečnici BC v bodě O kolmou OD; pak jest $\sphericalangle AOD$ odchylkou rovin; dle výmínky jest ale $P \perp M$, tedy $\sphericalangle AOD = R$: pročež stojí AO na dvou po rovině M vedených přímkách OC i OD kolmo, tudíž na rovině M, (§. IV. 1.).

3. *Jsou-li dvě roviny* **P** *i* **M** *na sobě kolmo, musí*

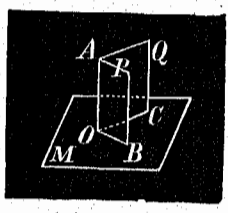
a) *Kolmice s kteréhokoliv bodu* **A** *roviny jedné na rovinu druhou spuštěná zcela padnouti do roviny prvé;*

b) *Kolmice v kterémkoliv průsečnice bodě* **O** *na jednu rovinu vztyčená zcela padnouti do roviny druhé.*

Důkaz z odst. 2. a §. V. 1. 2. neshodou dej čtenář.

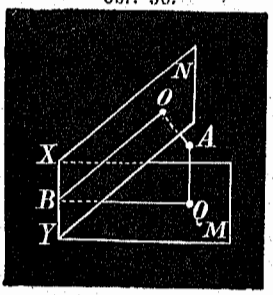
4. *Stojí-li dvě roviny* **P** *i* **Q** *na třetí rovině* **M** *kolmo, strmí též jejich průsečnice* **AO** *na rovině* **M** *kolmo* (obr. 29.).

obr. 29.



Důkaz. Buďtež OB i OC průsečnice roviny M s rovinama P i Q. Kolmice, již v bodě O postavíme na rovinu M, musí padnouti do rovin P i Q (odst. 3.); pročež musí splynouti s průsečnicí jejích OA: tedy jest $OA \perp M$.

obr. 30.



5. *Úhel, který jest spůsoben dvěma přímkama s jednoho bodu na dvě odchýlené roviny kolmo spuštěnýma, doplňuje se s vnitřní odchýlkou těchto rovin* (s koutem) *na úhel přímý, a průsečnice rovin stojí kolmo na rovině jeho.* (Obr. 30.)

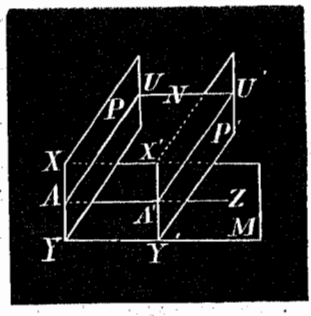
Důkaz. Buď XY průsečnice rovin M i N, jakož i $AQ \perp M$, $AO \perp N$. Rovina úhlu OAQ protne roviny M i N přímkama QB i OB, kteréž se na průsečnici XY

v bodě B setkají. Táž rovina jest (odst. 1.) na rov. M i N, a tyto na ní kolmo; pročež jest (odst. 4.) i průsečnice XY na rovině OAQ kolmo, jakož tvrzeno; tedy $QB \perp XY$, $OB \perp XY$, a proto jest úhel OBQ odchylkou rovin N i M. V čtyrúhelníku $AOBQ$ jsou ale dva úhly O i Q pravé, poněvadž $AO \perp N$, $AQ \perp M$: tedy jest součet druhých dvou úhlů přímému roveň, jakož tvrzeno.

6. *Roviny rovnoběžné* **P** *i* **P'** *mají od roviny* **M**, *s kterou se obě protínají, na souhlasných stranách jednostejné odchylky.* (Obr. 31.)

Důkaz. Buďte XY i $X'Y'$ průsečnice roviny M s rovinama rovnoběžnýma $P \parallel P'$; úhel UAZ buď odchylkou rovin P i M, t. j. $UA \perp XY$, $ZA \perp XY$: položená úhlem UAZ rovina N protne rovinu P' přímkou $U'A' \parallel UA$ (§. X. 2.); tedy jest $\sphericalangle X'A'Z = \sphericalangle XAZ = R$, $\sphericalangle X'A'U' = \sphericalangle XAU = R$ (II. 3.): tudíž jest $\sphericalangle U'A'Z$ odchylkou rovin P' i M, a za příčinou $U'A' \parallel UA$ jest $\sphericalangle U'A'Z = \sphericalangle UAZ$, jakož tvrzeno.

obr. 31.



7. *Výsledek.* Stojí-li rovina na jedné ze dvou rovin rovnoběžných kolmo, strmí též na druhé kolmo.

8. *Věty ku cvičení.*

a) Stojí-li tři roviny vzájemně na sobě kolmo, st mí též všecky průsečnice jejich vzájemně na sobě kolmo, a naopak: stojí-li průsečnice tří rovin vzájemně na sobě kolmo, stojí též roviny na sobě kolmo.

b) Stojí-li na rovině M kolmo i rovina P i přímka p, musí přímka p buď v rovině P ležeti aneb s rovinou P rovnoběžná býti.

c) Je-li kolmice některé roviny s jinou rovinou rovnoběžná, stojí obě roviny na sobě kolmo.

d) Při průmětu pravoúhlém stojí rovina promítající na rovině průmětné kolmo.

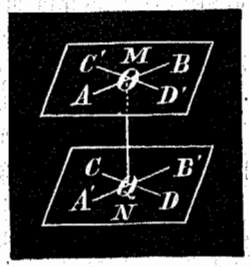
e) Vedeme-li (obr. 32.) dvěma mimoběžkama AB i CD roviny rovnoběžné $M \parallel N$, a zřídíme-li pak pravoúhlé průměty $A'B'$ i $C'D'$ oněch přímek s roviny jedné na rovinu druhou: tehdy tvrdíme:

α) průmět jedné přímky protne se s druhou přímkou;

β) spojovací přímka OQ těchto dvou bodů průsečných stojí kolmo na obou přímkách mimoběžných i na průmětech jejich i na rovinách M i N;

γ) mimo přímku OQ nemají mimoběžky kolmice společné;

obr. 32.



δ) každé jiné dva body přímek mimoběžných jsou od sebe vzdálenější než OQ.

Pozn. Ačkoliv mimoběžky nemají bodu společného, přece se mluví o jejich odchylce, i míní se pak úhel BOD' (obr. 32.). Společnou jejich kolmicí OQ určuje se jejich od sebe vzdálenost.

f) Jsou-li průsečnice, jimaž se rovina M protíná, s rovinama P i P' spolu rovnoběžné, a jsou-li také odchylky roviny M od rovin P i P' na souhlasných stranách stejně veliké; jsou roviny P i P' rovnoběžné (obr. 31.).

g) Protínají-li se na vzájem tři roviny, a jsou-li dvě průsečnice jejich spolu rovnoběžné, jest s nima rovnoběžná též třetí průsečnice; jsou-li ale dvě průsečnice sbíhavé, sbíhají se všecky tři v bodě společném.

9. *Úlohy ku cvičení:*

a) Na rovině dané postav rovinu kolmou, jež by procházela přímkou danou buď v rovině neb mimo rovinu.

b) Daným bodem veď přímku, jež by s rovinou M rovnoběžna a k rovině N o daný úhel α skloněna byla.

c) Danou přímkou polož rovinu, jež by od daného v prostoře bodu určitou vzdálenost měla.

III. O rozběžkách v prostoře.

§. XII.

1. Přímky v prostoře OA, OB, OC, OD, atd. (obr. 35.) ze společného bodu O vycházející nazýváme *paprsky* neb *rozběžky* n. *sběžky* (Strahlen, Divergente, Convergente), veškerenstvo jich *chochol* (Busch, faisseau), a bod O *střed* n. *počátek* n. *pól* jejich.

2. Na dvou plochách chocholem paprsků protatých vyskytuje se dvoje skupení bodů průsečných A, B, C, D... a A', B', C', D'..., z nichž ty, které společně na jednom paprsku leží, *stejnolehlými* n. *stejnopisnými* n. *stejnohlednými* (homolog, homograph, perspectivisch) slovou, ku př. A i A'.

Týmž jménem (stejno-lehlé, -pisné, -hledné) zoveme:

a) *úsečky* (Segmente) paprsku, které od společného pólu O dosahují k bodům stejnolehlým; k. p. OA i OA';

b) *příčky* (Transversalen), t. přímky proti společnému úhlu bodoma střídavě stejnolehlýma položené; k. p. AB i $A'B'$;

c) *úhly* stejnolehlýma příčkama sevřené, k. p. ABC i $A'B'C'$;

d) kteroukoliv čáru neb obrazec v ploše jedné a středový jeho průmět v ploše druhé.

Dodatek 1. Obrazcům stejnohledným říkají též *kollinearné* t. j. *součaré*, a vzájemnosti jejich *kollineací* č. *součáří*.

Dodatek 2. K rozběžkám ve smyslu širším počítají též rovnoběžky, ježto se protínají v bodě jediném, ale — *neskonale vzdáleném*, t. j. nikde, ač nejsou mimoběžné.

§. XIII.

1. O ploských mnohoúhelnících stejnohledných, jsou-li roviny jejich k sobě schýleny, platí tyto věty:

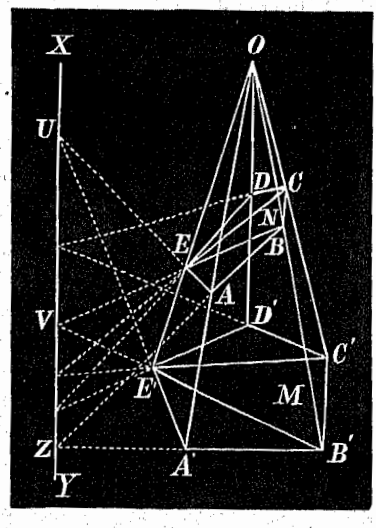
a) Aspoň polovička stran stejnolehlých protínají se po dvou na průsečnici rovin mnohoúhelníků, kteréžto přímce díme pak osa kollineárná č. osa součaří;

b) zůstatní strany stejnolehlé se též buď na ose kollineárné protínají aneb jsou spolu i s osou rovnoběžné; a to též platí

c) o všech příčkách stejnolehlých vůbec, o úhlopříčných zvláště.

Důkaz. Poněvadž roviny M i N (obr. 33.) mnohoúhelníků stejnohledných $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ k sobě jsou schýleny, protnou se přímkou XY. Průsečnice XY a kterékoliv dvě strany stejnolehlé mnohoúhelníků stejnohledných leží po dvou v jedné rovině; pročež jsou všecky tři buď rovnoběžné ($BC \parallel B'C' \parallel XY$), aneb se protínají v bodě jediném (§. II. 4.), tedy v bodě na průsečnici XY ležícím (k. p. BA, $B'A'$, XY v bodě Z). Totéž platí o dvou příčkách stejnolehlých (k. p. EC a $E'C'$) a o průsečnici XY. A poněvadž v každém mnohoúhelníku aspoň polovička jeho stran musí býti sbíhavých s kteroukoliv přímkou v jeho rovině položenou; a že přímka XY v rovinách M i N leží: pročež má platnost též věta v odst. *a)* vyslovená.

obr. 33.



Dodatek 1. Všecky tyto věty platí též, když pól O jest neskonale daleko, čili když paprsky AA', BB', CC', DD', EE', jsou spolu rovnoběžné.

Dodatek 2. Všecky věty platí o ploských obrazcích stejnohledných, byť i křivkami obmezených: jen že se pak mluví o tetivách a tečných na místě úhlopříčných a stran.

2. *Ploské mnohoúhelníky k sobě schýlené, mají-li osu kollineárnou* (t. j. protínají-li se jejich strany i příčky stejnolehlé na jediné přímce), *jsou stejnohledné.*

Důkaz. Strany EA, AB a příčná BE (obr. 33.) mnohoúhelníka $ABCDE$ protínejte se se stranami $E'A'$, $A'B'$ a s příčnou $B'E'$ mnohoúhelníka $A'B'C'D'E'$ na přímce XY v bodech U, Z, V. Přímky AB i $A'B'$ leží v jedné rovině, t. v rov. BZB', a v té rovině leží také paprsky $A'A$, $B'B$; podobně leží paprsky BB' a EE' v jedné rovině BVB', a paprsky EE' i AA' opět v jedné rovině AUA'; a týmž spůsobem poznati lze, že kterékoliv dva paprsky, které jdou bodoma stejnolehlýma, v jedné rovině leží. Z těchto paprsků neleží tré v jediné rovině pospolu, sice by ta rovina, v které by ležely, protínala roviny mnohoúhelníků $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ čarou klikatou, což býti nemůže. Jsou tedy paprsky ty přímky buď vesměs rovnoběžné, aneb se protínají v bodě jediném O (§. II. 5.).

§. XIV.

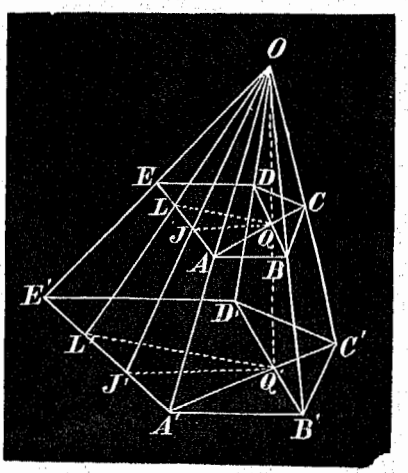
1. O ploských mnohoúhelnících stejnohledných, jsou-li jejich *roviny rovnoběžné*, platí tyto věty:

a) Stejnohledné příčky (strany, úhlopříčné atd.) *jsou rovnoběžné;*

b) stejnolehlé úsečky všech rozběžek, jakož i stejnolehlé příčky jsou k sobě v poměru stálém;

c) stejnolehlé úhly jsou si rovny;

obr. 34.



d) příčky střídavě stejnolehlé protínají se v bodech stejnolehlých;

e) stejnohledné obrazce jsou si podobny; a

f) ploské obsahy jejich jsou ve zčtvercovaném poměru stejnolehlých příček neb paprsků.

Důkaz a). Buďtež (obr. 34.) $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ obrazce stejnohledné, jejich roviny spolu rovnoběžné, a O pól jejich. Položíme-li kterýmakoliv dvěma paprsky rovinu (ku př. $A'OB'$, aneb $A'OC'$): musí jejich prů-

sečnice na rovnoběžných rovinách obrazců vzniklé spolu býti rovnoběžné (§. X. 2.), a proto jest $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $AC \parallel A'C'$ atd.

b) Poněvadž stejnolehlé příčky jsou rovnoběžné, jest (dle Pl. LXXXVII. 2. 3.) $OA : OA' = OB : OB' = OC : OC' =$ atd. $= AB : A'B' = BC : B'C' =$ atd. $= AC : A'C' = AD : A'D' =$ atd. $= q$.

c) Poněvadž ramena úhlů stejnolehlých jsou střídavě spolu rovnoběžná, jsou úhly si rovny: $EAB = E'A'B'$; $CAB = C'A'B'$ atd. (§. II. 3.).

d) Příčky stejnolehlé (ku př. AC i $A'C'$, aneb BD i $B'D'$) vzniknou průsekem roviny dvěma paprsky položené s rovnoběžnýma rovinama obrazců stejnohledných; pročež leží každé dvé příček stejnolehlých v jedné rovině (AC i $A'C'$ v rovině AOC; BD i $B'D'$ v rov. BOD): průsečný bod Q dvou příček (AC i BD) v obrazci jednom, a průsečný bod Q' příček ($A'C'$ i $B'D'$) stejnolehlých v obrazci druhém musí tedy ležeti v rovinách AOC i BOD, a tím na průsečnici těchto dvou rovin, kterážto ale opět jest novým paprskem z pólu vycházejícím: a proto jsou body Q i Q' stejnolehlé.

e) Z pólu O veď paprsek OQ jakýmkoliv směrem (třeba kolmým), jenž roviny obrazců stejnohledných protni v bodech Q i Q'. Jím polož dvě roviny QOJ i QOL, čímž nabudeš dvakrát dvé příček stejnolehlých QJ i $Q'J'$, pak QL i $Q'L'$, a dvou úhlů stejnolehlých JQL i $J'Q'L'$. Dle odst. *b)* jest tehdy $QJ : Q'J' = QL : Q'L' = OQ : OQ' = q$, a dle odst. *c)* též $JQL = J'Q'L'$. Položíme-li tedy stejnohledné obrazce na sebe tak, aby úhly JQL a $J'Q'L'$ se pokrývaly, budou se příčky ze společného bodu Q (neb Q') vycházející protínati obvodoma obrazců v poměru stálém: pročež jsou obrazce ty sobě podobny (Pl. LXXXIX. 1.).

Dodatek. Věta i důkaz platí též, když obrazce stejnohledné křivými čarami omezeny jsou.

f) Poněvadž dle odst. *e)* jest $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$, pročež (dle Pl. CXII. 1.) $ABCDE : A'B'C'D'E' = (AB : A'B')^2 = (AC : A'C')^2 = q^2$; a tedy dle *b)* také $ABCDE : A'B'C'D'E' = (OA : OA')^2 = (OQ : OQ')^2 = q^2$.

Dodatek 1. Místo poměru $OA : OA'$ může se vzíti poměr stejnolehlých úseček paprska na roviny stejnohledných obrazců kolmo padajícího; pak zní věta: Ploské obsahy obrazců stejnolehlých mají se k sobě jako zčtvercované vzdálenosti jejich od společného pólu.

Dodatek 2. Věta i důkaz platí též, když stejnohledné obrazce křivkami omezeny jsou.

2. Jsou-li paprsky, které se dvěma rovnoběžnýma rovinama protínají, vesměs spolu *rovnoběžné*, platí tyto věty:

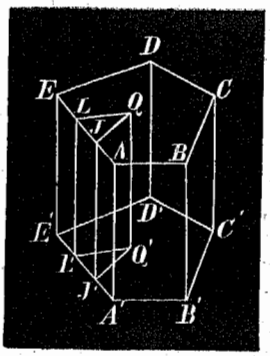
a) Úsečky paprsků mezi rovinama jsou si rovny (§. X. 12.).

b) Stejnolehlé příčky jsou rovnoběžné (X. 2.) *a stejně dlouhé* (X. 12.).

c) Stejnolehlé úhly jsou si rovny (II. 3.).

d) Stejnolehlé obrazce jsou shodné.

obr. 35.



Důkaz d). V obr. 35. buďte $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ obrazce v rovnoběžných rovinách stejnolehlé, a paprsky $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel EE'$ spolu rovnoběžné. Shodnost obou obrazců, jsou-li mnohoúhelníky, vyplývá již z toho, že všechny jejich strany i úhly stejnolehlé v témž za sebou pořádku dle odst. *b*) i *c*) si jsou rovny. Všeobecněji vedeme důkaz takto: Veď paprsek nějaký QQ', jenž by obrazce v bodech Q i Q' uvnitř ploch jejich protínal; jím polož dvě roviny $QQ'J'J$ a $QQ'L'L$; i jest pak dle *b*) i *c*) $QJ \# Q'J'$, $QL \# Q'L'$. Položíme-li tedy obrazec $ABCDE$ na obrazec $A'B'C'D'E'$ tím spůsobem, aby bod Q připadl na bod Q' a příčka QL na stejnolehlou příčku $Q'L'$, pokryjí se úhly LQJ a $L'Q'J'$ na vzájem a body J a J' splynou v jediný; t. j. body na obvodě, jejichž v rovině paprsky z bodu Q i Q' k obvodům obrazců vedené od paprska počátečných QL i $Q'L'$ jednostejnou mají odchylku ($LQJ = L'Q'J'$), připadnou na sebe: pročež pokryjí se tak celé obvody, čili $ABCDE \simeq A'B'C'D'E'$.

Dodatek. Poslední věta obsažena jest již ve větě odst. 1. Neboť je-li pól O (obr. 34.) neskonale od obrazců stejnohledných vzdálen, jest poměr $OQ : OQ' = 1$, a tím jest $ABCDE = A'B'C'D'E'$, i $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

3. Věty ku cvičení:

a) Jsou-li dvakrát dvě stejnolehlé strany dvou podobných mnohoúhelníků v prostoře souhlasnými směry střídavě rovnoběžné: jsou též roviny jejich rovnoběžné, a mnohoúhelníky jsou stejnohlednými.

b) Jsou-li paprsky, které z pólu k dané rovině prostorem jdou, rozděleny na úsečky v poměru stálém: leží dělicí body v jedné rovině s rovinou danou rovnoběžné.

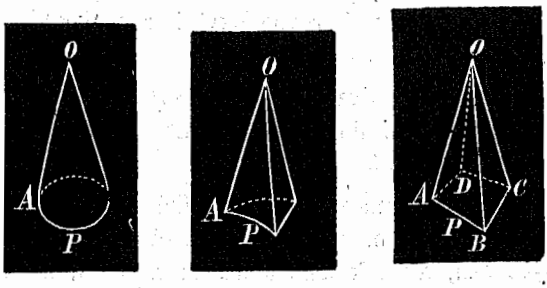
Knihy prvé část druhá.

O úhelnících tělesných.

§. XV.

1. Pohybuje-li se přímka *OA* (obr. 36—38.) po celém obvodě ploského obrazce *P* tak, aby jeden konec její ustavičně procházel pevným bodem *O*, jenž leží v prostoře mimo rovinu *P*: vznikne tvar, jemuž díme *hrot* n. *roh*. Bod *O* jmenujeme pak *vrcholem (Scheitel, Spitze)* hrotu.

obr. 36. obr. 37. obr. 38.



2. Hrot jest buď *oblý* (obr. 36.) aneb *břitnatý* (obr. 37., 38.), jakož obvod obrazce *P* jest čára buď bezúhlá aneb úhelnatá. Byl-li obrazec mnohoúhelník (prvého řádu), vzniká hrot, jejž obyčejně (vypouklým) *úhelníkem tělesným* (Körpereck) aneb zkrátka *koutníkem* jmenujeme (obr. 38.).

3. Tělesný úhelník vznikne také spůsobem tímto: Z roviny jakkoliv položené sřízněme úhel dutý AOB (obr. 38.); kolem ramene *OB* otáčejme rovinu, která od tohoto ramene v pravo leží, směrem ku př. od pravé k levé; pootočivše o úhel dutý zastavme a sřízněme na ní úhel dutý *BOC;* rovinu úhlu *BOC* zůstavivše pevnou otáčejme druhou její část, jež leží za ramenem *OC,* týmž jako prvé spůsobem kolem přímky *OC;* pootočivše opět zastavme, sřízněme úhel dutý *COD*, a pokračujeme tak, až posléz otáčejícím jde nám rovina přímkou *OA*: tehdy konečně ustaňme, a co z roviny za přímkou *OA* ještě zbývá, vynechejme: i máme tělesný úhelník hotový. (Srov. Pl. XXV. 1.).

4. Přímky *OA, OB, OC* . . . (obr. 38.) slovou *břity* neb *hrany* (Kanten), roviny ploských úhlů hranami sevřené AOB, BOC, COD . . . nazývají se *boky* n. *strany* n. *stěny* (Seitenflächen), a velikost

jejich měří se těmito úhly sousedných hran; vnitřní odchylky dvou sousedných boků č. štěn jmenujeme *kouty* (jiní jim říkají *plošné úhly* — Flächenwinkel) tělesného úhelníka č. koutníka.

5. Při úhelníku tělesném a jeho určování sluší pozor míti: a) na *počet hran*, b) na *velikost boků* č. *stran*, c) na *velikost koutů* č. *plošných úhlů*, d) *na pořádek, v kterém boky a kouty po sobě jdou.*

6. Dle počtu hran č. boků rozeznáváme *troj-*, *čtyr-*, vůbec *n*-kout č. -úhelník tělesný. — Dle poměrné velikosti boků a koutů rozeznáváme úhelníky *rovno-* a *nerovno-boké*, neb *-kouté:* jakož veškeré jejich boky neb kouty jsou si buď rovny neb nerovny.

Úhelník, který jest i rovnoboký i rovnokoutý, nazývá se *pravidelný*.

Trojúhelník, jehož dva boky neb dva kouty si jsou rovny, třetí bok neb kout ale i jinou velikost má neb míti může, nazývá se *lichoboký* n. *lichokoutý*.

7. K lepšímu rozeznávání od úhelníků ploských a k vůli jak krátkosti tak přesnosti můžeme tělesný *n*-úhelník nazývati n-*koutníkem* č. n-*koutem*, když k jeho koutům; n-*bokem*, když k bokům, a n-*břitem*, když k hranám č. břitům jeho přihlížíme — stavíce tyto názvy vedlé názvů úhelníků ploských: n-*úhelník*, n-*stran*, n-*hran*. (Srov. Pl. XXIV—XXXI.)

8. V písmě znamená se hrana dvěma písmeny *OA, OB, OC*..., a sice nejprv vrchol a pak jiný ještě na hraně bod; tělesný úhelník znamená se buď vrcholem *O* aneb píše se *OABCD* t. j. napřed znamení vrchole a pak druhé znamení hran v tom, jak po sobě jdou, pořádku; kout znamenáme buď druhým písmenem hrany (*A, B, C*...), v níž se boky protínají, aneb souhlasným písmenem řeckým (α, β, γ . . .); boky nejlépe znamenáme jako ploské úhly. V trojúhelnících ale užíváme zhusta k jejich naznačení malých písmen latinských *a, b, c*, jež stejně znějí s písmeny, jimiž se protilehlé kouty *A, B, C* znamenají.

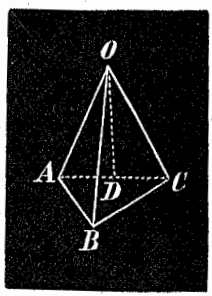
§. XVI.

1. *V trojkoutu jest jeden bok menší než součet dvou boků druhých.*

Důkaz. Buď v trojkoutu *O* (obr. 39.) bok *AOC* největším.

V rovině jeho odřízni $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB = c$, a učiň $OB = OD$: pak jest $\triangle AOD \cong \triangle AOB$, pročež $AD = AB$. V $\triangle ABC$ jest $AC - AB < BC$, tedy také $AC - AD < BC$, čili $DC < BC$. Z toho soudíme, že v $\triangle DCO$ i $\triangle BCO$ jest $\sphericalangle DOC < \sphericalangle BOC$, tedy také $\sphericalangle AOD + \sphericalangle DOC < \sphericalangle BOC + \sphericalangle AOB$, aneb $\sphericalangle AOC < \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$, jakož tvrzeno.

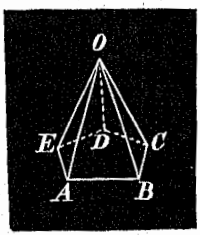
obr. 39.



2. *V* **n**-*koutu jest součet všech boků menší než* **4R**.

Důkaz. Rovina $ABCDE$ (obr. 40.) protínej hrany n-kouta O. Součet Σ úhlů v pobočných trojúhelnících AOB, BOC, COD atd. činí $\Sigma = n.2R$, a skládá se ze součtů s všech boků jeho a ze součtu σ všech úhlů v řečených trojúhelnících k podstavám AB, BC, CD atd. přílehlých, tak že jest $s + \sigma = n.2R$. Úhly v součtu σ zahrnuté působí po dvou ku společné hraně přiléhajících spolu s úhlem mnohoúhelníka $ABCDE$, jehož vrcholem hrana ta prochází, (ku př. OAE, OAB a EAB) trojkout, a jsou pospolu větší, než třetí úhel tento, t. $OAE + OAB > EAB$ (odst 1.): a z té příčiny musí také všech jich součet σ větší býti, než součet s' vnitřních úhlů mnohoúhelníka $ABCDE$: t. $\sigma > s'$. Dle Pl. XXVII. jest ale $s' = n.2R - 4R$, pročež $\sigma > n.2R - 4R$: odečteme-li tuto nerovnost od rovnice $s + \sigma = n.2R$, nabudeme $s < 4R$, jakož tvrzeno.

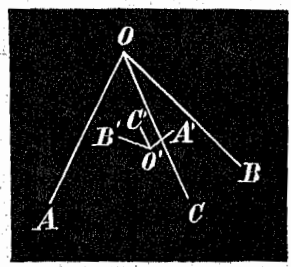
obr. 40.



3. *Součet koutů v* **n**-*úhelníku tělesném vězí mezi* **(n-2)2R** *a* **n.2R**.

Důkaz. S některého bodu O' (obr. 41.) uvnitř n-kouta O spusť kolmice na boky jeho; $O'A' \perp BOC$, $O'B' \perp AOC$, $O'C' \perp AOB$; tím vznikne nový n-kout O', jehož boky střídavě s kouty daného n-kouta O na $2R$ se doplňují (§. XI. 5.). Znamená-li b' součet těchto boků a k součet koutů v daném n-koutu O; jest $k + b' = n.2R$; pročež na všechen spůsob $k < n.2R$. Dle odst. 2. jest ale $b' < 4R$, pročež $k > n.2R - 4R$ čili $k > (n-2)2R$.

obr. 41.

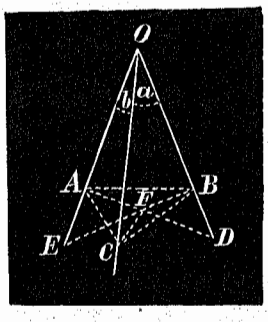


4. *V trojkoutu jest tedy součet* **k** *koutů většíněž* **2R**, *a menší než* **6R**.

§. XVII.

1. *V trojkoutu lichobokém jsou kouty k lichému boku přilehlé sobě rovny.*

obr. 42.



Důkaz. V trojkoutu $OABC$ (obr. 42.) buď $a = b$. S bodu C spusť na hrany OA i OB kolmice CA i CB, a v rovině AOB postav na téže hrany v bodech A i B kolmé AD i BE: i jest dokázati, že $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE$.

Poněvadž $CA \perp OA$, $DA \perp OA$, jest též $OA \perp$ rov. CAD (§. IV. 1.), a podobně $OB \perp$ rov. CBE: proto jest i rovina AOB kolmo na rovinách CAD i CBE, a tyto na ní (§. XI. 1.). Odtud jde, že i jejich průsečnice CF na rovině AOB kolmo stojí (XI. 4.): jest tedy $\sphericalangle CFA = R = \sphericalangle CFB$.

Z rovností $b = a$, $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OBC = R$, $OC = OC$ plyne $\triangle OAC \cong \triangle OBC$, odtud $AC = BC$; a že $CF = CF$, $\sphericalangle CFA = \sphericalangle CFB = R$, pročež jest také $\triangle AFC \cong \triangle BFC$, a proto jest $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE$.

2. *Výsledek. V trojkoutu rovnobokém jsou si všechny třikouty rovny.*

3. *V trojkoutu lichokoutém jsou boky, které lichý kout svírají, sobě rovny.*

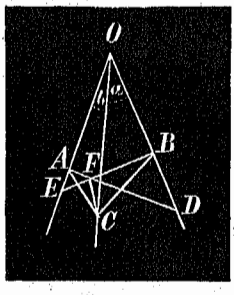
Důkaz. Sestrojivše, jako v odst. 1. (obr. 42.), mějme $\sphericalangle CAD = \sphericalangle EBC$, i jest dokázati, že jest $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COA$.

Tehdy jest nejprv $\triangle CFB \cong \triangle CFA$, pročež $CB = CA$; odtud jde $\triangle BOC \cong \triangle COA$, pročež $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COA$.

4. *Výsledek.* Trojúhelník rovnokoutý jest též rovnoboký.

5. *V trojkoutu leží proti většímu boku větší kout, a proti většímu koutu větší bok.*

obr. 43.



Důkaz a) Sestrojivše (obr. 43.) jako v odst. 1. mějme $a > b$, i jest dokázati: $\sphericalangle CAD > \sphericalangle EBC$.

Z pravoúhlých trojúhelníků OAC i OBC, ježto mají společnou podponu ale nerovné úhly a i b, jde $CB > CA$; tím zase z pravoúhlých trojúh. CFB i CFA, ježto mají společnou odvěsnici CF, ale nerovné si podpony CB i CA, vyplývá $\sphericalangle CAD > \sphericalangle EBC$.

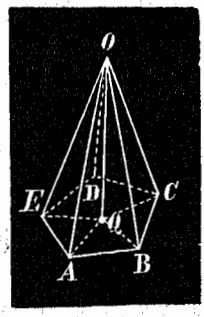
b) Je-li naopak $\sphericalangle CAD > \sphericalangle EBC$, plyne z $\triangle AFC$ i $\triangle BFC$ nejprvé $AC < BC$ a tím z $\triangle OAC$ i $\triangle OBC$ konečně $a > b$.

§. XVIII.

1. *Jsou-li hrany pravidelného* n-*kouta rovinou přeťaty, a mezi nimi tři sousedné sobě rovny, mají všecky jednostejnou délku.*

Důkaz. Buď v n-koutu O (obr. 44.) pravidelném $OA = OB = OC$. Na rovinu ABC spusť s vrchole O kolmici OQ: pak jest $QA = QB = QC$, $\sphericalangle AOQ = \sphericalangle BOQ = \sphericalangle COQ$, (VII. 2. b.). A poněvadž $\triangle AOB \cong \triangle BOC$, jest též $AB = BC$ a proto $\triangle AQB \cong \triangle BQC$, tedy $\sphericalangle AQB = \sphericalangle BQC$. — Kolem osy OQ toč tělesný obrazec, až úhel AQB připadne na úhel BQC: tehdy přijde $\triangle AOB$ do polohy nynějšího $\triangle BOC$; a poněvadž kout $A = B$, musí bok EOA úplně připadnouti na bok AOB; a že jest $\sphericalangle EOA = \sphericalangle AOB$, musí pak hrana OE padnouti směrem nynější hrany OA: a proto jest $\sphericalangle QOE = \sphericalangle QOA$; z toho opět plyne $\triangle AQO \cong \triangle EQO$, pročež $OE = OA$.

obr. 44.



Týmž spůsobem dokáže se, že i zůstatní hrany jsou si rovny.

2. *Výsledek.* Učiníme-li všechny hrany pravidelného n-kouta stejně dlouhými, leží konce jejich v jediné rovině.

Mimo to dokáže čtenář:

a) konce těchto hran leží na vrcholích mnohoúhelníka pravidelného, na jehož ploše

b) kolmo strmí přímka s vrchole koutníka ku středu opsaného kruhu čelící; a přímka tato

c) má ode všech hran koutníka stejné odchylky a

d) ke všem bokům jeho jednostejné sklony; konečně

e) kterýkoliv bod její má ode všech bodů jednostejné vzdálenosti.

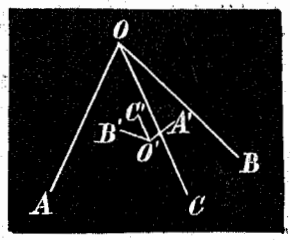
§. XIX.

1. Stojí-li hrany jednoho n-kouta na bocích druhého n-kouta kolmo, nazývá se onen *polárným* n-úhelníkem druhého.

obr. 45.

2. *Je-li jeden ze dvou* n-*koutů polárným druhého, jest též druhý polárným prvního.*

Důkaz. Buď (obr. 45) $O'A' \perp$ rov. BOC, $O'B' \perp$ rov. AOC, $O'C' \perp$ rov. AOB. Poněvadž $O'A'$ a $O'B'$ kolmo strmí na rovinách BOC a AOC, musí rovina $B'O'A'$ kolmo státi na obou rovinách těchto (XI. 1.),



tedy i tyto roviny na $B'O'A'$, a proto i jejich průsečnice $OC \perp B'O'A'$ (XI. 4.); a podobně lze dokázati, že jest $OB \perp A'O'C'$, $OA \perp B'O'C'$.

Patrno, že věta platí, nechť mají tělesné úhelníky jakýkoliv počet hran.

3. V polárných úhelnících doplňuje se kout jednoho s druhého bokem, na němž hrana koutu kolmo stojí, na $2R$. (XI. 5.)

4. Je-li jeden z polárných úhelníků pravidelný, jest pravidelný i druhý.

5. Je-li jeden z polárných trojúhelníků lichoboký neb lichokoutý, jest jím i druhý.

§. XX.

1. Dva úhelníky tělesné nazývají se *shodnými*, jestliže náležitě jeden do druhého byvše vloženy úplně spolu v jediný splývají, jeden druhým se vyplňujíce a zahrnujíce. — Tehdy nejen vrchole, nébrž i veškeré jak boky tak hrany jejich na vzájem se pokrývají majíce směry souhlasné. — Hrany, boky a kouty, které se tehdy pokrývají, slovou *stejnolehlými*.

2. Dva úhelníky ale, které tak se dají položiti, aby hrany jejich o společném vrcholi po dvou nabyly směrů protivných, tedy i boky jejich po dvou ačkoliv se nepokrývajíce v jedné přece rovině ležely, slovou *souměrnými* (symmetrisch). Hrany, které takto v jedné rovině, a kouty, jejichž hrany v jedné přímce leží, slovou *stejnolehlými*.

3. Z těchto výměrů plyne, že i ve shodných i v souměrných n-koutech stejnolehlé části střídavě si jsou rovny; ale pořádek, v kterém stejnolehlé části po sobě jdou, jest při shodných n-koutech souhlasný, při souměrných převrácený.

§. XXI.

1. *K dokonalému určení trojúhelníka tělesného* jest jako při trojúhelníku ploském tří částí třeba, s tím ale rozdílem, že při trojúhelníku tělesném i na směr, kterým se od části k části postupuje, pozor míti sluší.

2. Jsou pak části, jimiž se trojúhelník tělesný dokonale určuje, a to určitým po sobě jdou-li pořádkem, tyto:

a) tři boky; aneb

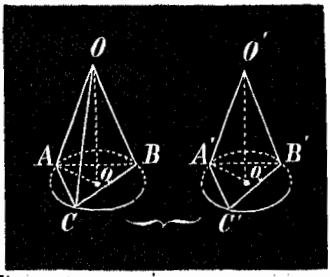
b) tři kouty; aneb

c) dva boky a kout jima sevřený; aneb

d) dva kouty a bok k nim přilehlý.

Důkaz a). Buďtež (obr. 46.) O i O' dva trojkouty, a v nich v souhlasném pořádku $\sphericalangle OAB = \sphericalangle O'A'B'$, $\sphericalangle OBC = \sphericalangle O'B'C'$, $\sphericalangle OCA = \sphericalangle O'C'A'$. Sřízni $OA = OB = OC = O'A' = O'B' = O'C'$; s vrcholů O i O' spust na roviny ABC i $A'B'C'$ kolmice OQ i $O'Q'$; budou pak jejich paty ležeti ve středech kruhů kolem $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ opsaných (VII. 2.), Mimo to jest $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$, $\triangle BOC \cong \triangle B'O'C'$, $\triangle COA \cong \triangle C'O'A'$; neboť všude jsou dvě strany a sevřené jima úhly si rovny: odtud jde $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, pročež $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

obr. 46.



Položíme-li tedy tyto dva trojúhelníky ABC i $A'B'C'$ jeden na druhý, pokryjí se: spolu pak pokryjí se kruhy okolo nich opsané, a proto i středy jejich Q i Q' v jediný bod splynou, a poloměry jejich jsou si rovny, $QA = Q'A'$.

Z toho jde dále $\triangle AQO \cong \triangle A'Q'O'$, a odtud $QO = Q'O'$. Za tou příčinou kolmice QO i $Q'O'$ jdouce společným směrem pokryjí se konci svými O i O': pročež i celé tvary $OABC$ i $O'A'B'C'$ splynou v jediný, t. $O \cong O'$, jako tvrzeno.

b) Třemi kouty A, B, C trojúhelníka O určeny jsou boky a', b', c' trojúhelníka polárného O', na nichž hrany oněch koutů kolmo strmí (XIX. 3.); pročež dle *a)* jsou též určeny kouty A', B', C' tohoto polárného trojúhelníka protilehlé. Poněvadž ale trojúhelník O též jest polárným (XIX. 2.) trojúhelníka O': pročež jsou těmito kouty A', B', C' také určeny boky a, b, c trojúhelníka O, a tím jest dle *a)* určen trojúhelník O sám.

Důkazy zůstatních dvou vět zůstavují se čtenářovi.

Kniha druhá.

O tělesích.

Část prvá.

O vlastnostech těles nejjednoduššich.

§. XXII.

1. Prostor ze všech stran omezený nazývá se *tělesem.*

2. Tělo jest buď *hranaté* (eckig), když samými rovinami, aneb *oblé* č. *kulaté*, když i křivými č. oblými plochami omezeno jest.

3. K úplnému omezení tělese hranatého jest aspoň čtyr rovin třeba. Pomezné roviny tyto slovou *stěny* (Gränzflächen), a dle počtu jejich jmenuje se tělo *čtyr-*, *pěti-*, vůbec *mnohostěn* (Tetraëder, Pentaëder, Polyëder).

4. Stěna, na níž tělesi spočívati dáme, slove *podstavou* (basis, Grundfläche); leží-li proti ní jiná ještě stěna buď rovnoběžná neb od ní méně než zůstatní stěny odchýlená a nemající s ní hrany společné, nazývá se zhusta i tato podstavou, a sice *hořejší*, kdežto onano *spodní* slove. Obě podstavy jmenují se také *dna.* Zůstatním stěnám díme *boky* č. *stěny pobočné* (Seitenflächen), a souhrnu jich *plášť* (Mantel).

5. Průsečnice stěn nazývají se *hrany,* a ty jsou *podstavné* (Grundkanten), aneb *pobočné* (Seiten-K.), jakož bok s podstavou aneb s jiným bokem se protíná. — Průseky hran činí *vrchol hrotu* č. *rohu* (Eck).

6. Hranaté tělo slove *pravidelným* (regulär), jsou-li všechny jeho jak rohy (hroty, koutníky) tak stěny pravidelné a shodné.

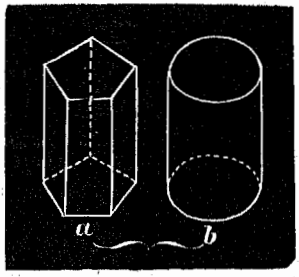
7. Přímky, jež jdou od rohu k rohu na jiné hraně ležícímu nazývají se *úhlopříčkami;* a roviny, jež jdou uvnitř hranou k rohu, zovou se *řezy úhlopříčné* (Diagonalschnitt).

8. Z těles (jak hranatých tak oblých) jsou nejjednoduššími:

a) Sloup (Säule), tělo omezené dvěma rovnoběžnýma rovinama podstavnýma a pláštěm, jejž opíše přímka rovnoběžně v ten spůsob se pohybující, aby stopou svou za obvody podstav zůstavila obrazce uzavřené. Jakož pak podstava jest *mnohoúhelník* aneb

kruh, nazývá se sloup *hranolem* (Prisma, obr. 47. *a*) aneb *válcem* (Cylinder, obr. 47. *b*).

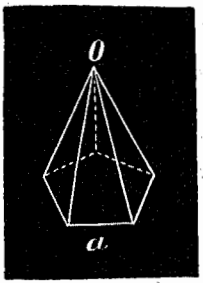
obr. 47.



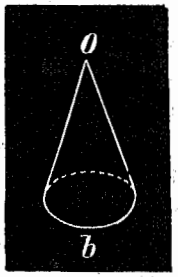
b) Jehlan, tělo omezené podstavnou rovinou a pláštěm, jejž opíše přímka kolem nehybného konce svého *O*, který nad podstavou leží, v ten spůsob se otáčející, aby stopou svou za obvod postavy ostavila obrazec uzavřený. Pevný bod *O* slove *vrcholem* jehlanu. Jakož pak podstavou jest buď mnohoúhelník aneb kruh, slove tělo buď *jehlanem* naprosto (Pyramide obr. 48. *a*), aneb *kuželem* (Conus, Kegel, obr. 48. *b*).

Sřízne-li se jehlan neb kužel rovinou, která s podstavou jeho jest rovnoběžná, zbude mezi oběma rovinama tělo, jež nazýváme *rovnoběžně zkomoleným* (abgestumpft) jehlanem n. kuželem, jinak i *komolí* č. *homolí* jehlana n. kužele (obr. 49. *a) b)*.

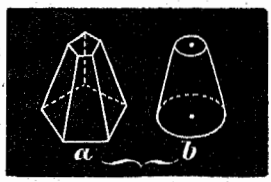
obr. 48. *a*)



obr. 48. *b*)



obr. 49.



c) Vedle těchto dvou slatí klademe *pravidelná těla hranatá*, o nichž v odst. 6. zmíněno. K nim pak druží se *koule*, (sphaera, Kugel), ježto jest tělo oblé a otočením se kruhu kolem průměru vznikne. Střed, poloměr a průměr kruhu stanou se středem, poloměrem a průměrem koule.

1. Poznam. Každá čára, která svým pohybováním plochu nějakou plodí, nazývá se *ploditelkou* (generatrix, die erzeugende Linie); a čára, po které ploditelka jíti má (ku př. obvod podstavy v hranolu), slove *ředitelkou* (directrix, Leitlinie).

2. Poznam. Roviny, mezi nimiž ploditelka se pohybuje plášť sloupu plodíc, mohou též od sebe odchýleny býti: pak se nazývá hranatý sloup *hranolovitým*, a oblý *válcovitým*. — Podobně může jehlan i kužel sříznouti se rovinou od podstavy odchýlenou: čímž vznikne *homolé jehlancovitá* neb *kuželovitá*, čili jehlan neb kužel *šikmo zkomolený*. — Konečně může za podstavu jehlana sloužiti jakýkoliv ploský obrazec křivočarý, a pak slove tělo kuželem v širším smyslu. Podobné platí o válci.

§. XXIII.

O mnohostěnech vůbec.

1. *V každém mnohostěnu jest počet stěn* s *a rohů (hrotů)* r *o* 2 *větší než počet hran* h.

Důkaz. Z pomezných stěn chtějíce složiti mnohostěn mějme z počátku jedinou stěnu p-úhelník: i jest $s_1 = 1, r_1 = p, h_1 = p$: pročež $s_1 + r_1 - h_1 = 1$. K této stěně přiložme stěnu druhou q-úhelník: pomníce, že obě stěny jednou hranou a dvěma rohy k sobě přilehnou, vidíme, že přibude pouze $(q-1)$ hran, a $(q-2)$ rohů: pročež jest $s_2 = s_1 + 1$; $r_2 = r_1 + q - 2$; $h_2 = h_1 + q - 1$; odtud jde $s_2 + r_2 - h_2 = s_1 + r_1 - h_1 = 1$.

K těmto dvěma stěnám přiložme třetí, m-úhelník; i dejme tomu, že jeho x stran připadne na x hran již hotových: tehdy také $(x+1)$ vrcholů jeho připadne na $(x+1)$ rohů již nahoře počítaných; a proto přibude hran pouze $(m-x)$, a rohů $(m-x-1)$, a jest pak $s_3 = s_2 + 1$; $r_3 = r_2 + m - x - 1$; $h_3 = h_2 + m - x$; odkudž plyne $s_3 + r_3 - h_3 = s_2 + r_2 - h_2 = 1$.

Podobným spůsobem přesvědčíme se, že jest $s_4 + r_4 - h_4 = 1$, vůbec $s_n + r_n - h_n = 1$, t. j. dokud mnohostěn není odevšad omezen, jest v něm o jednu hranu méně než stěn i rohů pospolu. Konečně přiložme stěnu poslední: tehdy nepřibude již ani hran ani rohů, ovšem ale jedna stěna: pročež jest $s = s_n + 1$, $r = r_n$, $h = h_n$; z čehož vyplývá $s + r - h = s_n + 1 + r_n - h_n = 2$.

2. *Ploských úhlů na povrchu mnohostěna jest dvakrát tolik co hran.*

Důkaz. Ploských úhlů jest u, tolik, kolik mají stran plochy pomezné; každá hrana vzniká ale ze dvou stran stěn sousedných: jest tedy hran h polovic, co bylo stran, pročež i polovic co jest úhlů, t. j. $u = 2h$, $h = {}^1/_2 u$.

Výsledek. Počet ploských úhlů v mnohostěnu jest sudý, i nemůže býti mnohostěn omezen lichým počtem $(2n+1)$-úhelníků.

§. XXIV.

O hranolu.

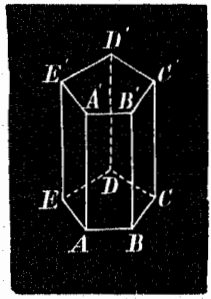
1. Majíce na mysli vznikání hranolu (XXII. 8. *a*) pamatujme:

a) že ploditelka ustavičně zachovává týž směr, a proto že všude jest ku své počáteční poloze rovnoběžná;

b) že na těch místech, kde se mění směr jejího pohybování, hrany pobočné (AA', BB' atd.) vznikají; (obr. 50.)

c) že mezi tím, co se ploditelka pohybuje od vrchole podstavy k vrcholi sousednému (od AA' k BB'), plodí se rovina $ABA'B'$ za plochu pobočnou.

obr. 50.



Z toho poznáváme:

2. *a) Podstavy hranolu jsou rovnoběžné*, (což již v ponětí samém vězí), a *shodné* (§. XIV. 2. d); $ABCDE \cong A'B'C'D'E'$.

b) Všechny hrany pobočné jsou rovnoběžné (odst. 1. *a. b*), a *sobě rovny* (§. X. 12.),

c) Pobočné stěny jsou rovnoběžníky, (plyne z 2. b).

d) Podstavné hrany stejnolehlé jsou rovnoběžné a si rovny, (odst. *c*).

e) Stejnolehlé úhly na podstavách jsou si rovny, (obsaženo již v odst. 2. *a*).

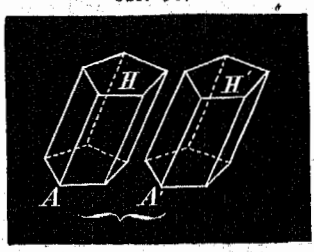
3. *Řez s některou hranou rovnoběžný jest rovnoběžník.* Důkaz dej čtenář.

4. *Řez s podstavou rovnoběžný jest s ní shodný.* Důkaz dej čtenář.

5. *Hranol jest dokonale určen podstavou a polohou i délkou pobočné hrany k podstavě;* (XXII. 8. *a*).

6. *Dva hranoly H i H', v nichž jest jeden roh (A i A') působen třemi stěnami v souhlasném po sobě pořádku střídavě shodnými, jsou spolu shodné.* (obr. 51.).

obr. 51.

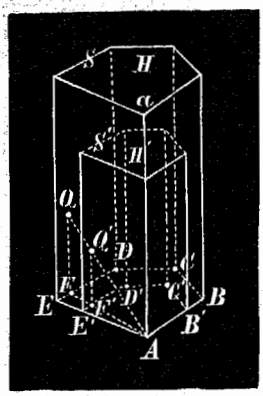


Důkaz. Neboť tehdy jest roh $A \cong A'$ (§. XXI. 2. *a*): pročež se roh A' dá vložiti do rohu A tak, aby oba spolu v jediný splynuly, i musí se pak také stěny, kterými tyto dva rohy se působí, za příčinou své shodnosti pokrývati po dvou stejnolehlých v jednu splývajíce; tehdy ale pokryjí se nejen pobočné hrany A i A' nébrž i všechny zůstatní stejnolehlé, a tím i hořejší podstavy i veškeré stejnolehlé stěny pobočné, tedy celé hranoly $H \cong H'$.

7. *Dva hranoly H i H', v nichž jest jeden roh (A i A') pů-*

soben třemi stěnami v souhlasném po sobě pořádku střídavě si podobnými, jsou si též podobny (obr. 52.).

obr. 52.



Důkaz. Tehdy jest roh $A \cong A'$, (XXI. 2. a); vložme hranol H' do hranolu H, aby rohy A i A' v jediný splynuly, i padnou na se jak stěny tak hrany těch rohů; zůstatní stejnolehlé hrany podstavné budou si rovnoběžné, (BC || B'C', DC || D'C' atd.), poněvadž podstavy samy si podobny jsou, a vrchol A jejich bodem podobnosti se stal, z kteréžto příčiny stejnolehlé body spodních podstav s vrcholem A v jedné přímce leží (Pl. LXXXVIII. 4.); taktéž rovnoběžné budou všecky hrany pobočné, poněvadž jsou rovnoběžné s hranou Aa; jakož i stejnolehlé stěny pobočné, poněvadž leží v ploských úhlech, jejichž ramena střídavě jsou rovnoběžná (X. 10); konečně podstavy hořejší, poněvadž jsou rovnoběžné se společnou podstavou dolejší. Nyní již veďme z vrchole A vnitřkem hranolu kterýmkoliv směrem přímku AQ, kterážto dvě stejnolehlé (a rovnoběžné) stěny S a S' hranolů H i H' protne v bodech Q i Q'. Rovina přímkou AQ položená rovnoběžně s pobočnými hranami protne podstavu přímkou AF, která stěny S a S' v stejnolehlých bodech F i F' na stejnolehlých stranách podstavných seče. I jest pak $AQ:AQ' = AF:AF'$ (§. XIV. 1. *b*); spolu jest $AF:AF':AE:AE' = Aa:Aa' = q$; poněvadž stejnolehlé stěny, jimiž se roh A působí, střídavě podobny jsou: z toho jde $AQ:AQ' = AE:AE' = Aa:Aa' = q$, t. j. poměr stálý, pročež $H \sim H'$, (Pl. LXXXIX. 1.)

§. XXV.

1. Dle polohy pobočné hrany k podstavě rozeznáváme hranol *kolmý* a hranol *šikmý* č. *kosý*, jakož pobočné hrany na podstavě kolmo neb šikmo stojí.

2. Dle počtu pobočných stěn rozeznáváme hranol *troj-*, *čtvero-*, *pěti-*, *n*-boký.

3. Hranol kolmý, který má za podstavu mnohoúhelník pravidelný, slove *pravidelným*.

4. Odlehlost podstavy dolejší od podstavy hořejší nazývá se *výškou* hranolu.

5. Hranol, jehož podstavou jest rovnoběžník, nazývá se *rovnoběžnostěn* (Parallelepipedon); a kolmý rovnoběžnostěn, má-li za podstavu pravoúhelník, slove *pravoúhlým;* je-li omezen samými čtverci, jmenuje se *krychle* n. *kostka* (cubus, Würfel) také *šestistěn* (pravidelný, hexaëder). Rovnoběžnostěn omezený samými kosočtverci, slove *klenec* (Rhomboëder).

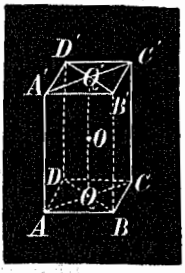
6. Řez, který jde dvěma protějšíma hranama rovnoběžnostěna, nazývá se *úhlopříčným.* Řez na pobočné strany kolmý slove *kolmým.*

§. XXVI.

1. *V rovnoběžnostěnu jsou protější pobočné stěny a) rovnoběžné a b) shodné.* (Obr. 53.)

Důkaz. Neboť jest *a)* $AA' \parallel BB'$, $AD \parallel BC$: pročež rov. $A'AD \parallel$ rov. $B'BC$. *b)* Dále jest $AA' \# B'B$, $AD \# BC$, tedy $\sphericalangle A'AD = \sphericalangle B'BC$, pročež $A'ADD' \cong B'BCC'$.

obr. 53.



Přídavek. Z té příčiny může kterákoliv stěna vzíti se za podstavu dolejší, stěna protější za podstavu hořejší, a čtyři zůstatní za stěny pobočné.

2. *Protější hroty rovnoběžnostěna jsou souměrné.* Neboť boky i kouty jejich jsou si střídavě rovny, a to v pořádku převráceném.

3. Rovnoběžnostěn jest dokonale určen jedním hrotem a délkou jeho tří hran.

4. Ku cvičení:

a) Řezy úhlopříčné, jimiž se společně podstavy protínají (ACC'A', BDD'B'), mají za průsečnici přímku QQ' (obr. 53.), která jest s pobočnými hranami rovnoběžná.

b) Všechny čtyry úhlopříčky (AC', BD', CA', DB', obr. 53.) protínají se v bodě jediném O; a každá přímka tímto bodem na obě protivné strany ku povrchu rovnoběžnostěna vedená rozpoluje se tímto bodem O, a protíná protější stěny (neb i hrany) v bodech stejnolehlých. Proto se O nazývá *středem* tvaru.

5. Pravoúhlý rovnoběžnostěn jest dokonale určen délkou tří hran ve společný hrot se scházejících; krychle pak jedinou hranou.

6. Úhlopříčky v rovnoběžnostěnu pravoúhlém jsou si rovny.

§. XXVII.

O jehlanu.

1. Jehlan má za podstavu mnohoúhelník, a za pobočné stěny trojúhelníky v jediný bod (vrchol) se sbíhající (XXII. 8. b.).

2. Jehlan jest dokonale určen podstavou a délkou i polohou jedné hrany pobočné (XXII. 8. *b.*).

3. Přímka s vrchole na podstavu kolmá nazývá se *výškou* jehlana.

4. Dle počtu pobočných stěn rozeznáváme jehlany *troj-*, *čtvero-*, *pěti-*, vůbec *n*-boké.

5. Jehlan, který má za podstavu mnohoúhelník pravidelný, a veškeré pobočné hrany si rovné, nazývá se obyčejně *pravidelným.*

6. Řez vedený vrcholem a dvěma pobočnými hranami, které nejsou sousedné, nazývá se *příčným.*

§. XXVIII.

1. *Řez s podstavou jehlana rovnoběžný jest s ní podobný, a ploské obsahy jejich jsou k sobě ve zčtvercovaném poměru odlehlostí jejich od vrchole.*

Důkaz §. XIV. 1. *e), f).*

2. Řezy příčnými dá se každý jehlan na samé trojboké rozděliti.

3. Dva jehlany, v nichž jest jeden roh působen třemi stěnami v souhlasném po sobě pořádku střídavě shodnými, jsou spolu shodné.

4. Dva jehlany, v nichž jest jeden roh působen třemi stěnami v souhlasném po sobě pořádku střídavě podobnými, jsou si podobny.

5. V jehlanu pravidelném jsou:

a) všechny pobočné stěny trojúhelníky rovnoramené a spolu shodné;

b) všechny rohy na podstavě jsou lichoboké a spolu shodné;

c) roh na vrcholi jest pravidelný.

6. Postavivše ve středu pravidelného mnohoúhelníka kolmici na rovinu jeho položíme-li některým v té kolmici bodem a stra-

nami daného mnohoúhelníka trojúhelníky: vznikne jehlan pravidelný.

Důkazy těchto vět zůstaveny jsou čtenářovi.

§. XXIX.

O hranatých tělesích pravidelných.

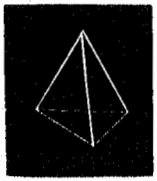
1. *a*) Hranatých těles pravidelných jest patero: čtyrstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn;

b) čtyrstěn, (tetraëder), jest omezen čtyrmi trojúhelníky, má 4 hroty trojboké, 12 úhlů ploských, 6 hran; (obr. 54.)

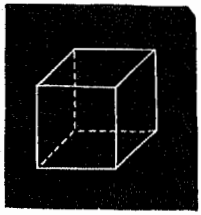
c) *šestistěn*, (hexaëder), jest omezen 6 čtverci, má 8 hrotů trojbokých, 24 úhlů ploských, 12 hran; (obr. 55.)

d) osmistěn, (octaëder), jest omezen 8 trojúhelníky, má 6 hrotů čtyrbokých, 24 úhlů ploských, 12 hran; (obr. 56.)

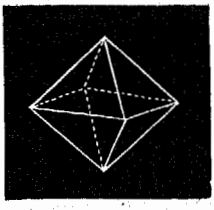
obr. 54.



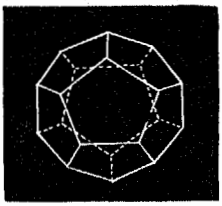
obr. 55.



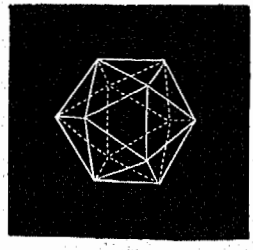
obr. 56.



obr. 57.



obr. 58.



e) *dvanáctistěn*, (dodekaëder), jest omezen 12 pětiúhelníky, má 20 hrotů trojbokých, 60 úhlů ploských, 30 hran; (obr. 57.)

f) *dvacetistěn*, (ikosaëder), jest omezen 20 trojúhelníky, má 12 hrotů pětibokých, 60 úhlů ploských, 30 hran; (obr. 58.)

Důkaz. a). Je-li pravidelný mnohostěn omezen (n+2)-úhelníky, a jsou-li hroty jeho (x+2)-boké: činí součet ploských úhlů

jeden hrot skládajících $(x+2).\frac{n.2R}{n+2}$, a jest (dle XVI. 2.)

$(x+2).\frac{n.2R}{n+2}<4R$; odtud jde $n.x<4$.

Výmince $n.x<4$ vyhověti lze na způsob paterý:

předně $n=1$, $x=1$; za druhé $n=2$, $x=1$; za třetí $n=1$, $x=2$; za čtvrté $n=3$, $x=1$; za páté $n=1$, $x=3$. Jest tedy patero těles pravidelných.

b) Je-li $n=1$, $x=1$, vznikne čtyrstěn; neboť stěny jsou trojúhlé, a hroty trojboké; i bude (dle §. XXIII.) $s+r=h+2$; zde pak $s=\frac{1}{3}u$, $r=\frac{1}{3}u$, $h=\frac{1}{2}u$, pročež $\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}u=\frac{1}{2}u+2$, odtud jde $u=12$, $h=6$, $u=4$, $s=4$: jakož tvrzeno v *b*).

c) Je-li $n=2$, $x=1$, vznikne *šestistěn;* neboť tehdy jsou stěnami $(n+2)=4$-úhelníky, a hroty jsou $(x+2)=3$-boké: a proto jest $s=\frac{1}{4}u$, $r=\frac{1}{3}u$, $h=\frac{1}{2}u$: tedy (dle §. XXIII.) $\frac{1}{4}u+\frac{1}{3}u=\frac{1}{2}u+2$, odtud jde $u=24$, $h=12$, $r=8$, $s=6$, jako tvrzeno v *c*).

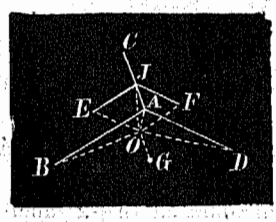
d) Je-li $n=1$, $x=2$, vznikne *osmistěn;* neboť tehdy jsou stěnami $(n+2)=3$-úhelníky, a hroty jsou $(x+2)=4$-boké: proto jest $s=\frac{1}{3}u$, $r=\frac{1}{4}u$, $h=\frac{1}{2}u$; tedy (dle §. XXIII.) $\frac{1}{3}u+\frac{1}{4}u=\frac{1}{2}u+2$, odkudž opět $u=24$, $h=12$, $r=6$, $s=8$, jako tvrzeno v *d*).

e) Je-li $n=3$, $x=1$, vznikne *dvanáctistěn;* neboť tehdy jsou stěnami $(n+2)=5$-úhelníky, a hroty jsou $(x+1)=3$-boké: proto jest $s=\frac{1}{5}u$, $r=\frac{1}{3}u$, $h=\frac{1}{2}u$, tedy (dle XXIII.) $\frac{1}{5}u+\frac{1}{3}u=\frac{1}{2}u+2$; odtud jde: $u=60$, $h=30$, $r=20$, $s=12$, jakož tvrzeno v *e*).

f) Je-li $n=1$, $x=3$, vznikne *dvacetistěn;* neboť tehdy jsou stěnami $(n+2)=3$-úhelníky, a hroty jsou $(x+2)=5$-boké: $s=\frac{1}{3}u$, $r=\frac{1}{5}u$, $h=\frac{1}{2}u$, pročež (dle XXIII.) opět $\frac{1}{3}u+\frac{1}{5}u=\frac{1}{2}u+2$, odtud jde $u=60$, $h=30$, $r=12$, $s=20$, jako tvrzeno v *f*).

2. *Kolmice na stěnách pravidelného mnohostěna v jejich středech vztýčené protínají se vesměs v bodě jediném, jenž má ode všech stěn stejné, a ode všech rohů též stejné vzdálenosti.*

obr. 59.



Důkaz. Buďtež ABC, ACD, ABD (obr. 59.) tři stěny pravidelného mnohostěna, a E, F, G, středy jejich. Veďme ku prostředku J hrany AC ze středů F a E přímky FJ a EJ, i bude $FJ \perp AC$, $EC \perp AC$: a proto jest $AC \perp$ rov. FJE (IV. 1.); z té opět příčiny jest rov. $CAD \perp$ rov. FJE, i rov. $CAB \perp$ rov. FJE

(XI. 1.); z té pak příčiny padnou kolmice v bodech F a E na stěnách CAD a CAB strmící do roviny FJE (XI. 3. *b*), v kteréžto se — nejsouce rovnoběžné — protínají v bodě O. Bod O má pak od vrcholů jedné i druhé stěny rovné vzdálenosti (VII. 2. a.), jest tedy $OA = OD$, $OA = OB$, t. j. týž bod O má ode tří vrcholů třetí stěny ABD rovné vzdálenosti. Spustíme-li tedy s bodu O na stěnu ABD kolmici OG, padne pata její do středu G kruhu o trojúhelník ABD, pročež o celou stěnu, opsaného (VII. 2. *b*.), i jest pak DG poloměr tohoto kruhu a spolu $DG = DF$, $DO = DO$, $\sphericalangle OFD = \sphericalangle OGD = R$, pročež $\triangle OGD \cong \triangle OFD$, tudíž $OG = OF$; a podobně $OG = OE$. Pomníce, že v bodu G na stěnu ABD jen jednu kolmici vztýčiti lze, uzavíráme, že kolmice tato bodem O prochází, kde se kolmice na sousedných stěnách uprostřed nich vztýčené protínají, a že svou délkou se jim rovná, jakož tvrzeno. Že bod ten ode všech vrcholů má rovné vzdálenosti, též během důkazu toho poznali jsme.

1. *Dodatek.* Bod O nazývá se *středem* mnohostěnu pravidelného.

2. *Dodatek.* Paprsek OA jest od hran AB, AC, AD, stejně odchýlen, a stojí na rovině BCD kolmo. Důkaz dej čtenář.

§. XXX.

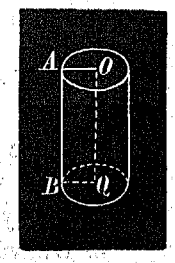
O válci.

1. *Podstavy válce jsou kruhy shodné* (XIV. 2. *d.*).

2. *Středy podstav jsou body stejnolehlé,* t. *přímka od středu jedné podstavy rovnoběžně s ploditelkou vedená prochází středem podstavy druhé.*

Důkaz. Buď AB (obr. 60.) jednou polohou ploditelky, Q středem podstavy spodní, $OQ \parallel AB$; rovina $ABQO$ protne pak obě podstavy přímkama $BQ \parallel AO$ (X. 2.); z rovnoběžnosti té jde $QB = OA$: pročež jest O středem podstavy hořejší.

obr. 60.



3. Přímka OQ (obr. 60.), jíž se spojují středy podstav, nazývá se *osou* válce; a každá poloha ploditelky podstavami omezené *stranou* jeho.

Všechny strany válce jsou s jeho osou rovnoběžné a jí rovny. Každá přímka od některého bodu ředitelky s osou válce rovnoběžně vedená padne celá do pláště jeho; musíť

splynouti s ploditelkou, ježto jedním bodem nelze než jednu rovnoběžku vésti.

4. Dle polohy osy ku podstavě rozeznáváme:

a) válec *přímý* č. *kolmý*, jehož osa kolmo, a

b) válec *šikmý* č. *kosý*, jehož osa šikmo na podstavě stojí.

5. Odlehlost podstav jedné ode druhé nazývá se *výškou* válce. Osa přímého válce jest spolu výškou jeho.

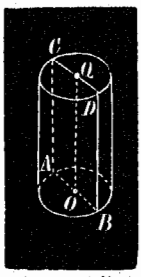
6. Válec přímý, jehož osa či strana se rovná průměru podstavy, slove *rovnostraným*.

§. XXXI.

1. *Řez válce s podstavou rovnoběžný jest s ní shodný.* Důkaz dej čtenář.

2. *Řez válce položený osou jeho jest rovnoběžník* (obr. 61.)

obr. 61.



Důkaz. Rovina osou OQ válce vedená protínej podstavy jeho přímkama $AB \parallel CD$ (X. 2.); a že jsou průměry shodných kruhů, jest $AB = CD$. Vedeme-li tedy přímky AC a BD, jest $AC \# BD$; a poněvadž strany CD a AB osou OQ rozpoleny jsou, jest též $CA \# OQ \# DB$; a z té příčiny padnou CA i DB celé do pláště válce (XXX. 3.). Jest tedy řez ten $ABDC$, a sice rovnoběžník.

3. Věty ku cvičení:

a) Řez válce s osou rovnoběžný jest rovnoběžník.

b) Řez válce přímého s osou rovnoběžný jest pravoúhelník.

c) Řez válce šikmého s osou rovnoběžný jest pravoúhelník jen tehdy, když jest kolmo na rovinu promitací pravoúhlého průmětu osy; jinak jest kosoúhelník a sice tím šikmější, čím méně od řečené roviny promitací odchýlen jest.

d) Řez válce rovnostraného osou vedený jest čtverec; každý jiný s osou rovnoběžný jest obdélník.

§. XXXII.

1. Válec jest dokonale určen podstavou a délkou i polohou osy.

2. Dva válce, mají-li shodné podstavy i osy co do polohy i co do délky, jsou spolu též shodné.

3. Dva válce, jejichž osy k podstavám mají polohu jednostejnou, a co do délky k sobě se mají jako poloměry podstav, jsou si podobny.

Důkaz čtenáři ponechán, dá se vésti podobným spůsobem, jako v §. XXIV. 7.

4. Všechny válce rovnostrané jsou si podobny.

2 cont

§. XXXIII.

O kúželi.

1. Přímka, s vrchole kužele ku kterémukoliv bodu na obvodě podstavy vedená, padne celá do pláště; splyneť s ploditelkou. Každá taková přímka slove *stranou* kužele.

2. Přímka, s vrchole ku středu podstavy vedená nazývá se *osou* kužele.

3. Dle polohy osy k podstavě rozeznáváme:

a) kužel *kolmý* č. *přímý*, jehož osa kolmo, a

b) kužel *kosý* č. *šikmý*, jehož osa na podstavě šikmo stojí.

4. Kolmice s vrchole na podstavu spuštěná slove *výškou* kužele. — Osa kužele kolmého jest i výškou jeho.

5. Všechny strany kužele přímého jsou si rovny. (VII. 2. a.)

6. Přímý kužel, jehož strana se rovná průměru podstavy, slove *rovnostraným*.

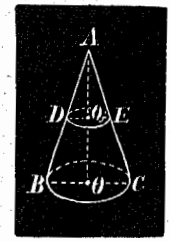
7. Věta ku cvičení:

V kuželi kosém jest strana, která leží v promitací ploše osy naproti odchylce osy této, ze všech nejkratší; a strana, která v této rovině naproti doplňku osové odchylky leží, jest ze všech nejdelší; zůstatní strany jsou tím delší, čím více pata jejich na obvodě podstavy od paty strany nejkratší vzdálena jest; z nich pak jsou po dvou sobě rovny, a sice ty, jichž paty rovné odchylky mají od paty strany nejkratší.

§. XXXIV.

1. *Řez osou kužele vedený jest trojúhelník* (obr. 62).

obr. 62.



Důkaz. Řez ten protne podstavu průměrem *BC;* přímky *AB* i *AC* padnou do roviny řezu (poněvadž v ní leží bodové *A*, *B*, *C*), i do pláště kužele (XXXIII. 1.) jsou tedy průsečnicemi řezu i pláště, a řez *ABC* trojúhelník.

2. *Řez s podstavou kužele rovnoběžný jest kruh; střed jeho vězí v ose a ploský obsah jest k obsahu podstavy v zčtvercovaném poměru vzdáleností vrchole od ploch těchto.*

Důkaz. Podstava *OBC* i řez *QDE* jsou obrazce stejnohledné (XII.), a že roviny jejich leží rovnoběžně, jsou tyto obrazce sobě podobny (XIV. 1. *e*), tedy jest *QDE* kruh jako *OBC*. Body *Q* i *O* v rovinách *Q* i *O* na společném paprsku ležící jsou stejnolehlé, rovněž body *D* i *B*, a proto také příčky *QD* i *OB*, kteréžto tedy jsou v poměru stálém (XIV. 1. *b*.); a poněvadž *OB* má délku stálou, musí též *QD* míti délku stálou, t. j. bod *Q* jest ode všech bodů na obvodě řezu stejně vzdálen, a proto středem řezu. Konečně jsou ploské obsahy řezu a podstavy v čtvercovém poměru stejnolehlých úseček paprsků (XIV. 1. *f*.) tedy též vzdáleností vrchole od ploch řečených, ježto vzdálenosti tyto jsou stejnolehlé úsečky paprsku.

3. Věty ku cvičení:

a) Řezy vedené osou rovnostraného kužele jsou trojúhelníky rovnostrané a shodné.

b) Řezy vedené osou přímého kužele jsou trojúhelníky rovnoramené a shodné.

c) Řezy vedené osou kužele kosého jsou trojúhelníky nerovnostrané a jen po dvou shodné; dva z nich ale jsou liché, a z těchto opět jeden jest rovnoramený. Které to jsou?

§. XXXV.

1. Kužel jest dokonale určen podstavou a polohou i délkou osy.

2. Dva kužele jsou shodné, majíli shodné podstavy a shodné osy co do délky i co do polohy její k podstavě.

3. Dva kužele jsou si podobny, mají-li osy jejich k podstavám jednostejnou polohu, a jsou-li délky os k průměrům podstav v poměru přímém.

Důkaz zůstavuje se čtenářovi.

4. Všechny kužele rovnostrané jsou si podobny.

§. XXXVI.

O koули.

1. Koule jest dokonale určena poloměrem.

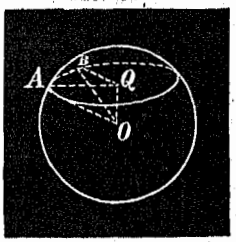
2. Všechny koule jsou si podobny.

3. *Řez koule rovinou učiněný jest kruh; a kolmice se středu koule na plochu řezu spuštěná jde středem jeho* (obr. 63).

Důkaz. Buď *Q* řez koule *O*; *OQ* kolmice se středu koule na plochu řezu spuštěná; z bodu *Q* veď k obvodu řezu přímky

QA, QB, a ze středu koule veď poloměry OA, OB; i vzniknou trojúh. OQA, OQB pravoúhlé i shodné majíce podpony $OA = OB$ si rovné a odvěsnou OQ společnou: pročež jest $QA = QB$, t. bod Q má ode všech bodů na obvodě řezu rovné vzdálenosti, čímž věta dokázána jest.

obr. 63.

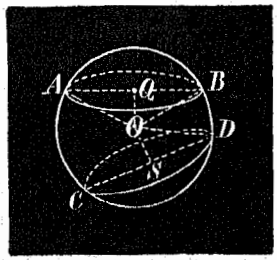


4. *Středy řezů* (kruhů) *rovnoběžných vězí ve společné kolmici.*

5. *Průměry (tedy i poloměry) řezů jsou tím větší, čím rovina jejich středu koule jest bližší; průměr řezu středem koule vedeného jest ze všech největší a průměru koule roveň* (obr. 64).

Důkaz. Buďte O střed koule, Q i S středy dvou řezů, a $OQ > OS$; úhlem QOS (tedy středem koule) veď třetí řez ABD, jehož střed jest O, poněvadž $OA = OB = OD$, a poloměr jeho OB poloměru koule roveň. Třetí řez tento protíná prvé dva průměroma AB i CD, kteréžto spolu jsou tetivami kruhu třetího, a (dle Pl. LXXV. 2. *b.*) $AB < CD$. Konečně patrno $OB > QB$, $OD > SD$.

obr. 64.



Dodatek. Znamenáme-li poloměry koule i řezu a vzdálenost řezu od středu koule písmeny r, ϱ, v, jde z pravoúhlého trojúh. OQA (ob. 63.) dle věty Pythagorovy $\varrho^2 = r^2 - v^2$. Kterak se z tohoto vzorce vyvesti dají věty v odst. 3. a 5. vyslovené?

6. Řez koule s rovinou středem jeho položenou nazývá se kruhem *největším* n. *hlavním.*

7. Hlavním kruhem dělí se koule na dvě polovice, jimž *polokoule* (hemisphaera) díme; každým jiným kruhem dělí se koule na dvě části nerovné, z nichž každá *úsečí* n. *skrojkem* (segmentum), a křivý povrch její *vrchlíkem* (calotte) se nazývá. Kolmice na kruhové podstavě v středu jejím strmící a k vrchlíku sahající slove *výškou* skrojku.

Část koule mezi dvěma kruhy rovnoběžnýma jmenuje se *pás* (zone) a odlehlost řečených kruhů *výška* pásu.

8. *Sférická vzdálenost dvou bodů* A i D (obr. 64.) na povrchu

koule ustanovuje se obloukem ABD hlavního kruhu bodoma A i D vedeného mezi těmato bodoma obsaženým.

Sférická vzdálenost bodu B (obr. 64.) na povrchu koule *od obvodu kruhu* některého S ustanovuje se obloukem BD hlavního kruhu OBD na kruhu S kolmého, sahajícím od bodu B až po obvod kruhu S.

§. XXXVII.

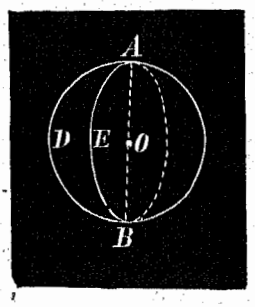
1. Konce průměru na povrchu koule nazývají se body *protějšími*.

2. Konce průměru na hlavním kruhu kolmého slovou *póly* (*točny*) hlavního kruhu; a hlavní kruh jmenuje se *polárnice* (točnice, Polare) řečených dvou bodů protějších. Průměr póloma jdoucí zove se *osou* kruhu, na jehož rovině kolmo strmí.

3. *Každý hlavní kruh póloma vedený stojí na polárnici kolmo.* (XI. 1.)

4. *Průsečnice dvou hlavních kruhů jest průměrem koule* (obr. 65).

obr. 65.



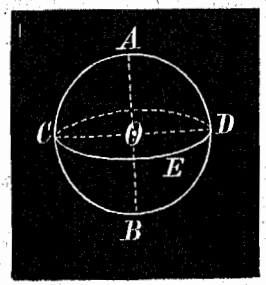
Důkaz. Buďtež A a B průseky dvou hlavních kruhů ADB i AEB na povrchu koule, jejíž střed jest O: tehdy leží bodové A, O, B, na průsečnici těch kruhů, pročež v jediné přímce (I. 7.): a ježto průsečnice AB jde středem koule, jest průměrem jejím.

Z této věty jde:

5. *Každé dva kruhy hlavní rozpolují se na vzájem.*

6. *Každý kruh póloma vedený dělí se póloma a polárnicí na čtyry čtvrti.*

obr. 66.



Důkaz. Buďte (obr. 66.) A a B póly kruhu hlavního CED; $ACBD$ hlavní kruh póloma vedený; jsou pak AB i CD tohoto kruhu průměry na sobě kolmé, pročež

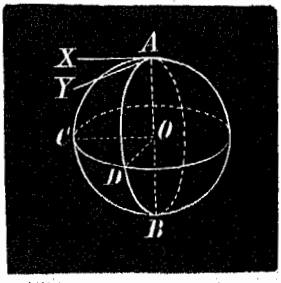
$arc.\ AC = arc.\ CB = arc.\ BD = arc.\ DA.$

7. *Má-li bod* **A** *na povrchu koule ode dvou bodů* **C**, **D** *hlavního kruhu, které nejsou protějšími, vzdálenost* $^1/_2\pi$ *(čtvrt kruhu), jest pólem jeho* (obr. 67).

Důkaz. Položivše hlavní kruhy ACO,

ADO máme dle podmínky $AC = {}^1/_2\pi$, $AD = {}^1/_2\pi$, pročež $\sphericalangle AOC = R$, $\sphericalangle AOD = R$, pročež $AO \perp rov. CDO$, (IV. 1.).

obr. 67.



8. *Jsou-li dva hlavní kruhy* **ACO**, **ADO** *na třetím* **CDO** *kolmo, jest jejich průsek* **A** *na povrchu koule pólem kruhu třetího.* (obr. 67.)

Důkaz. Neboť tehdy jest průsečnice AO rovin jejich na rovině kruhu COD kolmo (XI. 4.).

9. *Všechny hlavní kruhy na společném jiném kruhu kolmé, jdou pólem jeho protínajíce se průměrem koule společným* (osou kruhu), *na němž kolmo strmí.*

§. XXXVIII.

1. Dvěma hlavníma kruhy dělí se koule na čtyry části, jež *klíny* n. *člunky*, a křivé povrchy jejich (sférickými č. kulovými) *dvojúhelníky* č. *cípy* zoveme.

2. Úhel *XAY* (obr. 67.), jejž svírají tečné dvou kruhů s koulí se protínajících sestrojené na společném průseku jejich *A*, nazývá se *úhel kulový* č. *sférický*, a rovná se odchylce *COD* rovin kruhů těchto (IX. 2.). Bod *A* slove *vrcholem* úhlu sférického.

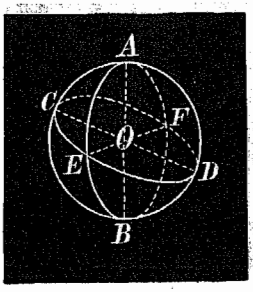
3. Oba sférické úhly dvojúhelníka jsou si rovny.

4. Vezme-li se poloměr za míru kruhu svého, a za míru úhlů středový úhel, jehož příslušný oblouk má délku poloměru: tehdy jest poměrné číslo oblouku rovno poměrnému číslu úhlu středového (Pl. CVIII. 3.), i říká se pak, že úhel za míru má příslušný oblouk kruhový, neb i naopak. Z toho pak jde, že sférický úhel *XAY* (obr. 67.) měřiti lze obloukem *CD* polárnice *CDE* mezi stranami č. rameny *AC* i *AD* obsaženým.

§. XXXIX.

1. Třemi hlavními kruhy, které nemají jedinou průsečnici, dělí se koule na osm částí, jimž *kulové* č. *sférické jehlany*, a křivým povrchům jejich *kulové* č. *sférické trojúhelníky* díme (obr. 68). Oblouky, jimiž sférický trojúhelník omezen jest, jmenují se *strany* jeho.

obr. 68.



Z osmi těchto trojúhelníků nazývají se ty, které mají jednu stranu společnou, *vedlejšími* (ku př. *CBE* i *DBE*); které mají jeden vrchol společný, *vrcholovými* (ku př. *CBE* i *DBF*); a ty, jejichž vrchole jsou střídavě body protější, *protějšími* (ku př. *CBE* i *DAF*).

Ku každému sférickému trojúhelníku náleží jeden protější, tři vedlejší a tři vrcholové.

2. Ježto se úhly *AOC*, *AOE*, *COE* (obr. 68.) měří příslušnými oblouky *AC*, *AE*, *CE*, tedy stranami trojúhelníka sférického *ACE*, a naopak; a ježto sférické úhly *CAE*, *AEC*, *ECA* rovnají se odchylkám rovin *CAO*, *AOE*, *EOC* od rovin *AOE*, *EOC*, *COA*: pročež věty o trojúhelníku tělesném *OACE* (§. XVI. XVII.) dokázané mají platnost též o trojúhelníku sférickém *ACE*, a sice:

a) Jedna strana jest menší než součet druhých dvou stran (XVI. 1.).

b) Součet všech tří úhlů jest větší než π (úhel přímý), a menší než 3π (XVI. 4.). — Rozdíl mezi součtem všech tří úhlů a mezi π slove *nadbytkem* sférickým (excessus).

c) Součet všech tří stran jest menší než obvod 2π kruhu; (XVI. 2.).

d) V trojúhelníku rovnorameném jsou úhly na třetí straně si rovny (XVII. 1.).

e) V trojúhelníku rovnostraném jsou všechny úhly si rovny (XVII. 2.).

f) Jsou-li v trojúhelníku dva úhly si rovny, jsou i protější strany si rovny (XVII. 3.).

g) Trojúhelník, jehož všechny úhly si jsou rovny, jest rovnostraný (XVII. 4.).

h) Proti větší straně leží větší úhel, a proti většímu úhlu větší strana (XVII. 5.).

Všechny tyto věty mají platnost, pokud strana trojúhelníka menší jest než π (polokruh).

3. Věty ku cvičení:

a) Dva vedlejší trojúhelníky doplňují se na dvojúhelník; úhly jejich proti společné straně ležící jsou si rovny; druhé a třetí úhly jejich doplňují se stří-

davě na úhel přímý π, a druhé i třetí strany jejich doplňují se střídavě na polokruh π.

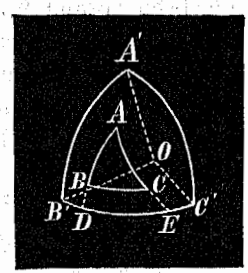
b) V trojúhelnících vrcholových jsou úhly, které společný vrchol mají, jakož i strany proti nim ležící střídavě si rovny; druhé a třetí úhly doplňují se střídavě na úhel přímý π, a druhé i třetí strany doplňují se střídavě na polokruh π.

c) Trojúhelníky protější jsou souměrné.

§. XL.

1. Trojúhelník sférický $A'B'C'$, jenž za své vrcholy má póly stran jiného trojúhelníka sférického ABC, nazývá se *polárným*. (obr. 69.)

obr. 69.



2. *Je-li ze dvou sfér. trojúhelníků jeden* (A'B'C') *polárným druhého* (ABC), *jest i druhý* (ABC) *polárným prvého* (A'B'C'). (obr. 69.)

Důkaz. Poněvadž hlavní kruh $A'B'$ prochází póloma A' i B' stran BC i AC, pročež stojí na rovinách jejich a tyto na něm kolmo (XXXVII. 3.); a poněvadž roviny BCO i ACO na hlavním kruhu $A'B'$ kolmo strmí, jest průsek jejich C na povrchu koule pólem jeho (XXXVII. 8.). Podobně lze dokázati, že jest B pólem strany $A'C'$, A pólem strany $B'C'$.

3. *V trojúhelnících polárných doplňují se strana jednoho s úhlem polárným druhého na* π. (obr. 69.)

Důkaz. Prodlužme strany AB i AC až k polárnici $B'C'$ bodu A; i jest pak $\sphericalangle A = DE$ (XXXVIII. 4.), čili $\sphericalangle A = B'E - B'D$; a že jest B' pólem strany AC, jest $B'D = \frac{1}{2}\pi$ (XXXVII. 6.), pročež $\sphericalangle A = \frac{1}{2}\pi - B'D$. Dále jest $B'C' = B'D + DC'$, a že C' jest pólem strany AB, též $DC' = \frac{1}{2}\pi$, tedy $B'C' = B'D + \frac{1}{2}\pi$: odtud jde sečtením $\sphericalangle A + B'C' = \pi$.

Poznam. Věty v tomto §. pronešené souvisí s větami §. XIX. a dají se z nich vyvesti. Kterak?

4. *Polárný trojúhelník trojúhelníka rovnostraného, rovnoramenného, různostraného jest opět rovnostraný, rovnoramený, různostraný.*

Knihy druhé část druhá.

O ploském obsahu povrchu těles.

§. XLI.

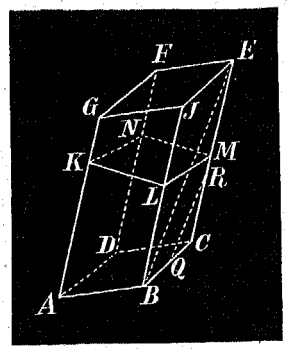
O povrchu těl hranatých.

1. Ploský obsah povrchu tělese hranatého rovná se součtu ploských obsahů všech ploch pomezných, i najde se sečtením jich, prvé o sobě dle pravidla planimetrie vyhledaných. Ve zvláštních případech ale dá se počet zjednodušiti.

2. Povrch *hranolu* rovná se plášti a dvojnásobné podstavě: $H = P + 2B$. — Neboť obě podstavy jsou shodné, pročež jen jednu změřiti třeba.

3. *Plášť hranolu* rovná se součinu z obvodu řezu (na pobočnou hranu) kolmého a z hrany pobočné.

obr. 70.



Důkaz. Buď *KLMN* (obr. 70.) řez na pobočnou hranu *AG*, tedy na všechny zůstatní hrany pobočné kolmý. *J* jest pak, znamenáme-li délku pobočné hrany písmenem *h*, ploský obsah:

$ABJG = h \,.\, KL$; $BCEJ = h \,.\, LM$; $CDFE = h \,.\, MN$, $DAGF = h \,.\, NK$,

pročež sečtením $P = h(KL + LM + MN + NK)$, jakož tvrzeno.

4. *Plášť hranolu přímého* (kolmého) rovná se součinu z obvodu podstavy a z hrany pobočné.

5. *Plášť* n-*bokého hranolu pravidelného* rovná se součinu z *n*-násobné hrany podstavné a z hrany pobočné.

6. Nelze-li pobočnou hranu $CE = h$ (obr. 70.) pohodlně změřiti, určí se pouze směr úhlopříčné *BE*, a vede se z přístupného bodu R přímka $RQ \parallel EB$; i jest pak $CE : CR = CB : CQ$, odkudž $h = CE = CR \,.\, \frac{CB}{CQ}$. Dají-li se pak přímky CR, CB, CQ pohodlně změřiti, najde se i délka *h*.

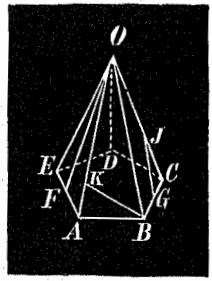
§. XLII.

1. *Povrch* jehlana rovná se součtu podstavy a pláště: $J = B + P$.

2. *Plášť* jehlana rovná se součtu trojúhelníků pobočných.

3. *Plášť* n-*bokého jehlana pravidelného* rovná se *n*-násobnému trojúhelníku pobočnému; aneb: polovičnému součinu z hrany podstavné a kolmice s vrchole jehlana na tuto hranu vedené: $P = {}^1/_2 n \,.\, AE.OF$ (obr. 71).

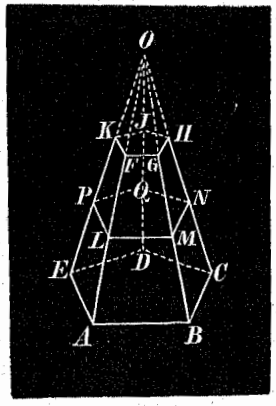
obr. 71.



Poznam. a). Není-li pohodlno měřiti výšku trojúhelníka pobočného (k. p. COB obr. 71.) může se z bodu přístupného *J* vésti přímka $JG \parallel OB$, a změřiti se trojúhelník *JGC*; odtud pak bude $\triangle JGC : \triangle OBC = GC^2 : BC^2$, poněvadž $\triangle JGC \sim \triangle OBC$; pročež $\triangle OBC = \triangle JGC \,.\left(\frac{BC}{GC}\right)^2$. — Tím způsobem lze také, je-li toho potřeba, nalézti délku hrany pobočné OC; jest totiž $OC : JC = BC : GC$ odtud $OC = JC \,.\, \frac{BC}{GC}$.

b) Je-li jehlan pravidelný, lze trojúhelník (rovnoramený) *OAB* též tímto spůsobem najíti: Poloměrem *BA* kolem středu *B* vedeme kruhový oblouk, jenž hranu *OA* protne bodem *K*: i jest pak $\triangle ABK \sim \triangle OAB$, a pročež $\triangle OAB : \triangle BAK = AB^2 : AK^2$, odkudž $\triangle OAB = \triangle BAK.\left(\frac{AB}{AK}\right)^2$. Změříme-li tedy $\triangle BAK$ a přímky AB, AK, najdeme též $\triangle OAB$. Podobným spůsobem lze vyhledati délku pobočné hrany *OA* a výšku trojúhelníka pobočného.

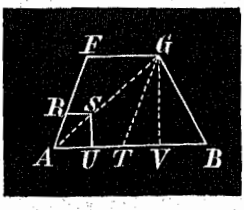
obr. 72. a.



4. Povrch jehlana rovnoběžně zkomoleného (obr. 72. a.) ABCDEFGHIK rovná se součtu obou podstav a pláště: $J = B + b + P$.

Pozn. a). Není-li pohodlno, hořejší podstavu přímým spůsobem měřiti, najde se jedna strana jeho (ku př. FG v lichoběžníku ABFG obr. 72. b.) takto: Určí se směr úhlopříčné *AG* (obr. 72.); a v trojúhelníku *ABG* najde *AG*, jako v odst. 3. a) pověděno. Z přístupného bodu *R* veď nyní $RS \parallel AB$, i bude $FG : RS = AG : AS$, odtud $FG = RS.\frac{AG}{AS}$.

obr. 72. b.



Aneb: podaří-li se vypátrati na přístupné hraně *AB* bod T tak, aby směr $TG \parallel AF$ byl, jest $FG = AT$.

Majíce již stranu FG a znajíce ploskost B podstavy spodní, dostaneme ploskost b podstavy hořejší, poněvadž $B \sim b$, dle úměry $b : B = FG^2 : AB^2$, tedy $b = B.\left(\frac{FG}{AB}\right)^2$; čili dosadíme-li místo FG hodnotu nalezenou $b = B.\left(\frac{RS.AG}{AB.AS}\right)^2 = B.\left(\frac{AT}{AB}\right)^2$.

b) Podobným spůsobem dá se nalezti výška GV (obr. 72.) lichoběžníka. Spustíme-li $SU \perp AB$, bude $GJ : SU = AG : AS$, tedy $GJ = SU.\frac{AG}{AS}$: znajíce výšku a obě strany rovnoběžné najdeme ploský obsah boku.

5. *Plášť rovnoběžně zkomoleného jehlana pravidelného* rovná se součinu z obvodu řezu prostředního (prostředkem pobočné hrany rovnoběžně s podstavou vedeného) a z výšky kteréhokoliv lichoběžníka pobočného.

Důkaz. Buď (obr. 72. a.) AH zkomolený jehlan pravidelný, $EP = PK$, $LMNQP \parallel ABCDE \parallel FGHJK$: jsou pak všechny tyto tři rovnoběžné plochy stejnohlednými, tedy též řez LMNQP obrazec pravidelný; pročež jeho obvod $= n.PL$. Ploský obsah lichoběžníka $AFKE = PL.v$, znamená-li v výšku jeho. A ježto všechny boky jsou shodné, pročež jest plášť $P = n.PL.v$.

§. XLIII.

1. *Ploský obsah povrchu tělese pravidelného* rovná se tolikanásobné ploše jedné, kolik jich tělo má.

2. Je-li a strana, najde se ploský obsah pravidelného trojúhelníka $= \frac{1}{4}a^2.\sqrt{3}$, čtverce $= a^2$, a pětiúhelníka $= \frac{5}{4}a^2.\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, pročež povrch pravidelného čtyrstěna $= a^2\sqrt{3}$; šestistěna $= 6a^2$, osmistěna $= 2a^2\sqrt{3}$, dvanáctistěna $= 3a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, dvacetistěna $= 5a^2\sqrt{3}$.

§. XLIV.

O povrchu těles oblých:

1. válce kolmého.

1. *Povrch válce kolmého* rovná se součtu dvojnásobné podstavy a pláště: $V = 2B + P$.

2. *Plášť válce kolmého* dá se (v mysli) rozvinouti na rovinu i stane se z něho pravoúhelník, jenž má za podstavu obvod válce, a za výšku stranu n. výšku jeho; pročež díme:

Plášť válce kolmého rovná se součinu z obvodu podstavy a z výšky jeho.

Je-li tedy r poloměr podstavy, v výška válce, bude obvod $O = 2\pi r$, a plášť $P = O.v = 2\pi r.v$; každá podstava $= \pi r^2 = {}^1/_2 O.r = \frac{O^2}{4\pi}$; pročež celý povrch $V = O.v + \frac{O^2}{2\pi} = 2\pi rv + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+v)$.

Dodatek. Ve válci rovnostraném jest $v = 2r$; bude tedy $P = \pi v^2 = 4\pi r^2 = \frac{O^2}{\pi}$; $B = \pi r^2 = {}^1/_4 \pi v^2 = \frac{O^2}{4\pi}$; a $V = 6\pi r^2 = {}^3/_2 \pi v^2 = \frac{3O^2}{2\pi}$.

3. Najdi vzorce pro ploský obsah *povrchu válcové roury.*

§. XLV.

2. O povrchu kužele kolmého.

1. *Povrch kužele* rovná se součtu podstavy B a pláště P jeho: $K = B + P$.

2. *Plášť kužele kolmého* dá se na rovinu rozvinouti i stane se z něho výkrojek kruhu, jehož poloměrem jest strana kužele, a obloukem obvod podstavy kuželové. A poněvadž výkrojek kruhu se rovná polovičnému součinu z oblouku a z poloměru (Pl. CXX. 7.), pročež díme:

Plášť kužele kolmého jest roveň součinu z polovičného obvodu O *podstavy a ze strany* s *kuželové:* $P = {}^1/_2 O.s$.

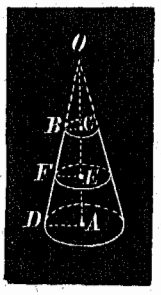
Je-li r poloměr podstavy, bude plášť $P = \pi.r.s$, a celý povrch $K = \frac{O^2}{4\pi} + {}^1/_2 O.s = {}^1/_2 O\left(\frac{O}{2\pi} + s\right) = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r+s)$.

Dodatek 1. V kuželi rovnostraném jest $s = 2r = \frac{O}{\pi}$; tedy $P = \frac{O^2}{2\pi} = 2\pi r^2$; $B = \pi r^2 = \frac{O^2}{4\pi}$; $K = \frac{3O^2}{4\pi} = 3\pi r^2$.

Dodatek 2. Je-li místo strany s dána výška v kužele, najde se dle věty Pyth. nejprv strana vzorcem $s = \sqrt{v^2 + r^2}$.

3. *Plášť přímého kužele rovnoběžně zkomoleného* jest roveň

obr. 73.



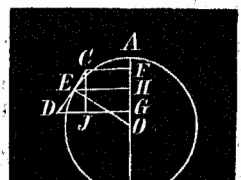
součinu z obvodu prostředního řezu (prostředkem strany rovnoběžně s podstavou vedeného) kruhového a ze strany kužele zkomoleného.

Důkaz. Kužel komolý AC (obr. 73.) doplňme na úplný AO; a položme $BD = s$, $BO = x$, $DA = R$, $BC = r$, $DF = FB$, $FE = \varrho$, kdežto OA buď osou. Jest pak plášť plného kužele OA (dle odst. 2.) roveň $\pi R(s + x)$, a plášť kužele OC taktéž $= \pi r x$; pročež plášť P kužele zkomoleného $P = \pi R(s + x) - \pi r x$, aneb $P = \pi R s + \pi x (R - r)$. Jest ale $BC \parallel DA$, pročež $OD : OB = DA : BC$ čili $(s + x) : x = R : r$, odtud $s : x = (R - r) : r$; tedy $x = s . \frac{r}{R - r}$, pročež dosazením $P = \pi R s + \pi r s = \pi (R + r) s$. A poněvadž $2FE = BC + DA$, čili $2\varrho = R + r$, vyplývá $P = 2\pi\varrho s$; jakož tvrzeno.

§. XLVI.
O povrchu koule.

1. V bodě E (obr. 74.) na obvodě kruhu AEB buď sestrojena tečná CD a $CE = ED$; AB buď průměr kruhu, O jeho střed, CF, DG a EH kolmo na AB. Otočíme-li kruh i s tečnou kolem osy AB, opíše kouli, tečná CD pak plášť přímého kužele zkomoleného, CF a DG jeho podstavy, a EH prostřední kruh. Kuželi tomu říkáme *zkomolený kužel o kouli opsaný.*

obr. 74.



2. *Plášť zkomoleného kužele o kouli opsaného* rovná se obvodu hlavního kruhu násobenému výškou komole.

Důkaz. Dle XLV. 3. jest plášť komole $CDGF$ roveň $P = 2\pi . EH . CD$; spusť $CJ \perp DG$ a veď EO; bude pak $\triangle DCJ \sim \triangle OEH$, poněvadž všechny strany střídavě na sobě kolmo stojí; odtud jde úměra:
$CD : EO = CJ : EH$, pročež $EH . CD = EO . CJ$; a dosadíme-li do vzorce P místo $EH . CD$ hodnotu $EO . CJ$, dostaneme $P = 2\pi . EO . CJ$; a poněvadž EO jest poloměr r kruhu a CJ výška v komole, jest věta dokázána, t. $P = 2\pi r . v$.

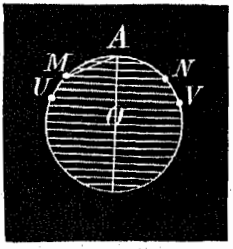
2. Je-li tečná CD (obr. 74.) neskončeně krátká, lze ji pokládati za oblouček kruhu AEB samého, a plášť kužele za pranizounký pás koule: i jest pak rovněž ploský obsah kulového

pásu neskončeně tenkého roveň součinu z obvodu hlavního kruhu a z výšky pásu: $P = 2\pi r.v$.

3. *Povrch každého pásu (jakož i vrchlíku) koule* rovná se součinu z obvodu hlavního kruhu a z výšky pásu (n. vrchlíku).

Důkaz. Rozdělme si (v mysli) pás $MNUV$ (obr. 75.) rovnoběžnými kruhy na neskonalé množství pásů neskonale nízkých; znamenáme-li povrchy jejich písmeny $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, a výšky $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$: bude $p_1 = 2\pi r.v_1$, $p_2 = 2\pi r.v_2$, $p_3 = 2\pi r.v_3, \ldots p_n = 2\pi r.v_n$; a sečtením všech $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 2\pi r (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n)$; a ježto $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$ jest povrch p celého pásu, a $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$ výška v jeho, vychází $p = 2\pi r.v$, jakož tvrzeno.

obr. 75.



Podobně dokážeme o vrchlíku AUV počnouce děliti již od vrchole A jeho.

4. *Povrch koule rovná se čtyrnásobnému kruhu hlavnímu:* $K = 4\pi r^2$.

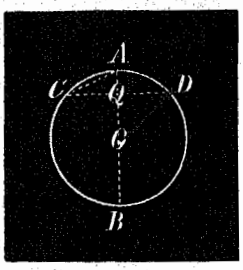
Důkaz. Počínajíce si jako při ustanovování pásu dostaneme za součet $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$ výšek všech pásů neskonale tenkých, z nichž povrch koule složen jest, celý průměr její $AB = 2r$; pročež $K = 2\pi r.2r = 4\pi r^2$.

5. Povrch koule jest ku čtverci jejího poloměru v poměru přímém.

6. *Vrchlík* rovná se kruhu, jenž má za poloměr tetivu od vrchole vrchlíka k podstavě jeho vedenou.

Důkaz. Buď (obr. 76.) A vrchol, AQ výška kulového skrojku ACD: dle odst. 3. jest vrchlík $V = 2\pi r.AQ$, znamená-li r poloměr koule. Prodlužme AQ do B, i bude $AC^2 = AQ.AB$ (Pl, XCII. 2. *a.*), a poněvadž $AB = 2r$, pročež $AC^2 = 2r.AQ$, i vyplývá $V = \pi.AC^2$, jakož tvrzeno.

obr. 76.



7. *Úlohy. a)* Najdi povrch tělese, jež vznikne otočením se $2n$-úhelníka pravidelného kolem průměru opsaného kruhu, prochází-li průměr ten protějšími hranami $2n$-úhelníka.

Povrch skrojku kul. $= 2\pi r v + \pi \rho^2 = \pi(2\rho^2 + v^2)$ [illegible] $r.v = \rho^2 + v^2$

b) Najdi povrch tělese, jež vznikne otočením se $2n$-úhelníka pravidelného kolem průměru vepsaného kruhu, prochází-li průměr ten protějšími body dotyčnými.

c) Najdi povrch tělese, jež vznikne otočením se $(2n+1)$-úhelníka kolem osy, která jde jednou hranou a středem $(2n+1)$-úhelníka a tedy na protější straně uprostřed kolmo stojí.

d) Najdi povrch výkrojku kulového, dán-li jest poloměr koule a buďto obvod výkrojku neb výška skrojku.

Pozn. *Výkrojkem* n. *výsečí* koule zoveme tělo kuželovité, jež za podstavu má vrchlík koule a za plášť křivý povrch přímého kužele, jehož strana rovná se poloměru koule.

e) V jakém poměru jest povrch koule k plášti opsaného válce přímého a v jakém poměru jest k celému povrchu tohoto válce?

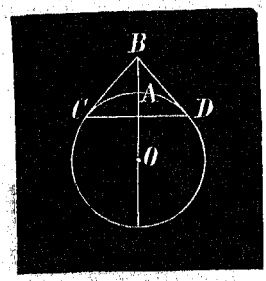
Pozn. Válcem o kouli opsaným zoveme, který vznikne spolu s koulí otočením se čtverce o kruh opsaného, jsou-li dvě strany čtverce toho s osou otáčecí rovnoběžné. Válec, který se opíše pravoúhelníkem podobně v kruhu vepsaným, nazývá se zase válcem v kouli vepsaným.

f) V jakém poměru jest plášť, a v jakém celý povrch vepsaného válce rovnostraného k povrchu koule?

g) V jakém poměru k povrchu koule jest plášť a v jakém celý povrch α) opsaného, β) vepsaného kužele přímého, a sice α') vůbec, β') kužele rovnostraného zvlášť?

Pozn. Kužel $\left\{\begin{matrix}\text{opsaný}\\ \text{vepsaný}\end{matrix}\right\}$ nazývá se, který vznikne spolu s koulí otočením se trojúhelníka rovnoramenného (rovnostraného) $\left(\begin{matrix}\text{o kruh opsaného}\\ \text{v kruh vepsaného}\end{matrix}\right)$, splývá-li výška trojúhelníka s průměrem kruhu, okolo něhož otáčení se děje.

obr. 77.



h) Jsou-li CB a DB (obr. 77.) tečné kruhového oblouku CAD, O jeho střed; opíše se otočením oblouku kolem osy BO vrchlík: jehož ploský obsah najíti se má ze známého poloměru $OA = r$ a z výšky $AB = v$ bodu B nad povrchem koule.

§. XLVII.

O povrchu těles podobných.

1. Tělesa podobná dají se v prostoře, jakož z ponětí o podobnosti jde, tak položiti, aby veškeré paprsky z pevného v prostoře bodu O (z bodu podobnosti) vycházející pomezím těles protí-

naly se na úsečky v poměru stálém. Tehdy musí všecky paprsky, které mají jednu patu na pomezné ploše tělese jednoho, míti patu druhou na pomezné ploše rovnoběžné tělese druhého (XIV. 3. b.). Z toho opět plyne, že paprsky, které jdou hranami a hroty tělese jednoho, musí též jíti hranami a hroty tělese druhého. A proto jsou v takové poloze všechny pomezné plochy tělese jednoho střídavě rovnoběžné a stejnohledné s pomeznými plochami tělese druhého. Z toho jde dále, že stejnohledné tyto plochy pomezné po dvou jsou obrazce podobné a ploské obsahy jejich v zčtvercovaném poměru dvou paprsků stejnolehlých (XIV. 1. e. f.). A poněvadž veškerých paprsků úsečky jsou v poměru stálém, jsou též veškeré stejnohledné plochy pomezné v témž poměru stálém, ale zčtvercovaném; a že konečně i každé dvě stejnolehlé příčky čili strany pomezných ploch jsou v témž poměru jako úsečky paprsku (XIV. 1. b.): tedy jsou veškeré stejnohledné plochy pomezné v zčtvercovaném poměru dvou hran stejnolehlých. Znamenáme-li tedy ploské obsahy pomezných ploch jednoho tělese písmeny p_1, p_2, p_3, ... p_n, a stejnolehlých ploch tělese druhého q_1, q_2, q_3, ... q_n, a dvé stejnolehlých hran obou těles písmeny a i b, bude
$p_1 : q_1 = p_2 : q_2 = p_3 : q_3 = \ldots = p_n : q_n = a^2 : b^2$, odkudž vyjde
$(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n) : (q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n) = a^2 : b^2$, čili
$p : q = a^2 : b^2$ t. j. *povrchy* p *a* q *těles podobných jsou k stejnolehlým hranám* a *i* b *v poměru zčtvercovaném.*

Dodatek. Tato věta dá se rozšířiti i o tělesích *oblých.* Neboť oblý povrch můžeme v mysli rozložiti na neskonalé množství trojúhelníků, kteréž jsouce neskonale malé mohou býti pokládány za trojúhelníky ploské, a oblé tělo za druh těles hranatých.

2. *Výsledek.* Z úměry $p : q = a^2 : b^2$ (odst. 1.) jde $p = q \cdot \frac{a^2}{b^2}$, t. j. je-li znám povrch q tělese, dá se vypočísti povrch p tělese podobného, jsou-li pouze dvě stejnolehlé hrany a a b změřeny.

§. XLVIII.

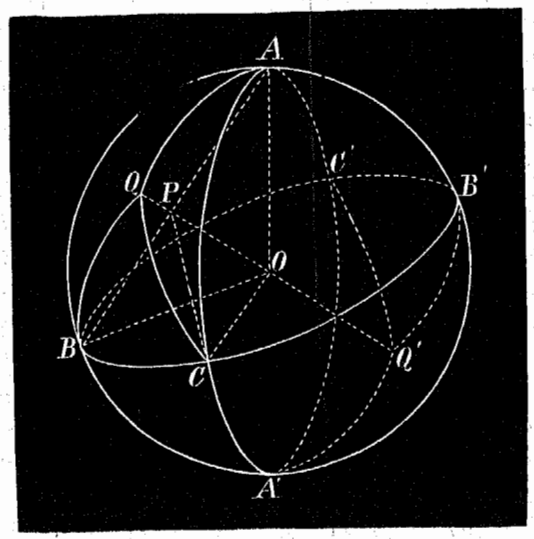
O ploském obsahu trojúhelníků sférických.

1. *Sférický trojúhelník dá se rozděliti na tři rovnoramené.*

Důkaz. Buď (obr. 78.) ABC trojúh. sf.; se středu koule spusť kolmici OP na rovinu kruhového řezu ABC; prodloužená kolmice

protne sf. trojúhelník bodem Q a padne do středu téhož řezu (XXXVI. 3.), pročež jest $PA = PB = PC$; a ježto $\triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$, jest též $\sphericalangle POA = \sphericalangle POB = \sphericalangle POC$. Tyto úhly příslušejí k obloukům QA, QB, QC hlavních kruhů jími vedených, a pročež jsou též oblouky tyto si rovny

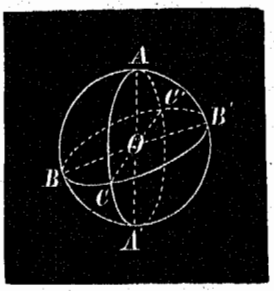
obr. 78.



$QA = QB = QC$; z toho jde, že sfér. trojúhelníky AQB, BQC CQA, na něž původní trojúh. ABC rozdělen jest, jsou rovnoramené.

2. *Sférické trojúhelníky protější rovnoramené jsou shodné.*

obr. 79.



Důkaz. Buď (obr. 79.) $AC = AB$, tehdy jest $A'C' = AC$, $A'B' = AB$, pročež také $A'B' = A'C' = AB = AC$; a $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$; položíme-li tedy sfér. $\triangle ACB$ na sfér. $\triangle A'B'C'$, pokryjí se dokonale; t. $\triangle ACB \cong \triangle A'B'C'$.

3. *Ploské obsahy sférických trojúhelníků protějších jsou si rovny.*

Důkaz. Trojúh. ABC (obr. 78.) rozděl na tři trojúh. rovnoramené AQB, BQC, CQA, spustiv se středu kolmou na rovinu kruhu ABC a prodlouživ ji do Q. Prodlouživ QO až do protějšího bodu Q', a veda hlavní kruhy $Q'A'O$, $Q'B'O$, $Q'C'O$, dostaneš z protějšího sfér. trojúhelníka $A'B'C'$ rovněž tré nových

$A'Q'B'$, $B'Q'C'$, $C'Q'A'$, které jsouce protějšími hořejších AQB, BQC, CQA jsou s nimi střídavě shodny (odst. 2.) a protož jejich obsahy střídavě si rovny, t. $\triangle AQB = \triangle A'Q'B'$, $\triangle BQC = \triangle B'Q'C'$, $\triangle CQA = \triangle C'Q'A'$, pročež sečtením $\triangle AQB + \triangle BQC + \triangle CQA = \triangle A'Q'B' + \triangle B'Q'C' + \triangle C'Q'A'$ čili $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

4. *Dva dvojúhelníky, jejichž sfer. úhly si jsou rovny, jsou shodné.* Neboť jeden do druhého vložen splyne s ním v jediný.

5. *Sférické dvojúhelníky jsou v přímém poměru úhlů sférických.*

Důkaz. Buďte p a p' ploské obsahy dvojúhelníků sférických, a ω i ω' jejich úhly sférické, které mějtež společnou míru ϱ. Rozdělivše oba úhly řečené touto měrou na rovné díly rozdělíme spolu dvojúhelníky na tolikéž rovných dvojúhelníků ψ: je-li ϱ v úhlech ω a ω' obsažena m- a m'-krát, bude $\omega = m.\varrho$, $\omega' = m'.\varrho$, pročež $\omega : \omega' = m : m'$; a podobně $p = m.\psi$, $p' = m'.\psi$, tedy $p : p' = m : m'$, z čehož vyplývá $p : p' = \omega : \omega'$, jakož tvrzeno.

Že věta platnou jest, byť úhly sférické nesouměřitelné byly, zůstavuje se aby dokázal čtenář.

6. *Výsledek.* Sférický dvojúhelník p má se k povrchu k celé koule, jako jeho sférický úhel ω ku dvěma přímým; $p : k = \omega : 2\pi$.

Odtud jde $p = \frac{\omega}{2\pi} . k$; t. j. je-li znám sférický úhel, a povrch koule, najdeme ploský obsah dvojúhelníka násobíce povrch koule poměrem sférického úhlu ku dvěma přímým. — Je-li r poloměr koule, položíme $4\pi r^2$ místo k i dostaneme $p = 2\omega . r^2$, t. j. *sférický dvojúhelník rovná se dvojnásobnému součinu z úhlu sférického a ze čtverce poloměru koule.*

Poznam. Obyčejně béře se poloměr r koule za jedničku (za míru); pak jest povrch dvojúhelníka sférického $p = 2\omega$; t. dvojnásobnému úhlu sférickému roveň.

7. *Ploský obsah* s *trojúhelníka sférického* **ABC** (obr. 79.) *má se k povrchu* k *celé koule, jako jeho sférický nadbytek* e *ku čtyrem přímým* (4π).

Důkaz. Sférické úhly trojúhelníka ABC ležící proti stranám BC, CA, AB znamenejme písmeny α, β, γ, a porovnejme s povrchem koule $k = 4\pi r^2$ ploské obsahy dvojúhelníků, na něž se doplňuje trojúh. ABC se svými vedlejšími $A'BC$, $AB'C$, ABC'; i jest pak dle odst. 6.

$ABC + A'BC = 2\alpha.r^2$; $ABC + AB'C = 2\beta.r^2$; $ABC + ABC' = 2\gamma.r^2$; pročež součet všech $2.ABC + ABC + A'BC + AB'C + ABC' = 2(\alpha + \beta + \gamma)r^2$; a ježto $A'B'C' = ABC$ (odst. 3.), také

$2.ABC + A'B'C' + A'BC + AB'C + ABC' = 2(\alpha+\beta+\gamma)r^2$; jest ale dále $A'B'C' + A'BC + AB'C + ABC' = {}^1/_2 k = 2\pi r^2$; tuto rovnici od předešlé odečetše, a výsledek číslem 2 dělíce dostaneme $ABC = (\alpha+\beta+\gamma-\pi)r^2 = (\alpha+\beta+\gamma-\pi)\frac{k}{4\pi}$; a poněvadž $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ nazývá se nadbytek sférický, jejž písmenem e znamenáme, pročež jest $ABC = e.r^2 = e.\frac{k}{4\pi}$ čili $ABC : k = e : 4\pi$, jakož tvrzeno.

Dodatek. Vzorec $ABC = e.r^2$ zní: *Sfér. trojúhelníka ploský obsah rovná se součinu z nadbytku sférického a z čtverce poloměru koule.* — Béře-li se $r = 1$, jest $ABC = e$, t. j. *Ploský obsah sfér. trojúhelníka jest roveň nadbytku sférickému jeho.*

Knihy druhé část třetí.

O krychleni těles.

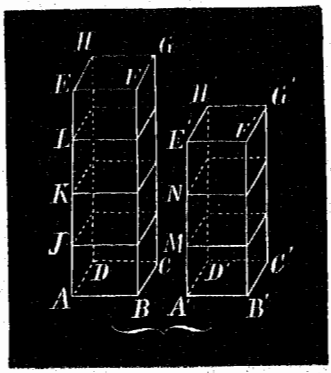
I. Porovnávání krychlového obsahu.

§. XLIX.

Kdykoliv mluviti se bude v této části o rovnosti neb poměru těl, rozumí se o rovnosti neb poměru krychlových obsahů jejich.

1. *Pravoúhlé rovnoběžnostěny, které mají shodné podstavy, jsou ku svým výškám v přímém poměru.*

obr. 80.



Důkaz. Buď $ABCD \cong A'B'C'D'$ (obr. 80.); výšky AE a $A'E'$ rozděl společnou mírou jejich m na samé rovné části $AJ = JK = KL = \ldots = m$, $A'M = MN = \ldots = m$, z nich pak buď v AE obsažen počet a, a v $A'E'$ počet a', i jest tehdy $AE : A'E' = a : a'$. Dělicími body $J, K, L, \ldots, M, N, \ldots$ veď řezy s podstavami rovnoběžné, čímž se oba rovnoběžnostěny AG a $A'G'$ čili P a P' na samé shodné části p rozdělí, z nichž obsažen v P počet a, v P' počet a'; pročež bude

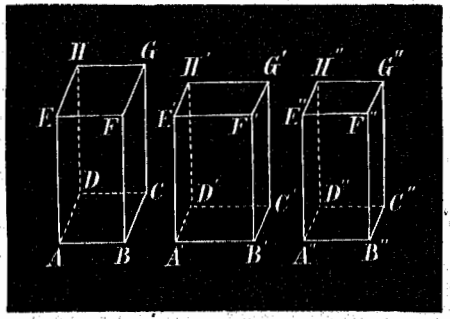
$P : P' = a : a'$; z této a z předešlé úměry jde $P : P' = AE : A'E'$, jakož tvrzeno.

Dodatek. Větu zde dokázanou lze i takto vysloviti: *Pravoúhlé rovnoběžnostěny, které mají po dvou rozměrech* (délku a šířku) *sobě rovných, jsou k třetímu rozměru* (výška n. tloušťka) *v poměru přímém.*

2. *Pravoúhlé rovnoběžnostěny, které mají rovné si výšky, jsou ku svým podstavám v přímém poměru;* aneb: *Pravoúhlé rovnoběžnostěny, které mají jeden rozměr společný, jsou ve složeném poměru druhých dvou rozměrů.*

Důkaz. Buďte (obr. 81.) v rovnoběžnostěnech pravoúhlých AG a $A'G'$ výšky $AE = A'E'$. Sestrojme třetí rovnoběžnostěn

obr. 81.



pravoúhlý $A''G''$, tak aby $A''E'' = AE = A'E'$, $A''B'' = AB$, $A''D'' = A'D'$ bylo; vezmeme-li za podstavy $ABEF \cong A''B''E''F''$, bude dle odst. 1. $AG : A''G'' = AD : A''D''$; a vezmeme-li za podstavy $A'D'E'H' \cong A''D''E''H''$, bude dle téhož odst. $A''G'' : A'G' = A''B'' : A'B'$; z obou úměr jde $AG : A'G' = (AD : A''D'')\,(A''B'' : A'B')$, a poněvadž jest $A''D'' = A'D'$, $A''B'' = AB$, pročež $AG : A'G' = (AD : A'D')\,(AB : A'B')$, a ježto $ABCD : A'B'C'D' = (AD : A'D')\,(AB : A'B')$ dle Pl. CIX., vyplývá $AG : A'G' = ABCD : A'B'C'D'$, aneb $P : P' = B : B'$ (znamenáme-li písmenem P krychlový obsah, a písmenem B podstavu rovnoběžnostěnu).

3. *Výsledek.* Je-li $B = B'$, jde z úměry $P : P' = B : B'$ také $P = P'$; t. j.

Pravoúhlé rovnoběžnostěny, které mají rovné výšky a rovné si podstavy, jsou si též rovny.

4. *Pravoúhlé rovnoběžnostěny* (**P** *a* **P'**) *jsou v složeném poměru podstav* (**B**) *a výšek* (**v**) *svých;* aneb: *jsou v složeném poměru všech tří rozměrů svých* (a, b, v).

Důkaz. Rovnoběžnostěn pravoúhlý P měj za podstavu B, za výšku v; B' buď podstavou, v' výškou pravoúhlého rovnoběžnostěna P'. K oběma přidružme pravoúhlý rovnoběžnostěn Q, jehož podstavou buď B, a výškou v'. I jest pak $P:Q = v:v'$, (odst. 1.); $Q:P' = B:B'$, (odst. 2.); z obou úměr jde $P:P' = Bv:B'v'$ jakož tvrzeno. Místo $B:B'$ lze položiti složený poměr $ab:a'b'$ rozměrů podstav: i jest pak také $P:P' = a.b.v:a'.b'.v'$, jakož tvrzeno.

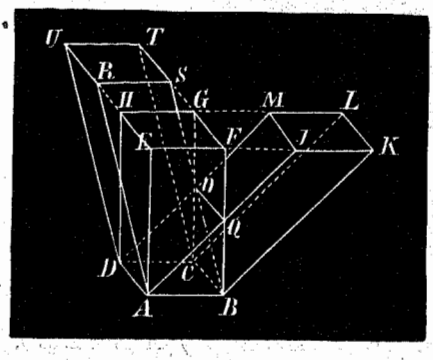
5. *Výsledek.* *Pravoúhlé rovnoběžnostěny, jejichž tři rozměry vydají jednostejný součin, jsou si rovny.* Neboť z úměry $P:P' = abv:a'b'v'$, v níž jest $abv = a'b'v'$, vychází $P = P'$.

§. L.

1. *Dva rovnoběžnostěny, mají-li společnou podstavu a rovné výšky, jsou si rovny.*

Důkaz. Připomenuvše, že hořejší podstavy $EFGH$ a $JKLM$ (obr. 82.) obou rovnoběžnostěnů AG i AL v jedné rovině ležeti musí, rozeznáváme dva případy:

obr. 82.



a) Hořejší podstavy $EFGH$ i $JKLM$ leží mezi rovinami rovnoběžnými $ABKE \parallel DCLH$ (čili: dva protější boky mají v obou rovnoběžnostěnech ku svým podstavám na souhlasných stranách jednostejný sklon). — Tehdy jsou těla $DHMAEJ$ a $CGLBFK$ trojboké hranoly, majíce za spodní podstavy $\triangle DHM$ a $\triangle CGL$, a za hořejší $\triangle AEJ$ a $\triangle BFK$. V hranolech těchto jest $DHM \cong CGL$, (neboť $DH \# CG$, $DM \# CL$), $DAEH \cong CBFG$, a $DAJM \cong CBKL$, pročež $DHMAEJ \cong CGLBFK$ (XXIV. 6.). Přidáme-li v poslední rovnici k oběma hranolům hranol $ABQOCD$ a odejmeme-li od obou hranol $FJQOMG$, vyjde $AG = AL$, jakož tvrzeno.

b) Hořejší podstavy $RSTU$ a $JKLM$ neleží mezi rovinami rovnoběžnými (čili jedné i druhé boky mají v obou rovnoběžnostěnech ku svým podstavám jiný sklon). Tehdy prodloužené roviny $ADRU$ a $CBST$ protnou se s prodlouženými rovinami $BKJA$ a

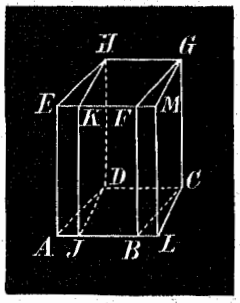
CLMD, čímž mezi rovinami podstav nabudeme nového rovnoběžnostěna *ABCDEFGH*, *(AG)*, stejně vysokého, jehož hořejší podstava s hořejší podstavou obou prvějších rovnoběžnostěnů leží mezi rovinama rovnoběžnýma. Jest pak dle a) $AG = AT$, $AG = AL$, pročež $AT = AL$, jakož tvrzeno.

2. *Výsledek.* Kosý rovnoběžnostěn rovná se kolmému, má-li s ním výšky rovné a podstavy shodné.

3. *Kolmý rovnoběžnostěn s kosoúhlou podstavou rovná se pravoúhlému, má-li s ním rovné výšky a rovné si podstavy* (obr. 83.).

Důkaz. Na podstavě *ABCD* kosoúhlé a na podstavě *DJLC* pravoúhlé stůjte kolmé rovnoběžnostěny *AG* i *JG*. Pokládajíce za společnou jejich podstavu rovnoběžník *CDHG* uzavíráme (dle odst. 1. a.) $AG = JG$, t. j. Rovnoběžnostěn kolmý *AG* s kosoúhlou podstavou rovná se pravoúhlému *JG*, s nímž má výšky rovné a podstavy *mezi dvěma rovnoběžkama* $DC \parallel AL$ rovné. Poněvadž ale (dle XLIX. 3.) rovn. *JG* každému jinému pravoúhlému roveň jest, s nímž má rovné výšky i podstavy, pročež platí to i o *AG*, čímž věta dokázána jest.

obr. 83.



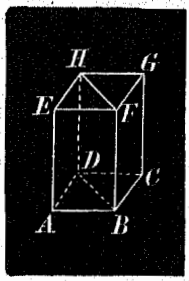
4. *Výsledek z odst. 3. a 1.* Každý (i kosý) rovnoběžnostěn rovná se pravoúhlému, s nímž má rovné výšky i podstavy; a pročež pod těmito výminkami i každému jinému rovnoběžnostěnu kosému.

§. LI.

1. *Rovnoběžnostěn řezem úhlopříčným se rozpoluje.*

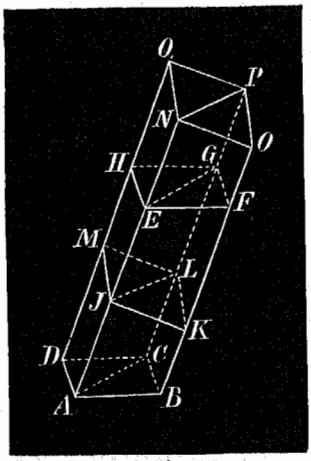
Důkaz. a) Rovnoběžnostěn *AG* buď *kolmý* (obr. 84.). — Tehdy jest $\triangle DAB \cong \triangle BCD$, $EABF \cong GCDH$, $EADH \cong GCBF$; pročež hranoly $CBDGFH \cong ADBEHF$ (XXIV. 6.), jakož tvrzeno.

obr. 84.



b) Rovnoběžnostěn buď *AG kosý* (obr. 85.). — Tehdy veďme řez *JKLM* na pobočnou hranu kolmý, prodlužme pobočné hrany, sřízněme $EN = AJ$, a položme rovinu $NOPQ \parallel JKLM$; tím vznikne kolmý rovnoběžnostěn *JP*, i bude tělo $EP = AL$. Neboť že $EN = AJ$, jest též $JE + EN = AJ + JE$, čili $JN = AE$. Dále jest $KO = JN = AE = BF$,

obr. 85.



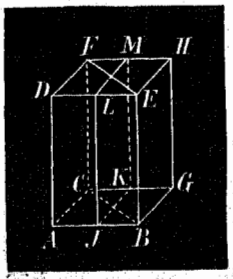
tedy také $KO - KF = BF - KF$ t. $FO = BK$. Podobně lze dokázati $GP = CL$, $HQ = DM$. Kromě toho jest $\sphericalangle$ EFG $=$ $\sphericalangle$ ABC, $\sphericalangle$ ABF $=$ $\sphericalangle$ EFO, $\sphericalangle$ $CBF =$ $\sphericalangle$ GFO, pročež hrot $BACK \cong hr.$ $FEGO$ (XXI. 2. a.). Položíme-li tedy AL jeho podstavou $ABCD$ na shodnou podstavu $EFGH$, splyne s tělesem EP v jediné: i jest $AL \cong EP$. Spolu pak vysvítá, že se i části dvou těles těchto shodují, které z nich vznikly úhlopříčným řezem $ACPN$ t. $ABCJKL \cong EFGNOP$, ACDJLM $\cong$ EGHNPQ. Týmž úhlopříčným řezem rozpoluje se rovnoběžnostěn kolmý JP (dle a), i jest $JKLEFG + EFGNOP = JLMEGH + EGHNPQ$; a dosadíme-li z předcházejících dvou rovnic rovné za rovné do rovnice poslední, vyjde $JKLEFG + ABCJKL = JLMEGH + ACDJLM$, t. j. $ABCEFG = ACDEGH$, jakož tvrzeno.

Poznam. Vedouce důkaz poznali jsme mimochodem větu: *Kosý rovnoběžnostěn rovná se kolmému, který má za podstavu kolmý (na pobočnou hranu) řez, a pobočnou hranu za výšku.*

Tato věta, jak patrno, dá se rozšířiti o každém hranolu vůbec.

2. *Hranol trojboký jest roveň rovnoběžnostěnu, s nímž má rovné výšky i podstavy.*

obr. 86.

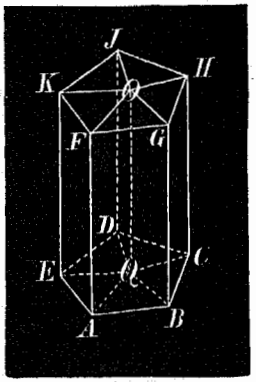


Důkaz: Hranol trojboký $ABCDEF = H$, (obr. 86.) doplňme na rovnoběžnostěn AH, rozpolme hranu AB v bodě J a položme rovinu $JKLM \parallel ACDF$. Jest tehdy $CAJK = {}^1/_2 ABGC = ABC$, t. j. rovnoběžnostěn AM má s hranolem H stejně vysokým podstavy rovné. Avšak rovinou $JKLM$ jest rovnoběžnostěn AH rozpolen na dva shodné AM $\cong$ JH; pročež jest $AM = {}^1/_2 AH$, a dle odst. 1. také $H = {}^1/_2 AH$, pročež $H = AM$: a poněvadž rovnoběžnostěn AM každému jinému se rovná, s kterým rovné výšky a podstavy má (L. 4.), jest dokázáno, co bylo tvrzeno.

3. *Každý hranol rovná se rovnoběžnostěnu, s nímž má rovné podstavy i výšky.*

Důkaz. V hranolu n-bokém veďme některým bodem uvnitř podstavy jeho rovnoběžně s hranou pobočnou přímku $OQ \parallel AF$; přímkou OQ a hranami pobočnými kladouce roviny $OQAF$, $OQBG$ atd. rozdělíme hranol na n hranolů trojbokých o společné výšce. Znamenejme jejich krychlové obsahy písmeny $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$, a podstavy $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$; a obsah i podstavu daného hranolu n-bokého písmeny h i b. Dle odst. 2. rovná se každý z těchto hranolů trojbokých jakémukoliv, tedy i pravoúhlému rovnoběžnostěnu, s kterým má rovné výšky i podstavy. Znamenejme krychlové obsahy těchto pravoúhlých rovnoběžnostěnů, k nimž přísluší výška hranolům společná, a podstavy $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, b$, písmeny $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n, p$: i jest dle podmínky $p_1 = h_1$, $p_2 = h_2$, $p_3 = h_3, \ldots, p_n = h_n$, a má se dokázati, že jest $h = p$. Nejprvé jest $p_1 : p_2 : p_3 : \ldots : p_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n$, (XLIX. 2.); a ježto $p_1 = h_1$, $p_2 = h_2$, $p_3 = h_3 \ldots$, pročež dostaneme dosadíce $h_1 : h_2 : h_3 : \ldots : h_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n$; z této úměry jde: $(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n) : h_1 = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) : b_1$; a poněvadž součet hranolů trojbokých jest roveň hranolu danému, z něhož vznikly, a rovněž součet jejich podstav roveň podstavě daného hranolu: tedy jest $h : h_1 = b : b_1$; a ježto $h_1 = p_1$, tedy dosazením též $h : p_1 = b : b_1$. Dle XLIX. 2. jest ale $p : p_1 = b : b_1$, z kterýchž dvou úměr posledních vyplývá $h = p$, t. j. každý hranol jest roveň rovnoběžnostěnu pravoúhlému, s nímž má rovné podstavy i výšky, pročež pod těmito výminkami dle §. L. i každému jinému, jakož tvrzeno.

obr. 87.



4. *Hranoly jsou v složeném poměru podstav a výšek svých.*

Důkaz. Podstavy dvou hranolů H i h buďte B i b, a výšky V i v; kromě toho buďte P a p krychlové obsahy dvou pravoúhlých rovnoběžnostěnů, které mají střídavě s hranoly rovné výšky i podstavy. Jest pak (dle 3.) $H = P$, $h = p$, pročež $H : h = P : p$; dle XLIX. 4. jest ale $P : p = B.V : b.v$, tedy také $H : h = B.V : b.v$ jakož tvrzeno.

5. *Výsledky.* Je-li v úměře $H : h = B.V : b.v$ (odst. 4.) $B = b$, aneb $V = v$, aneb $B = b$ i $V = v$; aneb $B.V = b.v$, vyjde:

$H:h = V:v$, $H:h = B:b$; $H = h$; t. j.

a) Hranoly, které mají rovné si podstavy, jsou ku svým výškám v přímém poměru.

b) Hranoly, které mají rovné si výšky, jsou ku svým podstavám v přímém poměru.

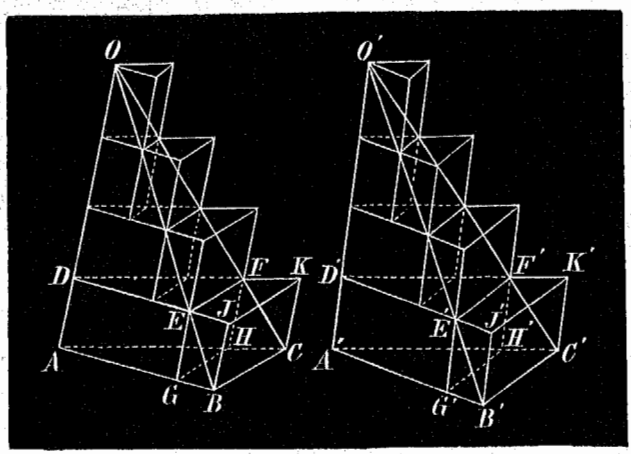
c) Hranoly, které mají rovné výšky i podstavy, jsou si rovny.

d) Hranoly, z jejichž podstav a výšek součiny jsou jednostejné, jsou si rovny.

§. LII.

Jehlany, které mají rovné si podstavy i výšky, jsou si rovny.

obr. 88.



Důkaz. Buďtež v jehlanech $OABC$ i $O'A'B'C'$ (obr. 88.) podstavy $ABC = A'B'C'$ a v společná výška jejich. Postavíme-li jehlany na jednu rovinu směrem souhlasným, budou vrcholy O i O' vězeti v rovině s podstavami rovnoběžné; a vede-li se pak kterýmkoliv pobočné strany bodem D jiná rovina s podstavami rovnoběžná, vzniknou v jehlanech řezy DEF i $D'E'F'$, jejichž ploské obsahy si jsou rovny. Neboť odlehlosti jejich od vrcholů jsouce mezi rovinami rovnoběžnými jsou si rovny, znamenáme-li je tedy společně písmenem u, jest (dle XXVIII. 1.) $DEF:ABC = u^2:v^2$; a též $D'E'F':A'B'C' = u^2:v^2$, pročež $DEF:ABC = D'E'F':A'B'C'$, a ježto $ABC = A'B'C'$, vyplývá $DEF = D'E'F'$.

To poznavše rozdělme jednu hranu pobočnou (ku př. AO) na n rovných dílů, a dělicími body veďme roviny s podstavami rovnoběžné. Tím činem rozdělí se jeden i druhý jehlan na (n—1) jehlanů komolých stejně vysokých a jeden (vrchní) jehlanec. Díly obou jehlanů, které mezi společnýma řezy leží, mají jak hořejší tak dolejší podstavy střídavě si rovny. Mezi podstavama každého dílu toho sestrojme nyní nejprv na spodní pak na hořejší podstavě hranol ($ABCDJK$, $AGHDEF$); prvému díme *opsaný*, druhému *vepsaný*. I jest patrno předně: že opsaný hranol v jednom jehlanu roveň jest opsanému hranolu v jehlanu druhém, s nímž se mezi týmiž rovnoběžnýma rovinama nalézá; ježto oba mají rovné si podstavy i výšky. Podobné platí o hranolech vepsaných. A z toho opět jde, že též součet S hranolů opsaných v jehlanu $OABC = J$. roveň jest součtu S' hranolů opsaných v jehlanu $O'A'B'C' = J'$ a podobně jsou si rovny v obou jehlanech součty s a s' hranolů vepsaných. Za druhé počínajíc od vrchole O a k podstavě ABC postupujíc jest každý hranol opsaný roveň následujícímu po něm hranolu vepsanému, ježto mají rovné si podstavy i výšky: pročež rovná se rozdíl součtu $S—s$ č. $S'—s'$ hranolů opsaných a vepsaných nejspodnějšímu hranolu opsanému $ABCDJK = h$. Za třetí, jehlan jest větší než součet vepsaných hranolů a menší než součet opsaných. Jest tedy, píšeme-li za příčinou $S' = S$, $s' = s$ místo S' a s' pouze S a s, nejprv $s < J < S$, $s < J' < S$. Odečteme-li od nerovnosti $J < S$ nerovnost $J' > s$, vyjde $J — J' < S — s$, čili $J — J' < h$; podobně lze dostati $J' — J < h$; t. j. rozdíl plných jehlanů daných J a J' jest menší než hranol, který má s jehlanem rovné podstavy ale výšku n-krát menší.

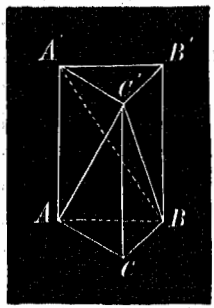
Je-li n číslo neskonale veliké, bude výška hranolu h neskonale malá, pročež i krychlový obsah jeho nemůže než neskonale malý býti; a přes to jest rozdíl jehlanů J i J' ještě menší; musí se tedy rovnati nule, a proto $J = J'$, jakož bylo dokázati.

§. LIII.

1. *Trojboký hranol dá se na tři rovné si jehlany rozložiti.*

Důkaz. V hranolu ABCA'B'C' (obr. 89.) veď řezy $C'AB$, $C'A'B$: tím rozdělí se na jehlany $C'ABC$, $C'A'BA$, $C'BA'B'$. Jehlany $C'ABC$ a $BA'B'C'$, jichž vrcholy jsou C' a B, mají rovné si pod-

obr. 89.



stavy $ABC = A'B'C'$ i výšky (kolmice mezi rovinami rovnoběžnými $ABC \parallel A'B'C'$), tedy $C'ABC = BA'B'C'$ (§. LII.). V jehlanu $BA'B'C'$ můžeme za vrchol míti též C', i jest pak $C'BAB' = C'A'BA$, neboť oběma jehlanům jsou podstavy $\triangle BAB' \cong \triangle A'BA$ a výška ze společného vrchole C' společná: pročež jest $C'ABC = C'BAB' = C'A'BA$, jakož tvrzeno.

2. *Hranol jest roveň trojnásobnému jehlanu a jehlan třetině hranolu, mají-li hranol i jehlan rovné si podstavy i výšky.*

Důkaz. Věta tato jest přímý výsledek odstavce 1., má-li jehlan trojboký s hranolem trojbokým společnou podstavu i výšku i hořejší hrot. Ježto ale všechny hranoly, které mají rovné si podstavy i výšky, též si rovny jsou (LI. 5. c.), a podobně pod týmiž výmínkami i jehlanové (LII.): platí věta vůbec, jakož vyslovena jest.

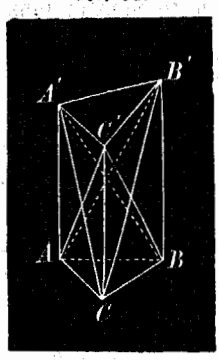
3. *Jehlany jsou v složeném poměru svých podstav i výšek.*

Důkaz. Znamenejme dva jehlany písmeny J a J', a hranoly, které s nima rovné mají jak podstavy b i b', tak výšky v i v' písmeny H i H'. Jest pak $\frac{1}{3}H = J$, $\frac{1}{3}H' = J'$ (odst. 2.), pročež $H : H' = J : J'$; a (dle LI. 4.) $H : H' = b.v : b'.v'$, pročež rovné za rovné dosadivše dostaneme $J : J' = b.v : b'.v'$, jakož tvrzeno.

4. *Výsledky.* Je-li v úměře $J : J' = b.v : b'.v'$, (odst 3.) $b = b'$, aneb $v = v'$, aneb $b = b'$ i $v = v'$, aneb $b.v = b'.v'$; vychází $J : J' = v : v'$, $J : J' = b : b'$, $J = J'$; t. j.

a) Jehlany, jejichž podstavy jsou si rovny, jsou ku svým výškám v poměru přímém.

obr. 90.



b) Jehlany, jejichž výšky jsou si rovny, jsou ku svým podstavám v poměru přímém.

c) Jehlany, které mají rovné si podstavy i výšky, jsou si rovny.

d) Jehlany, jejichž podstavy jsou k příslušným výškám v převráceném poměru, jsou si rovny.

5. *Trojboký hranol, rovinou s podstavami šikmou sříznutý jest roveň součtu tří jehlanů, které mají společnou s ním podstavu a hrany hořejší podstavy za vrchole, čili za výšky kolmice s hořejších hrotů na podstavu spuštěné.*

Důkaz. Buď ABC podstava hranolu rovinou $A'B'C'$ k podstavě šikmo sříznutého $ABCA'B'C' = H$. Veď řezy $C'AB$ i $C'A'B$: tím činem rozdělíš (jako v odst. 1.) H na tři jehlany, t. $H = C'ABC + C'A'AB + C'BA'B'$. — Jehlan $C'ABC$ má ABC za podstavu a C' za vrchol. — Veda $A'C$ a C' i C za vrchole jehlanů $C'A'AB$ i $CA'AB$ maje soudíš $C'A'AB = CA'AB$, ježto jehlany mají společnou podstavu $A'AB$ a vrchole jejich C' i C v přímce s podstavou rovnoběžné vězí, za kterouž příčinou i výšky jejich jsou si rovny (VIII. 3.). — Veďme pak přímky $B'A$ i $B'C$, i poznáváme z příčin týchž $C'BA'B' = CA'B'B$, ježto jehlany $C'BA'B'$ a $CBA'B'$ opět společnou podstavu $BA'B'$ a rovné si výšky mají; podobně $A'B'BC = ABCB'$, neboť jehlany tyto mají opět společnou podstavu BCB'; a ježto $CA'B'B = A'B'BC$, $ABCB' = B'ABC$, vyplývá posléz $C'BA'B' = B'ABC$: a tím rovné za rovné položivše nabýváme $H = A'ABC + B'ABC + C'ABC$ jakož tvrzeno.

Dodatek 1. Tato věta zahrnuje v sobě větu pronešenou v odst. 1., položíme-li A', B', C' do roviny s podstavou rovnoběžné.

Dodatek 2. Poněvadž každý jehlan rovná se třetině hranolu, s nímž má rovné podstavy i výšky, vyplývá z věty nyní dokázané: *Trojboký hranol šikmo sříznutý rovná se třetině tří hranolů, ježto mají s ním rovné si podstavy a za výšky kolmice s hrotů sříznutého hranolu hořejších na podstavu spuštěné.*

A majíce na zřeteli §. *LI. 1. Poznam.*, můžeme říci:

Trojboký hranol šikmo sříznutý rovná se třetině tří hranolů, kteréžto mají za podstavu kolmý na pobočnou hranu řez sříznutého hranolu a pobočné hrany jeho za výšky své.

§. LIV.

Pravidelné tělo rovná se jehlanu, který má povrch tělese za podstavu, a poloměr koule do tělesa vepsané za výšku.

Důkaz. Vedeme-li roviny středem pravidelného n-stěna a hranami jeho, rozložíme je na n pravidelných jehlanů, z nichž každý za podstavu má pomeznou plochu b n-stěna, a za výšku poloměr r koule vepsané; jest tedy n-stěn roveň n-násobnému jehlanu takovému. A ježto jehlan, který má s předešlým společnou výšku, ale za podstavu celý povrch nb, též n-krát větší jest (LIII. 4. *b.*), vyplývá pravost věty svrchu pronešené.

§. LV.

Tělesa podobná jsou v krychlovém poměru svých stran neb příček stejnolehlých.

Důkaz. Uvedše, jako v §. XLVII. vypsáno jest, tělesa podobná do stejnolehlosti, veďme bodem podobnosti a hranami povrchnými roviny: tím činem rozdělíme je na samé jehlany, z nichž každé dvé stejnohledných jest si podobných. O nich platí LIII. 3. totiž $J:J' = b.v:b'v'$; poněvadž ale výšky v i v' jsou stejnolehlé úsečky téhož paprsku k rovinám rovnoběžným, jest $b:b' = v^2:v'^2$ (XIV. 1. f.) a proto $J:J' = v^3:v'^3$. A poněvadž poměr tento, za nějž zůstatně dosaditi lze krychlový poměr každých jiných dvou příček aneb stran n. hran stejnolehlých (XIV. 1. *b.*), o každých dvou stejnohledných jehlanech platnost má; přísluší též celým tělesům, jakož tvrzeno.

Poznam. Všechny obecné poměry, které v této části o hranolích, jehlanech, hranatých tělesích vůbec dokázány jsou, mají platnost i o válcích, kuželích, tělesích oblých, poněvadž kruh lze pokládati za mnohoúhelník o nesčíslném množství neskonale krátkých stran přímých, a oblinu za povrch složený z nesčíslného množství neskonale malých úhelníků ploských: čímž se válec druhem hranolu, kužel druhem jehlana, oblé tělo druhem mnohostěna stane.

II. Vypočítávání obsahu krychlového.

§. LVI.

Za míru těles zvykli jsme bráti *krychli* (cubus), jejíž hrana č. strana má známou neb určitou délku. Dle jména této délky dáváme název i krychli, již za míru pojímáme, krychlového palce, krychl. stopy, krychl. sáhu, metru atd.

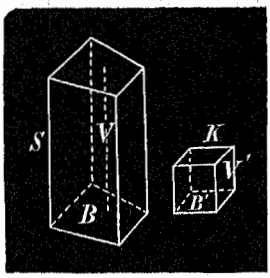
Měříce vyhledáváme, kolikkrát jest míra v tělesi obsažena, hledáme tedy poměrné číslo tělese. Pokládajíce pak tělo č. prostor jeho co do velikosti za číslo pojmenované přidáváme i tomuto číslu k vůli krátkosti a pro vyrozumění jeho původu jméno „*obsahu prostorového* č. *krychlového* č. *tělesného* čili *objemu.*“ Mluvíce při tom spolu o velikosti přímek neb ploch rozumíme rovněž čísla jejich poměrná ve smyslu Pl. §. IV. §. CXVII., a sice pod tou výminkou, že jak hrana krychle, tak strana čtverce, které za míru těles a ploch slouží, rovná se míře přímek.

§. LVII.

1. *Krychlový obsah sloupu* (hranolu i válce) *jest roveň součinu z podstavy a výšky jeho.*

Důkaz. Buď S prostor, B podstava, V výška sloupu; K prostor, B' podstava a V' výška krychle, kterou za míru máme; i jest tehdy V' spolu mírou přímek a B' mírou ploch. Dle §. LI. 4. jest $\frac{S}{K} = \frac{B}{B'} \frac{V}{V'}$.

obr. 91.



Poměr $\frac{S}{K} = s$ udává, kolikkrát jest krychle K (míra) obsažena v prostoru sloupu S, poměr $\frac{B}{B'} = b$ udává ploský obsah podstavy sloupu, t. kolikkrát podstava krychle (tedy míra ploch) v podstavě sloupu obsažena jest; a poměr $\frac{V}{V'} = v$ konečně udává výšku sloupu, t. kolikkrát hrana krychle (tedy míra přímek) ve výšce sloupu obsažena jest. Dosadíce čísla tato do vzorce prvního dostaneme $s = b.v$, jakož tvrzeno.

2. *Výsledky. a)* Je-li sloup *kolmý,* jest výška jeho hraně pobočné rovna; tedy krychlový obsah jeho roveň *součinu z podstavy a jedné hrany pobočné.*

b) Poněvadž každý sloup kosý jest roveň kolmému, který má kolmý řez za podstavu a pobočnou hranu za výšku (LI. 1. Pozn.): pročež *jest krychlový obsah sloupu též roveň součinu z kolmého (na pobočnou hranu) řezu a z pobočné hrany.*

c) V rovnoběžnostěnu pravoúhlém rovná se výška pobočné hraně a podstava b součinu $a.c$ podstavných hran, pročež jest $s = a.c.v$ t. j. *prostorový obsah pravoúhlého rovnoběžnostěna jest součinu tří hran v jeden hrot se sbíhajících roveň.*

d) Jsou-li v pravoúhlém rovnoběžnostěnu všechny tři hrany sobě rovny (v krychli) $v = c = a$: vyjde $s = a^3$, t. j. *krychle se rovná třetí mocnosti své hrany.*

Odtud jde $1^{c^\circ} = (6^3)^{c'} = 216^{c'}$; $1^{c'} = (12^3)^{c''} = 1728^{c''}$; podobně $1^{c''} = 1728^{c'''}$, krychlový meter $= 10^3 = 1000$ krychlových decimetrů atd.

3. *Výsledky o válci zvlášť. a)* Je-li r poloměr podstavy b válce, jest $b = \pi r^2$, tedy krych. obsah $= \pi r^2.v$.

b) Ve *válci rovnostraném* jest $v = 2r$, tedy prostorový obsah jeho $= 2\pi r^3$.

c) Je-li *ve válci dutém* (v rouře válcovité) poloměr vnější r a vnitřní ϱ: jest plného válce obsah prostorový $= \pi r^2.v$, a dutiny $= \pi\varrho^2.v$; pročež obsah prostorový roury válcovité $= \pi v.(r^2 - \varrho^2)$ $= \pi v.(r + \varrho)(r - \varrho)$.

§. LVIII.

1. Krychlový obsah jehlana rovná se třetině součinu z podstavy a z výšky.

Důkaz. Neboť jehlan J rovná se třetině hranolu H, s nímž má rovné si podstavy b i výšky v, (LIII. 2.). Hranol ale jest $H = b.v$, (LVII.); pročež $J = \frac{1}{3}H = \frac{1}{3}b.v$.

2. *a)* Poněvadž kužel za jehlan míti lze (LV. poznam.), jest krychlový obsah jeho K též roveň třetině součinu z podstavy a výšky, $K = \frac{1}{3}.b.v$.

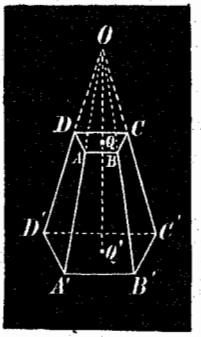
b) Je-li r poloměr podstavy kužele, jest $b = \pi r^2$, pročež $K = \frac{1}{3}.\pi r^2.v$.

c) Je-li a strana kužele kolmého, jest $v = \sqrt{a^2 - r^2}$, tedy $K = \frac{1}{3}\pi r^2.\sqrt{a^2 - r^2}$.

d) V kuželi rovnostraném jest $a = 2r$, tedy $K = \frac{1}{3}\pi r^3.\sqrt{3}$.

§. LIX.

obr. 92.



1. *Najdi krychlový obsah jehlana (rovnoběžně) zkomoleného.* (obr. 92.)

Rozř. Buď $QQ' = v$ výška, $ABCD = b$ hořejší, $A'B'C'D' = b'$ dolejší podstava zkomoleného jehlana $A'B'C'D'ABCD = K$. Prodlužme pobočné hrany, až se protnou ve vrcholi O: tím se komole doplní na celý jehlan $OA'B'C'D' = J'$. Znamenajíce $OQ = x$ výšku jehlana hořejšího $OABCD = J$, dostaneme (dle §. LVIII. 1.) $J' = \frac{1}{3}b'(x + v)$, $J = \frac{1}{3}bx$; odtud pak odečtením $K = J' - J = \frac{1}{3}b'.v + \frac{1}{3}x(b' - b)$. Dle §. XXVIII. 1.

jest $b:b' = x^2:(x+v)^2$, čili $x:(x+v) = \sqrt{b}:\sqrt{b'}$, z čehož najdeme $x = v.\sqrt{b}:(\sqrt{b'} - \sqrt{b})$; dosadíce tuto hodnotu nabudeme $K = {}^1/_3 v.b' + {}^1/_3 v\sqrt{b}.\frac{b'-b}{\sqrt{b'}-\sqrt{b}} = {}^1/_3 v(b' + b + \sqrt{b.b'})$; t. j.

Jehlan rovnoběžně zkomolený rovná se součtu tří jehlanů, které s ním výšku mají společnou, za podstavy ale jeden jeho spodní, druhý jeho vrchní podstavu a třetí plochu geometricky prostředně úměrnou s oběma jeho podstavama.

2. *Najdi krychlový obsah kužele (rovnoběžně) zkomoleného.*

Majíce kužel za druh jehlana najdeme (dle 1. odst.) obsah jeho $K = {}^1/_3 v.(b + b' + \sqrt{b.b'})$.

Jsou-li r i r' poloměry kruhových podstav b i b': jest $b = \pi r^2$, $b' = \pi r'^2$, a proto $K = {}^1/_3 \pi.v(r^2 + r'^2 + rr')$.

3. *Najdi krychlový obsah hranolu šikmo sříznutého.*

Rozř. Je-li dolejší podstava jeho b, a jsou-li výšky z hořejších hrotů na ni spuštěné v', v'', v'''; znamená-li dále p kolmý řez; konečně jsou-li pobočných hran délky a', a'', a''': bude krychlový obsah jeho $h = {}^1/_3 b(v' + v'' + v''') = {}^1/_3 p(a' + a'' + a''')$ dle §. LIII. 5.

Dodatek. Místo ${}^1/_3(a' + a'' + a''')$ může se posaditi délka a průsečnice řezů, z nichž každý veden jest jednou hranou pobočnou a prostředkem protější hrany podstavné. — Čehož důkaz dej čtenář.

§. LX.

Krychlový obsah tělese pravidelného rovná se třetině součinu z povrchu jeho a z poloměru vepsané koule: $K = {}^1/_3 P.r$.

Důkaz jde přímo z §. LIV.

Dodatek. Poloměr vepsané koule najdeme ze známé hrany a tělese pravidelného, jak následuje:

a) Jest známo (XVIII.), že konce hran, z jednoho hrotu vybíhajících leží ve společné rovině a to na obvodě kruhu, jejž na rovné oblouky dělí. Vedeme-li tedy řečenými konci rovinu, sřízne se s tělese pravidelného jehlan pravidelný, jehož hrana pobočná jest a, a podstavná buď b, výška pak v; poloměr kruhu o podstavu opsaného znamenejme písmenem ϱ'.

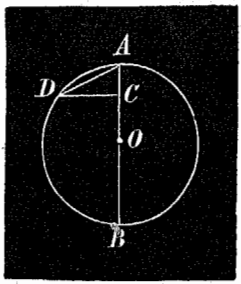
Hrana b jest při čtyr-, osmi-, a dvacetistěnu $= a$; při šestistěnu jest b úhlopříčkou pobočné stěny čtvercové, tedy $= a.\sqrt{2}$; a při dvanáctistěnu jest b úhlopříčkou pravidelného pětiúhelníka, tedy $= {}^1/_2 a(1 + \sqrt{5})$.

Podstavou sříznutého jehlana jest při čtyr-, šesti-, a dvanáctistěnu trojúhelník, při osmistěnu čtverec, při dvacetistěnu pětiúhelník pravidelný.

Je-li b strana úhelníka pravidelného, jest poloměr opsaného kruhu o trojúhelník $\varrho' = {}^1/_3 b\sqrt{3}$, o čtverec $\varrho' = {}^1/_2 b\sqrt{2}$, o pětiúhelník $\varrho' = b\sqrt{{}^1/_{10}(5+\sqrt{5})}$.

Poněvadž b jest známé, najdeme dosazením při čtyrstěnu $\varrho' = {}^1/_3 a\sqrt{3}$; při 6-stěnu $\varrho' = {}^1/_3 a\sqrt{6}$, při 8-stěnu $\varrho' = {}^1/_2 a\sqrt{2}$; při 12-stěnu $\varrho' = {}^1/_6 a\sqrt{3}(1+\sqrt{5}) = a\sqrt{{}^1/_6(3+\sqrt{5})}$, a při 20-stěnu $\varrho' = a\sqrt{{}^1/_{10}(5+\sqrt{5})}$. Konečně jest výška pranolu sříznutého vždy $v = \sqrt{a^2 - \varrho'^2}$; pročež při 4-stěnu $v = {}^1/_3 a\sqrt{6}$; při 6-stěnu $v = {}^1/_3 a\sqrt{3}$; při osmistěnu $v = {}^1/_2 a\sqrt{2}$, při 12-stěnu $v = a\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} = {}^1/_6 a\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$, a při 20-stěnu $v = a\sqrt{{}^1/_{10}(5-\sqrt{5})}$.

obr. 93



b) Vedený s vrchole A (obr. 93.) tělese pravidelného průměr AB opsané koule středem O stojí kolmo na podstavě sříznutého jehlana pravidelného (XXIX. 2. dod. 2.) ve středu C podstavy jeho. Je-li tedy $AD = a$, bude $DC = \varrho'$, $AC = v$; a znamená-li $2R = AB$ průměr opsané koule najdeme $R = \frac{a^2}{2v}$; tedy při čtyrstěnu $R = {}^1/_4 a\sqrt{6}$, při 6-stěnu $R = {}^1/_2 a\sqrt{3}$, při 8-stěnu $R = {}^1/_2 a\sqrt{2}$, při 12-stěnu $R = {}^1/_4 a\sqrt{6(3+\sqrt{5})} = {}^1/_4 a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})$: a při 20-stěnu $R = {}^1/_4 a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$.

c) Poloměr r vepsané koule stojí kolmo na pomezné ploše pravidelného tělese ve středu jejím, i činí s poloměrem ϱ kruhu o tuto plochu opsaného dvě odvěsné trojúhelníka pravoúhlého, jehož podponou jest R poloměr koule opsané. Proto jest vždy $r = \sqrt{R^2 - \varrho^2}$: tedy v 4-stěnu $r = {}^1/_{12} a\sqrt{6}$; v 6-stěnu $r = {}^1/_2 a$, v 8-stěnu $r = {}^1/_6 a\sqrt{6}$; v 12-stěnu $r = {}^1/_4 a(2+\sqrt{6})$, v 20-stěnu

$\frac{1}{4}a\left(\sqrt{\frac{2}{5}(25+11\sqrt{5})}\right)$

$r = {}^1/_{12}\, a\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}$; ježto v těchto tělesích jest $\varrho = {}^1/_3 a\sqrt{3}$, ${}^1/_2 a\sqrt{2}$, ${}^1/_3 a\sqrt{3}$, $a\sqrt{{}^1/_{10}(5+\sqrt{5})}$, ${}^1/_3 a\sqrt{3}$.

d) Krychlový obsah najdeme, do vzorce $K = {}^1/_3 P.r$, místo povrchu P a poloměru r příslušné hodnoty jejich dosazujíce, a sice obsah 4-stěnu $= {}^1/_{12} a^3\sqrt{2}$; 6-stěnu $= a^3$; 8-stěnu $= {}^1/_3 a^3\sqrt{2}$; 12-stěnu $= {}^1/_4 a^3(15 + 7\sqrt{5})$; 20-stěnu $= {}^5/_{12} a^3(3 + \sqrt{5})$.

§. LXI.

1. *Krychlový obsah* **K** *koule jest roveň třetině součinu z povrchu* **P** *a z poloměru* r *jejího*: $K = {}^1/_3 P.r$

Důkaz. Na povrchu koule buďte tři body A, B, C, (obr. 94.), které nejsou v jediném kruhu hlavním a jeden druhého neskonale blízko leží. Vedouce jimi tři hlavní kruhy dostaneme za výkrojek kulový jehlan trojboký $OABC$, jehož pobočné hrany vesměs poloměru r koule se rovnají. Tehdy lze obloučky AB, BC, CA míti za pouhé přímky, kulový trojúhelník ABC za ploský, a jehlan $OABC$ za hranatý, jehož krychlový obsah $\varkappa$ se rovná třetině součinu z podstavy β a výšky v. A že $OA = OB = OC$, padne výška v s bodu O na podstavu ABC spuštěná do středu kruhu o trojúh. ABC opsaného; jest tedy rovna poloměru r koule. Z toho vysvítá, $\varkappa = {}^1/_3 \beta.r$.

obr. 94.

Tím spůsobem lze celou kouli na takovéto jehlany rozložiti, jejichž podstavy znamenáme-li písmeny β_1, β_2, $\beta_3 \ldots \beta_n$, a obsahy krychlové $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3 \ldots \varkappa_n$: nabudeme vzorců $\varkappa_1 = {}^1/_3 \beta_1.r$, $\varkappa_2 = {}^1/_3 \beta_2.r$, $\varkappa_3 = {}^1/_3 \beta_3.r, \ldots \varkappa_n = {}^1/_3 \beta_n.r$, a všechny sečtouce dostaneme vzorec pro krychlový obsah koule $K = {}^1/_3(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n) r = {}^1/_3 P.r$, jakož tvrzeno.

2. Poněvadž $P = 4\pi r^2$, vyjde hodnota krychlového obsahu koule $K = {}^1/_3 P.r = {}^4/_3 \pi r^3$.

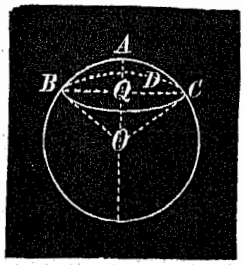
3. Podobným, jako při kouli, spůsobem najdeme krychlový obsah kulového jehlana, který má střed koule za vrchol, a sférický trojúhelník za podstavu, násobíce třetinu podstavy poloměrem, t. $k = {}^1/_3 .p.r$. A poněvadž ploský obsah p sférického trojúhelníka $= e.r^2$, (XLVIII. 7.), vyjde $k = {}^1/_3 e.r^3$, t. j. *krychlový obsah jest*

roveň krychli poloměru znásobené třetinou nadbytku sférického. — Je-li $r = 1$, jest $k = {}^1/_3 e$.

4. Podobným jako při kouli spůsobem najdeme též krychlový obsah kulového výkrojku, jenž za vrchol má střed koule, a za podstavu vrchlík její, znásobíce třetinu vrchlíka poloměrem koule $k = {}^1/_3 p.r$.

Dle XLVI. 3. jest $p = 2\pi r.v$, (v = výška vrchlíka), tedy $k = {}^2/_3 \pi r^2.v$.

obr. 95



Je-li místo výšky $v = AQ$ (obr. 95.) vrchlíka znám obvod O podstavy jeho BDC najdeme nejprv její poloměr $\varrho = BQ = \frac{O}{2\pi}$; a z toho dále výšku AQ, a sice

$v = AQ = AO - QO = r - QO$;

$QO = \sqrt{BO^2 - BQ^2} = \sqrt{r^2 - \varrho^2}$, tedy

$v = r - \sqrt{r^2 - \varrho^2} = r - \sqrt{r^2 - \frac{O^2}{4\pi^2}}$;

pročež $k = {}^1/_3 pr = {}^2/_3 \pi r^2 v = {}^2/_3 \pi r^2 \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{O^2}{4\pi^2}}\right)$.

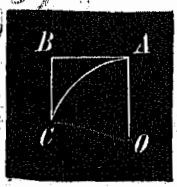
5. Najdi krychlový obsah skrojku kulového $ABCD$ (obr. 95. dána-li jest výška jeho a obvod podstavy jeho.

Rozř. Skrojek $ABCD = s$ jest rozdíl mezi výkrojkem $OBAC = k$ a kuželem $OBDC = k'$. Položíme-li $OB = r$, $BQ = \varrho$, $AQ = v$, $QO = u$: dostaneme $k = {}^2/_3 \pi r^2.v$, $k' = {}^1/_3 \pi \varrho^2.u$, pročež $s = {}^1/_3 \pi (2r^2 v - \varrho^2 u)$; z kteréhož vzorce nejprv r, u vymýtiti jest. Nejprvé patrno, $QO = AO - AQ$, t. j. $u = r - v$; za druhé $OB^2 = OQ^2 + BQ^2$ t. j. $r^2 = u^2 + \varrho^2$: z těchto rovnic najdeme $r = \frac{\varrho^2 + v^2}{2v}$; $u = \frac{\varrho^2 - v^2}{2v}$, a tím $s = {}^1/_6 \pi v (3\varrho^2 + v^2)$, v kterémžto vzorci ještě místo ϱ hodnotu $\frac{O}{2\pi}$ dosaditi jest.

6. Najdi krychlový obsah kulového pásu, dány-li jsou poloměry pomezných kruhů a výška jeho.

Čtenář pomně, že pás jest rozdílem dvou skrojků, rozřeš.

obr. 96.

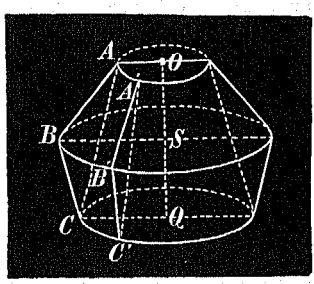


7. Najdi krychlový obsah tělese vzniklého otočením se obrazce ploského ABC kolem osy OA, je li $AB \perp BC \parallel AO$, AC kruhový oblouk, O střed jeho. (obr. 96.) — Rozř. dej čtenář.

8. Najdi krychový obsah tělese vzniklého otočením se trojúhelníka ploského ABC kolem

osy OQ, která leží v prodloužené rovině jeho. (obr. 97.)

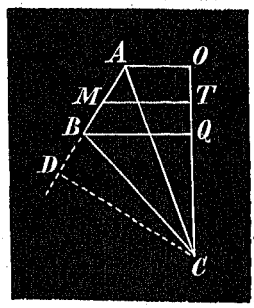
obr. 97.



Řeš. Osou OQ položíce dvě roviny $OABC$ i $OA'B'C'$ neskonale málo od sebe odchýlené, vyřízneme z celého tělese část $ABCA'B'C'$, kterouž lze míti za trojboký hranol šikmo sříznutý, jehož jedna podstava jest ABC, druhá s ní rovnoběžná $A'B'C'$, a pobočné hrany obloučky neskonale krátké, pročež za přímky pokládané $AA' = \alpha$, $BB' = \beta$, $CC' = \gamma$, pročež boky $AA'BB'$, $BB'CC'$, $CC'AA'$ za lichoběžníky považované. Položíme-li $\triangle$ za ploský obsah trojúh. ABC, dostaneme pro krychlový obsah hranolovité výseče vzorec $\varkappa = {}^1/_3\triangle.(\alpha + \beta + \gamma)$, (§. LIX. 3.). Byla-li odchylka obou rovin $OABC$ i $OA'B'C'$ n-tou částí dvou úhlů přímých: dostaneme podobnými řezy, z nichž jeden ode druhého, druhý od třetího atd. jednostejnou tuto odchylku má, n shodných výsečí, z nichž celé tělo se tedy skládá; pročež jest žádaný krychlový obsah K celého tělese $K = {}^1/_3 n\triangle(\alpha + \beta + \gamma) = {}^1/_3\triangle(n\alpha + n\beta + n\gamma)$. Ale $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$ jsou pak obvody kruhů, jež opsaly hrany A, B, C, daného trojúhelníka kolemosy OQ se otáčejíce. Znamenáme-li poloměry jejich písmeny a, b, c, dostaneme
$K = {}^1/_3\triangle(2\pi a + 2\pi b + 2\pi c) = {}^2/_3\pi.\triangle(a + b + c)$.

9. *Výsledek.* Leží-li jedna hrana C trojúhelníka ABC (obr. 98.) na ose OQ, kolem níž se otáčí, jest $c = o$ a tím krychlový obsah tělese otočením vzniklého

obr. 98.



$K = {}^2/_3\pi\triangle(a + b)$ . . . . . $\alpha)$

Vezmeme-li $AB = c$ za podstavu trojúhelníka ABC, a znamenáme-li výšku jeho CD písmenem v, dostaneme $2\triangle = cv$, tedy
$K = {}^1/_3\pi v.c(a + b)$ . . . . . $\beta)$

Spustíme-li z prostřed M podstavy AB na osu OC kolmici $MT = \varrho$, jest $2\varrho = a + b$, pročež $K = {}^2/_3\pi.\varrho.c.v$ . . . . . $\gamma)$

Výraz $2\pi\varrho.c$ vyjadřuje ploský obsah p obliny kuželové vzniklé otočením přímky AB kolem osy OQ. Jest tedy také $K = {}^1/_3 p.v \ldots \delta)$

Poznam. Vzorce posledního lze nabyti přímo, pokládáme-li výsečc za jehlany o společném vrcholi C, jejichž pak výška společná $CD = v$, a podstavami části řečené obliny kuželové jsou.

10. *Úlohy.* *a*) Najdi krychlový obsah tělese vzniklého otočením se mnohoúhelníka pravidelného kolem osy, která jde středem jeho a buď jedním vrcholem aneb prostředkem jedné strany jeho.

b) Najdi krychlový obsah tělese vzniklého otočením se kruhového výkrojku kolem osy, která jde středem výkrojku a v prodloužené rovině jeho leží.

c) Najdi krychlový obsah tělese vzniklého otočením se kruhového skrojku kolem osy, která jde kruhovým středem skrojku a v prodloužené rovině jeho leží.

11. Rozličné úlohy a věty ku cvičení:

a) Do koule jest vepsán válec rovnostraný: v jakém poměru jsou ploské obsahy povrchů vůbec, oblin zvláště, a v jakém krychlové obsahy obou těles?

b) Kolmý válec a kolmý kužel mají za výšky své i za průměry svých podstav průměr koule; v jakém poměru jsou ploské obsahy celých povrchů, v jakém ploské obsahy oblin, a v jakém krychlové obsahy všech tří těles?

c) Do koule jest vepsán jehlan rovnostraný: jak veliká jest strana i výška jeho, a v jakém poměru jsou povrchy, obliny a krychlové obsahy obou těles?

d) Rovnostraný válec, rovnostraný jehlan a koule mají rovné si obsahy krychlové: v jakém poměru jsou jejich průměry?

e) Do koule jest vepsáno všech pět těles pravidelných: v jakém poměru jsou jejich hrany k sobě i k poloměru koule? jak veliké jsou povrchy a jak veliké jsou krychlové obsahy jejich? v jakém poměru jsou jejich povrchy a v jakém krychlové obsahy jak k sobě, tak ku povrchu a krychlovému obsahu koule? Konečně jak vypadnou veličiny a poměry tyto, jsou-li pravidelná tělesa o kouli opsána?

f) Výška jehlana n. kužele rozdělena jest v poměru $m:n$; v jakém poměru jsou pláště a krychlové obsahy obou dílů, na něž se jehlan n. kužel rozdělí rovinou, již rozdělovacím bodem výšky rovnoběžně s podstavou vedeme?

g) Výška jehlana n. kužele jest na n rovných částí rozdělena rovinami s podstavou rovnoběžnými: v jakém poměru jsou pláště a krychlové obsahy všech dílů po sobě od vrchole počínajíc, na které jehlan n. kužel sám rozvržen jest?

h) Skrojek koule rovná se polovičnému součtu z válce, s nímž má podstavu i výšku společnou, a z koule, která má za průměr výšku skrojka.

i) Poměr Tetraedr : koule vepsa : obepsaná
Oktaedr
Hexaedr