GEOMETRIA

pro vyšší gymnasia

od

Václava Jandečky,

učitele matematiky a fysiky na c. k. gymnasiu v Hradci Králové.

Realgymnasium in Deutsch Brod

Díl čtvrtý.

Analytická geometria v rovině.

(Do textu vloženo 112 obrazců.)

Krámská cena: 1 zl. r.

V PRAZE, 1867.

Nákladem spisovatelovým.

ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA
PEDAGOGICKÉ FAKULTY
HRADEC KRÁLOVÉ
Signatura U327/4
Inventár. č. 201220

Tiskem Rohlíčka a Sieverse v Praze.

Předmluva.

Zadost učiniti potřebám učení gymnasialního, a pokud možná hověti přesným methodám geometrů novověkých, měl jsem na mysli, když jsem počal spisovati učebnou knihu geometrie pro vyšší gymnasium. Neobyčejná přízeň, s kterou se první tři díly této knihy jak v listech veřejných tak v dopisech soukromých potkaly, dává mi pochlebné svědectví, že ne-li dokonale aspoň z nemalé části se mi podařilo, oč jsem upřímně se vynasnažoval. Vydávaje nyní díl čtvrtý, jenž jedná o geometrii analytické v rovině, nemám jiného přání, než aby se i jemu dostalo laskavosti, která hojně provázela tři předchůdce jeho. Nauka o proměňování souřadnic, o přímce i o kruhu svědčí, že i zde jsem měl na zřeteli pokrok nových. Přijetím nauky o křivosti tuším nepřekročil jsem mezí učení elementárního; zdáloť se mi býti téměř nedovoleno jednati o křivkách a ničeho nepověděti o křivosti, hlavní to křivek podstati; nepřihlížeje ani k tomu, že i v životě dost obecném shledáváme potřebu znáti přesné, tedy mathematické ponětí o křivosti, jako k. p. když čteme, byť pro pouhou zábavu, o záhybech dráhy železné. Ohledání rovnice druhého stupně v „*závěrku*“ stalo se k vůli zaokrouhlení, i zdálo se mi býti potřebným kamenem posledním v zaklenutí elementární geometrie analytické.

Opominutím závěrku toho zdálo se mi, že by celá nauka v mé knize přednešená ostala pouhým skupením aforismů.

V Hradci nad Labem na nový rok 1867.

Spisovatel.

Obsah.

(Římská číslice znamená §., arabská stránku).

Analytická geometria v rovině.

Omyly tisku.

Str.	řádek:	místo:	čti:
20.	10. zdola,	$\overline{ac} = x$,	$\sqrt{\overline{ac}} = x$.
24.	11. shora,	$\pm$	$\pm\sqrt{}$
24.	12. „	$\mp$	$\mp\sqrt{}$
26.	12. „	$^1/_2x'$, $^1/_2y'$,	$^1/_2x$, $^1/_2y$,
36.	18. zdola:	$rr''\sin(\varphi'-\varphi')$,	$r'r''\sin(\varphi'-\varphi'')$.
40.	13. „	$OB = -n$,	$OB' = -n$.
44.	9. „	Q,	Q'.
47.	7. shora:	$y' = x' = a$,	$y' = x' = 0$.
48.	10. zdola:	$Nx + p'$,	$N'x + p'$.
51.	2. shora:	$-x'''(y'+y'''+y''')$,	$+x'''(y'+y''+y''')$.
52.	5. „	$A'B.B'C.CA'$,	$A'B.B'C.C'A$.
52.	9. zdola:	který,	která.
61.	2. „	a_2,	a^2.
66.	6. shora:	$d < a_1 + a_2$,	$d < a_1 - a_2$.
66.	11. „	$= a_1^2$,	$= a_1$.
66.	12. „	$(d-[a_1-a_2])(d-[a_1-a_2])$,	$(d-[a_1-a_2])(d-[a_1+a_2])$.
66.	21. „	$= a_1^2$,	$= a_1$.
67.	13. „	$(x-p_2)$,	$(x-p_2)^2$.
70.	15. „	$= a'^2$,	$= a^2$.
77.	8. zdola:	$y = +b$,	$y = \pm b$.
83.	12. shora:	y_1^1,	y_1^2.
83.	1. zdola:	a_2,	a^2.
85.	5. shora:	MT^v,	$M'T^v$.
93.	4. „	y,	y^2.
111.	12. „	ey_1^2,	ey_1.
125.	16. „	TM,	FM.

Proprava.

O užívání algebry v geometrii.

§. I.

1. Již v Planimetrii (§. XCVII. a násl.) vyloženo jest, že veličiny prostorové po algebraicku pojímati, a tím způsobem i geometrických pravd vyhledávati i geom. úloh řešiti lze. Nauka o vyměřování obvodů, ploských i tělesných obsahů, zvláště pak celá trigonometria jest toho dostatečným dokladem.

2. Zpytujíce velikost prostorových veličin, hledíme poznati vespolnou jich na sobě závislost. — Je-li mezi nimi jedna neb více neznámých, bývá úlohou určiti velikost jejich z ostatních známých, s nimiž neznámé jsou u vespolné závislosti.

3. Po algebraicku si počínajíce vyjadřujeme veličiny prostorové poměrnými čísly, a jejich vespolnou závislost rovnicí vynášíme. K. p. Znamenajíce podponu a odvěsné písmeny a, b, c vypisujeme větu Pythagorovu rovnicí $a^2 = b^2 + c^2$. — Je-li jedna z nich, k. p. b, neznáma, určujeme ji řešíce rovnici: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

4. K dokonalému určení nějakého tvaru geometrického žádá se a postačuje jistý a pevný počet n veličin vespolek (aspoň v určitých mezích) nezávislých, na nichž pak hodnota všech ostatních tohoto tvaru veličin zavěšena jest; (Srov. Pl. §. XXXVIII.).

5. Má-li tedy rovnice udávati závislost veličin nějakého tvaru geometrického, musí se v ní vyskytovati aspoň o jednu veličinu více, než jich třeba k dokonalému toho tvaru určení; t. aspoň o jednu více, než jich jest mezi sebou nezávislých. Tak k. p. v hořejší rovnici, jíž udáváme větu Pythagorovu, jsou veličiny *tři*, z nichž *dvě* stačí k dokonalému určení trojúhelníka pravoúhlého.

6. Je-li ale v rovnici veličin přes počet k dokonalému určení tvaru potřebný více než jedna: tu sluší a lze zjednati o veličinách k tomu tvaru patřících tolik rovnic rozličných, kolik veličin těch

přes zmíněný počet ve všech rovnicích přebývá. Za příklad mějmež rovnice α), β), γ), δ), ε) v Trig. §. XV. 1. uvedené.

§. II.

1. Co do velikosti znamenáme délku jednoduchým číslem poměrným, k. p. a; obsah ploský součinem ze dvou ($a.b$, a^2), obsah krychlový součinem ze tří jednoduchých čísel poměrných, k. p. $a.b.c$, $a^2.b$, a^3; (Srov. Pl. §, V. 2; §. CXVIII. 1. 2., Ster. §. LVII. 2. c. d.).

Výrazové algebraičtí nabývají dle tvaru geometrického, jehož velikost udávají, jména *výrazů o jednom, o dvou, o třech rozměrech.* Výraz o jediném rozměru nazývá se zhusta *linearným.* — Jednoduché činitele, jimiž se rozměry udávají, nazýváme čísly *rozměrnými* neb *linearnými*, a jich v součinu počet slove *udavatelem rozměrů.* K. p. Výraz $a.b.c$ znamenající krychlový obsah rovnoběžnostěna pravoúhlého, jest výraz o 3 rozměrech; činitelé a, b, c udávající délku hran v jeden hrot se sbíhajících jsou *linearné* č. *rozměrné*; a 3 jest udavatel rozměrů.

Ačkoliv v prostoru jen trojí rozměr máme, však v algebře neobmezujíce se nazýváme výrazem o n rozměrech součin z n činitelů linearných; k. p. $a.b.c.d$ jest výraz o 4, a^3b^2 o 5 rozměrech, jsou-li a, b, c, d činiteli linearnými.

2. Výrazy nazýváme *stejnorodé*, jsou-li jejich udavatelé rozměrů si rovny; jinak slovou *různorodé*; k. p. a, b, c; aneb ab, a^2; aneb abc, a^2b, a^3 jsou výrazy stejnorodé; a, ab, c^3 atd. jsou výrazy různorodé.

3. Jako každým linearným činitelem rozměr výrazu o *1* se rozmnožuje, tak každým linearným dělitelem rozměr výrazu o 1 se zmenšuje; $a.b.c : a = b.c$. — A jako zmocnice výraz číslem m jeho udavatele rozměrů zm—násobíme: tak odmocňujíce číslem m výraz, udavatele rozměrů týmž číslem m odnásobíme; k. p. $\sqrt[3]{a^6} = a^2$.

Z toho jde:

a) Rozměr zlomku určíme odečtouce udavatele rozměrů jmenovatele od udavatele rozměrů počítatele;

b) Rozměr kořene ustanovíme dělíce odmocňovatelem udavatele rozměrů odmocňovance. K. p.

$\frac{ab}{c}$, $\frac{a^2}{b}$, $\frac{abc}{mn}$, $\frac{a^2b}{c^2}$, $\frac{a^3}{b^2}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt[4]{a^3b}$, $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$ atd. jsou

výrazy o jednom rozměru; $\frac{abc}{m}$, $\frac{a^2m}{n}$, $\frac{a^3b}{c^2}$, $\sqrt{abcd}$, $\sqrt{a^3b}$, $\sqrt[3]{(abc)^2}$, atd. jsou výrazy o dvou rozměrech, atd.

4. Každý výraz o n rozměrech ve způsobě zlomku vypsaný dá se rozvesti v činitele, z nichž jeden jest součin z n linearných činitelů, druhé pak opět zlomky jsou ale s počitateli a jmenovateli stejnorodými. K. p. $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c}.b$; $\frac{abc}{m} = \frac{a}{m}.bc$; $\frac{abc^2d}{mnp} = \frac{abd}{mnp}.c^2 = \frac{ab}{mn}.\frac{d}{p}.c^2 = \frac{a}{m}.\frac{b}{n}.\frac{d}{p}.c^2$; atd.

Odtud plyne samo sebou:

Rozměr výrazu se nezmění, znásobíme-li neb dělíme-li výraz poměrem dvou stejnorodých výrazů.

Z této pak příčiny poměr dvou výrazů stejnorodých není v součinu činitelem lineárným, nébrž pouhým součinitelem, jenž k hodnotě udavatele rozměrů nic nepřičiňuje. Poměr takový znamenati lze jako čísla vůbec buď ciframi, aneb písmeny, a to k lepšímu rozeznání od činitelů linearných z jiné abecedy. K. p. Znamenajíce písmenem r poloměr kruhu neb koule, klademe obvod kruhu $= 2\pi r$, (výraz linearný); ploský obsah jeho $= \pi r^2$, (výraz o 2 rozměrech); krychlový obsah koule $= \frac{4}{3}\pi r^3$, (výraz o 3 rozměrech): i jsou 2π, π, $\frac{4}{3}\pi$ pouhými součiniteli, nikoliv činiteli linearnými. Jiných příkladů hojnost hledej v Plan. Ster. i Trig. Všecky úkony goniometrické jsou takovými součiniteli bezrozměrnými. —

5. Je-li některý dělitel $m^n = 1$, vynechává se dle obyčeje počtářského, čímž v dělenci (č. v počítateli) výrazu z n činitelů linearných stane se ihned dle odst. 4. tolikéž součinitelův bezrozměrných: což opomineme-li pamatovati, zvýšíme mylně udavatele rozměrů o n jedniček. K. p. je-li v lineárném výrazu $\frac{abc}{m^2}$ dělitel $m = 1$, bude $\frac{abc}{m^2} = a.b.c$, kdežto již ab pouhým součinitelem, a jen c činitelem linearným jest: to minouce máme mylně $a.b.c$ za výraz o 3 rozměrech.

Chceme-li pravého udavatele rozměrů v některém výrazu, jehož udavatel rozměrů dle počtu činitelů o n jedniček nad pravý počet v sobě zahrnovati se zdá, učiniti patrným: připíšeme za dělitele 1^n, aneb m^n, kladouce $m = 1$. K. p. Je-li výraz $\frac{a^2b^4}{c}$ v skutku o

dvou rozměrech, an se nám o pěti býti zdá, vypíšeme

$$\frac{a^2b^4}{c} = \frac{a^2b^4}{c.1^3} = \frac{a^2b^3}{c.m^3},\ m = 1.$$

6. Rovněž vynechává se činitel linearný, je-li jedničce roveň. Tím se zase udavatel rozměru zdánlivě sníží. Chtějíce jej učiniti patrným, musíme za činitele přibrati 1^n čili m^n, $m = 1$: je-li udavatel v skutku o n jedniček větší, než dle počtu položených činitelů linearných býti se zdá. K. p. Má-li činitel linearný a v skutku býti výrazem o 3 rozměrech, napíšeme $a = a.1^2 = a.m^2$, $m = 1$.

Poznam. Často bývá pohodlno, veličiny i vyšších (dvou, tří atd.) rozměrů jediným písmenem znamenati, k čemuž pak pro snadnější rozeznávání užívá se písmem z jiné abecedy; k. p. ploský obsah trojúhelníka lze znamenati písmenem $\triangle$.

§. III.

1. Jen stejnorodé výrazy lze sčítati a odčítati.

Součet i rozdíl stejnorodých výrazů jest s nimi stejnorodý.

Stejnorodost sčítanců a odčítanců není-li zřejmá, může se dle §. II. 5. 6. učiniti patrnou.

2. Sčítání neb odčítání výrazů různorodých, kdeby se přece stalo, musí nevlastním a pouze zdánlivým jmíno býti. To se může přihoditi sečtením neb odečtením dvou rovnic, z nichž v jedné jsou členy vyššího rozměru než v druhé. K. p. Přičtouce rovnici $a+b-\sqrt{cd}=0$ k rovnici $ab+c^2-d.\sqrt{gh}=0$, dostaneme $a+b-\sqrt{cd}+ab+c^2-d\sqrt{gh}=0$.

Této neshodě chtějíce se v podobných případech vystříhati, můžeme před sčítáním rovnici, jejíchžto členů rozměr jest o n jedniček nižší, součinem z n linearných činitelů kterýchkoliv množiti, aneb rovnici druhou děliti.

3. Rovnice má *stejnorodost*, když veškeré její členy jsou výrazy stejnorodé; jinak jest rovnice *různorodná*.

4. V rovnici stejnorodné, není-li stejnorodost jejích členů zřejmá, učiní se patrnou dle §. II. 5. 6. K. p.

místo: $x = a + \sqrt{b}$, položíme $x = a + \sqrt{b.m}$, $(m = 1)$;

místo: $x^2 = a + b^3 + \sqrt{c}$, položíme

$$x^2 = am + \frac{b^3}{m} + m.\sqrt{c.m},\ (m = 1);$$

místo: $x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, položíme $x = m\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, aneb $x = \sqrt{2m^2 + m.\sqrt{3m^2}}$.

Poznam. Mnozí nazývají rovnice a výrazy, kterýchž jednorodost zřejmá není, již různorodými, my pak tento náhled za nelogický majíce od něho se odchylujeme.

5. Z rovnice různorodné dá se vyvésti tolik rovnic o sobě stejnorodných, kolikero jest v ní členů různorodných. Neboť na nullu uvedená nemůže obstáti, leč když každý algebraický součet všech členů stejnorodých o sobě nulle se rovná; (Srov. odst. 1. 2.).

K. p. Z rovnice $a + b\sqrt{c} - \sqrt{df} + gh - \frac{mn}{\sqrt{p}} - k^2 = 0$, pod tou výmínkou, že a, b, c, d, f, g, h, k, m, n, p jsou linearnými činiteli, a že nižádná určitá délka za míru přijata nebyla, a proto že nižádný ani činitel ani dělitel nemoha této neurčené míře za rovna pokládán býti, vynechán nebyl, vyvozujeme rovnice tři, a sice:

$$a - \sqrt{df} = 0;\ b\sqrt{c} - \frac{mn}{\sqrt{p}} = 0;\ gh - k^2 = 0.$$

6. Není-li jisto, zdali rovnice jest stejno- či různorodná, budeme ji míti za stejnorodnou, učiníme-li stejnorodnost její dle odst. 4. patrnou. Neboť byla-li by různorodná, tu rozloživše ji dle odst. 5. na stejnorodné, zjednáme dle odst. 2. vzájemnou stejnorodnost všem, a pak je sečteme. Tím dojdeme jednostejného výsledku, jako když danou rovnici dle odst. 4. patrně stejnorodnou učiníme. K. p. Rovnice

$$a + b\sqrt{c} + gh = \sqrt{df} + \frac{n^2}{\sqrt{p}} + k^2$$

byť i různorodnou byla, stane se *patrně stejnorodnou*, budou-li všechny její členy *patrně* o 2 rozměrech. To se stane, píšeme-li, $m = 1$ kladouce:

$$am + b\sqrt{cm} + gh = m\sqrt{df} + n^2\sqrt{\frac{m}{p}} + k^2.$$

Hořejší rovnice, je-li různorodná, rozkládá se v tyto:

$$a = \sqrt{df};\ b\sqrt{c} = \frac{n^2}{\sqrt{p}};\ gh = k^2;$$

z nich pak snadno nabudeme:

$$am = m\sqrt{df};\ b\sqrt{cm} = n^2.\sqrt{\frac{m}{p}};\ gh = k^2;$$

tyto pak sečtouce dostaneme jako svrchu:

$$am + b\sqrt{cm} + gh = m\sqrt{df} + n^2\sqrt{\frac{m}{p} + k^2}.$$

§. IV.

Vyloživše, čeho třeba, rozvrhujeme propravnou nauku o užívání algebry k účelům geometrickým na čtvero částí:

1. Algebraické určování zákonů o závislosti veličin geometrických;

2. Algebraické určování geometrických veličin závislých z dostatečného počtu nezávislých;

3. Geometrické sestrojování veličin geometrických po algebraicku určených;

4. Řešení úloh geometrických užitím algebry, či: sestrojování tvarů geometrických z veličin, na nichž žádaný tvar obyčejně se zakládá, kteréžto ale nejsou původně známy, nébrž po algebraicku se dříve najdou z jiných veličin daných, na nichž závislými učiněny jsou.

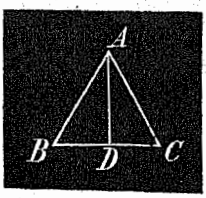
§. V.

Určování závislosti veličin geometrických rovnicemi.

1. Veliké množství vět nám z geometrie již známých vyslovuje závislost veličin geom. v skutku rovnicemi, udávajíc, v kterém spojení které kterým se rovnají aneb v kterém k sobě jsou poměru. Tehdy nic jiného není potřebí, než abychom užijíce patřičných znamení algebraických závislost tu rovnicí vypsali. K. p. Věta Pythagorova, Carnotova, věty o vypočítávání obvodu, ploského i krychlového obsahu atd.

2. K určení závislosti jiných veličin v tvaru geometrickém postačí často jediná z těchto známých vět. Které věty k tomu konci užiti se má, učí přirozenost věci sama.

obr. 1.



K. p. *Hledejme závislost strany a výšky trojúhelníka rovnostranného.*

Buď (obr. 1.) $AB = BC = CA = a$, $AD \perp BC$, $AD = v$; tedy $BD = \frac{1}{2}a$.

Jest pak v $\triangle ABD$ dle věty Pyth. $AD^2 = AB^2 - BD^2$, čili

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2; \text{ aneb } 4v^2 = 3a^2.$$

Ku cvičení. Jaká jest závislost 1) mezi stranou a úhlopříčkou čtverce? 2) mezi stranama a úhlopříčkou pravoúhelníka? 3) mezi podstavou, výškou a jedním úhlem rovnoběžníka? 4) mezi dvěma stranama a příslušnými výškami trojúhelníka?

3. Nedá-li se závislost *žádaných* veličin jedinou známou větou poznati, přibíráme k nim jednu neb i více veličin *pomocných*, tak aby se závislost mezi obojími v rovnicé uvesti dala větami známými. Tehdy sluší pamatovati:

a) Pomocné veličiny mají s žádanými v zájemné závilosti býti.

b) Pomocné veličiny přibírají se z tvaru samého, v němž buďto již původně jsou, aneb jich dostatek sestrojíme (k. p. kolmice, příčky, rovnoběžky, tečné atd. vedouce a vždy k tomu přihlížejíce, aby pomocné s žádanými byly v závislosti některou větou nám známé).

c) Mezi veličinami pomocnými i žádanými zřídíme rozličných rovnic tolik, aby

α) v nich všechny žádané veličiny po různu se vyskytovaly; i aby rovnic těch

β) bylo aspoň o jednu více než jest veličin pomocných.

V počtu těchto rovnic mohou býti i takové, v kterých jen pomocné veličiny se vyskytují: což se stává, když jest pomocných veličin tolik, že mezi nimi samými vespolná jest závislost.

d) Nelze-li nižádným způsobem tohoto počtu rovnic se domoci, jest to znamením, že veličin, jejichž vespolnou závislost zpytovati máme, není udán počet k závislosti dostatečný.

e) Zřízeno-li ale všech rovnic těch rozličných přes počet pomocných veličin o několik více než jedna, jest to opět znamením, že veličin, jejichž závislost zpytujeme, udáno jest přes počet k závislosti potřebný o tolikéž více.

f) Majíce rovnic mezi veličinami žádanými i pomocnými počet dostatečný, vymýtíme z nich všechny veličiny pomocné. Tím činem ztenčí se počet rovnic o tolik, kolik veličin vyloučeno: i bude pak nových rovnic tolik, kolik prvé všech rovnic přes počet veličin pomocných bylo. V nových těchto rovnicích vyskytují se již jen žádané veličiny: a proto každá z nich vyslovuje zákon o jejich závislosti. Tu pak pamatujme zvlášť:

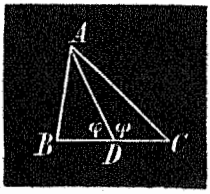
α) Zbývá-li po vyloučení veličin pomocných rovnice jediná, jest žádaná závislost již nalezena — leč že bychom rovnici tu ještě zjednodušili, a tím i zákon závislosti co do formy pozměnili.

β) Zbývá-li ale rovnic těch více než jedna, tu v nich žádané veličiny po různu se vyskytnou, a sice v každé rovnici veličin aspoň tolik, kolik jich k závislosti stačí. Chtějíce ale přece o *všechněch* jmenovaných veličinách zákon vespolné závislosti vysloviti, spojujeme tyto rovnice šetříce stejnorodnosti algebraickým obratem (k. p. sčítáním, odčítáním, násobením, dělením atd.) v rovnici jedinou.

g) Že hlavních veličin, jejichž závislost zpytovati máme, udáno přes počet k závislosti potřebný, objevuje se obyčejně již mezi zřizováním rovnic; a to pokaždé, když rovnic zřízených jest o jednu více než veličin pomocných, ačkoliv veličiny hlavní nejsou v nich veškeré. Tehdy můžeme také od zřizování jiných ještě rovnic ustati, a pomocné veličiny z rovnic zřízených vymýtiti: čímž dostaneme rovnici, která udává zákon o závislosti těch hlavních veličin, které do rovnic přijaty jsou byly. Ostatní hlavní veličiny přivedeme pak do nových rovnic buďto pouhou obdobou, aneb doplníme počet původních rovnic dle odst. b) a naložíme s nimi jako v odst. c)—f) vyloženo jest. — Obdoby užijeme, kdykoliv získanou rovnicí vysloven jest zákon o závislosti obecný, který rovnou měrou platí o všech ostatních ač v řečené rovnici se nevyskytujících veličinách hlavních. K. p. Vyšla-li rovnice o závislosti tří stran a jedné výšky trojúhelníka, lze obdobou ihned vypsati rovnici o závislosti tří stran a druhé neb třetí výšky téhož trojúhelníka.

4. *Příklady.* I. *Hledá se závislost stran a příčky vedené od vrchole trojúhelníka k prostředku protější strany.*

obr. 2.



Buď v trojúh. ABC (obr. 2.)

$BD = DC = \frac{a}{2}$, $AB = c$, $CA = b$, $\sphericalangle ADB = \varphi$,

$\sphericalangle CDA = \psi$, $AD = a'$.

Dle Carnotovy věty jest . $c^2 = a'^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a'a\cos\varphi$ . . 1)

a podobně . . . . . $b^2 = a'^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a'a\cos\psi$ . . 2)

posléz jest také . . . . $\varphi + \psi = \pi$ . . . . . 3)

Sečtouce rovnice 1) a 2) dostaneme:

$$b^2 + c^2 = 2a'^2 + \frac{a^2}{2} - aa'(\cos\varphi + \cos\psi); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Z rovnice 3) dle Trig. §. VII. 3. vz. 41. vysvítá

$$\cos\varphi + \cos\psi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Z rovnic 4) a 5) vyplývá

$$b^2 + c^2 = 2a'^2 + \frac{a^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

závislosti hledané zákon.

II. *Hledá se závislost stran a příček vedených z vrcholů trojúhelníka k prostředkům protějších stran.*

Znamenáme-li strany, jako v příkladu I., písmeny a, b, c, a příčky písmeny a', b', c': dostaneme (jako v I. rovn. 6.).

$$b^2 + c^2 = 2a'^2 + \frac{a^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

a dle tohoto vzoru pouhou obdobou:

$$c^2 + a^2 = 2b'^2 + \frac{b^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

$$a^2 + b^2 = 2c'^2 + \frac{c^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

Sečtením všech těchto tří rovnic dostaneme zjednodušivše:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(a'^2 + b'^2 + c'^2) \quad \ldots \quad 4)$$

závislosti žádaný zákon.

III. *Hledá se závislost úhlů, obvodu a ploského obsahu trojúhelníka.*

a) Buď $\triangle$ ploský obsah, $2s$ obvod, α, β, γ úhly trojúhelníka; a strany proti těmto úhlům ležící a, b, c (veličiny pomocné); i jest pak:

$$a + b + c = 2s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

a dle Trig. §. XIII. 7. klademe:

$$a.b.\sin\gamma = 2\triangle \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

$$b.c.\sin\alpha = 2\triangle \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

$$c.a.\sin\beta = 2\triangle \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Z těchto 4 rovnic abychom a, b, c vymýtili, znásobme spolu poslední tři: tím vyjde odmocněním

$$abc = 2\triangle\sqrt{\frac{2\triangle}{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma}} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

Dělíme-li rovnici 5) rovnicí 2), neb 3), neb 4): nabudeme

$$c = \sin\gamma.\sqrt{\frac{2\triangle}{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma}} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

$$a = \sin\alpha.\sqrt{\frac{2\triangle}{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma}} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

$$b = \sin\beta.\sqrt{\frac{2\triangle}{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma}} \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

Součet rovnic 6), 7), 8), máme-li zřetel k rovnici 1), vydá:

$$2s = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\sqrt{\frac{2\triangle}{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma}}, \quad 9)$$

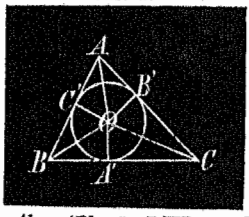
kteroužto rovnici, užijíce Trig. §. VIII. 9., §. VIII. 7. vz. 69. a §. V. 8., proměníme v tuto:

$$s = \sqrt{\triangle.\cot\frac{\alpha}{2}.\cot\frac{\beta}{2}.\cot\frac{\gamma}{2}} \quad . \; . \; . \; . \quad 10),$$

jížto se žádaný zákon vyslovuje.

b) Výsledek rovnicí 10) získaný dává nám polovičnými úhly, ježto se v něm vyskytují, na ruku jiný způsob, dle něhož pokračujíce žádaného zákona se dopátráme, a sice:

obr. 3.



V trojúh. ABC (obr. 3.) rozpol úhly A, B, C přímkami AO, BO, CO, ježto se protínají v bodě jediném O (Pl. §. LXXIX. 4. C.); i jsou pak kolmice s bodu O na strany trojúhelníka spuštěné sobě rovny, t. j. $OA' = OB' = OC' = r$, a každá z nich poloměrem kruhu do trojúhelníka vepsaného (Pl. §. LIII. §. LXXVII. 7.). I jest pak:

$$\triangle BOC = {}^1/_2 a.r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

$$\triangle COA = {}^1/_2 b.r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

$$\triangle AOB = {}^1/_2 c.r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

a sečtením těchto tří rovnic, povážíme-li, že jest

$\triangle BOC + \triangle COA + \triangle AOB = \triangle ABC = \triangle$, dostaneme

$$(a + b + c)\,r = 2\triangle \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

Položíme-li opět $a + b + c = 2s$, vyjde

$$s.r = \triangle \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

z kteréžto rovnice veličinu r vymýtiti jest. K tomu konci máme:

$A'O.\cot{}^1/_2\beta = BA'$; $A'O.\cot{}^1/_2\gamma = A'C$, pročež

$A'O.(\cot{}^1/_2\beta + \cot{}^1/_2\gamma) = BA' + A'C$, čili

$$r.(\cot{}^1/_2\beta + \cot{}^1/_2\gamma) = a \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

podobně (dle pouhé obdoby) najdeme:

$$r.(\cot{}^1/_2\gamma + \cot{}^1/_2\alpha) = b \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 7)$$

$$r.(\cot{}^1/_2\alpha + \cot{}^1/_2\beta) = c \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 8)$$

a sečteme-li rovnice 6), 7), 8); $a + b + c = 2s$ kladouce:

$r.(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}) = s$, anob což jedno jest:

$r.\cot\frac{\alpha}{2}.\cot\frac{\beta}{2}.\cot\frac{\gamma}{2} = s$, (Trig. §. VIII. 9.)

odtud $$r = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Z rovnice 9) a 5) dostaneme

$$s = \sqrt{\triangle \cdot \cot\frac{\alpha}{2} \cdot \cot\frac{\beta}{2} \cdot \cot\frac{\gamma}{2}} \quad . \quad . \quad 10)$$

5. Majíce několik rovnic mezi veličinami jistého tvaru, můžeme nedbajíce rozdílu mezi hlavními a pomocnými veličinami kterékoliv z rovnic vymýtiti, čímž nabudeme zákonů o závislosti nových. — Podobně přicházíme na takovéto zákony, spojujíce rovnice původní mezi sebou i mezi rovnicemi postupem počtu získanými. K. p.

V příkl. II. odst. 4. můžeme vymýtiti z rovnic 1), 2), 3) tam uvedených veličiny b, c, aneb c, a, aneb a, b: učiníce tak dostaneme:

$$9a^2 + 4a'^2 = 8b'^2 + 8c'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$
$$9b^2 + 4b'^2 = 8c'^2 + 8a'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$
$$9c^2 + 4c'^2 = 8a'^2 + 8b'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma)$$

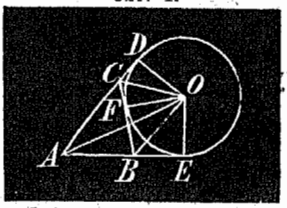
Odečteme-li ale rovnici 3) od 2), vyjde:

$$3\,(c^2 - b^2) = 4\,(b'^2 - c'^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta)$$

kteréžto rovnice vyslovují nové zákony o závislosti veličin v nich se vyskytujících.

6. Z toho vyplývá, že a kterak lze hledati zákony o závislosti veličin nějakého tvaru geometrického, byť tyto veličiny napřed všechny jmenovány nebyly. Tehdy není nic jiného třeba, než vycházeti od některých z těchto veličin, a sice od těch, jejichž vespolnou závislost nejsnáze známou větou do rovnice uvesti dovedeme, a pak přibírati k nim do nových rovnic veličiny jiné, a s rovnicemi naložiti dle pravidel svrchu vypsaných.

obr. 4.



Příklad. Geom. tvarem buď trojúhelník ABC (obr. 4.) se svými 4 kruhy dotyčnými. Hledejme některé zákony o závislosti veličin tvaru tohoto.

Znamenajíce strany, obvod, ploský obsah trojúhelníka způsobem obvyklým položme poloměr kruhu vepsaného $= r$; poloměr kruhu, který se strany a vně dotýká, buď $= r_a$; a podobný význam mějtež r_b, r_c.

Jako v odst. 4. příkl. III. b) rovn. 5) najdeme:

$$s \cdot r = \triangle \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Dále buď O (obr. 4.) střed kruhu, který se strany BC vně dotýká, a poloměr jeho $OD = OE = OF = r_a$. Veďme přímky OA, OB i OC, jest pak patrně:

$$\triangle = \triangle CAO + \triangle ABO - \triangle BCO$$
$$\triangle CAO = \tfrac{1}{2} AC.\ OD = \tfrac{1}{2} b\ .\ r_a$$
$$\triangle ABO = \tfrac{1}{2} AB.\ OE = \tfrac{1}{2} c.\ r_a$$
$$\triangle BCO = \tfrac{1}{2} BC.\ OF = \tfrac{1}{2} a.\ r_a$$

pročež $\triangle = \tfrac{1}{2}\ (b + c - a).\ r_a$,

aneb $$(s - a).\ r_a = \triangle \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

podobně vyjde pouhou obdobou:

$$(s - b).\ r_b = \triangle \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$
$$(s - c).\ r_c = \triangle \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Znásobíme-li rovnice 1), 2), 3), 4) vespolek, vyjde:

$$s(s - a)(s - b)(s - c).r.r_a.r_b.r_c = \triangle^4 \quad . \quad 5)$$

Vzpomenouce, že dle Trig. §. XIII. 9. jest

$$s(s - a)(s - b)(s - c) = \triangle^2 \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

dostaneme dělíce 5): 6)

$$r.\ r_a.\ r_b.\ r_c.\ = \triangle^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7).$$

Pozměníme-li ale rovnice 1), 2), 3), 4) na tuto dobu:

$$\frac{1}{r} = \frac{s}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$
$$\frac{1}{r_a} = \frac{s - a}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$
$$\frac{1}{r_b} = \frac{s - b}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$
$$\frac{1}{r_c} = \frac{s - c}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

a odečteme-li nyní rovnici 8) od součtu všech tří následujících, dostaneme považivše že jest $a + b + c = 2s$:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} = 0; \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

Rozdíl mezi rovnicí 8) a následující, vydá:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{a}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$$
$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b} = \frac{b}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$
$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{c}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

Součet rovnic 9) a 10), neb 9) a 11), neb 10) a 11) jest:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{c}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 16)$$

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}=\frac{b}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 17)$$

$$\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{a}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 18)$$

Vymýtíce $\triangle$ dostaneme z rovnic 1) a 2)

$$a \,.\, r_a = s(r_a - r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 19)$$

z rovnice 1) a 7):

$$s^2 . r = r_a . r_b . r_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 20)$$

z rovnice 7) a 13) neb 18):

$$a=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)\sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c} \quad \ldots\ldots 21)$$

$$a=\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\sqrt{r . r_a . r_b . r_c} \quad \ldots\ldots 22)$$

Z rovnic 20), 21), 22) lze pomocí 12) kterýkoliv poloměr vyloučiti.

Násobíme-li spolu rovnice 13) a 14), dostaneme

$$\frac{ab}{\triangle^2}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)+\frac{1}{r_a r_b}; \text{ a pomocí 12)}$$

$$\frac{ab}{\triangle^2}=\frac{1}{r\, r_c}+\frac{1}{r_a\, r_b}; \text{ a vymýtíme-li } \triangle \text{ rovnicí 7); vyjde:}$$

$$ab = r_a\, r_b + r_c\, r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 23).$$

Součet a rozdíl rovnic 13) a 14), máme-li zřetel k rovnicím 7) a 12), vedou k rovnicím:

$$a+b=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_c}\right)\sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c} \quad \ldots\ldots 24)$$

$$a-b=\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)\sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c} \quad \ldots\ldots 25)$$

Dělíme-li ale rovnici 13) rovnicí 14), vyjde:

$$a\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}\right)=b\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right) \quad \ldots\ldots 26)$$

Z posledních čtyr rovnic, (je-li třeba, pomocí rovnice 12), dá se snadno kterékoliv dvé poloměrů vymýtiti.

Dodavek 1. Čtenář nahlídne, že tímto způsobem bádání dále rozepřísti by se dalo, zvláště kdybychom k veličinám zavedeným ještě jiné přibrali; k. p. poloměr kruhu opsaného, úhly trojúhelníka daného, trojúhelník, jenž má středy dotyčných kruhů za vrchole, rozličné příčky, výšky, úsečky atd. atd.

Dodavek 2. Za příležitosti takového zpytování poznáváme jako mimochodem rozličné věty o případech zvláštních. K. p. Položíme-li v rovnicích 9) a 10) $a \gtreqless b$, vyjde $r_a \gtreqless r_b$. Porovnáme-li rovnici 8) a 9), najdeme $r < r_a$.

7. *Příklady ku cvičení.*

a) Najdi zákon o závislosti

α) Stran a uhlopříček rovnoběžníka;

β) Výšek a buďto jedné strany aneb jednoho úhlu, aneb obvodu, aneb ploského obsahu trojúhelníha rovnorameného;

γ) Výšek a ploského obsahu trojúhelníka;

δ) Součtu dvou stran, úhlu jima sevřeného, strany třetí a ploského obsahu trojúhelníka.

ε) Stran trojúhelníka a poloměru kruhu opsaného.

§. VI.

Algebraické určování závislých veličin geometrických.

1. Majíce z dostatečného počtu nezávislých veličin známých najíti veličiny geometrického tvaru závislé a neznámé, hledíme dle návodu §. V. žákony o závislosti veličin známých i neznámých vynesti rovnicemi tolika, kolik jest veličin neznámých; rovnice ty řešíce ustanovujeme pak po algebraicku veličiny neznámé. Nestačí-li nám k tomu činu veličiny dané a žádané, přibíráme k nim z geometrického tvaru veličiny pomocné, kteréž za tolikéž nových neznámých kladouce z rovnic nejprv vymýtíme, a ze zbylých rovnic žádané neznámé najdeme.

2. *Příklady.* I. Najdi stranu a rovnostraného trojúhelníka, je-li výška v jeho známa. — *Řeš.* Dle §. V. 2. jest $3a^2 = 4v^2$; odtud $a = {}^2/_3 v. \sqrt{3}$.

II. Najdi strany x, y, z trojúhelníka, jsou-li dány příčky t_x, t_y, t_z, ku prostřed stranám z protějších vrcholů vedené.

Řeš. Dle §. V. 5. α) jest $9x^2 + 4t_x^2 = 8t_y^2 + 8t_z^2$; odtud

$$x = {}^2/_3 \sqrt{2t_y^2 + 2t_z^2 - t_x^2}; \text{ a podobně}$$

$$y = {}^2/_3 \sqrt{2t_z^2 + 2t_x^2 - t_y^2};$$

$$z = {}^2/_3 \sqrt{2t_x^2 + 2t_y^2 - t_z^2}.$$

III. Dány jsou úhly a ploský obsah trojúhelníka: najdi strany jeho.

Řeš. viz §. V. 4. příkl. III. rovnice 6), 7), 8).

IV. Dány jsou poloměry dotýčných tří kruhů vnějších, najdi ploský obsah trojúhelníka.

Řeš. Z rovnic 7) a 12) §. V. 6. vymýtíce r najdeme

$$\triangle = \frac{r_a r_b r_c}{\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}}$$

V. Dány jsou strany trojúhelníka, najdi:

a) výšky jeho; b) příčky, jimiž se jeho úhly rozpolují.

VI. Dány jsou jedna strana, protější úhel a ploský obsah trojúhelníka; najdi druhé dvě strany jeho.

VII. Dány jsou všechny 4 strany lichoběžníka; najdi

a) úhly jeho, b) úhlopříčné, c) výšku.

VIII. V čtyrúhelníku dány jsou všechny 4 úhly a dvě strany sousedné, kteréž si rovny jsou: najdi úhlopříčky.

IX. Ve dvou kruzích, jejichž poloměry i střednice (vzdálenost středů) známy jsou, vedeny jsou dva poloměry směry sice rovnoběžnými ale protivnými; přímka, která spojuje konce těchto poloměrů, protíná střednici v kterémsi bodě: najdi vzdálenosti tohoto průseku od středův kruhů.

X. Dány jsou poloměry dvou koulí a vzdálenost jejich středův. Okolo obou koulí jest opsán kužel. Najdi

a) osu tohoto kužele počínajíc od středu koule menší až k vrcholi kužele; b) najdi vzdálenost od téhož středu vycházeje, v které by musela třetí koule, jejíž poloměr jest znám, do téhož kužele vepsána býti, aby se i jejího povrchu plášť kužele odevšad dotýkal; c) najdi poloměr třetí koule, která do řečeného kužele vepsána jest, dána-li jest vzdálenost jejího středu od středu dané koule menší.

§. VII.

O geometrickém sestrojování výrazů algebraických.

Nejjednodušší linearné tvary rozřešených rovnic prvního stupně jsou:

$$x = a + b;\ x = a - b;\ x = \frac{bc}{a}.$$

1. Kterak se přímka x sestrojí dle rovnice $x = a + b$, aneb dle rovnice $x = a - b$, o tom viz v Pl. §. V. 4.

Přídavek. Má-li se přímka x dle rovnice $x = a + b - c + d - e + \ldots$ sestrojiti, najdeš rozřešení též v Pl. §. V. 5.

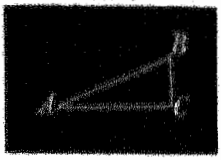
2. Rovnice $x = \frac{bc}{a}$ dá se proměniti v úměru $a : b = c : x$, jíž se žádá, aby ku třem přímkám a, b, c sestrojena byla čtvrtá x úměrná. — Řeš. viz Pl. § XCIV. 4.

Přídavek 1. Má-li sestrojeno býti $x = \frac{b^2}{a}$, z čehož jde úměra $a : b = b : x$, řešiti lze způsobem zvláštním dle Pl. § XCIV. 5.

Přídavek 2. Zvláštní jest případ, když v rovnici $x = \frac{bc}{a}$ poměr $\frac{c}{a}$ jest nějaký úhon úhloměrný, a sice (a za b kladouce):

a) $x = a \cdot \sin\alpha$; b) $x = a \cdot \cos\alpha$; c) $x = a \cdot \operatorname{tang}\alpha$; d) $x = \frac{a}{\cos\alpha}$; e) $x = a \cdot \cot\alpha$; f) $x = \frac{a}{\sin\alpha}$.

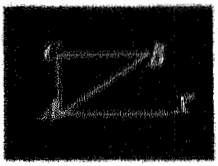
obr. 5.



Sestroj. a) b). Učiň $\sphericalangle CAB = \alpha$, (obr. 5.), sřízni $AB = a$, spusť $BC \perp AC$; i jest $CB = a \cdot \sin\alpha$, $AC = a \cdot \cos\alpha$, (Trig. § XII.).

Sestroj. c) d). Učiň opět $\sphericalangle CAB = \alpha$, (obr. 5.), sřízni $AC = a$, vztyč $CB \perp CA$; i jest $CB = a \cdot \operatorname{tang}\alpha$, $AB = \frac{a}{\cos\alpha}$. (Trig. § XII.).

obr. 6.



Sestroj. e) f). Učiň (obr. 6.) $\sphericalangle XAB = \alpha$, $AC \perp AX$, $AC = a$, $CB \parallel AX$; i jest $CB = a \cdot \cot\alpha$, $AB = \frac{a}{\sin\alpha}$. (Trig. § XII.).

Přídavek 3. Je-li v rovnici $x = \frac{bc}{a}$ poměr $\frac{c}{a}$ dvěma prostými čísly vysloven, dá se nahraditi poměrem dvou přímek (viz Pl. § XCIV. 1.). — Rovněž lze každý úhon úhloměrný nahraditi poměrem dvou přímek (Trig. § XII. 2).

3. Má-li se přímka x sestrojiti dle rovnice $x = \frac{cde}{ab}$; sestrojíme $\frac{cd}{a} = c'$, čímž bude $x = \frac{c'e}{b}$, kteréžto x jako svrchu sestrojíme.

Podobně si počínáme, když rozměry počítatele a jmenova-

tele jednoduchého zlomku jsou ještě vyšší. K. p. $x = \frac{a^2bc^2}{mnpq}$; sestroj $\frac{a^2}{m} = a'$; $\frac{a'b}{n} = b'$, $\frac{b'c}{p} = c'$, $\frac{c'c}{q} = x$, i bude posloupně: $\frac{a^2bc^2}{mnpq} = \frac{a'bc^2}{npq} = \frac{b'c^2}{pq} = \frac{c'c}{q} = x$.

Přídavek 1. Jako tuto jednoduchý zlomek linearný, tak i jednoduchý zlomek vyššího rozměru dá se posloupným sestrojováním dle odst. 2. proměniti na tvar čísla celého, ve spůsobě $a.b$, a^2b, abc atd. — Má-li ale počítatel i jmenovatel stejně vysoký rozměr, lze zlomek tímto způsobem převesti na tvar $\frac{m}{n}$.

Přídavek 2. Je-li rovnice $x = \frac{m^2a}{n^2}$, z níž jde úměra $x : a = m^2 : n^2$, dá se přímka x sestrojiti způsobem zvláštním dle Pl. §. XCIX. 4.

4. *Výsledek.* Hodnota mnohočlena lineárného, jejž po geometricku sestrojiti lze, dá se v algebraickém výrazu nahraditi jednočlenem ve spůsobě čísla celého.

5. Mnohočlen o n rozměrech dá se nahraditi stejnorodým jednočlenem. Neboť vysadíme-li $(n-1)$ činitelů jednoduchých, zbude za posledního činitele mnohočlen lineárný, kterýž se jednočlenem nahradí. K. p.

$$a^2.b.\operatorname{tang}\alpha - \frac{c^2d^2}{e} + g^3 = a^2.\left(b.\operatorname{tang}\alpha - \frac{c^2d^2}{a^2e} + \frac{g^3}{a^2}\right);$$

položíme-li a sestrojíme-li nejprv $b.\operatorname{tang}\alpha = b'$, $\frac{c^2d^2}{a^2e} = c'$, $\frac{g^3}{a^2} = g'$, potom $b' - c' + g' = h$; vyjde:

$$a^2b\operatorname{tang}\alpha - \frac{c^2d^2}{e} + g^3 = a^2h.$$

6. Máme-li geometricky sestrojiti lineárnou hodnotu zlomku složeného, proměňme dle odst. 5. jmenovatele i počítatele v jednočleny: tím zlomek stane se jednoduchým, jehož hodnotu dle odst. 3. sestrojiti lze. K. p.

$$\frac{abc + d^2e}{ad - be} = \frac{d^2\left(\frac{abc}{d^2} + e\right)}{d\left(a - \frac{be}{d}\right)};$$ učiňme

$\frac{abc}{d^2} = a'$, $\frac{be}{d} = b'$; $a' + e = m$, $a - b' = n$; $\frac{dm}{n} = p$; i bude

$\frac{abc + d^2e}{ad - be} = p$.

7. *Příklady ku cvičení.* Sestroj:

1) $x = a.\sin^2\alpha$; 2) $x = a.\cos^2\alpha$; 3) $x = a.\tang^2\alpha$;

4) $x = a.\cot^2\alpha$; 5) $x = \frac{a}{\sin^2\alpha}$; 6) $x = \frac{a}{\cos^2\alpha}$;

7) $x = a.\sin\alpha.\cos\beta$; 8) $x = \frac{2a^2}{b.\sin\beta}$; 9) $x = \frac{ab}{2(c-d)}$;

10) $x = \frac{a^4}{bcd}$; 11) $x = \frac{ab+cd}{g}$; 12) $x = \frac{(a-b)(a+b)}{c+d}$;

13) $x = \frac{abc}{ab+cd}$; 14) $x = \frac{2na^2}{m^2-n^2}$; 15) $x = \frac{2a^2c^2}{d(a^2-b^2)}$;

16) $x = \frac{ab.\tang\alpha}{c+a.\tang\alpha}$; 17) $x = (a-b).\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$;

18) $x = \frac{a}{\sin\alpha \pm \sin\beta}$; 19) $x = \frac{a}{\tang\alpha \pm \tang\beta}$;

20) $x = \frac{(a+b)(a-b).\cot\alpha.\sin\beta}{2c.\cos\gamma}$; 21) $x = \frac{(a^2-b^2-2bc).\cot\alpha}{(a+b).\cot\beta}$;

22) $x = \frac{2ma^2}{n^2-m^2} - \frac{m(b+c)}{n+m}$;

23) $x = \frac{2d^2}{a.\sin\beta + b.\sin\alpha} + \frac{a.b.\sin(\alpha+\beta)}{a+b}$.

§. VIII.

1. Nejjednodušší tvary linearné rozřešených rovnic stupně druhého jsou:

$x = d \pm \sqrt{ab}$; $x = d \pm \sqrt{a^2+b^2}$; $x = d \pm \sqrt{a^2-b^2}$;

i jedná se zde pouze o to, kterak se člen nedoměrný (irrational) tvarem doměrným nahraditi dá:

a) Položíme-li $\sqrt{ab} = m$, aneb $ab = m^2$, sestrojíme přímku m dle Pl. §. XCIX. 3; i bude pak $x = d \pm m$.

b) Položíme-li $\sqrt{a^2+b^2} = m$, aneb $a^2+b^2 = m^2$, sestrojíme přímku m dle Pl. §. XCIX. 1; i bude $x = d \pm m$.

c) Položíme-li $\sqrt{a^2-b^2} = m$ aneb $a^2-b^2 = m^2$, sestrojíme přímku m dle Pl. §. XCIX. 2; i bude $x = d \pm m$.

Ve všech třech případech dá se již x sestrojiti dle §. VII.

2. Všechny složenější tvary linearné rozřešených rovnic stupně druhého dají se na některý z těchto jednoduchých převesti. Kterak se členy doměrné v jednoduché změní, o tom §. VII. pojednal: zde zbývá povědíti, kterak složenější členy nedoměrné nahraditi lze tvary doměrnými. To pak stane se takto:

a) Je-li v odmocňovanci některým členem zlomek složený, nahradí se dle §. VII. odst. 6. zlomkem jednoduchým; po té

b) mnohočlen, v němž není již zlomků složených ani členů nedoměrných, promění se

α) buďto dle §. VII. odst. 5. v jednočlen, čímž nedoměrný člen nabude tvaru $\sqrt{ab}$, jejž dle odst. 1. a) nahraditi lze přímkou $m = \sqrt{ab}$;

β) aneb každý jednoduchý člen odmocňovance převede se dle §. VII. odst. 2. 3. na tvar ab, a tento dle odst. 1. a) na tvar m^2, čímž celý nedoměrný člen nabude tvaru

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2+\ldots)-(f^2+g^2+h^2+\ldots)};$$

položíme-li tehdy dle odst. 1. b) a sestrojíme-li $\sqrt{a^2+b^2} = b'$. $\sqrt{b'^2+c^2} = c'$, atd. dostaneme $a^2+b^2+c^2+\ldots = u^2$, $f^2+g^2+h^2+\ldots = v^2$; i promění se hořejší člen nedoměrný na tvar $\sqrt{u^2-v^2}$, jejž dle odst. 1. c) tvarem doměrným nahraditi lze.

c) Je-li který člen odmocňovance sám nedoměrný ve spůsobě druhého kořene, převede se dle pravidel nyní vyložených na tvar doměrný. Vyskytne-li se v takovém členu odmocňovanec o 4 a vůbec o $2n$ rozměrech, roznásobí se ve dva činitele, z nichž jeden jest člen jednoduchý o $2n-2$, druhý ale jest mnohočlen o 2 rozměrech. Kořen druhého činitele dá se dle hořejších pravidel převesti na tvar doměrný, kořen činitele prvního má tvar $\sqrt{a'a''b'b''c'c''\ldots}$, i dá se roznásobiti $= \sqrt{a'a''}.\sqrt{b'b''}.\sqrt{c'c''}\ldots$, v kterémžto součinu každý činitel $\sqrt{a'a''}$ dá se dle odst. 1. nahraditi tvarem úměrným. — Je-li ale odmocňovanec o rozměru nulovém, může se čtvercem kteréhokoliv čísla linearného znásobiti, a kořen pak týmž číslem děliti. Tím činem nabude odmocňovanec 2 rozměry, a kořen jeho dá se nahraditi tvarem doměrným dle hořejších pravidel.

d) Vyskytne-li se ve zlomku jmenovatel ve spůsobě druhého kořene, převede se na tvar doměrný dle hořejších pravidel, aneb odstraní se dříve po algebraicku nedoměrnost z jmenovatele.

Příklad I. $x = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2ab} - \sqrt{a^2-2ab})$.

Sestroj $2b = c$, $a+c = d$, $a-c = e$, $\sqrt{ad} = m$, $\sqrt{ae} = n$, $\frac{m-n}{2} = p$: i bude $x = p$.

Příklad II. $x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 + a\sqrt{a^2+m^2}}$.

Sestroj: $\frac{m}{2} = n$; $a^2+n^2 = p^2$; $\sqrt{a^2+m^2} = q$, $aq = r^2$, $\sqrt{p^2+r^2} = t$: i bude $x = t$.

Příklad III. $x = \frac{1}{2d}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

Sestroj: $s-a = a'$, $s-b = b'$, $s-c = c'$, $\sqrt{sa'} = m$, $\sqrt{b'c'} = n$, $\frac{mn}{2d} = p$: i bude $x = p$.

Příklad IV. $x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}}$.

Sestroj: $a \sin\alpha = a'$; $b \cos\alpha = b'$; $\sqrt{a'^2+b'^2} = m$, $\frac{ab}{m} = n$: i bude $x = n$.

Příklad V. $x = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.

Položme $x = \sqrt{\frac{5a^2 - a\sqrt{5a^2}}{10}}$; a nyní sestrojme $\sqrt{5a^2} = \sqrt{(2a)^2+a^2} = b$; i bude $x = \sqrt{\frac{5a^2 - ab}{10}} = \sqrt{\frac{a(5a-b)}{10}}$; i sestrojme $\frac{5a-b}{10} = c$, a posléz $\sqrt{ac} = x$.

3. *Zvláštní případy.*

a) Dle rovnice $x(a-x) = b^2$ lze přímku x sestrojiti po návodě daném v Pl. §. XCIV. 7.

b) Z rovnice $x(x-a) = b^2$; jakož i z rovnice $x(x+a) = b^2$ lze přímku x sestrojiti též zvláštním způsobem dle Pl. §. XCIV. 8.

c) Z rovnice $x = a\sqrt{\frac{m}{n}}$, čili $x^2 = \frac{a^2 m}{n}$, aneb $x^2 : a^2 = m : n$ lze přímku x sestrojiti též dle Pl. §. XCIX. 5.

4. *Příklady ku cvičení.* Sestroj:

1) $x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}a) \cdot a} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

2) $x = \sqrt{2a^2} = \sqrt{(2a).a} = \sqrt{a^2 + a^2}$.

3) $x = \sqrt{3a^2}$; 4) $x = \sqrt{{}^1/_3 a^2}$; 5) $x = \sqrt{5a^2}$;

6) $x = a\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$; 7) $x = a.\frac{m+n}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

8) $x = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\frac{c^2}{a^2}}$; 9) $x = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha}}$;

10) $x = \sqrt{2ab.\sin\alpha - a^2.\sin^2\alpha}$;

11) $x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$; 12) $x = \sqrt{\frac{abc}{\sqrt{ab+bc+ca}}}$;

13) $x = a\cot\alpha \pm \cot\alpha.\sqrt{a^2 - 2ab}$;

14) $x = {}^1/_2\left(\sqrt{a^2 + 4b^2\cot\frac{\alpha}{2}} \pm \sqrt{a^2 - 4b^2.\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}\right)$.

15) $x = \frac{2ad}{2a-b}\sqrt{\frac{8a-3b}{2a-b}}$; 16) $x = {}^1/_2 a(\sqrt{5} \mp 1)$.

17) $x = \sqrt{2a^2 + (2a-b)b + 2a\sqrt{a^2+2ab}}$.

18) $x = \sqrt{c^2 - 2a^2 + 2\sqrt{a^4 - 4b^4}}$; 19) $x = \sqrt{\frac{a^2m + b^2n}{m+n}}$.

§. IX.

1. Úkon úhloměrný vynáší se poměrem dvou výrazů stejnorodých, nejjednodušeji poměrem dvou čísel linearných, a sice:

a) .... $\sin\varphi = \frac{m}{n}$; b) ... $\cos\varphi = \frac{m}{n}$; c) ... $\operatorname{tang}\varphi = \frac{m}{n}$;

d) ... $\cot\varphi = \frac{m}{n}$.

Sestrojení úhlu φ: a) b). Učiň $CB = m$ (obr. 5.) odvěsnou, $BA = n$ podponou trojúhelníka pravoúhlého; i bude $\sin A = \cos B = \frac{m}{n}$ pročež v případě a) $A = \varphi$, v případě b) $B = \varphi$.

c), d). Učiň $CB = m$, $AC = n$ odvěsnými trojúhelníka pravoúhlého, i bude $\operatorname{tang} A = \cot B = \frac{m}{n}$, pročež v případě c) $A = \varphi$, v případě d) $B = \varphi$.

2. Každý poměr složenějších dvou výrazů stejnorodých dá se převésti na tvar $\frac{m}{n}$. Neboť znamená-li P takový poměr, $f(\varphi)$ úkon úhloměrný, a je-li $f(\varphi) = P$, bude $n.f(\varphi) = P.n$. Výraz $P.n$ jest

pak linearný, a dá se dle pravidel §. VII. a VIII. uvesti na tvar jednoduchý m: tím pak stane se $f(\varphi)=\frac{m}{n}$.

3. *Příklady ku cvičení.* Sestroj úhel φ dle rovnic:

1) $\sin\varphi=\frac{a+b}{a-b}$; 2) $\cos\varphi=\frac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

3) $\operatorname{tang}\varphi=\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$; 4) $\cot\varphi=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}$;

5) $\sin\varphi=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.\cos\alpha$; 6) $\operatorname{tang}\varphi=\frac{a^2\sin\alpha}{a^2\cos\alpha+b^2}$;

7) $\cot\varphi=\frac{a.\sin\gamma}{b-a.\cos\gamma}$; 8) $\cos\varphi=\sqrt{\frac{1}{3}}$; 9) $\cos\varphi=-\sqrt{\frac{1}{5}}$;

10) $\operatorname{tang}\varphi=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 11) $\sin\varphi=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$;

12) $\sin\varphi=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$; 13) $\operatorname{tang}\varphi=\sin\alpha+\cos\alpha$;

14) $\sin\varphi=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$; 15) $\sin\varphi=\operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\beta\cot(\alpha+\beta)$

§. X.

Řešení určitých geometrických úloh užitím algebry.

1. Řešení určitých úloh geometrických záleží na vyhledání určitého množství bodův, jednoho, dvou i více. Tito bodové jsou ale vypátráni, našly-li se jejich vzdálenosti od jiných pevných a známých bodů, přímek, rovin; aneb vyskoumána-li jest odchylka přímek jimi a určitými body procházejících od přímek jiných pevných; slovem jsou-li známy délky jistých přímek neb velikosti jistých úhlův, aneb obojí.

Pročež záleží řešení těchto úloh na vyhledání délky jistých přímek neb velikosti jistých úhlův.

2. Tyto veličiny, na jichž vyhledání záleží, musí býti závislými na jiných veličinách tolikýmiž výmínkami daných.

3. Chtěje tedy úlohu řešiti hleď

a) tuto obapolnou závislost rovnicemi vyjádřiti dle návodu daného v §. V.;

b) závislé a neznámé veličiny z rovnic po algebraicku najiti (dle §. VI.);

c) nalezené veličiny po geometricku dle §. VII. VIII. IX. sestrojiti, a tím žádané body a tvar ustanoviti.

Poznam. Jakož při řešení úloh geometrických prospívá *názor*, jest povšimnutí hodno pravidlo Newtonovo, jež zní: Pokládaje úlohu za rozřešenou srovnávej v tvaru jejím všechny veličiny ať známé ať neznámé; zpytuj, kterak jedny na druhých závisejí, abys nalezl ty, kteréž, kdyby dány byly, přispěti by mohly k určení jistých veličin jiných, a poznav tuto závislost vzdělej o ní rovnici.

4. *Příklady. I.* Na přímce, která dvěma danýma bodoma A, B (obr. 7.) prochází, najdi bod C, (C'), tak aby vyhověno bylo úměře $AB:BC=BC:AC$.

Řešení. Dle vymínky jest $AB:BC=BC:AC$; pročež (dle Trig. §. I.)

$$AB:BC=BC:(AB+BC),$$

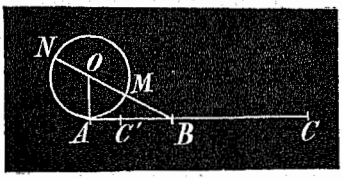
aneb, klademe-li $AB=a$, $BC=x$:

$$a:x=x:(a+x);$$

odtud jde:

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}.$$

obr. 7.

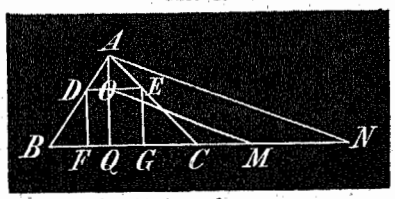


Sestroj. Na přímce $AB=a$ postav kolmou $AO \perp AB$, učiň $AO={}^1/_2a$, veď BO a prodluž, učiň $MO=ON=AO={}^1/_2a$, sřízni na prodloužené přímce AB směrem kladným $BC=BN$, a směrem záporným $BC'=MB$: i jsou body C i C' žádané.

Důkaz dej čtenář.

II. Do daného trojúhelníka ABC (obr. 8.) vpiš čtverec.

obr. 8.



Řeš. Buď čtverec $DEFG$ hotov. Veď $AQ \perp BC$; i jsou $BC=a$, $AQ=v$ veličiny známé, $DE=EG=OQ=FG=DF=x$ veličina neznámá. — Dle Pl. §. LXXXVIII. jest pak:

$$AO:AQ=DE:BC,$$

aneb

$$(v-x):v=x:a;$$

odtud najdeme $x=\frac{av}{a+v}$.

Sestroj. V daném $\triangle ABC$ spusť výšku $AQ \perp BC$, prodluž podstavu BC, sřízni na ní $QM=BC$, $MN=QA$; veď přímku NA,

a bodem M rovnoběžku $MO \| NA$: bodem O veď rovnoběžku $DE \| BC$, a s bodů D i E spusť na podstavu BC kolmice DF i EG: pak bude $DEFG$ žádaný čtverec.

Důkaz dej čtenář.

III. Sestroj pravoúhlý trojúhelník, je-li dán jeho ploský obsah a součet odvěsných jeho.

Řeš. 1. Je-li ploský obsah $= a^2$, součet odvěsných x, y, pak $= b$: bude dle výmínek $\frac{1}{2} xy = a^2$ . . . . . 1)

$$x + y = b \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Tyto rovnice rozřešíce najdeme:

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2a^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

$$y = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2a^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Sestroj odvěsné x, y dle rovnic 3), 4) za ramena pravého úhlu, veď koncema těchto ramen přímku, i bude žádaný trojúhelník hotov.

Dodavek. Aby úloha byla řešitelná, musí $(\frac{1}{2}b)^2 \geq 2a^2$, t. j. $\frac{1}{2}b$ aspoň tak veliké býti, jako úhlopříčka čtverce nad stranou a sestrojeného. — Je-li $(\frac{1}{2}b)^2 = 2a^2$, bude $x = y$, t. j. žádaný trojúhelník bude rovnoramený.

Řeš. 2. Znamená-li z podponu, v příslušnou výšku trojúhelníka žádaného, bude jako svrchu:

$$\frac{1}{2} xy = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

$$x + y = b \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

$$\frac{1}{2} z . v = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Z těchto rovnic najdeme:

$$z = \sqrt{b^2 - (2a)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

$$v = \frac{2a^2}{\sqrt{b^2 - (2a)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Sestrojivše z i v máme úlohu převedenou na známější: „Sestroj pravoúhlý trojúhelník, jsou-li dány podpona a výška.“ (Pl. LXXVI. 11. a. α.).

Řeš. 3. Jako v řeš. 2. najdeme a sestrojíme podponu z, a ježto součet odvěsných jest dán, máme úlohu převedenon na úlohu známější: „Sestroj pravoúhlý trojúhelník, jsou-li dány podpona a součet odvěsných.“ (Pl. LIX. 5.)

IV. Sestroj trojúhelník, jsou-li dány ploský obsah, obvod a jeden úhel jeho.

Řeš. Neznámé strany trojúhelníka znamenejme písmeny x, y, z; úhel stranama x, y sevřený buď $= \alpha$, obvod $= a$, a ploský obsah $= b^2$.

Dle výmínky jest pak:

$$x + y + z = a \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

$$\tfrac{1}{2}xy \,.\, \sin\alpha = b^2 \quad \ldots\ldots \quad 2); \text{ (Trig. XIII. 7.);}$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \,.\, \cos\alpha \quad \ldots \quad 3); \text{ (Trig. XIII. 4.).}$$

Z rovnic těchto najdeme:

$$z = \tfrac{1}{2}a - \frac{2b^2}{a} \,.\, \cot\frac{\alpha}{2} \quad \ldots \quad 4)$$

$$x + y = \tfrac{1}{2}a + \frac{2b^2}{a} \,.\, \cot\frac{\alpha}{2} \quad \ldots \quad 5)$$

Sestrojíme-li již z, $(x + y)$ dle rovnic 4) a 5) máme úlohu převedenou na známější: „Sestroj trojúhelník, je-li dána podstava z, úhel protější α, a součet druhých dvou stran;“ (Pl. §. LIX. 5.) — kterouž vykonáme.

Pozn. Z rovnic 1), 2), 3) daly by se nalezti všechny strany x, y, z, a nalezené sestrojiti v trojúhelník: sestrojení to bylo by ale příliš složité.

Řeš. 2. Znamená-li v výšku trojúhelníka na podstavu z, jest dle dané výmínky $\tfrac{1}{2}vz = b^2$, pročež $v = \frac{2b^2}{z}$ aneb

$$v = \frac{2b^2}{\tfrac{1}{2}a - \frac{2b^2}{a}\cot\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Sestrojíme-li dle rovnic 4) a 6) podstavu z a výšku v; máme úlohu převedenou na známější: „Sestroj trojúhelník, dány-li jsou podstava, protější úhel a výška.“ (Pl. §. LXXVI. 11. b. α.).

V. Sestroj trojúhelník, jsou-li dány všechny tři příčky s vrcholů trojúhelníka k prostředkům stran protějších vedené.

Řeš. 1. Buďte x, y, z neznámé strany trojúhelníka; a, b, c příčky známé k nim příslušející. Jakož v §. VI. 2. příklad II. vyloženo, najdeme:

$$x = \tfrac{2}{3}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2}, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

$$z = \tfrac{2}{3}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}, \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

Sestrojíme-li dle těchto rovnic strany x, y, z v trojúhelník, bude on žádaným.

Řeš. 2. Sestrojivše dle rovn. 1) pouze stranu x, máme úlohu převedenou na jednodušší:

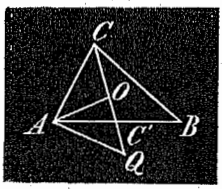
„Sestroj trojúhelník, jsou-li dány dvě příčky b, c, k prostředkům stran od protějších vrcholů vedené a strana třetí x“ — kterouž snadno rozřešíme vzpomenouce věty Pl. §. XCI. 2.

Řeš. 3. Z rovnic 1), 2), 3) najdeme:

$$\tfrac{4}{3}a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2(y^2+z^2)-x^2} = a', \quad \ldots\ldots \quad 4)$$
$$\tfrac{4}{3}b = \tfrac{2}{3}\sqrt{2(z^2+x^2)-y^2} = b', \quad \ldots\ldots \quad 5)$$
$$\tfrac{4}{3}c = \tfrac{2}{3}\sqrt{2(x^2+y^2)-z^2} = c', \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

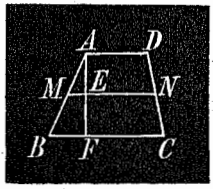
Porovnáme-li tyto rovnice s hořejšími, shledáme, že a', b', c' jsou stranami trojúhelníka, v němž x, y, z jsou příčkami, tím i že $\tfrac{1}{2}a'$, $\tfrac{1}{2}b'$, $\tfrac{1}{2}c'$ jsou strany, a $\tfrac{1}{2}x$, $\tfrac{1}{2}y$, $\tfrac{1}{2}z$ příslušné příčky. Tu se nám nabízí sestrojení jednoduché takto:

obr. 9.



Sestroj trojúhelník OAQ (obr. 9.) ze stran $OA = \tfrac{2}{3}a$, $AQ = \tfrac{2}{3}b$, $QO = \tfrac{2}{3}c$: rozpol QO v bodě C', prodluž AC' i QO, sřízní $C'B = AC'$, $OC = QO$, veď přímky CA i CB: i bude $\triangle ABC$ žádaný trojúhelník.

obr. 10



VI. Plochu daného lichoběžníka $ABCD$ (obr. 10.) rozděl přímkou s rovnoběžnýma stranama rovnoběžnou na dva díly v poměru daném $m:n$.

Řeš. Buď lichoběžník přímkou $MN \parallel AD \parallel BC$ rozdělen, jak žádáno, a spolu $AF \perp BC$. Položme $AD = b$, $BC = a$, $AF = c$, $MN = x$, $AE = y$, pročež $EF = c - y$. Jest pak (dle Pl. §. CXIX. 3.) ploský obsah:

$AMND = \tfrac{1}{2}(b+x)y$,

$BCNM = \tfrac{1}{2}(a+x)(c-y)$,

$ABCD = \tfrac{1}{2}(a+b)c$: pročež dle položené výminky:

$$(b+x)y : (a+x)(c-y) = m:n, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$
$$(b+x)y + (a+x)(c-y) = (a+b)c, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Z rovnic 1) a 2) najdeme:

$$x = \sqrt{\frac{a^2m+b^2n}{m+n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Sestrojíme-li přímku x dle rovnice 3), máme úlohu převedenou na jednodušší: „Lichoběžníkem veď přímku s rovnoběžnýma stranama rovnoběžnou, jejíž část stranama různoběžnýma omezená rovnej se dané délce x,“ — kterouž čtenář již rozřešiž.

Analytická geometria v rovině.

Hlava prvá.

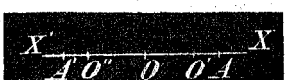
O bodech v rovině.

§. I.

Určení bodu na přímce pevné.

1. Přímka má dva směry na vzájem protivné, $X'X$ a XX' (obr. 11.). Jednomu (k. p. $X'X$) díme *kladný*, druhému *záporný* (XX'). Srovn. Pl. §. V. a Trig. §. I.

obr. 11.



2. Bod kterýkoliv A, (A') na pevné přímce $X'X$ (obr. 11.) dokonale určíme, t. j. jeho polohu rovnicí udáme:

a) známe-li nejen α) jistý pevný bod O na přímce $X'X$, od něhož měříce vycházíme, a jemuž *počátek* (origo, Ursprung, Anfangspunkt) díme, nébrž i β) víme-li, který směr přímky $X'X$ za kladný, a který za záporný bráti sluší;

b) je-li spolu povědomo α) jak veliká jest bodu A (A') od počátku O vzdálenost x, jakož i β) kterým směrem, kladným-li či záporným od počátku O k bodu A, (A') dospěti lze.

Neboť je-li $X'X$ kladný směr přímky této, bod O počátek, a má-li bod $\left\{\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right\}$ k němuž od počátku O dospějme směrem $\left\{\begin{matrix} \textit{kladným} \\ \textit{záporným} \end{matrix}\right\}$ od počátku O vzdálenost a: určujeme jej píšíce:

$$OA = +a; \quad OA' = -a,$$

aneb: $\quad x = +a; \qquad x = -a,$

znamenajíce písmenem x vzdálenost žádaného bodu od počátku vůbec.

A naopak máme-li na pevné přímce $X'X$ najíti bod dle rovnice $x = +a$, aneb $x = -a$: odřízneme $OA = +a$, $OA' = -a$, máme-li O za počátek, a směr $X'X$ za kladný.

3. Počátek O dá se na přímce $X'X$ (obr. 11.) přeložiti v bod jiný O', O'', jehož od původního počátku vzdálenost jest známa, $OO' = +m$, $OO'' = -m$.

Stane-li se tak, lze vzdálenost kteréhokoliv na přímce bodu A, (A') od nového počátku O' neb O'' určiti, je-li jeho vzdálenost x od počátku O určena; a sice:

$O'A = O'O + OA = OA - OO' = x - m$ čili $x' = x - m$;

$O''A = O''O + OA = OA - OO'' = x + m$ čili $x'' = x + m$:

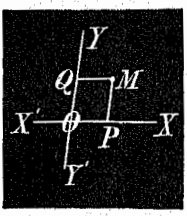
kdežto x' n. x'' znamenají nyní vzdálenosti bodu A od nového počátku O' n. O''.

§. II.

Určení bodu v rovině.

A. Osnova souřadnic rovnoběžných.

obr. 12.



1. Pata P, (Q), (obr. 12.) přímky PM, (QM) vedené určitým směrem z některého bodu M ku pevné přímce $X'X$, ($Y'Y$) nazývá se *průmětem* (projectio) bodu M na přímku $X'X$, ($Y'Y$); přímka PM, (QM) slove přímkou *promítající* (projicirende Gerade); pevné přímky $X'X$, ($Y'Y$) jmenují se *průmětnými* (Projections-G.) neb i *osami* (axis).

Je-li promítající přímka k ose, na niž se bod promítá, kolmo neb šikmo, zove se průmět *pravoúhlým* neb *kosoúhlým*.

2. Promítáme-li v rovině bod na osy dvě, jest nejjednodušší zásadou, aby přímka, jíž se bod promítá na osu jednu, rovnoběžná byla s osou druhou.

A k vůli určení průmětu (dle §. I.) na jedné neb druhé ose jest opět nejjednodušší zásadou, aby průsek obou os za *počátek* brán byl.

Držíce se první zásady nahlížíme, že bod M v rovině dokonale určen jest, jsou-li jeho na pevných osách $X'X$ a $Y'Y$ průměty P a Q (dle zásady druhé a dle §. I.) dokonale určeny. Neboť majíce tyto průměty P i Q, vedeme jima přímky rovnoběžné s osami $Y'Y$ a $X'X$, t. j. PM a QM i jest průsek jejich M bod žádaný.

3. Abychom tedy bod M v rovině jeho průmětoma učili, jest nám třeba:

a) především co se týče os samých, znáti:

α) jejich společný průsek O, jenž za počátek se béře;

β) polohu jedné osy naprosto: té ose díme pak osa *hlavní* neb x-ova znamenajíce ji písmeny $X'X$;

γ) polohu osy druhé k ose hlavní; t. j. $\sphericalangle XOY = \vartheta$. Tato druhá osa slove *pobočná* neb y-ová i znamená se písmeny $Y'Y$;

δ) musí býti ustanoveno, které směry obou os za kladné, a které za záporné bráti sluší. — My klásti budeme směry $X'X$ a $Y'Y$ za kladné.

b) Co do průmětů bodu M jest třeba:

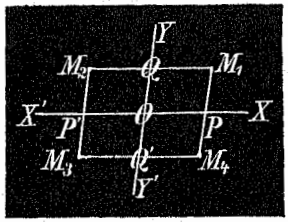
α) aby přímka, kterou se bod na jednu osu promítá, s druhou osou byla rovnoběžná;

β) aby dokonale určila se (dle §. I.) vzdálenost jednoho i druhého průmětu od počátku O i co do délky i co do znamení (směru).

4. Zde znamenejme ještě některých názvů zobecnělých; a sice: Vzdálenost OP hlavního průmětu (t. j. průmětu na osu hlavní) od počátku O nazývá se *úsečkou* (abscissa), a znamenává se písmenem x, ($OP = x$); vzdálenost OQ průmětu pobočného (t. j. pr. na osu pobočnou) jmenuje se *pořadnicí* (ordinata) bodu M, a znamenává se písmenem y, ($OQ = y$): a poněvadž (obr. 12.) $PM \nparallel OQ$, říká se obyčejně přímce PM pořadnice bodu M. — *Úsečka* x i pořadnice y mají společné jméno *souřadnice* (coordinatae), a počátek O nazývá se *počátkem souřadnic* (origo coordinatarum); x-ová osa slove pak též *osou úseček*, (axis abscissarum), a y-ová *osou souřadnic* (a. ordinatarum): obě pospolu *osami souřadnic*. — Vůbec slovou souřadnicemi ty veličiny, jimiž se bod přímo určuje. Souřadnice pak, o nichž tuto zvlášť mluvíme, ježto jsou rovnoběžné s osami aneb aspoň rovnoběžnýma k osám přímkama určeny bývají, nazýváme *rovnoběžné*.

5. Osy souřadnic rovnoběžných i se souřadnicemi celého pásma v rovině bodů pospolu nazývají *osnovou souřadnic rovnoběžných* (Parallel-Coordinaten-System). Jsou-li osy na obě kolmo, slove osnova *pravoúhlá*; šikmo-li jsou, *kosoúhlá* (rechtwinkliges a schiefwinkliges Coordinatensystem).

obr. 13.



6. Jsou-li ve čtyrech dílech, na něž celá rovina osami se roztíná, bodové M_1, M_2, M_3, M_4, (obr. 13.) tak položeny, že jest $M_2 M_3 \parallel M_1 M_4 \parallel YY'$, $M_2 M_1 \parallel M_3 M_4 \parallel X'X$, a spolu $P'O = OP = +a$, $Q'O = OQ = +b$, budou souřadnice bodu

M_1: $x = +a$, $y = +b$;
M_2: $x = -a$, $y = +b$;
M_3: $x = -a$, $y = -b$;
M_4: $x = +a$, $y = -b$:

z čehož jest patrno, kterak z daných souřadnic naopak poznati lze, v kterém roviny dílu bod leží. (Srovn. Trig. §. IV.)

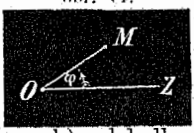
7. Leží-li který bod na ose x-ové, má za svou pořadnici $y = 0$; a leží-li na ose y-ové, má za úsečku $x = 0$. Souřadnice počátku O jsou obě $x = y = 0$. To platí vše i naopak: který bod má za pořadnici $= 0$, leží na ose x-ové, a který má za úsečku $= 0$, leží na ose y-ové; a který bod má za obě souřadnice $= 0$, jest počátkem.

8. Chtějíce bod dle daných souřadnic jeho (k. p. $x = -a$, $y = +b$) v rovině nalezti, sřízněme na x-ové ose od O počínajíce (a směrem záporným hledíce) $OP' = -a$; bodem P' veďme rovnoběžku s y-ovou osou (směrem kladným) a sřízněme $P'M_2 = +b$, i jest M_2 bod hledaný. — Podobně v jiných třech případech. —

§. III.

B. Osnova souřadnic polárných.

obr. 14.



1. Bod M v rovině (obr. 14.) dá se dokonale určiti, známe-li

a) jeho vzdálenost r od pevného bodu O v rovině; a

b) odchylku φ přímky OM (od pevného bodu O ku bodu M vedené) od jisté pevné v rovině přímky OZ, která vychází z téhož bodu pevného O.

2. Pevný bod O slove *pol*, pevná přímka OZ *osa polárná*, vzdálenost $OM = r$ bodu M od polu *průvodič* (radius vector, Fahrstrahl), *odchylka* φ průvodiče od osy nazývá se také *anomalie* neb i *amplitudo* (šířka). Průvodič a odchylka jmenují se pak *souřadnice*

polárné bodů M. — Pol i osa polárná se všemi polárnými souřadnicemi celého pásma bodů v rovině působí *osnovu souřadnic polárných* (Polar-Coordinaten-System).

3. V počtu béře se průvodič r vždy za veličinu *prostou*, pročež musí-li se znamení přidati, za veličinu *kladnou*; rovněž odchylka φ má se obyčejně za kladnou, i počítá se od 0 až do 2π, a kdy třeba, i dále.

§. IV.

O proměňování osnov souřadnic.

1. Často bývá výhodou, na místo původních os souřadnic zavesti jiné, které se počátkem neb směrem neb obojím od původních liší.

Aby proměna ta díti se mohla, jest třeba a stačí

a) znáti nový počátek t. jeho původní souřadnice;

b) znáti polohu nových os k hlavní ose původní.

Úloha, jednu osnovu souřadnic za jinou vyměniti, záleží v tom, abychom původních souřadnic hodnoty v rovnicích vyjádřili souřadnicemi novými u spojení s jinými veličinami známými (t. se souřadnicemi nového počátku, s odchylkami nových os od původní osy hlavní atd.). To dovedše dosadíme za původní souřadnice nalezené jejich hodnoty; i bude pak kterýkoliv bod v rovině novými souřadnicemi vztahován k osnově nové.

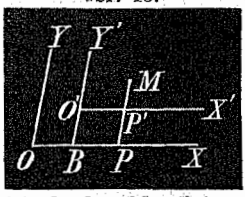
2. *Úloha.* Osnovu souřadnic rovnoběžných vyměň za jinou osnovu souřadnic rovnoběžných; a sice:

I. když pouze počátek souřadnic se přeloží, směr os ale se zachová;

II. když se počátek zachová, směry os ale se změní;

III. když i počátek souřadnic i směry os se změní.

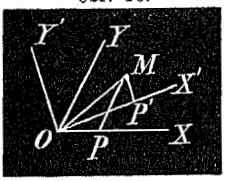
obr. 15.



Řeš. I. Buď O (obr. 15.) počátek, OX osa x-ová, OY osa y-ová rovnoběžných souřadnic původních; $OP = x$, $PM = y$ souřadnice bodu M původní. V osnově nové buď O' počátek, $OB = a$ úsečka, $BO' = b$ pořadnice jeho, $O'X' \parallel OX$, $O'Y' \parallel OY$ buďte nové osy; $O'P' = x'$, $P'M = y'$ nové souřadnice bodu M. I jest tehdy:

$$\left.\begin{array}{ll} OP = OB + BP = OB + O'P', \text{ to jest:} & x = a + x' \\ PM = PP' + P'M = PP' + BO', \quad „ \quad „ & y = b + y' \end{array}\right\} \ldots 1)$$

obr. 16.



II. Buď O (obr. 16.) společný počátek; OX, OY buďte původní, OX', OY' nové osy; $OP = x$, $PM = y$ původní; $OP' = x'$, $P'M = y'$ nové souřadnice bodu M. — Uhel AOB znamenejme vůbec $a\hat{}b$; tedy $\sphericalangle XOX' = x\hat{}x'$, $MOU = m\hat{}u$ atd. a přímky OX, OU atd. i pokud směru se týče, jen jednoduchými písmeny x, u atd. — Kromě toho buď $\mathfrak{P}_u(v)$ vůbec znamení pravoúhlého průmětu přímky v na přímku u; tedy k. p. $\mathfrak{P}_x(OM)$ znamená pravoúhlý průmět přímky OM na přímku x čili na osu OX; podobně $\mathfrak{P}_u(OP) = \mathfrak{P}_u(x)$ průmět přímky $OP = x$ na přímku OU atd.

Promitneme-li OM, klikatou čáru OPM i $OP'M$ na kteroukoliv přímku OU, jest dle Trig. §. III. 2. d); a dle Trig. §. VIII. 1.):

$$\mathfrak{P}_u(OM) = \mathfrak{P}_u(OP) + \mathfrak{P}_u(PM) = \mathfrak{P}_u(x) + \mathfrak{P}_u(y) = x.\cos u\hat{}x + y.\cos u\hat{}y;$$

$$\mathfrak{P}_u(OM) = \mathfrak{P}_u(OP') + \mathfrak{P}_u(P'M) = \mathfrak{P}_u(x') + \mathfrak{P}_u(y') = x'.\cos u\hat{}x' + y'.\cos u\hat{}y';$$

pročež jest:

$$x.\cos u\hat{}x + y.\cos u\hat{}y = x'.\cos u\hat{}x' + y'.\cos u\hat{}y' \quad \ldots \quad 2).$$

Dáme-li přímce u splynouti s osou OX, podruhé s osou OY, vyjde z hlavního vzorce 2); povážíme-li, že jest $\cos x\hat{}x = \cos 0 = 1 = \cos y\hat{}y$:

$$\left.\begin{array}{l} x + y.\cos x\hat{}y = x'.\cos x\hat{}x' + y'.\cos x\hat{}y' \\ x.\cos y\hat{}x + y = x'.\cos y\hat{}x' + y'.\cos y\hat{}y' \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

Rovnice 3) rozřešivše najdeme pomníce, že jest $1 - \cos^2 x\hat{}y = \sin^2 x\hat{}y$, a vůbec $\cos u\hat{}v = \cos v\hat{}u$:

$$\left.\begin{array}{l} x.\sin^2 x\hat{}y = x'(\cos x\hat{}x' - \cos x\hat{}y.\cos y\hat{}x') + y'(\cos x\hat{}y' - \cos x\hat{}y.\cos y\hat{}y') \\ y.\sin^2 x\hat{}y = x'(\cos y\hat{}x' - \cos x\hat{}y.\cos x\hat{}x') + y'(\cos y\hat{}y' - \cos x\hat{}y.\cos x\hat{}y') \end{array}\right\} 4)$$

Dle Trig. §. VIII. 2. vz. III. jest vůbec, vzpomeneme-li, že $\sin c\hat{}b = -\sin b\hat{}c$:

$$\cos a\hat{}b - \cos a\hat{}c.\cos c\hat{}b = -\sin a\hat{}c.\sin c\hat{}b = \sin a\hat{}c.\sin b\hat{}c;$$

tím zjednodušíme vz. 4); a dostaneme žádané:

$$\left.\begin{array}{l} x = x'.\dfrac{\sin x'\hat{}y}{\sin x\hat{}y} + y'.\dfrac{\sin y'\hat{}y}{\sin x\hat{}y} \\ y = x'.\dfrac{\sin x\hat{}x'}{\sin x\hat{}y} + y'.\dfrac{\sin x\hat{}y'}{\sin x\hat{}y} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

III. Je-li směr os i počátek změněn, znamenejte opět x, y souřadnice původní; x', y' souřadnice nové; a i b souřadnice nového počátku.

Novým počátkem veďme pomocné osy souřadnic s původními rovnoběžné, a znamenejme písmeny x_1 a y_1 souřadnice pomocné: i bude dle I.

$$x = a + x_1; \qquad y = b + y_1;$$

a dle II.
$$x_1 = x' . \frac{\sin x'\hat{}y}{\sin x\hat{}y} + y' . \frac{\sin y'\hat{}y}{\sin x\hat{}y},$$
$$y_1 = x' . \frac{\sin x\hat{}x'}{\sin x\hat{}y} + y' . \frac{\sin x\hat{}y'}{\sin x\hat{}y};$$

pročež

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' . \frac{\sin x'\hat{}y}{\sin x\hat{}y} + y' . \frac{\sin y'\hat{}y}{\sin x\hat{}y}, \\ y &= b + x' . \frac{\sin x\hat{}x'}{\sin x\hat{}y} + y' . \frac{\sin x\hat{}y'}{\sin x\hat{}y}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

3. *Výsledky:* a) Jsou-li obě osnovy pravoúhlé, sluší položiti: $x\hat{}y = x'\hat{}y' = {}^1/_2\pi$; $y\hat{}y' = x\hat{}x'$; $x'y = {}^1/_2\pi - x\hat{}x'$; $x\hat{}y' = x\hat{}x' + {}^1/_2\pi$: tím nabudeme z 6):

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' . \cos x\hat{}x' - y' . \sin x\hat{}x' \\ y &= b + x' . \sin x\hat{}x' + y' . \cos x\hat{}x' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

b) Je-li jen nová osnova pravoúhlá, sluší klásti $x'\hat{}y' = {}^1/_2\pi$; $x'\hat{}y = x\hat{}y - x\hat{}x'$, $y'\hat{}y = y'\hat{}x' + x'\hat{}x + x\hat{}y = (x\hat{}y - x\hat{}x') - {}^1/_2\pi$; $x\hat{}y' = x\hat{}x' + {}^1/_2\pi$; tím stane se z 6):

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' . \frac{\sin(x\hat{}y - x\hat{}x')}{\sin x\hat{}y} - y' . \frac{\cos(x\hat{}y - x\hat{}x')}{\sin x\hat{}y} \\ y &= b + x' . \frac{\sin x\hat{}x'}{\sin x\hat{}y} + y' . \frac{\cos x\hat{}x'}{\sin x\hat{}y} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 8)$$

c) Je-li jen původní osnova pravoúhlá, položíme: $x\hat{}y = {}^1/_2\pi$; tedy $x'\hat{}y = x\hat{}y - x\hat{}x' = {}^1/_2\pi - x\hat{}x'$, $y'\hat{}y = x\hat{}y - x\hat{}y' = {}^1/_2\pi - x\hat{}y'$; tím stane se z 6):

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' . \cos x\hat{}x' + y' . \cos x\hat{}y' \\ y &= b + x' . \sin x\hat{}x' + y' . \sin x\hat{}y' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

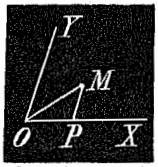
Je-li v tomto případě $x\hat{}x' = 0$; vyjde:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' + y' . \cos x\hat{}y' \\ y &= b + y' . \sin x\hat{}y' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Připomenutí. Ostal-li počátek nezměněn, sluší ve vz. 7) až do 10) klásti $a = b = 0$.

4. *Úloha.* Osnovu souřadnic rovnoběžných vyměň za osnovu souřadnic polárných.

obr. 17.



Řeš. Buď O (obr. 17) počátek, OX osa x-ová, OY osa y-ová souřadnic rovnoběžných; $OP = x$, $PM = y$ souřadnice bodu M. Týž bod O buď pol, OX osa polárná, $OM = r$ průvodič, $\sphericalangle XOM = x\hat{}r = \vartheta$ odchylka bodu M; $\sphericalangle XOY = x\hat{}y = \alpha$.

Promítneme-li jednou průvodič r, podruhé klikatou čáru OPM na kteroukoliv přímku u, dostaneme podobně jako v odst. 2.

$$r.\cos u\hat{}r = x.\cos u\hat{}x + y.\cos uy \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

a splyne-li přímka u jednou s osou OX, podruhé s osou OY, bude:

$$\left.\begin{aligned} r.\cos x\hat{}r &= x + y.\cos x\hat{}y \\ r.\cos y\hat{}r &= x.\cos x\hat{}y + y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Z těchto dvou rovnic najdeme týmž, jako v 2. odst., způsobem:

$$\left.\begin{aligned} x &= r.\frac{\sin r\hat{}y}{\sin x\hat{}y} = r.\frac{\sin(x\hat{}y - x\hat{}r)}{\sin x\hat{}y} = r.\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\alpha} \\ y &= r.\frac{\sin x\hat{}r}{\sin x\hat{}y} = r.\frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 13)$$

Výsledek. Je-li rovnoběžná osnova pravoúhlá, klademe

$$x\hat{}y = x\hat{}r + r\hat{}y = {}^1/_2\pi,$$

pročež:

$$\left.\begin{aligned} x &= r.\cos\vartheta = r.\cos x\hat{}r \\ y &= r.\sin\vartheta = r.\sin x\hat{}r \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

5. *Úloha.* Vyměň osnovu polárnou za osnovu souřadnic rovnoběžných.

Řeš. Poměr rovnic 13) jest:

$$\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\vartheta} = \frac{x}{y}$$

Rozvedeme-li $\sin(\alpha - \vartheta)$, a povážíme-li že jest $\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \cot\vartheta$; dostaneme:

$$\sin\alpha.\cot\vartheta - \cos\alpha = \frac{x}{y},$$

odtud pak:

$$\cot\vartheta = \frac{x + y.\cos\alpha}{y.\sin\alpha}; \text{ neb } \operatorname{tang}\vartheta = \frac{y.\sin\alpha}{x + y.\cos\alpha} \quad . \quad 15)$$

Průvodič r najdeme jednodušeji z trojúh. OPM (obr. 17.) větou Carnotovou:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy.\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16)$$

Výsledek. Má-li býti nová osnova pravoúhlá, sluší klásti $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$; čímž bude:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\vartheta &= \frac{y}{x} \\ r &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

§. V.

1. Kdykoliv mluvíme o bodu (x, y), rozumíme bod, jehož souřadnice jsou x a y, a kdykoliv o bodu *daném* mluvíme, rozumíme, že souřadnice jeho jsou dány.

Abychom nemuseli stále opakovati věc jednu, budeme znamenati: odchylku os $XOY = \vartheta$; body v rovině písmeny M, M', M'', atd. aneb M, M_1, M_2, atd.: jejich na ose x-ové průměty P, P', P''... P, P_1, P_2; jejich úsečky $OP = x$, $OP' = x'$, $OP'' = x''$; $OP_1 = x_1$, $OP_2 = x_2$..., a pořadnice $PM = y$, $P'M' = y'$, $P''M'' = y''$..., $P_1M_1 = y_1$, $P_2M_2 = y_2$...; mimo to v osnově polárné bude O polem, OX osou, $XOM = \varphi$, $XOM' = \varphi'$, $XOM'' = \varphi''$... atd. $OM = r$, $OM' = r'$, $OM'' = r''$, atd.

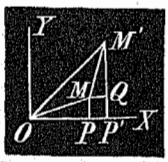
Dle tohoto způsobu bude pak pokaždé

$PP_n = PO + OP_n = OP_n - OP = x_n - x$; jakož i

$M'OM'' = M'OX + XOM'' = XOM'' - XOM' = \varphi'' - \varphi'$.

2. *Úloha.* Najdi vzdálenost d dvou bodů (x,y) a (x',y') čili M a M'.

obr. 18.



Řeš. a) *V osnově souř. rovnoběžných.* V obr. 18. veď kromě souřadnic bodů M, M' ještě $MQ \parallel OX$; i jest $MQ = PP' = x' - x$;
$QM' = P'M' - PM = y' - y$; a $\cos MQM' = -\cos\vartheta$.
Dle Trig. §. XIII. 4. máme

$MM'^2 = MQ^2 + QM'^2 - 2MQ \,.\, QM' \,.\, \cos MQM'$; pročež dosazením

$$d = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + 2(x-x')(y-y') \,.\, \cos\vartheta} \quad . \; . \; 1)$$

b) *V osnově souř. polárných.* Dle uvedené věty Trig. §. XIII. 4. jest opět

$MM'^2 = OM^2 + OM'^2 - 2OM \,.\, OM' \,.\, \cos MOM'$; tedy

$$d = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi' - \varphi)} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

3. *Výsledky.* a) *V osnově souřadnic pravoúhlých* jest $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, $\cos\vartheta = 0$: tím se vzorec 1) zjednoduší a takto připodobí:

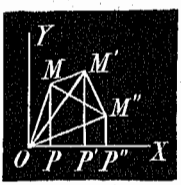
$$d = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

b) Je-li bod M' počátkem souřadnic, jest $x' = y' = 0$: a vzdálenost bodu M od počátku souřadnic jest:

v osnově s. rovnoběžných vůbec: $d = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos\vartheta}$ . . 4)

v osnově s. pravoúhlých zvlášť: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ . . . . . 5)

obr. 19.



4. *Úloha.* Najdi obsah ploský △ trojúhelníka z pravoúhlých souřadnic jeho tří vrcholů M, M', M''.

Řeš. Z obr. 19. jest patrno:

$$MM'M'' = PP'M'M + P'P''M''M' - PP''M''M.$$

Dle Pl. §. CXIX. 3. jest ale:

$PP'M'M = \frac{1}{2}(P'M' + PM).PP' = \frac{1}{2}(y' + y)(x' - x)$; a podobně

$P'P''M''M' = \frac{1}{2}(P''M'' + P'M')\,P'P'' = \frac{1}{2}(y'' + y')(x'' - x')$,

$PP''M''M = \frac{1}{2}(P''M'' + PM)\,PP'' = \frac{1}{2}(y'' + y)(x'' - x)$:

pročež dostaneme dosadíce:

$\triangle = \frac{1}{2}(y' + y)(x' - x) + \frac{1}{2}(y'' + y')(x'' - x') + \frac{1}{2}(y + y'')(x - x'')$; 6)

kterýž vzorec i takto snadným převodem připodobiti se dá:

$\triangle = \frac{1}{2}y(x' - x'') + \frac{1}{2}y'(x'' - x) + \frac{1}{2}y''(x - x')$ . . . . 7)

$\triangle = \frac{1}{2}[(x' - x'')(y - y') - \frac{1}{2}(y' - y'')(x - x')$ . . . . . 8)

Přídavek. V osnově *kosoúhlé* musí se hodnoty ve vz. 6), 7), 8) ještě činitelem $\sin\vartheta$ znásobiti. — V osnově *polární* najdeme:

$\triangle = \frac{1}{2}rr'.\sin(\varphi - \varphi') + \frac{1}{2}r'r''\sin(\varphi' - \varphi'') + \frac{1}{2}r''r\sin(\varphi'' - \varphi)$; 9)

což oboje vyhledati čtenáři ostavuje se.

Poznam. Kdyby dle vzorců 6), 7), 8) pro △ vyšla hodnota záporná, (což by se k. p. stalo, když by bod M' v obr. 19. na přímce $M'P'$ ale pod přímkou MM'' ležel), vezme se hodnota kladná či raději hodnota prostá, o niž tuto jediné se jedná.

5. *Výsledek.* Je-li jeden M'' z tří vrcholů trojúhelníka počátkem souřadnic, bude $x'' = y'' = 0$: tím pak dostaneme z vz. 6), 7), 8) za ploský obsah △ trojúhelníka OMM' (obr. 19.):

$\triangle = \frac{1}{2}x'y - \frac{1}{2}xy'$ . . . . . 10)

Přídavek. Podobně vyjde ze vz. 9), položíme-li $r'' = 0$:

$\triangle = \frac{1}{2}rr'\sin(\varphi - \varphi')$ . . . . . 11)

6. *Úloha.* Najdi výmínku, pod kterou tři body M, M', M'' na jediné přímce leží.

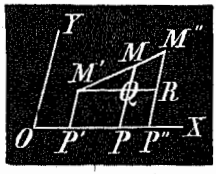
Řeš. Pokud tři body M, M', M'' (obr. 19.) na jediné přímce nejsou, má ploský obsah △ trojúhelníka $MM'M''$ hodnotu od 0 se lišící; jsou-li ale tito tři bodové na přímce jediné, stane se $\triangle = 0$. Z obého nazpět činíme nutný závěrek, že tito tři bodové musí

ležeti na přímce jediné, kdykoliv jest $\triangle = 0$; jakož i že musí býti $\triangle = 0$, mají-li oni bodové na jediné přímce ležeti. Dostaneme tedy žádanou výminku ve spůsobě rovnice, položíme-li ve vz. 6) neb 7), neb 8) místo $\triangle$ pouhou 0; tím nám vyjde ze vz. 8):

$$\left.\begin{aligned} &(y-y')(x'-x'') = (y'-y'')(x-x') \quad \ldots \\ \text{aneb:}\quad &\frac{y-y'}{y'-y''} = \frac{x-x'}{x'-x''} \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 12)$$

7. *Úloha.* Na přímce $M'M''$ (obr. 20.) najdi z rovnoběžných souřadnic bodův M' a M'' jiný bod M, tak aby zadost učiněno bylo poměru $M'M : M'M'' = \mu : 1$ za výminku kladenému.

obr. 20.



Řeš. Veď $M'R \parallel OX$; i jest dle Pl. §. LXXXVII.

$$M'Q : M'R = QM : RM'' = M'M : M'M'' = \mu : 1;$$

a poněvadž

$M'Q = x - x'$; $M'R = x'' - x'$; $QM = y - y'$; $RM'' = y'' - y'$:

bude $(x - x') : (x'' - x') = (y - y') : (y'' - y') = \mu : 1$;

odtud najdeme:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + \mu(x'' - x') \quad \ldots\ldots\ldots \\ y &= y' + \mu(y'' - y') \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 13)$$

8. *Výsledky.* a) Má-li bod M (obr. 20.) *uprostřed* přímky $M'M''$ ležeti, jest $\mu = 1/2$: tím obdržíme souřadnice jeho:

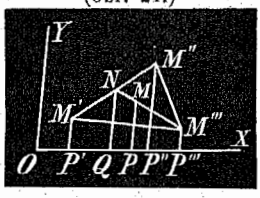
$$\left.\begin{aligned} x &= 1/2\,(x' + x'') \quad \ldots\ldots\ldots \\ y &= 1/2\,(y' + y'') \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 14)$$

b) Má-li býti $M'M = 1/3\, M'M''$, položíme $\mu = 1/3$, a ze vz. 13) dostaneme souřadnice bodu M:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1/3\,(2x' + x'') \quad \ldots\ldots\ldots \\ y &= 1/3\,(2y' + y'') \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 15)$$

9. *Úloha.* Najdi těžiště (Pl. §. XCI. 2.) trojúhelníka $M'M''M'''$ (obr. 21.) z rovnoběžných souřadnic vrcholů jeho.

(obr. 21.)



Řeš. Je-li $M'N = 1/2\, M'M''$, $NM = 1/3\, NM''$; a znamenáme-li souřadnice bodu N písmeny ξ; η; souřadnice těžiska M ale x a y: bude nejprv dle vz. 14)

$$\xi = 1/2\,(x' + x''); \qquad \eta = 1/2\,(y' + y'');$$

pak dle vz. 15.) $x = 1/3\,(2\xi + x''')$; $\quad y = 1/3\,(2\eta + y''')$;

pročež:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1/3\,(x' + x'' + x''') \quad \ldots\ldots\ldots \\ y &= 1/3\,(y' + y'' + y''') \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 16)$$

Hlava druhá.

O čarách vůbec, o přímce zvláště.

§. VI.

1. V předešlé hlavě poznali jsme, že v rovině bod M určen jest, jsou-li určeny souřadnice jeho: $x = a$, $y = b$.

2. Týž bod byl by ale také určen, kdyby pouze jedna souřadnice jeho přímo určena byla, $x = a$, spolu ale zákon o závislosti druhé souřadnice na první vysloven byl; k. p. $y = Ax + b$. Neboť v tomto případu do druhé rovnice za x dosadíme-li hodnotu jeho a z rovnice prvé, bude i druhá souřadnice určena, t. $y = Aa + b$: a tím bude i bod M určen.

3. Je-li ale pouze zákou o závislosti obou souřadnic udán v jednu rovnici uložený, (k. p. $y = Ax + b$), tu již nelze mluviti o určenosti některého bodu, za to však snadno nahlídneme:

a) že jak mile za x položíme určitou hodnotu nějakou a_n, i za y dle dané rovnice určitá hodnota vyjde, a tím i jistý bod M_n určen bude;

b) že nejsouce jinými výminkami zdržováni, za x nesčíslné množství rozličných hodnot a_1, a_2, a_3 .... klásti smíme, a tak činíce tolikéž rozličných hodnot za y, a tím i tolikéž rozličných bodů M, M_1, M_2, ... dostaneme, kteřížto veškeří a jeden každý danému zákonu zadost činí;

c) že měníce v jistých mezech hodnotu x ne na způsob veličin přetržitých *po stupních* a jakoby *skokem*, nébrž na způsob veličin spojitých *plynutě* a jakoby *tokem* od bodu k bodu nejbližšímu postupujíce, v těchto jistých mezích bodové M, M_1, M_2 ... *spojitě* po sobě půjdou, v rovině *určitou čáru* působíce.

4. Odtud činíme závěrek, že rovnice, v níž jest uložen zákon o vzájemné závislosti obou souřadnic v rovině, určuje *čáru* nějakou v této rovině položenou, jejížto každý bod onomu zákonu vyhovuje. Kterýkoliv bod by měl témuž zákonu činiti zadost, musí ležeti v této čáře, jehož ona jest místem geometrickým. Ostatně nazývá se tato čára i místem geometrickým té rovnice, kterouž sama určena jest: a rovnice sama slove rovnicí této čáry.

5. Z toho také jde, že rovnice čáry neurčuje *délku*, nébrž *polohu* čáry.

6. V rovnici čáry rozeznáváme a) veličiny *měnlivé* (variable G.); b) veličiny *stálé* č. *trvalé* (constante G.). — Veličiny *měnlivé* jsou ty, jejichž hodnota se mění, jak od jednoho čáry bodu k jinému přejdeme; *stálé* č. *trvalé* jsou ty, jejichž hodnota tímto činem nezměněnou setrvá. — Souřadnicím měnlivým dějí též souřadnice *plynulé* (laufende Coord.).

7. Způsob, kterého užíváme při ohledávání čar, jest hlavně dvojí: a) buďto vysloví se vlastnost nějaká, která výhradně jisté čáře přísluší, i hledíme pak z této vlastnosti poznati zákon o závislosti souřadnic veškerým bodům té čáry společný, a zákon ten jedinou rovnicí vyjádřiti, z nížto pak třeba o jiných vlastnostech a vztazích té čáry zpytujíce závěrky činíme; aneb b) jest dána rovnice čáry, i hledíme poznati vlastnosti a vztahy této čáry, o rovnici se opírajíce.

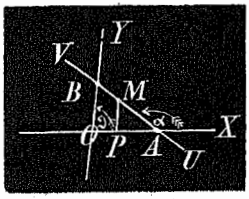
§. VII.

O rovnici přímky.

1. Přímka jest čára, jejíž veškeré části mají směr jednostejný.

2. *Úloha.* Najdi rovnici přímky v osnově souřadnic rovnoběžných.

obr. 22.



Řeš. Buď (obr. 22.) UV přímka, jejíž rovnici hledáme, i protínej osy bodoma A, i B. Jsou pak $OA = a$, $OB = b$, $\sphericalangle XOY = \vartheta$, $\sphericalangle XAV = \alpha$ veličiny stálé; $OP = x$, $PM = y$ veličiny měnlivé, máme-li bod M na přímce UV za obecný a jako za zástupce veškerých té přímky bodův.

Ze stálého směru přímky UV jde dle Pl. §. LXXXVII. a Trig. §. XIII.

$$PM : PA = OB : OA = \sin\alpha : \sin(\alpha - \vartheta);$$

odtud, kladouce $PA = OA - OP = a - x$, a $\sin(\alpha - \vartheta) = -\sin(\vartheta - \alpha)$, vyvádíme:

$$y : (a - x) = b : a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

$$b : a = \sin\alpha : -\sin(\vartheta - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$

Z úměry α) jde rovnice

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

kterážto jest žádaná. Rovnice tato dá se jinak přidobiti. Určíme-li

totiž z úměry β) stálou veličinou a, a uvedeme-li její hodnotu do rovnice 1), dostaneme spořádavše:

$$y = x \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)} + b,$$

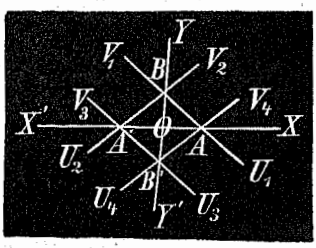
čili $$y = Ax + b, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

kdežto klademe $$A = \frac{\sin \alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

3. Stálá veličina A v rovnici 2) závisí na směru přímky UV k osám, i nazývá se *směrnice* (Richtungsconstante).

V osnově pravoúhlých souřadnic jest $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, $\sin(\vartheta - \alpha) = \cos \alpha$, tedy $A = \operatorname{tang} \alpha$, ... 4)
t. j. směrnice rovná se geniometrické tangentě úhlu, jejž přímka UV svírá s kladným směrem x-ové osy. — V osnově kosoúhlých souřadnic má ovšem A hodnotu jinou dle vz. 3. určenou.

obr. 23.



4. Rovnice přímky UV jak v době 1) tak v době 2) jest *obecná*; i sluší pouze o znamení stálých veličin a, b, A v rozličných případech starost míti. Klademe-li totiž (obr. 23.) $OA = +m$, $OB = +n$, musíme položiti $OA' = -m$ $OB' = -n$; i bude tedy rovnice

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1,$$

zníti pro přímku $U_1 V_1$ . . $+\frac{y}{n} + \frac{x}{m} = 1,$

pro přímku $U_2 V_2$ . . $+\frac{y}{n} - \frac{x}{m} = 1,$

pro přímku $U_3 V_3$ . . $-\frac{y}{n} - \frac{x}{m} = 1,$

pro přímku $U_4 V_4$ . . $-\frac{y}{n} + \frac{x}{m} = 1.$

Co se týče veličiny A, bude hodnota její kladná, dokud $\alpha < \vartheta$, a záporná, když $\alpha > \vartheta$, pokud $(\alpha - \vartheta)$ nedostihne π; jakož ze vz. 3) na jevo jde. Kladouce tedy $A = \pm T$, dostaneme z doby 2) pro hořejší čtyry případy:

$$y = -Tx + n,$$
$$y = +Tx + n,$$
$$y = -Tx - n,$$
$$y = +Tx - n;$$

jakož se o tom čtenář přesvědčí, vyhledá-li rovnice přímky pro každý z těchto čtyr případů zvlášť, tím způsobem, jako zde učiněno, si počínaje.

5. *Zvláštní případy.*

a) Prochází-li přímka *počátkem* souřadnic, jest $a = b = 0$, i nehodí se za její rovnici doba 1), ovšem ale doba 2), kteráž se tehdy zjednoduší takto: $y = Ax$ . . . . . 4)
a jest rovnicí přímky počátkem souřadnic vedené.

b) Je-li přímka UV s x-ovou osou rovnoběžná, jest $a = \infty$, a tím $\frac{x}{a} = \frac{x}{\infty} = 0$. Proto bude z rovnice 1)

$$y = b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

rovnice přímky s x-ovou osou rovnoběžné, která spolu od osy y-ové utíná pořadnici $= b$.

Téhož výsledku dojdeme z rovnice 2), povážíme-li, že v našem případě jest $a = 0$ a tím i $A = 0$; z čehož jde přímo $y = b$, jako svrchu.

Dodavek. Splývá-li přímka UV s x-ovou osou, jest $b = 0$, a proto rovnice x-ové osy $y = 0$ . . . . . 6)

c) Je-li přímka UV rovnoběžná s osou y-ovou, jest $b = \infty$, a tím $\frac{y}{b} = 0$: pročež dostaneme v tomto případě z 1):

$$x = a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7)$$

za rovnici přímky, která jest s y-ovou osou rovnoběžná, a od x-ové osy úsečku $= a$ odtíná.

Majíce pro tento případ upraviti rovnici z doby 2), položili bychom $\alpha = \vartheta$, tím pak $A = \infty$: i nabyli bychom neurčitosti. Té nehodě chtíce se uhnouti, proměníme nejprv dobu 2), z rovnic α) a β) veličinu b vymýtíce.

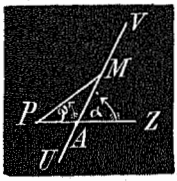
Tím dostaneme $x = a + y . \frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\sin \alpha}$

za rovnici přímky; položíme-li již $\vartheta = \alpha$, bude $\frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\sin \alpha} = 0$, a obdržíme $x = a$, jako svrchu.

Dodavek. Splývá-li přímka UV s osou Y-ovou, jest $a = 0$, pročež rovnice osy y-ové $x = 0$ . . . . . 8).

6. *Úloha.* Najdi rovnici přímky v osnově souřadnic polárných.

obr. 24.



Řeš. Buď P pol (obr. 24.), PZ osa polárná, a spolu PZ směr její *kladný*; UV přímka, jejíž rovnici hledáme. Je-li A průsek přímky PZ s osou, máme $PA = a$, $ZAV = \alpha$ veličiny stálé; $PM = r$, $ZPM = \varphi$ veličiny měnlivé. Jest pak dle Trig. §. XIII. $PM : PA = \sin\alpha : \sin(\alpha - \varphi)$;

tedy žádaná rovnice přímky: $r = \frac{a \,.\, \sin\alpha}{\sin(\alpha - \varphi)}$ . . . 9)

7. *Úloha.* Sestroj přímku vedlé rovnice dané v osnově souřednic rovnoběžných.

Řeš. Má-li rovnice dobu $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$; sřízni (obr. 21.), $OA = a$, $OB = b$, a bodoma A i B veď přímku, i bude ona žádanou.

Má-li rovnice dobu jinou, vůbec $My + Nx + Pp = 0$, lze ji na dobu $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$ přeměniti, položíme-li $Pp : M = -b$; $Pp : N = -a$, a pak jako svrchu udáno, si počínati. — Však i příměji můžeme body A a B vyhledati, a sice takto: Pořadnice bodu A, jenž leží na ose x-ové, jest $= 0$; dosadíme-li tedy do rovnice přímky hodnotu $y = 0$, dostaneme ihned $x = a$, t. $x = -Pp : N$.

A podobně dosadíce do rovnice $x = 0$, nabudeme $y = b$, t. $y = -Pp : M$.

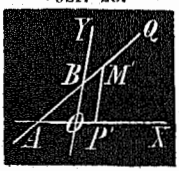
Majíce body A i B, vedeme jima přímku žádanou.

§. VIII.

Jiné doby rovnice přímky.

V tomto a v §§. následujících obmezujeme se na osnovu souřadnic rovnoběžných, polárné vylučujíce.

obr. 25.



1. *Úloha.* Najdi rovnici přímky Q, která mající určitý směr prochází daným bodem (x', y'), t. bodem M', jehož souřadnice jsou $x' = OP'$, $y' = P'M'$; (obr. 25.).

Řeš. Obecná rovnice přímky jest:

$y = Ax + b$, ... α)

i musí jako o každé, tak i o přímce Q platnost míti. V ní pak směrnice A jest veličina známá, ježto směr přímky jest určitý; stálá veličina b ale jest neznáma i musí vymýtěna býti, k čemuž zapotřebí jest jedné ještě rovnice o této veličině.

Této pak rovnice nabudeme uvážíce, že souřadnice bodu M', kterýžto na přímce Q leží, jsouce dosazeny za souřadnice plynulé zadost činiti musí rovnici α), totiž

$$y' = Ax' + b, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \beta)$$

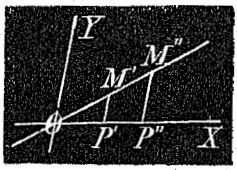
Odečtouce nyní rovnici β) od rovnice α) dostaneme rovnici žádanou:

$$y - y' = A(x - x') \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Přídavek. Z rovnice β) jde $b = y' - Ax' = OB$.

2. *Úloha.* Najdi rovnici přímky Q, která prochází dvěma danýma bodoma (x', y') a (x'', y''), t. j. bodem M', jehož souřadnice jsou $OP' = x'$, $P'M' = y'$; a bodem M'', jehož souřadnice jsou $x'' = OP''$, $y'' = P''M''$. (obr. 26.)

obr. 26.



Řeš. Obecná rovnice přímky jest:

$$y = Ax + b, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \alpha)$$

v níž ale, pokud se naší úlohy týče, stálé veličiny A a b neznámy jsou. Poněvadž ale i bod M', i bod M'' na přímce té leží, musí také býti:

$$y' = Ax' + b, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \beta)$$

$$y'' = Ax'' + b, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \gamma)$$

Odečteme-li β) od α), pak γ) od β), vyjde:

$$y - y' = A(x - x'), \quad \ldots \ldots \ldots \quad \delta)$$

$$y' - y'' = A(x' - x'') \quad \ldots \ldots \ldots \quad \varepsilon)$$

Dělíme-li δ) na ε), dostaneme rovnici žádanou:

$$\frac{y - y'}{y' - y''} = \frac{x - x'}{x' - x''}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

aneb

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'); \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

Přídavek 1. Z rovnice ε) vyplývá hodnota směrnice

$$A = \frac{y' - y''}{x' - x''}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Z rovnic β) a γ) vymýtíme-li A, vyjde

$$b = \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Přídavek 2. Rovnice 2) vyslovuje též výminku, aby tři body (x, y), (x', y') a (x'', y'') na jedné přímce ležely, jakož se shoduje s §. V. vz. 12.

3. Platí-li rovnice $y = Ax + b$ o dvou bodech $(x'y')$ a $(x''y'')$, platí též o celé přímce těmato bodoma vedené.

Důkaz. Dle výmínky jest:

$$y' = Ax' + b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

$$y'' = Ax'' + b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

odtud vyloučíme-li b, vyplývá

$$A = \frac{y' - y''}{x' - x''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \gamma)$$

Přímka, která jde dvěma bodoma (x', y') a (x'', y''), má za svou rovnici:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \quad \ldots\ldots \quad \delta)$$

odtud, má-li se zřetel na γ), vychází:

$$y - y' = A(x - x') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon)$$

a přičteme-li rovnici α) k rovnici ε):

$$y = Ax + b,$$

což se mělo dokázati.

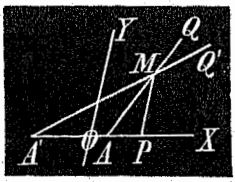
§. IX.

O vztazích dvou přímek.

1. Dvé neb i více přímek rozeznává se svým směrem rozdílným, jakož i že každá z nich v jiných bodech s osami se setká. Proto rovnice jejich různí se stálými veličinami.

2. Kdykoliv mluvíme o přímce *dané*, rozumějme, že *rovnice* její dána jest. A podobně udávajíce rovnici jmenujeme přímku.

obr. 27.



3. *Úloha.* Najdi průsek dvou přímek Q a Q' daných. (Obr. 27.).

Řeš. Buď rovnice přímky Q:

$$y = Ax + b \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

a přímky Q':

$$y = A'x + b' \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$

Poněvadž průsek M přímek těchto i na jedné i na druhé přímce leží, musí jeho souřadnice $x = OP$, $y = PM$ oběma rovnicím α) i β) zadost činiti, a proto smíme, pokud se průseku M týče, rovnice α) i β) pokládati za rovnice určovací k sobě příslušející, a z nich souřadnice x a y vyhledati. Učiníce tak nabudeme:

$$x = -\frac{b - b'}{A - A'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

$$y = \frac{Ab' - A'b}{A - A'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Přídavky. a) Je-li $b = b'$, bude $x = o$, $y = b$; t. j. průsek leží na y-ové ose vzdálen od počátku o b.

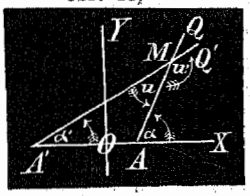
b) Je-li $Ab' = A'b$, bude $y = o$, $x = -\frac{b}{A} = a$; t. j. průsek leží na x-ové ose vzdálen od počátku o a.

c) Je-li $A = A'$, bude $x = \infty$, $y = \infty$; t. j. přímky protnou se v bodě neskonale vzdáleném, t. nikdy.

d) Je-li $A = A'$, $b = b'$, bude $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$; v tom případě splývají ale přímky v jedinou.

4. *Úloha.* Najdi úhel u, jejž svírají dvě přímky dané Q a Q' v osnově souřadnic pravoúhlých. (Obr. 28.).

obr. 28.



Řeš. Rovnice přímky Q buď opět

$$y = Ax + b, \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

a přímky Q':

$$y = A'x + b', \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$

Jest ale, klademe-li $\sphericalangle XAM = \alpha$, $XA'M = \alpha'$, $\sphericalangle A'MA = u$:

$$u = \alpha - \alpha', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \gamma)$$

pročež také (Trig. §. VIII. vz. 60.):

$$\operatorname{tang} u = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\alpha'}{1 + \operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha'} \quad \ldots\ldots \quad \delta)$$

Dle §. VII. vz. 4. jest ale:

$$\operatorname{tang}\alpha = A; \qquad \operatorname{tang}\alpha' = A';$$

pročež

$$\operatorname{tang} u = \frac{A - A'}{1 + AA'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Podobně najdeme $\operatorname{tang} u' = -\frac{A - A'}{1 + AA'}$ . . . . . 4)

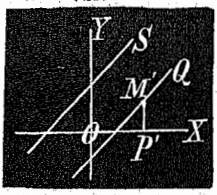
5. *Výsledky.* a) Je-li $A = A'$, bude $\operatorname{tang} u = 0$, aneb $\operatorname{tang} u = \pi$; tedy $Q \parallel Q'$: a naopak, aby $Q \parallel Q'$ bylo, musí býti $\operatorname{tang} u = 0$, a proto

$$A = A' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

b) Je-li $1 + AA' = 0$, bude $\operatorname{tang} u = \infty$, tedy $u = {}^1/_2\pi$, t. j. přímky Q a Q' strmí na sobě kolmo. Naopak aby $Q \perp Q'$ bylo, musí býti $\operatorname{tang} u = \infty$, pročež

$$1 + AA' = 0; \text{ čili } A' = -\frac{1}{A} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

obr. 29.



6. *Úloha.* Najdi rovnici přímky Q, která prochází bodem daným $M' = (x', y')$ a s jinou přímkou danou S rovnoběžna jest. (Obr. 29.)

Řeš. Rovnice přímky dané S buď:

$$y = Ax + b; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

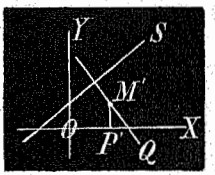
Rovnice přímky Q, která bodem daným M' prochází, jest dle §. VIII. 1.

$$y - y' = A'(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$

Ježto ale dle výmínky $Q \parallel S$, musí neurčitá směrnice $A' = A$ býti: pročež rovnice žádaná zní:

$$y - y' = A(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

obr. 30.



7. *Úloha.* Najdi rovnici přímky Q, která určitým bodem $M' = (x', y')$ prochází a k jiné přímce dané S kolmo směřuje; (v osnově souřadnic pravoúhlých, obr. 30.).

Řeš. Rovnice přímky dané S buď

$$y = Ax + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

Rovnice přímky Q bodem (x', y') procházející jest dle §. VIII. 1.

$$y - y' = A'(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$

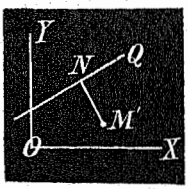
Poněvadž ale $Q \perp S$, musí dle vz. 6) býti

$$A' = -\frac{1}{A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma)$$

pročež jest žádaná rovnice $\quad y - y' = -\frac{1}{A}(x - x') \quad . \quad . \quad 8)$

8. *Úloha.* Najdi vzdálenost bodu daného $M' = (x', y')$ od přímky dané Q v osnově souřadnic pravoúhlých.

obr. 31.



Řeš. Buď (obr. 31.) rovnice přímky Q

$$y = Ax + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

Rovnice přímky $M'N$, jež prochází bodem $(x' y')$ a na Q kolmo stojí, jest dle 8)

$$y - y' = -\frac{1}{A}(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$

Souřadnice průsečného bodu N obou přímek těchto najdeme z α) a β) dle návodu §. IX. 3., i jsou

$$x = x' + A \cdot \frac{y' - Ax' - b}{A^2 + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma)$$

$$y = y' - \frac{y' - Ax' - b}{A^2 + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta)$$

Majíce souřadnice i bodu M' i bodu N najdeme jejich od sebe vzdálenost $M'N = d$ dle §. V. vz. 3.

$$d = \sqrt{\left(A.\frac{y' - Ax' - b}{A^2 + 1}\right)^2 + \left(-\frac{y' - Ax' - b}{A^2 + 1}\right)^2},$$

aneb zjednodušíme-li:

$$d = \pm \frac{y' - (Ax' + b)}{\sqrt{1 + A^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

9. *Výsledek.* Vzdálenost OD počátku souřadnic od přímky $y = Ax + b$ dostaneme ze vz. 9), položíme-li $y' = x' = 0$, a sice

$$d = \frac{b}{\sqrt{1 + A^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10$$

§. X.

O vztazích tří přímek.

1. *Úloha.* Najdi výmínku, pod kterou tři přímky P, P', P'' v jediném bodě M se protínají.

Řeš. Rovnice přímky P buď $\quad y - b = Ax, \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$

přímky P' . . . . . $\quad y - b' = A'x, \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$

přímky P'' . . . . . $\quad y - b'' = A''x \quad . \quad . \quad . \quad \gamma)$

Aby všechny přímky tyto protínaly se v bodě jediném M, musí všecky tři rovnice $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ o tomto bodu společném M platiti najednou: i můžeme tedy z rovnic těch vymýtiti x a y. K tomu konci odečteme-li $\beta)$ od $\alpha)$, pak $\gamma)$ od $\beta)$, vyjde

$$-b + b' = (A - A')x; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta)$$

$$-b' + b'' = (A' - A'')x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon)$$

Dělíme-li $\delta)$ na $\varepsilon)$, vyjde žádaná výmínka ve spůsobě rovnice:

$$\frac{A - A'}{A' - A''} = \frac{b - b'}{b' - b''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Příklad. Zdali se protínají v jediném bodě přímky:

$$y = (A + 2B)x$$
$$y = (A - B)x + a$$
$$y = (A - 4B)x + 2a.$$

2. Algebraický součet rovnic pro dvě přímky P a P' znásobených, kterýmikoliv činiteli μ a μ' vydá opět rovnici přímky třetí P'', která s prvými dvěma P a P' v jediném bodě se protíná.

Důkaz I. Buď rovnice co do doby zcela obecná

přímky P . . . . . $\quad My + Nx + p = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$

přímky P' . . . . . $\quad M'y + N'x + p' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$

Znásobíme-li α) činitelem μ, a β) činitelem μ', a sečteme-li pak obě, dostaneme

$$\mu(My+Nx+p)+\mu'(M'y+N'x+p')=0 \quad . \; . \; 2)$$

aneb

$$(\mu M+\mu' M')y+(\mu N+\mu' N')x+(\mu p+\mu' p')=0. \; 3)$$

Z doby 3) jde na jevo, že rovnice 2) neb 3) náleží opět *přímce* nějaké P''. Souřadnice x, y průsečného bodu Q obou přímek P a P' činí zadost i rovnici α) i rovnici β): a proto musí zadost učiniti i rovnici 2), ježto se jima i trojčlen $My+Nx+P$, i trojčlen $M'y+N'x+p'$ nulle roveň stává. A poněvadž tyto souřadnice bodu Q činí zadost rovnici 2) přímky P'', pročež musí bod Q na přímce P'' ležeti.

Důkaz II. Položivše $N:M=-A$; $p:M=-b$; $N':M'=-A'$; $p':M'=-b$; $(\mu N+\mu' N'):(\mu M+\mu' M')=-A''$; $(\mu p+\mu' p'):(\mu M-\mu' M')=-b''$, převedeme rovnice α), β), 3) na dobu:

$$y-b=Ax$$
$$y-b'=A'x$$
$$y-b''=A''x;$$

i vyhledáme pak snadno: $\dfrac{A-A'}{A'-A''}=-\dfrac{\mu M+\mu' M'}{\mu M}$;

$\dfrac{b-b'}{b'-b''}=-\dfrac{\mu M+\mu' M'}{\mu M}$; pročež $\dfrac{A-A'}{A'-A''}=\dfrac{b-b'}{b'-b''}$: a proto všechny tři přímky protínají se v jediném bodě (§. X. 1. vz. 1.).

3. Je-li algebraický součet rovnic činiteli kterýmikoliv (μ, μ', μ'') znásobených pro tři přímky P, P', P'' za veškeré hodnoty měnlivých souřadnic roveň nulle, protínají se tyto přímky v bodě jediném.

Důkaz. Buď rovnice co do doby zcela obecná,

přímky P . . . . $My+Nx+p=0$, ... α)
přímky P' . . . . $M'y+Nx+p'=0$, ... β)
přímky P'' . . . . $M''y+N''x+p''=0$ . . . . . γ)

Znásobíme-li tyto rovnice činiteli μ, μ', μ'', a znásobivše sečteme, dostaneme

$$(M\mu y+N\mu x+p\mu)+(M'\mu' y+N'\mu' x+p'\mu')+$$
$$(M''\mu'' y+N''\mu'' x+p''\mu'')=0 \quad . \; . \; . \; \delta)$$

Platí-li nyní rovnice δ) o veškerých hodnotách x a y: má platnost i pro souřadnice průseku přímek P a P': o těchto hodnotách vyhovuje se ale rovnicím α) i β) zároveň, i jest i trojčlen $M\mu y+N\mu x+p\mu$, i trojčlen $M'\mu' y+N'\mu' x+p'\mu'$ sám o sobě

roveň nulle: aby tehdy rovnice δ) mohla obstáti, musí i trojčlen $M''\mu''y + N''\mu''x + p''\mu''$ nulle se rovnati, a pročež i rovnice γ) pro tyto hodnoty platnost míti, t. j. průsek přímek P a P' musí ležeti na přímce P''.

Příklad. Zdaž se v jediném bodě protínají přímky:

$$(A-B)y+(M-N)x+a-b=0,$$
$$(B-C)y+(N-P)x+b-c=0,$$
$$(C-A)y+(P-M)x+c-a=0.$$

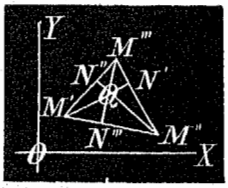
§. XI.

Úlohy.

1. Má se vyzpytovati, zdali výšky trojúhelníka v jediném bodě se protínají.

Řeš. Buďte (obr. 32.) $M'N'$, $M''N''$, $M'''N'''$ výšky trojúhelníka $M'M''M'''$; x', y' pravoúhlé souřadnice vrchole M'; x'', y'' souř. vrchole M''; x''', y''' souř. vrchole M'''. Rovnice přímky $M''M'''$, procházející bodoma $(x''y'')$ a $(x'''y''')$ jest dle §. VIII. vz. 3.

obr. 32.



obrazec 9

$$y-y''=\frac{y''-y'''}{x''-x'''}(x-x'').$$

Rovnice přímky $M'N'$, ježto prochází bodem (x', y') a na přímce $M'''M''$ kolmo stojí, jest dle §. IX. vz. 8.

$$y-y'=-\frac{x''-x'''}{y''-y'''}(x-x');$$

kterážto snadno dá se převesti na dobu:

$$(y''-y''')y+(x''-x''')x+(y'y'''+x'x''')-(y'y''+x'x'')=0.. \alpha)$$

Podobně dostaneme rovnice výšek $M''N''$ a $M'''N'''$:

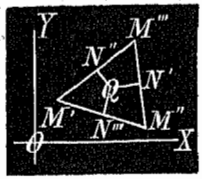
$$(y'''-y')y+(x'''-x')x+(y'y''+x'x'')-(y''y'''+x''x''')=0, \beta)$$
$$(y'-y'')y+(x'-x'')x+(y''y'''+x''x''')-(y'y'''+x'x''')=0.. \gamma)$$

Součet rovnic α), β), γ) rovná se ale nulle: pročež výšky $M'N'$, $M''N''$, $M'''N'''$ protínají se v bodě jediném.

Pozn. Souřadnice společného výšek průseku Q ze dvou těchto tří rovnic α), β), γ) dle návodu §. IX. 3. vyhledati, čtenáři ku cvičení zůstaveno jest.

2. Má se vyzpytovati, zdali kolmice uprostřed na stranách trojúhelníka vztýčené v jediném bodě se protínají.

obr. 33.



Řeš. Buďte (obr. 33.) N', N'', N''' rozpolovací body stran $M''M'''$, $M'''M'$, $M'M''$ trojúhelníka $M'M''M'''$; x', y', pak x'', y'', jakož x''', y''' pravoúhlé souřadnice jeho vrcholů M', M'', M'''. Jest pak rovnice přímky $M''M'''$.

$$y - y'' = \frac{y'' - y'''}{x'' - x'''}(x - x'');$$

úsečka bodu N' dle §. V. vz. 14. jest $= \frac{1}{2}(x'' + x''')$
a pořadnice jeho $= \frac{1}{2}(y'' + y''')$

Rovnice přímky $N'Q$, která bodem N' prochází, a na přímce $M''M'''$ kolmo stojí, jest tehdy dle §. IX. vz. 8.

$$y - \tfrac{1}{2}(y'' + y''') = -\frac{x'' - x'''}{y'' - y'''}(x - \tfrac{1}{2}x'' - \tfrac{1}{2}x'''),$$

kterážto snadno uvésti se dá na dobu:

$$2y(y'' - y''') + 2x(x'' - x''') + y'''^2 - y''^2 + x'''^2 - x''^2 = 0, \quad . \quad \alpha)$$

Podobně najdeme pro kolmice v bodech N'' a N''' na stranách trojúhelníka vztýčených rovnice:

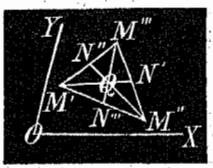
$$2y(y''' - y') + 2x(x''' - x') + y'^2 - y'''^2 + x'^2 - x'''^2 = 0, \quad . \quad . \quad \beta)$$

$$2y(y' - y'') + 2x(x' - x'') + y''^2 - y'^2 + x''^2 - x'^2 = 0. \quad . \quad . \quad \gamma)$$

Součet těchto tří rovnic jest nulle roveň: pročež kolmice protínají se v bodě jediném.

Pozn. Souřadnice společného kolmic průseku vyhledati opět čtenáři ku cvičení zůstaveno jest.

obr. 34.



3. Má se vyzpytovati, zda-li příčky v trojúhelníku $M'M''M'''$ vedené od vrcholů M', M'', M''' k rozpolovacím bodům N', N'', N''' protějších stran protínají se v bodě jediném. (obr. 34.)

Řeš. Jsou-li x', y', pak x'', y'', jakož x''' y''' rovnoběžné souřadnice vrcholů M', M'', M''', bude úsečka bodu N' dle §. V. vz. 14. opět $= \frac{1}{2}(x'' + x''')$; a pořadnice jeho $= \frac{1}{2}(y'' + y''')$; příčka pak $M'N'$, ježto prochází bodoma M' a N' bude míti dle §. VIII. vz. 3. za svou rovnici:

$$y - y' = \frac{y' - \frac{1}{2}(y'' + y''')}{x' - \frac{1}{2}(x'' + x''')}(x - x'),$$

kteráž snadno dá se uvésti na dobu:

$$y(x'' + x''' - 2x') - x(y'' + y''' - 2y') - y'(x' + x'' + x''') + x'(y' + y'' + y''') = 0 \ldots \alpha)$$

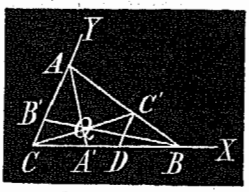
Podobně dostaneme rovnice příček $M''N''$ a $M'''N'''$.

$$y(x'''+x'-2x'')-x(y'''+y'-2y'')-y''(x'+x''+x''')+x''(y'+y''+y''')=0, \quad \beta)$$
$$y(x'+x''-2x''')-x(y'+y''-2y''')-y'''(x'+x''+x''')+x'''(y'+y''+y''')=0. \quad \gamma)$$

Součet všech tří rovnic rovná se nulle: pročež příčky protínají se v bodě jediném.

Pozn. Souřadnice téhož průseku najdi čtenář sám.

obr. 35.



4. Tři příčky AA', BB', CC' (obr. 35.) z vrcholů trojúhelníka ABC k protějším stranám vedené protínají se v bodě jediném Q, a mimo to jest známo, v kterém poměru dvě strany CB a CA téhož trojúhelníka příslušnýma příčkama se přetínají: i hledá se, v kterém poměru třetí strana AB příčkou CC' rozdělena jest.

Řeš. Mějme vrchol C za počátek, CB za osu x-ovou, CA za osu y-ovou souřadnic rovnoběžných, a klaďme $CB=a$, $CA=b$; $CA'=a'$, $CB'=b''$, $BA=c$, $BC'=c'$, $a-a'=a''$, $b-b''=b'$, $c-c'=c''$.

Jest pak dle §. VII. vz. 1) rovnice

příčky $A'A$ . . . $\frac{y}{b}+\frac{x}{a'}=1$, ... $\alpha)$

příčky BB' . . . $\frac{y}{b''}+\frac{x}{a}=1$, ... $\beta)$

strany BA . . . $\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1$, ... $\gamma)$

Odečteme-li $\alpha)$ od $\beta)$, dostaneme:

$$y=\frac{bb''a''}{aa'b'}\cdot x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta)$$

i náleží tato rovnice přímce, která jde počátkem souřadnic (§. VII. vz. 4.), a s přímkama AA' i BB' v jediném bodě se protíná (§. X. 2), tedy příčce CC'. — Průsečný bod C' přímek CC' a BA najdeme (§. IX. 3.) z rovnic $\gamma)$ a $\delta)$;

vyjdeť $\quad x=\frac{aa'b'}{a'b'+a''b''}=CD$ . . . . . $\varepsilon)$

je-li $C'D \parallel AC$. Tehdy bude také

$$DB=a-CD=a-\frac{aa'b'}{a'b'+a''b''}=\frac{aa''b''}{a'b'+a''b''} \quad . \quad . \quad . \quad \zeta)$$

Dle známé planim. věty jest ale

$$AC':C'B=CD:DB$$

pročež dosadíme-li hodnoty příslušné

$$c'':c'=\frac{aa'b'}{a'b'+a''b''}:\frac{aa''b''}{a'b'+a''b''}$$

aneb $$c'':c'=\frac{a'}{a''}:\frac{b''}{b'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \eta)$$

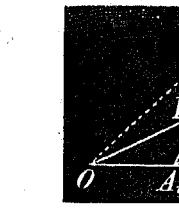
čímž úloha rozřešena jest.

Přídavek. a) Z úměry η) jde $a'.b'.c'.=a''.b''.c''$;
$AB'.BC'.CA'=A'B.B'C.CA''$.

b) Je-li $a'=a''$, $b'=b''$, jest i dle η) $c'=c''$.

5. Vyzpytuj, kterak se úhlopříčné čtyrstranu vzájemně rozdělují (Pl. §. XXX.).

obr. 36.



Řeš. Buďte (obr. 36.) A_1C, A_2C, A_1B_2, A_2B_1 strany čtyrstranu, a tedy A_1A_2, B_1B_2 a CD úhlopříčky jeho, které po dvou prodlouženy se protínají v bodech O, A, B. — Za počátek souřadnic rovnoběžných mějme O, za x-ovou osu OA_2; a za y-ovou OB_2; i položme $OA_1=a_1$; $OA=a$, $OA_2=a_2$; $OB_1=b_1$, $OB=b$, $OB_2=b_2$. Budou pak rovnice přímek $A_1B_1, A_2B_2, A_1B_2, A_2B_1$ v témž za sebou pořádku:

$$\frac{y}{b_1}+\frac{x}{a_1}=1, \quad . \quad . \quad . \quad \alpha); \quad \frac{y}{b_2}+\frac{x}{a_2}=1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta);$$

$$\frac{y}{b_2}+\frac{x}{a_1}=1, \quad . \quad . \quad . \quad \gamma); \quad \frac{y}{b_1}+\frac{x}{a_2}=1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta).$$

Součet rovnic α) a β) jest:

$$y\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)+x\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)=2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon)$$

rovnice přímky, který má s přímkama α) a β) bod společný C (§. X. 2.). Táž rovnice ε) vychází ale také za součet rovnic γ) a δ), a proto má přímka, která k ní náleží, s přímkama γ) a δ) společný bod D: z obého vyplývá, že rovnice ε) náleží přímce AC.

Položíme-li v ε) $y=0$, bude $x=a$; a položíme-li $x=0$, bude $y=b$; jest tedy:

$$a\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)=2;\ b\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)=2;$$

odkudž: $$\frac{1}{a}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right), \text{ aneb: } a=\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2} \quad . \quad . \quad \zeta)$$

$$\frac{1}{b}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right), \text{ aneb: } b=\frac{2b_1b_2}{b_1+b_2} \quad . \quad . \quad \eta)$$

Rovnice ζ) dá se uvésti na dobu:

$$a_1(a_2 - a) = a_2(a - a_1), \quad \ldots \ldots \ldots \quad \vartheta)$$

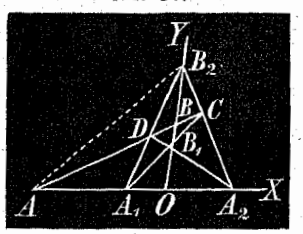
Jest však $a_1 = OA_1$; $a_2 = OA_2$; $a_2 - a = OA_2 - OA = AO + OA_2 = AA_2$; $a - a_1 = OA - OA_1 = A_1O + OA = A_1A$, jakákoliv jest vzájemná bodů O, A, A_1, A_2 poloha. Tedy bude z rovnice ϑ)

$$OA_1 . AA_2 = OA_2 . A_1A;$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{aneb: } OA_1 . A_2A + OA_2 . A_1A = 0; \text{ aneb } \dfrac{OA_1}{A_1A} : \dfrac{OA_2}{A_2A} = -1; \\ \text{a podobně vyjde z rovnice } \eta) \quad \dfrac{OB_1}{B_1B} : \dfrac{OB_2}{B_2B} = -1; \end{array}\right\} \iota)$$

t. j. úhlopříčné A_1A_2 a B_1B_2 jsou rozděleny harmonicky (Pl. §. CXV.).

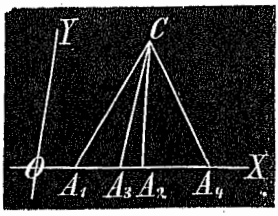
obr. 37.



Chtěje vyzpytovati, kterak jest třetí úhlopříčná CD rozdělena, vezmi za počátek souřadnic bod A, a podrže osu x-ovou OA_2 vezmi za y-ovou osu tuto třetí úhlopříčku. Aby se ušlo zbytečnému psaní, vyměň v obr. 36. písmena, (jako učiněno v obr. 37.) A za O, B_2 za C, B_1 za D: a nyní opakuj celé řešení hořejší, maje jen na mysli, že a_1, a mají nyní vztažení předešlému protivné. Tím způsobem opět vyjde $\frac{OB_1}{B_1B} : \frac{OB_2}{B_2B} = -1$, dle obr. 37, aneb dle obr. 36. $\frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB} = -1$; t. j. i třetí uhlopříčná rozděluje se průsekoma druhých dvou harmonicky.

Přídavek. Dle rovnice ζ) záleží hodnota a pouze na hodnotách a_1, a_2, t. j. poloha bodu A (obr. 36.) záleží pouze na poloze bodův O, A_1, A_2, nikoliv ale na poloze bodu C ani na poloze přímky OB_2. Z té příčiny a proto že pokaždé i příčka B_1B_2 harmonicky rozdělena jest bodem B k bodu O, činíme závěrek, že se každá příčka z bodu O vedená chocholem harmonických paprsků CO, CA, CA_1, CA_2 harmonicky rozděluje. A poněvadž každá přímka, která jest s přímkou OB_2 (obr. 36.) rovnoběžná, rozběžkami CO, CA_1, CA, CA_2 dělí se v tom poměru, jako OB_2 (Pl. §. LXXXVII. 6. a.); pročež zní věta obecně: *Harmonickými paprsky rozděluje se každá příčka harmonicky.*

obr. 38.



6. Z daných rovnic tří paprsků harmonických CA_1, CA_2, CA_3 najdi rovnici paprsku čtvrtého CA_4. (obr. 38.)

Řeš. Buďtež rovnice sdružených paprsků CA_1 a CA_2:

$$\frac{y}{b_1}+\frac{x}{a_1}=1, \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

$$\frac{y}{b_2}+\frac{x}{a_2}=1 \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$

Ježto třetí paprsek CA_3 s paprsky CA_1 a CA_2 ve společném bodě C se schází, musí jeho rovnice $\frac{y}{b_3}+\frac{x}{a_3}=1$ dáti se uvésti na dobu:

$$y\left(\frac{1}{b_1}+\frac{\alpha}{b_2}\right)+x\left(\frac{1}{a_1}+\frac{\alpha}{a_2}\right)=1+\alpha, \quad \ldots\ldots \quad \gamma)$$

kteráž vznikne přičtením α-násobné rovnice β) k rovnici α), a v níž činitel α rovnicí $\frac{y}{b_3}+\frac{x}{a_3}=1$ určen jest. Rozumí se, že ze stálých veličin a_3, b_3 jedna smí býti jakákoliv, druhá pak již tou prvou a stálými veličinami rovnic α) a β) určena jest.

Přičteme-li β-násobnou rovnici β) k rovnici α), dostaneme podobně rovnici čtvrtého paprsku CA_4:

$$y\left(\frac{1}{b_1}+\frac{\beta}{b_2}\right)+x\left(\frac{1}{a_1}+\frac{\beta}{a_2}\right)=1+\beta, \quad \ldots\ldots \quad \delta)$$

v nížto činitel β posud neurčitý jest a vyhledati se má.

Ježto bodové A_1 a A_2, pak A_3 a A_4 harmonicky sdruženy jsou, máme:

$$\frac{A_1A_3}{A_3A_2}:\frac{A_1A_4}{A_4A_2}=-1, \text{ aneb. } \frac{A_1A_3}{A_3A_2}+\frac{A_1A_4}{A_4A_2}=0, \quad \ldots \quad \varepsilon)$$

Položíme-li $OA_1=a_1$, $OA_2=a_2$, $OA_3=a_3$, $OA_4=a_4$: bude o každé těchto bodů O, A_1, A_2, A_3, A_4, poloze na ose x-ové $A_1A_3=a_3-a_1$, $A_3A_2=a_2-a_3$, $A_1A_4=a_4-a_1$, $A_4A_2=a_2-a_4$.

Dosadíce do ε) tyto hodnoty nabudeme:

$$\frac{a_3-a_1}{a_2-a_3}+\frac{a_4-a_1}{a_2-a_4}=0, \quad \ldots\ldots \quad \zeta)$$

Hodnoty a_1, a_2, a_3, a_4 nahradí se každá svou dobou z rovnic α), β), γ), δ) položíme-li za $y=0$, a spolu v témž pořádku a_1, a_2, a_3, a_4 za x. Tím činem dostaneme:

z rovnic α), β): $a_1 = a_1$; $a_2 = a_2$.

z rovnice γ): $a_3 = \frac{(1+\alpha)\, a_1 a_2}{a_2 + a_1 . \alpha}$;

z rovnice δ): $a_4 = \frac{(1+\beta)\, a_1 a_2}{a_2 + a_1 \beta}$;

tyto hodnoty dosadíme-li do ζ), a zjednodušíme-li potom, jak náleží, nabudeme:

$$\alpha + \beta = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \eta)$$

čímž β určeno jest, i zní pak rovnice čtvrtého paprsku

$$\left.\begin{aligned} & y\left(\frac{1}{b_1} - \frac{\alpha}{b_2}\right) + x\left(\frac{1}{a_1} - \frac{\alpha}{a_2}\right) = 1 - \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \text{aneb} \quad & \left(\frac{y}{b_1} + \frac{x}{a_1} - 1\right) - \alpha\left(\frac{y}{b_2} + \frac{x}{a_2} - 1\right) = 0. \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \vartheta)$$

Hlava třetí.

O kruhu.

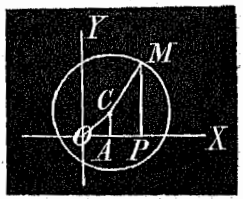
§. XII.

O rovnici kruhu.

1. *Kruh* jest křivka, jejíž veškeří bodové mají stejnou vzdálenost od určitého bodu, *střed* řečeného. Stálou tu vzdálenost nazýváme *poloměrem* kruhu.

2. *Úloha.* Najdi rovnici kruhu v osnově souřadnic rovnoběžných. (Obr. 39.).

obr. 39.



Řeš. Souřadnice středu C buďte $OA = p$, $AC = q$; souřadnice bodu M na kruhu $OP = x$, $PM = y$; $\sphericalangle XOY = \vartheta$; a poloměr $CM = a$. Jest pak dle §. V. vz. 1, položíme-li za d, x', y', zde a, p, q:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + 2(x-p)(y-q)\cos\vartheta = a^2 \quad . \quad . \quad 1)$$

žádaná rovnice kruhu.

3. Naopak, má-li která rovnice dobu 1), náleží kruhu. Neboť výraz na levé straně rovnice 1) jest zčtvercovaná vzdálenost bodu (x, y) na křivce ležícího od bodu (p, q) pevného; a ježto tato vzdá-

lenost dle rovnice 1) má býti veličinou stálou, musí křivka dle odst. 1. býti kruhem.

4. V osnově souřadnic *pravoúhlých*, jichž v tomto a v násl. §§. výhradně užívati budeme, jest $\cos\vartheta = 0$, a proto rovnice kruhu obecná:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = a^2, \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

aneb: $x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - a^2 = 0, \quad \ldots \quad 3)$

aneb, položíme-li

$$p^2 + q^2 = c^2, \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

$$c^2 - a^2 = \Pi, \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

též $x^2 + y^2 - 2px - 2qy + \Pi = 0 \quad \ldots \ldots \quad 6)$

5. Obecná rovnice kruhu v osnově souřadnic pravoúhlých má tedy tyto znaky podstatné:

a) Čverce plynulých souřadnic mají za součinitele hodnoty od nully rozdílné a sobě rovné i co do číselné hodnoty i co do znamení.

b) Součinitel součinu $x \,.\, y$ z plynulých souřadnic jest $= 0$.

c) První mocnosti plynulých souřadnic mohou za součinitele míti jakékoliv hodnoty stálé, kladné neb záporné, i nullu. Neboť součinitele tyto $-2p$ a $-2q$ jsou dvojnásobným hodnotám souřadnic středu protivně rovny, a souřadnice p a q středu dle polohy jeho mohou míti stálé hodnoty jakékoliv, kladné i záporné, i nulle rovné.

d) Prostý člen Π může míti hodnotu jakoukoliv; kladnou, zápornou, i nulle rovnou, jakož jest $p^2 + q^2 \gtreqless a^2$.

6. Ježto souřadnice středu jsou p a q, znamená c ve vzorci 4) dle §. V. vz. 5. vzdálenost středu od počátku souřadnic. Ze vz. 5) pak vychází hodnota poloměru

$$a = \sqrt{c^2 - \Pi}, \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

Je-li dána rovnice svou dobou s rovnicí 6) se shodující, aneb dá-li se na takovouto dobu uvesti, platí nám dle odst. 3. za rovnici kruhu. Sluší ale tehdy rozeznávati případů tré, a sice:

a) Je-li $\Pi > c^2$, bude dle rovnice 7). poloměr a, a tím i kruh sám v rovině *pomyslný* (imaginair).

b) Je-li $\Pi = c^2$, bude dle 7) poloměr $a = 0$, a kruh smrští se v jediný bod, v střed svůj; jakož rovnice 6) jen tehdy o skutečných souřadnicích místa má, kdy jest $x - p = 0$, $y - q = 0$.

c) Je-li ale $\Pi < c^2$, bude dle 7) poloměr a míti hodnotu skutečnou (reálnou), a kruh dá se v rovině sestrojiti. Neboť ze součinitelů $-2p$, $-2q$ najdeme souřadnice středu p a q, a tím i střed ustanovíme; a znajíce p i q i prostý člen Π určíme poloměr $a = \sqrt{c^2 - \Pi} = \sqrt{p^2 + q^2 - \Pi}$, a kruh sestrojiti dovedeme.

7. Ze zvláštní polohy středu k počátku souřadnic nabývá rovnice kruhu i zvláštních dob, z nichž zde klademe, jak následuje:

a) Leží-li počátek souřadnic na obvodě kruhu, musí býti $c = a$, pročež $\Pi = 0$, i jest pak rovnice kruhu:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Naopak, je-li $\Pi = 0$, musí počátek souřadnic býti na obvodě kruhu; neboť tehdy jest $c = a$.

b) Jde-li y-ová osa středem, jest $p = o$, a v rovnici kruhu:

$$x^2 + y^2 - 2qy + q^2 - a^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

schází prvá mocnost plynulé úsečky.

Naopak schází-li v rovnici kruhu prvá mocnost plynulé úsečky, musí y-ová osa středem kruhu procházeti. Neboť jest tehdy $p = 0$.

c) Jde-li x-ová osa středem, jest $q = 0$, a v rovnici kruhu:

$$x^2 + y^2 - 2px + p^2 - a^2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

schází prvá mocnost plynulé pořadnice.

Naopak, schází-li ona, jde x-ová osa středem, neboť jest tehdy $q = 0$.

d) Jde-li x-ová osa středem, a leží-li počátek souřadnic na obvodě, jest $q = 0$, $p = \mp a$: i bude v rovnici kruhu

$$y^2 + x^2 - 2px = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

scházeti prvá mocnost plynulé pořadnice a člen prostý.

Naopak scházejí-li tyto dva členy, jde x-ová osa středem a počátek souřadnic leží na obvodě kruhu.

Dodavek. V tomto případě slove počátek souřadnic *vrcholem* kruhu a rovnice 11) nazývá se rovnicí kruhu *vrcholovou.*

e) Je-li počátkem souřadnic střed kruhu sám, jest $p = q = 0$, a v rovnici kruhu, která se tehdy nazývá *středovou*:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

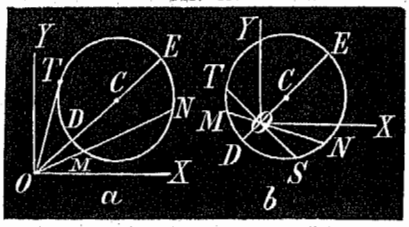
scházejí prvé mocnosti obou souřadnic plynulých.

Naopak scházejí-li v rovnici kruhové tyto členy, jest $p = q = 0$, a střed počátkem souřadnic.

8. Vzorec 5) lze psáti takto:

$$\Pi = (c + a)(c - a).$$

obr. 40.



Vedeme-li z počátku O souřadnic středem C kruhu přímku, která kruh protne v bodech D, E (obr. 40.): jest $OC = c$; a ježto bodové D i E na kruhu leží směry od středu C protivnými: $CE = a$, $CD = -a$; v každém případě pak $OD = OC + CD = c - a$; $OE = OC + CE = c + a$; pročež $OD . OE = (c - a)(c + a) = \Pi$.

Vedše počátkem O jakoukoliv jinou přímku MN, jež kruh protne v bodech M i N, máme dle Pl. §. XCVIII. 7. na všechen způsob

$$OM . ON = OD . OE = \Pi.$$

t. j. *prostý člen Π v rovnici kruhové rovná se součinu z úseček přímky, jež se vede od počátku O souřadnic, průsekoma s kruhem povstalých.*

Součinu tomu dějí *mocnost bodu O ke kruhu hledící.* Proto se říká, že jest Π v kruhové rovnici mocnost počátku souřadnic k témuž kruhu hledící.

Dodavek. Je-li OT (obr. 40. a.) tečná, máme dle Pl. XCVIII. 7

$$OT^2 = OM . ON = \Pi.$$

Podobně je-li TS (obr. 40. b) na přímce OC v bodě O kolmo, jest dle Pl. XCVIII. 7.

$$OT . OS = OM . ON = \Pi.$$

Ježto ale v tomto případě jest $OS = -OT$, bude

$$\Pi = -OT^2.$$

9. V obecné rovnici kruhu vyskytuje se tré veličin stálých. Aby tedy kruh dokonale určen byl, musí tyto veličiny buďto zřejmě dány býti, aneb z tolikýchž podmínek na sobě nezávislých do rovnice kruhu obecné vyhledati aneb z ní vymýtiti se dáti. Za příklad buď:

Úloha. Najdi rovnici kruhu, třemi danými body $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$ probíhajícího.

Řeš. Žádaná rovnice má obecnou dobu:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + \Pi = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

z níž ovšem stálé veličiny p, q, Π, jelikož neznámé, vymýtiti jest.

Poněvadž ale bodové $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$ na křivce leží, bude též:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 - 2px_1 - 2qy_1 + \Pi = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$

$$x_2^2 + y_2^2 - 2px_2 - 2qy_2 + \Pi = 0, \quad \ldots \ldots \quad \gamma)$$
$$x_3^2 + y_3^2 - 2px_3 - 2qy_3 + \Pi = 0, \quad \ldots \ldots \quad \delta)$$

Z těchto čtyr rovnic mohou neznámé stálé veličiny p, q, Π, vymýtěny, aneb z rovnic β), γ), δ) jejich hodnoty nalezeny, a nalezené do rovnice α) dosazeny býti.

Jedno neb druhé vykonavše dojdeme rovnice žádané, což aby dovedl pilný čtenář sám se přičiň.

§. XIII.

O vzájemné poloze kruhu a přímky.

1. Přímka a kruh v jedné rovině dle polohy své mohou se buďto minouti, aneb v jediném bodě dotknouti, aneb protíti (aspoň) ve dvou bodech. Pod kterými výmínkami tak bude, o tom rozhodnouti, jest nynější úlohou.

K tomu konci buď v osnově souřadnic pravoúhlých středová rovnice kruhu:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \alpha)$$

a rovnice přímky v jedné a též osnově:

$$y = Ax + n, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \beta)$$

Ježto každá z těchto dvou rovnic platí všem bodům, které na jejím místě geometrickém leží; musí o těch bodech, které oběma čarám jsou společnými, platiti rovnice obě pospolu. Je-li tedy bod (x, y) průsek obou čar, najdeš souřadnice jeho x, y, řeše rovnice α) a β).

Rozřešiv dostaneš

$$x = -\frac{An}{1+A^2} \pm \frac{1}{1+A^2}\sqrt{a^2(1+A^2) - n^2} \quad \ldots \quad \gamma)$$

a tuto hodnotu za x do β) dosadiv určíš příslušné y.

Ježto dle γ) úsečka x má hodnoty dvě, a ku každé náleží dle β) jistá hodnota pořadnice y: soudíme, že kruh má *vůbec dva* body s přímkou společné; zvláště pak sluší rozeznávati případů tré, a sice:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) Buď jest } a^2(1+A^2) - n^2 > 0; \\ \text{b) aneb jest } a^2(1+A^2) - n^2 = 0; \\ \text{c) aneb jest } a^2(1+A^2) - n^2 < 0; \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad \delta)$$

V případě prvém dostaneme za x a tedy i za y dvé skutečných hodnot od sebe rozdílných; v případě druhém vyjde za x i za y dvé hodnot sobě rovných, čili hodnota jedna; v případě tře-

tím jsou obě hodnoty jak úsečky x tak pořadnice y od sebe sice rozdílné, ale pomyslné. Pročež v případě prvém protíná se přímka s kruhem ve dvou bodech skutečně; v případě druhém mají přímka a kruh jediný bod společný (dva body v jeden splývající) dotýkajíce se; v případě třetím jsou průseky přímky s kruhem dva body pomyslné, i minou se ty čáry.

Výmínka pro tyto tři polohy ve vz. δ) vypsaná dá se na jednodušší dobu uvesti a geometricky vyložiti.

Jestiť $$a^2(1+A^2)-n^2 \gtreqless 0,$$

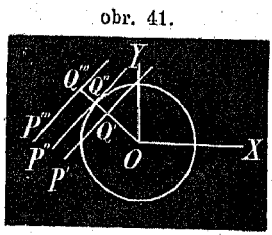
aneb $$a^2 \gtreqless \frac{n^2}{1+A^2},$$

čili $$a \gtreqless \frac{n}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Výraz $\frac{n}{\sqrt{1+A^2}}$ znamená ale dle §. IX. vz. 10) vzdálenost d počátku souřadnic od přímky $y=Ax+n$:

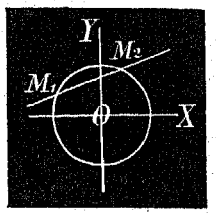
bude tedy výmínka $a \gtreqless d$; t. j.

obr. 41.



Je-li vzdálenost d $(=OQ')$ středu O od přímky P' (obr. 41.) menší než poloměr kruhu, protíná se kruh přímkou ve dvou bodech; je-li vzdálenost tato (OQ'') rovna poloměru, dotýká se přímka P'' kruhu; je-li ale $d\cdot(=OQ''')$ větší než poloměr, mine se přímka P''' kruhu.

obr. 42.



2. *Úloha.* Najdi rovnici přímky, která kruh daný protíná ve dvou bodech $M_1=(x_1\,y_1)$ a $M_2=(x_2\,y_2)$. (Obr. 42.)

Řeš. Rovnice kruhu středová v osnově souřadnic pravoúhlých jest:

$$x^2+y^2=a^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha);$$

a poněvadž body $(x_1\,y_1)$ a $(x_2\,y_2)$ na kruhu leží bude dle α)

$$x_1{}^2+y_1{}^2=a^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

$$x_2{}^2+y_2{}^2=a^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \gamma)$$

Žádaná rovnice přímky, která prochází bodoma $(x_1\,y_1)$ a $(x_2\,y_2)$ jest dle §. VIII. vz. 3):

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

z nížto pomocí vz. β) a γ) dvě veličiny (buďto x_1 a x_2, aneb y_1 a y_2, aneb x_1 a y_2 aneb x_2 a y_1) vymýtiti se dají, potřebí-li by toho bylo.

Rovnice 1) dá se uvesti na jinou dobu; a sice odečteme-li γ) od β) dostaneme:

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0,$$

aneb $$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0,$$

odtud pak: $$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \delta)$$

Dosadíme-li nyní za směrnici v rovn. 1) její hodnotu z δ), vyjde hledaná doba:

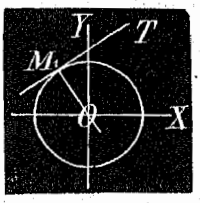
$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Dodavek. Chtějíce tento výsledek přispůsobiti k rovnici kruhu obecné $(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2$, položíme $(x - p)$ místo x, $(y - q)$ místo y, a rovněž $(x_1 - p)$ místo x_1; $(y_1 - q)$ místo y_1 atd. Tím vyjde:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2 - 2p}{y_1 + y_2 - 2q}(x - x_1) \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

3. *Úloha.* Najdi rovnici přímky T, která se daného kruhu dotýká v bodě daném $M_1 = (x_1 y_1)$. (Obr. 43.)

obr. 43.



Řeš. Každou tečnou lze pokládati za přímku která má s křivkou společné body dva $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ ovšem splývající v bod *jediný*.

Je-li tedy střed kruhu počátkem souřadnic pravoúhlých, bude žádanou rovnicí nalezená rovnice 2), položíme-li za výminku $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$: tím se 2) zjednodušuje nabývajíc doby:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

kdežto jest $$y_1^2 + x_1^2 = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

Rovnice 4) dá se pomocí α) uvesti snadno na dobu

$$y_1 y + x_1 x = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Dodavek 1. Má-li střed kruhu za souřadnice p a q, musíme opět $(x - p)$, $(y - q)$, $(x_1 - p)$, $(y_1 - q)$ místo x, y, x_1, y_1 klásti: i bude pak rovnice tečné:

$$(y_1 - q)(y - q) + (x_1 - p)(x - p) = a^2 \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

aneb $$y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Dodavek 2. Tečná má v rovnici za svou směrnici $-\frac{x_1 - p}{y_1 - q}$, jejíž hodnota protivná a převrácená jest $\frac{y_1 - q}{x_1 - p}$ směrnice přímky $M_1 O$ bodem dotyčným a středem kruhu vedené. Jest tedy tečná kruhu dle §. IX. 5. v bodě dotyčném na poloměru kolmo.

4. *Úloha.* Najdi rovnici přímky, která procházejíc bodem (x', y') dotýká se kruhu daného $(x^2 + y^2 = a^2)$.

Řeš. Majíce střed kruhu za počátek souřadnic pravoúhlých, znamenáme-li neznámého bodu dotyčného souřadnice písmeny ξ, η: bude rovnice tečné dle 5):

$$\eta y + \xi x = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

v níž ale stálé veličiny η, ξ jsou neznámy, a nalezeny býti mají.

Poněvadž bod (ξ, η) leží na obvodě kruhu, jest:

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$

a poněvadž tečná α) má procházeti daným bodem (x', y'), bude o tomto bodu platiti rovnice α), t. j.

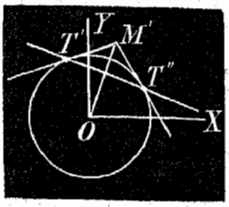
$$\eta y' + \xi x' = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma)$$

Z rovnic β) a γ) lze nalezti hodnoty η a ξ, a nalezené dosaditi do rovnice α), čím úloha dokonána. To aby čtenář sám podnikl a dovedl, přičiň se.

Dodavek 1. Ježto rovnice β) jest stupně druhého, dostaneme za ξ dvé hodnot, a ku každé zvláštní hodnotu η: rovnice α) má tedy v sobě dvě zvláštní rovnice, z níž každá náleží k jiné přímce tečné: t. j. z jednoho bodu daného dá se ke kruhu vésti *dvé* tečných.

Dodavek 2. Přijmeme-li za ω-ovou osu přímku bodem $(x' y')$ procházející a střed kruhu opět za počátek souřadnic, zjednoduší se úloha, ježto jest $y' = 0$. Tehdy z rovnice γ) vyjde $\xi = \frac{a^2}{x'}$, čili $x' : a = a : \xi$, kterážto úměra podává k sestrojení tečné pravidlo, dle něhož již v Pl. §. LXXVIII. 2. jsme vedeni byli.

obr. 44.



5. *Úloha.* Najdi rovnici tětivy $T'T''$ (obr. 44.) tečných, které jsou vedeny z bodu M' $(x' y')$ ke kruhu danému $(x^2 + y^2 = a^2)$.

Řeš. Je-li dotyčný bod $(\xi\ \eta)$, má rovnice γ) v odst. 4. místa pro jeden i druhý bod dotyčný T' a T'' čili $(\xi_1\ \eta_1)$ a $(\xi_2\ \eta_2)$:

$$\eta y' + \xi x' = a^2;$$

a poněvadž platí o dvou bodech, musí platnost míti dle (dle §. VIII. 3.) o celé přímce, která těmito dvěma body prochází: jest tedy žádaná rovnice, položíme-li y, x místo η, ξ:

$$y'y + x'x = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Dodavek. Směrnice tětivy tečných jest dle 8) $= -\frac{x'}{y'} = A$. Rovnice přímky OM', která jde středem a bodem $(x'y')$, jest pak $y = \frac{y'}{x'} \cdot x$: a směrnice její $\frac{y'}{x'} = A'$: pročež jest $AA' = -1$; t. j. tětiva $T'T''$ tečných strmí kolmo na přímce $M'O$, která se z bodu $(x'y')$ ku středu kruhu vede.

6. *Normala* (kolmice) nazývá se přímka, která na tečné v bodě dotyčném kolmo strmí.

7. *Úloha.* Najdi rovnici pro normalu kruhu daného.

Řeš. Je-li (x', y') bod dotyčný, a rovnice kruhu

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = a^2, \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

bude rovnice tečné:

$$y - y' = -\frac{x'-p}{y'-q}(x - x'), \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$

a rovnice normaly, která jde bodem (x', y') a na tečné kolmo strmí:

$$y - y' = \frac{y'-q}{x'-p}(x - x') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Dodavek 1. Rovnice 9) náleží přímce, která prochází bodem (x', y') i bodem (p, q), t. j. normala kruhu jde středem jeho.

Dodavek 2. Je-li střed kruhu počátkem souřadnic, bude míti rovnice normaly jednodušší dobu:

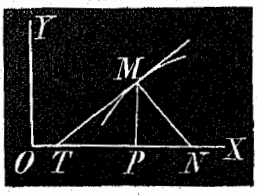
$$y = \frac{y'}{x'} \cdot x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

§. XIV.

O délce tečné, normaly, subtangenty, subnormaly.

1. *Délkou tečné* nazýváme její část $MT = t$, (obr. 45.) od bodu dotyčného M až k její patě T na ose x-ové; *délkou normály* slove její část $MN = n$ od bodu dotyčného M až k patě její N na ose x-ové; *subtangentou* (podtečnou) slove úsečka PT z osy

obr. 45.



x-ové od paty P pořadnice PM dotyčného bodu M až k patě T tečné; *subnormalou* (podkolmou) nazývá se úsečka PN z x-ové osy od paty P k patě N normaly.

2. Subtangenta (subnormala) rovná se součinu ze směrnice normaly (tangenty) a z pořadnice bodu dotyčného.

Tangenta (normala) rovná se kořeni ze součtu zčvercované pořadnice bodu dotyčného a zčtvercované subtangenty (subnormaly).

Důkaz. Rovnice tečné, která má s křivkou bod $(x'y')$ společný, jest vůbec

$$y-y'=A(x-x'), \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

a rovnice normaly jest pak:

$$y-y'=-\frac{1}{A}(x-x'), \quad \ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

Vložíme-li $y=0$ do rovnice α): bude x znamenati úsečku OT (obr. 45.); a ježto $x'=OP$, vyjde:

$$-y'=A.(OT-OP)$$

odtud $$OT-OP=-\frac{1}{A}.y'$$

a ježto $$OT-OP=PT=\text{subtang}$$

pročež $$\text{subt}=-\frac{1}{A}.y' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Vložíme-li $y=0$ do rovnice β), bude x znamenati úsečku ON: i vyjde, ježto $x'=OP$; $ON-OP=PN=\text{subnorm}$.

$$\text{subnorm}=Ay' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Dle věty Pyth. jest (obr. 45.)

$$MT=\sqrt{PM^2+PT^2}; \quad MN=\sqrt{PM^2+PN^2}; \text{ t. j.}$$

$$t=\sqrt{y'^2+(\text{subt})^2}=y'.\sqrt{1+\frac{1}{A^2}} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

$$n=\sqrt{y'^2+(\text{subn})^2}=y'.\sqrt{1+A^2} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

3. Najdi subtangentu, subnormalu, tangentu a normalu kruhu.

Řeš. Rovnice kruhu buď $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$;

tedy směrnice tečné jest: $$A=-\frac{x'-p}{y'-q}:$$

pročež najdeme: $$\text{subt}=\frac{y'-q}{x'-p}.y',$$

$$\text{subn}=-\frac{x'-p}{y'-q}.y',$$

$$t = \frac{ay'}{x' - p},$$

$$n = \frac{ay'}{y' - q}.$$

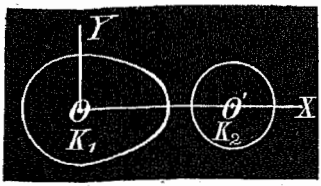
Dodavek. Je-li $p = q = 0$; bude:

$$\text{subt} = \frac{y'^2}{x'}; \quad \text{subn} = -x'; \quad t = \frac{ay'}{x'}; \quad n = a.$$

§. XV.

O vzájemné poloze dvou kruhů.

obr. 46.



Buď střed O (obr. 46 až 50.) většího kruhu K_1 počátkem souřadnic, přímka OO' středoma O i O' obou kruhů vedená buď x-ovou osou, a_1 buď poloměr kruhů K_1, a_2 poloměr kruhu K_2, a klaďme $OO' = d$. Jest pak rovnice

kruhu K_1 (§. XII. vz. 12): $x^2 + y^2 = a_1^2$, ... α)

kruhu K_2 (§. XII. vz. 10): $x^2 + y^2 - 2dx + d^2 - a_2^2 = 0$, β)

Chtějíce vyzpytovati, zdali tyto dva kruhy mají některé a které body společné, či se minou: uvážíme, že souřadnice bodů oběma kruhům společných musí vyhověti jak rovnici α) tak rovnici β); a naopak, činí-li souřadnice některého bodu zadost oběma rovnicím, musí bod ležeti i v jednom i v druhém kruhu. Pročež najdeme souřadnice průsečných bodů, ať skutečné ať pomyslné, rozřešíme-li rovnice α) a β), souřadnice x a y v nich za jednostejné majíce. K tomu konci odečtouce β) od α), a pak x určíce dostaneme:

$$x = \frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \gamma)$$

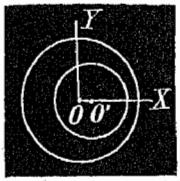
Dosadíme-li z rovnice γ) za x hodnotu jeho do rovnice α), a určíme-li pak y, dostaneme:

$$y = \pm \sqrt{a_1^2 - \left(\frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d}\right)^2}, \quad . \; . \; . \; . \quad \delta)$$

Z rovnic γ) a δ) soudíme, že kruhy protínají se vůbec ve dvou bodech (ať skutečných, ať v jeden splývajících, ať pomyslných), které mají úsečku x dle γ) společnou, a pořadnice dle δ) sobě rovné ale protivné. Zvláště pak sluší rozeznávati případů tré:

a) Je-li $\frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d} > a_1$ čili $(d - a_1)^2 - a_2^2 > 0$, čili

obr. 47.

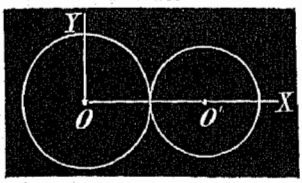


$(d-[a_1-a_2])(d-[a_1+a_2])>0$: budou z rovnice δ) obě pořadnice a tím i oba průsečné body *pomyslné*. Tak se ale stane ve dvou případech:

α) buďto když jest $d>a_1+a_2$;

β) aneb když jest $d<a_1+a_2$:

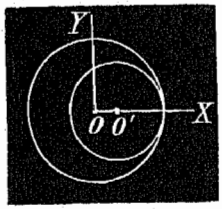
obr. 48.



v případě prvním minou se kruhy ležíce jeden mimo druhý (obr. 46.); v případě druhém vězí menší kruh uvnitř většího. (obr. 47.)

b) Je-li $\frac{d^2+a_1^2-a_2^2}{2d}=a_1^2$, čili $(d-[a_1-a_2])(d-[a_1+a_2])=0$ bude z rovnice δ) $y=\pm 0$, t. j. oba kruhy mají jediný bod společný, dotýkajíce se na přímce středové.

obr. 49.

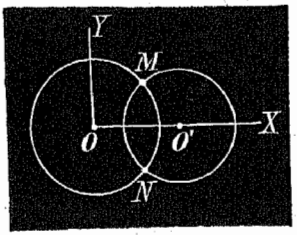


Tak se opět stane ve dvou případech:

α) buďto když jest $d=a_1+a_2$; a tehdy se kruhy dotýkají vně (obr. 48.);

β) aneb když jest $d=a_1-a_2$: a tehdy se kruhy dotýkají uvnitř. (obr. 49.)

obr. 50.

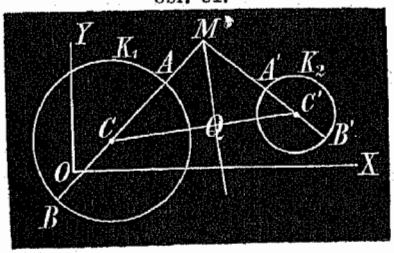


c) Je-li $\frac{d^2+a_1^2-a_2^2}{2d}<a_1^2$, čili $(d-[a_1-a_2])(d-[a_1+a_2])<0$, což jen tehdy může se státi, když jest $a_1+a_2>d>a_1-a_2$: dostaneme z rovnice δ) za y dvě hodnoty skutečné: a kruhové protínají se ve dvou bodech M a N, které po obou stranách středové přímky OO' leží stejně od ní vzdálené. (Obr. 50.)

§. XVI.

O přímce rovných mocností dvou kruhů.

obr. 51.



1. *Úloha.* Najdi geometrické místo pro vše body, z nichž každý má mocnosti hledíc ku dvěma kruhům jednostejné.

Řeš. Rovnice kruhů K_1 a K_2 (obr. 51.) buďte:

$$(x-p_1)^2+(y-q_1)^2-a_1^2=0, \quad 1)$$
$$(x-p_2)^2+(y-q_2)^2-a_2^2=0, \quad 2)$$

aneb také

$$x^2+y^2-2p_1x-2q_1y+\Pi_1=0, \quad \ldots \ldots \quad 3)$$
$$x^2+y^2-2p_2x-2q_2y+\Pi_2=0. \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

Buď bod M jeden za všechny, jejichž geom. místo hledáme, a souřadnice jeho x, y. *Mocnost* tohoto bodu hledíc ke kruhu K_1 jest součin $MA.MB=M$; a hledíc ke kruhu K_2 jest mocnost jeho $MA'.MB'=M'$: a poněvadž dle podmínky $M=M'$, jest

$$MA.MB-MA'.MB'=0 \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Jest ale $MA=MC-AC$, $MB=MC+CB=MC+AC$; tedy $MA.MB=MC^2-AC^2$; $MC^2=(x-p_1)^2+(y-q_1)^2$, (dle §. V. vz. 3.); $AC=a_1$:

pročež $\quad MA.MB=(x-p_1)^2+(y-q_1)^2-a_1^2$,

podobně vyjde $\quad MA'.MB'=(x-p_2)^2+(y-q_2)^2-a_2^2$.

Vložíme-li tyto hodnoty do 5), vyjde žádaná rovnice:

$$[(x-p_1)^2+(y-q_1)^2-a_1^2]-[(x-p_2)^2+(y-q_2)^2-a_2^2]=0, \quad 6)$$

aneb, zjednodušíme-li, spolu $p_1^2+q_1^2-a^2=\Pi_1$, $p_2^2+q_2-a_2^2=\Pi_2$ kladouce:

$$2(p_2-p_1)x+2(q_2-q_1)y+\Pi_1-\Pi_2=0, \quad \ldots \quad 7)$$

aneb $$y=-\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1}x+\frac{\Pi_2-\Pi_1}{2(q_2-q_1)} \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

Jest tedy geometrickým místem bodů, které hledíc ku dvěma kruhům mají rovné mocnosti, *přímka*, i nazývá se *přímka rovných mocností*, (*mocnice*, *chordala*, *osa radikalu* a j.).

2. Přímka rovných mocností jest na přímce středové kolmo.

Důkaz. Rovnice přímky středové CC' (obr. 51.), jež prochází bodoma $(p_1\,q_1)$ a $(p_2\,q_2)$, jest dle §. VIII. vz. 3.):

$$y-q_1=\frac{q_2-q_1}{p_2-p_1}(x-p_1) \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

Součin směrnic z 8) a 9) jest $=-1$: pročež obě přímky na sobě kolmo (§. IX. vz. 6.).

3. Dvěma kruhům a jejich mocnici není společných bodův, leč těch, které všem třem společné jsou.

Důkaz. Kladouce $(x-p_n)^2+(y-q_n)^2-a_n^2=K_n$, vypisujeme rovnice 1), 2), 6) zkrátka:

$$K_1=0, \quad \ldots \ldots \quad \alpha)$$
$$K_2=0, \quad \ldots \ldots \quad \beta)$$
$$K_1-K_2=0, \quad \ldots \ldots \quad \gamma),$$

z nichž α) a β) kruhům, a γ) jejich mocnici přísluší.

Je-li nějaký bod $(\xi\ \eta)$ společný kruhům, vyhoví jeho souřad-

nice rovnicím α) i β), t. j. vložíme-li do těchto rovnic ξ a η na místě plynulých souřadnic x a y, bude v skutku jak $K_1 = 0$, tak $K_2 = 0$, a proto také $K_1 - K_2 = 0$, t. j. souřadnice ξ, η téhož bodu učiní zadost rovnici γ) byvše do ní na místě x a y vloženy; po geometricku řečeno: bod (ξ η) oběma kruhům společný musí vězeti v mocnici jejich.

Je-li ale nějaký bod (ξ η) společný jednomu kruhu k. p. K_1 a mocnici obou, vyhoví souřadnice ξ a η rovnicím α) a γ), i vloživše do těchto rovnic ξ a η na místě x a y budeme míti v skutku $K_1 = 0$, $K_1 - K_2 = 0$; pročež nezbytně i $K_2 = 0$, t. j. souřadnice ξ a η na místě plynulých x a y do rovnice druhého kruhu K_2 vložené činí jí zadost; musí tedy bod (ξ η) ležeti i v kruhu druhém K_2.

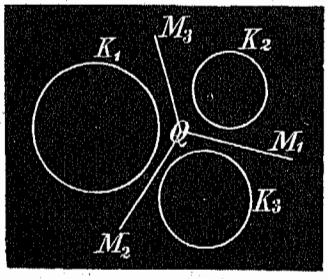
Dodavek 1. Jest patrno, že věta, na níž důkaz nyní vedený spočívá, jest vůbec pravá a zní: Jsou-li rovnice tří čar takového způsobu, že každá z nich odvoditi se dá ze dvou druhých: leží všecky průsečné body kterýchkoliv z těchto dvou čar i na čáře třetí.

Dodavek 2. Jakož dva kruhy nemají bodu společného, aneb se v jediném bodě dotýkají aneb se ve dvou bodech protínají; bude jejich mocnice buďto mimo obadva ležíc, aneb jejich společnou tečnou aneb společnou tětivou jsouci.

Dodavek 3. Je-li střed jednoho (většího) kruhu K_1 počátkem souřadnic, a přímka středová osou úseček, zjednoduší se rovnice 7) na dobu rovnice γ) v §. XV., položíme-li, jakož v skutku jest $d = p_2$.

Dodavek 4. Mocnice dvou kruhů najde se snadno odečtením rovnice kruhu ednoho od rovnice kruhu druhého.

obr. 52.



4. Všecky tři mocnice tří kruhů po dvou braných protínají se v bodě jediném Q, jenž *středem* n. *polem* jejich slove (obr. 52.).

Důkaz. Rovnice kruhů, způsobem jako v odst. 3. zkráceným vypsané buďtež:

$$K_1 = 0, \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$
$$K_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$
$$K_3 = 0, \quad \ldots\ldots \quad \gamma)$$

Tehdy jest (dle dod. 4. odst. 3.) rovnice pro mocnici

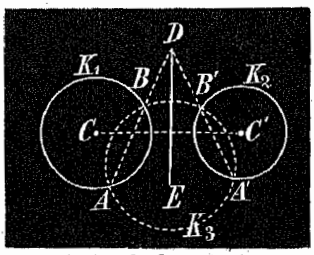
M_3 kruhu K_1 a K_2: $K_1 - K_2 = 0$, ... δ)
M_1 kruhu K_2 a K_3: $K_2 - K_3 = 0$, ... ε)
M_2 kruhu K_3 a K_1: $K_3 - K_1 = 0$, ... ζ)

Sečteme-li rovnice δ), ε), ζ), vyjde:

$$(K_1 + K_2 + K_3) - (K_2 + K_3 + K_1) = 0; \quad . \quad . \quad \eta)$$

kterážto rovnice má platnost, ať si plynulé souřadnice mají hodnoty jakékoliv. Čímž, co tvrzeno, dokázáno (§. X. 3.).

obr. 53.



Výsledek. Ta věta dává nám na ruku, kterak mocnici dvou kruhů K_1 a K_2 (obr. 53.), jež se neprotínají, sestrojiti lze. Opíšemeť tehdy kruh třetí K_3, jenž by se s oběma danýma dvakrát protal; opsavše vedeme tětivy AB a $A'B'$ kruhu třetímu společné s kruhoma danýma; a z průseku D prodloužených tětiv, (jenž jest *polem* radikalu), spustíme kolmici DE na středňou přímku CC' daných kruhů: kolmice ta jest žádaná mocnice.

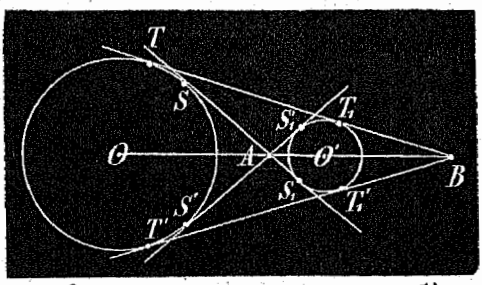
§. XVII.

O tečné dvěma kruhům společné.

Úloha. Najdi rovnici tečné dvěma kruhům společné.

Řeš. Buď střed O (obr. 54.) kruhu jednoho (O) počátkem, střednice OO' obou kruhů (O i O') x-ovou osou souřadnic pravoúhlých; poloměry kruhu O a O' buďtež a i a_1; posléz $OO' = d$.

obr. 54.



I bude pak rovnice

kruhu O: $x^2 + y^2 = a^2$, ... 1);
kruhu O': $(x - d)^2 + y^2 = a_1^2$, ... 2).

Je-li (x' y') bod dotyčný (T) na kruhu O, a (x'', y'') bod dotyčný T_1 na kruhu O', bude rovnice společné tečné, ježto se dotýká

jednak kruhu O: $x'x + y'y = a^2$, ... 3)
jednak kruhu O': $(x'' - d)(x - d) + yy'' = a_1^2$, . 4)

i musí tyto dvě doby na oko různé v skutku býti jednostejné, poněvadž vynášejí rovnici přímce jedné a též příslušející. Tato jednostejnost obou dob ze strany jedné, a známost geometrických míst (rovnic 1) a 2)), na nichž bodové $(x'y')$ a $(x''y'')$ leží, ze strany druhé, nabízí nám vymíněné rovnice, z nichž bychom hodnoty neznámé x', y', x'', y'' vyhledavše a nalezené do rovnice 3) neb 4) dosadíce žádané rovnice nabyli.

Uveďme 3) a 4) na doby:

$$y = -\frac{x'}{y'} \cdot x + \frac{a^2}{y'}$$

$$y = -\frac{x'' - d}{y''} \cdot x + \frac{a_1{}^2 + d\,(x'' - d)}{y''}$$

Skutečná jednostejnost obou těchto rovnic žádá nezbytně:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x'' - d}{y''}, \quad . \quad . \quad . \quad \alpha); \quad \frac{a^2}{y'} = \frac{a_1{}^2 + d\,(x'' - d)}{y''}, \quad . \quad . \quad \beta);$$

A poněvadž bod $(x'\,y')$ na kruhu O, bod $(x''\,y'')$ na kruhu O' leží:

$$x'^2 + y'^2 = a^2, \quad . \quad . \quad \gamma); \quad (x'' - d)^2 + y''^2 = a_1{}^2, \quad . \quad . \quad \delta).$$

Z těchto 4 rovnic najdeme snadno:

$$x' = \frac{a}{d}(a \mp a_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

a klademe-li již ξ na místě $\frac{a}{d}(a \mp a_1)$:

$$y' = \pm\sqrt{a^2 - \xi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6).$$

Z rovnic 5) a 6) poznáváme, že rovnice 3) v sobě zahrnuje *čtvero* rovnic zvláštních, a sice, klademe-li k vůli krátkosti a snazšímu rozhledu $\frac{a}{d}(a - a_1) = \xi_1$; $\frac{a}{d}(a + a_1) = \xi_2$; $\pm\sqrt{a^2 - \xi_1{}^2} = \pm\eta_1$, $\pm\sqrt{a^2 - \xi_2{}^2} = \pm\eta_2$, jsou to následující rovnice žádané:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_1 x + \eta_1 y = a^2, & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7) \\ \xi_1 x - \eta_1 y = a^2, & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8) \end{array}\right\} \text{I.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_2 x + \eta_2 y = a^2, & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9) \\ \xi_2 x - \eta_2 y = a^2, & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10) \end{array}\right\} \text{II.}$$

Ježto ale těchto čtvero rovnic tolikýmž přímkám náleží, mají dva kruhy *čtvero* tečných společně, z nichžto jedno dvé (rovn. 7 a 8), a obr. 54. TT_1 a $T'T_1'$) jest *vnějších*, druhé dvé (rovn. 9. a 10. v obr. SS_1 a $S'S'_1$) *vnitřních* čili *příčných*.

2. Společné tečné dvou kruhů buď vnější neb vnitřní protínají se na přímce středné.

Důkaz. Rovnice přímky středné, osy to x-ové, jest $y = 0$, aneb $2\eta_1 y = 0$ . . . . . 11)

Odečteme-li rovnici 7) od součtu rovnic 8) a 11), vyjde

$$(\xi_1 x - \eta_1 y + 2\eta_1 y) - (\xi_1 x + \eta_1 y) = 0,$$

kterážto rovnice vždy jest platná, ať si plynulé souřadnice jsou jakékoliv. Pročež protínají se tečné vnější a střednice v bodě jediném.

Podobně dokáže se o tečných vnitřních.

3. *Úloha.* Najdi bod, kde se na střednici dvou kruhů jejich společné tečné protínají.

Řeš. Položivše v rovn. 7) neb 8) $y = 0$, najdeme úsečku $OB = x$ hledaného průseku B (obr. 54.) vnějších tečných $x = \frac{a^2}{\xi_1}$; a ježto $\xi_1 = \frac{a}{d}(a - a_1)$, bude

$$OB = x = \frac{ad}{a - a_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12)$$

Podobně najdeme úsečku $OA = x$ průsečného bodu A (obr. 54.) tečných vnitřních z rovnic 9) 10)

$$OA = x = \frac{ad}{a + a_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13)$$

4. Středy dvou kruhů a body průsečné společných jim tečných na střednici jsou harmonické.

Důkaz. Z rovnic 12) a 13) jde:

$$\frac{OA}{BO} = -\frac{a - a_1}{a + a_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \alpha)$$

Dále jest: $O'A = O'O + OA = OA - OO' = \frac{ad}{a + a_1} - d = -\frac{a_1 d}{a + a_1}$

$$BO' = BO + OO' = OO' - OB = d - \frac{ad}{a - a_1} = -\frac{a_1 d}{a - a_1}$$

pročež: $\frac{O'A}{BO'} = \frac{a - a_1}{a + a_1}$ . . . . . $\beta)$

Z $\alpha)$ a $\beta)$ jde:

$$\frac{OA}{BO} : \frac{O'A}{BO'} = -1.$$

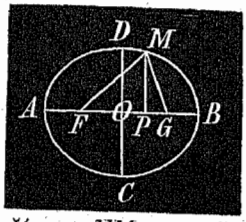
Hlava čtvrtá.

O ellipse.

§. XVIII.

1. *Ellipsa* (schodnice) jest křivka, jejíž každý bod za součet svých vzdáleností ode dvou pevných bodů v rovině její má délku stálou, $(=2a)$.

obr. 55.



2. Oběma pevným bodům těmto F i G (obr. 55.) díme *ohniska* (foci); bodu O, jímž přímka FG se rozpoluje, *střed*; přímce OF neb $OG=e$ *délková výstřednost* (lineare Excentricität); přímce FG oběma směry prodloužené *hlavní osa*; přímce na hlavní ose ve středu kolmo vztýčené *pobočná osa*; přímce FM neb GM z ohniska k některému na ellipse bodu M vedené *průvodič* (radius vector) ellipsy. Body, jimiž se křivka se svými osami protíná, slovou *osovými vrcholy* jejími.

3. Rovnice ellipsy nazývá se α) *středovou*, je-li střed počátkem souřadnic; β) *osovou*, jsou-li osy ellipsy spolu osami souřadnic; γ) *vrcholovou*, je-li hlavní osa ellipsy osou x-ovou a vrchol počátkem; δ) *ohniskovou*, je-li táž osa x-ovou osou a ohnisko počátkem souřadnic.

§. XIX.

Rovnice ellipsy osová.

Úloha. Najdi osovou rovnici ellipsy.

Řeš. Buďte F a G (obr. 55.) ohniska, O střed, bod M čili (x, y) bod ellipsy; $OG=-OF=e$; i jest pak dle výměru ellipsy:

$$MF+MG=2a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha);$$

a dle §. V. vz. 3. nabudeme:

$$MF=\sqrt{y^2+(x+e)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta);$$

$$MG=\sqrt{y^2+(x-e)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma);$$

Dosadíce za MF i MG do rovnice α) hodnoty z rovnic β) i γ) dostaneme:

$$\sqrt{y^2+(x+e)^2}+\sqrt{y^2+(x-e)^2}=2a \quad . \quad . \quad \delta)$$

kterouž rovnici snadno uvesti lze na dobu:

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon)$$

Uvážíme-li, že jest $MF + MG > FG$, pročež $a > e$; smíme položiti

$$a^2 - e^2 = b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Tím pak nabudeme jednodušeji z ε) rovnici žádanou:

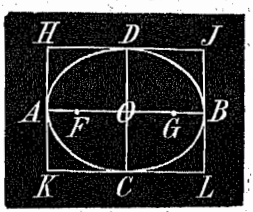
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

aneb: $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

§. XX.

Rozbor rovnice osové.

obr. 56.



1. Položíme-li $y = 0$ v rovnici 2), vyjde $x = \pm a$; a naopak, je-li $x = \pm a$, vyjde $y = 0$. Podobně položíme-li $x = 0$, vyjde $y = \pm b$; a naopak když jest $y = \pm b$, je též $x = 0$. Po geometricku řečeno: Osa $\left\{\begin{matrix}\text{hlavní}\\ \text{pobočná}\end{matrix}\right\}$ protíná ellipsu ve dvou bodech $\left\{\begin{matrix}A \text{ i } B\\ C \text{ i } D\end{matrix}\right\}$, ježto od středu po obou stranách o $\left\{\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\}$ vzdáleny jsou. (obr. 56.)

Výsledek. Ježto $AO = OB = a$, (obr. 56.); jest $AB = 2a$; a podobně $CO = OD = b$, pročež $CD = 2b$. I nazýváme $2a = AB$ *délkou osy hlavní*, $2b = CD$ *délkou osy pobočné*. A poněvadž $a > b$ (dle rovnice 1.), slove také hlavní osa osou *větší*, a pobočná osou *menší*.

2. Všecky hodnoty plynulé úsečky x musí vězeti mezi $+a$ i $-a$; a všecky hodnoty plynulé pořadnice y musí vězeti mezi $+b$ i $-b$.

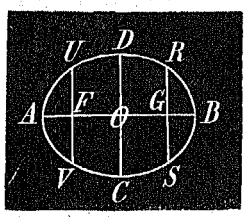
Zajisté je-li $x^2 > a^2$, čili $\left(\frac{x}{a}\right)^2 > 1$, bude dle rovnice 2) v tomto případě $y^2 < 0$, pročež y pomyslné. A podobně bude x pomyslné, kdykoliv jest $\left(\frac{y}{b}\right)^2 > 1$. Geometrický řečeno: Celá ellipsa jest v prostoře omezeném čtyrmi přímkami, kteréž jsou po dvou rovnoběžné s jejími osami a skrze osové vrcholy její procházejí, t. j. ellipsa vězí v pravoúhelníku *HILK* (obr. 56.)

3. Ježto rovnice 2) neb 3) čiře čtverečná jest i co do úsečky i co do pořadnice plynulé: dostaneme ku každé hodnotě úsečky dvé hodnot příslušné pořadnice sobě rovných a protivných; a rovněž ku každé pořadnici patří dvé úseček si rovných ale protivných.

Geometricky řečeno: *Ellipsa dělí se jak hlavní tak pobočnou osou na polovice souměrné.*

4. Měníme-li úsečku nepřetržitě od $-a$ až do 0, odtud pak jí až do $+a$ vzrůstu dávajíce, bude dle rovnice 2) neb 3) příslušná pořadnice po obou stranách hlavní osy souměrně měniti se od 0 až do $\pm b$; dále pak od $\pm b$ až k nulle. Geometricky řečeno: Ellipsa od vrchole A (obr. 56.) přibližujíc se k ose pobočné vzdaluje se od osy hlavní po obou stranách jejích; dostihši ale osy pobočné (v bodech D i C) jak se od ní dále spějíc vzdaluje, přibližuje se k ose hlavní po obou jejích stranách, až se s ní setká v druhém vrcholi B. — Jest tedy ellipsa *křivkou sama do sebe vcházející.*

obr. 57.



5. Položíme-li v rovnici 2) za $x = \pm e$ vyjde $y^2 = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$; tedy po každé $y = \pm \frac{b^2}{a}$. — Dle obr. 57. jest tehdy $GR = FU = +\frac{b^2}{a}$; $GS = FV = -\frac{b^2}{a}$.

Klademe pak $\frac{b^2}{a} = p$ . . . . . 4)

i nazýváme $2p$ čili SR neb VU, (t. j. tětivu v ohnisku na hlavní ose kolmou) *parametrem* (mírou) ellipsy.

Výsledek. Ve vz. 4) jest věta: *Menší osa ellipsy jest prostřední úměrnou mezi osou větší a mezi parametrem.*

6. Je-li $b = a$, tedy $e = 0$, mění se rovnice ellipsy v rovnici kruhu: lze tedy kruh míti za ellipsu, jejíž výstřednost $= 0$, t. j. jejíž ohniska se středem v jediný bod splývají.

§. XXI.

Rovnice ellipsy vrcholová, ohnisková, polárná.

1. Zachovávajíce hlavní osu ellipsy za osu x-ovou pošineme-li počátek souřadnic o délku $-k$, dostaneme v této nové osnově

souřadnic pravoúhlých rovnici ellipsy z rovnice 2) §. XIX., položíme-li tam $x-k$ na místě x:

$$b^2(x-k)^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

aneb vymýtíme-li b, kladouce $b^2=ap$, (dle §. XX. vz. 4.):

$$p(x-k)^2+ay^2=a^2p \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$

Položíme-li $k=a$, dostaneme z β) rovnici vrcholovou:

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2 \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Položíme-li $k=e$, vyjde z β) rovnice ohnisková:

$$y^2=p^2+\frac{2ep}{a}x-\frac{p}{a}x^2 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Přídavek. Je-li $y=0$, vychází z rovnice 2), dosadíme-li prvé

$$p=\frac{b^2}{a}:$$

$$x=e\pm a,$$

t. j. $FA=e-a$, $FB=e+a$, (obr. 55.).

Přímkám FA a FB říkají astronomové *spojnice* (apsidy), a sice přímce FA spojnice menší, a FB spojnice větší.

2. *Úloha.* Najdi rovnici ellipsy polárnou.

Řeš. Buď (obr. 55.) ohnisko G polem, hlavní osa AB osou souřadnic polárných. Znamenejme $GM=r$, $FM=r'$, $\sphericalangle BGM=\varphi$: i bude dle věty Carnotovy:

$$r'^2=4e^2+r^2+4er\,.\cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

a poněvadž jest $r'+r=2a$ $\ldots\ldots$ $\beta)$

pročež vymýtíme-li r', a položíme-li $a^2-e^2=b^2=ap$, dostaneme z těchto dvou rovnic:

$$r=\frac{ap}{a+e\cos\varphi}, \quad \ldots\ldots \quad \gamma)$$

a položíme-li $\frac{e}{a}=\varepsilon$, $\ldots\ldots$ 3)

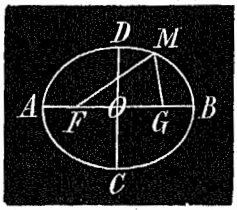
$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\,.\cos\varphi}, \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Dodavek. Poměr $\frac{e}{a}=\varepsilon$ nazývá se *číselná výstřednost* ellipsy.

§. XXII.

O průvodiči a středovém paprsku.

obr. 58.



1. *Úloha.* Najdi rovnici průvodiče ellipsy, (v osnově souřadnic pravoúhlých). Obr. 58.

Řeš. Osami souřadnic buďte osy ellipsy. Jde-li průvodič od ohniska $G=(+e, 0)$ k bodu $M=(x', y')$ na ellipse ležícímu, jest dle §. VIII. vz. 3. jeho rovnice:

$$y=\frac{y'}{x'-e}(x-e), \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

jde-li ale k témuž bodu (x', y') z ohniska $F=(-e, 0)$:

$$y=\frac{y'}{x'+e}(x+e), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

2. *Úloha.* Najdi délku průvodiče ellipsy.

Řeš. Je-li (obr. 58.) $FM=r_1$ průvodič ellipsy, a znamenáme-li souřadnice bodu M písmeny x a y, souřadnice ohniska F opět $=-e$, 0: bude (dle §. V. vz. 3.) v osnově pravoúhlé:

$$r_1=\sqrt{y^2+(x+e)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

a ježto za počátek máme střed, platí o bodu $M=(x,y)$ na ellipse ležícím (dle §. XIX. vz. ε.) rovnice

$$(a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2), \quad \ldots \quad \beta)$$

Vymýtíme-li y z α) a β), dostaneme:

$$r_1=a+\frac{e}{a}x=a+\varepsilon x, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Za délku průvodiče $GM=r_2$ z druhého ohniska $(+e, 0)$ k témuž bodu (x, y) vedeného vyjde podobně:

$$r_2=a-\varepsilon x, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Výsledek 1. Sečtouce 3) a 4) obdržíme:

$$r_1+r_2=2a, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

t. j. součet obou průvodičů kteréhokoliv bodu na ellipse rovná se veličině stálé (= větší ose). Z toho ale vyplývá, že rovnice z §. XIX. ε), tedy i ostatní z ní odvozené náležejí výhradně ellipse.

Výsledek 2. Měníme-li v rovnici 3) nepřetržitě x počínajíce od $x=-a$, proudem postupujíce k $x=0$, odtud dále až k $x=+a$: vzrůstá průvodič r_1 od $a-e=AF$ až ku $a=FD$, odtud dále až do $a+e=FB$ (obr. 58.). I jest FA průvodič nejkratší, FB nejdelší. — Podobné platí o průvodiči z ohniska druhého vycházejícím.

Přídavek ku cvičení. Kterak se dopídíme téhož výsledku majíce za vodítko rovnici 4) §. XXI?

3. *Úloha.* Najdi délku paprska ze středu ellipsy k jejímu bodu (x', y') vedeného.

Řeš. Osová rovnice ellipsy jest:

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

Vzdálenost d středu $(0, 0)$ od bodu (x', y') na ellipse jest

$$d = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$

Vymýtíme-li y' z rovnic $\alpha)$ a $\beta)$, vyjde:

$$d = \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 x'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Přídavek ku cvičení. Jakou změnu béře d ve vz. 6), když se x' mění nepřetržitě od $-a$ k nulle, odtud k $+a$?

§. XXIII.

Ellipsa a kruh soustředný.

1. *Úloha.* Najdi společné body ellipsy a kruhu soustředného.

Řeš. Osová rovnice ellipsy jest: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; . $\alpha)$
rovnice soustředného kruhu: $x^2 + y^2 = r^2$ . . . $\beta)$.

O společných ellipsy a kruhu bodech platí tyto dvě rovnice pospolu; tedy řešíce je najdeme:

$$x = \frac{a}{e}\sqrt{r^2 - b^2} \quad . \quad . \quad \gamma)$$

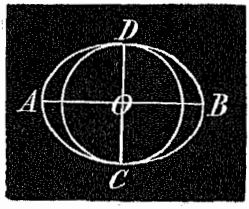
$$y = \frac{b}{e}\sqrt{a^2 - r^2} \quad . \quad \delta)$$

kteréž hodnoty x a y jsou souřadnice bodů společných.

2. Dle vz. $\gamma)$ a $\delta)$ sluší rozeznávati patero případů:

1) $r < b$; 2) $r = b$; 3) $b < r < a$; 4) $r = a$; 5) $r > a$.

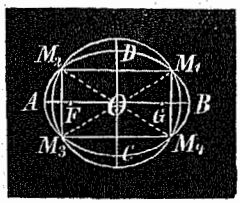
obr. 59.



Je-li $r < b$, stane se v rovnici $\gamma)$ x pomyslným: i leží tehdy kruh celý uvnitř ellipsy nemaje s ní bodu společného.

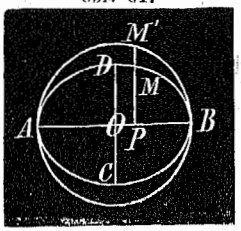
Je-li $r = b$; bude (z rovn. $\gamma)$ a $\delta)$ $x = 0$, $y = \pm b$: tehdy kruh leží uvnitř ellipsy dotýkaje se jí na vrcholích menší osy. Kruhu tomu díme *kruh do ellipsy vepsaný.* (Obr. 59.)

obr. 60.



Je-li $b < r < a$, dostaneme z $\gamma)$ a $\delta)$ za x i za y po dvou hodnotách sobě rovných a protivných: tehdy protíná se kruh s ellipsou ve čtveru bodech symmetricky rozložených. (Obr. 60.)

obr. 61.



Je-li $r = a$, stane se v γ) a δ) $x = \pm a$, $y = 0$: i leží ellipsa uvnitř kruhu, dotýkaje se ho na vrcholích osy větší. Kruhu tomu díme *kruh o ellipsu opsaný*. (Obr. 61.)

Je-li $r > a$, stane se y pomyslným: i leží ellipsa uvnitř kruhu nemajíc s ním bodu společného.

3. Jsou-li osy ellipsy osami souřadnic, mají se k sobě pořadnice ellipsy a opsaného kruhu, které ku společné úsečce náleležejí, jako menší osa k větší.

Důkaz. Osová rovnice ellipsy jest: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad . \quad \varepsilon)$

rovnice kruhu opsaného: $\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{a}\right)^2 = 1, \quad . \quad \zeta)$

kdykoliv jest $x = x'$, musí dle ε) a ζ) též býti $\frac{y}{b} = \frac{y'}{a}$, tedy $y : y' = b : a$; t. j. $PM : PM' = OD : OB$, (obr. 61.).

4. Průseční bodové ellipsy a kruhu soustředného, které na protivných stranách obou os leží (M_1 a M_3, pak M_2 a M_4 v obr. 60.), jsou na přímkách středem O jdoucích a od hlavní osy o rovné ale protivné úhly odchýlených.

Důkaz. Položíme-li $\frac{a}{e}\sqrt{r^2 - b^2} = \xi$, $\frac{b}{e}\sqrt{a^2 - r^2} = \eta$; jsou dle odst. 2. souřadnice bodu M_1 (obr. 60): $x_1 = +\xi$, $y_1 = +\eta$,
souřadnice bodu M_2: $x_2 = -\xi$, $y_2 = +\eta$,
souřadnice bodu M_3: $x_3 = -\xi$, $y_3 = -\eta$,
souřadnice bodu M_4: $x_4 = +\xi$, $y_4 = -\eta$.

Pročež bude dle §. VIII. vz. 3. rovnice

přímky M_1M_3: $y = \frac{\eta}{\xi} . x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \eta)$

přímky M_2M_4: $y = -\frac{\eta}{\xi} . x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \vartheta)$

čímž na jevu jest, co jsme tvrdili.

§. XXIV.

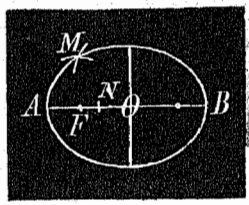
Sestrojování ellipsy.

1. Křivka sestrojuje se dokonale jedním tahem za pomoci příslušného nástroje; jako k. p. kruh kružidlem. Jinak spokojujeme

se sestrojivše dostatek bodů přetržitě sice, ale dost hustě po sobě jdoucích. K tomu konci stačí znáti pravidlo, kterak jeden a to kterýkoliv bod křivky v rovině neb v prostoru vůbec geometrickým sestrojením najíti lze. Pravidlo k tomu účeli vycházívá z některé jednoduché vlastnosti křivky, která buď ve výměru jejím vězí aneb se odvozuje z rovnice její.

2. *Úloha.* Sestroj ellipsu, dány-li jsou v rovině její ohniska, a délka $= 2a$ větší osy.

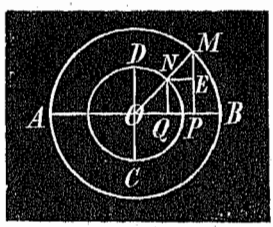
obr. 62.



Řeš. *I.* Buďtež F a G (obr. 62.) ohniska, O střed, $AO = OB = a$; bod N věziž mezi ohnisky. Poloměrem AN opiš kolem středu F, a poloměrem NB kolem středu G kruh, průsečný bod M obou kruhů leží pak na ellipse. — *Důkaz.* $FM + GM = AN + NB = AB$; pročež $r + r' = 2a$.

Přídavek. Jedním tahem sestrojíme ellipsu upevnivše konce šňůry zdéli $= 2a$ v ohniscích, a držadlem nějakého kreslidla šňůru pořád stejně napiatou majíce, vedeme-li kreslidlo kol středu O. — Nástroji, jímž se ellipsa nepřetržitě vykreslí, říkají ellipsograf.

obr. 63.



Řeš. *II.* Z odst. 3. §. XXIII. vyplývá k sestrojení ellipsy pravidlo následující:

Znaje hlavní polouosu a i délkovou výstřednost e sestroj pobočnou polouosu $b = \sqrt{a^2 - e^2}$; pak kolem středu O (obr. 63.) ellipsy opiš soustředné kruhy poloměrem $OD = b$, a poloměrem $OB = a$; i bude z nich prvý do ellipsy vepsaným, druhý o ni opsaným. Po té veď kterýmkoliv směrem paprsek ONM, jenž kruhy protne v bodech N i M; spusť na hlavní osu s bodu M kolmou $MP \perp AB$, a s bodu N veď $NE \parallel AB$, i bude bod E, jímž se NE s MP protíná, bodem ellipsy, jejíž střed jest O, hlavní osa AB, pobočná osa CD.

Důkaz. Položme $PE = QN = y$, $OP = x$; a dle sestrojení $ON = b$, $OM = a$:

i jest: $y : PM = ON : OM = b : a$

tedy také: $y^2 : PM^2 = b^2 : a^2$

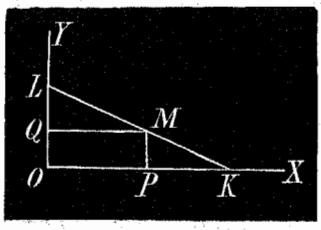
Jest však: $PM^2 = OM^2 - OP^2 = a^2 - x^2$,

pročež: $y^2 : (a^2 - x^2) = b^2 : a^2$,

odtud jde: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

Řeš. III. Položíme-li v rovnici ellipsy $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$, ježto se se vzorcem $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ shoduje, $\frac{x}{a}=\cos\varphi$, $\frac{y}{b}=\sin\varphi$: jsme vedeni k pravidlu následujícímu:

obr. 64.



Buď O (obr. 64.) střed ellipsy, OX směr osy hlavní, OY směr osy pobočné; přímka KL skládej se ze dvou dílů $KM=b$, $ML=a$: i jest bod M na ellipse.

Důkaz. Veď $MP \perp OX$, $MQ \perp OY$ a polož $\sphericalangle PKM=QML=\varphi$, $PM=y$, $QM=x$: i jest pak $\sin\varphi=\frac{PM}{KM}=\frac{y}{b}$; $\cos\varphi=\frac{QM}{ML}=\frac{x}{a}$, tedy $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$.

Přídavek. Pošinuje-li se podpona KL (obr. 64.) tak, aby konec její K přibližoval se po ose hlavní ku středu O, když se konec L po ose pobočné od středu vzdaluje, a naopak: opiše bod M ellipsu nepřetržitě.

§. XXV.

O poloze přímky k ellipse.

Úloha. Vyzpytuj, kterak se pozná, zdali a v kolika bodech přímka s ellipsou se potká.

Řeš. Rovnice ellipsy buď: $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ . . . α)
a rovnice přímky: $y=Ax+n$ . . . . . β)

Z těchto rovnic vymýtíme-li y, dostaneme spořádavše:

$$x^2+\frac{2Aa^2n}{A^2a^2+b^2}x+\frac{(n^2-b^2)a^2}{A^2a^2+b^2}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \gamma)$$

odkud pak: $x=-\frac{1}{A^2a^2+b^2}(Aa^2n\pm ab\sqrt{A^2a^2+b^2-n^2})$; δ).

Z rovnic δ) a β) pospolu poznáváme:

a) Je-li $A^2a^2+b^2-n^2>0$, protíná se přímka s ellipsou skutečně ve dvou bodech rozličných, i jest sečnou ellipsy;

b) Je-li $A^2a^2+b^2-n^2=0$, splynou oba průsečné body v jeden skutečný, a přímka jest tečnou ellipsy;

c) Je-li $A^2a^2+b^2-n^2<0$, jsou oba průsečné body pomyslnými č. výbočnými (lateral), a přímka mine se s ellipsou.

§. XXVI.

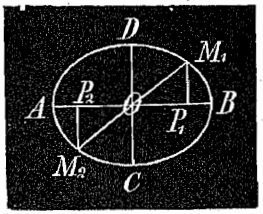
Poloha bodu k ellipse.

1. *O středu.* Je-li v §. XXV. hodnota $n=0$, bude přímka sečnou, a úsečka průsečného bodu ellipsy s přímkou dle rovnice δ):

$$x=\pm\frac{ab}{\sqrt{A^2a^2+b^2}};$$ a pořadnice příslušná $y=Ax$

t. j. ellipsa protíná se tehdy přímkou ve dvou bodech M_1 a M_2 (obr. 65.), jejichž souřadnice jsou si střídavě rovny ale protivny, t. j. $x_1=-x_2$; $y_1=-y_2$.

obr. 65.



Z toho ale vyplývá, že i vzdálenosti OM_1, OM_2 těchto průseků od středu O jsou si rovny, t. $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$, čili: tětiva M_1M_2 středem ellipsy vedená rozpoluje se středem. Odtud vzal střed ellipsy jméno své, ježto *středem* křivky nazýváme vůbec bod, jímž se každá tětiva, která tudy jde, rozpoluje.

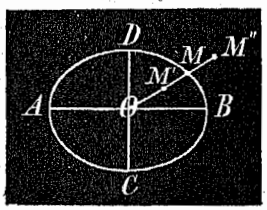
2. *Úloha.* Vyzpytuj, zdali bod (x',y') leží na ellipse, neb uvnitř neb vně ellipsy.

Řeš. Osová rovnice ellipsy jest: $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ . . . α);

rovnice přímky středem a bodem $(x'y')$ vedené jest: $y=\frac{y'}{x'}\cdot x$; β)

O průsečném bodu M (obr. 66.) přímky s ellipsou platí rovnice obě.

obr. 66.



Vymýtíme-li z nich x vyjde:

$$y^2=\frac{a^2b^2}{a^2y'^2+b^2x'^2}\cdot x'^2$$

Vymýtíme-li ale y dostaneme:

$$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2y'+b^2x'^2}\cdot y'^2$$

Sečteme-li tyto dvě rovnice, obdržíme:

$$x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2y'^2+b^2x'^2}\cdot(x'^2+y'^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \gamma)$$

Dle §. V. vz. 5. znamená $\sqrt{x^2+y^2}$ vzdálenost $OM=c$ bodu (x,y) na přímce OM' i na ellipse ležícího od středu O; rovněž

tak $\sqrt{x'^2+y'^2}$ znamená vzdálenost OM' č. $OM''=c'$ bodu $(x'y')$ na přímce OM' ležícího od téhož středu. Jest tedy z rovnice γ)

$$\frac{c^2}{c'^2}=\frac{a^2b^2}{a^2y'^2+b^2x'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \delta)$$

I můžeme již říci:

a) Je-li $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, jest též $c'=c$; a tehdy bod (x', y') splyne s bodem (x, y) v bod jediný M na ellipse leže (§. XXII. 2. výsl. 1.).

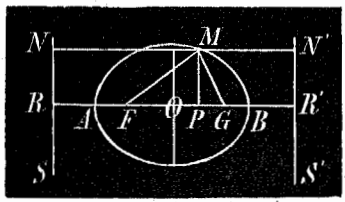
b) Je-li $a^2y'^2+b^2x'^2<a^2b^2$, jest též $c'<c$, tedy $OM'<OM$, a bod $(x'y')$ č. bod M' leží uvnitř ellipsy.

c) Je-li $a^2y'^2+b^2x'^2>a^2b^2$, jest též $c'>c$, tedy $OM''>OM$, a bod $(x'y')$ t. bod M'' leží vně ellipsy.

§. XXVII.

O ředitelkách ellipsy.

obr. 67.



1. Přímky RS a $R'S'$ (obr. 67.), které na hlavní ose kolmo stojí a od pobočné osy o $OR'=RO=\frac{a^2}{e}$ vzdáleny jsou, nazývají se *ředitelkami* (directrices) ellipsy; i jest z nich každá *přidružena* k ohnisku bližšímu t. RS k F; $R'S'$ ku G.

2. Vzdálenost kteréhokoliv na ellipse bodu od ředitelky má se ku průvodiči z přidruženého ohniska vedenému, jako hlavní polouosa k výstřednosti ellipsy.

Důkaz. Buď $MN \perp RS$ (obr. 67.); i jest

$$NM=RO+OP=\frac{a^2}{e}+x=\frac{a^2+ex}{e}; \quad FM=a+\frac{ex}{a}=\frac{a^2+ex}{a}:$$

pročež

$$NM:FM=\frac{a^2+ex}{e}:\frac{a^2+ex}{a},$$

aneb $\quad NM:FM=a:e=1:\varepsilon.$

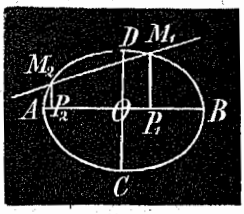
Podobně najdeme: $MN:GM=a:e=1:\varepsilon.$

§. XXVIII.

O tečné a normále.

1. *Úloha.* Najdi rovnici přímky, která probíhá dvěma body $M_1 = (x_1 y_1)$, a $M_2 = (x_2 y_2)$ na obvodě ellipsy ležícími. (Obr. 68.)

obr. 68.



Řeš. Osová rovnice ellipsy buď

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

Rovnice přímky vedené bodoma M_1 a M_2 jest:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), \quad \ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

a poněvadž tyto body na ellipse leží, platí o nich rovnice

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \gamma)$$

$$a^2y_2^2 + b^2x_2^2 = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \delta)$$

Odečteme-li δ) od γ), vyjde:

$$a^2(y_1^2 - y_2^2) + b^2(x_1^2 - x_2^2) = 0,$$

aneb $$a^2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + b^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0,$$

odkudž jde:

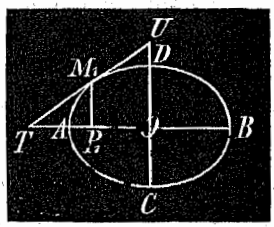
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon)$$

Z rovnic β) a ε) vyvozujeme rovnici žádanou:

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1), \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

2. *Úloha.* Najdi rovnici tečné TM_1 (obr. 69.), dán-li na ellipse bod dotyčný $M_1 = (x_1 y_1)$.

obr. 69.



Řeš. Ze sečné M_1M_2 (obr. 68.) stane se tečná, jak mile oba její s ellipsou průseky M_1 a M_2 v jediný bod M_1 (obr. 69.) splývají, t když jest $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$. I položíce za x_2 a y_2 hodnoty x_1 a y_1 do rovnice 1), dostaneme rovnici žádanou:

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

v níž směrnice jest:

$$A = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Rovnice 2) dá se uvesti na jinou dobu. Sprostíme-li ji zlomku, a vykonavše násobení převedeme-li záporné členy na stranu druhou, vyjde:

$$a^2y_1y + b^2x_1x = a^2y_1{}^2 + b^2x_1{}^2,$$

pročež dle rovnice γ)

$$a^2y_1y + b^2x_1x = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Dodavek. Položíme-li $y = 0$, vyjde z 4) úsečka OT bodu průsečného T tečné s osou x-ovou $x = \frac{a^2}{x_1}$. Podobně za $x = 0$ jest $y = \frac{b^2}{y_1} = OU$.

Tím dává se na ruku, kterak tečnou daným na ellipse bodem M_1 vésti lze.

3. *Úloha.* Najdi rovnici tečné, jež se vede z daného bodu $M' = (x'y')$ k ellipse.

Řeš. Jsou-li ξ a η souřadnice bodu dotyčného ovšem neznámé, jest rovnice tečné dle odst. 2. vz. 4.

$$a^2\eta y + b^2\xi x = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

Tato rovnice má i o bodu M' platnost, kterýž na tečné leží; pročež:

$$a^2\eta y' + b^2\xi x' = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

A že bod dotyčný (ξ, η) na ellipse leží, jest také:

$$a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \gamma)$$

Z rovnic β) a γ) η vymýtivše najdeme úsečku bodu dotyčného:

$$\xi = \frac{a^2}{a^2y'^2 + b^2x'^2}\left(b^2x' \pm y'\sqrt{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2}\right), \quad \delta)$$

Majíce hodnotu ξ určíme příslušnou k ní pořadnici η z rovnice β), a nalezené tyto dvě hodnoty do α) dosadíce dostaneme rovnici žádanou.

Dodavek. Z rovnic δ) a β) poznáváme:

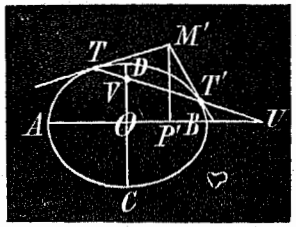
a) Z jednoho bodu M' dá se dvé tečných $M'T$ a $M'T'$ k ellipse vésti, kdykoliv jest $a^2y'^2 + b^2x'^2 > a^2b^2$, t. j. kdykoliv bod M' (obr. 70.) leží *mimo* ellipsu (§. XXVI.).

b) Tyto dvě tečné splynou v jedinou, když jest $a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b = 0$, t. kdykoliv bod M_1, jímž se vésti má, na ellipse leží. (Obr. 69.).

c) A obě tečné stanou se pomyslnými, když jest $a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2 < 0$, t. z bodu *uvnitř* ellipsy nedá se vésti tečná.

4. *Úloha.* Najdi rovnici, jež přísluší tětivě TT' tečných. (Obr. 70.)

obr. 70.



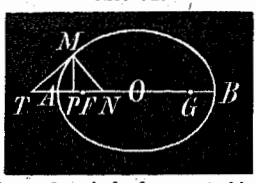
Řeš. Rovnice β) v odst. 3. platí o bodech dotyčných T i $T' = (\xi, \eta)$ obou dvou tečných $M'T$ a $M'T'$ z bodu $M' = (x' y')$ k ellipse vedených, pročež dle §. VIII. 3. o celé přímce TT' těmato bodoma jdoucí. Kladouce tedy x a y místo ξ a η nabudeme rovnice žádané:

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Dodavek. Sestrojivše průseky U a V, jež má tětiva tečných s osami, dle rovnice 5), totiž $y = 0$, $x = \frac{a^2}{x'} = OU$; a $x = 0$, $y = \frac{b^2}{y'} = OV$: vedeme-li jima přímku UV, dostaneme body dotyčné T i T', a k těm z bodu M' vedouce přímky $M'T$ i $M'T'$ sestrojíme tak i tečné samé.

5. *Úloha.* Najdi rovnici normály MN, dána-li pata její M $(= x_1 y_1)$ na ellipse. Obr. 71.

obr. 71.



Řeš. Ježto normála bodem $(x_1 y_1)$ prochází, jest rovnice její

$$y - y_1 = A'(x - x_1);$$

a poněvadž na tečné TM bodem $M = (x_1 y_1)$ vedené kolmo stojí, a směrnice tečné dle vz. 3. jest $A = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$, musí dle §. IX. vz. 6. býti $A' = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}$: pročež rovnice hledaná zní:

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

6. *Úloha.* Najdi délku subnormaly PN, subtangenty PT, normaly $MN = n$ i tangenty $MT = t$, dán-li bod na ellipse dotyčný $M = (x_1 y_1)$. Obr. 71.

Řeš. Směrnice tečné jest $A = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$;

a směrnice normaly $A' = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}$;

pročež dle §. XIV. 1. délka žádaná

$$PN = subn = -\frac{b^2x_1}{a^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

$$PT = subt = \frac{a^2y_1^2}{b^2x_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

$$norm = n = \sqrt{y_1^2 + \frac{b^4x_1^2}{a^4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

$$tang = t = \sqrt{y_1^2 + \frac{a^4y_1^4}{b^4x_1^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Dodavek 1. Vzorec 9) dá se uvesti na dobu jednodušší. Že bod $(x_1\, y_1)$ na ellipse leží, platí o něm rovnice

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2, ;$$

odtud vyvádíme $a^2y_1^2 = a^2b^2 - b^2x_1^2$,

pročež $a^4y_1^2 = a^4b^2 - a^2b^2x_1^2$,

a přičteme-li $b^4x_1^2$ k oběma stranám, dostaneme:

$$a^4y_1^2 + b^4x_1^2 = a^4b^2 - (a^2 - b^2)\, b^2x_1^2,$$

aneb $a^4y_1^2 + b^4x_1^2 = a^4b^2 - b^2e^2x_1^2$,

aneb $a^4y_1^2 + b^4x_1^2 = a^2b^2\left(a + \frac{ex}{a}\right)\left(a - \frac{ex}{a}\right)$:

Jest ale (dle §. XXII. vz. 3. 4.) $a + \frac{ex}{a} = r_1$; $a - \frac{ex}{a} = r_2$:

pročež $a^4y_1^2 + b^4x_1^2 = a^2b^2r_1r_2$

Tím ze vzorce 9) stane se:

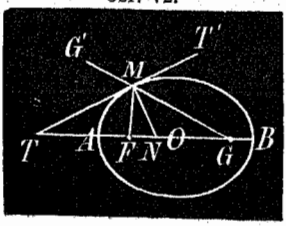
$$n = \frac{b}{a}\sqrt{r_1r_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Podobně lze vz. 10) uvesti na dobu:

$$t = \frac{ay_1}{bx_1}\sqrt{r_1r_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Dodavek 2. Dosadíme-li $y = 0$ do rovnice normaly, najdeme úsečku paty její na hlavní ose $ON = x = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x_1 = \frac{e^2}{a^2}x_1 = \varepsilon^2x_1$: z čehož jest viděti, že pata tato N leží mezi ohnisky a od menší osy v tu stranu, kde jest bod dotyčný.

obr. 72.



7. *Úloha.* Najdi úhly $TMF = \varphi$, $TMG = \psi$, jež svírá tečná TM s průvodiči FM a GM bodu dotyčného $M = (x_1y_1)$. Obr. 72.

Řeš. Směrnice tečné TM jest

$$A = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}, \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

Směrnice průvodiče FM: $A' = \frac{y_1}{x_1 + e}$, ... β)

a průvodiče GM: $A'' = \frac{y_1}{x_1 - e}$, ... γ).

O bodě M platí rovnice $a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2$, . . . δ)

a o stálých veličinách a, b, e: $a^2 - b^2 = e^2$, ... ε)

Jest pak dle §. IX. vz. 3):

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{A' - A}{1 + A'A}; \quad \operatorname{tang} \psi = \frac{A'' - A}{1 + A''A}:$$

Dosadíme-li do těchto dvou vzorcův za A, A', A'' hodnoty ze vz. α), β), γ), a zjednodušíme-li výsledek pomocí rovnic δ) a ε); vyjde nám:

$$\operatorname{tang} \varphi = -\operatorname{tang} \psi = \frac{b^2}{e y_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

Výsledky. a) Z rovnice 13) odvozujeme:

$$\varphi + \psi = \pi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

t. j. průvodičové FM a GM svírají s protivnými směry tečné MT a MT' úhly co do číselné hodnoty sobě rovné; čili $\sphericalangle FMT = \sphericalangle T'MG$. Z toho vyplývá dále, že normala NM úhel FMG oběma průvodiči sevřený rozpoluje; $\sphericalangle FMN = \sphericalangle NMG$.

b) Prodlouživ průvodič GM směrem MG' rozpolíš-li úhel FMG', jest rozpolovací přímka MT tečnou; rozpolíš-li ale úhel FMG, bude rozpolovací přímka MN normalou ellipsy v bodě M.

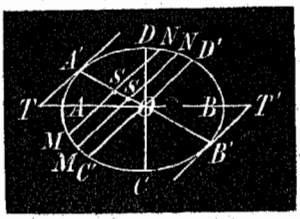
§. XXIX.

O průměrech ellipsy.

1. *Průměrem* křivky slove čára, jíž se celé pásmo rovnoběžných tětiv rozpoluje. Průměr ten a pásmo jím rozpolených tětiv nazývají se *spolu sdruženými.* — Ve smyslu užším nazývá se průměrem jen čára přímá, která této výmínce zadost činí. Průměr k přidruženým tětivám kolmý zove se *hlavním*, neb *osou* křivky. — My o průměru mluvíce rozumíme jen průměr přímý.

2. *Úloha.* Najdi rovnici geometrického místa, jímž se v ellipse pásmo rovnoběžných tětiv rozpoluje. (Obr. 73.)

obr. 73.



Řeš. Osová rovnice ellipsy jest

$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, ... α)

Rovnice tětivy MN:

$y = Ax + u$, ... β)

jest rovnice celého pásma rovnoběžných tětiv, máme-li u za veličinu měnlivou. Vyloučíme-li z těchto rovnic pořadnici y, dostaneme o úsečce x krajných bodů M a N tětivy rovnici:

$$x^2 + \frac{2Aa^2u}{A^2a^2+b^2}x + \frac{(u^2-b^2)a^2}{A^2a^2+b^2} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \gamma)$$

Kořeny této rovnice x_1 a x_2 jsou úsečkama bodů M a N; i jest dle známé algebr. věty:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2Aa^2u}{A^2a^2+b^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \delta)$$

Znamenají-li ξ a η souřadnice bodu S, jímž se tětiva MN rozpoluje, bude dle §. V. vz. 14.

$$\xi = {}^1/_2(x_1 + x_2), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon)$$

Z posledních dvou rovnic δ) a ε) vyplývá:

$$\xi = -\frac{Aa^2u}{A^2a^2+b^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \zeta)$$

a ježto bod S na tětivě MN leží, platí o něm rovnice β); jest tedy

$$\eta = A\xi + u, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta)$$

Z rovnic ζ) a η) vymýtíme-li u, a píšeme-li x, y místo ξ, η; dostaneme žádanou rovnici:

$$y = -\frac{b^2}{a^2A}x; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

aneb $\quad y = Bx; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{kdežto jest} & B = -\dfrac{a^2A}{b^2} \\ \text{čili} & A.B = -\dfrac{b^2}{a^2} \end{array}\right\}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Hledané místo jest tedy přímka $A'B'$ středem O ellipsy vedená, kterážto pak jest průměrem ellipsy.

Přídavek. Rovnice jiného pásma tětiv, které jsou rovnoběžné s průměrem $A'B'$ k pásmu předešlému přidruženým, jest:

$$y = Bx + u.$$

3. Rovnice 3) $A.B = -\dfrac{b^2}{a^2}$ zachová se neporušena, vyměníme-li A za B; t. j. pásmo tětiv s průměrem $A'B'$ (obr. 73.) rovnoběžných rozpoluje se průměrem $C'D'$, kterýž jest rovnoběžný s tětivami k průměru $A'B'$ přidruženými.

Takovým dvěma průměrům $A'B'$ a $C'D'$, z nichž každý rozpoluje tětivy s druhým průměrem rovnoběžné, díme průměry *sdružené* (conjugirt).

4. Z rovnice 3) $A.B = -\frac{b^2}{a^2}$ jde $B = \infty$, když jest $A = 0$; aneb $A = \infty$, když jest $B = 0$; t. j. průměr s x-ovou osou rovnoběžný (splývající) stojí kolmo na svém průměru sdruženém.

V ostatních případech máme $1 + A.B = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$, pročež nikdy jindy $1 + AB = 0$; t. j. *ostatní sdružené průměry stojí na sobě šikmo.*

Úhlu ostrému, jejž spolu svírají dva sdružené průměry, díme úhel *sdružovací* (Conjugations-W.).

5. Ježto součin $A.B = -\frac{b^2}{a^2}$ ze směrnic A i B dvou sdružených průměrů jest záporný, musí tyto směrnice míti protivná znamení. Z toho plyne, že každou osou ellipsy se protíná *jiné* dvé vrcholových úhlů, jež spolu svírají průměry sdružené.

6. Tečná krajným bodem (A' neb B', obr. 73.) některého průměru $A'B'$ vedená jest s druhým průměrem sdruženým ($C'D'$) rovnoběžná.

Důkaz. Buď průměru $C'D'$ rovnice $y = Ax$; . . α)

tedy průměru $A'B'$ sdruženého $y = -\frac{b^2}{a^2 A}x$; . β)

Jsou-li x' a y' souřadnice bodu A' (neb i bodu B'), bude pak

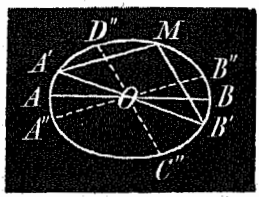
$$y' = -\frac{b^2}{a^2 A}x';$$

odkudž určí se $A = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$;

kterážto hodnota jest dle §. XXVIII. vz. 3) v skutku směrnicí tečné, TA' neb $T'B'$ vedené k ellipse bodem ($x'y'$).

7. Tětivy z kteréhokoliv na ellipse bodu M ku krajným bodům některého průměru $A'B'$ vedené mají směry dvou jiných sdružených průměrů $A''B''$ a $C''D''$. (Obr. 74.)

obr. 74.



Důkaz. Jsou-li x' a y' souřadnice bodu A', budou (dle §. XXVI. 1.) $-x'$ a $-y'$ souřadnice bodu B'. Znamenáme-li dále souřadnice bodu M písmeny x a y, bude směrnice A přímky $A'M$, jež bodoma A' a M prochází, míti hodnotu

$$A = \frac{y - y'}{x - x'}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

a směrnice B přímky $B'M$:

$$B = \frac{y+y'}{x+x'}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad \beta)$$

Dle §. XXVIII. 1. vz. ε) jest ale při ellipse

$$\frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x+x'}{y+y'},$$

pročež $$A = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x+x'}{y+y'}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \gamma)$$

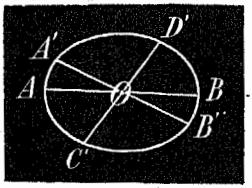
Součin z rovnic β) a γ) vydá:

$$A.B = -\frac{b^2}{a^2},$$

čímž dokázáno, co tvrzeno.

Přídavek. Tětivám od některého bodu M vedeným ku krajným bodům A' a B' některého průměru $A'B'$, díme *tětivy sdružené*, jinak *doplňovací* (Ergänzungs-Sehnen), neb i *náhradnice os.*

obr. 75.



8. *Úloha.* Najdi úhel, jejž dva sdružené průměry ($A'B'$ a $C'D'$) svírají. (Obr. 75.).

Řeš. Směrnice průměru $A'B'$ buď $= A$; i jest pak směrnice průměru $C'D'$ sdruženého $= -\frac{b^2}{a^2 A}$; položme pak $\sphericalangle BOB' = \alpha$, $BOD' = \beta$; $\sphericalangle B'OD' = \omega$. I bude $B'OD' = B'OB + BOD' = BOD' - BOB'$; t. j. $\omega = \beta - \alpha$, . . . α)

Spolu jest pak $\tang \alpha = A$; $\tang \beta = -\frac{b^2}{a^2 A}$; . . . β)

Z α) vyplývá $\tang \omega = \frac{\tang \beta - \tang \alpha}{1 + \tang \alpha . \tang \beta}$, ... γ)

a dosadíme-li z β) místo $\tang \alpha$ a $\tang \beta$ hodnoty jejich do γ):

$$\tang \omega = -\frac{1}{A} \cdot \frac{A^2 a^2 + b^2}{a^2 - b^2}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Odtud snadno ustanovíme:

$$\sin^2 \omega = \frac{(A^2 a^2 + b^2)^2}{(1 + A^2)(A^2 a^4 + b^4)}, \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Přídavek. Obecnosti v důkaze nečiní se ujma, máme-li A za veličinu zápornou; ježto kdyby kladnou byla, průměry za sebe vyměniti lze. Tehdy jest dle β $\sphericalangle BOD' < 90^0$; úhel BOB' ale záporný, pročež úhel $D'OB'$ hlavní osou protat. Spolu vyjde dle 4) tang $\omega > 0$, pročež $\omega < \frac{1}{2}\pi$; t. j.

Hlavní osa protíná ostrý úhel (sdružovací), jež sdružené průměry spolu svírají.

9. *Úloha.* Najdi délky dvou sdružených poloměrů (polovičných průměrů) $OB' = a_1$, $OD' = b_1$, dána-li jest odchylka $BOB' = \alpha$ jednoho z nich od hlavní osy ellipsy, a délka obou os. Obr. 75.

Řeš. O souřadnicích x a y bodu B' platí osová rovnice ellipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \alpha)$$

Rovnice průměru $A'B'$ jest

$$y = Ax, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \beta)$$

$$A = tang\,\alpha, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \gamma)$$

Vzdálenost a_1 bodu B' od počátku O jest dle §. V. vz. 5.

$$a_1{}^2 = x^2 + y^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \delta)$$

Vymýtíme-li x a y z rovnice δ) pomocí rovnic α) a β), vyjde hledaná délka zčtvercovaná:

$$a_1{}^2 = \frac{a^2b^2(1 + A^2)}{A^2a^2 + b^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

aneb zavedeme-li α místo A pomocí rovnice γ)

$$a_1{}^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 . \sin^2\alpha + b^2 . \cos^2\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

Podobným způsobem najdeme délku b_1 poloměru OD', jehož od hlavní osy odchylka jest $BOD' = \beta$, a $\tang\beta = B$:

$$b_1{}^2 = \frac{a^2b^2(1 + B^2)}{B^2a^2 + b^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

$$b_1{}^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

Z rovnice 8) vymýtíme-li B užijíce vz. 3), vyjde

$$b_1{}^2 = \frac{A^2a^4 + b^4}{A^2a^2 + b^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

aneb

$$b_1{}^2 = \frac{a^4 . \sin^2\alpha + b^4 . \cos^2\alpha}{a^2 . \sin^2\alpha + b^2 . \cos^2\alpha}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11)$$

10. Součet zčtvercovaných poloměrů sdružených jest veličina stálá.

Důkaz. Sečtouce rovnice 6) a 10) nabudeme

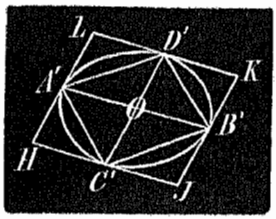
$$a_1{}^2 + b_1{}^2 = \frac{(a^2 + b^2)(A^2a^2 + b^2)}{A^2a^2 + b^2}$$

aneb

$$a_1{}^2 + b_1{}^2 = a^2 + b^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 12)$$

11. Všechny v ellipsu vepsané rovnoběžníky ($A'C'B'D'$), které za úhlopříčné mají dvé průměrů sdružených ($A'B'$ a $C'D'$) mají rovné ploské obsahy; a

obr. 76.



Všechny o ellipsu opsané rovnoběžníky ($HJKL$), jejichž strany jsou rovnoběžny s průměry sdruženými, mají též rovné ploské obsahy. Obr. 76.

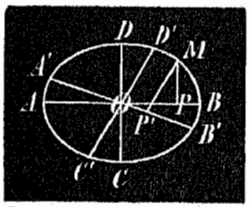
Důkaz. Součin z rovnic 5), 6) a 10) vydá

$$a_1^2 . b_1^2 . \sin^2\omega = a^2b^2 ,$$

pročež $a_1 . b_1 . \sin\omega = a . b$, . . . 13)

čímž věta dokázána. Neboť $2a_1b_1 \sin\omega = A'B'C'D'$, a $4a_1b_1 \sin\omega = HJKL$.

obr. 77.



12. *Úloha.* Najdi rovnici ellipsy, maje dva sdružené průměry za osy souřadnic. Obr. 77.

Řeš. Buď AB osa hlavní, CD osa pobočná; průměr $A'B'$ buď za novou osu úseček, a sdružený průměr $C'D'$ za novou osu pořadnic. Dále položme $BOB' = \alpha$, $BOD' = \beta$; souřadnice osové některého na ellipse bodu M znamenejme $OP = x$, $PM = y$, a téhož bodu souřadnice nové $OP' = x'$, $P'M = y'$. Ježto počátek O souřadnic ostal zachován, jest (dle §. IV. vz. 9.):

$$\left.\begin{aligned} x &= x' . \cos\alpha + y' . \cos\beta \\ y &= x' . \sin\alpha + y' . \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

Tyto hodnoty dosadíme-li za x a za y do rovnice osové:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta),$$

dostaneme rovnici vztaženou k osnově nové, a sice:

$$b^2(x' . \cos\alpha + y' . \cos\beta)^2 + a^2(x' . \sin\alpha + y' . \sin\beta)^2 = a^2b^2, \quad . \quad \gamma)$$

aneb srovnáme-li, čárky vynechávajíce:

$$(a^2 . \sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha) . x^2 + 2xy\,(a^2 \sin\alpha . \sin\beta + b^2 . \cos\alpha . \cos\beta) + (a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta)\,y^2 = a^2b^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta)$$

Rovnice tato dá se zjednodušiti. Neboť dle vz. 3) jest

$$\operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

pročež $\quad a^2 . \sin\alpha . \sin\beta + b^2 . \cos\alpha . \cos\beta = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon)$

Dále máme dle 7) a 9)

$$\left.\begin{aligned} a^2 . \sin^2\alpha + b^2 . \cos^2\alpha &= \frac{a^2b^2}{a_1^2} \\ a^2 . \sin^2\beta + b^2 . \cos^2\beta &= \frac{a^2b^2}{b_1^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \zeta)$$

Dosadíme-li tyto hodnoty z rovnic ε) a ζ) do rovnice δ), bude žádaná rovnice:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

aneb $$b_1^2x^2+a_1^2y=a_1^2b_1^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15).$$

kdežto jest $a_1=OB'$, $b_1=OD'$.

13. *Úlohy k sestrojování.* a) Najdi střed ellipsy.

Řeš. Veď kterýmkoliv směrem dvé rovnoběžných tětiv, rozpol je, a rozpolovacími body veď přímku, kterážto bude míti polohu jednoho průměru. Podobným způsobem zřídiv jiným směrem dvé rovnoběžných tětiv dostaneš polohu jiného průměru. Průsečný bod obou jest střed žádaný.

b) Sestroj průměr s jiným daným průměrem sdružený.

Řeš. Veď tětivu s daným průměrem rovnoběžnou, rozpol ji a rozpolovacím bodem tím veď průměr, jenž jest žádaný.

c) Sestroj tětivu bodem na ellipse daným (k. p. M obr. 74) procházející a s daným průměrem ($A''B''$) sdruženou.

Řeš. Daným bodem M veď tětivu $A'M$ s daným průměrem $A''B''$ rovnoběžnou, bodem A' veď průměr $A'B'$, a posléz tětivu MB', jež bude žádaná.

d) Neznaje ohniska veď daným bodem A' (obr. 73) tečnou k ellipse.

Řeš. Daným bodem A' veď průměr $A'B'$, a k němu sestroj průměr sdružený $C'D'$, posléz veď $TA' \parallel C'D'$, i bude TA' tečná žádaná.

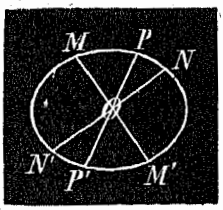
e) Najdi polohu os ellipsy vykreslené, jakož i ohniska její.

Řeš. Veď nějaký průměr M_1M_3 (obr. 60); nad ním opiš kruh, který ellipsu protne ve čtyr bodech M_1, M_2, M_3, M_4. Veda pak ještě průměr M_2M_4 rozpol úhly oběma průměroma sevřené, i budou rozpolovací přímky AB a CD žádané osy. — Kolem jednoho konce D menší osy opiš pak větší polouosou OB kruhový oblouk, jenž protne větší osu v bodech F a G: a tito bodové jsou žádaná ohniska.

f) Dán-li oblouk MPN ellipsy, najdi jiné ještě body její. (Obr. 78. a 79.)

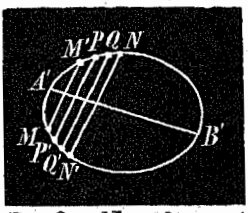
Řeš. Toho účele dvojím prostředkem dostihneš:

obr. 78.



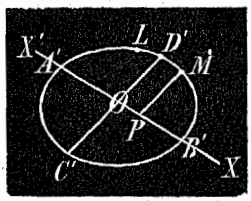
α) Našed dle návodu v úloze a) daném střed O veď poloměry MO, PO, NO (obr. 78.) atd., a prodluž na dvojnásobnou délku učiniv $OM' = MO$, $ON' = NO$, $OP' = PO$ atd., čímž tolik nových bodů ellipsy M', N', P' atd. obdržíš, z kolika bodů daného oblouka MPN průměry vedeny jsou.

obr. 79.



β) Z daného oblouka MPN (obr. 79.) sřízni část MM', veď tětivu MM' a sdružený s ní průměr $A'B'$. Z bodů P, Q, N atd. druhé části daného oblouka veď rovnoběžně s tětivou MN tětivy nové PP', QQ', NN' atd., učině je tak dlouhé, aby průměrem $A'B'$ se rozpolovaly. I budou pak bodové P', Q', N' atd. novými body na ellipse. Tím způsobem lze tedy oblouk NPM o část $MP'N'$ prodloužiti. Podobně lze prodloužený oblouk $NA'N'$ opět a opět prodloužiti, až celá ellipsa doplněna jest.

obr. 80.



g) Dán-li oblouk ellipsy $LD'M$ (obr. 80.) najdi a sestroj obě osy její co do délky i co do polohy jejich.

Řeš. Našed střed O a veda poloměr nějaký $D'O$ sestroj k němu (co do směru) průměr sdružený $X'X$. Kromě toho veď $MP \parallel D'O$; i jsou tehdy $OD' = b_1$, $OP = x$, $PM = y$ veličiny známé.

O ellipse hledíc ku dvěma sdruženým průměrům platí

rovnice $$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

Odtud určíme $$a_1 = \frac{b_1 x}{\sqrt{(b_1 + y)(b_1 - y)}}, \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$

kteroužto hodnotu snadno sestrojíš. Učiniv tehdy $OB' = a_1$ a znaje úhel $B'OD' = \omega$, najdeš z rovnic 12) a 13) svrchu dokázaných:

$$a + b = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \sin\omega}, \quad \ldots\ldots \quad \gamma)$$

$$a - b = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \sin\omega}, \quad \ldots\ldots \quad \delta)$$

kteréžto hodnoty, a potom i a i b snadno sestrojíš.

Chtěje najíti směr os, převeď osnovu souřadnic kosouhlých na osnovu pravoúhlou, dosadiv do rovnice α) dle §. IV. vz. 8) na

místo x a y hodnoty $x.\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}-y.\frac{\cos(\omega-\alpha)}{\sin\omega}$, a $x.\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}+y.\frac{\cos\alpha}{\sin\omega}$, kdežto ω znamená úhel $B'OD'$ os souřadnic daných kosoúhlých, α pak úhel, o nějž x-ová osa nová od staré odchýlena jest. Učiniv tak a výsledek srovnaje obdržíš:

$$[a_1{}^2.\sin^2\alpha+b^2\sin^2(\omega-\alpha)]x^2+[a_1{}^2.\sin 2\alpha-b_1{}^2\sin 2(\omega-\alpha)]xy+$$
$$[a_1{}^2\cos^2\alpha+b_1{}^2\cos^2(\omega-\alpha)]y^2=a_1{}^2b_1{}^2\sin^2\omega; \quad \ldots\ldots \quad \varepsilon)$$

Aby osy nových souřadnic byly osami ellipsy, musí člen xy zmizeti, tedy $a_1{}^2.\sin 2\alpha=b_1{}^2.\sin 2(\omega-\alpha)$

aneb $\quad a_1{}^2.\sin 2\alpha=b_1{}^2.\sin 2\omega.\cos 2\alpha-b_1{}^2.\cos 2\omega.\sin 2\alpha$

aneb $\quad a_1{}^2=b_1{}^2.\sin 2\omega.\cot 2\alpha-b_1{}^2.\cos 2\omega$

odtud $\quad \cot 2\alpha=\frac{a_1{}^2+b_1{}^2\cos 2\omega}{b_1{}^2.\sin 2\omega}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \zeta)$

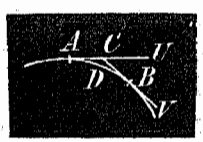
Dle této rovnice snadno sestrojíš úhel 2α, tedy také α. Sluší ovšem znamenati, že k hodnotě v rovnici ζ) udané náleží dvé úhlů o π od sebe rozdílných; tedy $2\alpha_1=\gamma$; $2\alpha_2=\gamma+\pi$; pročež $\alpha_1={}^1/_2\gamma$, $\alpha_2={}^1/_2\gamma+{}^1/_2\pi$. Sestrojiv tedy přímky dvě, jež od původní osy mají odchylky ${}^1/_2\gamma$ a ${}^1/_2\gamma+{}^1/_2\pi$, budeš míti vším způsobem obě osy ellipsy; z nich pak jest ta, která protíná *ostrý* úhel původních souřadnic, osou hlavní.

§. XXX.

O křivosti.

1. Přímka zachovává ve všech částečkách svých jednostejný směr; křivka každým místem směr svůj mění. Na prudkosti, kterou ta změna před se jde, záleží *křivost*. Tato prudkost může pak býti jednak buď menší neb větší, jednak buď stálá neb opět měnlivá: a takž i křivost čáry jednak jest buď menší neb větší, jednak buď stálá (na všech místech č. všem částečkám jednostejná), aneb měnlivá (na jiných místech č. jiným částečkám jiná).

obr. 81.



2. Prudkost řečená, je-li *stálá*, záleží na dvou věcech: předně na úhlu $UCV=\alpha$ (obr. 81.), o nějž se směr čáry z bodu A k bodu B dospělé odchýlil; za druhé na délce oblouku $ADB=\beta$ mezi bodoma A i B se pnoucího: i máme přirozeně prudkost svrchu zmíněnou za větší touž měrou, kterou jest odchylka α větší a oblouk β menší.

Znamenajíce tedy písmenem $\varkappa$ křivost, a čárkovanými α', β', $\varkappa'$ odchýlení směru, oblouk a křivost v případě jiném, musíme klásti:

$$\frac{\varkappa}{\varkappa'} = \frac{\alpha}{\alpha'} : \frac{\beta}{\beta'}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

3. Náležejí-li oblouky β a β' jediné čáře, jež má křivost stálou, bude $\varkappa = \varkappa'$, a tím $\alpha : \alpha' = \beta : \beta'$, t. j. *úchylky směrův jsou v přímém poměru k příslušným obloukům.* — Tuto vlastnost má kruh, ježto v něm (Pl. §. CVIII. 3.) jest $\beta = r . \alpha$, (r = poloměr). I má kruh na všech místech svých křivost jednostejnou.

4. Náležejí-li oblouky β a β' dvěma kruhům, jejichž poloměry jsou r a r', dostáneme pomníce že jest $\beta = \alpha . r$, $\beta' = \alpha' . r'$, z rovnice 1)

$$\varkappa : \varkappa' = r' : r, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

t. j. *křivosti kruhů jsou k poloměrům v poměru převráceném.*

Je-li mírou křivost $\varkappa' = 1$ kruhu poloměrem $r' = 1$ opsaného, bude z poslední uměry

$$\varkappa = \frac{1}{r}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

t. j. *křivost kruhu rovná se převrácené hodnotě poloměru jeho.*

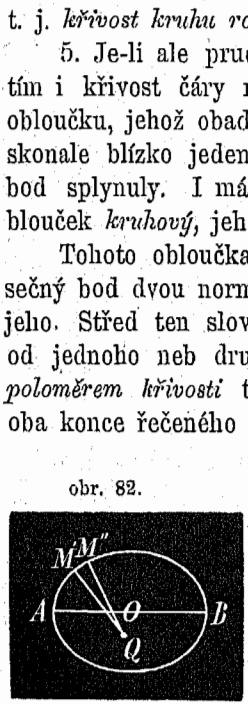
5. Je-li ale prudkost, kterou se směr křivky mění, sama, a tím i křivost čáry měnliva, tuť lze míti předce za stálou křivost obloučku, jehož obadva konce v jediný bod splývají, t. j. tak neskonale blízko jeden druhého jest, že jsou na tom, aby v jediný bod splynuly. I máme pak oblouček ten neskonale krátký za oblouček *kruhový*, jehož křivost dle rovnice 3) se ustanoví.

Tohoto obloučka za kruhový pokládaného jest středem průsečný bod dvou normal sestrojených na obloučku v obou koncích jeho. Střed ten slove *středem křivosti*, a jeho od obloučka, (neb od jednoho neb druhého konce obloučka) vzdálenost nazývá se *poloměrem křivosti* téhož obloučka čili křivky na tom místě, kde oba konce řečeného obloučka v jeden bod splývají.

§. XXXI.

O křivosti ellipsy.

obr. 82.



1. *Úloha.* Najdi průsečný bod Q dvou normal $M'Q$ a $M''Q$, jejichž na ellipse paty $M'(= x_1\, y_1)$ a $M''(= x_2\, y_2)$ dány jsou. (Obr. 82.)

Řeš. Rovnice těchto dvou normal (dle §. XXVIII. vz. 6.) jsou:

$$\left.\begin{aligned} y-y_1 &= \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1) \\ y-y_2 &= \frac{a^2y_2}{b^2x_2}(x-x_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

Z nich y vymýtíce najdeme usečku x bodu Q průsečného:

$$x = \frac{a^2-b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1x_2(y_1-y_2)}{x_2y_1-x_1y_2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

Výraz β) dá se převesti na jinou dobu. Jestiť

$$x_2y_1-x_1y_2 = x_1(y_1-y_2)-y_1(x_1-x_2); \quad \ldots \quad \gamma)$$

pročež

$$x = \frac{a^2-b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1x_2}{x_1 - y_1 \cdot \frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}}; \quad \ldots\ldots \quad \delta)$$

Dle §. XXVIII. 1. vz. ε) jest $\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$, . ε)

Tuto hodnotu ze vz. ε) do vz. δ) dosadíce, a $e^2 = a^2-b^2$ kladouce i upravíce dostaneme žádaného průseku úsečku

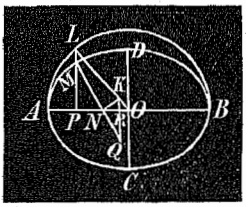
$$x = \frac{e^2}{a^2} \cdot \frac{b^2x_1x_2(x_1+x_2)}{b^2x_1(x_1+x_2)+a^2y_1(y_1+y_2)}; \quad \ldots \quad 1)$$

Podobně najdeme pořadnici téhož průseku, y za x, b za a vyměníce:

$$y = -\frac{e^2}{b^2} \cdot \frac{a^2y_1y_2(y_1+y_2)}{b^2x_1(x_1+x_2)+a^2y_1(y_1+y_2)}; \quad \ldots \quad 2)$$

2. *Úloha.* Najdi střed křivosti, již má ellipsa v bodě daném $M(=x_1y_1)$. Obr. 83.

obr. 83.



Řeš. Dáme-li dvěma bodům M' a M'' (obr. 82.), v nichž na ellipse vztýčeny jsou normaly $M'Q$ a $M''Q$, splynouti v bod jediný M (obr. 83.) stane se průsečný bod Q obou normal středem křivosti, a hodnoty jeho souřadnic určíme z rovnic 1) a 2), kladouce $x_1 = x_2, y_1 = y_2$; pak, že (x_1y_1) na ellipse leží, $b^2x_1{}^2 + a^2y_1{}^2 = a^2b^2$ . . . . . ζ)

Hodnoty souřadnic náležejících ku středu Q křivosti jsou pak:

$$x = \frac{e^2x_1{}^3}{a^4}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

$$y = -\frac{e^2y_1{}^3}{b^4}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Přídavek. Střed Q dá se snadno sestrojiti. Považíme-li, že jest (§. XXVIII. odst. 6. dod. 2) $ON = \frac{e^2}{a^2}x_1$; bude z rovnice 3)

$x = ON.\left(\frac{x_1}{a}\right)^2$. Opíšeme-li o ellipsu kruh ALB, a prodloužívše PM až do L vedeme-li OL: bude $\frac{x_1}{a} = \frac{OP}{OL} = \cos AOL = \cos\alpha$, kdežto $\sphericalangle AOL = \alpha$ položeno jest.

Máme tedy $x = ON.\cos^2\alpha$. Spusťme již $NK \perp OL$, $KR \perp AB$ i jest pak $ON.\cos\alpha = OK$; $OK.\cos\alpha = OR$, pročež $x = OR$. Prodloužíme-li tedy přímky KR i MN, bude průsek jejich Q *středem* křivosti, již má ellipsa v bodě M.

3. *Úloha.* Najdi poloměr křivosti, již má ellipsa v bodě $M(=x_1y_1)$. Obr. 83.

Řeš. Majíce z rovnic 3) a 4) souřadnice x a y středu křivosti, již má ellipsa v bodě M, určíme žádaný poloměr $MQ = k$ dle §. V. vz. 3.

$$k = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \eta)$$

Vymýtíme-li z rovnice η) nejprv x a y pomocí rovnic 3) a 4), potom y_1 pomocí rovnice ζ), vyjde žádaného poloměru hodnota

$$k = \frac{1}{ab}\sqrt{(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)^3}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Jsou-li r_1 a r_2 průvodičové bodu M z ohniska vedené, jest dle §. XXII. vz. 3. a 4.)

$$r_1 r_2 = a^2 - \varepsilon^2 x_1^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \vartheta)$$

a znamená-li n délku normály MN, jest dle §. XXVIII. vz. 11.

$$n = \frac{b}{a}\sqrt{r_1 r_2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad \iota)$$

Zavedeme-li buď $r_1 r_2$ aneb n pomocí vz. ϑ) ι) do vz. 5) na místo x_1, nabudeme $b^2 = ap$ kladouce:

$$k = \frac{1}{ab}\sqrt{(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)^3} = \frac{r_1 r_2}{ab}\sqrt{r_1 r_2} = \frac{a^2 n^3}{b^4} = \frac{n^3}{p^2}, \quad \ldots \quad 6)$$

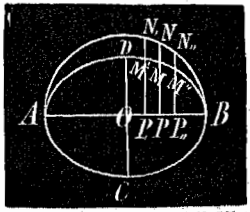
Výsledek. Ze vz. 5) poznáváme, že křivost ellipsy $\varkappa = \frac{1}{k}$ jest největší, když jest $x^2 = a^2$, t. j. ve vrcholích hlavní osy; odtud jí ubývá až k vrcholům menší osy C a D, kdež jest nejmenší. Nejmenší poloměr křivosti jest $k = \frac{b^2}{a} = p$, a největší $k = \frac{a^2}{b}$.

§. XXXII.

O ploském obsahu ellipsy.

Úloha. Najdi ploský obsah ellipsy, jsou-li dány polouosy její. Obr. 84.

obr. 84.



Řeš. O ellipsu opišme kruh i postavme na hlavní osu AB dvé kolmic $P'N'$ a $P''N''$, kteréž ellipsu protnou v bodech M' a M''. Jsou-li tyto kolmice neskonale blízko sebe, tak že bodové P' a P'' jsou na tom, aby splynuli v bod jediný: dovoleno jest, obloučky $M'M''$ a $N'N''$ neskonale krátké míti za přímky, a ploské obrazce $P'P''M''M' = f$ i $P'P''N''N' = F$ za lichoběžníky. Rozpolme $P'P''$ v bodě P a postavme $PN \perp AB$; i bude ploský obsah

$$f = P'P''.PM,$$
$$F = P'P''.PN;$$

pročež $$f : F = PM : PN;$$

Dle §. XXIII. 3. jest ale $PM : PN = b : a$,

tedy také $$f : F = b : a.$$

Rozdělme celou ellipsu i opsaný kruh kolmicemi na hlavní ose neskonale blízko vedlé sebe stavenými na samé takové lichoběžníky, i bude pak:

$$f_1 : F_1 = b : a,$$
$$f_2 : F_2 = b : a,$$
$$f_3 : F_3 = b : a,$$
$$\vdots$$
$$f_n : F_n = b : a;$$

odtud vychází:

$$(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n) : (F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n) = b : a;$$

a ježto součet $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = E$ ploský obsah ellipsy, a součet $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = K$, ploský obsah opsaného kruhu znamená, bude

$$E : K = b : a;$$

a poněvadž jest $K = \pi . a^2$, pročež $E = \pi ab$.

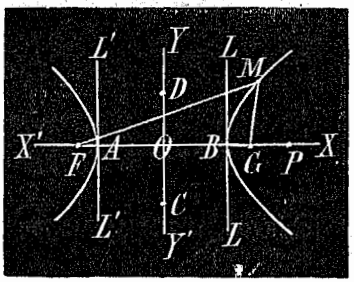
Hlava pátá.

O hyperbole.

§. XXXIII.

1. *Hyperbola* (nadbytnice) jest křivka, jejíž každý bod za rozdíl svých vzdáleností ode dvou pevných bodů v rovině její má délku stálou $= 2a$.

obr. 85.



2. Jako při ellipse, tak i zde slovou pevné body F a G (obr. 85.) ohniska, bod O uprostřed mezi nima *střed*, jeho od ohnisek vzdálenost $OG = e$ délková výstřednost, přímce FM, GM z ohniska k hyperbole vedené, díme *průvodič*; bodům A, B, kde se hyperbola s přímkou, která oběma ohnisky jde, protíná, *osové vrcholy*; přímce AB *hlavní osa*; přímce ve středu O na hlavní ose kolmo strmící *osa poboční* hyperboly.

3. Rovnice hyperboly nazývá se a) *středovou*, je-li střed O počátkem souřadnic; b) *osovou*, je-li *hlavní osa* osou x-ovou, a střed počátkem souřadnic; c) *vrcholovou*, je-li hlavní osa osou x-ovou a vrchol B počátkem souřadnic; d) *ohniskovou*, je-li ohnisko počátkem souřadnic.

§. XXXIV.

Rovnice hyperboly osová.

1. *Úloha.* Najdi osovou rovnici hyperboly.

Řeš. Buďte F a G (obr. 85.) ohniska, O střed, bod M čili (x, y) bod hyperboly $OG = -OF = e$; i jest pak dle výměru hyperboly:

$$MF - MG = 2a$$

čili dle §. V. vz. 3.

$$\sqrt{y^2 + (x+e)^2} - \sqrt{y^2 + (x-e)^2} = 2a,$$

kteroužto rovnici snadno uvedeš na dobu:

$$(e^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (e^2 - a^2)a^2; \ldots$$

Uvážíme-li, že jest $MF - MG < FG$, pročež $a < e$, bude

$$e^2 - a^2 = b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

hterouž hodnotu dosadíce dostaneme rovnici žádanou:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

aneb $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

2. Je-li $b = a$, bude z rovnice 2):

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

rovnice hyperboly *rovnostrané.*

§. XXXV.

Rozbor rovnice osové.

1. Položíme-li v rovnici 2) $y = 0$, vyjde $x = \pm a$; a naopak, je-li $x = \pm a$, vyjde $y = 0$. Položíme-li ale $x = 0$, jest $y = \pm b\sqrt{-1}$ pomyslné. Po geometricku řečeno: Osa hlavní protíná hyperbolu ve dvou bodech A i B, ježto od středu po obou stranách o a vzdáleny jsou. S osou pobočnou neprotíná se ale hyperbola.

Přímka $AB = 2a$ (obr. 85.) nazývá se délkou hlavní osy; a postavíme-li na hlavní osu uprostřed kolmici $OD = b$, a prodloužíme-li ji směrem protivným $OC = -b$, slove $CD = 2b$ délkou pobočné osy.

2. Z rovnice 3) jde $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \geqq 1$; jinak jest x pomyslné. Pročež nesmí hodnota x vězeti mezi $+a$ a $-a$, nébrž buďto $x \geqq +a$ aneb $x \leqq -a$ býti; t. j. Mezi přímkami LL a $L'L'$, které se vrcholoma A a B na hlavní osu kolmo vedou, není žádného bodu hyperboly.

3. Ježto rovnice 2) i 3) jest čiře čtverečna i co do úsečky i co do pořadnice: dělí se hyperbola jednou i druhou osou na polovice souměrné.

4. Z rovnice 2) nabýváme $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$;

$x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$. Odtud ale vysvítá patrně, že měníce úsečku x od $+a$ až do $+\infty$ aneb od $-a$ až do $-\infty$ vzrůstati jí dávajíce, spolu pořadnici y měníme od 0 až do $\pm\infty$.

Skládá se tedy hyperbola ze dvou haluzí souměrných a od sebe oddělených; z nichž jedna i druhá vzdaluje se od obou os zároveň po obou stranách osy hlavní do nekonečna daleka.

5. Položíme-li v rovnici 2) za $x = \pm e$, dostaneme k rovnici 1) přihlížejíce $y^2 = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$, odtud $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Klademe pak $\frac{b^2}{a} = p$; a nazýváme $2p$ parametrem hyperboly.

Ze vzorce $\frac{b^2}{a} = p$ vážíme větu: pobočná osa jest prostřední úměrnou mezi osou hlavní a mezi parametrem.

§. XXXVI.

Rovnice hyperboly vrcholová, ohnisková, polárná.

1. Zachovávajíce hlavní osu hyperboly za osu x-ovou pošineme-li počátek souřadnic o délku $+k$, dostaneme v osnově nové z rovnice 2) §. XXXIV. položíce $x+k$ místo x rovnici hyperboly.

$$b^2(x+k)^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

a vymýtíme-li b kladouce $b^2 = ap$:

$$p(x+k)^2 - a^2y = a^2p \quad \ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

Položíme-li $k = a$, dostaneme rovnici vrcholovou:

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Položíme-li $k = e$, obdržíme rovnici ohniskovou:

$$y^2 = p^2 + 2 \cdot \frac{e}{a} \cdot px + \frac{p}{a} \cdot x^2 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Přídavek. Je-li $y = 0$, vyjde z poslední rovnice $x = -e \pm a$.

2. *Úloha.* Najdi rovnici hyperboly polárnou.

Řeš. Ohnisko G (obr. 85.) buď polem, hlavní osa OX osou polárnou, a znamenej $GM = r$, $FM = r'$, $\sphericalangle MGO = \varphi$. Užijíce věty Carnotovy dostaneme

$$r'^2 = 4e^2 + r^2 - 4er\cos\varphi,$$

odtud pak podobným jako v §. XXI. způsobem:

$$r = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi} = \frac{ap}{a + e\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \quad \ldots \quad 3)$$

Přídavek. Poměr $\varepsilon = \frac{e}{a}$ nazývá se *číselná výstřednost* hyperboly.

§. XXXVII.

O průvodiči a středovém paprsku.

1. *Úloha.* Najdi rovnici průvodiče hyprboly. (Obr. 85.).

Reš. Podobným, jako v §. XXII. odst. 1. způsobem najdeš rovnici

průvodiče FM: $y=\frac{y'}{x'+e}(x+e)$; . . . . . 1)

průvodiče GM: $y=\frac{y'}{x'-e}(x-e)$; . . . . . 2)

2. *Úloha.* Najdi délku průvodiče hyperboly. (Obr. 85.).

Řeš. Znamenajíce $FM=r_1$, $GM=r_2$, najdeme, jako v §. XXII. odst. 2. si počínajíce $r_1=\frac{ex}{a}+a=\varepsilon x+a$; . . . . 3)

$$r_2=\frac{ex}{a}-a=\varepsilon x-a; \quad . \; . \; . \; . \; 4)$$

Výsledek. 1. Z rovnic 3) a 4) vyvádíme:

$$r_1r_2=\varepsilon^2x^2-a^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

$$r_1-r_2=2a, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

Z rovnice 6) soudíme, že rovnice 2) v §. XXXIV. a všecky ostatní z ní odvozené výhradně hyperbole náležejí.

Výsledek 2. Z rovnice 4) vysvítá, že průvodič GB (obr. 85.) jest nejkratší, a ostatní průvodičové tím delší, čím větší jest $+x$.

3. *Úloha.* Najdi délku d paprska ze středu hyperboly k jejímu bodu M $(=xy)$ vedeného.

Řeš. Jako v §. XXII. odst. 3. si počínajíce najdeme,

$$d=\sqrt{\varepsilon^2x^2-b^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

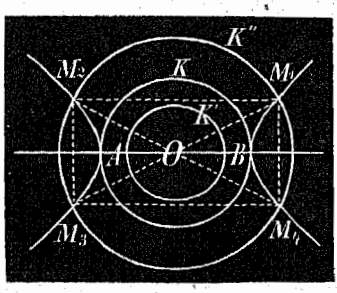
4. Rovnice 6) učí nás sestrojovati hyperbolu, dány-li jsou ohniska F a G a délka $=2a$ hlavní osy (obr. 85). Učiníme totiž $FO=OG$; $AO=OB=a$; na hlavní ose za ohniskem zvolíme bod některý P, poloměrem AP kolem středu F, a poloměrem BP kolem středu G opíšeme kruhové oblouky: průsek jejich M jest bod hyperboly.

§. XXXVIII.

Hyperbola a kruh soustředný.

1. *Úloha.* Najdi průsečné body hyperboly a kruhu soustředného (Obr. 86.)

obr. 86.



Řeš. Je-li r poloměr kruhu, dostaneme jako v §. XXIII. 1. si počínajíce za souřadnice bodů průsečných

$$x=\pm\frac{a}{e}\sqrt{r^2+b^2}$$

$$y=\pm\frac{b}{e}\sqrt{r^2-a^2}$$

Zde sluší tré případův rozeznávati:

a) Je-li $r < a$, bude y pomyslné, a kruh K' s hyperbolou se mine.

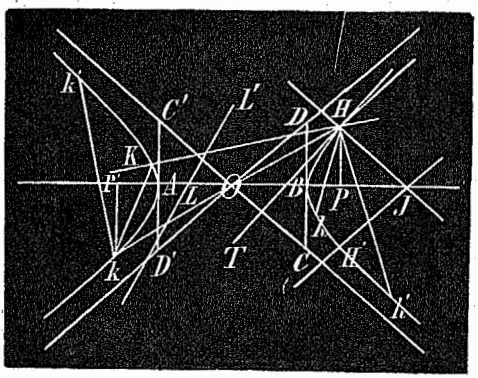
b) Je-li $r = a$, bude $y = 0$, $x = \pm a$: tedy kruh K se dotýká hyperboly ve vrcholích A i B, i nazývá se *hlavním* kruhem.

c) Je-li $r > a$, dostaneme za x i za y po dvou hodnotách sobě rovných a protivných: tehdy se kruh K'' s hyperbolou protíná čtyrmi body M_1, M_2, M_3, M_4 po obou stranách souměrně rozpoloženými. — I rozpoluje v tomto případě hlavní osa AB úhel M_1OM_4, jejž svírají úhlopříčné rovnoběžníka $M_1M_2M_3M_4$: pročež lze snadno sestrojiti hlavní osu i co do polohy, když střed O vykreslené hyperboly znám jest.

§. XXXIX.

O poloze přímky k hyperbole.

obr. 87.



Úloha. Vyzpytuj, kterak se pozná, zdali a v kolika bodech přímka s hyperbolou se protíná. (Obr. 87.)

Řeš. Osová rovnice hyperboly zní:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \quad . \quad \alpha)$$

a rovnice přímky vůbec:

$$y = Ax + u, \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$

Z obou rovnic nabýváme pro bod oběma čarám společný:

$$(b^2 - A^2a^2)x^2 - 2Aa^2ux - (u^2 + b^2)a^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad \gamma)$$

I sluší zde především dva případy rozeznávati: předně $b^2 - A^2a^2 = 0$, za druhé $b^2 - A^2a^2 \gtrless 0$.

a) Je-li $b^2 - A^2a^2 = 0$, dostaneme z rovnice γ) a z β)

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{b^2 + u^2}{2Au} \\ y &= -\frac{b^2 - u^2}{2u} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta)$$

ježto jsou hodnoty společných oběma čarám souřadnic.

Tu však opět nabízí se dvé případů zvláštních: $u = \pm 0$; $u \gtreqless 0$.

α) Je-li $u = \pm 0$, vyjde $x = \mp \infty$, $y = \mp \infty$, když jest $A > 0$. Když **ale** $A < 0$, vyjde $x = \pm \infty$, $y = \pm \infty$, t. j. přímka $D'D$ neb $C'C$, jejíž rovnice jest $y = \pm \frac{b}{a} x$, má s hyperbolou dva body **společné**, ale ve *vzdálenosti neskonalé.*

Pozn. Přímkám $D'D$, $(y = + \frac{b}{a} x)$; a CC', $(y = - \frac{b}{a} x)$, dějí *asymptoty* hyperboly, o nichž níže v §. XLI. obšírněji pojednáno bude.

β) Není-li $u = 0$, udávají vzorce δ) souřadnice společného bodu H neb H' hyperboly a přímky HI neb $H'I$; i pravíme: **Přímka** HI neb $H'I$, jejíž směrnice jest $+ \frac{b}{a}$ neb $- \frac{b}{a}$, **a** která **středem** hyperboly neprochází (t. přímka s asymptotou rovnoběžná, $HI \parallel C'C$, $H'I \parallel D'D$) protíná se s hyperbolou v bodě jediném H neb H'.

b) Není-li $b^2 - A^2a^2 = 0$, jest rovnice γ) čtverečná, i dostaneme rozřešivše:

$$x = \frac{1}{b^2 - A^2a^2} \cdot (Aa^2u \pm ab\sqrt{b^2 - A^2a^2 + u^2}), \qquad \varepsilon)$$

Z rovnic ε) a β) pospolu poznáváme, že přímka, která nemá za **směrnici** $\pm \frac{b}{a}$, s hyperbolou má společné body buď *dva*, neb *jediný*, neb *žádný*, a že tedy jest sečnou (Hh neb HK) aneb tečnou (TH), aneb hyperbolu mine (LL'), jakož jest $b^2 - A^2a^2 + u^2 \gtreqless 0$.

c) V tom případě, když jest $b^2 - A^2a^2 + u^2 > 0$, tedy přímka **sečnou**, rozeznávejme ještě dva případy: buďto jest $b^2 - A^2a^2 > 0$, aneb $b^2 - A^2a^2 < 0$.

α) Je-li $b^2 - A^2a^2 > 0$, bude také $b^2 - A^2a^2 + u^2 > u^2$; proto také $a^2b^2(b^2 - A^2a^2 + u^2) > a^2b^2u^2$, a ježto tehdy jest $a^2b^2u^2 > A^2a^4u^2$, vyplývá $(Aa^2u)^2 < a^2b^2(b^2 - A^2a^2 + u^2)$; pročež **pokud** pouze k číselné hodnotě přihlížíme, $Aa^2u < ab\sqrt{b^2 - A^2a^2 + u^2}$. Z **toho** ale jde, že v rovnici ε) jedna hodnota úsečky x jest kladná, a **druhá** záporná. K větší z nich náleží znamení veličiny u. — **Přímka** HK tehdy protíná každou haluz hyperboly, jak na kladné tak **na** záporné straně y-ové osy v jednom bodě.

β) Je-li $b^2 - A^2a^2 < 0$, vyjde týmž způsobem $Aa^2u > ab\sqrt{b^2 - A^2a^2 + u^2}$: i musí obě hodnoty řečené úsečky x v rovnici ε) míti jednostejná znamení, a sice tak aby x a Au měla znamení protivná. Přímka tehdy protíná jedinou haluz hyperboly a sice na kladné straně osy y-ové (Hh neb Hh'), když jest Au záporné, a na straně záporné (Kk neb Kk'), když jest Au kladné.

§. XL.

O poloze bodu k hyperbole.

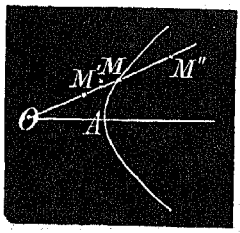
1. *Střed.* Je-li v předešlém §. $u = 0$, $b^2 - A^2a^2 > 0$, bude přímka Hk (obr. 87.) dle odst. b) sečná, a úsečky OP a OP' průsečných bodů (H a k) hyperboly s přímkou dle rovnice ε) mají hodnotu $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - A^2a^2}}$; příslušná pak k jedné i druhé úsečce pořadnice PH a $P'k$ jest $y = Ax$; t. j.

Přímka Hk protíná hyperbolu ve dvou bodech, jejichž souřadnice jsou si střídavě rovny a protivny; $x_1 = -x_2$, $y_1 = -y_2$, čili $OP = -OP'$; $PH = -P'k$.

Z toho vyplývá, že i paprsky ze středu O k těmto průsekům jdoucí (OH a Ok) jsou si rovny, a jedinou přímku (tětivu Hk) působí. Jiným slovem:

Tětiva Hk středem hyperboly vedená rozpoluje se týmž středem. Odtud má původ název středu.

obr. 88.



2. *Úloha.* Vyzpytuj, zdali bod ($x'y'$) leží na hyperbole, neb uvnitř aneb vně hyperboly. (Obr. 88.)

Řeš. Osová rovnice hyperboly jest:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \alpha)$$

Rovnice přímky bodem ($x'y'$) a středem vedené jest:

$$y = \frac{y'}{x'}x, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \beta)$$

Z těchto rovnic, jako v §. XXVI. 2. si počínajíce dostaneme:

$$\frac{c^2}{c'^2} = \frac{a^2b^2}{b^2x'^2 - a^2y'^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \gamma)$$

kdežto znamená $c = \sqrt{x^2 + y^2}$ vzdálenost středu od bodu M (xy) na hyperbole ležícího, $c' = \sqrt{x' + y'^2}$ pak vzdálenost středu

O od bodu $(x'y')$. Jakož ale jest $c' = OM' < c$, $c' = OM = c$, aneb $c' = OM'' > c$, leží bod $(x'y')$ vně aneb na hyperbole aneb uvnitř: pročež také, jakož jest $b^2x'^2 - a^2y'^2 \gtreqless a^2b^2$, leží bod $(x'y')$ vně, na hyperbole, uvnitř.

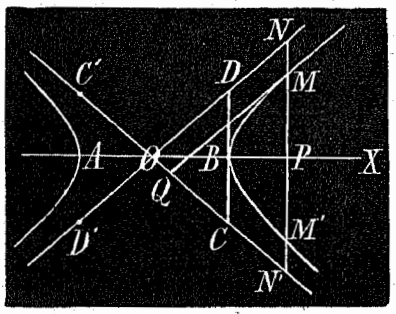
§. XLI.

O asymptotách hyperboly.

1. *Asymptota* (nedopadnice, nedostihlá) slove přímka, ku které se křivka neustále přibližuje, až v neskonalé vzdálenosti při ní neskonale blízko leží.

2. Přímka $D'D$ neb $C'C$, jejíž rovnicí jest $y = +\frac{b}{a}x$, aneb $y = -\frac{b}{a}x$, jest asymptotou hyperboly. (Obr. 89.)

obr. 89.



Důkaz. Osová rovnice hyperboly jest

$$\frac{b^2}{a^2}\xi^2 - \eta^2 = b^2, \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

Ztvercovaná rovnice přímky: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$, ... $\beta)$

Sečteme-li tyto dvě rovnice, vyjde:

$$\frac{b^2}{a^2}(\xi^2 - x^2) + y^2 - \eta^2 = b^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma)$$

Kdykoliv jest $\xi = x$, bude pokaždé

$$y^2 - \eta^2 = b^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta)$$

pročež $$y - \eta = \frac{b^2}{y + \eta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon)$$

t. j. rozdíl MN pořadnic $PN - PM$ přímky a hyperboly ku společné úsečce OP náležejících jest tím menší, čím větší jest $\eta = PN = N'P$ a $y = PM = M'P$, pročež čím větší jest $x = OP$: i ubývá toho rozdílu do nekonečna, jako součtu $\eta + y = PN + PM = PN + M'P = M'N$, (neb $\eta + y = N'P + M'P = N'P + PM = N'M$), tedy jako $x = OP$ do nekonečna přibývá. Jsou tedy přímky $D'D$ a CC' asymptotami hyperboly.

Pozn. Pro každé ξ dostaneme z rovnice $\alpha)$ za $\eta)$ *dvě* hodnoty;

z nich rozumí se ve vzorci ε) pouze jediná ta, která má s y jednostejné znamení.

3. *Úloha.* Najdi rovnici hyperboly, jsou-li asymptoty osami souřadnic. (Obr. 89.)

Řeš. Rovnice hyperboly osová buď $b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = a^2b^2$, . α)

Přijměme nyní za osu x-ovou asymptotu OC, za osu y-ovou asymptotu OD, i znamenejme $\sphericalangle BOD = -\sphericalangle BOC = \alpha$. Chtějíce osnovu souřadnic převesti na osnovu žádanou, užijme z §. IV. vz. 9) kladouce tam $a = b = 0$, $x\hat{}y' = \alpha$, $x\hat{}x' = -\alpha$; a místo x, y, x', y' v témž pořádku ξ, η, x, y: i bude dle zmíněných vzorců:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (y+x).\cos\alpha \\ \eta &= (y-x).\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

Tyto hodnoty dosadíce do rovnice α), dostaneme:

$$b^2(y+x)^2.\cos^2\alpha - a^2(y-x)^2.\sin^2\alpha = a^2b^2; \quad \ldots \quad \gamma)$$

Poněvadž ale nové osy souřadnic jsou asymptoty, jest:

$\operatorname{tang}\alpha = \frac{b}{a}$; pročež $\cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2}{e^2}$, $\sin^2\alpha = \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{b^2}{e^2}$, kteréžto hodnoty zavedeme-li do γ) a pak rovnici upravíme, nabudeme rovnice žádané:

$$xy = \frac{a^2+b^2}{4}$$

neb

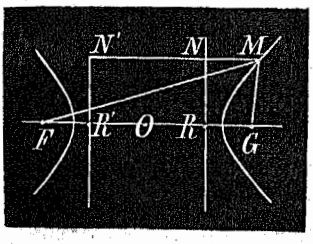
$$xy = \frac{e^2}{4}.$$

Přídavek. Veličina $\frac{a^2+b^2}{4} = \frac{e^2}{4}$ nazývá se *mocnost* hyperboly.

§. XLII.

O ředitelkách hyperboly.

obr. 90.



1. Přímky RN a $R'N'$ (obr. 90.), které na hlavní ose kolmo stojí a od středu o $R'O = OR = \frac{a^2}{e}$ vzdáleny jsou nazývají, se *ředitelkami* hyperboly, i jest z nich každá přidružena k *ohnisku* bližšímu; tedy RN ku G, $R'N'$ ku F.

2. Vzdálenost kteréhokoliv na hy-

perbole bodu M od ředitelky má se ku průvodiči z přidruženého ohniska vedenému, jako hlavní polouosa k výstřednosti ellipsy. (Obr. 90.)

Důkaz. Buď $MN \perp RN$, i jest $NM = x - OR = x - \frac{a^2}{e} = \frac{ex - a^2}{e}$;

$GM = \frac{ex}{a} - a = \frac{ex - a^2}{a}$; pročež

$$NM : GM = a : e = 1 : \varepsilon.$$

Podobně najdeme $N'M : FM = a : e = 1 : \varepsilon$.

§. XLIII.

O tečné a normále.

1. *Úloha.* Najdi rovnici přímky, která probíhá dvěma body $(x_1 y_1)$ a $(x_2 y_2)$ na obvodě hyperboly ležícíma, dána-li jest osová rovnice hyperboly.

Řeš. Způsobem jako v §. XXVIII. 1. najdeme rovnici žádanou, $-b^2$ místo $+b^2$ kladouce

$$y - y_1 = \frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1), \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

2. *Úloha.* Najdi rovnici tečné, dán-li na hyperbole bod dotyčný $(x_1 y_1)$.

Řeš. Jako v §. XXVIII. 2. si počínajíce najdeme rovnici žádanou:

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1), \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

neb

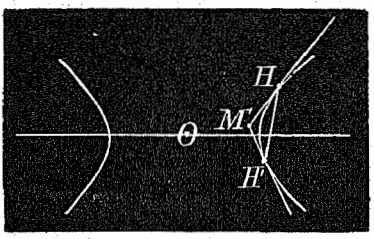
$$b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 b^2, \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

v níž jest směrnice $A = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$, $\ldots \ldots \quad 4)$

Dodavek. Je-li v rovnici 3) $y = 0$, bude $x = \frac{a^2}{x_1}$; a je-li $x = 0$, bude $y = -\frac{b^2}{y_1} = -\frac{ap}{y_1}$. Tím se dává na ruku, kterak tečnou k dotýčnému bodu hyperboly vésti lze.

3. *Úloha.* Najdi rovnici tečné, jež se vede z daného bodu M' $(= x'y')$ k hyperbole. (Obr. 91.)

obr. 91.



Řeš. Jsou-li ξ, η souřadnice dotyčného bodu H ještě neurčené, jest rovnice tečné

$$b^2 \xi x - a^2 \eta y = a^2 b^2, \quad \ldots \ldots \quad \alpha)$$

K určení souřadnic ξ a η

slouží (jako v §. XXVIII. 3.) rovnice:

$$b^2\xi x' - a^2\eta y' = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

$$b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \gamma)$$

z nichž se najde

$$\xi = \frac{a^2}{b^2x'^2 - a^2y'^2}\left(b^2x' \pm y'\sqrt{a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2}\right), \quad \delta)$$

Pořadnice η určí se pak pomocí δ) z rovnice β).

Z toho vysvítá, že kdykoliv jest $a^2y'^2 + a^2b^2 > b^2x'^2$, t. j. že z každého bodu M' vně hyperboly dá se na hyperbolu položiti dvé tečných $M'H$ a $M'H'$. — Rovnice jejich dostaneme, dosadíce do α) nalezené hodnoty souřadnic ξ a η.

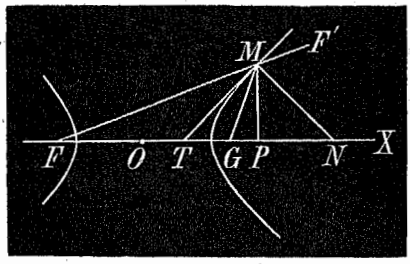
4. *Úloha.* Najdi rovnici, jež přísluší tětivě tečných HH'. (Obr. 91.)

Řeš. Jako v §. XXVIII. 4. dostaneme z β) rovnici žádanou:

$$b^2x'x - a^2y'y = a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Přídavek. Sestrojíme-li průseky, jež má tětiva tečných s osami dle rovnice 5), t. $y = 0$, $x = \frac{a^2}{x'}$; $x = 0$, $y = -\frac{b^2}{y'}$; a vedeme-li jima přímku (tetivu tečných), dostaneme na hyperbole body dotyčné H a H', k nimž vedené přímky z bodu M' budou tečnými.

obr. 92.



5. *Úloha.* Najdi rovnici normaly, dána-li pata její M $(= x_1y_1)$ na hyperbole. Obr. 92.

Řeš. Jako v §. XXVIII. 5. dostaneme rovnici žádanou, $-b^2$ za $+b^2$ vyměníce:

$$y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1), \quad 6)$$

Přídavek. Položíme-li $y = 0$ v rovnici 6), dostaneme

$$ON = x = \frac{a^2 + b^2}{a^2}x_1 = \frac{e^2}{a^2}x_1, \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

z čehož vysvítá že pata N normaly leží na hlavní ose za ohniskem.

6. *Úloha.* Najdi délku subnormaly PN, subtangenty PT, normaly $MN = n$ a tangenty $MT = t$. Obr. 92.

Řeš. Jako v §. XXVIII. odst. 6. najdeme $+b^2$ za $-b^2$ vyměníce:

$$\left.\begin{aligned} PN &= \text{subn} = \frac{b^2 x_1}{a^2} = \frac{p x_1}{a}, \quad \ldots \ldots \ldots \\ PT &= \text{subt} = -\frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1} = -\frac{x_1^2 - a^2}{x_1}, \quad \ldots \\ n &= \frac{b}{a} \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \\ t &= \frac{a y_1}{b x_1} \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}\right\} 8)$$

Přídavek. Z rovnice $PT = -\frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$ jde, že pokud se o číselnou hodnotu jedná, vždy jest $PT < x'$ t. j. pata T tečné padne mezi střed a mezi vrchol té haluze, k jejímuž bodu M tečná TM vedena jest.

7. *Úloha.* Najdi úhly, jež svírá tečná hyperboly s průvodiči bodu dotyčného. (Obr. 92.)

Řeš. Kladouce $\sphericalangle TMG = \psi$, $TMF = \varphi$, dostaneme jako v §. XXVIII. odst. 7.

$$\text{tang}\,\psi = \frac{b^2}{e y_1}; \ \text{tang}\,\varphi = -\frac{b^2}{e y_1}$$

Výsledky. a) Sečtouce tyto rovnice dostaneme

$$\text{tang}\,\psi + \text{tang}\,\psi = 0,$$

a poněvadž pata T tečné mezi ohnisky leží, jest jeden úhel (ψ) kladný, druhý (φ) záporný; pročež $\varphi + \psi = 0$, t. j. tečná TM rozpoluje úhel FMG, jejž průvodičové bodu dotyčného svírají. — Pročež rozpoluje též normala MN úhel GMF', jejž svírá průvodič jeden GM s prodlouženým průvodičem druhým MF'. — b) Maje na hyperbolu v bodě M položiti tečnou a normalu, veď z téhož bodu průvodiče MG a MF; rozpol úhel FMG přímkou MT, kteráž bude tečnou. Rozpoliv úhel vedlejší GMF' přímkou MN máš normálu.

§. XLIV.

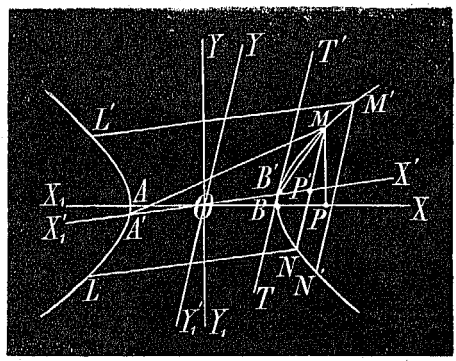
O průměrech hyperboly.

1. *Úloha.* Najdi rovnici geometrického místa, jímž se pásmo rovnoběžných tětiv rozpoluje. (Obr. 93.)

Řeš. Znamenajíce písmemem A směrnice rovnoběžných tětiv (MN, $M'N'$ atd.) najdeme způsobem jako v §. XXIX. 2. rovnici žádanou:

$$y = \frac{b^2}{A a^2} \cdot x, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

obr. 93.



Hledané místo jest tedy přímka OX' středem hyperboly procházející: i jest přímka tato (§. XXIX. 1.) průměrem hyperboly.

2. Je-li tětiv rovnoběžných (LN, $L'M'$) směrnice $B = \frac{b^2}{Aa^2}$, . . 2) musí tětivy tyto býti s předešlým průměrem OX' rovnoběžny. Rovnice přidruženého k nim průměru OY' bude pak

$$y = \frac{b^2}{Ba^2} \cdot x = Ax, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

z čehož vyplývá, že tento průměr OY' s předešlými tětivami MN, $M'N'$ atd. jest rovnoběžný.

3. Dvěma průměrům, z nichž každý rozpoluje tětivy, které jsou s druhým průměrem rovnoběžny (jako OX' a OY'), říkáme průměry *sdružené.*

4. Je-li ve vzorci $B = \frac{b^2}{a^2 A}$, hodnota $A = 0$, bude $B = \infty$; t. j. je-li jeden průměr s x-ovou osou rovnoběžný (splývaje s ní), jest průměr sdružený na něm kolmo. Oba tyto průměry OX a OY slovou *hlavními,* neb *osami* hyperboly. V ostatních případech máme $AB = \frac{b^2}{a^2}$, pročež $1 + A.B = \frac{e^2}{a^2} = \varepsilon^2$, tedy nikdy jindy $1 + A.B = 0$, t. j. ostatní sdružené průměry (OX' a OY') jsou k sobě *šikmo.*

5. Protože součin ze směrnic A i B dvou sdružených průměrů OX' a OY' jest kladný $\left(A \,.\, B = \frac{b^2}{a^2}\right)$: mají směrnice tyto svorná znamení, i musí oba průměry společně ležeti uvnitř vrcholových úhlů, jež svírají obě osy hyperboly, t. buďto oba uvnitř úhlů XOY a X_1OY_1 (jako v obr. 93.), aneb oba uvnitř úhlů XOY_1 a X_1OY. — Ostrý úhel $X'OY'$ oběma sdruženými průměry sevřeny a úhlem sdružovacím zvaný neprotíná se tedy ani hlavní ani pobočnou osou hyperboly.

6. Ze dvou sdružených průměrů jeden (OX') hyperbolu protíná ve dvou bodech (A' a B'), druhý (OY') se jí mine; prvý jest

sdružen s tětivami vnitřními (MN, $M'N'$), druhý s tětivami vnějšími (LN, $L'M'$).

Důkaz. Případ asymptot vyjímaje a pouze k číselným hodnotám přihlížeje vyplývá ze vzorce $A.B = \frac{b^2}{a^2}$ buďto $B < \frac{b}{a}$, $A > \frac{b}{a}$ aneb naopak. Pročež bude také $b^2 - B^2a^2 > 0$, $b^2 - A^2a^2 < 0$, neb naopak: tedy dle §. XXXIX. b) první průměr OX' hyperbolu ve dvou bodech A' a B' protíná, druhý OY' ji mine.

Je-li při průměru OX' prvém $B < \frac{b}{a}$, musí při sdružených tětivách (MN) býti $A > \frac{b}{a}$ tedy $b < Aa$, a z té příčiny jsou dle §. XXXIX. c. β) tyto tětivy *vnitřní*, jedinou haluz hyperboly protínajíce. Spolu jest pak při průměru OY' druhém $A > \frac{b}{a}$, a při sdružených tětivách (LN) $B < \frac{b}{a}$ čili $b > Aa$, za kterouž příčinou tětivy jsou dle §. XXXIX. c. α) *vnější*, obě haluze hyperboly protínajíce.

7. Tečná TT' vedená krajným bodem A' neb B' některého průměru $A'B'$, jenž hyperbolu protíná, jest s druhým sdruženým průměrem OY' rovnoběžná.

Důkaz. Rovnice průměru OY' buď $y = Ax$, ... α)

tedy rovnice průměru $A'B'$ sdruženého $y = \frac{b^2}{Aa^2}x$, . . . β)

Jsou-li x' a y' souřadnice bodu B' (neb i A'), bude dle β) $y' = \frac{b^2}{Aa^2}x'$; pročež $A = \frac{b^2x'}{a^2y'}$; . . . . . γ)

Směrnice tečné v bodě ($x'y'$) vedené jest ale dle §. XLIII. 4.) $A' = \frac{b^2x'}{a^2y'}$, pročež $A' = A$, pročež $TT' \parallel OY$.

8. Tětivy ($A'M$ a $B'M$) vedené z kteréhokoliv na hyperbole bodu M ku krajným bodům (A' a B') některého průměru $A'B'$, který hyperbolu protíná, mají směry jiných dvou sdružených průměrů. (Obr. 93.)

Důkaz. Znamenaje směrnice tětiv $A'M$ a $B'M$ písmeny A a B dokážeš týmž způsobem jako v §. XXIX. odst. 7.

$$A.B = \frac{b^2}{a^2}.$$

Přídavek. Tětivám těmto říkají *sdružené*, jinak i *doplňovací* neb i *náhradnice* os.

9. *Úloha.* Najdi úhel ($X'OY' = \omega$), jejž dva sdružené průměry (OX' a OY') spolu svírají. (Obr. 93).

Řeš. Jako v §. XXIX. 8) si počínajíce, a za směrnici průměru OX', který hyperbolu protíná, veličinu A majíce, najdeme:

$$\tang \omega = \frac{1}{A} \cdot \frac{b^2 - A^2a^2}{b^2 + a^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

$$\sin^2 \omega = \frac{(b^2 - A^2a^2)^2}{(1 + A^2)(A^2a^4 + b^4)}, \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

10. *Úloha.* Najdi délku poloměru $OB' = a_1$ hyperboly, dán-li směr jeho. (Obr. 93.)

Důkaz. Je-li $\sphericalangle XOB' = \alpha$, $\tang \alpha = A$: najdeme jako v §. XXIX. odst. 9.)

$$a_1^2 = \frac{a^2b^2(1 + A^2)}{b^2 - A^2a^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

$$a_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin \alpha^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Ze vz. 6) jest patrno, že a_1 má jen tehdy hodnotu skutečnou (realnou), když jest $b^2 - A^2a^2 > 0$, tedy, když průměr, jako (OX'), jest sdružen s tětivami vnitřními.

Je-li OY' průměr sdružený s průměrem $A'B'$, jehož polovičnou délku vzorcem 6) neb 7) jsme určili; znamenáme-li $\sphericalangle XOY' = \beta$, $\tang \beta = B$; a klademe-li v mysli vzdálenost středu O od průseku průměru OY' s hyperbolou, zatím $= b'$, najdeme rovněž tak, jako svrchu:

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + B^2)}{b^2 - B^2a^2}$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 \cos^2 \beta - a^2 \sin^2 \beta}$$

Ježto jsme přijali, že jest $b^2 - A^2a^2 > 0$, a že jest $AB = \frac{b^2}{a^2}$; vysvítá $b^2 - B^2a^2 < 0$, a proto jest b' veličina pomyslná, jakož v skutku průměr OY' hyperbolu nikde neprotíná. Položíce ale $b'^2 = -b_1^2$, dostaneme.

$$b_1^2 = \frac{a^2b^2(1 + B^2)}{B^2a^2 - b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

$$b_1^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

i jest pak b_1 veličina skutečná (realná) a nazývá se délkou sdruženého poloměru OY'.

Z rovnice 8) vymýtíme-li B pomocí vzorce $B = \frac{b^2}{Aa^2}$, vyjde

$$b_1{}^2 = \frac{b^4 + A^2a^4}{b^2 - A^2a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

$$b_1{}^2 = \frac{b^4 \cos^2\alpha + a^4 . \sin^2\alpha}{b^2 \cos^2\alpha - a^2 . \sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

11. Rozdíl zčtvercovaných poloměrů sdružených jest veličina stálá.

Důkaz. Odečtouce rovnici 10) od 6) dostaneme:

$$a_1{}^2 - b_1{}^2 = a^2 - b^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

12. Součin sdružených poloměrů znásobený sinusem úhlu sdružovacího jest veličina stálá.

Důkaz. Znásobíme-li spolu rovnice 5), 6), 10), vyjde

$$a_1{}^2 b_1{}^2 \sin^2\omega = a^2 b^2$$

pročež $\quad a_1 . b_1 . \sin\omega = a . b, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$

13. *Úloha.* Najdi rovnici hyperboly, maje dva sdružené průměry OX' a OY' za osy souřadnic. Obr. 93.

Řeš. Způsobem, jako v §. XXIX. odst. 12. najdeme

$$b_1{}^2 x^2 - a_1{}^2 y^2 = a_1{}^2 b_1{}^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

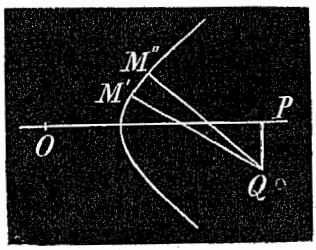
14. *Závěrek.* Úlohy, které v §. XXIX. odst. 13. dány, a větším dílem vykonány jsou o ellipse, dovede čtenář si dáti a vykonati o hyperbole.

§. XLV.

O křivosti hyperboly.

1. *Úloha.* Najdi průsečný bod Q dvou normal, jejichž na hyperbole paty M' $(= x_1 y_1)$ a M'' $(= x_2 y_2)$ dány jsou. (Obr. 94.)

obr. 94.



Řeš. Způsobem, jako v §. XXXI. 1. najdeme souřadnice OP a PQ řečeného průseku Q:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{e^2}{a^2} \cdot \frac{b^2 x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{b^2 x_1 (x_1 + x_2) - a^2 y_1 (y_1 + y_2)} \\ y &= -\frac{e^2}{b^2} \cdot \frac{a^2 y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{b^2 x_1 (x_1 + x_2) - a^2 y_1 (y_1 + y_2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1)$$

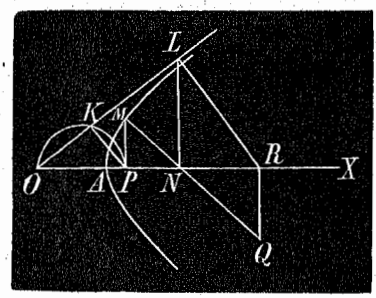
2. *Úloha.* Najdi střed křivosti, již má hyperbola v bodě daném M $(= x_1 y_1)$.

Řeš. Souřadnice žádaného středu najdeme z rovnic 1), položíme-li $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$; a sice:

$$x = \frac{e^2 x_1^3}{a^4} = \frac{e^2}{a^2} x_1 \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

$$y = -\frac{e^2 y_1^3}{b^4}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

obr. 95.



Přídavek. Tyto souřadnice lze snadno sestrojiti. Sestroj normálu MN (obr. 95.), i jest $ON = \frac{e^2}{a^2} x_1$ (§. XLIII. vz. 7.); spusť $MP \perp AB$, i jest $OP = x_1$; nad průměrem OP opiš kruh OKP, vlož do něho tětivu $OK = a$, a prodluž; po té postav $NL \perp OX$. $LR \perp OK$, $RQ \perp OX$; průsek Q normály s přímkou RQ ješt střed křivosti, $OR = \frac{e^2 x_1^3}{a^4}$, $RQ = -\frac{e^2 y_1^3}{b^4}$.

Neboť klada $\sphericalangle XOL = \alpha$ máš

$$OR = \frac{OL}{\cos\alpha} = \frac{ON}{\cos^2\alpha} = ON \cdot \left(\frac{OP}{OK}\right)^2 = \frac{e^2 x_1^3}{a^4}.$$

3. *Úloha.* Najdi poloměr $MQ = k$ křivosti, již má hyperbola v bodě M. (Obr. 95.)

Řeš. Jako v §. XXXI. 3. najdeme:

$$k = \frac{1}{ab} \cdot \sqrt{(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2)^3} = \frac{r_1 r_2}{ab} \sqrt{r_1 r_2} = \frac{a^2 n^3}{b^4} = \frac{n^3}{p^2}; \quad \ldots \quad 4)$$

Hlava šestá.

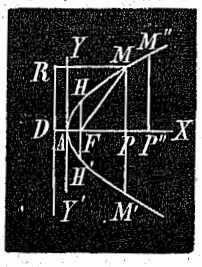
O parabole.

§. XLVI.

Rovnice paraboly.

1. Parabola jest křivka, jejíž každý bod M (obr. 96.) má od určitého pevného bodu F, *ohnisko* řečeného, i od určité pevné přímky DR, *ředitelka* zvané, jednostejné vzdálenosti: $FM = RM$.

(obr. 96.)



Přímka AX ohniskem k ředitelce DR kolmo vedená jest *osa* paraboly; bod A, jímž se vzdálenost FD ohniska od ředitelky rozpoluje, leží na parabole (proto že jest $DA = AF$), a slove *vrchol* paraboly.

Rovnice paraboly nazývá se vrcholovou, je-li osa paraboly osou úseček, a vrchol A počátkem souřadnic pravoúhlých.

2. *Úloha.* Najdi rovnici paraboly vrcholovou. (Obr. 96.)

Řeš. Buď bodu M úsečka $AP = x$, pořadnice $PM = y$; i klaďme $DA = AF = \frac{1}{2}p$. Bude pak dle věty Pyth.

$$FM = \sqrt{PM^2 + FP^2}.$$

Jest ale $FP = FA + AP = AP - AF = x - \frac{1}{2}p$; $PM = y$; pročež

$$FM = \sqrt{y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2}.$$

Dále jest $RM = DP = DA + AP = \frac{1}{2}p + x$ a dle výměru paraboly $FM = RM$; pročež

$$\tfrac{1}{2}p + x = \sqrt{y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2},$$

kteroužto rovnici srovnáme-li jak náleží obdržíme rovnici žádanou

$$y^2 = 2px, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

3. *Rozbor této rovnice.* a) Z rovnice 1) vychází $y = \pm\sqrt{2px}$.

Odtud plyne opět: α) Ku každé hodnotě úsečky x patří dvé hodnot pořadnice y ($y_1 = PM$, $y_2 = PM'$) sobě rovných a protivných, t. j. parabola protíná se osou AX na dvě souměrné polovice.

β) K záporné hodnotě x patří pomyslná hodnota pořadnice y, t. j. na záporné straně osy y-ové AY není žádného bodu paraboly.

γ) Hodnota pořadnice y stane se $= 0$ jen tehdy, když jest $x = 0$, t. j. parabola má s osou jediný bod společný, a sice vrchol A.

δ) Dáme-li úsečce x vzrůstati od 0 do $+\infty$, přibývá pořadnice od 0 do $+\infty$, t. j. parabola od obou os souřadnic vzdaluje se neustále až do nekonečna.

ε) Je-li úsečky hodnota $x = {}^1/_2 p$, nabývá pořadnice hodnoty $y = \pm p$; tedy $FH = +p$, $FH' = -p$.

Přímce $H'H$, jež jest tětiva v ohnisku na osu kolmá, říkáme *parameter* paraboly, i jest $H'H = 2p$.

b) Z rovnice 1) vyvádí se úměra:

$$2p : y = y : x, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

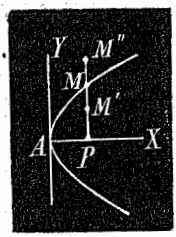
t. j. *pořadnice jest prostřední úměrná mezi úsečkou a parametrem.*

c) Jsou-li M $(= xy)$ a M'' $(= x'y')$ dva body na parabole, bude dle 1):

$$y^2 = 2px, \qquad y'^2 = 2px';$$

pročež $y^2 : y'^2 = x : x'$, čili $PM^2 : P''M''^2 = AP : AP''$, t. j. *čtverce pořadnic mají se k sobě jako patřící k nim úsečky.*

(obr. 97.)



d) Protože parabola od y-ové osy (obr. 97.) neustále až do nekonečna se vzdaluje, musí každá kolmice, jež strmí na ose x-ové, parabolu protínati, pročež i kolmice buď bodem M' uvnitř aneb bodem M'' vně paraboly ležícím vedená. Kolmice PM' bodem M' uvnitř paraboly ležícím vedená musí býti prodloužena, kolmice PM'' bodem M'' vně paraboly ležícím musí býti zkrácena, aby se na parabole končila v bodě M. Kladouce $PM' = y'$, $PM = y$, $PM'' = y''$, máme za touto příčinou

$$y' < y < y'';$$

pročež

$$\frac{y'^2}{x'} < \frac{y^2}{x} < \frac{y''^2}{x''},$$

kdežto $x' = x = x'' = AP$ jest.

O bodě M, jenž jest na parabole, platí dle vz. 1) rovnice $\frac{y^2}{x} = 2p$; čímž nabýváme

$$\frac{y'^2}{x'} < 2p < \frac{y''^2}{x'},$$

t. j. leží-li bod některý (ξ, η) *uvnitř* paraboly, jest $\frac{\eta^2}{\xi} < 2p$, čili $\eta^2 < 2p\xi$; leží-li *vně* paraboly, jest $\frac{\eta^2}{\xi} > 2p$, čili $\eta^2 > 2p\xi$; a leží-li na parabole, jest $\eta^2 = 2p\xi$, jakož již známo.

Z toho ale vyplývá naopak, že každý bod (x,y), o němž platí rovnice $y^2 = 2px$, musí na parabole ležeti. Jiným slovem: Rovnice $y^2 = 2px$ náleží výhradně parabole.

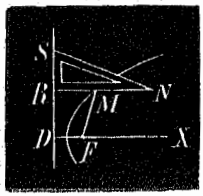
§. XLVII.

Sestrojování paraboly.

Úloha. Sestroj parabolu, dáno-li ohnisko a ředitelka.

Řeš. I. Ohniskem F (obr. 96.) na ředitelku DR kolmo veď osu AX, rozpol DF v bodě A, jenž bude vrcholem paraboly. Jiných bodů vyhledáš stavě na ose AX kolmice PM a kolem středu F opisuje poloměrem DP kruhové oblouky; průsek M oblouka toho s kolmicí PM jest bod paraboly.

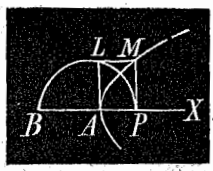
(obr. 98.)



Jedním tahem sestrojíme parabolu pomocí uhelnice pravoúhlé (obr. 98.) SRN, jejíž jedna odvěsná RS k ředitelce DR přiléhá, druhá pak RN s osou jest rovnoběžná; na hraně N jest připevněna jedním svým koncem nit zdélí RN, kdežto druhý konec niti v ohnisku F upevněn jest. Držíce nit psacím ústrojím napiatou v bodě M pošinujeme uhelnici od osy DX ji vzdalujíce: i kreslí nám psací načiní parabolu. Neboť v kterémkoliv bodě jest $FM = RM$.

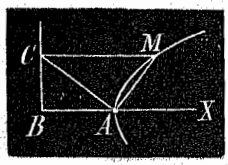
II. Jiný způsob sestrojovací poskytuje hořejší úměra $2p : y = y : x$, a sice: Na prodloužené ose XA (obr. 99.) sřízni $BA = 2p$; postav nějakou kolmici $PM \perp AX$, opiš nad průměrem BP polokruh BLP, postav $AL \perp BP$, veď $LM \parallel AX$, i bude průsek M přímek PM a LM bod paraboly.

(obr. 99.)



III. Rovnici paraboly $y^2 = 2px$ lze míti za odvozenou ze dvou jiných rovnic spolu znásobených: $y = Ax$, $y = \frac{2p}{A}$, kdežto A kteroukoliv hodnotu míti může. Poslední dvě rovnice náležejí přímkám, a jejich průsek jest i bodem paraboly, jejíž rovnice z těchto odvozena jest.

(obr. 100.)



Sestrojíš pak tímto způsobem parabolu: Na prodloužené ose XA, na níž A jest vrchol paraboly, sřízni $BA = 2p$; veď směrem nějakým přímku AM, postav $BC \perp BA$, $AC \perp AM$, a veď $CM \parallel AX$;

průsek M přímek CM a AM jest bod paraboly. Neboť je-li $y = Ax$ rovnice přímky AM, bude $\tang XAM = A$;

$BC = BA . \cot XAM = \frac{2p}{A}$, tedy rovnice přímky CM jest $y = \frac{2p}{A}$.

§. XLVIII.

O průvodiči paraboly.

1. *Průvodič* paraboly sluje přímka z ohniska k některému bodu paraboly vedená; k. p. FM (obr. 96.).

2. *Úloha.* Najdi rovnici průvodiče paraboly.

Řeš. Ježto průvodič FM (obr. 96.) prochází ohniskem, jehož souřadnice jsou $x'' = {}^1/_2 p$, $y'' = 0$; a bodem M $(= x'y')$ na parabole ležícím, jest dle §. VIII. vz. 3. žádaná jeho rovnice:

$$y = \frac{y'}{x' - {}^1/_2 p}(x - {}^1/_2 p), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

3. *Úloha.* Najdi délku průvodiče $FM = r$. (Obr. 96.).

Řeš. Dle výměru paraboly jest $FM = RM$; dále jest $RM = DP = DA + AP = {}^1/_2 p + x$; pročež

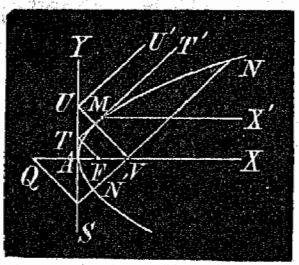
$$r = {}^1/_2 p + x, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Výsledek. Průvodiče přibývá od vrchole, kdež délka jeho jest nejmenší $r = {}^1/_2 p$, do nekonečna, jakož x od 0 do ∞ vzrůstá.

§. XLIX.

Parabola a přímka.

(obr. 101.)



1. *Úloha.* Vyzpytuj, zdali přímka parabolu protíná a v kolika bodech. (Obr. 101.).

Řeš. Vrcholová rovnice paraboly jest

$$y^2 = 2px, \quad \ldots \ldots \quad \alpha)$$

Rovnice přímky nějaké

$$y = Ax + u, \quad \ldots \ldots \quad \beta)$$

Společným přímce a parabole bodům náležejí rovnice obě pospolu.

Vyloučíme-li y, vyjde rovnice:

$$A^2x^2 + 2(Au - p)x + u^2 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \gamma)$$

v níž x znamená úsečku bodu průsečného, kdežto pak y v rovnici $\beta)$ téhož bodu pořadnici udává.

Sluší však rozeznávati dva případy: $A^2 \gtreqless 0$.

a) Je-li $A^2 = 0$, jest přímka β) s osou paraboly rovnoběžná, a tehdy sklesne γ) na rovnici stupně prvého, z níž najdeme jedinou úsečku $x = \frac{u^2}{2p}$, a k ní příslušnou z β) pořadnici $y = 0$; t. j. přímka MX' s osou paraboly rovnoběžná protíná parabolu v jediném bodě M.

b) Je-li $A^2 > 0$, najdeme rovnici γ) rozřešivše za úsečku průseku:

$$x = \frac{p - Au}{A^2} \pm \frac{1}{A^2}\sqrt{p(p - 2Au)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta)$$

Zde opět sluší rozeznávati případů tré: $p - 2Au \gtreqless 0$.

α) Je-li $p - 2Au > 0$, protíná přímka NN' parabolu ve dvou bodech N a N' rozličných.

β) Je-li $p - 2Au = 0$, má přímka TT' s parabolou jediný bod M společný, dotýkajíc se jí (čili: přímce a parabole jsou společnými dva body v jediný bod splynulé).

γ) Je-li $p - 2Au < 0$, stane se x pomyslným, a přímka mine parabolu.

Abychom se dopídili geometrického smyslu těchto výmínek, buď S průsek přímky NN' s y-ovou osou, pročež $AS = u$; dále buď $SQ \perp N'N$, pročež tang $ASQ = A$; i bude $\frac{AQ}{AS} =$ tang ASQ, tedy $AQ = A.u$. I pravíme:

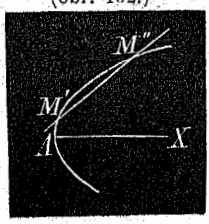
Padne-li pata kolmice, která se na přímku v jejím s y-ovou osou průseku postaví, do ohniska F, jest přímka TT' tečná; padne-li na x-ové ose pata řečená před ohnisko (k. p. do bodu Q), jest přímka $N'N$ sečnou; a padne-li za ohnisko (do bodu V), mine přímka UU' parabolu.

§. L.

O tečné a normále.

1. *Úloha.* Najdi rovnici přímky, které parabolu protíná ve dvou bodech daných $M'(=x_1 y_1)$ a $M''(=x_2 y_2)$. Obr. 102.

(obr. 102.)



Řeš. Vrcholová rovnice paraboly jest

$$y^2 = 2px, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

Rovnice přímky $M'M''$, která prochází bodoma $(x_1 y_1)$ a $(x_2 y_2)$, jest:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), \quad \ldots \ldots \ldots \quad \beta)$$

a ježto tyto dva body na parabole leží, platí o nich rovnice α), tedy:

$$y_1^2 = 2px_1, \qquad y_2^2 = 2px_2; \quad \ldots \ldots \ldots \quad \gamma)$$

Rozdíl rovnic γ) jest:

$$y_1^2 - y_2^2 = 2p(x_1 - x_2), \quad \ldots \ldots \ldots \quad \delta)$$

odkudž dostaneme, pomníce, že jest $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$:

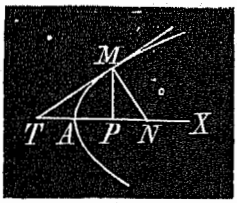
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \varepsilon)$$

Z rovnic β) a ε) vyplývá rovnice žádaná:

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1 + y_2}(x - x_1), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

2. *Úloha.* Najdi rovnici tečné TM, dán-li bod dotyčný $M(= x_1 y_1)$.

(obr. 103.)



Řeš. Sečná $M'M''$ (obr. 102.) přechází v tečnou TM (obr. 103.), splynou-li oba společné body M' a M'' v jediný M. Pročež položíce v rovnici 1) $y_2 = y_1$, dostaneme rovnici žádanou:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1), \quad \ldots \quad 2)$$

kterážto pomocí rovnice $y_1^2 = 2px_1$, dá se uvésti také na dobu:

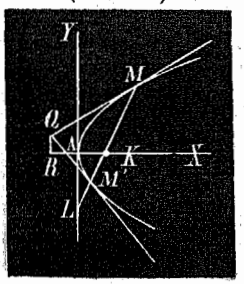
$$y_1 y = p(x + x_1), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Směrnice tečné jest $A = \frac{p}{y_1}$, $\quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$

Přídavek. Položíme-li v rovnici 3) $y = 0$, bude $x = -x_1$, t. j. $AT = -AP$.

Sestrojíš tedy tečnou, dán-li bod dotyčný M (obr. 103) takto: Spusť pořadnici $MP \perp AX$; sřízni $AT = PA$, a veď přímku TM, kteráž jest pak tečná.

(obr. 104.)



3. *Úloha.* Najdi rovnici tečné, která se vede z daného bodu $Q(= x'y')$ k parabole. (Obr. 104.)

Řeš. Souřadnice bodu dotyčného znamenajíce písmeny ξ a η máme dle vz. 3) rovnici tečné:

$$\eta y = p(x + \xi), \quad \ldots \ldots \quad \alpha)$$

Abychom souřadnice ξ a η určili, vzpo-

meňme, že dotyčný bod leží na parabole, a že tečná prochází daným bodem $Q(=x'y')$.

Z příčiny první jest $\eta^2 = 2p\xi$, ... β)

Z příčiny druhé platí rovnice α) i o bodě $(x'y')$, tedy

$$\eta y' = p(x' + \xi), \quad \ldots \ldots \ldots \quad \gamma)$$

Z rovnic β) a γ), rozřešíme-li, dostaneme pořadnici dotyčného bodu

$$\eta = y' \pm \sqrt{y'^2 - 2px'}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \delta)$$

Úsečka ξ téhož bodu udá se pak z rovnice γ). Majíce pak hodnoty ξ a η nalezené, dosadíme do rovnice α), čímž úloha rozřešena jest.

Však sluší rozeznávati případů tré: $y'^2 \gtreqless 2px'$.

a) Je-li $y'^2 > 2px'$, leží bod Q *vně* paraboly, i dostaneme za pořadnici η a proto i za úsečku ξ hodnoty dvě: i zahrnuje v sobě rovnice α) vlastně dvé rozličných rovnic, z nichž každá k jiné tečné náleží. — Z bodu Q *vně* paraboly ležícího dá se tedy ku parabole vésti dvé tečných QM i QM'.

b) Je-li $y'^2 = 2px'$, leží bod Q na parabole i splyne s bodem M: i vychází $\eta = y'$, $\xi = x'$; z rovnic α) vznikne pak pouze jedna rovnice $y'y = p(x + x')$, t. j. bodem na parabole ležícím lze vésti jen jednu tečnou.

c) Je-li $y'^2 < 2px'$, stanou se souřadnice η a ξ pomyslnými; t. j. bodem uvnitř paraboly ležícím nedá se k parabole vésti tečná.

4. *Úloha.* Najdi rovnici, jež náleží tětivě (MM') tečných $(QM$ a $QM')$ z bodu Q $(=x'y')$ k parabole vedených. (Obr. 104.)

Řeš. Rovnice γ) v předešlém odstavci:

$$\eta y' = p(x' + \xi)$$

platí o souřadnicích (ξ, η) bodu dotyčného M i M' dvou tečných QM i QM' z bodu Q $(=x'y')$ k parabole vedených: pročež dle §. VIII. 3. platí o celé přímce MM'. Kladouce tedy x a y místo ξ a η, obdržíme rovnici žádanou

$$y'y = p(x + x'), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Přídavek. V rovnici 5) položíme-li jednou $y = 0$, podruhé $x = 0$; vyjde ponejprv $x = -x$, a potom $y = -\frac{px'}{y'}$. Sestrojíme-li tedy $QR \perp AX$, $AK = RA$, $AL = p \cdot \frac{AR}{RQ}$; a vedeme-li bodoma L i K přímku, dostaneme tětivu tečných, a tím i body do-

tyčné M i M', k nimž pak z bodu Q vedené přímky jsou tečnými paraboly.

5. *Úloha.* Najdi rovnici normaly, dána-li pata její M $(=x_1 y_1)$ na parabole. (Obr. 103.)

Řeš. Ježto normála MN bodem M $(=x_1 y_1)$ prochází, zní rovnice její:

$$y - y_1 = A'(x - x_1); \quad \ldots \ldots \ldots \quad \alpha)$$

a poněvadž na tečné bodem M vedené kolmo strmí, a směrnice tečné této jest $A = \frac{p}{y_1}$, pročež musí býti $A' = -\frac{y_1}{p}$, a tím rovnice žádaná

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

Přídavek. Za $y = 0$ v rovn. 6) vyjde $x = p + x' = AN$.

6. *Úloha.* Najdi délku subnormaly PN, subtangenty PT, normaly $MN = n$ a tangenty $MT = t$. (Obr. 103.)

Řeš. Směrnice tečné jest dle vz. 4) $A = \frac{p}{y}$; . . . . $\alpha)$

a směrnice normaly dle vz. 6) $A' = -\frac{y}{p}$; . . . $\beta)$

znamenají-li x a y souřadnice bodu dotyčného M.

Dle §. XIV. budou tedy žádaných přímek délky:

$$PN = \text{subn} = p, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

$$PT = \text{subt} = -2x, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

$$n = \sqrt{p^2 + y^2} = \sqrt{2p(x + {}^1/_2 p)} = \sqrt{2pr}, \quad \ldots \quad 9)$$

$$t = \sqrt{y^2 + 4x^2} = \sqrt{4x({}^1/_2 p + x)} = 2\sqrt{rx}, \quad \ldots \quad 10)$$

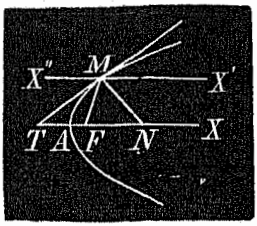
7. Bod dotyčný M a průseky T a N osy s tečnou a s normalou leží na obvodě kruhu, jehož středem jest ohnisko F. (Obr. 103.)

Důkaz. Dle vz. 7) jest $PN = p$; dále jest $FP = AP - AF = x - {}^1/_2 p$, pročež $FN = FP + PN = x + {}^1/_2 p = r$. — Rozdíl rovnic 7) a 8) vydá $PN - PT = 2x + p$, tedy $TN = 2x + p$; odečteme-li odtud $FN = x + {}^1/_2 p$, vyjde opět $TF = x + {}^1/_2 p = r$: pročež $TF = FN = FM$.

Výsledek. Tím se dává na ruku jiný způsob, kterak se sestrojí tečná a normála, dán-li bod dotyčný M. Poloměrem FM opíšeme kolem ohniska F kruh, jenž protne osu v bodech T a N: přímky TM a NM jsou žádané.

8. *Úloha.* Najdi úhel, jejž svírá tečná s průvodičem. (Obr. 105.)

obr. 105.



Řeš. Buď AX osa, F ohnisko, M bod dotyčný, FM průvodič, TM tečná; i klaďme $\sphericalangle TMF = \mu$, $\sphericalangle XFM = \varphi$, $\sphericalangle XTM = \tau$. Jest pak $\mu = \varphi - \tau$; a

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\tau}{1 + \operatorname{tang}\varphi \,.\, \operatorname{tang}\tau}; \quad \ldots \quad \alpha)$$

Jsou-li x a y souřadnice dotyčného bodu M, jest dle vz. 2) směrnice tečné:

$$\operatorname{tang}\tau = \frac{p}{y}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

a směrnice průvodiče dle §. XLVIII. vz. I.

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x - {}^1/_2 p}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \gamma)$$

Tyto hodnoty dosadíme-li do vz. α), a dosadivše zjednodušíme-li výsledek pomocí rovnice $y^2 = 2px$, dostaneme žádaný úhel μ:

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{p}{y}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Porovnáme-li 11) s β), jest patrno $\tau = \mu$, pročež i $TM = TF$, což se srovnává s odst. 7.

I můžeme říci:

Úhly tečné s osou a s průvodičem působené jsou si rovny; a proto také úhly normály s osou a s průvodičem působené jsou si rovny.

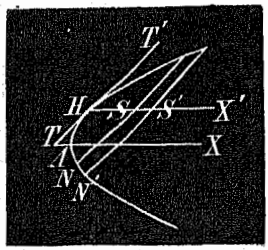
Přídavek. Tento výsledek dává následující pravidlo k sestrojení tečné a normaly v daném bodě dotyčném: Bodem dotyčným M veď přímku $X''X' \parallel AX$, a průvodič MF; rozpol úhly $X''MF$ a $X'MF$ přímkama MT a MN, z nichž pak prvá jest tečná, druhá normála.

§. LI.

O průměrech paraboly.

1. *Úloha.* Najdi rovnici geometrického místa, jímž se v parabole rozpoluje pásmo tětiv rovnoběžných (MN, $M'N'$ atd.) Obr. 106.

obr. 106.



Řeš. Vrcholová rovnice paraboly jest

$$y^2 = 2px, \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

Rovnice přímky MN:

$$y = Ax + u, \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$

jest rovnicí celého pásma tětiv rovnoběžných $MN \| M'N' \|$ atd., máme-li veličinu u za měnlivou.

Z rovnic α) a β) vymýtíme-li y, dostaneme o úsečce x krajných tětivy bodů M a N rovnici:

$$x^2 + 2 . \frac{Au - p}{A^2} x + \frac{u^2}{A^2} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \gamma)$$

Kořeny x_1 a x_2 této rovnice jsou úsečkama bodu M a N i platí o nich závislost:

$$x_1 + x_2 = -2 . \frac{Au - p}{A^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \delta)$$

Znamenají-li ξ a η souřadnice bodu S, jimž se tětiva MN rozpoluje, jest dle §. V. vz. 14):

$$\xi = {}^1/_2 (x_1 + x_2), \quad \ldots \ldots \ldots \quad \varepsilon)$$

Z rovnic δ) a ε) nabýváme:

$$\xi = -\frac{Au - p}{A^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \zeta)$$

a ježto bod S na tětivě MN leží, platí o něm rovnice β), tedy:

$$\eta = A\xi + u, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \eta)$$

Vymýtíme-li u z posledních dvou rovnic, a píšeme-li x, y místo ξ, η; vyjde žádaná rovnice:

$$y = \frac{p}{A}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Hledané místo jest tedy přímka HX' s osou paraboly rovnoběžná; i jest ona průměrem paraboly.

Průměr HX' a tětivy jím půlené slovou *k sobě přidruženými.*

2. Z rovnice 1) jde $A = \frac{p}{y}$, $\ldots \ldots \ldots$ 2)

Dle §. L. vz. 4. jest ale $\frac{p}{y}$ směrnice tečné vedené na parabolu v bodě H od osy o y vzdáleném. Z toho soudíme:

Tečná TT' na konci H průměru HX' k parabole vedená jest s přidruženými tětivami (MN, $M'N'$ atd.) rovnoběžná.

3. Poněvadž každý průměr paraboly jest rovnoběžný s osou, budou přidružené tětivy jen tehdy na něm kolmo, když jest $A = \infty$, a rovnice takového průměru bude $y = 0$. Tento průměr nazývá se *hlavním*, jinak osou. Parabola má osu jedinou.

4. Výsledky, jichž jsme nabyli, dávají na ruku pravidla k sestrojovacímu řešení některých úloh, z nichž zde klademe:

a) Sestroj na danou parabolu tečnou, dán-li směr její.

Řeš. Veď daným směrem dvé rovnoběžných tětiv MN a $M'N'$ (obr. 106.), rozpol je v bodech S a S', rozpolovacími body veď průměr HX'. V průsečném bodě H průměru a paraboly veď rovnoběžně s tětivami přímku $TT' \parallel MN$, kteráž bude tečnou.

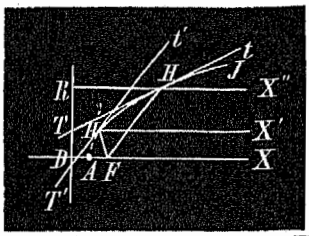
Pozn. V tomto řešení obsaženo jest též řešení úlohy, vésti nějaký průměr vůbec.

b) Sestroj průměr, dán-li průsečný jeho bod na oblouku paraboly.

Řeš. Sestroj nejprv průměr jakýkoliv; a pak daným bodem veď přímku s prvním průměrem rovnoběžnou; ta jest žádaným průměrem.

c) Najdi polohu osy a ohnisko, vrchol a parameter paraboly, dán-li oblouk její $H'HJ$ (obr. 107.).

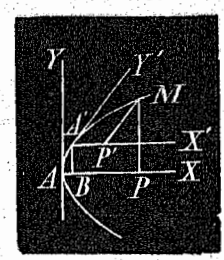
obr. 107.



Řeš. Sestroj dva průměry HX'' a $H'X'$ a přidružené k nim tečné Tt a $T't'$, sestrojiv dříve dle a) dvakrát dvé rovnoběžných tětiv. Dotyčnýma body H a H' veď dvě přímky HF a $H'F$, tak aby bylo $\sphericalangle THF = \sphericalangle X''Ht$, $\sphericalangle T'H'F = \sphericalangle X'H't'$: průsek F obou přímek jest ohnisko, a přímka DX ohniskem rovnoběžně s průměry HX'' a $H'X'$ vedená osa paraboly. — Prodlouživ průměr $X''H$, a učiniv $HR = HF$, spusť $RD \perp DX$, i bude DR ředitelkou, DF polovičným parametrem, a rozpolovací bod A ($DA = AF$) vrcholem paraboly.

5. *Úloha.* Najdi rovnici paraboly, je-li některý průměr $A'X'$ osou x-ovou, a přidružená tečná $A'Y'$ osou y-ovou. (Obr. 108.).

obr. 108.



Řeš. Vrcholová rovnice paraboly buď

$$y^2 = 2px, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

Souřadnice nového počátku A' buďte $AB = a$, $BA' = b$; i platí o nich rovnice α), protože bod A' na parabole leží. Jest tedy

$$b^2 = 2pa, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

Klademe-li $\sphericalangle X'AY' = \alpha$; jest dle §. I. vz. 4), směrnice tečné $A'Y'$.

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{p}{b}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \gamma)$$

pročež $\quad b \,.\, \sin \alpha = p \,.\, \cos \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \delta)$

Znamenáme-li nové souřadnice $A'P'$ a $P'M$ kteréhokoliv na parabole hodu M písmeny x' a y', bude dle §. IV. vz. 10):

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' + y' \,.\, \cos\alpha \\ y &= b + y' \,.\, \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon)$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do vz. α), vyjde:

$$b^2 + 2by' \,.\, \sin\alpha + y'^2 \,.\, \sin^2\alpha = 2ap + 2px' + 2py' \,.\, \cos\alpha, \quad \ldots \quad \zeta)$$

Znásobíme-li rovnici δ) činitelem $2y'$, a znásobivše přičteme-li ji k rovnici β), dostaneme:

$$b^2 + 2by' \,.\, \sin\alpha = 2ap + 2py' \,.\, \cos\alpha, \quad \ldots\ldots \quad \eta)$$

Tuto rovnici odečteme-li od rovnice ζ), obdržíme čárky vynechávajíce, rovnici žádanou

$$y^2 = \frac{2p}{\sin^2\alpha} \,.\, x, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

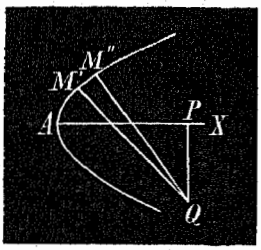
aneb $$y^2 = 2qx, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

položíme-li $\frac{p}{\sin^2\alpha} = q$, $\ldots\ldots\ldots\ldots$ 5)

§. LII.

O křivosti paraboly.

obr. 109.



1. *Úloha.* Najdi průsečný bod dvou normal, jejichž na parabole paty $M'(=x_1y_1)$ a $M''(x_2y_2)$ dány jsou. (Obr. 109.)

Řeš. Rovnice normaly $M'Q$ dle §. L. vz. 6) jest:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \quad \ldots \quad \alpha)$$

podobně rovnice druhé normály $M''Q$:

$$y - y_2 = -\frac{y_2}{p}(x - x_2), \quad \ldots\ldots\ldots \quad \beta)$$

O průsečném obou normal bodě Q platí tyto rovnice pospolu. Vymýtíme-li z nich y, dostaneme hodnotu úsečky AP témuž průseku Q náležející:

$$x = p + \frac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1 - y_2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \gamma)$$

aneb $$x = p + x_1 + y_2 \,.\, \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \delta)$$

poněvadž jest $x_1y_1 - x_2y_2 = x_1(y_1 - y_2) + y_2(x_1 - x_2)$.

Dle §. L. odst. 1. vz. ε) jest ale při parabole:

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{y_1 + y_2}{2p}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \varepsilon)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do δ), vyjde posléz

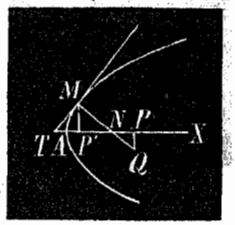
$$x = p + x_1 + \frac{(y_1 + y_2) y_2}{2p}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu za x do rovnice α) neb β), najdeme pořadnici PQ téhož bodu průsečného:

$$y = -\frac{y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{2p^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

2. *Úloha.* Najdi střed křivosti, již má parabola v bodě daném M $(x_1 y_1)$. Obr. 110.

(obr. 110.)



Řeš. Položíme-li v rovnicích 1) a 2) $y_1 = y_2$, čímž oběma bodům dotýčným M' a M'' v obr. 109. v jediný bod M (obr. 110) splynouti dáváme, a užijeme-li zjednodušujíce rovnice paraboly $y_1^2 = 2px_1$; dostaneme souřadnice AP a PQ žádaného středu Q:

$$AP = x = p + 3x_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

$$PQ = y = -\frac{y_1^3}{p^2} = -\frac{2x_1 y_1}{p}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Přídavek. Rovnice 3) dá se psáti: $x = p + x' + 2x'$; dle §. LI. vz. 5. jest $AN = p + x'$; a dle §. L. vz. 8. jest $TP' = 2x'$, pročež musí býti $NP = TP'$. Sestrojivše tedy dotýčného bodu tečnou MT, normalu MN a pořadnici MP', sřízneme-li $NP = TP'$, bude $AP = x$ úsečkou středu křivosti. A ježto týž střed na prodloužené normále a na své pořadnici PQ leží: bude průsek Q těchto dvou přímek střed hledaný.

3. *Úloha.* Najdi poloměr $MQ = k$ křivosti, již má parabola v bodě daném $M(x_1 y_1)$. Obr. 110.

Řeš. Majíce z rovnic 3) a 4) souřadnice x a y příslušného středu Q křivosti, najdeme žádaný poloměr k dle §. V. vz. 3.

$$k = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \alpha)$$

Dosadíme-li do α) za x a za y hodnoty jejich z rovnic 3) a 4), a dosadivše vymýtíme-li x' pomocí rovnice $y_1^2 = 2px_1$; vyjde hodnota žádaného poloměru:

$$k = \frac{\sqrt{(p^2 + y_1^2)^3}}{p^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Vymýtíme-li ale y_1; nabudeme

$$k = (p + 2x_1)\sqrt{\frac{p+2x_1}{p}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

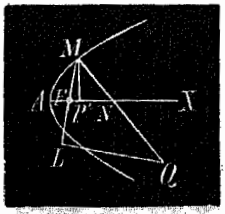
Zavedeme-li průvodič $r = \frac{1}{2}p + x_1$ místo x_1; dostaneme

$$k = 2r\sqrt{\frac{2r}{p}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Zavedeme-li ale normalu $n^2 = p^2 + y_1^2$, vyjde:

$$k = \frac{n^3}{p^2} = \frac{2r \cdot n}{p}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

obr. 111.

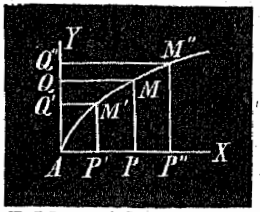


Přídavek. Rovnice $k = \frac{2r \cdot n}{p}$ poskytuje pravidlo k snadnému sestrojení středu i poloměru křivosti: Veď z dotyčného bodu M (obr. 111.) průvodič MF, pořadnici MP' a normalu MN; prodluž průvodič na dvojnásobnou délku $ML = 2r$, postav kolmou $LQ \perp ML$, jejížto s prodlouženou normalou průsek Q jest střed křivosti, a $MQ = k$. Neboť $\sphericalangle FNM = \sphericalangle NMF$ (§. L. odst. 8.), pročež $\triangle MP'N \sim \triangle QLM$, odtud $MQ : MN = ML : P'N$; jest ale $MN = n$, $ML = 2r$, $P'N = p$ (§. L. vz. 7.), tedy $MQ = \frac{2rn}{p}$.

§. LIII.

O ploském obsahu paraboly.

obr. 112.



Úloha. Najdi obsah plochy obmezené pravoúhlými souřadnicemi a obloukem paraboly. Obr. 112.

Řeš. Ze dvou na parabole bodů M' a M'' neskonale si blízkých, spusťme na osu AX i na osu pořadnic AY kolmice, i klaďme $AP' = Q'M' = x'$, $AP'' = Q''M'' = x''$; $P'M' = AQ' = y'$, $P''M'' = AQ'' = y''$. — Ježto body M' a M'' neskonale jsou si blízko, smíme oblouček paraboly $M'MM''$ míti za přímku, a ploské obrazce $P'P''M''M' = T_1$; $Q'Q''M''M = t_1$ za lichoběžníky. I bude ploský obsah jejich:

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(x'' - x')(y'' + y'),$$
$$t_1 = \tfrac{1}{2}(y'' - y')(x'' + x');$$

Poměr ploských obsahů jejich bude tedy:

$$\frac{t_1}{T_1} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'}.$$

Dle §. L. odst. 1. vz. ε) jest při parabole:

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2p}{y'' + y};$$

pročež jest řečený poměr:

$$\frac{t_1}{T_1} = \frac{2p\,(x'' + x')}{(y'' + y')^2};$$

Rozpolíme-li oblouček $M'M''$ neskonale krátký, jejž za *přímku* máme, bodem M, a jsou-li $QM = y$, $PM = x$ souřadnice rozpolovacího bodu M: jest $x'' + x' = 2x$, $y'' + y' = 2y$: tím se hořejší poměr zjednoduší na dobu:

$$\frac{t_1}{T_1} = \frac{px}{y^2},$$

a ježto jest $y^2 = 2px$, vyjde posléz

$$\frac{t_1}{T_1} = \frac{1}{2}, \text{ aneb } T_1 = 2t_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Rozdělíme-li celou plochu APM i plochu AQM na samé takovéto lichoběžníky, bude:

$$T_1 = 2t_1;\ T_2 = 2t_2;\ T_3 = 2t_3;\ \ldots T_n = 2t_n;$$

pročež sečteme-li:

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = 2\,(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n)$$

t. j. $APM = 2 \,.\, AQM$,

tedy přičteme-li k oběma stranám $2 \,.\, APM$

$$3 \,.\, APM = 2\,(AQM + APM) = 2\,APMQ.$$

Jest ale $APMQ = x \,.\, y$,

Z toho vyplývá: $APM = {}^2/_3 xy$, ... 2)

Závěrek.

§. LIV.

O geometrických místech obecné rovnice druhého stupně.

1. Rovnice kruhu, ellipsy, hyperboly, paraboly jsou vesměs algebraické stupně druhého, a proto řečené křivky slovou algebraické stupně druhého.

Že mimo jmenované není jiných křivek algebraických stupně druhého, dokázati jest účelem závěrku tohoto.

2. Nejobecnější doba algebraické rovnice stupně druhého mezi plynulými souřadnicemi rovnoběžnými zní:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + 2dy + 2ex + \triangle = 0, \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

V ní jsou A, B, C součinitele číselné, d a e činitele linearné, $\triangle$ člen o dvou rozměrech, veličiny vesměs skutečné (realné), jinak ale buď kladné neb záporné neb i nule rovné.

Jsou-li původní souřadnice kosoúhlé, lze zavesti pravoúhlé (pomocí §. IV. vz. 8.), čímž se stupeň rovnice 1) ani doba její nezmění, leč že činitele A, B, C, d, e, $\triangle$ jiných hodnot nabudou. Proto obecnosti nepozbývajíce můžeme rovnici 1) vztahovati k osnově souřadnic *pravoúhlých*.

3. Z rovnice 1) dá se součin xy z obou plynulých souřadnic novou změnou osnovy vybaviti. Zachovávajíce původní počátek souřadnic pootočíme-li osy jednostejným směrem o úhel α; musíme, abychom rovnici 1) k nové osnově přidobili, klásti (dle § IV. vz. 7.) $x.\cos\alpha - y.\sin\alpha$ místo x; a $x.\sin\alpha + y.\cos\alpha$ místo y. Učinivše tak srovnáme-li výsledek, vyjde:

$$\left.\begin{array}{l}(A.\cos^2\alpha - B.\sin\alpha.\cos\alpha + C.\sin^2\alpha)y^2 \\ +(B.\cos 2\alpha + [A-C].\sin 2\alpha)xy \\ +(A.\sin^2\alpha + B.\sin\alpha.\cos\alpha + C.\cos^2\alpha)x^2 \\ +2(d.\cos\alpha - e.\sin\alpha).y + 2(d.\sin\alpha + e.\cos\alpha)x + \triangle\end{array}\right\} = 0, \quad . \quad \alpha)$$

Aby součin xy zmizel, musí býti

$$B.\cos 2\alpha + (A - C).\sin 2\alpha = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$

tedy

$$\tang 2\alpha = -\frac{B}{A - C}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Klademe-li ještě zkrátka:

$$\left.\begin{array}{l}A.\cos^2\alpha - B.\sin\alpha.\cos\alpha + C.\sin^2\alpha = G, \\ A.\sin^2\alpha + B.\sin\alpha.\cos\alpha + C.\cos^2\alpha = H, \end{array}\right\} \gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l}d.\cos\alpha - e.\sin\alpha = g, \\ d.\sin\alpha + e.\cos\alpha = h, \end{array}\right\} \delta)$$

dostaneme za rovnici α) rovnici jednodušší křivek druhého stupně zcela obecnou:

$$Gy^2 + Hx^2 + 2gy + 2hx + \triangle = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

4. Chtějíce určiti činitele G, H, g, h stálými činiteli původními: sečtěme rovnice γ), i bude

$$G + H = A + C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon)$$

Rozdíl řečených rovnic vydá

$$G - H = (A - C)\cos 2\alpha - B \sin 2\alpha,$$

a vymýtíme-li pomocí β) neb 2) úhel α:

$$G - H = \sqrt{B^2 + (A - C)^2}, \quad \ldots \ldots \quad \zeta)$$

Z ε) a ζ) najdeme:

$$G = \tfrac{1}{2}[A + C + \sqrt{B^2 + (A - C)^2}], \quad \ldots \quad 4)$$

$$H = \tfrac{1}{2}[A + C - \sqrt{B^2 + (A - C)^2}], \quad \ldots \quad 5)$$

Součet zčtvercovaných rovnic δ) vydá:

$$g^2 + h^2 = d^2 + e^2, \quad \ldots \ldots \quad \eta)$$

a rozdíl jejich též zčtvercovaných:

$$g^2 - h^2 = (d^2 - e^2) . \cos 2\alpha - 2de . \sin 2\alpha,$$

a vymýtíme-li pomocí β) neb 2) úhel α:

$$g^2 - h^2 = \frac{(d^2 - e^2)(A - C) + 2B . de}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}, \quad \ldots \quad \vartheta)$$

Z rovnic η) a ϑ) dají se snadno g^2 a h^2 původními činiteli vyjádřiti.

Příd. Součin z rovnic 4) a 5) čtvernásobný jest:

$$4G . H = 4A . C - B^2, \quad \ldots \ldots \quad 6)$$

Součin z rovnic δ) zdvojnásobený jest:

$$2gh = 2de . \cos 2\alpha + (d^2 - e^2) . \sin 2\alpha$$

a vymýtíme-li úhel α:

$$2gh = \frac{2de . (A - C) - B(d^2 - e^2)}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}, \quad \ldots \quad 7)$$

Přídav. 2. Rovnice 6) velí rozeznávati tré případů:

α) $4AC - B^2 = 0$; pak jest $G . H = 0$, $G = A - C$; $H = 0$,

β) $4AC - B^2 > 0$; pak jest $G\ H > 0$, a oba činitele G i H mají jednostejná znamení;

γ) $4AC - B^2 < 0$; pak jest $G . H < 0$, a činitelé G i H mají protivná znamení.

5. Rovnice 3) dá se převesti na doby ještě jednodušší. K tomu zachovávajíce směr os zvolme za počátek souřadnic bod, jehož souřadnice posud neurčité buďte u a v. Tehdy dle §. IV. vz. 1. do rovnice 3) kladouce $x + u$ místo x, a $y + v$ místo y, dostaneme:

$$\left.\begin{array}{l} Gy^2 + Hx^2 + 2(Gv + g)y + 2(Hu + h)x + \varDelta = 0, \quad \ldots \\ \text{kdežto znamená } \varDelta: \\ \qquad \varDelta = Gv^2 + Hu^2 + 2gv + 2hu + \triangle, \quad \ldots \end{array}\right\} \quad 8)$$

I. Je-li $H = 0$, $h \gtrless 0$, bude z rovnic 8):

$$Gy^2 + 2(Gv + g)y + 2hx + \varDelta = 0,$$

$$\varDelta = Gv^2 + 2gv + 2hu + \triangle.$$

Zvolíme-li počátek souřadnic tak, aby bylo $Gv+g=0$, $A=0$, ku kterémuž konci třeba míti

$$v=-\frac{g}{G},\quad u=\frac{g^2-G\triangle}{2hG}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

a klademe-li

$$\frac{h}{G}=-p, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

zjednoduší se rovnice křivky, nabudouc doby:

$$y^2=2px, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Z čehož vysvítá, že křivka jest *parabolou.*

Pozn. Chceme-li míti p kladné, a mají-li veličiny h a G svorná znamení, jest třeba v rovnici 10) x vesměs za záporné míti; t. j. parabola tehdy leží celá na záporné straně osy y-ové.

Přídavek 1. Je-li ale kromě $H=0$, také $h=0$; stane se z rovnic 8):

$$Gy^2+2(Gv+g)y+A=0,$$
$$A=Gv^2+2gv+\triangle.$$

A položíme-li $Gv+g=0$, tedy $A=\frac{G\triangle-g^2}{G}$; dostaneme z rovnice 3)

$$G^2y^2+G\triangle-g^2=0$$

odtud

$$y=\pm\frac{1}{G}\sqrt{g^2-G\triangle}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Tato rovnice náleží ku dvěma přímkám rovnoběžným, na něž parabola se zvrhla; a sice ku skutečným (realným), je-li $g^2-G\triangle>0$, k skutečným v jedinou splývajícím, je-li $g^2-G\triangle=0$ a k výbočným (pomyslným), je-li $g^2-G\triangle<0$.

Přídavek 2. Kdykoliv tedy jest v původní rovnici 1) $B^2-4AC=0$, jest čára k ní příslušná parabolou, pokud se výminkou na přímky nezvrhne.

II. Není-li ale $H=0$, můžeme první mocnosti plynulých souřadnic z rovnice 8) vyloučiti, položíme-li

$$Gv+g=0, \qquad Hu+h=0$$

pročež

$$v=-\frac{g}{G}, \qquad u=-\frac{h}{H},$$

čímž se stane

$$A=\triangle-\frac{g^2}{G}-\frac{h^2}{H}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varkappa)$$

a rovnice 8) bude pak znítí:

$$Gy^2+Hx^2+A=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Člen A chtějíce určiti z činitelů v rovnici 1) původních máme nejprv z rovnice $\varkappa$),

$$4.G.H.A = 4.G.H.\triangle - 4.H.g^2 - 4G.h^2$$

což jest jednostejné s rovnicí

$$4GHA = 4G.H.\triangle + 2(G-H)(g^2-h^2) - 2(G+H)(g^2+h^2),$$ a

dosadíme-li z rovnic ε), ζ), η), ϑ) a 6) příslušné hodnoty:

vyjde: $$A = \frac{\triangle.(B^2-4AC)+4(Ae^2+Cd^2-Bde)}{B^2-4AC}, \quad . \quad . \quad 13)$$

Rozjímajíce o rovnici 12) dále rozeznávejme dva případy: $GH > 0$, $GH < 0$, čili $4AC - B^2 > 0$, $4AC - B^2 < 0$.

A) Je-li $4AC - B^2 > 0$, tedy $GH > 0$, mají oba činitelé G i H svorná znamení. — Tu však opět rozeznávejme případů tré: $A : G \gtreqless 0$; a tím také $A : H \gtreqless 0$.

a) Je-li $\frac{A}{G} < 0$, $\frac{A}{H} < 0$: můžeme klásti $\frac{A}{G} = -b^2$; $\frac{A}{H} = -a^2$, a tyto hodnoty zavedeme-li do rovnice 13) nabudeme

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

rovnice ellipsy. Ellipsa tato bude *kruhem*, když jest $b = a$, tedy $G = H$, k čemuž aby rovnice ζ) obstála, jest třeba $B = 0$, $A - C = 0$.

b) Je-li $A = 0$, učiní se rovnici 12) zadost jen tehdy, když jest $x = 0$, $y = 0$, t. j. ellipsa smrští se v jediný bod, a to v střed svůj.

c) Je-li $\frac{A}{G} > 0$, $\frac{A}{H} > 0$, můžeme položiti $\frac{A}{G} = b^2$, $\frac{A}{H} = a^2$, tím pak nabude rovnice 12) doby

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0,$$

kteréžto neučiní zadost realné hodnoty plynulých souřadnic, i nazývá se její geometrické místo ellipsou pomyslnou.

B) Je-li $4AC - B^2 < 0$, tedy $GH < 0$, mají činitelé G a H znamení protivná. I rozeznávejme opět dva případy:

a) Není-li $A = 0$, má A s jedním činitelem k. p. s činitelem G stejná znamení, s činitelem druhým H znamení protivná: jest tehdy $\frac{A}{G} > 0$, $\frac{A}{H} < 0$, i můžeme položiti $\frac{A}{G} = b^2$, $\frac{A}{H} = -a^2$; tím stane se z rovnice 12)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

Kdyby naopak bylo $\frac{A}{G} < 0, \frac{A}{H} > 0$, položili bychom $\frac{A}{G} = -a^2, \frac{A}{H} = b^2$, a osy souřadnic jakož i souřadnice x a y jednu za druhou vyměnili, čímž nám opět vyjde rovnice 15), kteráž náleží *hyperbole.*

b) Je-li ale $A = 0$, nabudeme rovnice 12) doby:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 17)$$

i náleží *dvěma přímkám* vespolek v počátku se protínajícím.

6. Tímto způsobem vyčerpali jsme všechny rozličné doby obecné rovnice druhého stupně, a shledavše za rozličná její místa geometrická z křivek pouze parabolu, ellipsu s kruhem a hyperbolu, dokázáno máme, že není křivek druhého stupně mimo tyto.

§. LV.

1. Vrcholové rovnice ellipsy, paraboly a hyperboly, jsou, jak známo:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

$$y^2 = 2px, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Z nich jest patrno, že pravoúhelník $2px$ z parametru a z úsečky při parabole *roveň* jest čtverci y^2 nad pořadnicí sestrojenému; při ellipse pravoúhelníku $2px$ do čtverce y^2 *schází* část $\frac{p}{a} x^2$, a při hyperbole z pravoúhelníka tolikéž *přebývá.* Odtud vzala původ jmena těchto křivek *parabola* (rovnice n. stejnice), *ellipsa* (schodnice), *hyperbola* (nadbytnice).

2. Rovnice 1) a 3) ellipsy a hyperboly lze psáti:

$$y = 2px \left(1 \mp \frac{x}{2a}\right); \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Za tuto rovnici lze blíživě vzíti rovnici paraboly, dokud $\frac{x}{2a}$ jest proti *1* dostatečně malé. Tato výmínka vyplní se vždy na blízku vrchole, obzvláště ale při ellipsách a hyperbolách, které mají a proti p velmi veliké, poněvadž při nich $\frac{x}{2a}$ ostává proti *1* nepatrně malé při oblouku dost dlouhém, t. ještě tehdy, když jest $x = p$.

Přídavek.

Příklady ku cvičení se v geom. analytické.

1. Na každé ze dvou přímek jest dáno po dvou bodech.
Najdi:
a) průsečný bod obou přímek;
b) výminku, aby obě přímky byly
α) buďto rovnoběžné;
β) aneb na sobě kolmo.

2. Najdi rovnici přímky, která daným bodem pevným prochází a přímku mezi jinýma dvěma danýma bodoma vedenou rozděluje v poměru daném.

3. Najdi rovnici přímky, která s jinou danou přímkou jest rovnoběžná a od ní o danou délku vzdálena.

4. Najdi rovnici přímky, která od daného pevného bodu jest o danou délku vzdálena, a kromě toho
α) buďto s jinou danou přímkou jest rovnoběžná,
β) aneb na ní kolmo strmí.

5. Najdi rovnici přímky, která se s jinýma dvěma přímkama danýma v jediném bodě protíná, a
α) buďto na jedné z nich kolmo strmí;
β) aneb od daného pevného bodu o danou délku vzdálena jest.

6. Najdi výšku trojúhelníka, jsou-li souřadnice všech tří hran jeho dány.

7. Najdi α) vrchole, β) ploský obsah trojúhelníka, jsou-li rovnice všech tří stran jeho dány.

8. Najdi geometrické místo bodu, jehož zčtvercované vzdálenosti ode dvou pevných bodů daných mají za rozdíl veličinu stálou.

9. Najdi geom. místo bodu, jehož zčtvercované vzdálenosti ode dvou pevných bodů daných mají za součet veličinu tak velikou, jako téhož bodu zčtvercované vzdálenosti ode dvou jiných pevných bodů daných spolu sečtené.

10. Najdi geom. místo bodu, jehož vzdálenosti ode dvou daných přímek mají α) za součet, aneb β) za rozdíl veličinu stálou.

11. Najdi geom. místo bodu, jehož vzdálenosti ode dvou daných přímek pevných jsou v poměru daném a stálém.

12. Najdi rovnici kruhu, dán-li jeho střed, a
α) buď jeden bod na obvodě,

β) aneb rovnice přímky, jíž se kruh má dotýkati.

13. Najdi rovnici kruhu, dány-li jsou rovnice dvou přímek, jichž se dotýkati má, a jeden bod na obvodě ležící.

14. Najdi rovnici kruhu, dány-li jsou dva body na obvodě jeho ležící a vzdálenost jeho středu od přímky, jejíž rovnice dána jest.

15. Najdi geometrické místo bodu, jehož zčtvercované vzdálenosti ode dvou (neb vůbec od n) daných bodů pevných za součet mají veličinu stálou.

16. Najdi geom. místo bodu, jehož vzdálenosti ode dvou daných bodů pevných jsou v stálém poměru daném.

17. Najdi geom. místo bodu, z něhož tečné vycházejíce ku dvěma kruhům daným byvše zčtvercovány mají za součet veličinu stálou.

18. Najdi geom. místo bodu, jímž se v poměru daném a stálém dělí paprsek vedený z pevného bodu daného k obvodu kruhu daného.

19. Krajné body tětivy dvěma kruhům společné jakož i délka společného jejich poloměru jsou dány. Najdi:

a) rovnici kruhu jednoho i druhého;

b) geom. místo bodu, jímž se rozpoluje přímka, kteráž jest vedena jedním krajným bodem společné tětivy a kterýmkoliv směrem tak daleko až dostihla obvodů jednoho i druhého kruhu.

20. Najdi geometrické místo bodu, jehož vzdálenost od daného bodu pevného rovná se tečné, která se z téhož bodu vede ke kruhu danému.

21. Najdi podmínku, aby se dva kruhy kolmo protínaly, jsou-li dány poloměry a středy jejich.

Poznam. Dva kruhy protínají se kolmo, když tečné, jež se položí společným průsekem jejich, na sobě kolmo strmí.

22. Najdi podmínku, aby obvod jednoho kruhu rozpoloval se obvodem kruhu druhého, jsou-li dány středy a poloměry jejich.

23. Dána jest rovnice kruhu K. Najdi rovnici jiného kruhu K', dán-l jeho střed, a položena-li výminka:

α) buďto aby se oba kruhy kolmo protínaly;

β) neb aby obvodem kruhu K' rozpoloval se obvod kruhu K;

γ) aneb aby obvodem kruhu K rozpoloval se obvod kruhu K'.

24. Dány jsou rovnice kruhu K a přímky P. Najdi rovnici jiného kruhu K', dán-li jeho poloměr, a položeno-li za výminky, předně aby se dotýkal přímky P, a za druhé, aby se jeho obvodem kruh K α) buď rozpoloval, aneb β) kolmo protínal.

25. Dána jest rovnice kruhu K. Najdi geometrické místo, v němž vězí střed jiného kruhu K', kterýž

α) buďto má za poloměr délku danou;

β) aneb daným bodem prochází;

γ) aneb dané přímky se dotýká;

a kromě toho zadost činí jedné z podmínek, v úloze 23. pod α), β), γ) položených.

26. Dány jsou rovnice dvou kruhů K i K', a poloměr kruhu třetího K'', jehož obvodem se obvody prvních dvou kruhu buďto rozpolují aneb kolmo protínají. Najdi rovnici kruhu třetího K''.

27. Najdi geometrické místo, v němž vězí střed kruhu, jímž se obvody dvou kruhů daných α) buď rozpolují, β) neb kolmo protínají.

28. Najdi geom. místo, v němž vězí střed kruhu K, jímž se obvod daného kruhu K' kolmo protíná, a obvod jiného daného kruhu K'' rozpoluje.

29. V daný kruh vepsány jsou nad danou pevnou tětivou trojúhelníky. Najdi geom. místo, na němž vězí:

α) těžiště každého trojúhelníka toho; aneb

β) průsek všech tří výšek jeho; aneb

γ) střed kruhu v trojúhelník ten vepsaného.

30. Najdi úhel, jejž spolu svírají průvodičové

α) ellipsy, β) hyperboly.

31. Najdi úhel, jejž svírá průvodič α) buďto s tečnou β) aneb s normalou, a sice a) buďto při ellipse, aneb b) při hyperbole, c) aneb při parabole: dána-li jest rovnice křivky příslušné. Spolu vyzpytuj, zdali a kdy úhel ten (jakož i v úloze 30.) jest pravý, ostrý, tupý, a vůbec kterak změnu béře na místech rozličných.

32. Najdi délku kolmice, kteráž jest spuštěna s ohniska a) buď ellipsy, b) neb hyperboly, c) neb paraboly

α) buďto na tečnou,

β) aneb na normalu křivky této.

33. Najdi kolmici spuštěnou s jednoho ohniska na průvodič druhému ohnisku patřící a) při ellipse, b) při hyperbole.

34. Najdi vzdálenost středu a) ellipsy, b) hyperboly od α) tečné, β) od normály, γ) od průvodiče této křivky.

35. Najdi vzdálenost středu A) ellipsy, B) hyperboly od paty kolmice, která jest spuštěna buďto a) s ohniska, aneb b) s vrchole, a sice buďto α) na tečnou, aneb β) na normálu, aneb γ) na průvodič jeden neb druhý.

36. Najdi vzdálenost vrchole A) ellipsy, B) hyperboly, C) paraboly od paty kolmice, která jest spuštěna odtamtud a tam, jako v úloze předešlé.

37. Najdi, v kterém poměru jsou vzdálenosti obou ohnisk ellipsy neb hyperboly od tečné její.

38. Dokážeš pravdu vět následujících:

a) Pobočná polouosa (ellipsy neb hyperboly) jest prostřední úměrnou mezi kolmicema s ohnisk na tečnou spuštěnýma.

b) Kolmice s ohnisk (ellipsy neb hyperboly) na tečnou spuštěné mají se k sobě, jako průvodičové z ohnisk vedené k bodu dotyčnému.

c) Dvojnásobná kolmice s ohniska paraboly na tečnou spuštěná jest prostřední úměrnou mezi parametrem a průvodičem.

d) Pravoúhelník z kolmic, které jsou s jednoho ohniska (ellipsy neb hyperboly) na tečnou a s druhého ohniska na normálu spuštěny, rovná se pravoúhelníku z délkové výstřednosti a z pořadnice bodu dotyčného.

e) Při parabole mají se vzdálenosti ohniska od normaly a od tečné, jako pořadnice bodu dotyčného se má k polovičnému parametru.

f) Vzdálenosti ohnisk (ellipsy neb hyperboly) od tečné jsou ku vzdálenostem ohnisk od normály v poměru přímém.

g) Vzdálenosti ohniska a středu (ellipsy neb hyperboly) od tečné mají se k sobě, jako příslušný průvodič k polovičné velose.

h) Rovnoběžnostěn pravoúhlý z průvodiče (ellipsy neb hyperboly), z kolmice spuštěné s ohniska druhého na tečnou a ze vzdálenosti středu od tečné jest roveň pravoúhlému rovnoběžnostěnu, jenž má čtverec menší polouosy za podstavu, a větší polouosu za výšku.

i) Kolmice s vrchole paraboly na průvodič její spuštěná má se k polovičnému parametru, jako pořadnice bodu dotyčného k dvojnásobnému průvodiči.

39. Najdi pravoúhlý průmět průvodiče a) ellipsy, b) hyperboly, c) paraboly

α) na tečnou,

β) na normálu té křivky.

40. Najdi pravoúhlý průmět A) tečné, B) normály na průvodič a) ellipsy, b) hyperboly, c) paraboly.

41. Najdi geometrické místo, v němž vězí paty kolmic spuštěných se středu A) ellipsy, B) hyperboly na průvodiče této křivky.

42. Najdi geom. místo, v němž vězí paty kolmic s ohniska A) ellipsy, B) hyperboly, C) paraboly spuštěných na tečnou této křivky.

43. Najdi geom. místo, v němž vězí paty kolmic s ohniska A) ellipsy, B) hyperboly spuštěných na průvodič k druhému ohnisku patřící.

44. Najdi geom. místo, v němž vězí paty kolmic s vrchole A) ellipsy, B) hyperboly, C) paraboly spuštěných na průvodič této křivky.

45. Najdi geometrické místo bodů, jimiž se buď a) rozpolují, aneb b) daným poměrem rozdělují α) sečné neb β) tětivy z jediného pevného i daného bodu vycházejíce a vesměs buď A) k ellipse, aneb B) k hyperbole, aneb C) k parabole dané patříce.

46. Najdi geom. místo bodu, jímž se průvodič ellipsy neb hyperboly neb paraboly buďto rozpoluje aneb v daném a stálém poměru dělí.

47. Najdi geom. místo, v němž vězí střed kruhu, jenž se dotýká obou průvodičů a hlavní osy buďto ellipsy aneb hyperboly.

48. Najdi geom. místo, v němž vězí střed kruhu, jenž se dotýká průvodiče, osy a jednoho průměru paraboly.

49. Najdi geom. místo, v němž vězí vrchol pravého úhlu, jehož ramena se dotýkají buď ellipsy, neb hyperboly, neb paraboly.

50. V ellipse neb v hyperbole stůj tětiva daná na hlavní ose kolmo; i vedena jest z jednoho konce tětivy přímka vrcholem křivky jedním, a z druhého konce jde přímka vrcholem druhým: najdi geom. místo, v němž vězí průsek obou přímek těchto.

51. Nad menší osou ellipsy aneb nad parametrem paraboly sestrojeny jsou trojúhelníky majíce vrchole na obvodě křivky té. Najdi geom. místo, v němž vězí průsek tří výšek každého trojúhelníka.

52. Z vrchole paraboly běží tětiva, na tětivě ve vrcholi strmí kolmice, a druhým koncem tětivy probíhá průměr: najdi geom. místo, v němž vězí průsek kolmice s průměrem.

53. Pravoúhlý trojúhelník měnlivé velikosti otáčí se v rovině okolo pevného vrchole svého pravého úhlu tak, že jedna odvěsná končí se ustavičně na dané přímce pevné, na níž také podpona neustále kolmo jest. Najdi geom. místo, v němž vězí konec druhé odvěsné.

54. Najdi geom. místo, v němž vězí pata kolmice s ohniska paraboly na její normálu spuštěné.

55. Rovnice přímky P, a rovnice buď kruhu, neb ellipsy, neb hyperboly, neb paraboly, neb vůbec rovnice křivky druhého řádu jsou dány. Vedeme-li z kteréhokoliv bodu na přímce P ležícího dvě tečných ku křivce dané, a dotýčnýma bodoma tětivu tečných: prochází tato tětiva pevným bodem. Důkaz.

Poznam. Bod ten stálý či pevný slove *pol* přímky P, a přímka P navzájem nazývá se polárnice svého polu.

56. Z daného pevného bodu vedena jest kterýmkoliv směrem přímka, i protíná dvěma bodoma buď kruh, neb ellipsu, neb hyperbolu, neb parabolu, neb vůbec křivku druhého řádu, jejíž rovnice jest dána; v obou bodech průsečných vedou se pak na křivku tečné, kteréž se kdesi protnou. Najdi geom. místo, v němž vězí tento průsek tečných.

57. Pol (ve smyslu poznam. v č. 55.) leží *uvnitř* křivky druhého řádu (kruhu, ellipsy, hyperboly, paraboly), aneb *na* jejím *obvodě*, aneb *vně*, jakož polárnice křivky té se buď mine, aneb dotýká, aneb ji protíná. Věta platí i převrácená. Důkaz.

58. Znám jest *směr* polárnice, i dána jest rovnice křivky druhého řádu (kruhu, ellipsy, hyperboly, paraboly): najdi geom. místo, v němž vězí pol přímky.

59. Dán jest bod, jímž probíhati má polárnice některé křivky druhého řádu, jejíž rovnice dána jest. Najdi geom. místo polu jejího.

60. Dána jest rovnice některé křivky druhého řádu, jakož i rovnice jiného kruhu K; a polárnice má se dotýkati kruhu K. Najdi geom. místo jejího polu.

61. Dána jest pevná přímka, a pevný bod mimo ni ležící. Najdi geometrické místo bodu, jehož vzdálenost od daného bodu pevného ku vzdálenosti jeho od dané přímky pevné jest v stálém poměru $\varepsilon : 1$, a sice, předně, když jest $\varepsilon < 1$, za druhé, když jest $\varepsilon > 1$.

62. Najdi geometrické místo, v němž vězí střed kruhu, jenž prochází pevným bodem daným a kromě toho se dotýká buďto:

a) dané přímky pevné; aneb

b) daného kruhu pevného.