13

MĚŘICTVÍ

pro vyšší třídy středních škol

a

k vlastnímu studium.

Sepsal

František Šanda,
místoředitel na realném gymnasiu v Táboře.

Díl první.

Planimetrie. — Trigonometrie. — Stereometrie.

V PRAZE.
Nakladatel kněhkupectví: I. L. Kober.
1870.

Národní knihtiskárna: I. L. Kober v Praze.

Obsah.

Stránka

Úvod 5

Díl první.

Planimetrie.

O přímce vůbec 11
Protínající se přímky a úhly při tom vzniklé 19

O přímočarných obrazcích vůbec.
Strany a úhly obrazcův 24
O trojúhelníku zvláště 27
Shodnost trojúhelníků 33
O čtyr- a mnohoúhelnících 40
Mnohoúhelníky 46
Měřické konstruce k předešlému dílu 50
Úlohy ku cvičení 53
Úlohy určité 55

Nauka o kruhu.
Základné vlastnosti kruhu 58
Kruh ve spojení s úhly 64
O obrazcích, jež do kruhu vepsány a kruhu obepsány býti mohou . 68
Vespolné položení dvou kruhů 70
Konstruktivní úlohy o kruhu 71

Podobnost obrazců.
O srovnalosti přímek 76
Podobnost trojúhelníkův a mnohoúhelníkův 79
Srovnalostné přímky v kruhu 86
Měřické konstrukce zakládající se na podobnosti obrazcův . . . 90

Algebraické určování veličin měřických. 95
Strany a obvody pravidelných mnohoúhelníkův 98
O obvodu kruhu 105
Úlohy k cvičení 107

O plošném obsahu.
Velikost a poměry ploch vůbec 108
Vypočítávání ploských obsahů 115
Úlohy k vypočítávání ploch 125
Proměny a dělení obrazcův 127

Grafické zobrazování výrazů algebraických 135
Měřické řešení rovnic prvního stupně 137
Měřické řešení rovnic druhého stupně 141
Úlohy 145

O příčkách a harmonickém dělení. Stránka
O příčkách 147
Harmonické paprsky a harmonické dělení 152
Dodatky.
Mocnina bodu a osa rovnomocnin. Pol a polárka 156

Díl druhý.

Trigonometrie.

O funkcích úhloměrných 162
Vztahy úhloměrných funkcí dvou úhlů 172
Vypočítávání funkcí úhloměrných 180
O trigonometrickém řešení obrazců rovinných.
Řešení trojúhelníků pravoúhelných 184
Řešení trojúhelníků kosoúhelných 187
Praktické úlohy 195
Řešení čtyrúhelníků 201
Dodatky.
Veličiny pomyslné a trigonometrická věta binomialní 206
Upotřebení trigonometrie při řešení rovnic goniometrických . . . 211

Díl třetí.

Měřictví v prostoru.

Položení přímky a roviny v prostoru vůbec 215
Vespolné naklonění přímek a rovin 218
Položení rovin mezi sebou 228
O tělesném rohu 229
O tělesích vůbec.
Druhy těles a jich rozdělení 236
Vlastnosti těles hranatých vzhledem k jich stěnám, hranám a rohům 239
Zvláštní vlastnosti hranolu a jehlance 244
Tělesa kulatá.
Válec a kužel 247
Koule 253
Dodatek o kouli a tělesích pravidelných 262
O povrchu těles.
Povrchy těles hranatých 266
Povrchy těles kulatých 268
O krychlovém obsahu těles.
Porovnání tělesných obsahů 277
Vypočítávání tělesného obsahu 283
Krychlový obsah hranolů a jehlanců 284
Krychlové obsahy válce a kužele 287
Krychlové obsahy těles pravidelných a točených 292
Hranolec a jeho druhy 304

Předmluva.

Ačkoliv česká literatura vykazuje již pro všechny předměty středních škol knihy učebné, domnívá se předce spisovatel díla tohoto, že nekonal nic neužitečného rozmnožuje řadu dosavádních učebních kněh zase o jednu. Okolnosť totiž, že studium nižšího měřictví středními školami nyní za ukončené se považuje a dále pak na vysokých školách úplná známosť měřických základů jakožto příprava k rozličným odborům exaktních věd se předpokládá; vymahá i rozličných spisů, jichžto čtěním by mladíci, přísným vědám se oddávající, zejmena také kandidati učitelství, svých měřických, ve střední škole nabytých vědomostí doplňovati mohli, spisů totiž, které by jim byly vodítkem i mimo školu.

A pro takovéto případy nemá literatura naše ještě příliš na výběr; jest nám tu dosud mnoho donášeti, nežli jen všem potřebám domácí literaturou vyhověno bude.

Tyto a podobné naše poměry na zřeteli maje, snažil jsem se tedy spisem tímto posloužiti jak středním našim školám tak i potřebám kruhů soukromých, tak aby byl nejen užitečnou školní knihou než i vodítkem a příručnou knihou při samostatném studium nižšího měřictví vůbec, za kteroužto příčinou i jeho obsah v té míře rozšířen, aby dílo naše poskytovalo úplný přehled nynějšího stavu měřictví jakožto celku.

Co se dotýče vědecké stránky, nebude tuším rozumný znatel v předmětu tak všeobecně probraném a ustáleném nějaké původní soustavy očekávati; spisovatel hleděl přede vším k tomu, aby známé dosud věci nižšího měřictví, které však pohříchu z tak zvaných školních kněh vylučovány bývají, ačkoliv jich jiné školní předměty potřebují, v dobrý pořádek uvedl a co možná na společném základu v souvislý a přehledný celek postavil, čímž snad ovšem meze pouhé školní knihy poněkud překročil, avšak jenòm ku prospěchu věci samé. Některé nové maličkosti a poznámky uvedl jsem z příčin pedagogických, zejména provedl jsem a opatřil methodickými pokynutími více úloh jak počtářských tak i konstruktivních; jiných úloh provedení buď jsem jen naznačil a nebo zůstavil pilnosti čtenářově, aby se v řešení měřických úloh cvičiti mohl.

Látku srovnal jsem s náležitým ohledem na žáky středních škol, postupuje vždycky tak, aby potřebné vědomosti algebraické již předpokládány býti mohly. I tak zvanému novějšímu měřictví, které v posledních desítiletích takových pokroků učinilo, že ho v učebné knize, mající poskytovati čtenáři věrný obraz výše, jižto věda právě dostoupla, nelze tak snadno mlčením pominouti, věnoval jsem náležitého místa, a to tím spíše, an nejdůležitější jeho věty žákům aspoň tak srozumitelnými učiněny býti mohou, jako věty měřictví starého.

A aby pak čtenář při svých matematických studiích tím lépe poznal protivu způsobu měřického a algebraického, a aby zase s druhé strany viděl prospěšnost upotřebování měřictví v algebře a naopak algebry v měřictví, vytknuto jest zvláště algebraické určování veličin měřických naproti grafickému zobrazování výrazů algebraických, a přijmuto do oboru toho i měřické řešení určitých rovnic prvního a druhého stupně. Ze spojení obou těchto směrů, měřictví totiž a algebry, vychází pak trigonometrie jakožto zaokrouhlení a dokončení měřictví rovinného vůbec. Tu však slušno podotknouti, že ačkoliv se trigonometrie obyčejně v školních knihách teprvé až po tělesoměrství uvádívá, předce, jak mne víceletá zkušenost přesvědčila, závažné důvody pedagogické proti tomuto obvyklému pořádku mluví. Za jedno potřebují žáci dle plánu našich středních škol již záhy aspoň nějakých vědomostí trigonometrických, jak mile totiž začnou fysiku na základě matematickém studovati; za druhé bylo by studium tělesoměrství samo neúplné, když by se na př. u pravidelných a i u jiných těles nemohlo následkem neznalosti trigonometrie také vzájemné naklonění ploch, t. j. plošné úhly blíže ohledávati nepřihlížeje ani k tomu, že se mnohé výpočty v tělesoměrství pomocí trigonometrie snadněji a elegantněji provésti dají.

Při takovémto pořádku bylo pak nutno, funkce úhloměrné považovati dle spůsobu novějšího za pouhá čísla poměrná, která dle předcházejících method snadno zobrazena býti mohou; a na základě tohoto ponětí jsou potom i všechny základní vzorce úhloměrné i jich upotřebení při řešení rozličných úloh pouze jako číselné rovnice vyvinovány a upotřebeny. — Maje ale také důležitost a veliké upotřebení trigonometrie ve všech oborech matematických věd na zřeteli, viděl jsem se nucena, trigonometrii větší pozornost věnovati, nežli se to v obyčejných školních knihách děje. Též přijmutí krátkého naučení o řešení rovnic goniometrických, které se obyčejně, ač bezprávně, v školních knihách téměř úplně zanedbávají, bude, jak doufám, již k vůli úplnosti nejen ospravedlněno nýbrž i oceněno. — A poněvadž se takto planimetrie, trigonometrie a stereometrie objevují jakožto celek obsahující veškeré nižší měřictví; oddělil jsem je od měřictví analytického a sférické trigonometrie, které vlastně již do oboru vyšší matematiky spadají a z nichžto na střední škole bez toho jen první začátky předsevzaty býti mohou.

I doufám, že tato věc nebude dílu mému za vadu pokládána, zejména již z ohledů na potřebu takovéhoto díla mimo školu.

Pokud a jak se mně podařilo v tomto zde naznačeném směru pravý cíl dosáhnouti a zdali dílo toto úkolu svému dostojí, o tom nechť vydají ctění páni kollegové jakožto znalci spravedlivý a nepředpojatý úsudek. Spravedlivé a nepředpojaté úsudky budou mně jen vítány, a neopomenu v příhodné době s povinnými díky na ně ohled vzíti.

V Táboře v měsíci květnu 1868.

Spisovatel.

Úvod.

I.

Všechno, co zvětšeno neb zmenšeno býti může (co nějakou velikosť má), slove veličina (Größe). Veličiny jsou buď číselné nebo prostorné. Věda jednající o veličinách vůbec nazývá se **matematikou**, a sice slove onen díl matematiky, který jedná pouze o veličinách číselných, **aritmetika** vůbec, kdežto zase část matematiky jednající o veličinách prostorných **měřictvím** a **geometrií** slove.

Veličiny prostorné nenacházejí se však ve skutečnosti nikde tak, jak si je měřictví představuje, totiž bez hmoty, bez barvy, tvrdosti a tíže.*) Měřictví, jakožto přísná a na abstraktních pojmech založená věda odmítá od svých předmětův veškerou hmotnosť a dodává tak svým naukám zvláštní určitosti a jasnosti. Předmět měřictví jest tudíž pouze něco pomyšleného, čemu se výkresem nebo modelem poněkud přiblížiti můžeme, co ale v skutečnosti vytvořiti nelze.

Abychom sobě měřické veličiny snadněji představiti a v mysli déle je podržeti mohli, vyobrazujeme tvary jejich tak, jakoby hmotné byly; nákres pak měřické veličiny slove obrazec (Figur).

II.

1. Veškerý nás obklopující prostor jest neomezený čili nekonečný a každá jeho úplně obmezená část slove **tělesem** (Körper). ×

Poznámka 1. Rozdělením prostoru vzniklé díly mají tu vlastnosť, že meze dílu jednoho jsou již začátkem dílu druhého, protož díme: prostor jest veličina spojitá (stetige G.).

Poznámka 2. Jelikož měřictví veškerou hmotnosť od těles odmítá pouze na jich tvar a velikosť ohledu berouc, jest patrno, že se měřická tělesa i prostupovati mohou.

*) Velmi tenký drát, vlákno pavučinové, atd. mohou sice velmi dobře na př. pojem čáry usnadniti, nejsou však nikdy tím, co čarou měřickou jmenujeme, poněvadž mají, třeba i sebe menší byly, přece nějaké tloušťky, bez které bychom je ani viděti ani hmatati nemohli.

Tělesa mají trojí rozměr: délku, šířku a výšku (hloubku nebo také tloušťku).

Každá mez nebo-li hranice tělesa rozděluje prostor, dostatečně jsouc prodloužena, ve dva díly a slove **plocha** (Fläche). Tělesa jsou tudy omezená plochami.

2. Plocha, jakožto prostorná veličina, má toliko dva rozměry, šířku a délku (tloušťka jí chybí) a může býti opět buď do nekonečna rozprostřená nebo omezená. Každá meze plochy, jížto se dva díly plochy od sebe oddělují, slove **čára**, majíc jediný jen rozměr, t. délku.

3. Čára může býti konečně opět buď nekonečeně dlouhá, nebo omezená. Mez, jížto se čára ve dva díly odděluje, slove **bod** (Punkt) a ten nemá již ani délky. Bod nemaje žádného rozměru, nemůže býti více rozdělován.

Z toho jde, že měřická tělesa rozdělována býti mohou toliko plochami, plochy zase čarami a čáry body. A jelikož meze jaké koliv veličiny nejsou její částkou, nemůže se skládati ani těleso z ploch, ani plocha z čar, ani čára z bodů; ovšem ale může v každé čáře vytknuto býti nesčíslně mnoho bodů, na každé ploše nesčíslně mnoho čar, a na každém tělesu nesčíslně mnoho ploch.

Často považujeme čáru za dráhu, již proběhl bod od jednoho místa k druhému se pohybující, a poněvadž bod ani tloušťky ani šířky nemá, bude i dráha jím proběhnutá — čára — beze vší tloušťky.

Podobně sobě myslíme, že může býti plocha vytvořena pohybováním se nějaké určité čáry (čáry tvořící, Erzeugende), která, podle jistého zákona postupujíc všemi místy plochy projíti musí. Též i tělesa myslíme sobě, že mohou býti vytvořena (co do tvaru a velikosti určená) pohybováním se ploch.

III.

1. O bodu, jakožto veličině nemající žádného rozměru, nedá se ničeho říci. Čáry ale rozeznává měřictví dvojího druhu: přímé č. **přímky** (Gerade), a křivé č. **křivky** (krumme L., Curven). Čára slove přímou, má-li od začátku až do konce týž směr; křivou slove pak čára, když žádný její díl není přímý. Z těchto dvou druhů čar skládají se čáry lomené č. klikaté, a čáry smíšené.

Pozn. Pojmy čáry přímé a čáry křivé jsou nám jako vrozeny, a nepotřebují, jako všechny základné pojmy měřictví žádného zvláštního vysvětlení.

2. Plochy jsou buď rovné (roviny) nebo křivé. Plocha slove **rovinou** (Ebene), když přímka kterýma koliv dvěma body jejíma položena byvši v celé své rozsáhlosti k ní přiléhá; křivou slove plocha, když nižádná její část není rovnou.

Pozn. Na rovině mohou se položiti přímky směrem jakým koliv.

3. Tělesa jsou, když přírodu a rozmanité výrobky průmyslu pozorujeme, tak rozličného druhu a tvaru, že se na první pohled jich roztřídění těžkým státi musí; některá z nich však vynikají zvláštní jednoduchostí a pravidelností a k těm hlavně měřictví obrací svůj zřetel, protože důkladná jich známosť slouží též k poznání vlastností těles složených a všelijak upotřebovaných, o čemž na příslušném místě jednáno bude.

IV.

1. Veškeré měřictví obsahuje soustavu vět o vlastnostech veličin prostorných. Některé z těchto vět jsou nám ihned patrny, jak mile jsme smysl jejich pochopili; jsou to tak zvané **věty základné** (axiomy, Grundsätze), nepotřebující žádného výkladu ani odůvodnění, jako na př. známá věta: *Celé jest rovno svým částím dohromady*, nebo: *dvě veličiny rovné třetí jsou i rovnými mezi sebou.*

Větší díl však měřických vět obsahuje pravdy č. **nauky** (Lehrsätze), které tím, že vysloveny byly, ještě ani patrny ani za pravdivé uznány nejsou a proto nutně zvláštního odůvodnění čili důkazu potřebují, jako na př. věta: „V trojúhelníku rovná se součet vnitřních úhlů dvěma pravým.“ Důkazy zakládá měřictví buď na vysvětleních a výměrech toho, co právě pozoruje, a nebo na větách základných.

Dodatek. Každý důkaz měřický sestává z dvou dílů, z předpokladu (hypothesi) a ze závěrku (konkluse); na př. je-li A rovno B i C (předpoklad), jest též B rovno C (závěrek). — Učiní-li se závěrek předpokladem a předpoklad závěrkem, pravíme, že byla věta obrácena. Mimo to musí býti každý důkaz, aby nižádné pochybnosti nepřipouštěl, přesný a pravdivý, t. j. věcně i formálně bezchybný.

Co do formy může býti důkaz buď přímý nebo nepřímý (direktní nebo indirektní). V prvním případu (d. přímý) ukáže se, že vyslovené právě vlastnosti nějakého obrazce plynou dle přirozených zákonů soudnosti jakožto výsledek z vět již za pravé uznaných, t. j. z výkladů předcházejících vět hlavních nebo z nauk již dokázaných.

Při důkazu nepřímém ukáže se, že jistý výrok pravdivým býti musí, poněvadž tu nic jiného pravdivým býti nemůže, t. j. že bychom pro ten případ, kdyby vyslovená věta nepravdivá býti a opáčná věta místa míti měla, přišli dle zákonů soudnosti k výsledkům, které s uznanými již pravdami v odporu jsou (odtud též jméno: důkaz neshodou, nebo důkaz ex absurdo).

2. Opět jiné věty, vztahující se výhradně k vyobrazení měřických veličin, žádají, aby se sestavily prostorné veličiny vyhovující jistým podmínkám a nebo mající určité, napřed již vytknuté vlastnosti. Věty takovéto slovou **úlohy** a sestávají opět z dvou dílů.

V prvním dílu jsou vysloveny žádané podmínky (úloha zvláště, požadavek); v druhém pak dílu ukáže se, jakým spůsobem lze danému úkolu vyhověti (provedení nebo rozřešení úlohy, **konstrukce**).

Úloha jest měřicky provedena, když jsou udány všechny ke konstrukci potřebné návody, t. j. když se dá sestavení žádaného obrazce provésti beze všeho zkoumání hned na jisto pouhým upotřebením přímky a kruhu (v novější době i upotřebením kuželoseček).

3. Úlohy jsou dvojího druhu, určité a neurčité. — Úloha slove určitou, dáno-li tolik a takových podmínek, aby se kladenému požadavku beze všech pochybností vyhověti, a toliko určitý počet žádaných obrazců sestrojiti mohl. Připouštějí-li ale vyslovené požadavky více, svým tvarem i velikostí rozdílných obrazců, a nebo nevyslovují-li tolik podmínek, aby se mohl sestaviti obrazec určitý, slove úloha neurčitou.

Dodatek. Sestavování č. **konstrukce** měřických obrazců musí se díti vždycky se vší dokonalostí a zakládati se na známých, odůvodněných již měřických zákonech, jelikož provedené konstrukce slouží zase často za základ novým větám a bývá nad to i podstatnou částkou důkazu.

V.

Ačkoliv by měřictví vzhledem k tomu, že veličiny jeho buď čáry, buď plochy nebo tělesa jsou, na tři oddíly rozvrhnuto býti mělo (na délkoměrství č. longimetrii, na plochoměrství čili planimetrii a na tělesoměrství č. stereometrii), rozvrhuje se předce nejčastěji a to hlavně z důvodů konstruktivních, jen ve dvě částí, a sice a) na **měřictví v rovině** (Geom. in der Ebene) a b) na **měřictví v prostoru** (Geom. im Raume).

Do oboru měřictví rovinného beřou se všechny veličiny měřické a konstrukce, které mohou býti provedeny a ležeti v téže rovině; kdežto zase všecky měřické veličiny, které v prostoru leží a konstrukce nedající se v jedné rovině provésti, do oboru měřictví v prostoru počítány bývají.

Avšak i jiné ohledy zavdávají mnohdy ještě příčinu k jiným rozdělením měřictví.

Tak se na př. rozděluje měřictví také 1) na nižší a vyšší, při čemž má ono za předmět toliko přímku a kruh a z těchto dvou povstalé plochy a tělesa; toto pak jedná i o jiných křivkách, plochách a tělesích z nich vzniklých. 2) Měřictví praktické č. geodesie zabývá se zase pouze skutečným vyměřováním výšek, svahů, ploch atd. 3) Měřictví analytické čili počtářské vyjádřuje veličiny prostorné i jich vlastnosti toliko počtem. 4) Jedná-li však měř. o vytknutí podoby a polohy rozličných veličin prostorných udávajíc při tom, jak by se dle zákonů měřických graficky zobrazily, slove měřictví zobrazující (géométrie descriptive).

VI.

Slovo geometrie č. měřictví jest řeckého původu a značí tolik co vyměřování země. Nejprvnější počátky v měřictví nacházíme u starých Egypťanů a Chaldeů, a první nám známý učenec, předmětem tímto se zabývající, byl Föničan Thales Miletský (nar. 639 př. Kr.). Tento šel totiž do Egypta, aby se tam mezi kněžmi v měřictví zdokonalil; navrátiv se pak usadil se v Miletu, kdežto založil zvláštní školu (jonickou).

Co věda bylo měřictví později pěstováno u Řeků, kdežto Pythagoras (nar. 580—471 před Kr.), Thalesův žák, taktéž dříve v Egyptě se vzdělav, dle něho pojmenovanou školu v Krotoně založil. Učenec tento byl první, který dal měřictví svými větami vědeckého základu, a na výši Pythagorem a Hyppokratem (450 př. Kr., který vědomosti dosud známé spořádav sepsal počátky měřictví) dostoupnuté udrželo se také měřictví až do založení tak zvané školy platonické. Řek Plato (429—347 př. Kr.), následuje příkladu svých předchůdců, šel dříve k egyptským kněžím měřictví se učiti; navštěvoval na to školu pythagorskou v Itálii, a vzdělav se takto usadil se v Athenách, kdežto založil školu dle něho pojmenovanou. — Této škole děkuje měřictví ty nejznamenitější vynálezy, zejména již i začátky kuželoseček, učení o měřických místech při řešení úloh a úplné provedení těles pravidelných.

Nástupcem školy platonické byla škola alexandrinská, zařízená egyptskými králi po smrti Alexandra Velikého,*) v nížto učil nejprvé Euclid (okolo 285 př. Kr., žák Sokratův), který sesbírav známé dosud vědomosti, je urovnal i doplnil, a sepsav mimo jiné též základy měřictví ve 13 knihách zanechal nám v tomto díle jednu z nejkrásnějších památek důmyslnosti ducha řeckého. Dílo toto, majíc ještě i v naší době veliké důležitosti, bylo nám objeveno Angličanem Bath-em v 12. století po Kr., který seznámiv se s ním u Arabů do latiny je přeložil a tak celému západnímu světu přístupným učinil.

Dva z nejpřednějších učenců alexandrinské školy byli matematikové Archimed (287—212 př. Kr.) a Appollonius (247 př. Kr.), jenž brzo po Euclidovi následovali a svými vynálezy základ položili k mnohým odvětvím oboru měřického, které do dnešního dne k těm nejpřednějším náležejí. Oni jsou zejména tvůrcové určování ploského obsahu všech přímo- i křivočarných obrazců a nauky o kuželosečkách. Škola tato byla vůbec nejskvělejším činem vědeckého snažení starých Řeků a udržela se na tomto vysokém stupni až do svého zničení velikým požárem v Alexandrii (46. př. Kristem v čas bitvy Julia Caesara s egyptským králem Dionysiem), kdežto největší z knihoven, jež veškeré poklady vědeckého působení starých národů obsahovala, z většího dílu popelem lehla. Knihovna tato, založená od Ptolemeovcův, králů egyptských v 3. stol. př. Kr., měla dle udání obsahovati až k 700.000 svazků řecké a latinské literatury.

---

*) Škola alexandrinská byl vlastně ústav k uschovávání rukopisův a vydržování učenců všeho druhu. Nejprvé byla založena alexandrinská knihovna a napotom museum v paláci královském, kdežto se nacházely byty pro učence, učiliště, procházky a síně k učenému hádání.

Po tomto zničení alexandrinské školy, která sice o něco později ještě jednou zkvetla, napotom ale úplně zanikla, zvláště podmaněním Egypta skrze Araby, počaly umění a vědy zacházeti. Spálení a úplné zničení ptolemejské knihovny válčícími Araby (r. 639 po Kr.) bylo jaksi heslem k všeobecnému barbarství a teprv po dvou stoletích poznali Arabové poněkud své přenáhlení snažíce se sem tam zachráněné spisy a knihy buď v originálu nebo aspoň v překladu nám zachovati. Než Arabové nevynikali v měřictví a nepřipojili k němu nic nového; jejich přičinění směřovalo hlavně k aritmetice a algebře vůbec (zabývajíce se pilně hvězdářstvím povznesli též trigonometrii). Z řeckých učenců vynikají po zničení alexandrinské školy toliko ještě dva, *Papus* totiž a *Ptolemeus*. Tento žil okolo r. 125 po Kr. a stal se, jak se později dozvíme, tvůrcem trigonometrie (sepsal veliké dílo o hvězdářství, které bylo okolo r. 820 do arabštiny přeloženo a nazváno *Almagest*); onen žil ku koci 4. století.

Nastalé potom ticho ve veškerém oboru vědeckém trvalo až do 12. století, kdežto mnozí přicházeli do Španielska k Arabům jako druhdy do Egypta, aby poznali vědu. Zde seznámil se západní svět s dílem Euclidovým i Ptolemeovým a s jinými řeckými autory, které se překládati počaly. Vědy se tím počaly na západě šířiti, zejména sloučením indického počtářství s měřictvím ražen nový směr, zvláště když pak *Vietem* (r. 1540—1603) počtářství písemné, *Keplerem* (1571—1651) ponětí o nekonečně malém a *Descartem* (1595—1650) měřictví analytické zavedeno.

Spojením měřictví s algebrou a novými těmito ponětími dělala vůbec celá matematika velikých pokroků, tak že nejen celé nové obory jsou do ní zavedeny (vůbec matematika vyšší utvořena) i nové způsoby methodické a nové o veškerých veličinách prostorných názory jsou vymýšleny, aby se získalo v měřictví všeobecnosti před tím nepoznané. Nejčelnější pěstovatelé měřictví byli v té době: zmíněný již *Descartes*, *Huygens* (1629—95), více členů nizozemské rodiny *Bernoulli*, a *Euler*, který byl vůbec jeden z nejvýtečnějších matematiků všech věků a národů (narodil se v Basileji r. 1707, a umřel r. 1783 v Petrohradě, kde byl od r. 1727 professorem podobně jako někteří Bernoulliové).

Vedle tohoto vyššího č. analytického měřictví pěstováno bylo také měřictví starořecké, v tom však směru, aby nabylo novými methodami jednoty a všeobecnosti (jmenovati v tom ohledu sluší *Pascala* r. 1632–63 a *Carnota*, (1753—1823), kterýmižto myšlenkami veden stal se *Monge* (1746—1818) tvůrcem měřictví zobrazujícího, které na průmětech spočívá. Takto usnadnilo se studium měřictví starořeckého a odkázáno péči středních škol. Spojováním jeho s měřictvím zobrazujícím vzniká nyní tak zvané *měřictví novověké*, k jehožto zdokonalení mnozí se přičiňují, zejména Francouzové a Němci.

Díl první.

Měřictví v rovině.

(Plochoměrství č. planimetrie).

Kniha první.

I. O přímce vůbec.

§ 1.

1. Každá přímka začíná i končí se bodem. Bod, jímž přímka začíná, slove **bod začátkový** (Anfangsp.); bod pak, jímž se přímka končí, slove **bod koncový** (Endp.). Oba dohromady slovou **krajní body**.

Poznámka. Poněvadž každý pohybující se bod rozličné dráhy proběhnouti může, jež vesměs jeden a týž začátek mají, pravíme: *Jedním bodem lze vésti přímek nesčíslně mnoho.*

Přímky, vybíhající z téhož bodu, tak zvané **rozběžky** (divergirende L.) nemají mimo tento bod nic více společného; i pravíme, že se přímky v něm protínají, a proto slove bod ten jich **průsečník** (Durchschnittsp.). Na tom zakládají se věty: *Jedním bodem není ani položení ani velikost přímky určena.* Nebo: *Přímky rozličného směru nebudou se stýkati leč v bodu jediném.*

2. Padnou-li dva body nějaké přímky s dvěma body jiné přímky dohromady, padnou obě přímky na sebe splynouce v přímku jedinou. Na tom zakládá se věta: *Dvěma body jest položení přímky určeno;* a jsou-li to zároveň její krajní body, určena jest i její délka.

Pozn. Vzdálenost dvou bodů určuje se přímkou od jednoho k druhému vedenou, protože jest přímá cesta, jak nám vrozené vědomí naše praví, tou nejkratší.

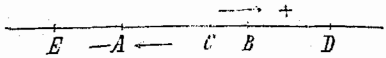
3. Přímky, jichžto krajní body na sebe padnou, mají jednostejnou délku; naopak musí zase krajní body stejně dlouhých a na sebe položených přímek padnouti dohromady.

Na této jednoduché větě zakládají se všechny ostatní, o velikosti přímek jednající věty.

D o d a t e k. K písemnému poznamenání přímky označujeme jednotlivé její body písmenkami nebo číslicemi, vyslovujíce je podle potřeby za sebou, na př. přímka *ab* nebo *ba*.

§ 2.

1. U přímek rozeznáváme a) s m ě r, b) v e l i k o s t. Směr přímky procházející dvěma body A a B(obr. 1.) může býti dvojí: buď od bodu A k B a nebo naopak. Znajíce směr píšeme a vyslovujeme v případě prvním „přímka AB“, v případu druhém „přímka BA“. Oba směry jsou sobě na vzájem protivny a dají se též vytknouti obyčejnými znameními kladu a záporu (+ a —), tak že jest AB co do směru k l a d n ý m a BA záporným, ač délka jejich jednostejná jest.



Obr. 1.

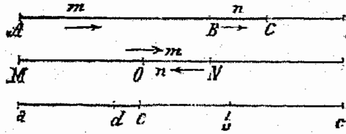
P o z n. I kdyby více bodů v přímce vytknuto bylo, poznamená se směr přímky vyslovením kterých koliv dvou bodů; též sobě můžeme mysliti, že pohybující se a přímku tu vytvořující bod vyšel z některého bodu, na př. z C. Napotom bude směr jeho dráhy k bodům B a D protivný směru k bodům A a E.

2. Přímka může býti v každou stranu směru svého dle libosti prodloužena aniž by tím směr její změny utrpěl. Délka přímky jest při tom a) buď k o n e č n á, t. j. má určité konce, nebo b) n e k o n e č n á nemající žádných určitých konců. Koncovými body jsou směr i délka přímky dokonale určeny, i díme proto: *Dvě přímky jsou si rovny, když jest vzdálenost koncových bodů u jedné přímky tak velká jako u druhé.* Mají-li ale koncové body dvou přímek rozdílnou od sebe vzdálenost, jsou si přímky nerovny.

Jinak ještě určuje se pojem rovnosti dvou délek následovně: Dvě přímky, které jsouce na sebe položeny, vespolek se kryjí, jsou si rovny, jinak ale nerovny; z těchto pak jest větší ona, jížto část zůstává druhou přímkou nepokryta.

Při rejsování přímky bývá žádáno, a) aby šla přímka jistým směrem, nebo b) aby se rovnala určité délce.

Má-li délka narejsované přímky rovnati se s o u č t u dvou délek m a n, nanesou se obě tyto délky od začátkového bodu A za sebou t ý m ž s m ě r e m na přímku A (obr. 2.), tak že bude $m + n = AB + BC = AC$. Podobně nanese se i více délek za sebou. — Má-li se ale délka narejsované přímky rovnati r o z d í l u dvou délek m a n, nanese se první délka m od začátkového bodu v stranu jednu, zde na př. od M až do N; druhá



Obr. 2.

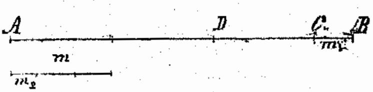
pak délka n nanese se od koncového bodu N směrem protivným (jakoby se z délky MN ubírala nebo odečítala), tak že bude $m - n = MN - NO = MO$. V případu hořejším vzala se délka n kladně nebo příčetně (additiv, $+n$), zde pak záporně nebo odečetně (subtractiv, $-n$). Podobným spůsobem počínáme sobě, když žádaná délka má se skládati z více rozličných délek, na př. $x = m + n - o + p$. Nanese se $m = ab$, $n = bc$, $-o = cd$, $p = de$, tak že bude žádaná délka $x = ae$.

Kdyby se měla žádaná přímka rovnati délce m několikrát vzaté, tak aby bylo na př. $x = \alpha m$; naneseme délku m αkrát v témž směru za sebou.

Úlohy. 1. Z dvou rozličně velkých přímek jest dána ta mneší a rozdíl obou; má se udati přímka druhá. 2. Z dvou rozličných přímek jest dána ta větší a součet obou; má se udati přímka druhá. 3. Jest dána $1/_2$, $1/_3$, $1/_4$, $1/_5$ atd. přímky, vyhledá se délka celé přímky.

§ 3.

1. Posuzujíce délku nějaké přímky pravíme, že jest přímka dlouhá a nebo krátká; tím však se velikosť přímky neurčila. Velikosť délky určí se **měřením**, t. j. ustanoví se, kolikrát jest v dané délce obsažena jiná délka, která nám dobře známa jest a **mírou** slove (Maß). Známou tuto délku č. míru beřeme při tom za jedničku a porovnáváme s ní délky ostatní; kladouce ji totiž podél přímky dané počítáme, kolikrát se na ni za sebou položiti dá od jednoho konce k druhému. Číslo udávající, kolikrát jest míra v nějaké přímce obsažena, jmenujeme **číslem poměrným** a nebo zkrátka jen **poměrem** (Maß- oder Verhältnißzahl), na př. v obr. 3., kde jest $AC = 3m$, $AD = 2m$, nebo když by se m přijmulo za jedničku $m = 1$, $AC = 3$, $Ad = 2$.



Obr. 3.

Kdyby se přímka AC jinou mírou měřila, byla by délka její jinými čísly vyjádřena. Při vědeckém zpytování nezáležívá však na tom, jak velká jest míra, toliko se žádá, aby se míra během celého počtu neměnila. Číslem vyjádřená délka přímek jest proto vždycky jen poměrná velikosť jedné přímky ke druhé.

2. Při takovémto vyměřování stane se, a) buď že konec míry posléz položené padne na konec přímky měřené, t. j. že byla míra v dané přímce několikrát beze zbytku obsažena; nebo b) zbyde ještě nějaký kus menší, nežli jest míra, jako na př. v obr. 3., kde jest $AB = 3m + CB$. V případu takovémto měříme zbytek novou mírou, která jest několikátou (aliquotní) částkou míry předešlé a takto se určuje: Nejprvé vezme se zbytek m_1 za tuto novou míru a změří se jím míra předešlá; kdyby tam bylo m_1 beze zbytku obsaženo, na př. $m = 2m_1$, bylo by $AB = 3 \times 2m_1 + m_1 = 7m_1$, t. j. m_1 jest společnou mírou přímkám AB i m. Jestliže ale nebylo m_1 v m beze zbytku obsaženo, vezme se nový tento zbytek

$m_2 < m_1$ opět za míru a měří se jím nejprvé míra předešlá m_1 (na př. $m_1 = 2m_2$), a tak se opakuje dále, jako v aritmetice při určování největší společné míry.

Výsledek takovéhoto skoumání může býti dvojí: buďto měření pojde nebo nepojde. Pošlo-li měření, byla poslední míra žádaným aliquotním dílem míry původní a první zbytek m_1 má v sobě několik těchto měr, na př. zde $AB = 3m + m_1 = 7m_1 + m_2 = 7.2m_2 + m_2 = 15m_2$.

V tomto případu dají se tudy přímka AB i m společnou mírou m_2 změřiti (mají společnou míru), pročež slovou **směřitelnými** (commensurabel).

Kdyby však měření nikdy úplně nepošlo, neměly by přímky AB a m žádné společné míry a slouly by **nesměřitelnými** (incommensurabel).

Pozn. 1. U nesměřitelných délek pomíjí se poslední malý zbytek tak jakoby ho ani nebylo, a změření stane se tudy jen přibliženě. Když však dvě přímky spolu nesměřitelny jsou, nesmí se za to míti, že by se délka jejich vůbec změřiti nedala; jedna i druhá přímka má zajisté délku určitou, leč žádná z nich není několikátým dílem druhé, tak že toliko jedna druhou změřena býti nemůže. Nesměřitelnost vztahuje se tudy jen k poměru dvou přímek mezi sebou.

Pozn. 2. K obecným potřebám ustanoven v rakouském mocnářství za míru **sáh**, rozdělený na 6′ à 12″ à 12‴ atd.; avšak i s rozdělením desítinným užívá se sáhu, zvláště při pracích měřických. Též se brává za míru **metr** (francouzská míra) rozdělený na 10 decimetrů à 10 centimetrů à 10 millimetrů. Větší délky, jako na př. vzdálenosti měst, silnice atd. měří se na míle à 4000°. Střižné zboží měří se na lokte. Vídeňský, nyní v obchodu obecný loket = 2′ 5·579 = 2½′; český loket = 0·76079 lokte víd. (1 lok. vídeňský = 5/4 lokte českého); 1 metr = 3·1635′ ≐ 3′.

Rakouská (poštovní) míle	=	4000	rak. sáhů,
Německá (zeměpisná) „	=	3912·467	„ „ ,
anglická míle	=	848·52	„ „ ,
francouzská nová míle .	=	527·552	„ „ ,
ruská míle (verst) . .	=	562·46	„ „ ,
mořská míle	=	978·12	„ „ ,

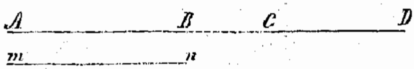
Skutečné měření děje se buď palcovým měřítkem (Zollstab), buď sáhovkou (Klafterstange) a nebo řetízkem 10° dlouhým (Meßkette).

§ 4.

1. Položení přímky může býti a) **svislé** č. **prostopádné** (vertikálné), b) **vodorovné** (horizontálné) a c) **kosé** (schief). Přímka jest svislá, máli směr šňůry, na které nějaké závaží visí (směřuje ku středu země). Má-li ale přímka položení tiše stojící vody v nějaké nádobě a nebo položení bidélka v rovnováze nacházejících se dobrých vážek, slove vodorovnou (rovnovážnou, wasserrecht, wagrecht). Přímka konečně, která není ani svislá ani vodorovná, slove kosá.

Směr vertikálný určuje se ve skutečnosti závažím a směr vodorovný vážkou vodorovnosti č. libellou (t. j. povrchem tiše stojící vody).

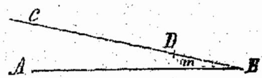
2. **D v ě p ř í m k y** mohou míti směr buď jednostejný nebo rozdílný. V prvním případu se obě přímky buď sjednotí, jestliže jednu z nich dostatečně prodloužíme, a tvoří přímku jedinou, na př. přímky AB a CD (obr. 4.); nebo leží jedna přímka mimo druhou a tuto slovou **rovnoběžnými** (rovnoběžky, Parallele S.) na př. přímky AB a MN.



Obr. 4.

Znaménko rovnoběžnosti jest ||, a čte se: „jest rovnoběžná“. Rovnoběžky nemají, jak to již z pojmu rovnoběžnosti vysvítá, žádného bodu společně, nechť jest položení jejich jakékoliv.

V druhém případu musí se obě přímky, jestliže je dostatečně prodloužíme, v některém bodu sejíti a slovou buď **sbíhavými** (convergent), myslíme-li si totiž, že k tomuto bodu obě směřují, a nebo **rozbíhavými** (divergent), když za to máme, že z tohoto bodu vybíhají (obr. 5.). Přímky takovéto slovou někdy i **paprsky** (Strahlen).



Obr. 5.

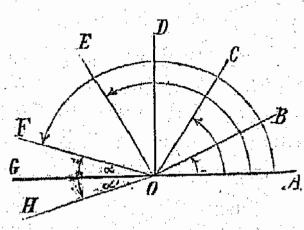
Nerovnoběžné přímky mají tedy jen jeden bod společně, totiž jejich **p r ů s e č n í k**. Z odstavce pak předešlého plyne, že ani přímky svislé ani vodorovné na vzdálených místech země rovnoběžnými býti nemohou.

§ 5.

1. Rozdíl směru dvou nerovnoběžek neboli odchylka jedné přímky od druhé slove **úhel** (Winkel). Bod, v němžto se obě nerovnoběžky sbíhají, slove **vrchol** (Scheitel), a přímky z vrcholu vybíhající slovou **ramena úhlu** (Schenkel). Velikost úhlu záleží tudy na rozevření č. odchylce jeho ramen; a poněvadž přímka prodloužením svého směru nemění (§ 2. 2,) nemůže mít délka ramen na velikosť úhlů žádného vlivu.

2. V písmě znamená se úhel dvěma rozbíhavými přímkami ($<$ nebo $\sphericalangle$) a poznačuje se buď jedním písmenem, nebo třemi. Má-li se úhel poznačiti jen jedním písmenem, klade se písmeno k vrcholu nebo do otvoru, a píše se $\sphericalangle m$ nebo $\sphericalangle B$ (obr. 5.).

Poznačuje-li se ale úhel třemi písmenami, píše a čte se písmeno vrchol označující uprostřed písmen, kterými se poznačila ramena. Může se tedy úhel v obrazci 5. ještě i takto poznamenati: $\sphericalangle ABC$ nebo $\sphericalangle CBA$ (též $\sphericalangle$ ABD, $\sphericalangle$ DBA).



Obr. 6.

Stojí-li úhel, jako právě pojmenovaný, sám o sobě, znamená se pro krátkosť jen jedním písmenem; vybíhá-li ale z jednoho bodu více přímek, jako na př. v obr. 6., musí být nutně každý úhel třemi písmenami poznačen, na př. $\sphericalangle$ AOC, $\sphericalangle$ AOB, $\sphericalangle$ BOF, atd. V některých spisech jsou úhly znamenány ještě i tím spůsobem, že se za známkou $\sphericalangle$ postaví do závorky dvě písmena, označující ramena úhlu, na př. $\sphericalangle$ (A, B), $\sphericalangle$ (A, C).

3. Velikosť úhlu změní se, když aspoň jedno rameno svůj směr promění; a podle toho, zdali se ramena úhlu od sebe odkloní (odchýlí) a nebo k sobě přikloní, stane se úhel větším neb menším. Odchylováním se ramena *BO* (obr. 6.) od ramena *AO* bude tudy úhlu stále přibývati, tak že bude $\sphericalangle AOB < \sphericalangle AOC < \sphericalangle AOE$ atd.

Dva úhly jsou sobě **rovny**, když mají ramena stejně rozevřená; takovéto úhly musí, jsouce jedním ramenem a vrcholem na sebe položeny, vespolek se krýti. Pročež díme: *Úhly, které se kryjí, jsou si rovny.*

Z dvou sobě rovných úhlů jest ten větší, jehož čásť úhlem druhým zůstává nepokryta; rameno menšího úhlu padne při tom mezi ramena úhlu většího.

4. Dva úhly mající společný vrchol a rameno, mohou býti spolu sečítány i odečítány, a jejich součet i rozdíl bude opět úhel téhož vrcholu. Má-li se na př. k úhlu *AOB* (obr. 6.) úhel BOC připočísti, t. j. $\sphericalangle$ AOB o úhel BOC zvětšiti, musí se společné rameno *BO* od *AO* tak daleko odchýliti, až by padlo na *CO*; jest i potom $\sphericalangle COA = \sphericalangle BOA + \sphericalangle BOC$.

Naopak, má-li se od úhlu *COA* na př. úhel *COB* odečísti, musí se rameno *CO* k ramenu *AO* tak daleko přikloniti, až by padlo na *BO*, tak že bude $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COB - \sphericalangle COB$. Sečti $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COE + EOF$! Čemu se rovná $\sphericalangle EOB - EOD$?

Též se mohou úhly i násobiti, když bychom totiž stejně velký úhel vícekráte vedle sebe při tomž vrcholu položili.

5. Odchýlí-li se pohyblivé rameno od pevného tak daleko, že obdrží směr tomuto protivný tvoříc s ním přímku jedinou; vznikne úhel, který slove **úhel přímý** (gerader W.) na př. $\sphericalangle$ *AOG* (obr. 6.). Každý úhel, který jest menší přímého, jmenuje se **úhel dutý** (hohler oder concaver W.); úhly pak větší přímého slovou **úhly vypuklé** (erhabene, convexe W.), na př. $\sphericalangle$ AOH.

Pozn. Ani úhel dutý ani vypuklý nemůže sám o sobě narejsován býti, protože rejsováním oba zároveň vzniknou, tak že rejsujíce na př. dutý uhel *AOC*, obdržíme na druhé straně ramen vypuklý úhel *COA*. Proto se musí příště vždycky toliko úhel dutý rozuměti, kdykoliv bude řeč o úhlech, ač nebude-li opak zvláště připomenut.

6. Úhel rovnající se polovičce úhlu přímého, slove **úhel pravý** (rechter W.), na př. $\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOG = \frac{1}{2} AOG$ (obr. 6.). O ramenech úhlu pravého díme, že **stojí na sobě kolmo** (senkrecht, normal), a znamenáme to značkou kolmosť vyjádřující $\perp$, která se čte: „jest kolmo". — Pravý úhel značí se velkým *R*.

Pozn. Kolmici lze v kterémkoliv bodu dané přímky postaviti č. vztýčiti; též se může vždycky i z daného, mimo přímku ležícího bodu na tuto kolmice spustiti.

7. *V daném bodu nějaké přímky lze toliko jednu kolmici na tuto postaviti.* (Důkaz.)

Byla-li by mimo OD, která stojí na *AO* kolmo (obr. 6.) ještě některá jiná přímka na AO kolmo, na př. OC, musela by tato s ramenem *AO* zavírati taktéž pravý úhel, tak že by byl $\sphericalangle AOD = R$, $\sphericalangle COA = R$, následovně $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOC$, což očividně nemožné jest (dle § 5. 3.) a zřejmě ukazuje, že se pravosť předloženého výroku nikterak upříti nedá (důkaz nepřímý).

8. Z pojmu o pravém úhlu plyne věta: *Všechny pravé úhly jsou si rovny*; každý má totiž půl přímého. Vidíme tedy, že se přímý úhel rovná 2R.

Úhly přímé i pravé jsou veličiny stálé, velikosť svou neměnící.

9. Úhel, který jest větší pravého, nazývá se **úhel tupý** (stumpfer W.), na př. $\sphericalangle AOE$ (obr. 6.), který jest větší nežli pravý úhel AOD. Menší pak úhly pravého slovou **úhly ostré** (spitzige W.), na př. $\sphericalangle AOC < R$.

Úhly tupé a ostré jmenují se se též ú h l y k o s é (schiefe W.), a o jejich ramenech díme, že stojí na sobě š i k m o (schief).

P o z n. Kolmo mohou na sobě i kosé přímky státi, jen když spolu pravý úhel zavírají. Vodorovné a svislé přímky téhož místa stojí na sobě vždycky kolmo. Musí se proto rozdíl činiti mezi přímkami svislými a kolmými vůbec, poněvadž není každá kolmice svislou.

10. Pro svou stálou a nezměnitelnou velikosť hodí se pravý úhel za **míru úhlovou** (Winkelmaß), ku kterémužto cíli rozděluje se na 90 menších úhlů, jež **stupně** slovou (Grade, ^{0}); stupeň dělíme dále na 60 minut ($'$), minutu na 60 sekund ($''$) a sekundu na 60 tercií ($'''$). Úhlová minuta jest tedy malinký úhel, který 3600krát vzat jeden stupeň dává. $R = 90.60 = 5400'$.

Všechny ostré úhly leží mezi 0^0 a 90^0,
„ tupé „ „ 90^0 a 180^0; úhly 0^0 a 360^0 nedají se obrazně rozeznati, tak že jsou v obraze úhly α^0, α^0+360^0, $\alpha^0+2.360^0$, . . ., $\alpha^0+n.360^0$ jednostejné.

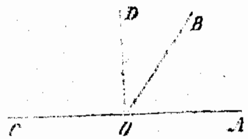
11. Z dvou úhlů, jež dohromady 180^0 činí, jest jeden druhému **výplňkem** (Ergänzung, Supplement); činí-li však dva úhly dohromady 90^0, jest jeden druhémn **doplňkem** (Complement). *Stejné úhly mají stejné doplňky i výplňky.*

Měl-li by se nějaký úhel vyměřiti, muselo by se přikládáním pravého úhlu vyšetřiti, kolikrát tato míra v daném úhlu obsažena jest (§ 3. 2.); pohodlněji měří se však úhly tak zvaným ú h l o m ě r e m (Winkelmesser, transporteur), který později vysvětlen bude (§ 26. 4).

§ 6.

1. Dva úhly mající týž vrchol a jedno rameno společné a jichžto dvě ramena směrem protivným v přímce leží, slovou **úhly vedlejší** (Nebenw.), na př. *AOB* a *BOC* (obr. 7.).

Pozn. K danému úhlu najde se přináležející úhel vedlejší, když se které koliv rameno daného úhlu přes vrchol prodlouží. Oba vedlejší úhly leží na téže straně přímky. Zároveň vysvítá z obrazce a z pojmu o úhlech vedlejších, že k dané přímce dopadati může jiná přímka buď kolmo nebo šikmo. V prvním případu jsou oba vedlejší úhly pravé; v druhém případu jest jeden z nich tupý a druhý ostrý.



Obr. 7.

2. *Součet dvou vedlejších úhlů rovná se dvěma pravým.*

Důkaz. Dopadá-li společné rameno na druhé kolmo, jako to na př. jest při úhlech *COD* a *DOA*, jest věta naše zřejmá. Avšak i když oba úhly kosé jsou, dává součet jejich přímý úhel AOC = 2 R.

Z nauky této plynou věty:

a) Z dvou vedlejších úhlů jest jeden druhému výplňkem.

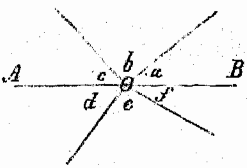
b) Je-li jeden z vedlejších úhlů pravý, musí i druhý pravým býti.

Pozn. Stojí-li jedna přímka na druhé tak, že spolu zavírají úhly pravé, stojí obě přímky na sobě kolmo.

Též jsou nyní i následující věty patrny:

α) *Součet úhlů, jež na téže straně přímky leží a společný vrchol mají, rovná se dvěma pravým.* V obr. 8. jest na př.

$\sphericalangle a + b + c = 2R$ (činí dohromady přímý úhel AOB).



Obr. 8.

β) *Součet všech úhlů kolem jednoho bodu rovná se čtyrem pravým*, na př. $\sphericalangle a + b + c + d + e + f = 4R$. (Úhly totiž na hořejší straně přímky *AB* dají dohromady 2R, a taktéž úhly na spodní straně přímky *AB* dají 2R, dohromady tedy 4R.)

γ) *Přímky, jimiž se dva vedlejší úhly rozpůlují, stojí na sobě kolmo.* Je-li totiž v obr. 7. $\sphericalangle COB + \sphericalangle BOA = 2R$, bude když celou rovnici dvojkou rozdělíme, $\frac{1}{2} \sphericalangle COB + \frac{1}{2} \sphericalangle BOA = R$. Dvě k sobě přiléhající půlky dávají dohromady pravý úhel, jsou tedy na sobě kolmo (§ 6. 2, pozn.).

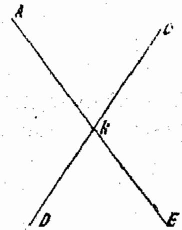
3. Nauka (2) dá se též obrátiti, a zní: *Rovná-li se součet dvou úhlů, jež jedno rameno a vrchol společný mají, dvěma pravým, musí druhá jejich ramena ležeti protivným směrem v téže přímce,* t. j. úhly ty jsou sobě vedlejšími. Důkaz jest nepřímý: Kdyby jinak bylo a ramena *AO* a *CO* (obr. 7.) nesplynula v přímku jedinou, musel by se součet obou daných úhlů rovnati buď úhlu dutému, nebo vypuklému, což s naším předpokladem (AOB + BOC = 2R) v odporu stojí.*)

*) Každá nauka nedá se jen tak snadno obrátiti, poněvadž z pravdivosti nějaké věty neplyne také zároveň pravdivost jejího obrácení. Tak na př. bylo by chybné z věty: „Přímé úhly jsou si rovny" tvrditi opáčnou větu: „Dva sobě rovné úhly jsou úhly přímými."

II. Protínající se přímky a úhly při tom vzniklé.

§ 7.

1. Protíná-li se dvé přímek vespolek, vzniknou kolem průsečníku 4 úhly, z nichžto vždycky dva na jedné straně přímky ležící vedlejšími jsou; mimo to vzniklo ale ještě dvakrát po dvou úhlech, jichžto ramena z téhož vrcholu vybíhajíce směry protivné mají a **úhly vrcholovými** slovou (Scheitelwinkel), na př. $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle DBE$, $\sphericalangle ABD$ a CBE (obr. 9.).



Obr. 9.

Pozn. K danému úhlu narejsuje se úhel vrcholový, když se obě jeho ramena přes vrchol prodlouží.

Úhly vrcholové jsou si rovny. Důkaz, že jest na př. $\sphericalangle DBA = EBC$.

$\sphericalangle DBA + ABC = 2R$ (co vedlejší), a taktéž

$\sphericalangle EBC + ABC = 2R$; dle zásady, že dvě veličiny rovné třetí, atd. jest

$\sphericalangle DBA + ABC = \sphericalangle EBC + ABC$, tudíž i bez úhlu ABC

$\sphericalangle DBA = EBC$.

Pozn. 1. Pravosť nauky této plyne již také i z § 5. 1; vespolné naklonění přímek *AB* a *CD* zůstává totiž i po prodloužení přes vrchol totéž, jako bylo dříve, tudíž $\sphericalangle ABD = CBE$. Jak se dokáže, že jest $\sphericalangle ABC = DBE$?

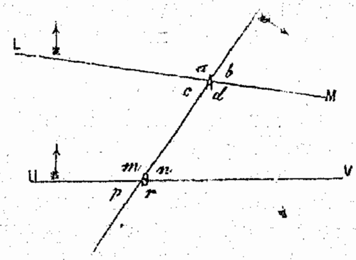
Pozn. 2. Známe-li velikosť jednoho z úhlů proseknutím se dvou přímek vzniklých, známe již i velikosť ostatních úhlů; je-li na př. $\sphericalangle ABC = 75^0$, jest i $\sphericalangle DBE = 75^0$, $\sphericalangle ABD = 180^0 - ABC = 105^0 = CBE$.

Pozn. 3. Je-li jeden z vrcholových úhlů pravý, jsou všechny čtyry úhly pravé.

2. Protíná-li nějaká přímka dvé jiných přímek, vznikne kolem obou průsečníků dvakrát čtvero úhlů, z nichžto rozeznáváme:

α) **úhly vnitřní** (innere W.), které leží mezi přímkami sečenými po obou stranách přímky sečné, na př. $\sphericalangle c, d, m, n$ (obr. 10.);

β) **úhly zevnitřní** (äußere W.), které leží po obou stranách přímky sečné na zevnitřních stranách přímek sečených jako jsou $\sphericalangle a, b, p, r$.



Obr. 10.

Když pak z každého vrcholu po jednom berouce na dvé je skládáme, obdržíme:

γ) **úhly souhlasné** č. stejně položené (correspondirende W.), které leží na souhlasných stranách jak přímek sečených tak i na souhlasné straně přímky sečné, na př.

$\sphericalangle a$ a m (oba nahoře a oba v levo),
$\sphericalangle b$ a n („ „ „ v pravo),
$\sphericalangle c$ a p („ dole „ v levo),
$\sphericalangle d$ a r („ „ „ v pravo);

δ) **úhly přilehlé** (Anwinkel), které jsou položeny na téže straně přímky sečné, na protivných však stranách přímek sečených, na př.

$\sphericalangle a$ v levo n a h o ř e a $\sphericalangle p$ v levo d o l e,
$\sphericalangle c$ „ dole a $\sphericalangle m$ „ nahoře,
$\sphericalangle b$ v pravo n a h o ř e a $\sphericalangle r$ v pravo d o l e,
$\sphericalangle d$ „ dole a $\sphericalangle n$ „ nahoře;

ε) **úhly střídavé** (Wechselw.), které leží na rozličných stranách přímky sečné a taktéž na rozličných stranách přímek sečených; tak jsou na př.

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \sphericalangle c \text{ a } n \\ \sphericalangle d \text{ a } m \end{array}\right\} & \text{vnitřní} \\ \left.\begin{array}{l} \sphericalangle a \text{ a } r \\ \sphericalangle b \text{ a } p \end{array}\right\} & \text{zevnitřní} \end{array}\right\} \text{úhly střídavé.}$$

3. Dána-li souvislosť kterých koliv dvou takto k sobě přináležejících úhlů, můžeme se snadno přesvědčiti, že tím již i vlastnosti ostatních k sobě přináležejících úhlů dány jsou a sice:

α) Kdykoliv jest proseknuto dvé přímek přímkou třetí a z povstalých tu úhlů byly by a) buď dva souhlasné, nebo b) dva střídavé úhly sobě rovny, a nebo c) rovnal-li by se součet kterých koliv dvou přilehlých úhlů dvěma pravým; tu by byly sobě rovny též všechny ostatní souhlasné i všechny střídavé úhly a součet kterých koliv jiných dvou přilehlých úhlů rovnal by se dvěma pravým.

Důkaz. Jsou-li a) dva souhlasné úhly sobě rovny, na př. $\sphericalangle a = m$, (obr. 10), tu budou dle předešlých nauk nejen jejich vedlejší nýbrž i vrcholové úhly sobě rovny, t. j. $\sphericalangle b = n$, $\sphericalangle c = p$, $\sphericalangle d = r$ (úhly souhlasné jsou si rovny). Dále následuje, že $\sphericalangle b = p$ (oba se rovnají $\sphericalangle n$), $\sphericalangle a = r$ (z podobné příčiny), a taktéž že $\sphericalangle c = n$ (oba se rovnají $\sphericalangle b$), a $\sphericalangle d = m$ (oba se rovnají $\sphericalangle r$), t. j. úhly střídavé jsou si rovny. A poněvadž jest $\sphericalangle m + n = 2R$, a při tom $\sphericalangle n = c$, můžeme za $\sphericalangle n$ dosaditi rovný mu úhel c, načež bude $\sphericalangle m + c = 2R$ t. j. součet dvou přilehlých úhlů rovná se 2R; též jest $\sphericalangle d + c = 2R$, do čehož jestliže dosadíme za c rovný mu úhel n, bude $\sphericalangle d + n = 2R$. Podobně se najde, že $\sphericalangle a + p = 2R$ a $\sphericalangle b + r = 2R$.

Jsou-li b) dva střídavé úhly sobě rovny, na př. $\sphericalangle c = n$; tu budou opět jejich úhly vedlejší i vrcholové sobě rovny, t, j. $\sphericalangle d = m$, $\sphericalangle a = r$ a $\sphericalangle b = p$ (úhly střídavé jsou si rovny). Rovnosť souhlasných úhlů plyne pak z porovnání známých již úhlů, totiž

$\sphericalangle a = m$ (oba se rovnají $\sphericalangle r$),
$\sphericalangle b = n$ („ „ „ p), atd.

A jelikož jest $\sphericalangle m + n = 2R$ a při tom $n = c$, bude konečně i $\sphericalangle m + c = 2R$ (přilehlé úhly dávají 2R) atd.

Rovná-li se konečně c) součet dvou příleblých úhlů dvěma pravým, na př. $\sphericalangle c + m = 2R$; můžeme tvrditi: $\sphericalangle m + n = 2R$, následovně jest $\sphericalangle c + m = m + n$; a z toho plyne, že jest $\sphericalangle c = n$, pročež jsou dle dokázaných již odstavců a) a b) i ostatní věty pravé.

β) *Kdykoliv jest dvé přímek proseknuto přímkou třetí, a o úhlech při tom vzniklých bylo by známo, že a) buď dva souhlasné úhly, nebo b) dva střídavé úhly velikosť rozličnou mají, a nebo konečně c) že součet dvou přílehlých úhlů* $\gtrless 2R$ *jest; musí býti nerovny též všechny ostatní souhlasné i střídavé úhly, a součet kterých koliv jiných úhlů přílehlých bude taktéž* $\gtrless 2R$.

Důkaz. Je-li na př. ze skupeniny souhlasných úhlů $\sphericalangle a > m$, musí býti $\sphericalangle d > r$ (co vrcholové); a poněvadž $a + c = 2R$ a taktéž $\sphericalangle m + p = 2R$, musí i $\sphericalangle a + c = m + p$. Od této rovnosti když se odečte nerovnosť . . $\sphericalangle a > m$, zbyde

$$\frac{\quad - \quad -}{\sphericalangle c < p,}$$

a tím i jich vrcholové $\sphericalangle b < n$.

Dále jest $a + c = m + n$, a od toho když se odečte

$$\frac{a > m, \text{ zbyde}}{\sphericalangle c < n,}$$

následovně i jich vrcholové $\sphericalangle b < p$.

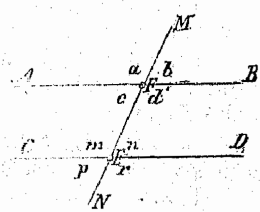
Konečně bude, když rovnosť $\sphericalangle m + n = 2R$ porušíce dosadíme za $\sphericalangle m$ větší $\sphericalangle d$, který se úhlu *a* rovná, $\sphericalangle d + n > 2R$, atd.

Provedení dalšího důkazu ponechává se pilnosti čtenáře. Opak těchto dvanácti hlavních vět dá se podobným spůsobem dokázati, kteréžto provedení ale taktéž pilnosti čtenáře se ponechává.

§ 8.

1. *Protíná-li nějaká přímka dvé* **rovnoběžných** *přímek, jsou úhly souhlasné i střídavé sobě rovny, a součet dvou úhlů přílehlých rovná se dvěma pravým.*

Důkaz. Zde netřeba než jedno dokázati; všechno ostatní plyne pak z § 7, 3. Rovnosť úhlů souhlasných plyne zde ale již z ponětí o rovnoběžnosti přímek a velikosti úhlů. Přímky totiž *AB* a CD (obr. 11) jsouce rovnoběžnými mají týž směr a co takové musí od jiné přímky *MN* a tato zase od nich v tuže stranu rovnou měrou odchýleny býti; tato odchýlka jest ale úhel. Pročež je-li *AB* ∥ *CD*, musí být $\sphericalangle b = n$.



Obr. 11.

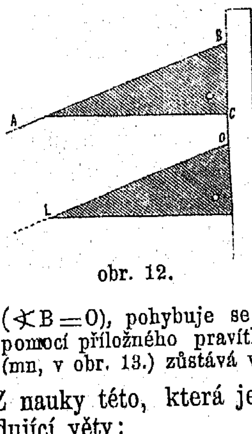
Pozn. Důkaz k této nauce může se i tím provésti, že bychom pokryli úhly jednoho vrcholu úhly vrcholu druhého. Pošinuje-li se totiž rovnoběžka *CD* nahoru tak, aby směru svého nezměnila a průsečník *E* aby sečkou *MN* procházel; splynou, jak mile bod *E* do *F* přijde, obě rovnoběžky v přímku jedinou a úhly souhlasné se vespolek pokryjí. Úhly střídavé promění se při tom v úhly vrcholové, a přilehlé úhly v úhly vedlejší.

Z nauky této následuje: „Stojí-li nějaká přímka kolmo na jedné z dvou rovnoběžek, stojí kolmo též na druhé rovnoběžce“ (souhlasné úhly jsou při tom pravé).

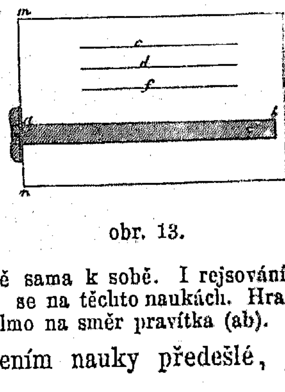
2. *Protíná-li nějaká přímka dvé jiných přímek tak, že buď souhlasné nebo střídavé úhly sobě rovny jsou, a nebo že součet dvou přilehlých úhlů 2R se rovná; jsou protaté přímky rovnoběžnými.* (Obrácení věty předešlé.)

Důkaz. Postupovala-li by přímka *CD* (obr. 11.) tím spůsobem nahoru, aby směru svého neměnila a průsečník *E* aby sečkou *MN* procházel, ažby konečně do *F* přišel; budou se muset dle našeho předpokladu souhlasné úhly vespolek pokrýti, t. j. přímka *CD* sjednotí se s *AB*, tak že bude směr obou přímek jednostejný. Jest tudy $AB \parallel CD$.

Pozn. Na větě této zakládá se rejsování rovnoběžek pomocí dvou trojuhelníků. Hrana totiž *AB* (obr. 12.) pohyblivého trojúhelníku zůstává k hraně pevného pravítka rovnou měrou nakloněna; zavírajíc s ní tedy úhly všude sobě



obr. 12.



obr. 13.

rovné ($\sphericalangle B = O$), pohybuje se rovnoběžně sama k sobě. I rejsování rovnoběžek pomocí příložného pravítka zakládá se na těchto naukách. Hrana totiž desky (mn, v obr. 13.) zůstává vždycky kolmo na směr pravítka (ab).

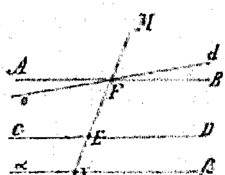
Z nauky této, která jest obrácením nauky předešlé, plynou následující věty:

α) „Dvě přímky stojíce kolmo na jiné přímce, jsou spolu rovnoběžny.“

β) „Stojí-li jedna ze dvou rovnoběžek na jiné přímce buď kolmo nebo šikmo, stojí na ní i druhá rovnoběžka buď kolmo nebo šikmo.“

3. *Jedním bodem může se toliko jedna přímka vésti rovnoběžně s přímkou danou.*

Důkaz. Bodem *F* prochází $AB \parallel CD$ (obr. 14.); kdyby ale mimo *AB* ještě jiná přímka, na př. *cd* bodem *F* procházejíc s CD rovnoběžnou býti měla, musely by *AB* a *cd* jednostejný směr a k libovolné, bodem *F* procházející sečce MN totéž naklonění míti,



obr. 14.

t. j. souhlasné úhly *DEM*, *BFM* a *dFM* byly by vespolek sobě rovny, což ale pojmu o rovnosti úhlů odporuje (§ 5. 3).

4. *Jsou-li dvě přímky rovnoběžnými s přímkou třetí, jsou též i spolu rovnoběžny.*

Důkaz. Protneme-li všechny tři přímky *AB*, *CD*, $\alpha\beta$ (obr. 14.) přímkou MN, budou, poněvadž jest AB $\parallel$ $\alpha\beta$, souhlasné úhly sobě rovny, tedy $\sphericalangle \mathrm{MFB} = \sphericalangle \mathrm{M}\gamma\beta$; a jelikož jest i CD $\parallel$ $\alpha\beta$, bude také

$\sphericalangle \mathrm{MED} = \sphericalangle \mathrm{M}\gamma\beta$, pročež

$\sphericalangle \mathrm{MFB} = \mathrm{MED}$, z čehož následuje, že $AB \parallel CD$.

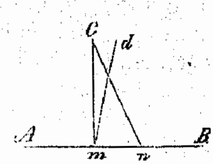
Dodatek. Přímka, která protíná jednu z dvou nebo i více rovnoběžek, musí, dostatečně jsouc prodloužena, i ostatní rovnoběžky proseknouti.

5. *Protíná-li nějaká přímka dvé jiných přímek a objeví-li se při tom, že jest součet dvou přílehlých úhlů buď menší nebo větší $2R$; tu jsou proseknuté přímky nerovnoběžny a musí se v tu stranu sbíhati, na které jest součet přílehlých úhlů menší $2R$.*

Důkaz prvního dílu jest nepřímý: Kdyby nebyly proseknuté přímky nerovnoběžny, musely by býti spolu nutně rovnoběžny a pak by se rovnal součet dvou přílehlých úhlů 2R, což našemu předpokladu odporuje. V druhém dílu budiž na př. v obr. 14. $\sphericalangle cFN + \mathrm{CEM} < 2\mathrm{R}$, hleďme tedy úhel *cFN* o tolik zvětšiti, aby byl součet přílehlých úhlů roveň 2R. To se stane, když se rameno *cF* pozvedne a okolo bodu F otočíc přijde do polohy s CE rovnoběžné, t. j. do AF. Nyní protíná *cd* jednu z dvou rovnoběžek (v bodu F), musí tudy i druhou rovnoběžku proseknouti, a sice na té straně, kde se od rovnoběžného směru *AB* před svým točením do vnitř odchylovala, t. j. na té straně, jak bylo tvrzeno.

6. Z věty poslední plyne i hned věta následující: *S daného bodu může se na danou přímku toliko jedna kolmice spustiti.*

Důkaz. V obr. 15. budiž $\mathrm{Cm} \perp \mathrm{AB}$; kdyby mimo *Cm* ještě i $\mathrm{Cn} \perp \mathrm{AB}$ býti mělo, byl by úhel *CmB* i *CnA* pravým. Úhly tyto jsou ale vzhledem k sečeným přímkám *Cm* a *Cn* úhly přílehlými, a poněvadž by takto součet jejich 2R dával, musely by obě přímky *Cm* a *Cn* nutně rovnoběžnými býti (§ 8. 2), což našemu předpokladu (že obě z bodu *C* vybíhají) odporuje.

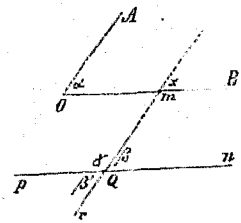


obr. 15.

Dodatek. Taktéž bude nyní patrno, že v určitém bodu nějaké přímky toliko jedna kolmice vztýčena býti může. Je-li totiž $\mathrm{Cm} \perp \mathrm{AB}$ (obr. 15), tak že jest $\sphericalangle \mathrm{CmB} = \mathrm{R}$, musí býti dle zásady, že celek větší jest nežli která koliv jeho část, $\sphericalangle dm\mathrm{B} < \mathrm{R}$, t. j. přímka *md* není na AB kolmo. A tak jako *dm* zavírá každá jiná přímka, jež s kolmicí *Cm* nesplývá, s danou přímkou úhly od pravého rozdílné; jest tudy *Cm* jedinou kolmicí v bodu *m*.

7. *Dva úhly, jichžto ramena vzájemně jsou rovnoběžná a vespolek směr buď souhlasný nebo protivný mají, jsou si rovny.*

Důkaz. Je-li na př. v obr. 16. $OA \parallel Qm$ a $OB \parallel Qn$, potřebujeme rameno Qm prodloužiti, až by proseklo hořejší rameno OB. I bude potom $\sphericalangle \alpha = x$, $\sphericalangle x = \beta$, následovně také $\sphericalangle \alpha = \beta$. — Jsou-li však směry rovnoběžných ramen protivné, jako na př. u úhlů α a β', prodlužme ramena jednoho úhlu přes vrchol a obdržíme ihned případ první.



Obr. 16.

Podobným spůsobem dokáže se věta: *Dva úhly, jichžto ramena rovnoběžná jsou, směr ale dílem souhlasný a dílem protivný mají, rovnají se dohromady* $2R$; jest totiž v obr. 16 $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle pQm = 2R$.

Pozn. Z vět těchto jest patrno, že, jsou-li dvě ramena úhlů sobě rovných rovnoběžná, jsou nutně i druhá jejich ramena rovnoběžná.

Kniha druhá.

O přímočarných obrazcích vůbec.

I. Strany a úhly obrazcův.

§ 9.

1. Každá čarami omezená část plochy slove **obrazec** (Figur)*. Dle toho, je-li obrazec omezen buď samými přímkami, buď křivkami, nebo čarami smíšenými, slove obrazec přímočarný (geradlinig), křivočarný (krummlinig) nebo smíšenočarný (gemischtlinig).

Dvě přímek nemůže obrazec všestraně omeziti; k úplnému zavření přímočarného obrazce jest potřeba nejméně tří přímek. Křivočarný obrazec může býti však i jednou křivkou zcela omezen.

2. Nejjednodušší křivočarný obrazec jest **kruh** (Kreis); jest totiž omezen pouze křivkou jedinou, která slove **čára kruhová** nebo kružice (Kreislinie) a jejížto veškeré body stejnou mají vzdálenost od jednoho pevného, uvnitř kruhu ležícího bodu. Pevný tento bod slove **střed** (Mittelpunkt, centrum) a přímka, vedená ze středu k některému bodu kruhové čáry, slove **poloměr** (Halbmesser, radius).

Zhusta nazývá se pro krátkost i čára kruhová „kruh".

---

* Zde bude jednáno toliko o obrazcích rovinných (V.).

Každá část kruhové čáry slove **oblouk** (Bogen, arcus); zvláště pak slove čtvrtý díl kruhové čáry **čtverník** (Quadrant), polovička **půlkruh**, a šestý díl **šesterník** (Sextant). Přímka, jež dva body čáry kruhové spojuje, slove **tětiva** (Sehne, chorde), tak že ku každému oblouku náleží i určitá tětiva.

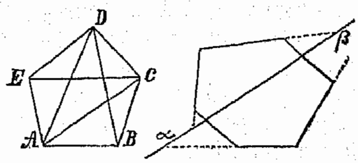
3. Čáry, jimižto se obrazec omezuje, slovou jeho **strany** a součet všech stran jmenuje se **obvod obrazce** (Umfang, Perimeter). Majíce zřetel k ploše kruhové, nazýváme čáru kruhovou též obvodem kruhu.

Dle počtu stran slovou obrazce třístrané, čtyrstrané, vůbec n-strané; a poněvadž každý přímočarný obrazec právě tolik stranami zavřených úhlů má, tolik stran v jeho obvodu jest, jmenujeme třístrané obrazce též **trojúhelníky** (Dreiecke),
čtyrstrané „ „ **čtyrúhelníky** (Viereck) atd. Obrazce mající více nežli čtyry strany, jmenujeme **mnohoúhelníky** (Vielecke, Polygone).

4. Vrcholy úhlů v obvodu obrazce ležících slovou též **rohy** obrazce (Ecken); úhly pak mající jednu stranu za společné rameno slovou **úhly přilehlé** (anliegende W.). Rovněž slovou i strany přílehlými, které spolu jeden úhel zavírají.

K straně AB na př. přiléhají v obr. 17. úhly A a B, k úhlu pak C přiléhají strany BC a DC.

Naproti tomu nazývají se v každém obrazci ony dvě částky, mezi kterými v obvodu obrazce stejně mnoho částek na obou stranách leží, částkami **protilehlými** (gegenüberliegend).



Obr. 17.

Tak jsou v obr. 17. strana AB a úhel D částky sobě protilehlé, protože se mezi nimi na levé i na pravé straně po dvou úhlech a dvou stranách nachází. V obrazci $abcdef$ leží za to naproti straně ab opět strana ed.

Snadno totiž nahlédneme, že v obrazcích, kde počet stran lichý jest, ku každé straně úhel protilehlou částku činí; v obrazcích pak s rovným počtem stran jsou protilehlé částky stejného druhu.

Každá přímka, která veškeré strany mnohoúhelníka nebo jich prodloužení protíná, slove **čára příčná** nebo jen **příčka** (Transversale), na př. $\alpha\beta$ v obr. 17.

Je-li příčka s některou stranou rovnoběžná, byl by jejich průsečník v nekonečné vzdálenosti.

Přímka, spojující vrcholy dvou úhlů, jenž v obvodu ku společné straně nepřiléhají, slove **úhlopříčna** (Diagonale), na př. AD, AC (obr. 17); a poněvadž tu z každého rohu ke všem ostatním, vyjmouc rohy v pravo a v levo nejblíže ležící, úhlopříčny vedeny býti mohou, sbíhá se v každém rohu mnohoúhelníka tolik úhlopříčen, kolik je v obvodu rohů, méně tři ($n-3$). Všech úhlopříčen bylo by tudy v každém obrazci n(n—3); avšak v tomto čísle jest každá úhlopříčna dvakrát počítána, jako na př. úhlopříčna AD jednou od A k rohu D, a podruhé od D k rohu A. *Jest tedy počet všech rozličných úhlopříčen v každém obrazci* $\frac{n(n-3)}{2}$; v trojúhelníku na př. $\frac{3(3-3)}{2}=0$,

v čtyrúhelníku $\frac{4(4-3)}{2}=2$,

v pětiúhelníku $\frac{5(5-3)}{5}=5$, atd.

§ 10.

1. Úhly mohou míti mnohoúhelníky ostré, pravé, tupé, ano i vypuklé č. do vnitř vbíhající (einspringende W.).

Jsou-li veškeré úhly i strany obrazce sobě rovny, slove obrazec **pravidelný** (regelmäßig, regulär); jsou-li ale toliko všechny strany sobě rovny, úhly pak rozličné, slove obrazec **rovnostranný** (gleichseitig). Jsou-li dále všechny úhly mnohoúhelníka sobě rovny, strany pak rozdílné, slove obrazec **rovnoúhelný** (gleichwinkelig); a mají-li konečně strany i úhly velikosť rozličnou, nazývá se obrazec **nepravidelný** (unregelmäßig, irregulär). — Mají-li strany a úhly nějakého obrazce takovou velikosť a zároveň i takové položení, že po obou stranách nějaké přímky vždycky dvě stejné částky v témž pořádku za sebou jdou, slove obrazec souměrný (symmetrisch) a přímka nadzmíněná slove osou souměrnosti (Achse der Symmetrie).

Pozn. 1. Dva body leží vzhledem k nějaké přímce souměrně, když jejich vzdálenosť přímkou touto půlena jest.

Pozn. 2. Všechny pravidelné mnohoúhelníky jsou souměrny; a některé obrazce mají dokonce i více os souměrnostních.

2. Mimo velikosť stran a úhlů bývá ještě u obrazců i jich velikosť a tvar předmětem měřického pozorování. Mluví-li se o velikosti obrazce, musí se vždycky rozsáhlosť jeho plochy rozuměti; tu pak jest patrno, že na př. čtyrstraný obrazec takovou plochy rozsáhlosť míti může, jako jiný pěti- i vícestraný obrazec. Taktéž může křivočarný obrazec co do velikosti své plochy rovným býti obrazci přímočarnému. Jest proto věta: „Obrazcové mohou míti stejnou plochy rozsáhlosť i když tvaru rozličného jsou,“ v kterémžto případu díme: Obrazcové jsou si rovni (gleich).

3. *Obrazcové jsou si podobni* (ähnlich), když mají toliko jednostejný tvar, co do velikosti ale rozdílni jsou.*)

Z toho plyne, že si podobnými býti mohou jen takoví obrazcové, kteří mají stejně mnoho stran, na př. trojúhelníky trojúhelníkům, čtyrúhelníky čtyr-

*) Další vysvětlení podobnosti přijde v § 35, 1.

úhelníkům, atd. Lišiti mohou se podobné obrazce od sebe pouze svou velikostí.

Znaménko podobnosti jest $\sim$.

Dodatek. Rejsujíce obrazec, který má býti obrazci danému (originálu, obrazu původnímu) podoben, pravíme, že předložený obrazec odlikujeme č. kopírujeme, a nový tento obraz slove **odlika** nebo **kopie**. Kopie musí býti originálu vždycky podobna; co do velikosti může býti ale právě tak velká, buď větší a nebo i menší originálu. V posledních dvou případech byl obrazec buď zvětšen nebo zmenšen.

Odlikování průsvitným papírem slove snímání, a obraz takto vzniklý snímek.

4. Obrazcové konečně mající stejnou velikosť i stejný tvar slovou jednostejnými č. **shodnými** (congruent). Shodné obrazce musí se na vzájem dokonale krýti, když je náležitě na sebe položíme, t. j. meze jednoho obrazce padnou v meze obrazce druhého.

Shodné obrazce mají proto taktéž stejně mnoho stran a nemohou se ničím jiným od sebe lišiti, než že se na rozličných místech nacházejí. Obrazce mohou dle toho sobě rovnými býti aniž by proto shodnými býti musely.

Znaménko shodnosti jest $\cong$. — Při shodných obrazcích jsou ony strany a úhly, jež na sebe padnouce vespolek se pokrývají, sobě rovny a slovou **souhlasnými** (übereinstimmend) nebo **stejnolehlými** (homolog); proto díme: *V shodných obrazcích jsou stejnolehlé strany i úhly sobě rovny*, a naopak: *obrazce, jichžto stejnolehlé úhly i strany střídavě sobě rovny jsou* (nebo se pokrývají) *musí býti shodnými.*

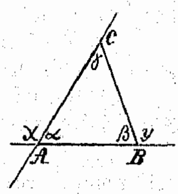
A. O trojúhelníku zvláště.

§ 11.

1. Nejjednodušší přímočarný obrazec jest trojúhelník, o jehož stranách platí věta: *Dvě strany trojúhelníka jsou dohromady větší nežli strana třetí*, v obr. 18 na př. jest $AB < AC + BC$.

Důkaz k této větě odpadne, když dle § 1, 2. pozn. uvážíme, že mezi dvěma body (zde A a B) přímka nejkratší dráhou jest.

Z nerovnosti $AB < AC + BC$ obdržíme, jestliže na obou stranách odečteme na př. AC, $AB - AC < BC$, t. j. *v trojúhelníku jest každá strana větší, nežli rozdíl druhých jeho stran.**)



Obr. 18.

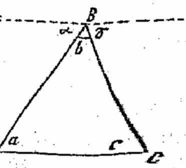
2. Úhly rozeznáváme v trojúhelníku dvojího druhu, a sice: a) **úhly vnitřní** (innere W.), které

*) Přímý důkaz k těmto dvěma větám viz v § 11, 15.

stranami trojúhelníka zavřeny jsou (v obr. 18. na př. $\sphericalangle \alpha, \beta, \gamma$); b) **úhly zevnitřní** (äußere W.), z nichžto každý zavřen jest jednou stranou a prodloužením strany druhé (na př. $\sphericalangle$ x, y, C).

Při každém vrcholu mohly by se prodloužiti obě strany a tím by vzniklo při každém vrcholu dvé zevnitřních úhlů, jako na př. při vrcholu A a úhel x, jenž vznikl prodloužením strany *BA*, a potom $\sphericalangle$A, který vznikl prodloužením strany CA. Tyto dva úhly jsou si však rovny (proč?) a proto bývá v trojúhelníku vždycky řeč toliko o třech rozličných zevnitřních úhlech.

3. O úhlech trojúhelníka platí věty: a) *Součet vnitřních úhlů rovná se v trojúhelníku dvěma pravým.*


obr. 19.

Důkaz. Vede-li se některým vrcholem rovnoběžka k protilehlé straně, na př. MN || AB, vzniknou úhly, jež se úhlům trojúhelníka rovnají, a sice $\sphericalangle a = \alpha$, $\sphericalangle c = \gamma$ (proč?). Úhly však při vrcholu *C* ležící dají dohromady přímý úhel, t. j. $\sphericalangle \alpha + b + \beta = 2R$, pročež bude, když do tohoto součtu dosadíme za α a γ rovné jim úhly *a* a *c*, $\sphericalangle a + b + c = 2R$.

b) *V trojúhelníku rovná se každý zevnitřní úhel součtu obou vnitřních protilehlých úhlů.*

Slovem „protilehlý“ chce se říci, že z těchto dvou vnitřních úhlů žádný neleží vedle zevnitřního úhlu, o němž právě řeč jest.

Důkaz. V obr. 18. má býti na př. $\sphericalangle x = \beta + \gamma$. K účelu tomu srovnejme rovnice:

$$\sphericalangle x + \alpha = 2R, \text{ (proč?)}$$
$$\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma = 2R, \text{ bude tedy}$$
$$\sphericalangle x + \beta = \alpha + \beta + \gamma, \text{ a nebo,}$$

když se na obou stranách $\sphericalangle \beta$ odečte, $\sphericalangle x = \alpha + \gamma$.

4. Z vět právě dokázaných plynou věty následující:

a) V trojúhelníku jest součet dvou úhlů menší nežli 2R; proto může býti v každém trojúhelníku toliko jeden úhel pravý nebo tupý, ostatní dva jsou vždycky ostré.

b) Je-li v trojúhelníku jeden úhel pravý, rovná se součet obou ostrých úhlů pravému.

c) Jsou-li v trojúhelníku dva úhly známy, jest již i třetí úhel znám, rovná se totiž rozdílu z 180^0 a součtu obou daných úhlů. Proto se mohou k rejsování toliko dva úhly libovolně vzíti; úhel třetí jest pak jejich výplňkem na 180^0.

d) Mají-li dva trojúhelníky po dvou úhlech sobě rovných, jsou i třetí úhly obou trojúhelníků sobě rovny.

e) Každý zevnitřní úhel trojúhelníka jest větší, nežli kterýkoliv z jeho vnitřních protilehlých úhlů.

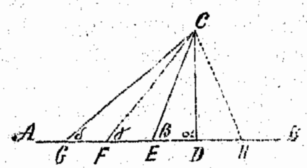
Čtenář podej ještě důkaz následující věty: „Rozpůlí-li se zevnitřní úhel při vrcholu rovnoramenného trojúhelníka, bude půlící přímka ku základně trojúhelníka rovnoběžna.“

5. *Součet všech tří zevnitřních úhlů rovná se v trojúhelníku 4R.*

Důkaz. Jak z obr. 18. viděti lze, dává každý zevnitřní úhel se svým vnitřním vedlejším 2R; obdržíme tudy celkem $3 . 2R = 6R$, z kteréhožto součtu když součet vnitřních úhlů odejmeme (2R), zbyde pro všechny zevnitřní úhly $6R - 2R = 4R$.

6. *Dopadá-li k dané přímce z nějakého bodu více přímek, může a) jen jedna z nich k dané přímce kolmo dopadati; b) ostatní přímky dopadají k ní pod úhly ostrými, které jsou tím menší čím vzdálenější jsou paty šikmých přímek od paty kolmice.*

Důkaz. a) Budiž $CD \perp AB$ (obr. 20); kdyby mimo tuto kolmici ještě některá přímka na př. CE k AB kolmo dopadala, vznikl by trojúhelník CED, v kterém by byly úhel D i E pravými, což nemožné jest (4. a). Jiný důkaz zakládá se na § 8. 6.



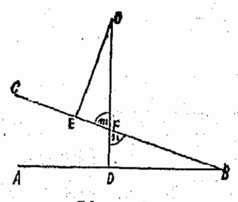
Obr. 20.

b) Když dokázáno jest, že $\sphericalangle \alpha = R$, musí býti v trojúhelníku CED $\sphericalangle \beta$ ostrý (4. a); z podobné příčiny jsou i v trojúhelnících CFD, CGD úhly γ a δ ostré. Úhel však β jest co zevnitřní trojúhelníku CEF větší úhlu γ, a na tomtéž základu jest v $\triangle$ CGF $\sphericalangle \gamma > \delta$; pročež jest $\sphericalangle \beta > \gamma > \delta >$ atd.

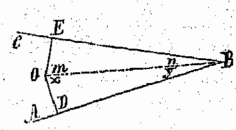
7. *Spustí-li se s daného bodu, který mimo ramena nějakého úhlu leží, na tyto kolmice, jest úhel kolmicemi zavřený roveň úhlu danému.*

Důkaz. V obr. 21. budiž $OE \perp BC$ a $OD \perp AB$; tím vznikly dva trojúhelníky *FDB* a *FOE*, které mají po dvou úhlech sobě rovných ($\sphericalangle m = n$, $\sphericalangle E = D = R$), musí tudy nutně i jejich třetí úhly sobě rovnými býti, t. j. $\sphericalangle O = B$.

Pozn. Věta tato pronáší se mnohdy pro krátkost i takto: *úhly, jichžto ramena na sobě kolmo stojí, jsou si rovny.*



Obr. 21.



Obr. 22.

8. *Spustí-li se z daného bodu, který mezi rameny nějakého úhlu leží, na tyto kolmice, vznikne úhel, jímž se daný úhel na 180° doplňuje.*

Důkaz. Je-li v obr. 22. $OD \perp AB$ a $OE \perp BC$, potřebujeme toliko bod O s vrcholem B spojiti, a obdržíme dva pravoúhelné trojúhelníky, v nichžto jest $\sphericalangle x + y = R$, a $\sphericalangle m + n = R$, následovně dohromady $\sphericalangle \underbrace{x + m} + \underbrace{y + n} = 2R$, t. j. $\sphericalangle DOE + ABC = 2R$.

§ 12.

1. Vzhledem k úhlům dělíme trojúhelníky dle velikosti největšího úhlu: *α*) na trojúhelníky **pravoúhelné** (rechtwinkelige D.), kde jeden úhel pravý jest; b) na trojúhelníky **tupoúhelné** (stumpfwinkelige D.), kde jest jeden úhel tupý; a c) na trojúhelníky **ostroúhelné** (spitzwinkelige D.), kde všechny tři úhly ostré jsou. Při psaní užívá se místo slova „trojúhelník" znaménko △. V pravoúhelném trojúhelníku jmenují se strany pravý úhel zavírající **odvěsny** (Katheten), strana pak naproti pravému úhlu ležící slove **podpona** nebo **přepona** (Hypotenuse).

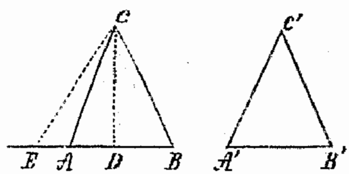
2. Vzhledem k délce stran může býti trojúhelník *α*) **rovnostraný** (gleichseitig), když všechny jeho strany sobě rovny jsou; *β*) **rovnoramený** (gleichschenklig), když má jen dvé stran sobě vovných; *γ*) **nerovnostraný** (ungleichseitig), když má každá strana délku rozličnou.

Každý rovnostraný trojúhelník jest zároveň i rovnoramený.

3. Která koliv strana, na nížto si trojúhelník postavený myslíme, jmenuje se jeho **základna** nebo **půdice** (Grundlinie, basis); vrchol pak úhlu naproti základně ležícího jest v trojúhelníku to nejvyšší místo a slove **vrchol** trojúhelníka (Scheitel, Spitze).

V trojúhelníku rovnoramenném pokládá se obyčejně třetí lichá strana za základnu.

Přímka z vrcholu kolmo na základnu spuštěná udává výšku trojúhelníka; její poloha závisí na úhlech k základné přilehajících, a sice: *α*) *Jsou-li oba úhly na základně ostré, musí padnout výška do vnitř trojúhelníka.*



Obr. 23.

Důkaz. Že nemůže výška na žádnou stranu CA a CB přilehnout, plyne z předpokladu, že tyto se základnou úhly ostré zavírají. Ona však nemůže ani ven z trojúhelníka padnouti, na př. do položení *CE*, poněvadž by byl v trojúhelníku *CEA* jeden úhel pravý (∢ E) a zároveň jeden tupý (∢ EAC co vedlejší ostrého úhlu A), což jest dle § 11. 4, a. nemožné. Následovně musí padnout výška do trojúhelníka.

β) *Přiléhá-li k základně jeden pravý úhel, jest jeho odvěsna zároveň výškou trojúhelníka* (proč?).

γ) *Přiléhá-li k základně jeden tupý úhel, padne výška mimo trojúhelník na prodloužení základny*, v trojúhelníku na př. *AEC* do *D* (proč?).

§ 13.

1. *Jsou-li v trojúhelníku dvě strany sobě rovny, jsou i úhly naproti nim ležící sobě rovny.*

Důkaz. Budiž v trojúhelníku ABC (obr. 23) $AC = BC$, a trojúhelník ten ještě jednou vyobrazen, tak aby byl $\triangle ABC$ jednostejný s $\triangle A'B'C'$, t. j. aby bylo $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\sphericalangle A = A'$, $\sphericalangle B = B'$, $\sphericalangle C = C'$. Položme v myšlénkách trojúhelníky tyto tak na sebe, aby se jejich stejné strany pokryly. To se může státi dvojím spůsobem: Jednou když položíme $B'C'$ na BC, po druhé, když položíme $B'C'$ na AC. V druhém případu padne krajní bod C' do C a bod B' do A; že ale jest $\sphericalangle C = C'$, přilehne i rameno $A'C'$ na rameno BC, a poněvadž dle předpokladu obě tato ramena sobě rovna jsou, padnou i druhé jejich krajní body A' a B na sebe. Tím ale pokrývají se již také i krajní body stran AB a $A'B'$ a úhly, jichžto ramena takto se pokrývají, jsou sobě rovnými, t. j. $\sphericalangle B' = A$, a $\sphericalangle B' = B$, pročež musí také $\sphericalangle A = B$ i $\sphericalangle A' = B'$.

2. *V trojúhelníku, jehož dva úhly sobě rovny jsou, jsou i strany naproti těmto úhlům ležící sobě rovny.* (Obrácená věta předešlá.) Důkaz jest předešlému zcela podobný.

Pozn. Na obou těchto větách zakládají se výroky: a) v rovnoramenném trojúhelníku jsou úhly na základné sobě rovny a každý z nich jest menší pravého; b) jsou li v trojúhelníku dva úhly sobě rovny, jest trojúhelník rovnoramenný.

Výsledky. Z vět těchto plynou věty následující:

α) V rovnostraném trojúhelníku jsou všechny úhly sobě rovny a každý má $180^0 : 3 = 60^0$ (proč?).

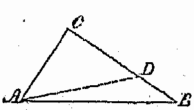
β) Rovnostraný trojúhelník jest obrazec pravidelný (proč?).

γ) Známe-li v trojúhelníku rovnoramenném který koliv jeho úhel známe již i všechny ostatní. V $\triangle ABC$ (obr. 23) jest na př. $\sphericalangle A_1 = 49^0 25' 38''$, jak velké jsou ostatní dva úhly?

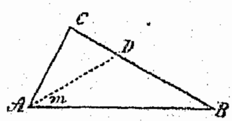
δ) Z daného bodu (C) lze k přímce AB toliko dvé sobě rovných přímek narejsovati (ramena rovnoramenného trojúhelníka).

3. *V každém trojúhelníku leží naproti větší straně též i větší úhel.*

Důkaz. Buď v obr. 24. $BC > AC$; tehdy se odřízne z té větší strany kus $CD = AC$ a vede se pomocná přímka AD. Trojúhelník ACD jest potom rovnoramenný, následovně $\sphericalangle CAD = CDA$ (§ 13. 1). Při tom jest zároveň $\sphericalangle CAB > CAD$, a tudy i větší



Obr. 24.



Obr. 25.

nežli $\sphericalangle CDA$, t. j. $\sphericalangle CAB > CDA$. Tento jest ale vzhledem k trojúhelníku ADB zevnitřním úhlem, tudy $\sphericalangle ADC > B$; pročež bude nyní $\sphericalangle CAB > ADC > B$, a tím spíše tedy $\sphericalangle CAB > B$.

4. *V každém trojúhelníku leží naproti většímu úhlu též i větší strana.*

Důkaz. Buď ∢A > B (obr. 25.); tehdy se vede z *A* přímka *AD* tak, aby odřízla z úhlu *A* část $m = B$. I budou potom v trojúhelníku ABD úhly na základně sobě rovny; musí tedy i protilehlé jim strany AD a DB vespolek rovnými býti. — V druhém trojúhelníku ACD jest AD + CD > AC, v čemž když za *AD* dosadíme *DB*, bude BD + CD > AC, t. j. CB > AC, jak bylo stvrzeno.

Z vět těchto plyne:

α) V trojúhelníku pravoúhelném jest přepona stranou nejdelší (proč?).

β) V tupoúhelném trojúhelníku jest ta strana nejdelší, která leží naproti tupému úhlu.

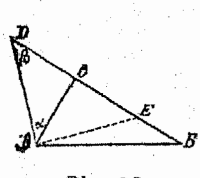
γ) Kolmice jest ze všech přímek, které z nějakého bodu k dané přímce vedeny býti mohou, nejkratší; ostatní jsou pak tím delší, čím více se od kolmice odchylují. V obr. 20. jest na př. CE > CD co podpona; a poněvadž jest tu ∢β ostrý, bude ∢FEC tupý; pročež v tupoúhelném trojúhelníku FEC bude FC > CE; a podobně jest i GC > FC > CE > CD.

Pozn. Řečená kolmice má jakožto nejkratší přímka délku určitou, kdežto ostatní přímky dle toho, jak se od kolmice odchylují, délku neurčitou a nestejnou mají; proto se béře kolmice tato za vzdálenosť bodu C od přímky AB. Mluví-li se tudy o vzdálenosti nějakého bodu od přímky, rozumí se vždycky kolmice z řečeného bodu k dané přímce vedená.

δ) Na téže straně kolmice nelze z daného bodu k jaké koliv přímce více než jednu šikmou přímku vésti, která by měla délku určitou.

5. *V každém trojúhelníku jest součet kterých koliv dvou stran větší, rozdíl ale dvou stran menší nežli strana třetí.*

Důkaz. Mimo odůvodnění této nauky v § 11. 1, stůj zde ještě následující přímý důkaz: a) Prodlouží se strana BC (obrazec 26.) a udělá se CD = CA, tak že bude DB rovná součtu stran AC + BC; tím bude ∢α = ∢β. Poněvadž jest ale ∢α < ∢DAB, bude i ∢β < DAB, následovně i strana AB < BD (dle 4.), nebo AB < DC + CB, v kteréžto nerovnosti když za CD dosadíme AC, bude AB < AC + CB. b) Když by bylo za druhé na př. CB > AC, tehdy se odřízne z BC kus CE = AC, tak že bude EB = BC − AC; tím vznikl opět rovnoramený trojúhelník ACE, v němžto jest ∢AEC > R (§ 13. 2 pozn.), pročež bude ∢AEB > R a tím AB > EB, t. j. AB > BC — CA.



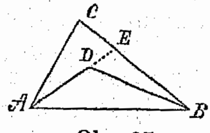
Obr. 26.

5. *Součet dvou stran trojúhelníkových jest vždy větší, nežli součet kterých koliv dvou přímek, jimiž se spojují kraje třetí strany s libovolným bodem u vnitř trojúhelníka, a úhel stranami těmito zavřený jest menší nežli úhel řečenými přímkami zavřený.*

V obr. 27. má být AC + BC > AD + DB, a ∢C < ∢ADB.

Důkaz. ad a) Prodlouží se jedna z daných přímek, na př. AD až k E, čímž vznikne △AEC, v němžto jest AC + CD > AE;

v $\triangle$ DEB jest ale taktéž $BE+ED>BD$, kteréžto nerovnosti, když se sečtou, dají $AC+CE+BE+ED>AE+BD$. Jelikož ale jest $CE+BE=BC$, a $AE=AD+DE$, můžeme poslední nerovnost i takto napsati $AC+BC+ED>AD+DE+BD$, nebo $AC+BC>AD+BD$.



Obr. 27.

ad b) Dle § 11. 4, e) jest
$\sphericalangle ADB > \sphericalangle DEB > \sphericalangle ACB$, tehdy i $\sphericalangle ADB > ACB$.

Pozn. Nauka tato zůstává, jak snadno dokázati lze, i pro ten případ pravdivou, že by se daný bod v některé z obou stran AC a BC nacházel, na př. v E; jest totiž $AC+CB>AE+EB$.

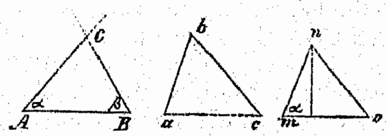
B. Shodnost trojúhelníků.

§ 14.

1. Z pojmů o shodnosti obrazců (§ 10. 4) jde na jevo, že v shodných trojúhelnících všechny tři strany i úhly v témž pořádku za sebou sobě rovny býti musí. Vzhledem pak k naukám o stranách a úhlech trojúhelníka díme o trojúhelnících shodných: *V shodných trojúhelnících leží naproti stejným stranám též i stejné úhly a naopak.*

Strany a úhly trojúhelníků jsou však ještě i v takové souvislosti mezi sebou, že majíce rozhodovati o shodnosti dvou trojúhelníků, nepotřebujeme míti vědomost o rovnosti všech souhlasných stran a úhlů; postačujeť jen ony částky znáti, kterými by trojúhelník dokonale určen byl.

Trojúhelník jest pak určen, když se udá a) jedna strana a oba k ní přilehající úhly; b) dvě strany a jima sevřený úhel; c) dvě strany a úhel té větší protilehlý; d) tři strany.



Obr. 28.

Neboť a) známe-li stranu na př. AB (obr. 28) a přilehající k ní úhly α a β, známe již i položení druhých dvou stran a tím také jejich průsečník C, protože se dvé přímek toliko v jednom bodu proseknouti může.*)

b) Známe-li dvě strany ab, bc a jich pospolné naklonění, t. j. $\sphericalangle b$, známe již také krajní body třetí strany ac; jelikož ale krajními body velikost i směr přímky určeny jsou, známe také stranu ac; a když takto ramena úhlů a a c určené položení mají, jest i jejich velikost známa.

c) Jsou-li dány velikosti stran mn, no a úhel na př. α, známe vlastně jen úhel α a jedno jeho rameno (mn); délka druhého ramena udá se však sama, když uvážíme, že dle § 13. 4, δ. z vrcholu n toliko jednu šikmou přímku vésti lze, která by měla délku

*) Sem náleží konstrukce trojúhelníků.

určitou, zde *no*. Kraj druhé strany musí tehdy ležeti v *o*, a tím jest určena i třetí strana jakož i druhé dva úhly *n* a *o*.

Úhel v tomto případu daný musí ležeti, jak se později ukáže, naproti té větší z daných stran.

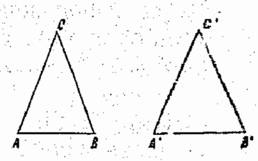
d) Dána-li velikost všech tří stran, tu se nemohou dle § 13. 6) dvě strany, na př. AC a CB, které by z krajních bodů třetí strany *AB* vybíhaly, jinde proseknouti, leč ve vrcholu *C*, poněvadž by jinak součet jejich vždycky menší byl, nežli jak udáno. Tím pak jest určeno již i položení ramen úhlových, t. j. velikosť úhlů.

Mezi částkami, jež trojúhelník dokonale určují, musí býti tedy nejméně jedna strana; celkem pak musí býti k určení trojúhelníka nejméně tré kusů.

2. Jak z předešlého vysvítá, budou čtyry známky shodnosti, a sice:

Dva trojúhelníky jsou shodny, rovná-li se jedna strana a oba k ní přiléhající úhly v jednom trojúhelníku jedné straně a přiléhajícím k ní úhlům v druhém trojúhelníku.

V obr. 29. buď AB = A′B′, ∢A = A′, ∢B = B′ (předpoklad); má se dokázati, že AC = A′C′, CB = C′B′, ∢C = ∢C′, t. j. že bude △ABC ≅ △A′B′C′.



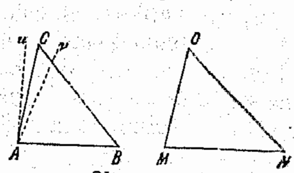
Obr. 29.

Důkaz. Položme si (v myšlenkách) trojúhelník A′B′C′ tak na △ABC, aby krajní body dané strany *A′* a *B′* padly do *A* a *B*; tehdy musí stejné částky na sebe přilehnouti a budou se krýti. Úhel A′ totiž pokryje rovný mu úhel A, t. j. strana A′C′ padne do směru AC, a taktéž ∢B′ pokryje ∢B, t. j. strana B′C′ padne do směru BC. Poněvadž se ale přímky toliko v jednom bodu protínati mohou, bude průsečník stran A′C′ a B′C′ ležeti v průsečníku jimi pokrytých stran AC a BC, t. j. bod C′ padne do C′. Trojúhelníky *ABC* a *A′E′C′* pokrývají se tudy dokonale a jsou shodny; pročež jsou souhlasné částky sobě rovny, a sice AC = A′C′, BC = B′C′, a ∢C = C′.

Z nauky této jde: a) že jsou dva trojúhelníky shodny, kdykoliv mají jednu stranu a dva kterékoliv stejnolehlé úhly na vzájem sobě rovné; b) dva *pravoúhelné* trojúhelníky jsou dle této nauky shodny, když mají jednu stranu a jeden ostrý úhel na vzájem stejné; c) dva pravidelné trojúhelníky jsou shodny, když mají jednu stranu spolu stejnou.

3. *Dva trojúhelníky jsou shodny, jsou-li dvě strany a jimi sevřený úhel v jednom trojúhelníku rovny dvěma stranám a jimi sevřenému úhlu v trojúhelníku druhém.*

Důkaz. Budiž v obr. 30. AB = MN, AC = MO, ∢A = M; má se dokázati, že △ABC ≅ △MNO. Položme opět (v myšlenkách) △MNO na △ABC, tak ale, aby padl vrchol *M* do *A* a strana MN aby pokryla stranu AB. Tehdy se bude



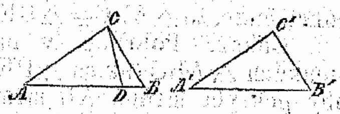
Obr. 30.

o to jednati, kam padnou ostatní částky $\triangle$ MNO. — Strana MO nemůže padnouti ani ven mimo trojúhelník ABC, na př. do Au, ani do vnitř trojúhelníku na př. v pravo do Av, jelikož oba úhlové A a M sobě rovni jsou a co takoví dokonale se pokrýti musejí. Přilehne tudy MO na AC a poněvadž dle předpokladu obě tyto strany sobě rovny jsou, padnou i jejich kraje O a C na sebe. Tu však vidíme, že se již i kraje té třetí strany pokrývají (N leží v B, O v C); pročež jsou i tyto strany sobě rovny a oba trojúhelníky pokrývajíce se úplně jsou spolu shodny.

Pravoúhelné trojúhelníky jsou dle této nauky shodny, jsou-li jejich odvěsny střídavě si rovny.

4. *Dva trojúhelníky jsou shodný, když dvě strany a úhel proti té větší ležící v obou trojúhelnících střídavě si rovny jsou.*

V obrazci 31. budiž $AC = A'C'$, $CB = C'B'$, při čemž $AC < CB$ a tudy i $A'C' < C'B'$, a konečně $\sphericalangle A = A'$; má se dokázati, že $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Obr. 31.

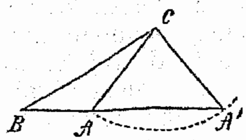
Důkaz. Zde potřebujeme pouze dokázati, že $AB = A'B'$, poněvadž by pak měly oba trojúhelníky dvě strany a jimi zavřené úhly na vzájem stejné. Rovnost řečených dvou stran bude ale zjištěna, když se dokáže, že nemohou míti strany tyto velikosť rozdílnou, t. j. že bychom pro ten případ, kdyby bylo $AB \lessgtr A'B'$, přišli v odpor s naukami předešlými. — Kdyby tedy bylo $AB > A'B'$ mohlo by se na AB odříznouti $AD = A'B'$ a vznikl by $\triangle ACD$ shodný s $\triangle A'B'C'$, v němžto by bylo $CD = C'B'$, a tím dle předpokladu i $CD = C'B' = CB$. Z toho by ale následovalo, že by byl $\triangle CBD$ rovnoramený, a $\sphericalangle CDB = B$, z nichžto každý jest menší pravého (§ 13. 2, pozn.), pročež $\sphericalangle CDA > 90°$. V $\triangle ACD$ byl by pak $\sphericalangle ADC$ největším úhlem (co tupý) a následovně i protilehlá strana $AC > CD$, tudy také $AC > BC$, což našemu předpokladu na odpor stojí. Vidíme tedy, že nemůže být $AB > A'B'$, a jelikož se podobnou cestou snadno dokázati může, že nemůže být $AB < A'B'$, musí být nutně $AB = A'B'$, z čehož již, jak svrchu podotknuto, shodnosť obou trojúhelníků patrná jest.

Pravoúhelné trojúhelníky jsou následkem této nauky shodny, kdykoliv mají příponu a jednu odvěsnu na vzájem sobě rovné.

Dodatek 1. Nauka tato platí i obráceně: Dva trojúhelníky jsou shodny, když mají dva úhly a jednu protilehlou stranu střídavě sobě rovné. Vznikneť z toho totiž nauka (2).

Dodatek 2. Zde bylo zvláště vytknuto, že musí být v každém z obou trojúhelníků dán úhel, který leží naproti té **větší** straně a to jednoduše z té příčiny, že by pro ten případ, kdyby známý úhel naproti té menší straně ležel, tvar trojúhelníka nebyl určen.

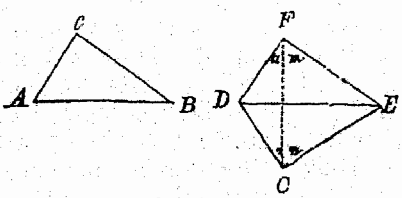
V obr. 32. na př. mají trojúhelníky ABC a A'BC též dvě strany a jeden úhel na vzájem stejné; že však tento leží naproti té menší z daných stran, nejsou oba trojúhelníky shodny. Jest t. AC = A'C, BC = BC, ∢B = B, a při tom BC > AC. Příčina tohoto úkazu spočívá v tom, že při daných ramenech úhlu B a dané délce BC oblouk poloměrem AC z bodu C opsaný přímku AB dvakrát proseknouti může.



Obr. 32.

5. *Dva trojúhelníky jsou shodny, rovnají-li se strany jednoho trojúhelníka střídavě stranám trojúhelníka druhého.*

V obr. 33. jest hyp. AB = DE, AC = DF, BC = EF; concl. bude, že △ABC ≅ △DEF.



Obr. 33.

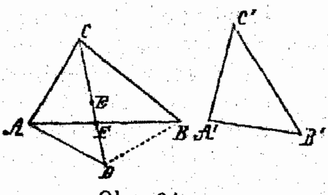
Důkaz. Položme v myšlenkách △ ABC tak na △DEF, aby pokryla strana AB stranu DE a bod C nechme dolů padnouti do C, tak že jest △ ABC jednostejný s △ DEC. Spojíme-li nyní vrcholy *F* a *C* přímkou, obdržíme dva rovnoramené trojúhelníky CEF a DCF (jest AC = DF = DC, BC = EF = EC), v nichžto jest ∢u = v, a ∢m = n. Sečtením těchto posledních dvou rovností obdržíme ∢u + m = v + n, t. j. ∢F = C, z čehož pak plyne shodnost trojúhelníků DEF a DEC, následovně i trojúhelníků DEF a ABC.

Pozn. Dané trojúhelníky mohly by v tomto případu i takového tvaru býti, že by strany DC a DF zavíraly spolu buď úhel přímý nebo také i vypouklý. V prvním případu splynou obě tyto strany s pomocnou přímkou FC dohromady (trojúhelníky byly pravoúhelné), v druhém případu padla by přímka FC mimo čtyrstraný obrazec DCEF (trojúhelníky byly tupoúhelné). Pro oba případy nechť podá čtenář patřičné vyobrazení a odůvodnění.

§ 15.

1. *Jsou-li ve dvou trojúhelnících dvě strany na vzájem sobě rovny, úhly ale jimi sevřené nerovny; jsou též třetí strany obou trojúhelníků sobě nerovny, a sice jest třetí strana v onom trojúhelníku větší, kde dané strany větší úhel spolu zavíraly.*

V obr. 34. jest AC = A'C', BC = B'C', a ∢C > C'; má se dokázati, že AB > A'B'. K tomu cíli položme trojúhelník A'B'C' tak na △ ABC, aby strana A'C' pokryla AC. Úhel C' pokryje při tom část úhlu *C*, tak že padne C'B' mezi strany AC a CB; budiž *CD* směr strany



Obr. 34.

C'B', takže bude $\sphericalangle$ ACD = C', CD = C'B', AD = A'B', t. j. $\triangle$ ACD jest položený $\triangle$ A'C'B'. Z toho jde, když body *D* a *B* spolu spojíme, že *CD* = *CB* (každá rovná se B'C'), a tudy $\sphericalangle$ CDB = $\sphericalangle$ CBD. Nyní jest $\sphericalangle$ ADB > $\sphericalangle$ CDB, tudy i $\sphericalangle$ ADB > CBD > ABD, t. j. $\sphericalangle$ ADB > ABD; v trojúhelníky ABD tedy AB > AD (§ 13. 4), nebo AB > A'B'.

Pozn. Důkaz byl by týž, kdyby byl bod B' padl do vnitř trojúhelníka na př. do *E* (když by totiž byla A'C' > C'B') nebo zrovna na stranu AB, na př. do F (kdyžby byla A'C' = C'B'). V tomto druhém případě jde ze shodnosti trojúhelníků ACB a A'B'C', že A'B' = AF < AB.

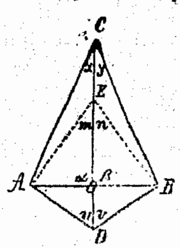
2. *Jsou-li ve dvou trojúhelnících dvě strany sobě rovny, třetí strany ale nerovny, jsou též i úhly stejnými stranami zavřené nerovny, a sice jest onen úhel větší, který leží naproti větší straně.*

Budiž v obr. 34. AC = A'C', BC = B'C' a AB > A'B'; má se dokázati, že jest $\sphericalangle$ ACB > $\sphericalangle$ A'C'B'. — Kdyby neměl být $\sphericalangle$ ACB větší úhlu A'C'B', musel by se mu buď rovnati a nebo dokonce i menší býti. První není možné, poněvadž by měli oba trojúhelníky dvě strany a jimi zavřený úhel na vzájem rovné a byly by shodné, t. j. AB bylo by rovno A'B', což předpokladu odporuje. Avšak i kdyby měl být $\sphericalangle$ ACB < $\sphericalangle$ A'C'B', musela by podle předešlé nauky být AB < A'B', což opět s naším předpokladem nesouhlasí. Musí tehdy nutně býti $\sphericalangle$ ACB > $\sphericalangle$ A'C'B'.

3. *V rovnoramených trojúhelnících, které mají společnou základnu, rozpůluje přímka vrcholy jejich spojující nejen úhly při vrcholech, nýbrž i společnou základnu a stojí na této kolmo.*

V obr. 35. předpokládá se: AC = CB, AD = DB; concl.: $\sphericalangle x = y$, $\sphericalangle u = \nu$; AO = OB; CD $\perp$ AB. Důkaz. Trojúhelníky CAD a CBD jsou shodny (§ 14. 5), pročež $\sphericalangle x = y$, $\sphericalangle u = \nu$. Dále jsou též trojúhelníky ACO a BCO shodny (§ 14. 3), pročež jest AO = OB; z této shodnosti ale konečně také ještě plyne, že $\sphericalangle \alpha = \beta$, a jelikož tyto vedlejšími jsouce po 90° míti musí (§ 6. 2, pozn.), stojí CD $\perp$ AB.

Jak by se provedl důkaz, kdyby ležel vrchol druhého trojúhelníka místo dole nahoře v E?



Obr. 35.

Výsledky. Z nauky této plynou nyní věty: α) *Přímka, která rozpůluje v rovnoramenném trojúhelníku úhel při vrcholu, rozpůluje též i jeho základnu a stojí na ní kolmo.*

Důkaz. Je-li AC = BC, $\sphericalangle x = y$, bude $\triangle$ ACO $\cong$ $\triangle$ BCO; pročež musí být AO = BO, $\sphericalangle \alpha = \beta$, atd.

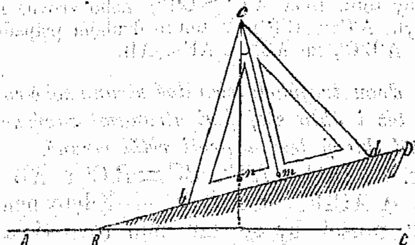
β) *V rovnoramenném trojúhelníku jest přímkou, která střed základny spojuje s vrcholem trojúhelníka, rozpůlen úhel při vrcholu a přímka tato stojí kolmo na základně.*

Důkaz. Je-li AO = OB, bude $\triangle$ AOC $\cong$ $\triangle$ COB (§ 14. 5), pročež musí být $\sphericalangle x = y$, $\sphericalangle \alpha = \beta$, atd.

γ) V rovnoramenném trojúhelníku rozpůluje se kolmicí z vrcholu na základnu spuštěnou úhel při vrcholu i základna trojúhelníka.

Důkaz. Je-li $CD \perp AB$, bude $\sphericalangle \alpha = \beta$, následovně $\triangle AOC \cong \triangle COB$ atd.

Pozn. Na základě vyvinutých zde vlastností rovnoramenného trojúhelníka shotovena jest tak zvaná **krokvice**, jížto se ve skutečnosti roviny do vodorovného směru uvádějí. Vysvětlení její jest již z obrazce zřejmé (obr. 36).



Obr. 36.

4. *Body, jichžto vzdálenosti od dvou daných bodů sobě rovny jsou, leží na přímce, která vzdálenosť daných bodů kolmo rozpůluje.*

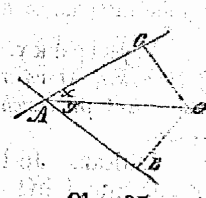
Důkaz. Když vzdálenosť bodů A a B kolmo rozpůlíme, t. j. uděláme, aby bylo $AO = BO$ a při tom $CD \perp AB$ (obr. 35.), můžeme vzíti na přímce CD který koliv bod, na př. bod E, vždycky musí být $AE = EB$. Jest totiž $\triangle AOE \cong \triangle EOB$ (§ 14. 3), pročež $AE = EB$.

Dodatek. Podmínce zde vyslovené vyhovují všecky body přímky CD, mimo ni však bod nižádný; přímka *CD* slove za touto příčinou **geometrickým místem** žádaných bodů (jichžto vzdálenosti od A a B stejné jsou). Geometrické místo (geom. Ort) slove totiž nepřetržitá soustava bodů (nebo čar), z nichž jeden každý, mimo ně ale žádný jiný, určitým podmínkám vyhovuje.

Může býti tedy geometr. místem buď čára nebo plocha.

5. *Body, jichžto vzdálenosti od dvou přímek sobě rovny jsou, leží na přímce, která úhel těchto přímek rozpůluje.*

Důkaz. V obr. 37 jsou kolmice OC a OB, jimiž se vzdálenosť bodu *O* od přímek AC a AB vyjádřuje, sobě rovny; spojíme-li bod O s vrcholem úhlu A, bude $\triangle AOC \cong \triangle AOB$ (§ 14. 4), pročež $\sphericalangle x = y$.

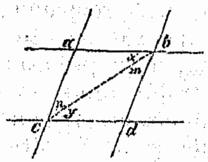


Obr. 37.

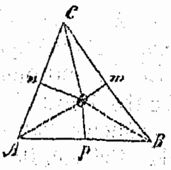
Pozn. Přímka *AO* jest tedy geometrickým místem bodů, jichžto vzdálenosti od dvou přímek sobě rovny jsou. Jak se promění věta tato, kdyby byly dané přímky rovnoběžné?

6. *Rovnoběžky mezi rovnoběžkami jsou sobě rovny.*

Důkaz. Je-li v obr. 38. $ab \parallel cd$ a $ac \parallel bd$, spojme bod *b* s *c*; tím vzniknou trojúhelníky *abc* a *bcd*, které jsou dle § 14. 2 shodny.



Obr. 38.



Obr. 39.

Pročež jsou v nich stejnolehlé strany sobě rovny, t. j. ab = cd, ac = bd.

7. *Kolmice v středních bodech jednotlivých stran trojúhelníka na tyto postavené mají společný průsečník; vzdálenosti pak bodu tohoto ode všech rohů trojúhelníka jsou sobě rovny.*

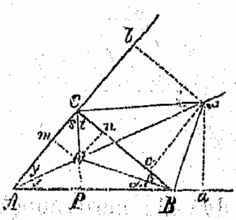
Aby se dokázalo, že všechny tři kolmice jedním bodem (o) procházejí (obr. 39.), postaví se pouze dvě takové kolmice, na př. $no \perp AC$, $mo \perp BC$ (při čemž jest $An = Cn$, $Bm = Cm$) a z jejich průsečníku o spustí se kolmice na třetí stranu a dokáže se, že jest kolmicí touto strana AB rozpůlena. — Budiž tedy ještě $op \perp AB$. Spojí-li se průsečník o se všemi vrcholy, bude $\triangle Bom \cong \triangle Com$, a z toho $OB = OC$. Podobně následuje ze shodnosti trojúhelníků Con a AOn, že $CO = AO$; jest tehdy BO = CO = AO. Pročež bude i nyní $\triangle Aop \cong \triangle BOp$ (§ 14. 4) a následovně $Ap = Bp$.

Dodatek. Průsečník tento jest dle pojmu o kruhu (§ 9. 2) středem kruhu, který všemi rohy trojúhelníka procházeti musí, a o němž díme, že jest trojúhelníku obepsán; strany trojúhelníka jsou pak tětivami tohoto kruhu.

Pozn. Průsečník nadzmíněných kolmic může padnouti, jako se to zde stalo, buď do vnitř trojúhelníka, buď do jeho obvodu, anebo i mimo trojúhelník. V trojúhelníku rovnoramenném jsou z řečených kolmic dvě sobě rovny; v trojúhelníku pravidelném jsou všechny tři kolmice sobě rovny. Důkazy k těmto poznámkám zůstavují se čtenáři.

8. *Přímky, jež rozpůlují buď všechny vnitřní úhly trojúhelníka, a nebo také jen jeden vnitřní úhel a vedlejší úhly druhých dvou, mají společný průsečník; vzdálenosti pak tohoto bodu ode všech stran trojúhelníka (nebo jejich prodloužení) jsou sobě rovny.*

Důkaz. Aby se opět dokázalo, že tři přímky společný průsečník mají, rozpůlí se zase jen dva úhly, na př. $\sphericalangle$A a B (obr. 40.) a průsečník jejich O spojí se s vrcholem C; načež se dokáže, že jest přímkou takto vedenou $\sphericalangle C$ rozpůlen. K účelu tomu postaví se $Op \perp AB$, $Om \perp AC$, $On \perp BC$, načež bude $\triangle AmO \cong \triangle Apo$ (§ 14. 2) a z toho $Am = Ap$, $Om = Op$. Podobně jest $\triangle BOp \cong \triangle BOn$, a z toho $Bp = Bn$, $Op = On$. Konečně jest i $\triangle COm \cong COn$ (§ 14. 4), a z toho $Om = On$, $\sphericalangle$ s = t.



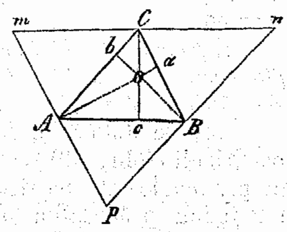
Obr. 40.

Vidíme tedy, že byl $\sphericalangle C$ přímkou OC rozpůlen, jakož že $Om = Op = On$. Podobným způsobem dokáže se, že se přímky $A\omega$, $B\omega$ a $C\omega$ v jediném bodu protínají a že jest $a\omega = c\omega = b\omega$. Kolik takovýchto bodů lze v každém trojúhelníku určiti, jenžto by měly ode všech stran (nebo jich prodloužení) stejnou vzdálenost?

Dodatek. Průsečník tento jest dle § 9. 2 středem kruhu, který musí procházeti body m, n, p, jak to na př. v obr. 178. viděti lze.

9. *V každém trojúhelníku mají výšky společný průsečník.*

Důkaz. V obr. 41. budiž $Cc \perp AB$, $Bb \perp AC$, $Aa \perp BC$; tehdy veď každým vrcholem trojúhelníka rovnoběžku k protilehlé straně, $mn \parallel AB$, $mp \parallel BC$, a $pn \parallel AC$, a prodluž je tak daleko, až by se vespolek prosekly. Dle § 15. 6 jest pak $AB = Cn$, a taktéž $AB = Cm$, následovně $Cm = Cn$. Z podobné příčiny jest $Bn = Bp = AC$, a $Am = Ap = BC$, t. j. strany trojúhelníka mnp jsou v bodech A, B, C rozpůleny. Jelikož ale výšky v těchto bodech na strany AB, AC a BC spuštěné i kolmo stojí na rovnoběžných k nim stranách mn, np a mp, objevuje se nám vzhledem k $\triangle mnp$ věta § 15. 7, dle které přímky Aa, Bb, Cc společný průsečník míti musejí.



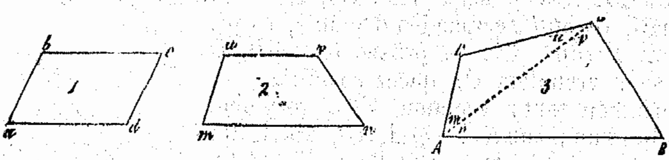
Obr. 41.

Pozn. Sem náleží a zde mohou býti provedeny měřické konstrukce v § 21. 1—11.

II. O čtyr- a mnohoúhelnících.

§ 16.

1. Vzhledem k vzájemnému položení stran dělíme čtyrúhelníky a) na **rovnoběžníky** (Parallelogramme), kde vždy dvě a dvě protější strany rovnoběžny jsou (obr. 42. 1); b) na **lichoběžníky** (Trapeze), kde jen dvě protilehlé strany rovnoběžny jsou, druhé



Obr. 42.

dvě ale nerovnoběžny (obr. 42. 2); c) na **různoběžníky** (Trapezoide), kde všechny strany mezi sebou nerovnoběžný jsou (obr. 42 . 3)

2. O úhlech čtyrúhelníků platí věty: α) *V každém čtyrúhelníku rovná se součet vnitřních úhlů čtyrem pravým.*

Důkaz. Rozvrhni úhlopříčnou čtyrúhelník ve dva trojúhelníky (obr. 42. 3), a sečti vzniklé tam úhly. Jest totiž

$\sphericalangle m + C + u = 2R$
$\sphericalangle n + B + v = 2R$, dohromady tedy

$\sphericalangle m + n + B + C + v + u = 4R$, t. j. $\sphericalangle A + B + C + D = 4R$.

β) *V každém rovnoběžníku rovná se součet dvou, ku kterékoliv straně přiléhajících úhlů dvěma pravým.*

Důkaz dle § 8. 1 a § 7. 3, α.

γ) *V každém rovnoběžníku jsou si protější úhly rovny.* *)

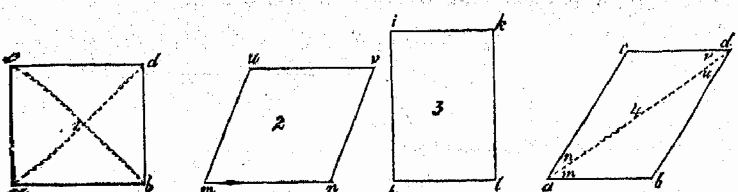
Důkaz. Že jest v obr. 42. 1, $\sphericalangle a = c$, $\sphericalangle b = d$, plyne z následujícího: $\sphericalangle a + b = 2R$, a taktéž $\sphericalangle b + c = 2R$; následovně $\sphericalangle\ a + b = b + c$, a z toho odejmutím úhlu b, $\sphericalangle a = c$, atd.

Pozn. Z věty této následuje, že by v každém rovnoběžníku všechny úhly pravými býti musely, kdyby jeden z nich pravým byl (proč?); a byl-li by jeden úhel kosý, že tím již všechny úhly rovnoběžníka kosé býti musí, kdežto pak dva z nich jsou tupé a dva ostré. Je-li na př. v obr. 42. $\sphericalangle a = 42^\circ 26' 50''$, jak velké jsou ostatní úhly?

δ) *Součet zevnitřních úhlů rovná se v každém čtyrúhelníku čtyrem pravým.*

Důkaz. V každém rohu činí vnitřní úhel se svým vedlejším zevnějším dohromady 2R; obdržíme tehdy celkem 4.2R = 8R, z čehož když se součet vnitřních úhlů (4R) odečte, zbyde pro zevnitřní úhly dohromady též 4R.

3. Nejdůležitější ze všech čtyrúhelníků jsou rovnoběžníky a to ohledně stran i úhlů. Jsou totiž rovnoběžníky buď **pravoúhelné** nebo **kosoúhelné**, dle toho, jsou-li všechny úhly pravé nebo kosé; a poněvadž dle § 15. 6 rovnoběžky mezi rovnoběžkami sobě rovny jsou, mají rovnoběžníky buď jen dvě a dvě protější strany sobě rovny, a nebo jsou všechny strany sobě rovny.



Obr. 43.

Berouce zřetel k velikosti stran i úhlů dělíme rovnoběžníky:

a) na **čtverce** (Quadrat), kde všechny strany sobě rovny a všechny úhly pravé jsou (rovnoběžník rovnostraný a pravoúhelný, obr. 43. 1);

*) V čtyrúhelníku jsou protilehlé částky stejnorodé.

b) na **kosočtverce** (Rhombus), jichžto strany sice všechny sobě rovny jsou, úhly však kosé (rovnoběžník rovnostraný kosoúhelný, obr. 43. 2);

c) na **obdélníky** (Oblongum), kde jen dvě a dvě strany sobě rovny jsou a všechny úhly pravé, obr. 43. 3;

d) na **kosodélníky** (Rhomboid), kde jsou též jen dvě a dvě strany sobě rovny, úhly ale kosé, obr. 43. 4,

Pozn. 1. O stranách rovnoběžníka může se psáti: $mn \# uv$ (2), $mu \# nv$, což se čte: mn jest rovnoběžná a rovná se uv. Místo slova „čtverec" užívá se při psaní znaménko □.

Pozn. 2. Čtverec a obdélník jsou rovnoběžníky pravoúhelné a slovou též pravoúhelníky (Rechtecke).

§ 17.

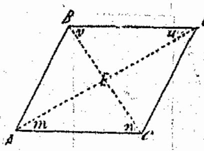
1. *V rovnoběžníku jest úhlopříčna ostrých úhlů větší nežli úhlopříčna úhlů tupých; v pravoúhelníku jsou pak úhlopříčny sobě rovny.*

Důkaz. Je-li v obr. 44. ∢B > ∢A, obdržíme, když obě úhlopříčny narejsujeme, dva trojúhelníky ABD a ABC, které mají dvě strany na vzájem sobě rovny (BD = AC, AB = AB), úhly ale jimi sevřené nerovny; jest tudy dle § 15. 1, AD > BC. — V pravoúhelníku mají ale trojúhelníky tyto nejen dvě strany nýbrž i jimi sevřené úhly na vzájem sobě rovné a jsou proto shodny; následovně jsou i třetí jejich strany, t. j. úhlopříčny, sobě rovny.

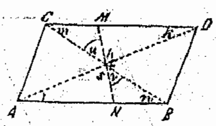
2. *Každá úhlopříčna dělí rovnoběžník ve dva shodné trojúhelníky.*

Důkaz. V obr. 44. jest na př. △ ABD ≅ △ ACD, protože mají dvě strany a jimi sevřené úhly na vzájem rovné; podobně jest △ ABC ≅ △ BCD.

3. *V rovnoběžníku půlí se úhlopříčny vespolek.* Důkaz. V obr. 44. jest △ ACE ≅ △ BED (poněvadž jest AC $\#$ BD, a následovně ∢m = u, ∢n = v), a tu musí ležeti naproti rovným úhlům i rovné strany; pročež jest CE = BE, AE = DE.



Obr. 44.



Obr. 45.

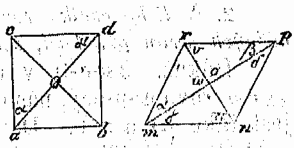
4. V rovnoběžníku slove průsečník obou úhlopříčen **středem** obrazce, protože *každá bodem tímto v rovnoběžníku k protějším stranám vedená přímka rovnoběžník rozpůluje a nad to i sama v něm půlena jest.*

Důkaz. Že jest na př. přímka MN (obr. 45.) v E rozpůlena, jde ze shodnosti trojúhelníků CME a BNE (CE = BE, ∢u = v, ∢m = n). A že přímkou touto i rovnoběžník sám rozpůlen jest, plyne z následujícího: $\triangle CME \cong \triangle BNE$, $\triangle CAE \cong \triangle BDE$, $\triangle ANE \cong \triangle DME$, kteréžto rovnosti, když je sečteme, dají $\triangle CME + \triangle CAE + \triangle ANE = \triangle BNE + \triangle DBE + \triangle MBE$, t. j. $MCAN = MDBN$.

Každý rovnoběžník lze tedy přímkou po délce, po šířce, vůbec směrem libovolným rozpůliti.

5. *V rovnoběžnících rovnostraných stojí úhlopříčny na sobě kolmo a půlí protilehlé úhly* (obr. 46).

Důkaz. a) Ve čtverci vzniknou rovnoramenné trojúhelníky, v kterých jest jeden úhel pravý, pročež bude $\sphericalangle \alpha = \alpha' = 45^0$; a poněvadž v $\triangle cod$ na základně cd dva sobě rovné úhly po 45^0 přilehají, musí být $\sphericalangle cod = R$, t. j. $cb \perp ad$. — b) Taktéž v kosočtverci vzniknou rovnoramenné trojúhelníky, kde jest na př. $\sphericalangle \alpha = \beta$; že jest ale také $\sphericalangle \beta = \gamma$ (střídné), jest i $\sphericalangle \alpha = \gamma$. Z podobné příčiny jest i $\sphericalangle \beta = \delta$. V trojúhelnících konečně mro a rop, které dle § 14. 5. shodné jsou, jest $\sphericalangle o = \omega$, t. j. $rn \perp bp$.



Obr. 46.

Pozn. 1. Všechny tyto věty dají se také obrátiti, čehož provedení čtenářovi se odporučuje.

Pozn. 2. Z odstavce 5. a) vysvítá, že v pravoúhelném trojúhelníku abd na př.) střed přepony rovnou vzdálenosť má ode všech rohů trojúhelníka. Sem náleží konstrukce v § 21. 12.

6. *Jsou-li dvě přímky sobě nejen rovny nýbrž i spolu rovnoběžny, jsou také přímky krajní body jejich spojující sobě rovny a spolu rovnoběžny.*

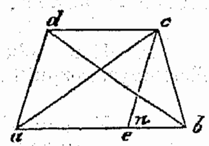
Důkaz. Budiž v obr. 46. $rp \# mn$; spojí-li se krajní bod jedné přímky s protějším krajem druhé, na př. přímkou rn, vzniknou dva shodné trojúhelníky rpn a rmn, v kterých jest $rp = mn$, $rn = rn$, $\sphericalangle u = v$, následovně musí být $rm = pn$, a jelikož jest též v těchto trojúhelnících $\sphericalangle m = p$, jsou mr a pn spolu také rovnoběžné (§ 8. 7.).

Pozn. V čtyrúhelníku spůsobem tímto vzniklém jsou dvě a dvě protilehlé strany sobě rovny, jest to tedy rovnoběžník (§ 16. 1.); pročež díme: čtyrúhelník, jehož dvě strany jsou si rovny a rovnoběžny, jest rovnoběžníkem.

7. V rovnoběžníku může se vzíti která koliv strana za základnu; kolmice pak od hořejší základny k protější spuštěná udává výšku rovnoběžníka a může býti v kterém koliv místě narejsována (§ 15. 6.). V pravoúhelníku bude dle toho jedna z dvou v témž rohu sbíhajících se stran základnou a druhá výškou. Ve čtverci jsou si výška a základna vespolek rovny.

§ 18.

1. Lichoběžník jest buď rovnoramený nebo rovnostraný, dle toho, jsou-li rovnoběžné jeho strany sobě rovny nebo nerovny. Každý lichoběžník dá se přímkou, která jest rovnoběžna k některé z různoběžných stran, rozložiti ve dva obrazce, a sice v rovnoběžník a trojúhelník (obr. 47.). Trojúhelník takto vzniklý sestává ze stran různoběžných a z rozdílu stran rovnoběžných.



Obr. 47.

2. *V lichoběžníku rovnoramenném jsou úhly, jenž ku každé z rovnoběžných stran přiléhají, sobě rovny.*

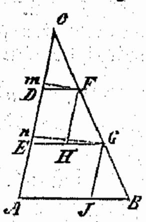
Důkaz. Jsou-li v obr. 47. $da = bc$, a přitom $ce \parallel ad$, bude $\triangle ceb$ rovnoramený, následovně $\sphericalangle n = b$; a poněvadž jest $\sphericalangle n = a$, jest také $\sphericalangle a = b$. Dále jest $\sphericalangle a + d = 180^0$ (§ 8. 1.), a taktéž $\sphericalangle b + c = 180^0$, pročež i $\sphericalangle a + d = b + c$, z čehož když se odečte rovnice $\sphericalangle a = b$, zbyde $\sphericalangle d = c$.

3. *V lichoběžníku rovnoramenném jsou si obě úhlopříčny rovny.*

Důkaz. V obrazci 47. jest $\triangle acd \cong \triangle dcb$ ($ad = bc$, $dc = dc$, $\sphericalangle d = c$) pročež $ac = bd$.

4. *Rozdělíme-li některou stranu trojúhelníka v několik sobě rovných dílů a vedeme takto vzniklými body rovnoběžky k některé z druhých dvou stran, bude i třetí strana trojúhelníka v tolikéž sobě rovných dílů rozdělena.*

Důkaz. V obr. 48. byla by na př. AC rozdělena ve tři stejné díly, a mimo to $DF \parallel EG \parallel AB$; má být $CF = FG = GB$. K tomu cíli narejsujme $FH \parallel AC$ a taktéž $GJ \parallel AC$, načež bude dle § 15. 6, $FH = DE$, a $GJ = EA$; že ale jest $AE = ED = DC$, jsou i $FH = JG$ (§ 14. 2). Nyní pak jsou trojúhelníky CDF, FGH a BJG spolu shodny (§ 14. 2), pročež jest také $CF = FG = GB$.



Obr. 48.

Dodatek. Obráceně platí věta: *Rozdělí-li se dvě strany nějakého trojúhelníka v týž počet rovných sobě dílů a dělící body spojí se přímkami, budou tyto ku třetí straně trojúhelníka rovnoběžny.*

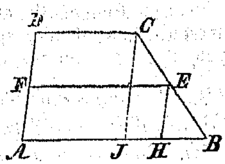
Důkaz nepřímý. Jeli v obr. 48. $AE = ED = DC$, a na druhé straně $BG = GF = FC$, a nemělo by být $DF \parallel EG \parallel AB$, mohli bychom vésti dělícími body G a F přímky, které by byly k AB rovnoběžné. Dejme tomu, že by bylo $Fm \parallel Gn \parallel AB$; pak by bylo dle předešlé věty $An = nm = mC = \frac{1}{3} AC$. Že ale jest také dle předpokladu $AE = ED = DC = \frac{1}{3} AC$, muselo by být i $AE = An$, $Cm = CD$, což ale jest nemožné. Přímky, dělícími body F a G rovnoběžně k AB vedené procházejí tudy body E a D.

5. *Přímka spojující v trojúhelníku středy dvou stran vespolek, jest ku třetí straně rovnoběžná a rovná se její polovičce.*

Důkaz. Je-li v $\triangle CEG$ (obr. 48.) D střední bod strany CE a F střední bod strany CG, narejsujme ku pomoci $HF \parallel CE$, čímž bude dle předešlé věty (4) EG v H rozpůlena, t. j. EH = HG = $\frac{1}{2}$EG. Dle dodatku předešlé věty jest ale DF ∥ EG, pročež dle § 15. 6 také DE = FH, DF = EH = $\frac{1}{2}$EG.

6. *V lichoběžníku jest přímka střední body různoběžných stran spojující k rovnoběžným stranám rovnoběžná a rovná se jejich polovičnímu součtu.*

Důkaz. Je-li v obrazci 49. v *E* střed strany BC a v *F* střed strany AD, narejsuj ku pomoci CJ ∥ AD, a taktéž EH ∥ AD; bude potom v △ CJB dle předešlé věty (4) EH ∥ CJ a při tom dle (5) EH = $\frac{1}{2}$CJ = $\frac{1}{2}$AD = AF, pročež musí být AFEH rovnoběžníkem a EF ⋕ AH. Poněvadž jest ale v △ CBJ také JH = HB, bude AB + DC = AB + AJ = AH + HB + AH − JH, t. j. AB + CD = 2AH = 2EF, a z toho EF = $\frac{1}{2}$ (AB + CD).



Obr. 49.

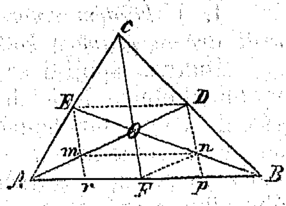
Pozn. Vzhledem k předešlé větě snadno se přesvědčíme, že EF i středními body obou úhlopříčen prochází.

7. *Spojí-li se v jakém koliv čtyrúhelníku střední body stran za sebou přímkami, vznikne pokaždé rovnoběžník.*

Důkaz. V různoběžníku na př. ABCD rozpůlí se strany a narejsuje se jedna úhlopříčna na př. BD; i bude potom v △ ABD dle § 18. 5, *mr* ∥ DB, a taktéž v △ BCD bude *np* ∥ DB. Že ale jest dle téže věty *mr* = *pn* = $\frac{1}{2}$BB, musí být *mr* ⋕ *pm* (§ 16. 6), pročež jest *mnpr* rovnoběžníkem. (Vyobrazení podej čtenář!)

8. *Přímky spojující v trojúhelníku vrcholy se středními body protilehlých stran mají společný průsečník a rozpadají se v něm ve dvě částky, z nichžto jedna vždycky dvakrát tak velká jest jako druhá* (obr. 50).

Důkaz. Že přímky ty společný průsečník mají, dokáže se podle § 15. 7. a 8, když střed strany BC, t. j. bod D spojíme s vrcholem A, a střed strany AC s vrcholem B. Přímky AD a BE mají pak v *O* svůj průsečník. Nyní rozpůlí se část AO i BO v bodech *m* a *n*, tak že bude nejen *mn* ∥ AB, nýbrž i ED ∥ AB (§ 18. 5), a zároveň ED = *mn* = $\frac{1}{2}$AB. Narejsuje-li se ještě *mE* a *nD*, bude *mn*DE rovnoběžníkem (§ 18. 6) a tudy OD = O*m* = $\frac{1}{2}$AO, a taktéž E*o* = O*n* = $\frac{1}{2}$OB (§ 17. 3). Jest tudy BO = 2OE, AO = 2OD, nebo BE = 3EO, AD = 3DO. Konečně spojí se průsečník *O* s vrcholem *C*, a dokáže se, že jest AB v *F* rozpůlena a při tom OF = 2OC. — V △ COB jsou totiž *D* a *n* středy stran, následovně D*n* ∥ CO a při tom D*n* = $\frac{1}{2}$CO. Vede-li se ještě v △ OFB středním bodem *n* ku OF rovnoběžka (prodloužením D*n*), bude BF v *p* rozpůlena, t. j. Bp = Fp. Z podobných



Obr. 50.

příčin jest i $Er \parallel CF$, $mE = \frac{1}{2}CO$, a $Ar = rF$. V $\triangle ADp$ jest však dle § 18. 4, strana AD a tím i strana Ap ve tři sobě rovné částky rozdělena, tehdy $Ar = rF = Fp$, z čehož plyne, že strana AB v bodu F rozpůlena byla. Jelikož ale jest $FDno$ rovnoběžníkem (§ 17, 6) a $FO = Dn = \frac{1}{2}CO$, jest i druhá část naší věty dokázána, t. j. že $CO = 2OF$.

Pozn. Průsečník O, který takto vznikl, slove **těžiště trojúhelníka** (Schwerpunkt), a přímky spojující vrcholy trojúhelníka se středními body protilehlých stran slovou též čáry střední (Mittellinien).

9. *V rovnoramenném trojúhelníku jsou výšky obou ramen sobě rovny a naopak.* Důkaz dle § 14. 2, pozn. zůstavuje se čtenáři.

10. *Spojí-li se v trojúhelníku rovnostraném vespolek střední body stran, vznikne opět trojúhelník rovnostraný.* Důkaz § 14. 3.

11. *V každém trojúhelníku jest součet středních čar menší nežli součet stran trojúhelníkových.*

Důkaz. Prodlouží se každá střední čára přes střed souhlasné strany o svou vlastní délku a spojí se nový její kraj s krajními body této strany; potom se provede důkaz na základě § 17. 3, a § 13, 5.

Čtenáři zůstavuje se ještě důkaz následujících vět:

a) Vedou-li se v trojúhelníku rovnoramenném z některého bodu základny rovnoběžné přímky k ramenům a až k těmto dosahující, bude součet narejsovaných přímek roveň jednomu rameni.

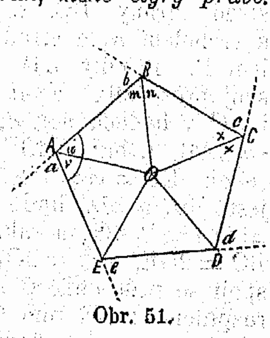
b) Odřízne-li se v rovnoramenném trojúhelníku z jednoho ramene od základny počínaje tolik, o mnoholi bylo druhé rameno prodlouženo, a spojí se body takto vzniklé spolu; bode spojující přímka základnou rozpůlena.

Mnohoúhelníky.

§ 19.

1. *V každém mnohoúhelníku rovná se součet vnitřních úhlů tolikrát dvěma pravým, kolik má mnohoúhelník stran, méně čtyry pravé.*

Důkaz. Spojí-li se libovolný, uvnitř mnohoúhelníka ležící bod O (obr. 51.) se všemi rohy mnohoúhelníka, rozpadne se celý obrazec v tolik trojúhelníků, kolik je stran, a v každém takovém trojúhelníku rovná se součet úhlů 2R, tak že obdržíme celkem n.2R. Z tohoto součtu musíme ale odejmouti úhly kolem bodu O, které k obvodným úhlům mnohoúhelníka nenáležejíce dohromady 4R dávají, tak že pro součet úhlů v mnohoúhelníku obdržíme: $S = n.2R - 4R$.



Obr. 51.

V čtyrúhelníku rovná se tedy součet úhlů	4. 2R — 4R = 4R,	
v pětiúhelníku " " " " "	5. 2R — 4R = 6R,	
v šestiúhelníku " " " " "	6. 2R — 4R = 8R,	atd.

Dodatek. Jelikož úhly v mnohoúhelnících pravidelných vespolek sobě rovny jsou, obdržíme velikost jednoho takového úhlu, když součet vnitřních úhlů v tolik rovných dílů rozdělíme, kolik úhlů mnohoúhelník vůbec obsahuje.

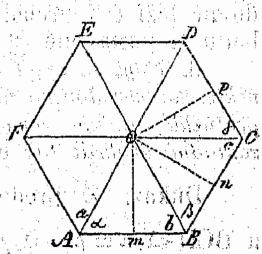
Tak má jeden úhel v pravid. čtyrúhelníku $4R:4 = R = 90^0$,
„ „ „ v „ pětiúhelníku $6R:5 = 540^0:5 = 108^0$,
„ „ „ v „ šestiúhelníku $8R:6 = 720^0:6 = 120^0$,
atd.

Z pravidelných mnohoúhelníků mohou býti některé kolem jednoho bodu tak položeny, že k sobě úplně přilehnou a plochu dokonale pokryjí; stane se to totiž šesti pravid. trojúhelníky, čtyrmi čtverci, a třemi prav. šestiúhelníky, protože úhly jejich v tomto případu dávají 4R. Čtenář podej k tomu náležité vyobrazení!

2. *Součet zevnitřních úhlů rovná se v každém mnohoúhelníku 4R.*

Důkaz. Každý zevnitřní úhel dává se svým vedlejším vnitřním 2R (obr. 51); následovně obdržíme celkem n.2R, z čehož když vnitřní úhly odejmeme, obdržíme pro součet úhlů zevnitřních $s = n.2R - (n.2R - 4R) = 4R$.

3. *Přímky, jimiž se vnitřní úhly pravidelného mnohoúhelníka rozpůlují, mají vždycky společný průsečník, jehožto vzdálenosti jak ode všech rohů tak i ode všech stran mnohoúhelníka sobě rovny jsou.*


Obr. 52.

Důkaz. a) Budiž v obr. 52. ABCDEF obrazec pravidelný a v *O* průsečník dvou přímek AO a BO, jimiž se dva sousední úhly A a B rozpůlují, tak že se může předpokládati $\sphericalangle a = \alpha = {}^1/_2 A$, $\triangle b = \beta = {}^1/_2 B$. Trojúhelník AOB, jenž takto vznikl, jest rovnoramený (když jest $\sphericalangle A = B$, bude také $\sphericalangle {}^1/_2 A = {}^1/_2 B$), pročež $\sphericalangle \alpha = b$ a $AO = BO$. Spojí-li se nyní průsečník *O* s rohem *C*, bude $\triangle ABO \cong \triangle BOC$ ($OB = OB$, $AB = BC$, $\sphericalangle b = \beta = {}^1/_2 B$), z čehož plyne, že $CO = BO = AO$, a $\sphericalangle c = \alpha$; že ale jest $\sphericalangle \alpha = {}^1/_2 A = {}^1/_2 C$, musí také i $\sphericalangle c = {}^1/_2 C$ býti, t. j. přímkou CO jest úhel C rozpůlen, a poněvadž takovýto výsledek o každé přímce, jížto se bod *O* s vrcholem úhlu spojuje, dokázati lze, může se vůbec tvrditi, že všechny přímky, jimiž se úhly pravidelného mnohoúhelníka rozpůlují, jediným bodem *O* procházejí a vespolek sobě rovny jsou.

b) Mimo dosavádní trojúhelníky jsou ještě trojúhelníky *mBO* a *n*BO shodné (výškou O*m* a O*n* rozpůlila se totiž základna rovnoramenného trojúhelníka, tudíž dle § 14. 3); pročež jest *Om* a *On*, a podobným spůsobem dokáže se dále, že i $nO = pO$ atd.

Dodatek. Bod, který jest v pravid. mnohoúhelníku jak ode všech rohů tak i ode všech stran stejně vzdálen, slove **střed** prav. mnohoúhelníka.

4) Nyní budou i následující věty, jichžto důkaz čtenáři zůstavujeme, patrny:

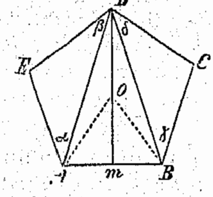
α) Přímky, jež v pravid. mnohoúhelníku spojují střed obrazce s jeho rohy, půlí úhly mnohoúhelníka a rozdělují mnohoúhelník v samé shodné trojúhelníky.

β) Přímky, jež strany prav. mnohoúhelníka kolmo rozpůlují (a nebo i jeho úhly obvodové), procházejí středem mnohoúhelníka a jsou sobě všechny rovny.

γ) Přímky, jež obvodové úhly v pravidelném mnohoúhelníku rozpůlují, zavírají ve středu obrazce úhly, jež **úhly středovými** slovou (Centriwinkel) a o nichž platí věta: *Středové úhly téhož pravid. mnohoúhelníka jsou sobě rovny a každý má* $\frac{360^0}{n}$.

5. *V prav. mnohoúhelníku s nerovným počtem stran jde přímka, jížto se kterákoliv strana kolmo rozpůluje, skrze střed obrazce i skrze vrchol protilehlého úhlu.*

Důkaz. Je-li v obr. 53. O střed na př. pravidelného pětiúhelníka, bude $\triangle AOB$ rovnoramený, a poněvadž jsou trojúhelníky AED a BCD shodny, jest také $AD = BD$, z čehož zase vyplývá, že jest $\triangle ABD$ rovnoramený; následovně leží O i vrchol D na kolmici v středním bodu m postavené (§ 15, 4.).

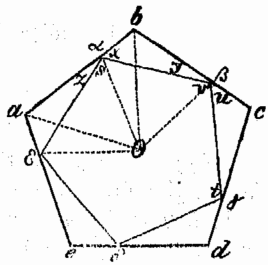


Obr. 53.

6. *Když se spojí v pravid. pětiúhelníku vrchol některého obvodového úhlu s krajními body strany protilehlé, vznikne rovnoramený trojúhelník, v němžto jest každý úhel na základně dvakrát tak velký jako úhel při vrcholu.*

Důkaz. Z předešlé věty jde, že jest v trojúhelnících AED a BCD $\sphericalangle \alpha = \beta$, $\sphericalangle \gamma = \delta$, a při tom $\sphericalangle \beta = \frac{180^0 - E}{2} = \frac{180^0 - 108}{2} = 36^0$, a taktéž $\sphericalangle \delta = \frac{180^0 - C}{2} = 36^0$; jest tudy $\sphericalangle \beta = \delta$. Na úhel ADB zbyde tedy: $\sphericalangle ADB = D - (\beta + \delta) = 108^0 - 2.36 = 108^0 - 72^0 = 36^0$, t. j. úhel D byl přímkama AD a BD ve tři sobě rovné díly rozdělen. V rovnoramenném trojúhelníku ABD známe nyní jeden úhel, pročež jest $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA = \frac{180^0 - \sphericalangle ADB}{2} = \frac{180^0 - 36^0}{2} = 72^0$, t. j. každý úhel na základně trojúhelníka ABD jest dvakrát tak velký jako úhel při vrcholu.

7. *Sříznou-li se na všech stranách pravid. mnohoúhelníka stejné částky, tak aby měl každý průsečník od nejbližšího předešlého rohu stejnou vzdálenosť, určí se rohy nového pravid. mnohoúhelníka, který má týž počet stran i týž střed jako mnohoúhelník původní.*



Obr. 54.

Důkaz. Budiž na př. v obr. 54. *abcde* pravid. pětiúhelník a $a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta$ atd. Spojením bodů α, β, γ, δ... vzniknou trojúhelníky $a\alpha\varepsilon$, $\alpha b\beta$, $\beta c\gamma$..., které vespolek shodné jsou a v nichžto tedy jest $\alpha\varepsilon = \alpha\beta = \beta\gamma$...; zároveň ale ze shodnosti této plyne, že $\sphericalangle z = y$, $\sphericalangle x = u$, atd. Nyní jest ale

$$\sphericalangle x + y + b = 180^0, \text{ a takéž}$$
$$\sphericalangle y + v + u = 180^0, \text{ pročež bude}$$

$\sphericalangle x + y + b = y + v + u$. Z této rovnice vychází pak, že $\sphericalangle x + b = v + u$, a nebo když od této odečteme rovnici $\sphericalangle x = u$, konečně $\sphericalangle b = v$. Podobným spůsobem dokáže se, že $\sphericalangle a = \sphericalangle s$, $\sphericalangle c = \sphericalangle t$ atd.; a jelikož jsou $\sphericalangle a = b = c = \ldots$, bude také $\sphericalangle s = \sphericalangle v = \sphericalangle t = \ldots$ Obrazec $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ má tudy všechny strany i všechny úhly sobě rovny, jest tudíž pravidelný. Že pak střed daného obrazce jest i středem obrazce nového, plyne ze shodnosti trojúhelníků aoE, αob, βoc... (§ 14. 3); jsou totiž vzdálenosti bodu O ode všech rohů α, β, γ... sobě rovny.

§ 20.

Jako v trojúhelníku tvar i velikost obrazce zvláštními částkami určeny byly, postačuje i v čtyrúhelníku známosť některých určovacích částek k dokonalému poznání celého obrazce. Shodnosť čtyr- i mnohoúhelníků zakládá se vůbec na shodnosti trojúhelníků a platí vždycky věta: *Shodné celky dají se rozložiti stejnolehlými přímkami v shodné částky,* a naopak: *Ze shodných částek skládati lze stejným spůsobem i shodné celky.* (Vyobrazení a důkaz této věty zůstavuje se čtenáři.)

U obrazcův jakousi pravidelností vynikajících bývají některé podmínky shodnosti již mlčky dány a tu se vyslovuje známka shodnosti ve zvláštních případech i zvláštním spůsobem. Tak díme:

a) *Dva čtverce jsou shodny*, rovná-li se strana jednoho čtverce straně druhého čtverce.

b) *Dva obdélníky jsou shodny*, rovnají-li se dvě sousedné strany jednoho obdélníka dvěma sousedným stranám druhého obdélníka.

c) *Dva kosočtverce jsou shodny*, mají-li jednu stranu a jeden úhel na vzájem sobě rovny.

d) *Dva kosodélníky jsou shodny*, rovnají-li se dvě sousedné strany a úhel jimi sevřený jednoho kosodélníka dvěma sousedným stranám a úhlu jimi sevřenému druhého kosodélníka.

e) *Dva stejnojmenné pravidelné mnohoúhelníky jsou shodny*, mají-li jednu stranu (vůbec přímku) stejnolehlou stejnou.

Ve všech těchto případech provede se důkaz bezprostředně pokrýváním.

III. Měřické konstrukce k předešlému dílu.

§ 21.

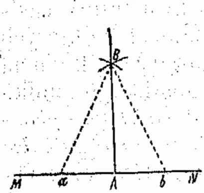
Nauky o shodnosti obrazcův a o úhlech při tom se naskytujících mají velikého upotřebení v rejsování; že ale čáry a body, o nichž v měřictví řeč bývá, čarami a body matematickými jsou, musí v měřických konstrukcích co nejtenčeji rejsovány a k docílení větší srozumitelnosti i rozličným spůsobem vyobrazeny býti.

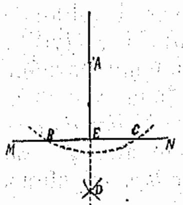
Přijmuto vůbec za pravidlo, aby se při konstrukcích rozeznávaly a označovaly čáry trojího druhu, a sice: čáry d a n é, které se označují p l n ě t e n c e; čáry p o m o c n é (Hilfslinien), které se označují t e n c e t e č k o v a n ě; a konečně čáry vyjádřující výsledek, které se označují něco t l u s t ě j i ostatních.

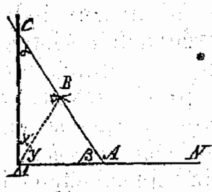
1. Úloha. *Na přímku MN má se postaviti v bodu A kolmice* (obr. 55.).

Provedení: Odříznou se na obou stranách bodu *A* libovolné, avšak stejné kusy aA = bA; z *a* a *b* narejsují se poloměrem, který jest větší nežli polovice *ab*, oblouky, které se v *B* proseknou. Přímka AB jest kolmo na *MN*.

Důkaz. *Ba* a *Bb* jsou co poloměry téhož kruhu sobě rovny, pročež bude $\triangle$ *aBb* rovnoramený; dle § 15. 3, *β* jest AB $\perp$ MN.


Obr. 55.


Obr. 56.


Obr. 57.

2. Úloha. *S bodu mimo danou přímku má se spustiti na tuto kolmice.* (Obr. 56.)

Provedení: S daného bodu *A* narejsuje se oblouk tak velkým poloměrem, aby přímku MN ve dvou bodech prosekl; z průsečníků *B* a *C* narejsují se na to na druhé straně přímky *MN* (a nebo i jako v úloze 1.) oblouky, a průsečník jejich *D* spojí se s daným bodem *A*. Přímka AD jest pak kolmo na MN.

Důkaz. Trojúhelníky BAC a DBC byly by rovnoramené, atd. dle § 15. 3.

3. Úloha. *Má se postaviti v krajním bodu dané přímky na tuto kolmice.* (Obr. 57.)

Provedení: Z libovolného bodu *A* přímky MN a z krajního bodu *M* narejsují se oblouky jednostejným poloměrem, až by se prosekly; průsečník B spojí se s A, a na prodloužení přímky AB nanese se délka BC = BM. Přímka CM jest pak kolma na MN.

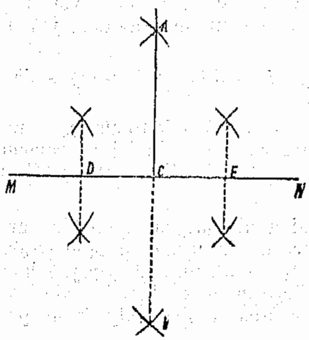
Důkaz. V trojúhelníku AMC jsou $\sphericalangle \beta + \alpha + x + y = 2R$; že ale jsou trojúhelníky ABM a CBM rovnoramené, následovně $\sphericalangle \alpha = x$, $\sphericalangle \beta = y$, bude v poslední rovnici $\sphericalangle 2x + 2y = 2R$, nebo $\sphericalangle x + y = R$, atd.

4. Úloha. *Daná přímka má se rozpůliti.*

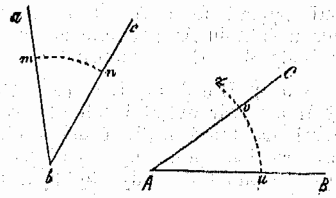
Provedení: Z krajních bodů dané přímky *MN* (obr. 58.) narejsují se jednostejným poloměrem, který ale větší býti musí nežli polovice MN, oblouky po obou stranách přímky MN, a průsečníky jejich se spojí. Jest potom dle § 15. 3, MC = CN.

Poznámka 1. Z konstrukce této vysvítá, jak lze danou přímku rozděliti na 4, 8, 16, atd. sobě rovných dílů. O všeobecném dělení přímek viz § 23, 3. Měla-li by daná přímka býti příliš dlouhá, tak že by se nad ní nedaly tak snadno potřebné oblouky narejsovati, odřízni od obou krajů stejné kusy, a rozpůl pozůstalou část.

Pozn. 2. Zároveň z konstrukcí těchto vysvítá, jak lze nad danou přímkou sestaviti trojúhelník rovnoramený.



Obr. 58.



Obr. 59

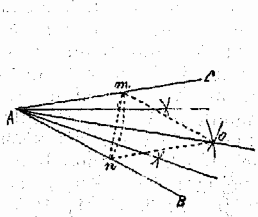
5. Úloha. *Má se narejsovati úhel, který by se rovnal úhlu danému.*

Provedení: Z vrcholu daného úhlu *b* (obr. 59.) narejsuje se libovolným poloměrem oblouk *mn*, tak že bude $bm = bn$; a tímtéž poloměrem z některého bodu dané přímky AB neurčitě velký oblouk *uz*; prořízne-li se nyní *uz* poloměrem *mn*, tak aby bylo $mn = uv$, a protáhne se skrze body A a *v* přímka AC, bude $\sphericalangle b = A$.

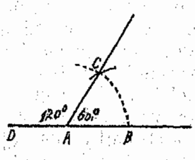
Důkaz. Kdyžby se spojil přímkou bod *m* s *n*, a taktéž bod *u* s *v*, vznikly by shodné trojúhelníky, v kterých jest $\sphericalangle b = A$.

6. Úloha. *Daný úhel má se rozpůliti.*

Provedení: Z vrcholu daného úhlu odřízni na obou ramenech stejné kusy (v obr. 60. Am = An), narejsuj z bodů *m* a *n* jednostejným poloměrem oblouky a spoj jejich průsečník *O* s vrcholem A. — Důkaz: Trojúhelníky *Amn* a *mnO* byly by rovnoramené, pročež úhel A přímkou AO rozpůlen (dle § 15. 3).



Obr. 60.



Obr. 61.

7. Úloha. *Narejsuje se úhel 60°, 120°, 45°, 30°, 15°.*

Provedení: a) Narejsuje-li se z některého bodu dané přímky, na př. z A (obr. 61.) libovolný oblouk a prořízne se tímtéž poloměrem z B; protáhne-li se na to středem A a průsečníkem C přímka, bude ∢ CAB = 60°, a ∢ DAC = 120°.

Důkaz. Trojúhelník ABC bylby rovnostranný, poněvadž jest AB = AC = BC (co poloměry téhož kruhu); následovně dle § 13. 2, *a*. ∢ BAC = 60°.

b) Rozpůlením úhlu 60° obdržíme úhel 30°, a z toho zase ∢ 15°.

c) Když se postaví na danou přímku kolmice a pravý úhel, jež takto vznikl, se rozpůlí, obdržíme ∢ 45°.

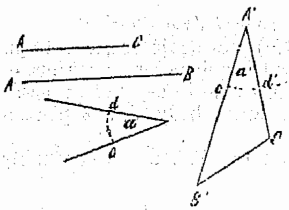
8. Úloha. *Daným bodem má se narejsovati přímka, která by byla s jinou přímkou rovnoběžná.*

Provedení: Daným bodem vede se přímka, která by přímku danou někde proseklu, a narejsuje v daném bodu úhel, jaký sečka s protatou přímkou zavírá (úhly střídavé). Rejsování rovnoběžek děje se vůbec způsobem rozmanitým, nejpohodlněji ale pomocí dvou trojúhelníků a nebo příložného pravítka, jak to v 8. 2, pozn. vysvětleno bylo.

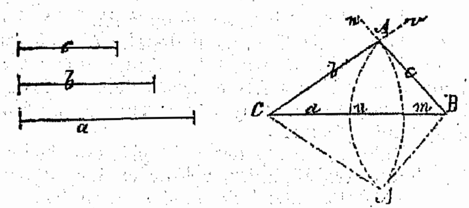
9. Úloha. *Má se narejsovati trojúhelník, když jsou dány dvě strany a úhel jimi sevřený.*

Provedení: Jsou-li AB a AC dané strany (obr. 62) a k tomu ∢ a, narejsuj nejprvé úhel A', který by se rovnal úhlu a; na jedno jeho rameno nanes z vrcholu A' počínaje délku A'B' = AB na druhé délku A'C' = AC, a spoj body B' a C' spolu přímkou.

Pozn. Dle § 14, 1, *b*, jsou dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným určeny nejen tvar nýbrž i velikosť trojúhelníka; pročež se tu mohou dané strany nanésti na které koliv rameno úhlu A', vždycky obdržíme týž trojúhelník, jenom rozličně položený. — Čtenář nyní dle tohoto návodu dovede také sestrojiti trojúhelník, když by byla dána jedna strana a oba úhly k ní příléhající.



Obr. 62.



Obr. 63.

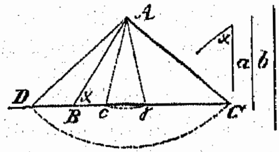
10. Úloha. *Má se sestrojiti trojúhelník, když jsou dány všechny jeho strany.*

Provedení: Jsou-li a, b, c dané strany (obr. 63.), nanese se nejprvé na libovolnou přímku jedna z daných stran, na př. a = BC. Na to se vezme druhá strana, na př. b, a položí se jedním koncem do bodu C; že však není úhel těchto stran znám, bude se moci přímka b okolo bodu C točiti, čímž druhý její krajní bod vytvoří oblouk mn (t. j. narejsuje se z C poloměrem b oblouk mn). Totéž udělá se i s třetí stranou. V průsečníku A těchto oblouků sejdou se obě strany a uzavřou trojúhelník ABC, čímž i úhly své určité velikosti nabydou. — Oblouky zde rejsované mohou se, jak z obrazu viděti lze, proseknouti jak nahoře tak i pod přímkou BC; z toho ale nenásleduje, že by se ze tří stran daly sestrojiti dva trojúhelníky. Při svém otáčení neproměnily totiž strany svou délku a určují dle § 15. 1, d) toliko jeden trojúhelník.

Jak se sestrojí trojúhelník pravidelný?

11. Úloha. *Má se narejsovati trojúhelník, když jsou dány dvě strany a úhel proti té větší ležící.*

Provedení: Narejsuje se úhel tak velký jako jest daný úhel x (obr. 64.); na jedno jeho rameno nanese se ta menší z daných přímek, na př. BA $= a$, a délka druhého jeho ramene zůstane prozatím neurčita. Že ale větší strana b naproti úhlu x ležeti má, položí se jeden její kraj do A, a druhý krajní bod otáčí se tak, aby vytvořil oblouk, který by rameno BC proseklo a tím určil i jeho délku. ABC jest pak žádaný trojúhelník. Zde mohl, jak z obrazu viděti lze, oblouk poloměrem AC $= b$ rejsovaný proseknouti spodní rameno úhlu x na dvou místech; tím však se nepřipouští možnost dvou rozličných trojúhelníků BAC a BAD, které by dané částky obsahovaly, poněvadž tento poslední sice obě dané strany obsahuje, nikoliv ale úhel x, a nevyhovuje tudy kladenému požadavku.

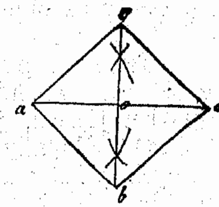


Obr. 64.

Zcela jinak by to vypadlo ale, kdyby daný úhel x měl ležeti naproti té menší z daných stran. Kdyby totiž bylo $b < a$, prosekl by snad z vrcholu A poloměrem b narejsovaný oblouk opět dvakráte rameno CA, jenže by oba průsečníky C a γ ležely na téže straně přímky AB. Dané 3 částky byly by tudy obsaženy jak v $\triangle$ABC tak i v $\triangle$ABD, a poněvadž tyto velikosť i tvar rozličný mají, byla by v tomto případu úloha neurčitou.

12. Úloha. *Má se sestrojiti čtverec, když jest dána a) jeho strana, b) jeho úhlopříčna.*

Provedení: ad a) Udělá se přímka tak velká, jako jest daná strana čtverce; v obou krajních bodech vztýčí se kolmice a odřízne se od nich opět daná strana. Spojením těchto průsečníků vznikne žádaný čtverec. ad b) Udělá se přímka rovna dané úhlopříčně (obr. 65. ad) a postaví se v jejím středu o kolmice; odřízne-li se na to z obou stran na této kolmici po půlce dané úhlopříčny, tak aby bylo ao $=$ bo $=$ co $=$ do, vzniknou rohy žádaného čtverce. Důkaz dle § 17, 5.



Obr. 65.

Úlohy ku cvičení.

§ 22.

1. Největší díl měřických úloh směřuje k určení rozličných trojúhelníků nebo kruhů, a to i tehdáž, když by to přímo vysloveno nebylo a úloha nápohledně něco jiného žádala. Podmínky však, jež k provedení úlohy dány jsou (viz IV. 2, 3), musí býti od sebe nezávislé, t. j. každou musí být něco jiného žádáno nebo dáno, poněvadž by úloha jinak byla neurčitou a nebo snad i nemožnou (IV. 3).

Někdy ovšem zdá se, jakoby podmínek dán byl počet nedostatečný, ačkoliv úloha předce určitou jest. V takovémto případu bývají podmínky obyčejně již ve výpovědi skryté, na př. v úloze „má se narejsovat trojúhelník pravidelný, když jest dána jedna jeho strana,“ kde se zdá, jakoby byla dána toliko jedna strana. Tím ale, že trojúhelník pravidelný býti má, jest již i velikosť druhých dvou stran dána a všechny úhly určeny.

Jestliže ale počet daných podmínek dostatečný býti má, tak zase s druhé strany nesmí určité meze přesahovati, sice se stane úloha přeurčitou, a ta bývá obyčejně nemožnou.

2. Některé úlohy dají se provésti (rozřešiti) všeobecně, ať již dané podmínky jsou druhu jakého koliv, jako na př. 9. úloha v předešlém paragrafu, kde to zcela lhostejné jest, jak velký jest úhel a jakou délku dané strany mají. — Naproti tomu jest v měřictví mnoho úloh, jichžto provádění své meze má, které se v konstrukci nikdy překročiti nemohou. Řešíce nějakou takovouto úlohu, musíme meze tyto přísně vytknouti, což slove v měřictví **omezením** úlohy (Determination), jako na př. v úloze 10. předešlého paragrafu, kde se mělo přidati, že součet dvou stran větší býti musí nežli strana třetí. Omezení odůvodňuje se buď na základě známých vět naučných anebo z naskytlých se při konstrukci shod nebo neshod.

3. K úplnému provedení úlohy náleží a) **konstrukce** žádaného obrazce, a b) **důkaz**, že narejsovaný obrazec v skutku zadost činí kladeným požadavkům, což známosť měřických vět vyžaduje. Při tom bývá často i nutno, narejsovati zvláštních pomocných čar, aby se objevila souvislosť dokázaných již nauk s větou právě dokazovanou.

Také ale počtem mohou býti mnohé úlohy provedeny, o čemž v § 40. Mnohdy postačí, že se daná úloha převede na úlohu jinou, jejížto řešení nám známo jest; při tom se musí i dané podmínky na jiné, známější podmínky proměniti, t. j. místo daných přímek a úhlů zjednáme si jiné, které by se nám právě hodily a jež bychom snadno určiti dovedli.

Také **měřickým rozborem** (geometrische Analysis) usnadňuje se řešení úloh, a to tak, že si žádaný obrazec představujeme jako by byl již hotový a zpytujeme v něm souvislosť částek daných s těmi, jež hledány býti mají. — Často nás přivede podobnosť dané úlohy s provedenou již některou úlohou na spůsob jejího řešení, což slove **obdobou** (Analogie). Obdoba má totiž v řešení úloh místa, když i mezi podmínkami jest obdoba jakási, dle níž řídíce se a příslušnou změnu činíce i podobné konstrukce provádíme.

Poznámka. Řešení měřických úloh vyžaduje tudy obšírnou a důkladnou známosť vět měřických, bez nichžto by nám některá provedení ani na mysl nepřišla. Jako však neobratná ruka i nejlepšími nástroji nic nevyvede, tak jest i při řešení měř. úloh vedle theoretických vědomostí a vedle bystrosti rozumu také zvláštního cviku potřebí. Hojným řešením úloh roste při stejných jinak poměrech soudnosť a obratnosť, a z této příčiny uveden zde větší počet úloh k cvičení.

A. Úlohy počtářské a neurčité úlohy k rejsování.

1. Jak velký jest středový úhel v pravidelném čtyr-, pěti-, šesti- atd. úhelníku?

2. Jaký jest obvod obdélníka 7·5° dlouhého a 4°4′6″ širokého?

3. Obvod obdélníka 3°4′ dlouhého jest 7°3′8″; jak jest obdélník široký?

4. Pole mající podobu obdélníka měří v obvodu 400° a jeho délka jest o 8°2′ větší nežli šířka; jak dlouhé a jak široké jest to pole? (d = 18°2′, š = 15°).

5. Obvod rovnoramenného trojúhelníka jest 15°2′; když základna jeho měří 2°4′6″, jak velká budou jeho ramena?

7. Obdélník 4′8″ dlouhý a 3′6″ široký rozpůlí se po délce a obě půlky nastaví se k sobě po šířce; zůstane tu obvod nezměněný a nebo jaký bude?

7. Určí se bod, který má od jiného daného bodu určitou vzdálenosť. (Dle § 9. 2, jest kruh poloměrem dané vzdálenosti narejsovaný měřickým místem všech takovýchto bodů.)

8. Určí se bod, jehožto vzdálenosti od dvou jiných bodů A a B sobě rovné jsou. Dle § 15. 4.

9. Narejsuje se rovnoramený trojúhelník, když jest dána a) jeho základna, b) jedno jeho rameno, c) úhel při vrcholu.

10. Určí se bod, který má od dané přímky určitou vzdálenosť. (Z pojmu o rovnoběžnosti dvou přímek plyne, že všecky takovéto body leží na přímce, která s danou přímkou v žádané vzdálenosti rovnoběžná jest.)

11. Určí se bod, jehožto vzdálenosti ode dvou přímek sobě rovné jsou (dle § 15. 5,).

12. Narejsuje se a) kosočtverec, jehož strana dána jest; b) kosodélník, jehož dvě sousedné strany dány jsou.

B. Úlohy určité.

§ 23.

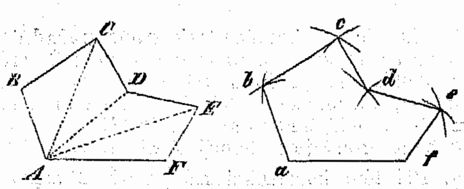
1. *Pravý úhel má se rozděliti ve 3, 6, 12, atd. sobě rovných dílů.*

Nad libovolnou částkou jednoho ramena pravého úhlu sestrojí se pravidelný trojúhelník ADE a úhel EAD se rozpůlí atd.

Důkaz podej čtenář.

2. *Má se narejsovati obrazec, který jest shodný s nějakým daným obrazcem.*

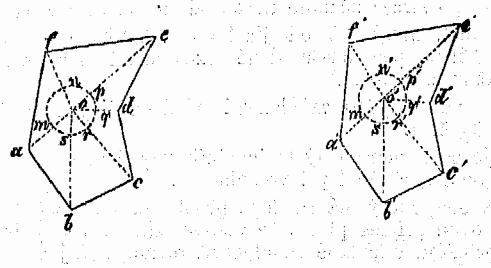
První provedení pomocí úhlopříčen: Má-li se narejsovati obrazec, který by byl s ABCDEF (obr. 66.) shodný, udělá se na příhodném místě přímka $af = AF$; na to se narejsuje poloměrem AE z *a* oblouk a prosekne se jiným oblou-



Obr. 66.

kem, který z *f* poloměrem EF narejsovati třeba, tak že by byl $\triangle AFE \cong \triangle afe$. Podobně se určí bod *d* sestrojením trojúhelníka, který by byl shodný buď s $\triangle AED$ nebo s $\triangle AFD$; a pokračuje-li se tak v sestavování shodných trojúhelníků dále, bude dle § 20. $abcdef \cong ABCDEF$.

Druhé provedení pomocí uvnitř ležícího bodu: Vezme se uvnitř obrazce libovolný bod o (obr. 67.), odkud by se pohodlně ke všem rohům přímky vésti mohly a na jiném místě vezme se též libovolný bod o'. Z obou těchto bodů narejsují se libovolným, avšak jednostejným poloměrem kruhy. Odříznou-li se na to oblouky $mn = m'n'$, arc. $np =$ arc. $n'p'$ atd. v kruhu o' tímtéž pořádkem

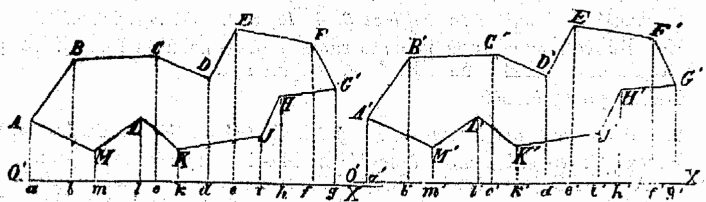


Obr. 67.

jak v kruhu o po sobě následují, a vedou se z o' neurčitě dlouhé přímky o'm'y, o'n', o'p' atd., potřebujeme odříznouti oa = o'a', ob = o'b' atd. a obdržíme roh žádaného obrazce.

Důkaz, že $abcdef \cong a'b'c'd'e'f'$ dle § 20. a § 14, 3.

Třetí provedení pomocí souřadnic: Vede se na originalu buď mimo nebo i uvnitř obrazce libovolná přímka OX (obr. 68.), na nížto se spustí



Obr. 68.

se všech rohů daného obrazce kolmice (tak zvané **pořadnice** nebo **ordinaty**). Na jiné přímce O'X' přenesou se od libovolného bodu O' vzdálenosti Oa = O'a'. Ob = O'b', atd. v souhlasném pořádku (tak zvané **sečky** č. **abscisy**) a postaví se v bodech a', b', c', ... kolmice. Odměříme-li na to ordinaty, tak aby bylo Aa = A'a', Bb = B'b',... obdržíme rohy A', B', C'..., jichžto náležitým spojením vznikne obrazec, který jest shodný s ABCD...

Poznámka. Při této konstrukci má každý obrazec svou přináležející ordinatu i abscisu a jest dokonale určen, jakmile velikosť těchto jeho souřadnic známa jest. Slovem **souřadnice** (koordinaty) znamenáme obě právě jmenované, k určitému bodu vztahující se přímky dohromady.

3. *Daná přímka má se rozděliti v několik sobě rovných dílů.*

Provedení a důkaz dle § 18, 4.

4. *Má se narejsovati pravoúhelný trojúhelník,* když jest dána a) přepona a jeden k ní přiléhající úhel; b) jedna odvěsna a jeden k ní přiléhající úhel.

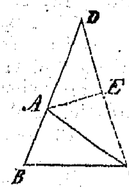
5. *Má se narejsovati rovnoramený trojúhelník*, když jest dáno a) jedno rameno a úhel na základně; b) výška a úhel při vrcholu; c) výška a jedno rameno.

6. *Má se narejsovati a) pravidelný šestiúhelník, b) prav. osmiúhelník.*

Provedení: a) narejsuje se středový úhel 60° šestkrát vedle, a na ramenech těchto úhlů odříznou se stejné kusy, atd.

7. *Narejsuje se trojúhelník, když jest dána jedna strana, jeden k ní příléhající úhel, a součet druhých dvou stran.*

Provedení zdálo by se v tomto případu poněkud nesnadné; pročež sobě pomyslíme, že by žádaný trojúhelník již vyobrazen byl (provedení měř. rozborem). Budiž tedy *BC* daná strana (obr. 69.) a *B* úhel k ní příléhající; tím jsou určeny oba krajní body *B* a *C*, jakož i směr strany *AB*, na nížto třetí vrchol *A* ležeti bude. Přímka *BD* $=$ AB $+$ AC, tak že jest AC $=$ AD; z toho ale plyne, že jest $\triangle$ *ADC* rovnoramený a vrchol *A* musí ležeti v přímce, jížto se základna CD kolmo rozpůluje.



Obr. 69.

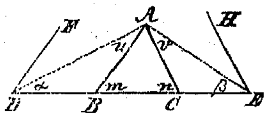
Pročež bude sestrojení žádaného trojúhelníka: Narejsuj daný úhel *B* a odřízni na jednom jeho ramenu danou stranu BC, na druhém pak součet druhých dvou stran; na to postav ve středním bodu přímky CD kolmici (dle § 21. 4), která přímku BD prosekne v bodu A. Trojúhelník ABC vyhovuje pak žádaným podmínkám.

8. *Má se narejsovati trojúhelník, když jsou dány: jedna strana, jeden k ní příléhající úhel a mimo to ještě rozdíl dvou stran.*

Provedení jest onomu v úloze předešlé podobno. Čtenář podej rozbor, důkaz a provedení.

9. *Sestroj se trojúhelník, jsou-li dány dva úhly* **m** *a* **n** *a jeho obvod* **s**.

Rozbor: Žádaný trojúhelník budiž $\triangle$ ABC v obr. 70., který obsahuje $\sphericalangle$ ABC $=$ m, $\sphericalangle$ ACB $=$ n, a jehož strany AB $+$ AC $+$ BC $=$ s. Položí-li se strany tyto na přímku jedinou vedle sebe, tak aby bylo BD $=$ BA, AC $=$ CE, a následovně DE $=$ *s*, a vedou se přímky DA a EA; bude ihned sestrojení $\triangle$ ADE, jehož vrchol jest vrcholem žádaného trojúhelníka, patrné. Jest totiž v něm známo: jedna jeho strana DE $=$ s, a oba k ní příléhající úhly, totiž $\sphericalangle \alpha = \frac{m}{2}$, $\sphericalangle \beta = \frac{n}{2}$ (na základě § 11. 3, b, a § 15. 1).



Obr. 70.

Bude tedy strojení žádaného trojúhelníka: Odřízni na libovolné přímce délku *s* a narejsuj v jejích krajích polovičky daných úhlů *m* a *n*; v průsečníku *A* takto narejsovaných ramen sestroj opět polovičky daných úhlů ($\sphericalangle \alpha = u$), jichžto ramena trojúhelníky rovnoramené zavírajíce na přímce DE odříznou body B a C.

Důkaz. Jelikož udělán byl $\sphericalangle \alpha = u = \frac{m}{2}$, jest $\sphericalangle ABC = \alpha + u = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m$, a taktéž $\sphericalangle ACB = \sphericalangle \beta + v = {}^{n}/_{2} = {}^{n}/_{2}$; a poněvadž AB $=$ BD, AC $=$ CE, jest DE $=$ s $=$ AB $+$ BC $+$ CA, tak že trojúhelník ABC obsahuje skutečně dané úhly a má žádaný obvod.

10. *Má se narejsovati trojúhelník pravoúhelný, když jest dána a) přepona a součet obou odvěsen, b) přepona a rozdíl obou odvěsen, c) ostrý úhel na přeponě a součet obou odvěsen.*

Provedení jest předešlému podobno. *)

11. *Sestroj trojúhelník, když jsou dány: a) dvě strany a výška k některé z nich přináležející, b) součet dvou stran, úhel jimi sevřený a mimo to ještě výška k jedné z nich přináležející.*

Provedení: a) Narejsuj jednu stranu, a ve vzdálenosti dané výšky veď k ní rovnoběžku, která bude geometr. místem vrcholu, atd. b) Na základě úlohy 9. a právě předcházející.

*Provedení a důkaz následujících úloh zůstavuje se čtenáři, aby se v řešení měřických úloh vycvičiti mohl.

12. *Narejsuj trojúhelník, když jsou dány dva úhly A a C, a součet stran jim protiležících.*

Provedení. Udělej přímku $AD = AB + BC$, tak aby bylo $BD = BC$, přilož k ní úhel A a konečně narejsuj v D úhel $D = 90^0 - (A + C)$, atd.

13. *Sestrojí se trojúhelník, když jest dáno*: a) jedna strana, úhel jí protilehlý a součet druhých dvou stran; b) jedna strana, úhel jí protilehlý a rozdíl druhých dvou stran.

14. *Narejsuj lichoběžník, když jsou dány všechny jeho strany.* Provedení dle § 18, 1.

15. *Když jest dán úhel a mimo to libovolný bod, narejsuj přímku, která by bodem tímto procházejíc na ramenech daného úhlu odřízla stejně dlouhé částky* (od vrcholu počítaje).

Provedení: Rozpůl daný úhel a veď z daného bodu na tuto půlící přímku kolmici. Důkaz dle § 15. 3, výsl.

16. *Jedním z daných tří bodů veď přímku, aby kolmice z druhých dvou bodů na ni spuštěné odřízly na ní stejně dlouhé částky.*

Provedení. Má-li býti vedena žádaná přímka na př. bodem 1, spoj tento bod s bodem 2, a přímku 12 rozpůl v bodu *a*; spoj bod *a* s bodem 3 a veď žádanou přímku $1x \perp 3a$.

Důkaz dle § 18, 4.

17. Mezi ramena daného úhlu má se položiti přímka určité délky tak, aby byla přímka ta rovnoběžna s jinou a krajní její body aby ležely v ramenech daného úhlu.

18. V daném trojúhelníku má se narejsovati ku základně rovnoběžka, jejíž to délka by se rovnala součtu obou úseků, jež na druhých dvou stranách k základně přiléhají.

Kniha třetí.

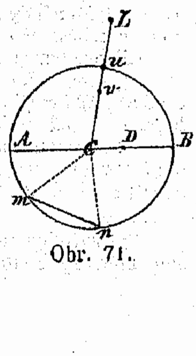
Nauka o kruhu.

I. Základné vlastnosti kruhu.

§ 24.

1. *Každý kruh má jen* **jeden** *střední bod.*

Důkaz. Budiž v obr. 71. C středem kruhové čáry; kdyby měla mít čára tato ještě jeden takový bod, na př. D, veď tímto bodem a středem *C* přímku, která kruh ve dvou místech prosekne, na př. v A a B. I bude potom $AC = CB$ (dle § 9, 2); na přímce AD jest ale $AD > AC$, pročež bude také $AD > CB$; že ale jest také $CB > DB$, bude tím spíše $AD > DB$, t. j. bod D není od bodů *A* a *B* stejně vzdálen a nemůže býti středním bodem kruhové čáry.



Obr. 71.

Pozn. Jelikož kruh pouze jediný střed míti může a všechny jeho poloměry sobě rovny jsou, bude velikost kruhu poloměrem úplně určena. Z toho plyne: Kruhy jsou spolu shodny, jsou-li jejich poloměry (nebo průměry) sobě rovny. Poloměr znamená se malým *r* (radius), průměr $=2r$ malým *d* (diametr), tak že jest $d=2r$.

2. *Vzdálenost jakého koliv mimo kruh ležícího bodu od středu jest větší nežli poloměr, vzdálenost ale bodu, který leží uvnitř kruhu, jest menší nežli poloměr.*

V obr. 74. jest totiž $LC > Cu$ a $Cv < uC$, při čemž $Cu = r$.

3. Kruhy mající týž střed, slovou kruhy **soustředné** (concentrische Kreise); kruhy pak mající středy rozličné, slovou **kruhy výstředné** (excentrische K.).

Plocha omezená dvěma poloměry a obloukem mezi nimi ležícím slove **kruhový výsek** (Sector, Kreisausschnitt); plocha však omezená tětivou a obloukem k ní přináležejícím slove **kruhový úsek**, (Segment, Kreisabschnitt). Plocha konečně obsažená mezi dvěma soustřednými kruhy slove **věnec** nebo **mezikruží** (Ringfläche).

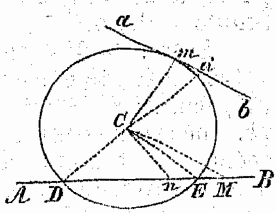
4. *Průměr kruhu jest větší nežli která koliv jeho tětiva.*

Důkaz. Spojí-li se krajní body dané tětivy mn (obr. 71) se středem C, bude v trojúhelníku mCn $Cm + Cn > mn$, t. j. $2r > mn$.

Dodatek: Průměr jest dle této věty a dle § 9. 2 největší tětivou.

5. *Přímka, která na některém poloměru v jeho krajním bodu kolmo stojí, leží zcela mimo kruh a má s tímto jen jeden bod společně.*

Důkaz. Je-li v obr. 72. $ab \perp Cm$, musí všechny body přímky ab ležeti mimo kruh a přímka ta nemá mimo bod m s kruhem žádný jiný bod společně. Spojí-li se totiž některý jiný bod přímky ab se středem C, na př. bod d, vznikne pravoúhelný trojúhelník Cmd, v kterém jest $Cd > Cm$; dle § 24. 2 leží tedy bod d mimo kruh.



Obr. 72.

Dodatky. a) Přímka mající s kruhem jediný bod společně, slove **tečnou kruhu** (Berührungslinie), a bod, v němžto se tečna kruhu dotýká, slove **tečný bod** (Berührungspunkt). A jelikož v krajním bodu poloměru toliko jedna kolmice vztýčena býti může, vychází na jevo, že v každém bodu kruhové čáry toliko jedna tečna narejsována býti může.

b) Naopak může se říci, že přímka, která se kruhu dotýká, na poloměru stojí kolmo.

c) V tečném bodu na tečnu postavená kolmice prochází středem kruhu; a naopak se středu kruhového na tečnu spuštěná kolmice prochází tečným bodem.

d) Středy všech kruhů, které se dané přímky v určitém bodu dotýkati mají, leží na přímce, jíž v tomto bodu na danou přímku kolmo postavíme.*)

6. *Přímka může míti s kruhem toliko dvé bodův společně.*

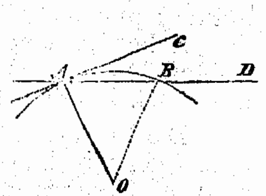
Důkaz. Buďtež D a E body kruhu (obr. 72.), jimiž přímka AB prochází; i bude nám dokázati, že všechny ostatní body přímky, jež mezi D a E leží, u vnitř kruhu, a ostatní body mimo kruh se nacházejí. — Spojí-li se tedy některý mezi D a E ležící bod, na př. n, jakož i oba tyto v kruhu ležící body se středem C, vznikne rovnoramený trojúhelník DCE, v němžto jest $\sphericalangle D = E$. Avšak $\sphericalangle DnC > E$, pročež i $\sphericalangle DnC > D$; musí tudy v $\triangle DnC$ být $DC > Cn$ (§ 13. 4), z čehož vychází, že bod n uvnitř kruhu leží (§ 24. 2). — Podobně se dokáže, že všechny mimo část DE ležící body přímky AB od středu C vzdálenější jsou nežli body D a E. Jest totiž $\sphericalangle DEC$ úhel ostrý (§ 13. 2, pozn.), následovně jeho vedlejší úhel $CEB > R$; pročež v $\triangle CEM$ bude $CM > CE$, tak že bod M mimo kruh leží. Mimo bodů D a E nemá tedy přímka s kruhem ničeho více společně.

7. Přímka mající s kruhem dva body společně, slove jeho **sečnou** (Secante); uvnitř kruhu ležící část sečny jest pak **tětivou.** Sečna též vznikne, když se některá tětiva v obou krajních bodech prodlouží. Sečna i tečna jsou přímky neomezené.

Pozn. 1. Z těchto vět plyne, že každá přímka, jež v krajním bodu poloměru k tomuto šikmo postavena byla, sečnou býti musí.

Každou sečnou (a tudy i tětivou) přetíná se kruhová čára na dvé sobě nerovných částí, z nichžto jedna menší, druhá ale větší jest nežli polokruh; protož díme, že se tětivou oblouk napíná a to vždycky ten menší, kdykoliv by jinak výslovně podotknuto nebylo.

Sečna může se však také proměniti v tečnu, jestliže by se kolem jednoho svého průsečníku otáčela. V obr. 73. může se na př. točením sečny AD kolem bodu A průsečník B tomuto stále přibližovati, až by s ním konečně splynul v bod jediný; tu však přejde sečna AD v tečnu AC a délka tětivy AB, jížto se směr sečny určoval, bude míti oba své krajní body v tečném bodu sjednocené. Proto se o tečně praví, že má s kruhem jeden dvojitý bod společně, kterýžto bod si představujeme obyčejně co nekonečně malou částici přímky, jížto se směr tečny určuje. A jelikož kruh ve všech svých bodech tečny míti může, jichžto směr takovouto nekonečně malou částicí určiti se dá, myslíme sobě i kruhovou a vůbec každou křivou čáru z nekonečně malých přímočarných částic složenou.



obr. 73.

*) Jiné vysvětlení tečny viz v odstavci 7. tohoto paragrafu.

Pozn. 2. Má proto i kruhová čára v každém jednotlivém svém bodu směr určitý, a sice směr přináležející tečny, odkud plynou věty:

a) Oblouk kruhu a tečna mají v tečném bodu týž směr.

b) Tečnou udává se směr, jaký má oblouk na místě dotyčném.

c) Všechny poloměry stojí na kruhu kolmo, což se ostatně i následovně odůvodniti dá: v obr. 73. jest ABO trojúhelník rovnoramený, tudy

$\sphericalangle OAB = \frac{180^0 - \sphericalangle BOA}{2}$; splyne-li bod B s A dohromady, padnou oba poloměry BO a AO na sebe a $\sphericalangle BOA$ bude $= 0$, kdežto $\sphericalangle OAB$ přejde v $\sphericalangle OAC$ Pročež bude $\sphericalangle OAC = \frac{180^0 - 0}{2} = 90^0$ a přímka AC tečnou, poněvadž na ní stojí poloměr kolmo.

Když se proto mluví o úhlu, jejž nějaká křivka s protínající ji přímkou zavírá, rozumí se vždycky úhel sevřený touto přímkou a přináležející v tom bodu tečnou.

Přímka, která křivku nějakou kolmo protíná, slove její **normala.**

§ 25.

1. *Průměrem přetíná se kruh na dvé sobě rovných a úplně shodných částí* (na dva půlkruhy).

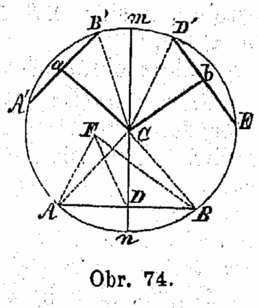
Důkaz. Otočíme-li jednu část kolem průměru a položíme ji na část druhou, pokryjou se obě úplně, poněvadž dle pojmu o čáře kruhové žádný bod svrchního polokruhu ani blíže ani dále do středu padnouti nemůže, než jak to velikosť poloměru dovoluje.

2. *Průměr, který na tětivě kolmo stojí, půlí tuto tětivu, a naopak stojí průměr, jímžto se některá tětiva rozpůluje, na této kolmo.*

Důkaz. a) Je-li $mn \perp AB$ (obr. 74.), spoj kraje tětivy se středem kruhu; i vznikne tu rovnoramený trojúhelník ABC, v němžto jest $AD = DB$ (dle § 15. 3, γ). — b) Je-li $AD = DB$, bude dle téže věty $CD \perp AB$.

3. *Přímka, jížto se některá tětiva kolmo rozpůluje, prochází středem kruhu.*

Důkaz. Je-li $AD = DB$ a při tom $mD \perp AB$ (obr. 74.), musí jíti Dm středem kruhu. Nebo kdyby měl střed kruhu mimo tuto kolmici ležeti, na př. v F, musel by býti $\triangle$ AFB rovnoramený a v něm přímka vrchol se středem základny spojující na této kolmo. Že ale v D toliko jedna kolmice vztýčená býti může, musí FD i se středem F do postavené již kolmice, t. j. do Dm padnouti.



Obr. 74.

Pozn. 1. Každá tětiva, která jinou tětivu kolmo rozpůluje, jest průměrem.

Pozn. 2. Středy kruhů, jež dvěma danými body procházeti mají, leží na přímce, kterou se vzdálenosť daných bodů (tětiva) kolmo rozpůluje.

4. *Tři body, které v téže přímce neleží, nacházejí se vždycky v obvodu kruhu*, t. j. třemi různolehlými body jest kruh dokonale určen.

Důkaz. Jsou-li dány body A, B, C, spoj dva a dva z nich přímkou; přímky tyto (AC a BC) budou tětivami kruhu, pročež potřebujeme v jejich středních bodech vztýčiti kolmice, které musí středem kruhu jíti. Středem kruhu bude následovně jediný bod, v němžto se obě řečené kolmice protínají.

Odtud plynou věty: a) Bod, jehožto vzdálenosti ode tří různoležlých bodů sobě rovny jsou, leží ve středu kruhu, který danými body určen jest.

b) Každému trojúhelníku lze obepsati kruh (dle § 15. 7).

c) Do každého trojúhelníka lze vepsati kruh tak, aby byly strany trojúhelníka tečnami kruhu (dle § 15. 8).

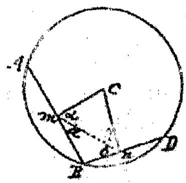
5. *V každém kruhu jsou vzdálenosti stejných tětiv od kruhového středu sobě rovny, a naopak jsou tětivy, mající stejné vzdálenosti od středu, sobě rovny.*

Důkaz. a) Je-li A'B' = D'E (obr. 74) a mimo to $Ca \perp$ A'B', $Cb \perp$ D'E, spoj střed C s body B' a D'. Tím vzniknou pravoúhelné, shodné trojúhelníky, v nichžto jest $Ca = Cb$.

b) Je-li $Ca = Cb$, budou opět trojúhelníky B'Ca a CD'b spolu shodny (§ 14. 4), pročež B'a = D'b. Že ale jsou kolmicemi Ca a Cb obě tětivy rozpůleny, budou i 2Ba = 2D'b, t. j. A'B' = D'E.

6. *Z dvou nestejných tětiv téhož kruhu jest ta větší, která leží blíže kruhového středu.*

Důkaz. Vzhledem k předešlé nauce mohou se obě tětivy tak položiti, aby vycházely z téhož bodu (obr. 75), budiž tedy AB > BD, a při tom $Cm \perp$ AB, $Cn \perp$ BD. Spojí-li se nyní body m a n přímkou, vznikne $\triangle m$Bn, v němžto jest mB > Bn (jakožto půlky nestejných tětiv); jest tudy $\sphericalangle$ b > $\sphericalangle$ a. Doplňky těchto dvou úhlů budou též nestejné, a sice $\sphericalangle \beta < \sphericalangle \alpha$, pročež dle § 13. 4, $Cm < Cn$.

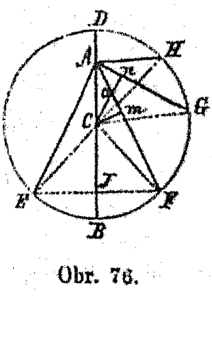


Obr. 75.

Důkaz obrácené věty zůstaven čtenáři.

7. *Vedou-li se nějakým uvnitř kruhu ležícím bodem rozličné přímky k obvodu, bude a) ta z nich největší, která středem kruhu prochází* (v obr. 76. na př. AB); *b) nejmenší jest ta, která tuto největší protivným směrem doplňuje na průměr* (AD); *c) ostatní přímky jsou tím menší, čím více se od středu kruhového vzdalují; d) daným bodem lze jen dvé sobě rovných přímek narejsovati, které na obou stranách průměru leží a s ním stejné úhly zavírají.*

Důkaz. a) a b) Vedou-li se ke krajním bodům rozličných těchto přímek poloměry CF, CG, CH atd., vzniknou trojúhelníky CAF, CAG, CAH atd., které mají po dvou stranách sobě rovných (poloměr a CA); že ale úhly těmito stranami sevřené nestejné jsou, bude dle § 13. 4, AH < AG < AF. Z toho plyne, že musí být AB největší a AD nejmenší mezi těmito přímkami.



Obr. 76.

c) Narejsují-li se vzdálenosti těchto přímek od středu ($Cm \perp AF$, $Cn \perp AG$ . . .), bude, když průsečník kolmice Cn s AF malým o poznamenáme, $\triangle Cmo$ pravoúhelný, a v něm $Co > Cm$, následovně tím spíše $Cn > Co > Cm$. Větší přímka AF má tudy menší vzdálenost od středu.

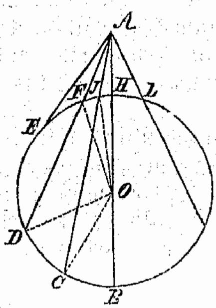
d) Spustí-li se na př. s F na AB kolmice a prodlouží se až do E, bude $\triangle AEJ \cong \triangle AFJ$, pročež $AF = AE$, a mimo to $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FAB$. Že pak jen jedna přímka AE narejsována býti mohla, která by se AF rovnala, plyne z odstavce c).

8. *Vedou-li se nějakým mimo kruh ležícím bodem přímky k obvodu, bude a) z těch, jež kruhem procházejí, ona největší, která jde středem kruhu, a ostatní jsou tím menší, čím více se od středu vzdalují; b) z těch, jež pouze k obvodu kruhovému dosahují a zcela mimo kruh leží, jest nejkratší ta, jejížto prodloužení středem kruhu jde, a ostatní jsou pak tím větší, čím více se od této nejmenší odchylují.*

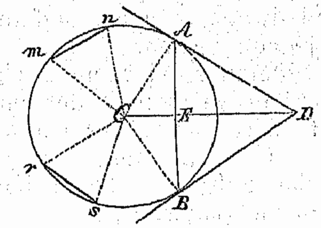
Důkaz. a) Protože jest $OB = OC = OD$ . . . (obr. 77), bude $AB = AO + OC$; avšak v trojúhelníku ACO jest $AO + CO > AC$, pročež také $AB > AC$. V následujících trojúhelnících AOC a AOD jest $AO = AO$, $DO = CO$, $\sphericalangle AOD < \sphericalangle AOC$, pročež i $AD < AC$, a t. d.

b) V trojúhelníku AJO jest $AJ + JO > AO$, a nebo, když se na obou stranách $JO = HO$ odečte, $JA > AH$. Dále jest v $\triangle AFO$ dle § 13. 6 $AF + FO > AJ + JO$, z čehož když se odečte $OF = OJ$, zbyde $AF > AJ$. Jest tudy $AH < AJ < AF$ atd.

Pozn. Nejmenší touto přímkou AH vyjádřuje se vzdálenosť bodu A od čáry kruhové. Srovnej s tím § 13. 4, γ.



Obr. 77.



Obr. 78.

9. *Narejsují-li se ve dvou bodech kruhové čáry tečny, budou jejich částky od tečných bodů až k společnému průsečníku sobě rovny.*

Důkaz. Je-li $AD \perp AC$, $BD \perp BC$ (v obr. 78.), spoj průsečník D se středem C, čímž vzniknou dva pravoúhelné trojúhelníky, které spolu shodné jsou; pročež jest $AD = BD$.

Pozn. 1. Body A a B nesmí ležeti v krajních bodech průměru, sice byly by obě tečny spolu rovnoběžny.

Pozn. 2. Z věty této plyne zároveň, že z každého mimo kruh ležícího bodu dvě sobě rovné tečny na kruh vedeny býti mohou.

10. *Přímkou, která spojuje střed kruhu s průsečníkem dvou tečen, rozpůluje se nejen úhel tečnami sevřený, nýbrž i tětiva, oba tečné body spojující.*

Důkaz. První plyne ze shodnosti trojúhelníků CAD a BAD (v obr. 78.), druhé ze shodnosti trojúhelníků EAD a EBD.

Následky: a) Přímka, jížto se úhel dvěma tečnami sevřený rozpůluje, prochází středem kruhu.

b) Středy všech kruhů, které se dvou přímek dotýkati mají, leží na přímce, jížto se úhel, danými přímkami sevřený, rozpůluje.

c) Konce všech stejně dlouhých a k témuž kruhu vedených tečen mají od jeho středu stejnou vzdálenosť. Důkaz podej čtenář.

A. Kruh ve spojení s úhly.

§ 26.

1. Kruh souvisí vlastnosťmi svými úzce s úhly, při nichžto k tomu přihlíženo býti musí, kde se jejich vrchol nachází. Může totiž ležeti vrchol úhlu buď ve středu a nebo v obvodu kruhu, také ale uvnitř kruhu a nebo dokonce i mimo kruh.

Úhel, jehož vrchol ve středu kruhu leží, slove **úhlem středovým** (Centriew.); úhel pak, jehož vrchol v obvodu kruhu leží, slove **obvodovým úhlem** (Peripheriew.).

Úhel středový jest sevřen dvěma poloměry, úhel pak obvodový může býti sevřen buď dvěma tětivami anebo jen jednou tětivou a jednou tečnou. — Úhel, jehož vrchol mimo kruh leží, může býti sevřen buď dvěma sečnami, buď dvěma tečnami, anebo také jednou sečnou a jednou tečnou.

Ku každému středovému i obvodovému úhlu náleží oblouk kruhu, který právě rameny dotyčného úhlu omezen jest, a díme, že takovýto úhel stojí na oblouku, který rameny jeho omezen jest. — Obvodový úhel, který stojí na polokruhu, tak že se ramena jeho opírají o krajní body průměru, slove **úhel v půlkruhu** (W. im Halbkreise).

2. *V každém kruhu náležejí k stejným úhlům středovým stejné oblouky i stejné tětivy.*

Důkaz. Je-li v obr. 78. $\sphericalangle mCn = \sphericalangle rCs$, narejsuj tětivy mn a rs; i budou trojúhelníky mCn a rCs spolu shodny, a tudy $mn = rs$. Položí-li se nyní celý výsek rCs na výsek mCn tak, aby se oba shodné trojúhelníky pokryly, musí i oba oblouky na sebe padnouti a vespolek se pokrýti, poněvadž za příčinou rovnosti všech poloměrů v témž kruhu žádný bod oblouku rs ani do vnitř kruhu ani mimo kruh padnouti nemůže; pročež jest také arc. mn = arc. rs.

3. *V témž kruhu náležejí k stejným obloukům stejné středové úhly i stejné tětivy.*

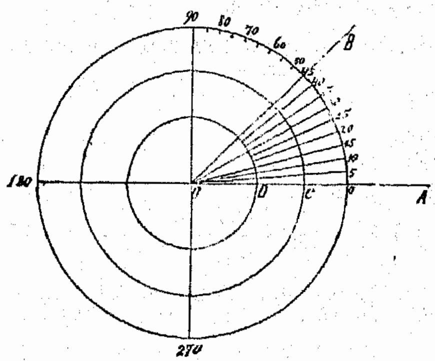
Důkaz. Je-li arc.mn = arc.rs (obr. 78.), polož výsek rCs na výsek mCn tak, aby poloměr Cr padl na Cm, čímž se oba body r a m pokryjou. Veškeré body oblouku mn musí při tom padnouti za příčinou rovnosti všech poloměrů na oblouk, a poněvadž mimo to oba oblouky sobě rovny jsou, padnou i jich krajní body s a n na sebe, t. j. oba oblouky pokryjí se úplně. A nyní pokrývají se již i poloměry sC a nC; pročež jest i $\sphericalangle rCs = \sphericalangle mCn$, a následkem předešlé věty i tětiva $rs = mn$.

4. *Ku stejným tětivám náležejí v témž kruhu stejné oblouky i stejné úhly středové.*

Důkaz. Je-li v obr. 78. $rs = mn$, budou trojúhelníky sCr a mCn shodny a v nich $\sphericalangle mCn = \sphericalangle sCr$, a odtud i arc.$mn$ = arc.rs.

Dodatek. Již dříve bylo řečeno (§ 5. 10), že se pravý úhel rozděluje na stupně, minuty atd.; skutečné dělení pravého úhlu na takovéto malé dílky bylo by však obtížné, pročež se to stane pohodlněji na základě nauk právě vysvětlených.

Mysleme sobě totiž, jakoby bylo kolem nějakého bodu všech 360° narejsováno a úhly tyto že by byly úhly středovými. Kruh ze společného vrcholu všech těchto úhlů libovolným poloměrem narejsovaný bude dle vět právě vysvětlených prodlouženými rameny úhlů rovněž na 360 stejných obloučků rozdělen.



Obr. 79.

K jednomu každému stupni úhlovému bude tedy náležeti 360tý díl obvodu kruhového, tak že jich přijde na přímý úhel 180 (půlkruh) a na pravý úhel 90 (čtverník). — Vůbec bude se moci říci, že nějaký úhel na př. $\sphericalangle BOA$ (obr. 79.) právě tolik stupňů míti bude, kolik třistašedesátin celého kruhu rameny jeho sevřeno jest, zde na př. $\sphericalangle BOA = 45°$.

Kruhové tyto dílky, jichž se k změření nějakého bodu pohodlně upotřebuje, nazývají se též, ač nepravě, stupně a mohou býti tímtéž způsobem dále na minuty atd. rozdělovány, jako stupně úhlové. — K skutečnému změření úhlů bývají půlkruhy již rozdělené na 180 dílků (tak zvané *úhloměry*, transportér), při čemž se na velikost poloměru žádného ohledu nebéře, an se úhel neměří skutečnou délkou oblouku, nýbrž toliko počtem obloukových stupňů, a těch má každý kruh 360. Vůbec se nehledí nikdy k velikosti oblouků, nýbrž vždycky jen k tomu, kolik třistašedesátin celého kruhu rameny daného úhlu sevřeno jest.

Odtud to přijde, že se mluví: *Středový úhel má za míru oblouk, který mezi rameny jeho obsažen jest.**)

5. Nyní budou patrny i následující věty, jichžto důkaz čtenáři se zůstavuje: a) *Je-li úhel středový roven 60°, rovná se jeho tětiva poloměru, a naopak* (dle § 13. 2, γ).

*) Upotřebení kruhu k měření úhlů zavedl do měřictví první geometr, kterého nám dějepis uvádí, t. Thales okolo r. 600 před Kristem.

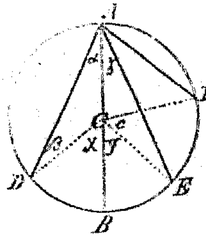
b) *Přímka, jížto se rozpůluje úhel středový, půlí i příslušný oblouk a naopak* (§ 26. 2).

c) *Přímka, jížto se tětiva kolmo rozpůluje, půlí i příslušný oblouk a úhel středový* (§ 13, 3, výsl. atd.).

§ 27.

1. *Obvodový úhel rovná se polovičce úhlu středového, který na témž oblouku postaven jest.*

Důkaz. Vezměme sobě nejprvé takový úhel obvodový, jehož jedno rameno středem kruhu prochází, na př. $\sphericalangle$ BAD v obr. 80. Spojí-li se střed C s bodem D, vznikne rovnoramený trojúhelník ACD, v němžto jest $\sphericalangle \alpha = \beta$. Avšak $\sphericalangle x = \alpha + \beta = 2\alpha$, pročež $\sphericalangle \alpha = \frac{x}{2}$. Leží-li za druhé každé rameno obvodového úhlu v jiném polokruhu, jako na př. $\sphericalangle$ DAE, narejsuj ku pomoci průměr AB a poloměry CD a CE, načež bude $\sphericalangle \alpha = \frac{x}{2}$, $\sphericalangle \gamma = \frac{y}{2}$. Sečtením těchto dvou rovností obdržíme



Obr. 80.

$\sphericalangle \alpha + \gamma = \frac{x + y}{2}$, t. j. $\sphericalangle DAE = \frac{1}{2} DCE$. Leží-li za třetí obě ramena obvodového úhlu v témž polokruhu, jako na př. $\sphericalangle$ EAF, jest zase $\sphericalangle EAF = \sphericalangle FAB - \sphericalangle EAB$, a nebo když za tyto úhly dáme jim rovné polovičky středových úhlů,

$$\sphericalangle EAF = \sphericalangle \frac{FCB}{2} - \frac{\sphericalangle ECB}{2} = \frac{\sphericalangle FCB - \sphericalangle ECB}{2} = \frac{\sphericalangle ECF}{2}.$$

Pozn. Odtud to přijde, že se mluví: *Úhel obvodový má za míru polovičku oblouku, který mezi rameny jeho obsažen jest.*

Výsledky. Z věty této následuje: a) *Všechny obvodové úhly, jež v témž kruhu stojí na společném oblouku, jsou sobě rovny.* *)

b) *V každém kruhu náležejí k stejným obloukům i stejné obvodové úhly a naopak.*

c) *Obvodový úhel v polokruhu rovná se úhlu pravému.*

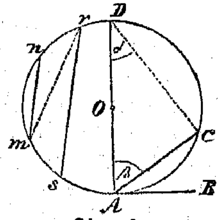
Důkaz k těmto větám zůstavuje se čtenáři.

2. *Obvodový úhel, který jest sevřen tečnou a tětivou, má za míru polovičku oblouku k tětivě přináležejícího.*

---

*) Prakticky upotřebuje se věta tato při stavbě divadel. Lože a galerie mají totiž podobu kruhového oblouku AαBβC (obr. 82), jeviště pak směr tětivy AC. Tím stane se, že veškeří diváci z loží a galerií vidí celé jeviště pod stejným úhlem, poněvadž jest dle naší věty $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle ABC = \beta$. Obyčejně obsahuje oblouk AαBβC $^3/_4$ celého obvodu kruhového.

Důkaz. Je-li v obr. 81. AB tečnou a AD průměrem, bude AB $\perp$ AD, pročež $\sphericalangle$DAB$=$R; a však i $\sphericalangle$DCA$=$R (co úhel v polokruhu), tak že jest $\triangle$ACD pravoúhelný, a v něm $\sphericalangle \alpha + \beta = R$. Že ale jest také $\sphericalangle \beta + \sphericalangle CAB = R$, bude $\sphericalangle \alpha + \beta = \sphericalangle \beta + \sphericalangle CAB$, z čehož plyne $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle CAB$. Úhel konečně α má za míru $\frac{\text{arc} . AC}{2}$, má tedy i $\sphericalangle$BAC tento poloviční oblouk za míru, t. j. úhel tečnou a tětivou sevřený rovná se polovičce úhlu středového, který jest postaven nad obloukem tětivou napnutým.



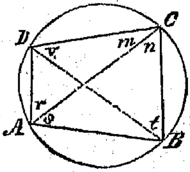
Obr. 81.

3. *V každém kruhu jsou oblouky mezi rovnoběžnými tětivami sobě rovny.*

Důkaz. Je-li $mn \parallel rs$ (obr. 81), narejsuj pomocnou přímku mr; i bude potom $\sphericalangle m = r$, následovně i oblouky k nim přináležející arc. nr = arc. ms.

4. *V každém čtyrúhelníku, jehož rohy leží v obvodu kruhu (čtyrúhelník z tětiv) rovná se součet protilehlých úhlů dvěma pravým.*

Důkaz. Narejsují-li se v daném čtyrúhelníku obě úhlopříčny, bude (obr. 82) $\sphericalangle r = t$, a $\sphericalangle s = v$ (§ 27. 1, a). V trojúhelníku BCD jest ale $\sphericalangle v + m + n + t = 2R$, nebo když za v a t dosadíme rovné jim úhly, $\sphericalangle s + m + n + r = 2R$, t. j. $\sphericalangle E + A = 2R$. — A poněvadž tu součet všech úhlů 4R dává, zbyde i na druhé dva protější úhly D + B = 2R.



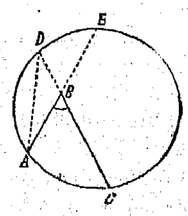
Obr. 82.

Obrácené má platnosť i následující věta: *Rovná-li se ve čtyrúhelníku součet protilehlých úhlů dvěma pravým, leží rohy jeho v obvodu kruhu.*

Pozn. Z rovnoběžníků může býti do kruhu vepsán toliko pravoúhelník a čtverec.

5. *Úhel, jehož vrchol leží uvnitř kruhu, rovná se polovičnímu součtu dvou středových úhlů, které stojí na obloucích obsažených mezi rameny úhlu daného a jich prodloužením.*

Důkaz. Prodlouží-li se ramena daného úhlu ABC (obr. 83.) přes vrchol, a spojí se bod A s D, vznikne trojúhelník ABD, v němžto jest $\sphericalangle$ABC$=$ $\sphericalangle$A$+$D. Úhly tyto ale rovnají se jakožto úhly obvodové polovičkám úhlů středových, s nimiž stojí zároveň na obloucích AC a DE. Může se proto psáti: $\sphericalangle B = \frac{\text{arc} . AC + \text{arc} . DE}{2}$, t. j. úhel, jehož vrchol leží uvnitř kruhu, má za míru poloviční součet oblouků, které obsaženy jsou mezi jeho rameny a jich prodloužením.



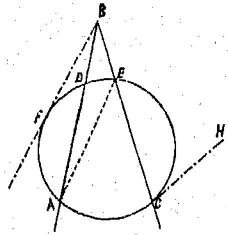
Obr. 83.

Pozn. Věta tato podrží svou platnost, i když by vrchol úhlu buď do středu a nebo i do obvodu kruhu padl. Jak se tu promění věta tato?

6. *Úhel sevřený dvěma sečnami rovná se polovičnímu rozdílu dvou středových úhlů, které stojí na obloucích sečnami odříznutých.*

Důkaz. Buďtež dány sečny BA a BC (obr. 84.); vede-li se ku pomoci AE, vznikne opět trojúhelník ABE, v němžto jest $\sphericalangle AEC = A + B$, z čehož plyne $\sphericalangle B = E - A$. Úhly však tyto rovnají se jakožto úhly obvodové polovičkám úhlů středových, které stojí na obloucích AC a DE; pročež se může také psáti:

$$\sphericalangle ABC = \frac{\text{arc} . AC - \text{arc} . DE}{2}.$$



Obr. 84.

Pozn. Věta tato podrží svou platnost, i když by se jedna a nebo i obě sečny proměnily v tečny. Důkaz?

B. O obrazcích, jež do kruhu vepsány a kruhu obepsány býti mohou.

§ 28.

1. Obrazec jest vepsán do jiného obrazce, když jeho rohy leží ve stranách tohoto druhého obrazce. Pročež se řekne: „mnohoúhelník jest vepsán do kruhu, když rohy mnohoúhelníka leží v obvodu kruhu."

Strany do kruhu vepsaného mnohoúhelníka jsou tětivami kruhu.

Obrazec slove jinému obrazci obepsán, když jeho strany procházejí rohy obrazce druhého. Pročež se řekne: „Kruh jest mnohoúhelníku obepsán, když obvod kruhu prochází rohy mnohoúhelníka."

Dle toho jest jednostejné, řekne-li se, že jest mnohoúhelník vepsán do kruhu, a nebo že jest kruh mnohoúhelníka obepsán. Mnohoúhelníkem tedy kolem kruhu obepsaným bude slouti dle toho obrazec, jehož veškeré strany se kruhu dotýkají; naopak zase bude se moci o takovémto mnohoúhelníku říci, že jest kruh do něho vepsán.

2. Z pojmu o kruhu plyne, a) že žádný obrazec do kruhu vepsán býti nemůže, nenachází-li se v něm bod, jehož vzdálenosti ode všech rohů sobě rovny jsou; b) že jen takový obrazec kruhu obepsán býti může, nachází-li se v něm bod, jehož vzdálenosti ode všech stran sobě rovny jsou; c) že každému pravidelnému mnohoúhelníku může být kruh obepsán i vepsán. Zároveň tu z § 19. 3 vysvítá, že jest střed pravidelného mnohoúhelníka středem opsaného i vepsaného kruhu. d) Že kruh lze považovati za mnohoúhelník pravidelný, jehož strany nesčíslně malé jsou (§ 24. 7, pozn. 2.).

3. Do trojúhelníka může býti kruh vždycky nejen vepsán, nýbrž i trojúhelníku obepsán (dle § 15. 7 a 8); čtyrúhelník však nemůže býti všeobecně do kruhu vepsán, protože musí mít dle § 27. 4 zvláštní úhly. Ano i vepsání kruhu do čtyrúhelníka může se státi jen pod jistou výminkou, a sice, jsou-li součty protilehlých jeho stran sobě rovny, na základě totiž věty:

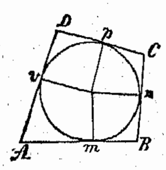
V čtyrúhelníku kruhu obepsaném jsou součty protilehlých stran sobě rovny.

Důkaz. Je-li do čtyrúhelníka ABCD (obr. 85.) vepsán kruh, budou poloměry $om = on = op = ov$ kolmo na stranách, a zároveň $Am = Av$, $Bm = Bn$, $Cn = Cp$, $Dp = Dv$ (§ 25. 9). Také jest ale

$AB = Am + mB = Av + Bn$,

$CD = Dp + pC = Dv + Cn$, což sečtením dá

$AB + CD = Av + Dv + Bn + Cn = AD + BC$.



Obr. 85.

Poznámka. Střed kruhu najde se v tomto případu rozpůlením úhlů dle § 25, 10.

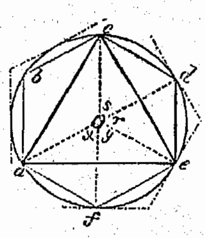
4. *Stranami do kruhu vepsaného pravidelného mnohoúhelníka rozdělí se čára kruhová v tolik stejných oblouků, kolik stran má mnohoúhelník.*

Důkaz. Dle dřívějších vět jsou středové úhly pravid. mnohoúhelníka sobě rovny, následovně budou i k nim přináležející oblouky sobě rovny.

Pozn. Strana prav. do kruhu vepsaného mnohoúhelníka jest dle toho tětivou středového úhlu $\frac{4R}{n}$, vyjádřuje-li n počet stran, kterážto vlastnosť dává nám na ruku, jak lze ten který pravý mnohoúhelník do kruhu narejsovati.

5. *Spojí-li se v pravidelném, do kruhu vepsaném mnohoúhelníku s rovným počtem stran rohy ob jeden vespolek, vznikne opět pravid. mnohoúhelník s polovičním počtem stran.*

Důkaz. Je-li *abcdef* prav. šestiúhelník (obr. 86.), jest $\sphericalangle x = y = r = \ldots 60^0$, pročež když je po dvou sečtem, $\sphericalangle aoe = \sphericalangle eoc = \ldots 120^0$. Dle § 26. 2, jsou tedy arc. ae = arc. ec = arc. ca, a následovně i k nim přináležející tětivy $ae = ec = ca$, t. j. *aec* jest prav. trojúhelník.



Obr. 86.

Dodatek. Naopak zase vznikne, když oblouky, napínající strany prav. mnohoúhelníka rozpůlíme, nový prav. mnohoúhelník s dvojnásobným počtem stran. Důkaz podej čtenář.

6. *Má-li se kruhu obepsati prav. n-úhelník, když jest mu prav. n-úhelník vepsán,* narejsují se buď v rozích vepsaného n-úhelníka a nebo i v středních bodech přináležejících oblouků tečny, a prodlouží se tak daleko, až by se vždy dvě a dvě z nich prosekly. Je-li ale naopak dán kruhu obepsaný prav. n-úhelník, vznikne

ihned prav. vepsaný n-úhelník, když spojíme buď všechny tečné body spolu a nebo také ony body obvodu kruhového, v nichžto byl kruh proseknut přímkami, spojující jeho střed s rohy opsaného mnohoúhelníka.

Důkaz v obou případech ponechává se důmyslu čtenáře.

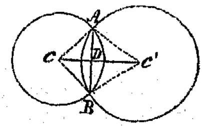
C. Vespolné položení dvou kruhů.

§ 29.

1. Dva kruhy mohou míti středy buď rozličné a nebo jeden společný (§ 24. 3). Přímka střední body dvou výstředných kruhů spojující slove **obojstředna** (Centrallinie). — Kruhy výstředné mají společně buď dva body, buď jen jeden, a nebo docela žádný. V prvním případu protínají se kruhy, v druhém případu se vespolek dotýkají, a v třetím případu leží jeden kruh mimo druhý, o čemž platí následující věty.

2. *Mají-li dva kruhy jeden bod společně na jedné straně obojstředny, mají i na druhé její straně jeden bod společný.*

Důkaz. Jsou-li C a C' středy daných kruhů (obr. 87.), CC' tudy jejich obojstředna, a protínají-li se oba kruhy v bodu A; spusť s A na obojstřednu kolmici a prodluž ji tak, aby bylo DA = DB. Tím vzniknou, když ještě bod B spojíme s C a C', rovnoramené trojúhelníky ACB a AC'B, v nichžto tedy jest CA = CB, AC' = C'B, t. j. body A a B mají stejnou vzdálenosť jak od středu C tak i od středu C' a leží tudy v obou kruzích zároveň.



Obr. 87.

Dodatek. Tětiva, jížto se průsečníky dvou kruhů spolu spojují, jest tětivou jednomu i druhému kruhu a slove **tětivou pospolnou**. Plocha oběma kruhům společná slove **čočka** (Linse), a ostatní částky, jež po odejmutí čočky z každého kruhu zůstaly, slovou **měsíčky** (Monde).

Z věty předešlé plyne: a) Protínají-li se dva kruhy, jest jejich obojstředna menší nežli součet obou poloměrů, větší ale nežli rozdíl obou poloměrů (t. j. $CC' < AC + C'A$ (§ 11. 1).

b) Pospolná tětiva stojí na obojstředně kolmo a jest jí půlena.

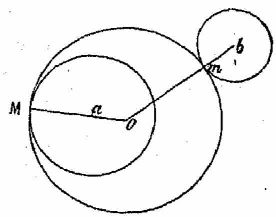
c) Dva kruhy nemohou míti spolu více nežli dvé bodů společně.

3. *Dotýkající se kruhy mají spolu toliko jeden bod společně a ten leží na obojstředně nebo na jejím prodloužení.*

Důkaz. Tečný bod musí ležeti na obojstředně, nebo kdyby ležel mimo ni, musel by býti na některé její straně; tu však by se oba kruhy dle předešlé věty protínaly, a měly by ještě jeden takový bod společně, což předpokladu odporuje.

Z toho následuje: a) U tečných kruhů leží oba středy i tečný bod v přímce jediné, t. j. obojstředna dvou dotýkajících se kruhů prochází tečným bodem.

b) Obojstředna dvou dotýkajících se kruhů rovná se buď součtu nebo rozdílu obou poloměrů, dle toho, dotýkají-li se kruhy vespolek zevnitř nebo uvnitř. V obr. 88. jest na př. $ob = om + mb = r + r'$ (dotýkání zevnitřní), $oa = oM - aM = r - r'$ (dotýkání vnitřní).



Obr. 88.

c) Dva dotýkající se kruhy mají v tečném bodu společnou tečnu.

4. Věty v odstavci předešlém vysvětlené platí i obráceně, totiž:

a) rovná-li se obojstředna dvou kruhů součtu jich poloměrů, dotýkají se kruhy zevnitř; b) rovná-li se obojstředna dvou kruhů rozdílu jich poloměrů, dotýkají se uvnitř; c) je-li obojstředna větší nežli rozdíl obou poloměrů, při tom ale menší nežli jich součet, protínají se kruhy; d) je-li obojstředna větší nežli součet obou poloměrů, leží kruhy mimo sebe; e) je-li obojstředna menší rozdílu obou poloměrů, leží jeden kruh ve druhém.

II. Konstruktivní úlohy o kruhu.

§ 30.

1. Určí se střed daného kruhu (dle § 25. 3 a 4).
2. Určí se kruh, který prochází třemi danými body.
3. Kruhový oblouk doplní se na celý kruh.
4. *Kruhový oblouk má se rozpůliti.* — Rozpůlí se jeho tětiva a kolmice na tětivu v jejím středu postavená rozpůlí i oblouk. Důkaz.
5. *Kruhová čára má se rozděliti na 2, 4, 8, 16... stejných dílů.* — Průměrem rozpůlí se kruh; rozpůlením polokruhů rozpadne se kruh na 4, a dalším půlením na 8, 16... stejných dílů.
6. *K danému bodu kruhovému mají se narejsovati normálné čáry.* — V každém bodu, kde normálná čára státi má, odříznou se na oblouku v pravo i v levo stejné kusy a z obou takto vzniklých průsečníků sestrojí se libovolným poloměrem oblouky podobně jako v § 21, 1. Přímka průsečník těchto oblouků s daným bodem spojující jest pak na oblouku kolmo.
7. *Má se narejsovati v určitém bodu obvodu kruhového tečna* (§ 24. 5).
8. *Bodem mimo kruh ležícím má se vésti k tomuto tečna.*

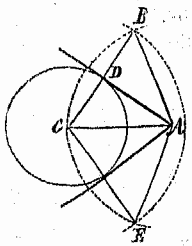
Z § 25. 9, pozn. 3. jest známo, že takovéto tečny dvě býti mohou. Zde se bude jednati toliko o sestrojení pravoúhelného trojúhelníka, v němžto jsou dány dvě strany (přepona, spojující střed kruhový s daným bodem, a poloměr) a pravý úhel. Sestrojení toto může se státi spůsobem rozličným, a sice:

1. spůsob. Rozbor. Budiž AD (obr. 89.) žádaná tečna, tak že jest AD $\perp$ CD; jestliže se nyní *CD* prodlouží a udělá CD $=$ DB, bude $\triangle$ ACD $\cong \triangle$ ADB, tudy AB $=$ AC. Následovně jest $\triangle$ACB rovnoramený a v něm co známé veličiny všechny strany (AC $=$ AB, BC $= 2$r).

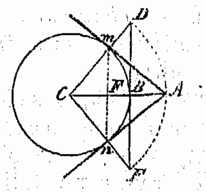
Bude tedy provedení: vzdáleností *AC* narejsuje se z daného bodu oblouk, a ten se prosekne ze středu kruhu jiným obloukem, který má za poloměr *2r*.

Průsečníky těchto dvou oblouků (B a E) spojí se s kruhovým středem, čímž ihned dva tečné body obdržíme.

Důkaz, že AD ⊥ DC, dle § 15, 3, β.



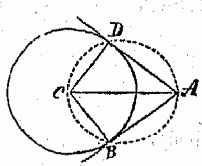
Obr. 89.



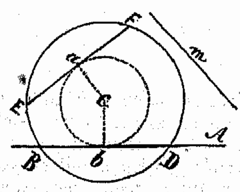
Obr. 90.

2. způsob. Trojúhelník ACD, jehož strany AC a CD i s úhlem D dány jsou (v obr. 89.), může býti narejsován také na základě jiném (§ 21. 11.), a sice: v B postaví se (obr. 90.) na AC kolmice a prosekne se z C obloukem, jehož poloměr jest AC. Spojením průsečníků D a E se středem C obdržíme tečné body m a n. Jest totiž △BCD ≅ △CmA, pročež ∢CmA = R.

3. způsob zakládá se na obvodových úhlech. Narejsuje-li se totiž nad AC (obr. 91.) jakožto průměrem kruh, jímž se daný kruh na dvou místech prosekne (v C a D); bude každý úhel D a B jakožto úhel v polokruhu pravý, následovně ∢CDA = CBA = R, a tím AD i AB žádané tečny.



Obr. 91.



Obr. 92.

9. *Daným bodem A má se vésti ke kruhu přímka, (sečna nebo tětiva), jejížto uvnitř kruhu ležící část by měla určitou délku m* (obr. 92.).

Omezení. Jelikož uvnitř kruhu ležící část žádané přímky tětivou bude, nesmí daná délka průměr kruhu přesahovati; leží-li ale mimo to daný bod uvnitř kruhu, nesmí být zase daná délka menší, nežli tětiva, která by stála na poloměru, bodem tímto procházejícím, kolmo.

Rozbor. Budiž tudy A daný bod a AB žádaná přímka, tak že bude BD = m.

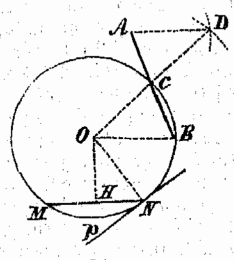
Narejsuje-li se v témž kruhu ještě jedna tětiva EF = BD = m, budou obě jejich vzdálenosti od středu sobě rovny (dle § 25. 5).

Bude tedy provedení: Danou délku m naneś v libovolném místě do kruhu co tětivu, spusť na ni se středu C kolmici (Ca) a poloměrem Ca narejsuj kruh. S daného bodu k tomuto vedená tečna jest žádanou přímkou.

Poznámka. Jak z předešlých vět o tečně vysvítá, mohou se narejsovati dvě přímky, které by danému požadavku vyhovovaly.

10. *Daným, mimo kruh ležícím bodem má se vésti k tomuto sečna tak, aby její mimo kruh ležící část tak velká byla, jako část v kruhu ležící.*

Rozbor. Budiž AB žádaná přímka (obr. 93.), tak že AC = CB; při tom jest △ OCB rovnoramený. Přijde tedy na to, aby se narejsoval △ ACD ≅ △ CBO, t. j. aby bylo CD = CO, AD = BO. Bude proto provedení: Ze středu O narejsuje se poloměrem OD = 2r oblouk a ten se prořízne obloukem narejsovaným z A poloměrem AD = r; spojí-li se střed O s D, určí se tak bod C, kterým lze žádanou přímku protáhnouti.



Obr. 93.

11. *Nad danou přímkou má se sestrojiti kruhový oblouk, na kterém by mohl státi obvodový úhel určité velikosti.*

Provedení této úlohy může se zakládati na § 27, 2. t. j. k dané přímce MN (obr. 93.) přiloží se úhel MNP, který by se rovnal úhlu danému a určí se z MN co tětivy a NP co tečny střed žádaného kruhu, jak to v obraze viděti lze. Důkaz?

Pozn. Byl-li by daný úhel pravý, narejsoval by se nad danou přímkou co průměrem kruh, a úhel daný byl by napotom úhlem v půlkruhu.

12. *K daným třem bodům a, b, c, urči se čtvrtý bod x tak, aby přímky ax, bx, cx zavíraly spolu určité úhly, na př. $\sphericalangle axb = \alpha$, $\sphericalangle axc = b$* (úloha Pothenotova).

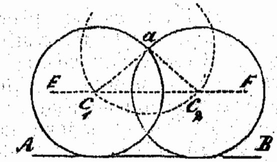
Provedení. Dle úlohy 11. tohoto oddílu narejsuje se nad ab oblouk, na kterém by mohl státi obvodový úhel $= \alpha$, a podobně narejsuje se i nad ac oblouk, na kterém by mohl státi obvodový úhel $= b$. V průsečníku takto narejsovaných kruhů jest žádaný bod x. Důkaz?

13. *Má se narejsovati kruh určitého poloměru tak, aby se dotýkal dané přímky a při tom procházel určitým bodem.*

Zde sluší rozeznávati, leží-li daný bod a buď na přímce samé anebo mimo ni.

ad a) V bodu a postaví se na AB kolmice a odřízne se na ní vzdálenost, která by se rovnala danému poloměru, tak že bude $aC = aC' = r$. V tomto případu vyhovují tudy dva kruhy žádané podmínce.

ad b) Střed žádaného kruhu musí ležeti za jedno na přímce, která ve vzdálenosti daného poloměru s AB rovnoběžna jest (na př. někde v EF obr. 94.); jelikož ale střed tento od bodu a tutéž vzdálenost míti má, musí ležeti za druhé i na obvodu kruhu, který z a daným poloměrem narejsovati lze. Následovně bude žádaný střed průsečníky těchto dvou měřických míst neomylně určen.



Obr. 94.

Rozbor. V prvním případu jest úloha tato vždycky možnou a dává dva rozličně položené kruhy. V případu druhém jest úloha jen tehdy možnou, jestliže kruh z a daným poloměrem narejsovaný přímky EF skutečně prosekne a nebo se jí aspoň dotkne. Dle toho obdržíme buď dva kruhy, buď jeden a nebo docela žádný.

14. *Má se narejsovati kruh* (poloměr není napřed určen), *který by daným bodem procházeje dotýkal se jisté přímky v určitém bodu.*

I zde sluší rozeznávati, zdali daný bod a leží buď v přímce AB a nebo mimo ni. — V prvním případu jest úloha nemožnou (proč?). V případu druhém postav v tečném bodu b na AB kolmici, a spoj bod b s a. Narejsuje-li se $\sphericalangle Cab = Cba$, bude v C střed žádaného kruhu. Důkaz.

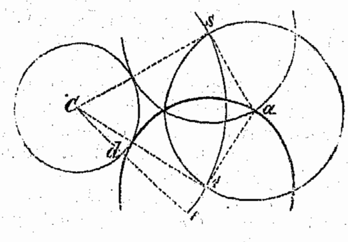
15. *Má se narejsovati kruh, který by se dotýkal dvou daných přímek a sice jedné z nich v bodu určitém.*

Provedení a důkaz dle § 15, 5 a § 24, 5.

∠ 16. *Daným poloměrem má se narejsovati kruh, který by určitým bodem procházeje dotýkal se jiného kruhu.*

Provedení. Zde se musí rozeznávati, zdali daný bod leží buď uvnitř a nebo mimo daný kruh.

ad a) Střed žádaného kruhu musí ležeti za prvé na obvodu kruhu, jejž z bodu a (obr. 95.) daným poloměrem narejsovati lze; za druhé bude však od středu C daného kruhu tak daleko, mnoho li obnáší obojstředna obou těchto kruhů. Vede-li se tudy středem C libovolná přímka Ce a udělá se rovnou buď součtu nebo rozdílu obou poloměrů (v obr. jest $ce = cd + r$), bude ce velikosť obojstředny a kruh narejsovaný z C poloměrem ce druhým měřickým místem žádaného středu. Kruhy, jež z průsečníků *1* a *2* daným poloměrem ab narejsujem, vyhovují dané úloze.



Obr. 95.

Důkaz provedené zde konstrukce, jakož i provedení druhé konstrukce zůstáveno čtenáři.

17. *Má se narejsovati kruh, který by daným bodem b procházeje jiného kruhu se dotýkal v určitém bodu a.*

Střed žádaného kruhu, jehož poloměr zde napřed určen není, bude ležeti za jedno na přímce Ca (obojstředna jde tečným bodem), a za druhé v přímce, jížto se vzdálenosť tečného bodu a a daného bodu b rozpůluje. Průsečník těchto dvou měř. míst určí střed o i poloměr $oa = ob$ žádaného kruhu. — Může bod b ležeti i v přímce ca?

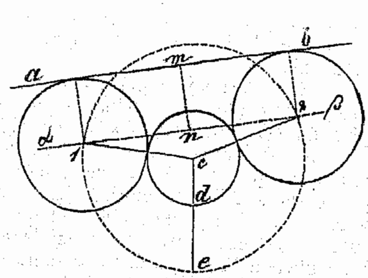
18. *Dány jsou tři přímky; má se narejsovati kruh, který by se všech těchto přímek stejnodobě dotýkal.*

Dle § 15. 8 budou takovéto kruhy 4. Provedení dle téhož odstavce.

19. *Daným poloměrem má se narejsovati kruh, který by se dotýkal stejnodobě dané přímky a jistého kruhu.*

Zde sluší rozeznávati tři rozličné případy, a) když totiž daná přímka leží zcela mimo daný kruh; b) když daná přímka kruh protíná, a c) když se přímka kruhu dotýká.

a) Budiž ab daná přímka (obr. 96.) a fdg daný kruh, jehož střed se nachází v C. Střed žádaného kruhu bude ležeti za jedno na přímce $\alpha\beta$, která ve vzdálenosti daného poloměru ($mn = r$) s přímkou ab rovnoběžná jest; za druhé musí být žádaný střed od c tak daleko, mnoholi obnáší obojstředna obou kruhů ($cd + r = ce$). Narejsuje se tudy z c poloměrem ce kruh, a ten určí v průsečnících s $\alpha\beta$ středy žádaného kruhu (v bodech *1* a *2*).



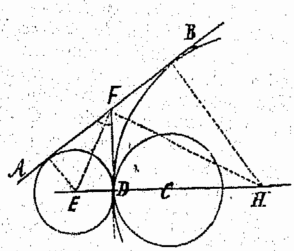
Obr. 96.

Rozbor. Zde dala konstrukce 2 kruhy; avšak měř. místo $\alpha\beta$ mohlo být také na druhé straně přímky ab naneseno, a taktéž se mohl vzíti za obojstřednou místo součtu poloměrů jich rozdíl, t. j. $cd - r$, kteréžto provedení se pilnosti čtenářově odporučuje.

Provedení v druhých dvou případech zůstává předešlému provedení podobno.

20. *Má se narejsovati kruh, který by se dotýkal určité přímky a mimo to ještě i nějakého kruhu v daném bodu.*

Provedení. Budiž AB daná přímka (obr. 97.), C daný kruh a D bod, v němžto se žádaný kruh daného dotýkati má. Střed žádaného kruhu musí ležeti dle § 29. 3 na přímce CD, a kolmice v D na CD vztýčená bude tečnou oběma kruhům. Nyní převedena jest úloha na úlohu: narejsovati kruh, který by se



Obr. 97.

dotýkal obou přímek AF a FD. Bude následovně ležeti střed žádaného kruhu za druhé na přímce, jížto se úhel těchto dvou přímek rozpůluje, t. j. v bodu E nebo v H. Patrno tedy, že dané úloze dva rozličné kruhy vyhovují, které mají za poloměry ED nebo HB.

Jaké bylo by provedení, když by daná přímka kruh *C* protínala a nebo se ho dotýkala?

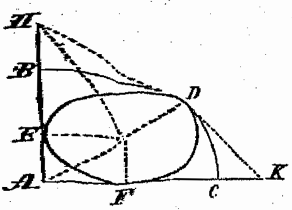
21. *Daným poloměrem má se narejsovati kruh, který by se dotýkal stejnodobě dvou jiných kruhů.*

Provedení. Ze středů daných kruhů narejsují se co měř. místa žádaných středů kruhy, jichžto poloměry by se obojstředné rovnaly. V průsečnících těchto měř. míst budou středy žádaných kruhů.

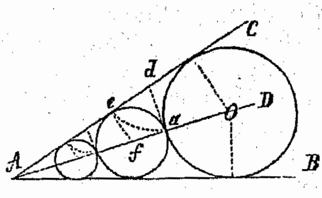
Pozn. Čtenář proveď úlohu tuto pro případ, 1) že jsou dané kruhy vedle sebe, 2) když se protínají, 3) když se uvnitř nebo zevnitř dotýkají, 4) když jsou soustředné. Jaké omezení objeví se v kterém případu?

22. *Do čtverníku má se narejsovati kruh, který by se dotýkal stejnodobě nejen oblouku nýbrž i obou jeho poloměrů.*

Provedení. Budiž ABC daný čtverník a DEF žádaný kruh (obr. 98.). Dle § 29. 3 musí ležeti tečný bod D a oba středy v přímce jediné, kterou vzhledem na kruh DEF obdržíme, když ∢A rozpůlíme; a jelikož tečna v tečném bodu na poloměru (OD) kolmo stojí, bude se museti žádaný kruh dotýkati stejnodobě všech stran trojúhelníka AHK, čímž úloha převedena na onu v § 30. 18. Důkaz?



Obr. 98.



Obr. 99.

23. *Mezi rameny daného úhlu mají se narejsovati kruhy, které by se dotýkaly nejen vespolek nýbrž i obou ramen daného úhlu.*

Provedení. Měř. místo veškerých středů bude přímka AD; spustí-li se tedy na libovolném místě OC⊥AC (obr. 99.) a narejsuje se kruh *aCD*, potřebujem ještě v *a* vztýčiti kolmici na AD (dle § 29. 3, c), kterážto kolmice bude již také tečnou novému kruhu, a tu víme, že musí být *da* = *de*. Postav tedy v novém tečném bodu *e* ef⊥AC a obdržíš v *f* střed tohoto druhého kruhu atd.

Pozn. Podobné úlohy přijdou ještě v § 38, 4. Pozorný čtenář si všimne, že v těchto úlohách o tečných kruzích vždycky dány jsou z bodů, přímek nebo kruhů tři částky, kdežto se pak má určiti kruh, který by se daných částek stejnodobě dotýkal. Úloha tato, všeobecně pojata, obsahuje, jak se čtenář snadno přesvědčí, 10 rozličných případů a jest v měřictví známa pod názvem „úlohy apollonické“ (podle řeckého matematika Apolloniusa, který žil okolo r. 247 před Kr., a úlohy tyto dal a pomocí kužclosečék provedl).

Kniha čtvrtá.

Podobnost obrazcův.

I. O srovnalosti přímek.

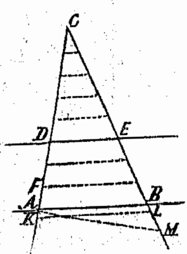
§ 31.

1. Porovnávajíce dvě přímky pospolu ohledně jich délky, vyjádřujeme délku jejich čísly (§ 3.); poměr dvou přímek dá se tímto spůsobem číselně vyjádřiti a to buď úplně nebo přibliženě, dle toho, jsou-li přímky spolu směřitelné nebo nesměřitelné. Postavíme-li dvě omezené přímky a a b v poměr, aniž by délka jejich dříve číselně udána byla, slove $a:b$ **měřický poměr** těchto přímek.

Rovné měřické poměry dávají podobně jako rovné poměry číselné **srovnalosť měřickou**, a vznikají, když rovnoběžné přímky protínají přímky sbíhavé, jak v následujících větách vysvětleno bude.

2. *Dvěma rovnoběžkami rozdělí se dvé sbíhavých přímek v srovnalostné dílky.*

Důkaz. Buďtež dané rovnoběžky AB a DE (obr. 100.), HC pak a CM přímky rozbíhavé; má býti CD : DA = CE : EB.



Obr. 100.

Zde se musí rozeznávati, jsou-li CD a DA spolu směřitelné nebo nesměřitelné. V případu prvním určí se společná míra dílků CD a DA (na př. AF), která bude obsažena v CD $m$krát, a v DA $n$krát. Rozdělí-li se tedy přímka CD na m a DA na n sobě rovných dílů (celá přímka CA následovně na $m+n$ dílů) a vedou se dělícími body s AB rovnoběžky, bude i přímka CE rozdělena v m, a EB v n (celá přímka CB tudy v $m+n$) sobě rovných dílků (§ 18. 4), tak že bude nejen CD : DA = m : n, nýbrž i CE : EB = m : n; pročež bude CD : DA = CE : EB.

V druhém případu, když by totiž přímky CD a DA žádné společné míry neměly, musí míti předce měřická srovnalosť CD : DA = CE : EB místa, což se dokáže nepřímo. Kdyby se totiž poměr CD : DA nerovnal poměru CE : EB, rovnal by se poměru jinému, na př. poměru CE : EM, při čemž má EM rozdílnou od EB velikosť, tak že by bylo CD : DA = CE : EM. Nechť ale jest BM sebe menší, vždycky se bude moci CE v tak malé dílky rozděliti, které by byly ještě menší nežli BM. Budiž tomu tak, a dílky tyto buďtež i za E dále nanášeny; tu padne jeden dělící bod zajisté mezi B a M, na př. do L, tak že budou CE a EL spolu směřitelnými; vede-li se nyní bodem L rovnoběžka k AB, budou i CD a DK spolu směřitelnými a podle prvního případu $CE:EL = CD:DK$. Když pak porovnáme s touto srovnalostí hořejší $CE:EM = CD:DA$, shledáme, že by muselo být $EL:EM = DK:DA$, což ale nemožné jest, poněvadž jest $EL < EM$ a $DK > DA$.

Dodatek 1. Věta tato vyslovuje se vzhledem na $\triangle ABC$, v němžto byla DE rejsována rovnoběžně se stranou AB, také následovně: „*Vede-li se v nějakém trojúhelníku k některé straně rovnoběžka, budou druhé dvě strany v srovnalostné díly rozříznuty.*“

Dodatek 2. Měřická srovnalosť podléhá stejným proměnám jako srovnalosť číselná; pročež můžeme ze srovnalosti poslední $CD:DA = CE:EB$ učiniti ještě následující:

a) $CD + DA:CD = CE + EB:CE$, nebo $CA:DC = CB:CE$

b) $CD + DA:DA = CE + EB:EB$, „ $CA:DA = CB:EB$,

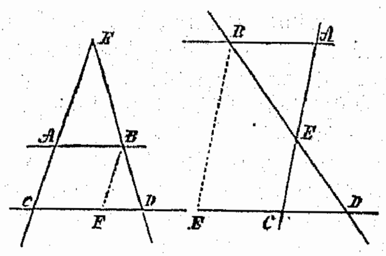
z čehož vidíme, že poměr jakých koliv dvou dílů na jedné straně rovná se poměru stejnolehlých dílů na druhé straně.

Dodatek 3. Věta právě dokázaná podrží svou platnosť i obráceně: *Když by se na dvou sbíhavých přímkách jinými dvěma přímkami odřízly srovnalostné délky, jsou poslední dvě přímky rovnoběžné.*

Důkaz jest nepřímý. Kdyžby totiž bylo $CD:DA = CE:EB$, a při tom by nemělo být $DE \parallel AB$, musela by být jiná přímka s DE rovnoběžna na př. $AM \parallel DE$. Tu však obdrželi bychom dle prvého dílu naší věty srovnalosť $CD:DA = EC:EM$, tak že by muselo být $EB = EM$, což ale jest nemožné.

3. *Rovnoběžky, ježto dvěma rozbíhavými přímkami omezeny jsou, mají se k sobě, jako od společného průsečníku počítané částky každé z rozbíhavých přímek.*

Důkaz. Dané rovnoběžky buďtež AB a CD (obr. 101.) a omezující je paprsky CE a ED; má se dokázati, že $AB:CD = EA:EC = EB:ED$. K tomu cíli veďme z B ku straně EC rovnoběžku, tak aby bylo dle předešlé věty $EB:ED = CF:CD$. Jelikož ale $ABCF$ jest rovnoběžníkem, může se za CF dosaditi AB, tak že bude $EB:ED = AB:CD$, a tudy i $AB:CD = EA:EC$.



Obr. 101.

Pozn. Věta v § 18. 5 uvedená jest tudy pouze zvláštním případem této věty.

4. *Mají-li se dvě rovnoběžky k sobě jako vzdálenosti krajních bodů na jedné straně od jiného, s těmito krajními body v jediné přímce ležícího bodu, musí i na druhé straně krajní body s tímto bodem v jediné přímce ležeti.*

Důkaz. Leží-li body C, A, E v přímce, a při tom jest $AB:CD = AE:CE$, musí i body D, B, E ležeti v přímce jediné. Kdyby tomu tak nebylo, musela by bodem E a některým z obou krajů, na př. bodem B položená přímka proříznouti rovnoběžku CD jinde nežli v D, na př. někde v D'.

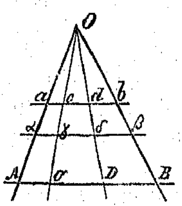
Pak by ale bylo dle věty (2) $EA:EC = AB:CD'$, což našemu předpokladu $EA:EC = AB:CD$ odporuje.

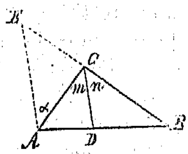
5. Kdykoliv protíná několik rovnoběžek více paprsků, platí věty: a) *stejnolehlé úseky paprsků jsou mezi sebou srovnalostné; b) stejnolehlé úseky rovnoběžek jsou též mezi sebou srovnalostné; c) úseky na rovnoběžkách stojí v témž poměru jako úseky paprsků.*

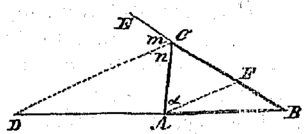
Důkaz. Buďtež $ab \parallel \alpha\beta \parallel AB$ (obr. 102); tu jest dle předešlých vět a) $Oa:O\alpha:AO = Oc:O\gamma = OC = Od:O\delta:OD =$ atd.

b) $ac:\alpha\gamma:AC = cd:\gamma\delta:CD = db:\delta\beta:DB =$ atd. c) dle odstavce 3.

6. *Přímka, jížto se v trojúhelníku některý úhel rozpůluje, dělí protilehlou stranu ve dvě částky, které jsou s přilehlýma stranama srovnalostné, a naopak* (obr. 103).


Obr. 102.


Obr. 103.


Obr. 104.

Důkaz. Přímka CD půliž úhel C; prodlouží-li se BC a narejsuje $AE \parallel CD$, bude $AD:DB = EC:CB$ (§ 31. 2, dod. 1). Že ale jest $\sphericalangle \alpha = m$ a $\sphericalangle E = n$ a při tom $\sphericalangle m = n$, musí býti i $\sphericalangle \alpha = E$, a tudy $AC = EC$. Dosadíce proto AC za EC, obdržíme $AD:DB = AC:CB$.

Je-li naopak $AD:DB = AC:CB$, a spojí se bod D s vrcholem protilehlého úhlu C, musí být $\sphericalangle m = n$. Vede se totiž opět $AE \parallel CD$ tak daleko, až by prodlouženou BC prosekla; načež bude $\sphericalangle \alpha = m$, $\sphericalangle E = n$, a taktéž $AD:DB = EC:CB$. Z této a z předložené srovnalosti plyne, že poměr $AC:CB$ se rovná poměru $EC:CB$, a tudy že $EC = AC$. Následovně jest $\sphericalangle \alpha = E = m = n$.

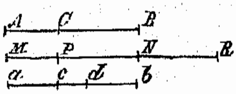
Pozn. Věta tato platí v celém svém obsahu i pro ten případ, když by se rozpůlil některý zevnitřní úhel, na př. $\sphericalangle ECA$ (obr. 104). Vede se totiž, když jest $\sphericalangle m = n$, opět $AF \parallel CD$, tak že bude $\sphericalangle n = \alpha$, $\sphericalangle m = \beta$, a $DB:DA = CB:CF$. Že ale jest $\sphericalangle m = n$, musí i $\sphericalangle \alpha = \beta$, následovně i $CF = CA$; dosadíce tudy AC za CF, obdržíme $DB:DA = BC:CA$. Pro který případ bude půlící přímka CD s AB rovnoběžná, a kdy ji prosekne na druhé straně?

Sem náleží a zde mohou býti provedeny úlohy § 39. 1, 2, 5 a 8.

7. Je-li přímka rozdělena v takové dvě částky, aby byla větší

částka střední měřickou srovnalostnou mezi menší částkou a celou přímkou, pravíme, *že jest přímka rozdělena dle spojité srovnalosti nebo dle vnitřního a zevnitřního poměru*, na př. v obr. 105, je-li $AC : CB = CB : AB$.*)

a) *Prodlouží-li se přímka dle spojité srovnalosti rozdělená o větší svůj úsek, bude celá takto vzniklá délka (MR v obr. 105) opět rozdělena dle spojité srovnalosti, a sice bude daná přímka nyní větším úsekem.*



Obr. 105.

Důkaz. Je-li $MN : PN = PN : MP$, obdržíme na základě vlastností každé srovnalosti $(MN + PN) : MN = (PN + MP) : PN$, a nebo když za PN dosadíme NR, $MR : MN = MN : NR$.

b) *Odřízne-li se na přímce dle spojité srovnalosti rozdělené z té strany, kde menší část ležela, délka rovnající se většímu úseku, bude i tato délka dle spojité srovnalosti rozdělena.*

Důkaz. Budiž v obr. 105. $ab : bc = bc : ac$. Ze srovnalosti této plyne $(ab - bc) : bc = (bc - ac) : ac$; když pak za bc dosadíme v druhém a třetím členu ad, bude $ac : ad = cd : ac$, nebo, jestliže srovnalost tuto obrátíme, $ad : ac = ac : cd$.

Pozn. Z odstavců těchto plyne, že se může udělati z každé dle spojité srovnalosti rozdělené přímky celá řada postupně rostoucích a nebo postupně zmenšujících se přímek, jež vesměs budou dle spojité srovnalosti rozděleny.

II. Podobnosť trojúhelníkův a mnohoúhelníkův.

§ 32.

1. Dle § 10. 3 slovou obrazcové podobni, mají-li jednostejný tvar bez ohledu na jich velikosť. Mají-li tudy dva obrazce spolu podobny býti, musí ve všem, co tvar jejich určuje, úplně souhlasiti. Tvar obrazce závisí ale hlavně na položení a velikosti jeho stran, tak že budou zejména dva trojúhelníky sobě podobny, když budou jejich stejnolehlé úhly sobě rovny a stejnolehlé strany spolu srovnalostny, t. j. v témž poměru.

Z tohoto pojmu o podobnosti obrazcův plyne, a) že dva obrazce, z nichžto každý podoben jest obrazci třetímu, podobnými jsou i mezi sebou; b) že kdykoliv jest jeden ze shodných obrazcův podoben obrazci třetímu, jest mu i druhý z nich podoben.

2. *Vede-li se v trojúhelníku k některé straně rovnoběžka, bude nově vzniklý trojúhelník podoben trojúhelníku danému.*

Důkaz. Je-li $AB \parallel a'b'$ (obr. 106), bude $\sphericalangle A = a'$, $\sphericalangle B = b'$

*) Rozdělení toto sluje dle starých zlatý řez, a bude provedeno v § 39, 7.

(co souhlasné) a $\sphericalangle C = C$; mimo to ale jest také dle § 31. 2 a 3 $CA : a'C = CB : b'C = AB : a'b'$, jest proto $\triangle ACB \sim \triangle Ca'b'$.

Pozn. 1. Jak z obrazu viděti lze, leží v podobných trojúhelnících dvě a dvě srovnalostné strany vždycky naproti dvěma stejným úhlům.

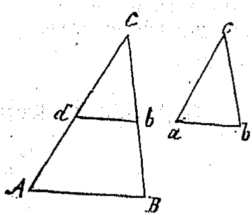
Pozn. 2. Jelikož v každé srovnalosti jak vnitřní tak i zevnitřní členy mezi sebou proměněny býti mohou, lze v podobných trojúhelnících srovnalostné strany i tak v poměr vzíti, aby se porovnaly mezi sebou nejprvé strany jednoho a potom teprvé strany trojúhelníka druhého. Z hořejší sovnalosti totiž obdržíme $CA : CB = a'C : b'C$, nebo $CA : CB : AB = a'C : b'C : a'b'$.

§ 33.

Z vět právě vysvětlených plyne, že jest k podobnosti dvou trojúhelníků potřeba šest podmínek, a sice: srovnalosť tří párů stran a rovnosť tří párů úhlů. Avšak podobnosť tuto poznati lze z jistých známek, aniž by se poměry všech stran a rovnosť všech úhlů teprvé skoumati musela, právě tak, jako se shodnosť trojúhelníkův z jistých určovacích částek poznává.

První známka podobnosti: *Dva trojúhelníky jsou si podobny, jsou-li úhly jejich střídavě sobě rovny.*

Důkaz. Buďtež ABC a *abc* dva trojúhelníky (obr. 106), v nichžto jest $\sphericalangle A = a$, $\sphericalangle B = b$, $\sphericalangle C = c$, tak že se tu k úplné známosti podobnosti obou trojúhelníků nedostává ještě toliko srovnalosť stran. Odřízne-li se $Ca' = ca$ a vede se bodem a' rovnoběžka k AB, bude $\triangle Ca'b' \sim \triangle ABC$ (§ 33. 2); a však $\triangle Ca'b' \cong \triangle abc$ (dle § 14. 2), pročež bude i $\triangle abc \sim \triangle ABC$ (§ 32. 1, b).



Obr. 106.

Výsledky. a) Dva trojúhelníky budou si podobny, když mají po dvou sobě rovných úhlech.

b) Trojúhelníky pravoúhelné budou si podobny, rovná-li se jeden ostrý úhel jednoho trojúhelníka některému úhlu ostrému druhého trojúhelníka.

c) Známka právě dokázaná pronáší se mnohdy ještě i takto: *dva trojúhelníky jsou si podobny, jsou-li strany jejich střídavě spolu buď rovnoběžné a nebo na sobě kolmo* (§ 8. 7, a § 11. 7).

2. Druhá známka: *Dva trojúhelníky jsou si podobny, mají-li dvě strany na vzájem srovnalostné a úhly jimi sevřené stejné.*

Důkaz. Je-li v trojúhelníku ABC a abc (obr. 106) $ac : AC = bc : BC$ a při tom $\sphericalangle C = c$, sřízni opět $Ca' = ac$ a veď $a'b' \parallel AB$; načež bude $Ca' : AC = b'C : BC$. Protože se ale poměr $ac : AC$ rovná poměru $Ca' : AC$, bude v těchto srovnalostech $bc : BC = b'C : BC$, a z toho $bc = b'C$. Tu pak již ale jest $\triangle abc \cong \triangle a'b'C$ (§ 14. 3), a jelikož $\triangle a'b'C \sim \triangle ABC$, musí být také i $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

3. Třetí známka: *Dva trojúhelníky jsou si podobny, mají-li všechny tři strany srovnalostné.*

Důkaz. Budiž v trojúhelnících ABC a abc $ac : AC = ab : AB = bc : BC$ (obr. 106). Odřízne-li se opět $a'C = ca$ a vede se $a'b' \parallel AB$, bude $a'C : AC = a'b' : AB = b'C : BC$. Že ale jest $a'C = ac$, rovná se poměr $a'C : AC$ poměru $ac : AC$, z čehož plyne potom i rovnosť ostatních poměrů, tak že bude konečně $a'b = ab'$, $bc = b'C$. To ale má za následek, že $\triangle abc \cong \triangle a'b'C$ (§ 14. 5). Jest tudy $\sphericalangle c = C$, $\sphericalangle a = a' = A$, $\sphericalangle b = b' = B$, následovně $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Pozn. Zde vychází opět na jevo, že leží v podobných trojúhelnících stejné úhly naproti srovnalostným stranám.

4. Čtvrtá známka: *Dva trojúhelníky jsou si podobny, když mají dvě strany na vzájem srovnalostné a jsou-li při tom úhly proti delším stranám ležící v obou trojúhelnících sobě rovny.*

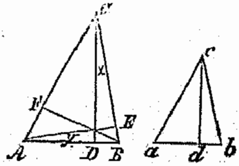
Důkaz. Budiž opět v trojúhelnících abc a ABC (obr. 106) $ac : AC = bc : BC$ při tom ale $AC > CB$, $ac > cb$ a mimo to i $\sphericalangle b = B$. Sřízne li se opět $a'C = ac$ a vede $a'b' \parallel AB$, bude $\triangle a'Cb' \sim \triangle ABC$, při čemž jest $a'C : AC = b'C : BC = a'b' : AB$; že se ale poměr $a'C : AC$ rovná poměru $ac : AC$, bude i $b'C : BC = ac : AC = bc : BC$, a z toho $bc = b'C$. Jest tudy $\triangle abc \cong a'Cb'$, a následovně $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Pozn. Když se porovnají tyto známky podobnosti se známkami shodnosti trojúhelníků (v § 14. 2—5), objeví se mezi nimi jakási příbuznosť; známky podobnosti promění se totiž ihned v známky shodnosti, jak mile bude poměr srovnalostných stran 1:1, t. j. když přejde srovnalosť stran v jich stejnosť.

§ 34.

1. *V podobných trojúhelnících mají se základny* (vůbec dvě stejnolehlé strany) *k sobě, jako k nim přináležející výšky.*

Důkaz. Budiž $\triangle abc \sim \triangle ABC$ (obr. 107); má se dokázati, když $CD \perp AB$ a $cd \perp ab$, že $ab : AB = cd : CD$. Nejprvé tu máme z podobnosti daných trojúhelníků $ab : AB = ac : AC$; z podobnosti trojúhelníků acd a ACD ale plyne $ac : AC = cd : CD$, pročež i $ab : AB = cd : CD$.



Obr. 107.

Pozn. V podobných trojúhelnících jsou výšky k stejnolehlým stranám přináležející taktéž přímkami stejnolehlými.

2. *V každém trojúhelníku mají se které koliv dvě strany k sobě jako výšky k nim přináležející v obráceném pořádku.*

Důkaz. Je-li v obr. 107. $CD \perp AB$ a $AE \perp BC$, dejme strany

AB a BC do poměru; v podobných trojúhelnících ABE a BCD (§ 33. 1, a) jest totiž $AB : AE = CB ; CD$, a nebo když se vnitřní členy srovnalosti této přestaví, $AB : CB = AE : CD$.

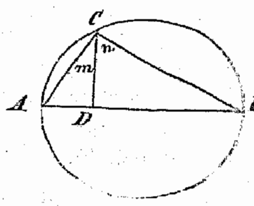
Pozn. V každém trojúhelníku náleží tudy k menší straně větší výška a naopak; v rovnostraném trojúhelníku jsou pak dle toho všechny výšky sobě rovny, což se dá i přímo dokázati (viz § 18. 9).

3. *V každém trojúhelníku jsou součiny z jedné strany a přináležející k ní výšky vespolek sobě rovny.*

Důkaz. Trojúhelníky ACD a BAF (obr. 107) jsou si podobny, a taktéž jest $\triangle BFC \sim \triangle ACE$; pročež bude $AC : CD = AB : BF$, a $BC : BF = AC : AE$. Z těchto srovnalostí pak plyne $AB \,.\, CD = AC \,.\, BF = BC \,.\, AE$.

4. *Spustí-li se v pravoúhelném trojúhelníku z vrcholu pravého úhlu kolmice na přeponu, rozpadne se a) daný trojúhelník ve dva jiné, jež mezi sebou i danému trojúhelníku podobny jsou; b) každá odvěsna bude při tom střední měřickou srovnalostnou mezi úsekem k ní přiléhajícím a celou přeponou; c) kolmice na přeponu spuštěná bude střední měř. srovnalostnou mezi oběma úseky přepony.*

Důkaz. a) Budiž v trojúhelníku ABC (obr. 108) $\sphericalangle C = R$ a při tom $CD \perp AB$. Že jest $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, plyne z následujícího: $\sphericalangle A = A$, $\sphericalangle D = \sphericalangle ACB = R$, pročež i $\sphericalangle m = B$. Taktéž jest z podobné příčiny $\triangle BCD \sim \triangle ABC$, v nichžto bude $\sphericalangle n = A$. Pročež musí také $\triangle ADC \sim \triangle BCD$ (§ 32. 1,).



Obr. 108.

b) Z podobnosti trojúhelníků ACD a ABC plyne $AD : AC = AC : AB$, a z podobnosti trojúhelníků BCD a ABC plyne $BD : BC = BC : AB$.

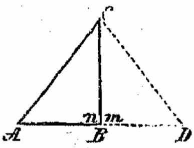
c) Z podobnosti trojúhelníků konečně ADC a BCD vychází $AD : CD = CD : DB$.

Pozn. Věta tato platí v celé své rozsáhlosti i obráceně: Je-li v trojúhelníku kolmice z některého rohu na protější stranu spuštěná střední měř. srovnalostnou mezi oběma úseky této strany; nebo je-li některá z druhých dvou stran střední měř. srovnalostnou mezi úsekem k ní přiléhajícím a celou základnou; musí být trojúhelník v dotyčném rohu pravoúhelný. Důkaz dle § 33, 2.

Dodatek 1. Z druhého odstavce věty předešlé obdržíme větu, která jest pramenem velikého množství jiných vět a v celém měřictví vůbec za jednu z nejdůležitějších platí, větu totiž pythagorskou.

Změří-li se totiž v pravoúhelném trojúhelníku jak odvěsny tak i přepona a její úseky nějakou mírou m, tak že bude na př. $AB = c \,.\, m$, $AC = b \,.\, m$, $BC = a \,.\, m$, $AD = \alpha \,.\, m$, $BD = \beta \,.\, m$; můžeme číselné hodnoty tyto dosaditi do srovnalostí odstavce druhého, a obdržíme po náležitém zkrácení $\alpha : b = b : c$, a za druhé $\beta : a = a : c$, z čehož plyne $a^2 = \beta c$, $b^2 = \alpha c$. Sečtem-li poslední tyto rovnice, obdržíme $a^2 + b^2 = c(\alpha + \beta)$, nebo $a^2 + b^2 = c^2$, t. j. *v pravoúhelném trojúhelníku rovná se druhá mocnina čísla, udávajícího velikosť podpony, součtu druhých mocnin z čísel, jimiž se vyjádřují délky odvěsen*, kterážto věta se pro krátkosť vyslovuje (z příčin později vysvětlených): „v pravoúhelném trojúhelníku rovná se čtverec podpony součtu ze čtverců obou odvěsen ($\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$).

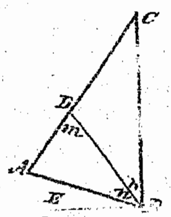
Při takovémto spůsobu psaní musíme na paměti míti, že se nikoliv přímka nýbrž číslo délku její vyjádřující zdvojmocňuje.



Obr. 109.

Dodatek 2. *Rovná-li se naopak v nějakém trojúhelníku druhá mocnina jedné strany součtu druhých mocnin ostatních stran, jest trojúhelník pravoúhelný.*

Důkaz. Je-li v obr. 109. $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, postavme $BD \perp BC$ a udělejme $BD = AB$; i bude dle předešlé věty v pravoúhelném trojúhelníku BCD: $\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + BD$, nebo když za BD dosadíme rovné mu AB, $\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$. Z této a z rovnice dané vychází, že jest $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$, a tudy i $CD = AC$. Jest proto $\triangle ABC \cong \triangle BCD$, a z toho plyne, že $\sphericalangle m = n = R$.



Obr. 110.

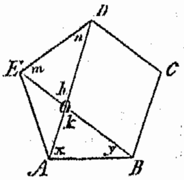
5. *Rovná-li se v trojúhelníku rovnoramenném základna většímu úseku dle vnitřního a zevnitřního poměru rozděleného ramena; jest každý úhel na základně dvakrát tak velký jako úhel při vrcholu.*

Důkaz. Je-li v obr. 110. $AD:DC = DC:AC$, a při tom $AC = BC$, $DC = AB$, musí být $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (dosazením AB za DC do dané srovnalosti obdržíme totiž $AD:AB = AB:AC$, a při tom $\sphericalangle A = A$); jest tudy i $\triangle ABD$ rovnoramený, a v něm $AB = BD$, $\sphericalangle A = m = B$, $\sphericalangle n = C$. Že ale jest $AB = DC = BD$, bude i trojúhelník BCD rovnoramený, pročež $\sphericalangle r = C$. Jest tedy $\sphericalangle n = C = r$, nebo $\sphericalangle r + n = 2C = B$, t. j. $\sphericalangle A = B = 2C$. Čtenář podej důkaz věty obrácené, a srovnej s tím větu § 19, 6.

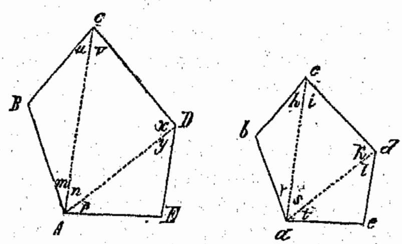
Pozn. V trojúhelníku ABC jest $\sphericalangle A + B + C = 5C = 180^0$, tudy $\sphericalangle C = \frac{180}{5} = 36^0$, a $\sphericalangle A = B = 72^0$; postaví-li se v B kolmice na BC, bude $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBE - \sphericalangle CBA = 90^0 - 72 = 180^0 = {}^1\!/_5 R$. Spůsobem tímto lze tedy pravý úhel i na 5 stejných dílů rozděliti.

6. *Narejsují-li se v prav. pětiúhelníku dvě protínající se úhlopříčny, budou a) větší úseky úhlopříčen rovny straně prav. pětiúhelníka; b) vespolným průsečníkem rozdělují se obě úhlopříčny dle vnitřního a zevnitřního poměru.*

Důkaz. V obr. 111. protínají se na př. úhlopříčny AD a BE v bodu O, a tu jest $\triangle EOD \cong \triangle AOB$, tudy $DO = OB$, a $AO = EO$. Při tom jest $\sphericalangle y = n = \frac{180^0 - \sphericalangle BAE}{2} = \frac{180^0 - 108}{2} = 36^0$, a z podobné příčiny $\sphericalangle x = m = 72^0$; pročež i $\sphericalangle k = h = 72^0$. Trojúhelníky ABO a DEO jsou tudíž rovnoramenné, a $OD = DE$, $OB = BA$. Dále jest $\triangle AED \sim \triangle AEO$ (všechny úhly), pročež $EO : EA = EA : AD$, a nebo když za EO a EA dosadíme rovné jim hodnoty AO a DO, $AO : OD = OD : AD$.



Obr. 111.



Obr. 112.

7. *Obvody podobných mnohoúhelníků mají se k sobě, jako dvě jejich stejnolehlé strany.*

Důkaz. Dle předpokladu jest v obr. 112. $AB : BC : CD : DE : EA = ab : bc : cd : de : ea$, a z toho dle nauky o srovnalostech $(AB + BC + CD + \ldots) : AB = (ab + bc + cd + \ldots) : ab$, nebo jestliže obvod poznamenáme O, $O : o = AB : ab$.

8. *Podobné mnohoúhelníky dají se stejnolehlými úhlopříčnami rozložiti v stejné množství podobných trojúhelníkův.*

Důkaz. Budiž v obr. 112. $ABCDE \sim abcde$ a mimo to nechť jsou oba mnohoúhelníky úhlopříčnami ze stejnolehlých rohů A a *a* vedenými rozvrhnuty v trojúhelníky (AD a *ad*, AC a *ac* atd. jsou pak úhlopříčny stejnolehlé). Podobnosť trojúhelníků ABC a *abc* rovněž jako trojúhelníků AED a *ade* zakládá se na § 33, 2. Jest tudy $\sphericalangle m = r$, $\sphericalangle u = h$, $\sphericalangle p = t$ a $\sphericalangle y = l$. Že ale jest dle předpokladu $\sphericalangle D = d$, bude, když od toho odečteme rovnici $\sphericalangle u = h$, přirozeně také $\sphericalangle v = i$. Z podobné příčiny jest také $\sphericalangle x = k$, a nyní jest již i podobnosť trojúhelníků ADC a *adc* patrna.

Dodatek. Z podobnosti trojúhelníků AED a *aed* plyne $AE : ae = AD : ad$, z podobnosti pak trojúhelníků ABC a *abc* $AB : ab = AC : ac$; že ale jest $AE : ae = AB : ab$ (dle předpokladu), musí také $AD : ad = AC : ac = AB : ab$, t. j. v podobných mnohoúhelnících mají se stejnolehlé úhlopříčny k sobě jako dvě stejnolehlé strany.

9. *Mnohoúhelníky tímtéž způsobem ze stejného množství podobných trojúhelníků sestavené jsou si podobny.*

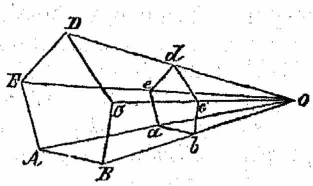
Důkaz. V obou mnohoúhelnících budou nejprvé stejnolehlé úhly sobě rovny, poněvadž to jsou buď úhly podobných trojúhelníků a nebo součty stejných úhlů. Za druhé budou míti dvě a dvě stejnolehlé strany obou mnohoúhelníků týž poměr, poněvadž to jsou stejnolehlé strany podobných trojúhelníkův.

Pozn. 1. Z vět těchto plyne, že v podobných mnohoúhelnících jen dvě stejnolehlé strany spolu porovnati potřebujeme, když se poměr ostatních stejnolehlých stran určiti má, což zvláště při rýsování podobných obrazcův důležité jest.

Pozn. 2. Z pojmu o podobnosti obrazců a z vět právě vysvětlených plyne, že všechny pravidelné obrazce téhož druhu následovně i kruhy, sobě podobny jsou, a že se obvody jejich k sobě mají buď jako dvé jejich stran, buď jako poloměry vepsaných kruhů a nebo jako poloměry opsaných kruhů.

10. *Mají-li dva podobné obrazce takové položení, že jest dvé a dvé stejnolehlých stran spolu rovnoběžno; budou míti přímky, jež stejnolehlými rohy obrazců procházejí, společný průsečník.*

Důkaz. Budiž ABCDE $\sim$ *abcde* (obr. 113) a při tom AB $\parallel$ *ab*, BC $\parallel$ *bc*, atd. Nejprvé se protáhnou dvě takovéto přímky, na př. skrze body *A* a *a*, *B* a *b*; přímky tyto musí se někde proseknouti, poněvadž není AB $=$ *ab*. Staniž se to v *O*; tu víme, že v $\triangle$ ABO bude BO : bO $=$ AB : *ab* (§ 32, 1). Že ale jest dle předpokladu AB : *ab* $=$ BC : *bc*, musí také BO : bO $=$ BC : O, z čehož vychází, že body C, *c*, *bc* na jediné přímce ležeti musí (§ 31. 4), t. j. tak jako přímky A*a* a B*b* prochází i přímka C*c* bodem O. Podobným způsobem dokáže se to i o ostatních přímkách. Jest totiž v $\triangle$ BOC CO : cO $=$ BC : *bc*; že ale dle předpokladu jest BC : *bc* $=$ CD : *cd*, musí také CO : cO $=$ CD : *cd*, z čehož opět dle § 31. 4) vychází, že i body D, d, O v přímce jediné ležeti musí. Prochází tudy bodem O i přímka D*d*.



Obr. 113.

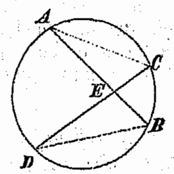
Dodatek. Společný tento průsečník O slove vzhledem k daným obrazcům jich **bod podobnosti** (Aehnlichkeitspunkt); jeho položení jest totiž k oběma obrazcům jednostejné a vzdálenosti jeho od stejnolehlých rohů obou obrazců, tedy i od jich středů, mají se k sobě, jako stejnolehlé jejich strany.

III. Srovnalostné přímky v kruhu.

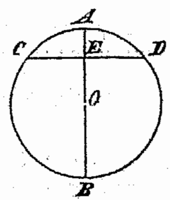
§ 35.

1. *Kdykoliv se v kruhu protínají dvě tětiv vespolek, jsou úseky jejich k sobě v převráceném poměru.*

Důkaz. Buďtež AB a CD protínající se tětivy (obr. 114.). Spojíme-li jich kraje, vzniknou podobné trojúhelníky AEC a BED, v nichžto jest AE:EC = ED:EB, nebo přemístěním vnitřních členů AE:ED = EC:EB.



Obr. 114.



Obr. 115.

D o d a t e k 1. Zvláštní případ věty této jest, když se tětivy vespolek k o l m o přetínají a prochází-li jedna mimo to zároveň středem kruhu. Jest totiž dle této věty v obr. 115. EB:EC = ED:EA; že ale jest CE = ED (§ 25, 2), přejde srovnalosť tato v spojitou DB:EC = EC:EA, kterážto srovnalosť vyjádřuje větu: *V kruhu jest přímka s jakého koliv bodu obvodu kolmo na průměr spuštěná střední měř. srovnalostnou mezi oběma úseky průměru.*

V jaké souvislosti je věta tato s větami § 34. 4. a § 27. 1. c?

D o d a t e k 2. Z věty této plyne zároveň, že kruhová čára jen tehdy čtyrmi body procházeti může, jestliže přímky, spojující dva a dva protilehlé body, v takové částky se rozpadnou, které stojí vespolek v převráceném poměru (viz § 27, 4). Důkaz k větě této, která jest obrácením věty hlavní, vede se nepřímo.

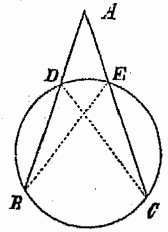
2. *Vedou-li se z nějakého mimo kruh ležícího bodu k tomuto dvě sečny, budou celé sečny ku svým zevnějším úsekům v převráceném poměru.*

Důkaz. Spojí-li se průsečník jedné s krajním bodem sečny druhé, vzniknou podobné trojúhelníky AEB a ACD (obr. 116.); bude tedy AB:AE = AC:AD, nebo přemístěním vnitřních členů AB:AC = AE:AD.

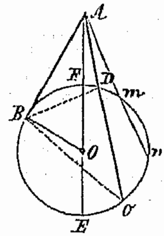
Opak této věty a nepřímý toho důkaz zůstavuje se čtenáři.

3. *Tečna z nějakého bodu ke kruhu vedená jest střední měř. srovnalostnou mezi kterou koliv z téhož bodu vybíhající sečnou a mezi zevnějším jejím úsekem.*

Důkaz. Spojí-li se v obr. 117. tečný bod B s oběma průseky C a D, bude $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ ($\sphericalangle A = A$, $\sphericalangle C = \sphericalangle ABD$), pročež $AD : AB = AB : AC$.



Obr. 116.



Obr. 117.

Pozn. 1. Považuje-li se tečna za sečnu, jejížto oba průsečníky s kruhem v bod jediný splynuly (v bod tečný), bude věta tato zvláštním případem věty předešlé (2), jelikož tu jedna z obou daných sečen rovna bude svému zevnějšímu úseku.

Pozn. 2. Všechny tři tuto uvedené věty jsou vlastně zvláštní případy věty obecnější, v nížto se také ihned promění, jakmile budeme považovati po případu tětivy, sečny a tečnu vůbec za přímky, které se nejen vespolek nýbrž i s čarou kruhovou protínají. Vždycky jsou totiž ony čtyry úseky těchto přímek, jež leží mezi jejich průsečníkem a mezi čarou kruhovou, převráceně srovnalostné, tak že částky jedné přímky činí vnitřní členy a částky druhé přímky zevnitřní členy srovnalosti. Tečna považuje se při tom za přímku, jížto oba průsečníky s kruhem nachází se v bodu jediném.

Dodatek 1. Z nauky (3) obdržíme pro ten případ, že by sečna procházela středem kruhu, větu pythagorskou. Bylo by totiž dle této věty $AF : AB = AB : AE$, a z toho $\overline{AB}^2 = AF \, . \, AE$ ... (I). Když však uvážíme, že jest $AE = AO + OE$, $AF = AO - FO$, a při tom $OE = OF = OB$, bude v rovnici (I) $\overline{AB}^2 = (AO + OB)(AO - OB) = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2$, právě tak, jak toho pravoúhelný trojúhelník dle § 34. 4, dod. 1. vyžaduje.

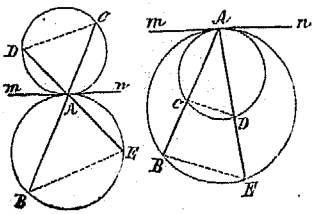
Dodatek 2. Taktéž plyne z věty (3), jak se čtenář snadno přesvědčí, věta následující: Vychází-li z nějakého bodu více sečen ke kruhu, bude vždycky $AC \, . \, AD = AE \, . \, AF = An \, . \, Am =$ atd.

Sem náleží a zde mohou býti provedeny úlohy v § 36. 3, 4, 6, 14.

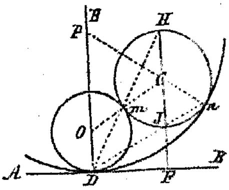
4. *Kdykoliv prochází dvé přímek tečným bodem dvou kruhů, jsou jejich mezi tečným bodem a obvody kruhovými obsažené úsečky na vzájem srovnalostné.*

Důkaz. Budiž A tečný bod, BC a DE jím procházející přímky, které jeden kruh protínají v bodech B a E (obr. 118.), druhý pak v bodech C a D. Zde bude, nechť již se kruhy vespolek dotýkají uvnitř nebo zevnitř, vždycky $AB : AE = AC : AD$, a sice: spojíme-li průsečníky téhož kruhu přímkou a narejsujeme společnou tečnu *mn*, bude $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ ($\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAE$, $\sphericalangle C = \sphericalangle DAm = \sphericalangle nAE = B$), z čehož plyne žádaná srovnalost.

D o d a t e k. Tětivy CD a BE, jimiž se krajní body řečených přímek spojují, jsou dle § 31. 2, dodat. 3. spolu rovnoběžné.



Obr. 118.



Obr. 119.

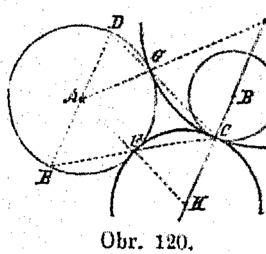
Sem náleží některá provedení úlohy apollonické (§ 30. 23, pozn.) a sice:

Ú l o h a 1. *Má se narejsovati kruh, který by se dotýkal jiného kruhu a mimo to ještě jiné přímky v určitém bodu.*

Provedení. Budiž AB daná přímka, *D* tečný její bod a *O* daný kruh (obr. 119.). Jelikož střed žádaného kruhu na kolmici DE tak ležeti musí, aby s bodem *D* a s tečným bodem kruhu *O* rohy rovnoramenného trojúhelníka tvořil, bude se jednati toliko o sestrojení podobného trojúhelníka v kruhu C, jehožto vrchol by ve středu C ležel. K tomu cíli veď HF || ED a spoj bod D s průsečníky *H* a *J*. Trojúhelníky *m*HC a *n*JC, jež rovnoramenné a žádanému trojúhelníku po případu podobny jsouce, určí prodloužením svých ramen C*m* a C*n* jiné dva rovnoramenné trojúhelníky OD*m* a DP*n*, jejichžto vrcholy *O* a *p* leží na přímce DE. Jeden žádaný kruh sestrojí se tudy ze středu *O* poloměrem OD = O*m*, a druhý ze středu *p* poloměrem *pD* = *pn*.

Důkaz. Trojúhelníky *DOm* a C*m*H jsou si podobny (všechny úhly) a jelikož C*m* = HC, bude také O*m* = OD. Podobně jest $\triangle CJn \sim \triangle pDn$; a poněvadž jest CJ = C*n*, bude i v druhém trojúhelníku *pD* = *pn*.

Ú l o h a 2. *Má se narejsovati kruh, který by se dotýkal obou jiných kruhů, a sice jednoho z nich v určitém bodu* (obr. 120.).



Obr. 120.

Provedení. Buďtež A a B středy daných kruhů a mimo to *C* daný bod tečný. Střed žádaného kruhu musí ležeti někde na přímce BC (§ 29. 3, a) a jelikož mimo to od kruhu A i od *C* stejnou vzdálenost míti musí, bude se opět jednati o sestrojení rovnoramenného trojúhelníka, jehož vrchol by na přímce BC ležel. K účelu tomu narejsuj průměr DE || BC a spoj bod *C* s krajními body D a E; průsečníky takto vzniklé, F a G, jsou již novými tečnými body, tak že obdržíme jeden žádaný střed prodloužením AG v J, a druhý prodloužením AF v H.

Důkaz. Trojúhelníky AEF a ADG jsou rovnoramenné a poněvadž trojúhelníky HFC a JGC jim podobné jsou (stejné úhly), musí býti taktéž rovnoramenné a tudy HC = HF, JG = JC.

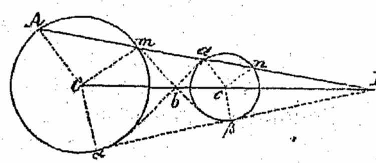
Jaké položení vespolné mohou tu dané kruhy míti, a jaké bude provedení v jednotlivých případech?

5. Jako k dvěma podobným mnohoúhelníkům náleží i k dvěma libovolným kruhům zvláštní **bod podobnosti** (§ 34. 10. dod.),

který leží na obojstředně obou kruhů; vzdálenosti jeho od obou středů mají se i zde k sobě, jako stejnolehlé přímky kruhů, t. jako jejich poloměry. Grafické jeho určení spadá s úlohou 5. § 36, v jedno.

Jak z pojmu o bodu podobnosti a z jeho grafického určení vysvítá, mohou míti dva kruhy též dva body podobnosti. Nachází-li se bod tento mezi oběma kruhy, slove **vnitřní bod podobnosti**, jinak **zevnitřní bod podobnosti.**

6. *Narejsuje-li se v jednom z dvou kruhů poloměr, který by byl rovnoběžný s daným poloměrem kruhu druhého; bude přímka krajními body těchto poloměrů procházející vždycky obojstřednu daných kruhů protínati v jednom a v témž bodu, nechť mají rovnoběžné poloměry směr jakýkoliv.*



Obr. 121.

Důkaz. Budiž CA || *ca* (obr. 121.); narejsujeme-li obojstřednu *Cc* a přímku *Aa*, bude v trojúhelníku ACB BC:B*c* = AC:*ac*, a z toho BC:BC—B*c*=AC:AC—*ac*, t. j. BC:C*c*= r:r—r′. Jelikož v této srovnalosti, jak mile kruhy dány jsou, ani obojstředna (C*c*) ani velikosť poloměrů (tudy i jich rozdíl r—r′) směrem poloměrů změněny býti nemohou, zůstává celá srovnalosť v platnosti pro jaký koliv jiný směr poloměrů, t. j. v bodu B proseknou se všechny přímky, jež krajními body rovnoběžných poloměrů vedeny byly (na př. krajnými body *m* a *n*). — Bod takto ustanovený jest, jak z odstavce (5) vysvítá, bodem podobnosti pro dané kruhy.

Dodatek 1. Rovnoběžné poloměry mohou v této úloze i takové položení míti, že na nich bude přímka krajními body vedená státi kolmo, na př. poloměry αC a βc; v tomto případu bude αB tečnou oběma kruhům, a odtud věta: *Zevnitřním bodem podobnosti vedená tečna k jednomu kruhu jest tečnou i kruhu druhému* a slove **tečnou společnou.**

Dodatek 2. Má-li přímka, zevnitřním bodem podobnosti vedená, s jedním kruhem dvé bodů společně, má i s druhým kruhem dvé bodů společně a slove společnou sečnou. Jak z obrazu viděti a snadno dokázáno býti může, jsou poloměry k průsečníkům společné sečny vedené dva a dva spolu rovnoběžné.

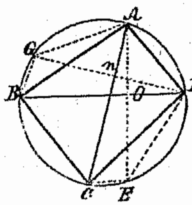
Dodatek 3. Vede-li se zevnitřním bodem podobnosti jaká koliv společná sečna, bude poměr souhlasných jejich úseků v stálém poměru obou poloměrů. V obr. 121. jest na př. AB:αB = *m*B:*n*B = r:r′.

Důkaz podej čtenář.

Celá věta (6) i s dodatky platí i pro vnitřní bod podobnosti, toliko s tím rozdílem, že rovnoběžné poloměry mají směr protivný. Vyobrazení a důkaz zůstavuje se čtenáři.

7. *V každém do kruhu vepsaném čtyrúhelníku mají se úhlopříčny k sobě, jako součty součinů stran, jež vybíhají z krajních bodů každé úhlopříčny.*

Důkaz. V obr. 122. má býti AC:BD = (AB.AD + CB.CD) : (BA.BC + DA.DC). K tomu cíli veď CE ∥ BD, a spoj bod *E* s *D* i s *A*; i bude potom △AOD ∼ △ABC (arc.DE = arc.BC, tudy ∢EAD = ∢BAC, ∢ADB = ∢BCA) a taktéž △DOE ∼ △ACD (∢AED = ∢ACD, ∢EDB = ∢CAD, protože jest arc.BE = arc.CD). Pročež z první podobnosti AB:AC = AO:AD, z druhé pak CD:CA = EO:ED, a z toho, když uvážíme, že jest ED = BC,



Obr. 122.

AC.AO = AB.AD
AC.EO = CD.CB; sečtením obou rovnic obdržíme

AC(AO+EO) = AB.AD+CD.CB, nebo
AC.AE = AB.AD+CD.CB . . . . . I.

Podobným spůsobem bude, když uděláme BG ∥ AC a bod G spojíme s *A* i s *D*, arc.AG = arc.BC = arc.ED, △DnA ∼ △BCD a △nGA ∼ △BAD; z toho pak zase plyne D*n*:DA = DC:DB, a G*n*:GA = BA:BD, nebo, když dosadíme BC za GA, D*n*.DB = DA.DC a *n*G.BD = BC.BA. Sečtením posledních dvou rovnic obdržíme konečně DG.DB = DA.DC + BC.BA . . . . II.

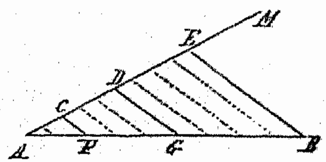
Když se nyní rovnice (I) rozdělí rovnicí (II) a uváží při tom, že jest AE = DG (napínají stejné oblouky) bude AC:BD = (AB.AD + CD.CB):(DA.DC + BC.BA).*)

IV. Měřické konstrukce, zakládající se na podobnosti obrazců.

§ 36.

1. *Danou přímku AB tak rozděliti, aby dílky její stály v určitém poměru k sobě, na př.* v poměru 2:3:4 (obr. 123).

Provedení. Na pomocnou, z některého kraje, na př. z *A* vybíhající přímku AM nanese se 2 + 3 + 4 = 9 stejných, libovolně velkých dílků, tak že bude AC = 2, CD = 3, DE = 4. Spojí-li se na to bod E s krajem B, a vedou skrze body D a E rovnoběžky k *BE*, budou i odříznuté částky AF, FG a GB v poměru 2:3:4. Důkaz dle § 31, 2.



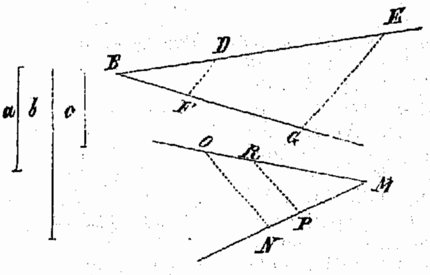
Obr. 123.

2. *Ku třem daným přímkám* ***a***, ***b***, ***c*** *má se určiti čtvrtá srovnalostná.*

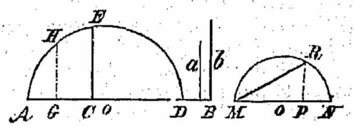
Provedení. Narejsuj libovolný úhel *B* (obr. 124) a nanes *α*) obě první přímky *a* a *b* na jedno rameno buď za sebou a nebo obě od vrcholu, t. j.

*)Pomocí této a věty Ptolomeovy (§ 44. 3) lze vypočísti úhlopříčny do kruhu vepsaného čtyrúhelníka, když by dány byly jeho strany.

sřízni na př. BD = a, DE = b, a třetí přímku nanes na druhé rameno, tak aby bylo BF = c. Vede-li se nyní bodem E rovnoběžka k DF, bude FG žádanou čtvrtou srovnalostnou.



Obr. 124.



Obr. 125.

β) Nebo: první přímka nanese-li se na jedno rameno (MN = a), druhá přímka na druhé (MO = b), a třetí přímka opět na rameno první (MP = c), potřebujeme bodem P vésti rovnoběžku k *NO*, i bude potom MN : MO = MP : MR. Důkaz v obou případech podej čtenář. — Jak se narejsuje dle této konstrukce přímka x, aby bylo $a : b = b : x$?

3. *Ku dvěma daným přímkám **a** a **b** vyhledá se střední měřická srovnalostná x.*

Provedení. α) Narejsuje se přímka AD = AC + CD = $a + b$ (obr. 125.) a sestrojí se nad ní kruh; v bodu *C* vztyčená kolmice *CE* jest pak střední měř. srovnalostnou, totiž AC : CE = CE : CD, nebo $a : x = x : b$.

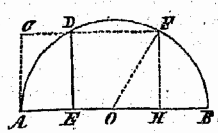
β) Též se může narejsovati půlkruh jenom nad jednou z daných přímek (nad a = MN), jestliže by totiž půlkruh nad součtem obou přímek narejsovaný mnoho místa potřeboval, a odřízne se MP = b. Vztýčí-li se na to v *P* kolmice, bude tětiva *MR* žádanou střední měř. srovnalostnou, t. MN : MR = MR : MP, nebo a : x = x : b.

Důkaz dle § 34. 4, § 34. 1, dodat. 1.

γ) Třetí provedení záleží v tom, že se narejsuje kruh nad r o z d í l e m daných přímek (obr. 127., kde jest BE = a, BD = b, a tudy DE = $a - b$), a sestrojí se v bodu *B* tečna BA, která jest žádaná střední měř. srovnalostna (dle § 35, 3.).

4. *Má se rozděliti daná přímka **a** ve dvě částky, mezi nimiž by jiná přímka **b** byla střední měř. srovnalostnou.*

Provedení. Nad danou přímkou (a = AB, v obr. 126) narejsuj půlkruh, vztyč v A kolmici AC = b, a veď CE || AB; spustí-li se potom DE ⊥ AB, bude DE = AC, a při tom AE a EB žádané částky. Důkaz dej čtenář.



Obr. 126.

5. *V dané přímce urči se bod x, jehož vzdálenosti od obou krajů* (vůbec od libovolných bodů A a B) *této přímky stály by v poměru určitém.*

Provedení. Budiž poměr tento dán přímkami m a n, tak aby bylo Ax : Bx = $m : n$. Sestroj z těchto tří přímek AB, m, n trojúhelník a rozpůl v něm úhel sevřený stranami m a n, nebo také jeho vedlejší úhel. Půlicí přímka protne pak danou přímku v žádaném bodu (viz obr. 103 a 104).

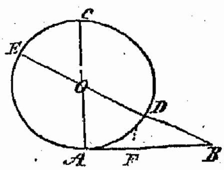
P o z n. Bod x padne při tom buď mezi A a B a nebo ne, dle toho, rozpůlil-li se vnitřní nebo zevnitřní úhel trojúhelníka.

6. *Daná přímka **a** má se tak prodloužiti, aby byla daná přímka **b** střední měř. srovnalostnou mezi přírůstkem a celou zvětšenou přímkou.*

Provedení. Nazveme-li přírůstek x, má být $x:b=b:(a+x)$, což dle § 36. 3, γ. takto provésti lze: Nad danou přímkou $a=ED$ (obr. 127.) sestroj kruh a postav v některém jeho bodu (A) tečnu $AB=b$; vede-li se na to z B středem O sečna, bude $BD=x$. — Proč se musela vésti sečna BE středem kruhu?

7. *Daná přímka má se rozděliti dle vnitřního a zevnitřního poměru.*

Budiž AB daná přímka v bodu F (obr. 127.) tak rozdělena, že jest $AF:FB=FB:AB$ (§ 31. 7). Z této srovnalosti plyne $(AF+FB):FB=(FB+AB):AB$, to jest $AB:FB=(FB+AB):AB$, nebo $FB:AB=AB:(FB+AB)$, čímž daná úloha převedena na předešlou, tak že se bude jednati toliko o velikosť BF.



Obr. 127.

Bude tedy provedení: V krajním bodu dané přímky vztyč kolmici a udělej $AC=AB$; nad AC narejsuj kruh a veď z *B* skrze střed sečnu BE. Přenese-li se na to zevnější úsek BD na AB, tak aby bylo $BD=BF$, bude v F žádaný bod, totiž $AF:FB=FB:AB$.

Důkaz. Dle § 35. 3 jest $BD:AB=AB:EB$; z toho obdržíme ale dosadíce stejných délek $BF:AB=AB:(ED+BD)$, nebo $BF:AB=AB:(AB+FB)$. Pročež jest také $BF:(AB-BF)=AB:(AB+BF-AB)$, t. j. $BF:AF=AB:BF$, a z toho konečně $AF:BF=BF:AB$.

Poznámka. Pro důležitosť úlohy této stůj zde ještě následující kratší provedení: V krajním bodu dané přímky vztyč kolmici $AO=\frac{1}{2}AB$, spoj bod *O* s B, přenes na přeponu OB opět $\frac{1}{2}AB=OD$, a zbytek BD na AB, tak aby bylo $BD=FF$; tu bude AB v F dle žádaného poměru rozdělena.

Důkaz. $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\overline{AB}^2$; rozložením toho bude $(OD+BD)^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2+\overline{AB}^2$, nebo $\left(\frac{AB}{2}+BF\right)^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2+\overline{AB}^2$, což když provedeme, dá $\frac{1}{4}\overline{AB}^2+AB.BF+\overline{BF}^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2+\overline{AB}^2$; tudy po náležitém srovnání $\overline{BF}^2=AB\ (AB-BF)=AB.AF$, a z toho $AF:BF=BF:AB$.

8. *Má se narejsovati popřičné čili tak zvané transversálné měřítko.*

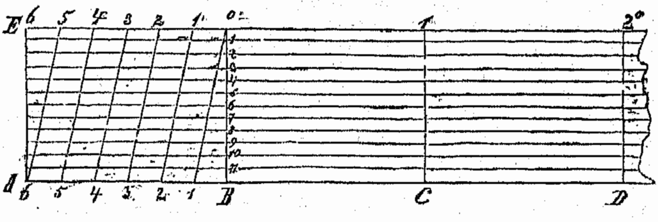
V rejsování nemohou se vždycky skutečné délky nanášeti, leč jen malé jich částky; ty se však rozdělují jako míry skutečné a slovou pak míry zmenšené nebo **měřítka** (Maßstäbe).

Rozdělením na př. zmenšeného sáhu v 6 stejných dílů vzniknou zmenšené střevíce, z těch obdržíme zmenšené palce, atd. — Číslo, udávající, kolikátý díl jest délky skutečné každá přináležející, délka ve výkresu, slove **poměr zmenšení** (Verjüngungsverhältniß). Nanáší li se na př. všude ve výkresu toliko 72. díl skutečné délky, bude poměr zmenšení $\frac{1}{72}$, a v tom případu bude skutečný sáh ve výkresu taktéž jen $\frac{1}{72}$°, t. j. 1″ dlouhý, což se vyslovuje: *zmenšený sáh jest jeden palec dlouhý*, nebo *jeden palec vzal se za sáh.*

Pozn. Poměr zmenšení bývá dle okolností rozličný. V stavitelských plánech na př., kde nejen rozměry jednotlivých místností nýbrž i tloušťku zdí dokonale rozeznávati musíme, brává se jeden palec za 1° (poměr $\frac{1}{72}$); v plánech situačních musí se předměty více zmenšiti a brává se jeden palec za 10 až i 100°. Nejčastěji jest tu poměr zmenšení $\frac{1}{2880}$ (plány katastrální), u map vojenských (generálního štábu) $\frac{1}{28800}$, t. j. 1″ za 400°. —

Při skutečném rozdělování zmenšených měřítek přišli by však dělící body tak dohromady, že by je nebylo lze rozeznati a že by se při tom přímka zbytečně rozpíchala. Nehodě této může se odpomocti spůsobem následujícím.

a) *Má li se narejsovati měřítko dle poměru* $\frac{1}{72}$, na němž by se mohly odměřovati zmenšené sáhy, střevíce i zmenšené palce; musela by se délka jednoho palce rozděliti na $6\times12=72$ stejné díly. Nanes tedy délku 1″ na libovolnou přímku vícekráte vedle sebe, a postav v dělících bodech A, B, C . . . kolmice. Na první z nich odřízni 12 libovolně velkých, avšak stejných dílků a protáhni dělícími body 12 rovnoběžek s AD. Rozdělí-li se konečně hořejší i spodní zmenšený sáh (AB a Eo) v 6 stejných dílů a vedou se příčky 10, 12, 23 atd., potřebujeme pouze připojiti číslice označující zmenšené sáhy, zmenšené střevíce atd. jak obr. 128. ukazuje.

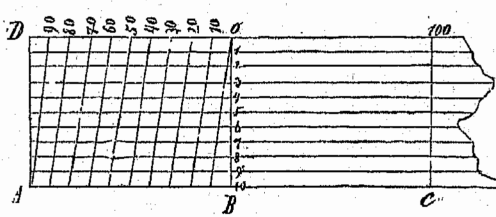


Obr. 128.

V trojúhelníku B01 jest totiž strana B0 rozdělena ve 12 stejných dílů; bude tedy dle § 18. 4) $r1 = {}^1/_{12}B1$ t. j. dvanáctý díl zmenšeného střevíce, tudy zmenšený palec; $3m = {}^3/_{12}B1$ t. j. 3 zmenšené palce. Rovnoběžka $1u = ur + 1r$ t. j. $1' + 1''$, $7v = vn + 7n = 3'7''$. Má-li se na př. vzíti z tohoto měřítka délka $4'8''$, zasadí se kružítko do onoho průsečníku kolmice BO, kde jest napsáno 8, a rozevře se po této rovnoběžce až k oné příčce, která jde od čtvrtého střevíce nahoře; dle toho jest $8x = 4'8''$.

Kdyby se měla odměřiti délka $2^c 5' 6''$, jde se po kolmici, u které napsáno jest 2^0, tak daleko dolů, až se přijde k šesté rovnoběžce; odtud pak se rozevře kružítko až k oné příčce, která jde od 5. střevíce dolů, tak že bude podle toho délka $ii = 2^0 5' 6''$. Jak se odměří $1^0 3' 10''$?

Měla-li by se takovýmto měřítkem nějaká přímka změřiti, vezme se celá přímka do kružidla, a dle toho, je-li delší nežli 1, 2, 3. . . sáhy, jde se po kolmici, u níž napsáno jest 1, 2, 3^0. . . tak daleko dolů, až některá rovnoběžka s rozevřením kružidla dohromady splyne.

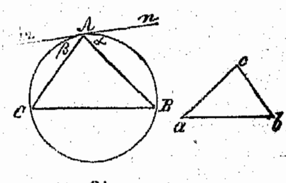


Obr. 129.

b) Podobným spůsobem shotoví se tak zvané měřítko setiné (hundertheiliger Maßstab), kde určitá délka na 100 stejných dílků rozdělena jest, na př. v obr. 129. (Sem náleží úlohy § 40, 1 a 2.)

9. *Do kruhu má se narejsovati trojúhelník, který by byl danému trojúhelníku podoben.*

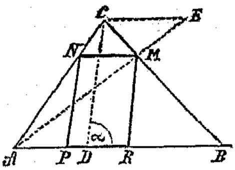
Provedení. V libovolném bodu (A) kruhové čáry narejsuje se tečna (mn v obr. 130) a přiloží se k ní $\sphericalangle \beta = b$, $\sphericalangle \gamma = c$; spojí-li se bod A s body B a C, bude s $\triangle ABC \sim \triangle abc$. Důkaz dle § 33. 1, a § 27, 1. a 2.



Obr. 130.

10. *Do trojúhelníka ABC (obr. 131) má se vepsati rovnoběžník, jehož jedna strana (PR) na základně by ležela a při tom s druhou stranou (NP) úhel α zavírajíc v určitém poměru m : n by stála.*

Provedení. Vrcholem protilehlého úhlu C narejsuj přímku CD, která by se základnou trojúhelníka zavírala $\sphericalangle \alpha$, a taktéž veď druhou přímku CE || AB tak dlouhou, aby měl poměr CE : CD hodnotu daného poměru $m : n$. Přímka AE prořízne BC v bodu M tak, že bude poměr MN : NP = CE : CD = $m : n$, t. j. MNPR bude žádaný rovnoběžník.



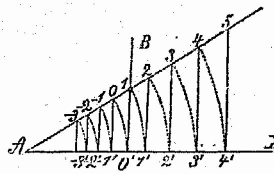
Obr. 131.

V trojúhelníku ACD jest NP : CD = AN : AC; v trojúhelníku pak ACE jest MN : CE = AN : AC. Z této a z předešlé srovnalosti plyne, že jest MN : CE = NP : CD, a nebo když se vnitřní členy promění MN : NP = CE : CD = m : n.

Dodatek. Jak se musí provedení této úlohy změniti, když by se měl do trojúhelníka vepsati čtverec?

11. *Ze známé délky přímky* l *má se graficky ustanoviti hodnota* l^n, *t. j. mají se rejsováním udati přímky, jichžto hodnoty dle řady jsou . . .* l^{-2}, l^{-1}, l^0 l^1, l^2, l^3, . . . *)

Provedení. Na libovolné přímce Ax (obr. 132) budiž úsek Ao′ jedničkou, t. j. mírou, jížto se přímka l a její mocniny měřiti mají. Postaví-li se BO′ ⊥ Ax a opíše se z A danou délkou l = A1 = A1′ kruhový oblouk 11′, který by kolmici BO′ v bodu 1 proseklo, potřebujeme toliko ve spodním průsečníku 1′ vztýčiti kolmici 1′2, která prodlouženou A1 v bodu 2 prosekne. Vzdálenost A2 rovná se potom druhé mocnině přímky l. Jest totiž v trojúhelníku A21′ Ao′ : A1 = A1′ : A2, což se může také psáti 1 : l = l : A2, a z toho A2 = l^2.

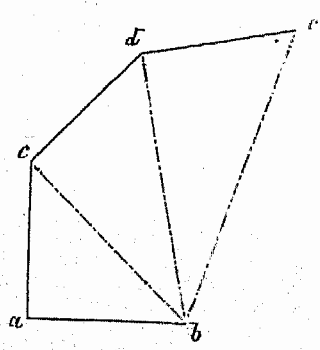


Obr. 132.

Přenese-li se nyní A2 obloukem 22′ na základnu Ax a vztýčí se v bodu 2′ kolmice 2′3, obdržíme v úseku A3 třetí mocninu přímky l. Neboť v trojúhelníku A2′3 jest A1′ : A2 = A2′ : A3, což se i takto napsati může: $l : l^2 = l^2 : A3$, což dá jako v předešlém případu $A3 = \frac{l^4}{l} = l^3$.

Podobným-li spůsobem pokračujeme, bude $A4 = l^4$, $A5 = l^5$. Konstrukce tato může se ale i k druhé straně provésti, čímž se ustanoví hodnoty, jaké přísluší délkám Ao, A(—1), A(—2). . . . Především jest tu totiž patrno, že úsek Ao = Ao′ = 1, tudy zrovna tolik co l^0, pročež se může psát $Ao = p^0$. — Dále pak jde z trojúhelníka Ao′1 srovnalost A1 : Ao′ = Ao : A(—1′) nebo l : 1 = 1 : A (—1′); pročež $A(-1') = A(-1) = \frac{1}{l} = l^{-1}$.

Tímtéž spůsobem plyne z trojúhelníka Ao(—1′) srovnalost Ao : A(—1′) = A (—1) : A(—2′), nebo $1 : l^{-1} = l^{-1} : A(-2')$, a odtud $A(-2') = A(-2) = l^{-2}$.



Obr. 133.

12. *Graficky mají se určiti hodnoty druhých kořenů* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, *atd.*

*) Úkol tento slove grafické mocnění, a nenachází se tušíml ještě v žádném mathematickém díle.

Provedení. Sestrojí se pravoúhelný rovnoramený trojúhelník, jehož každá odvěsna má hodnotu $=1$, t. j. aby bylo v obr. 133. $ab=ac=1$; i bude potom mít přepona hodnotu $\sqrt{\overline{ac}^2+\overline{ba}^2}$ t. j. $bc=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. — Postaví-li se na to $cd \perp bc$, a odřízne se opět $dc=ca=1$, bude v $\triangle bcd$ přepona $bd=\sqrt{\overline{cd}^2+\overline{bc}^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$, a podobným spůsobem pokračujíc obdržíme hodnoty $bc=\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, atd.*)

Kniha pátá.

I. Algebraické určování veličin měřických.

§ 37.

1. Již v § 3. bylo vyloženo, že velikosť přímek i čísly vyjádřiti lze; na základě toho byly pak v § 31. přímky i v poměry a srovnalosti stavěny a s nimi jako s pouhými čísly nakládáno. — Takto-li vůbec veličiny měřické poměrnými čísly vyjádříme, budeme je moci všem počtářským výkonům podrobovati a tím spůsobem i nových měřických pravd vyhledávati. Zvláště pro řešení měřických úloh jest toto číselné vyjádřování veličin měřických velmi důležité, jelikož algebra řeší počtářské úlohy dle pravidel obecných a určitých přicházejíc tak snadnou cestou k výsledkům všeobecně platným, kdežto čistě měřické řešení úloh na všelikých naukách založeno býti musí a v mnohých případech upotřebení té které nauky jen dostatečným vědomostem, dílem i důvtipu co děkovati jest.

2. Na těchto základech stavíce můžeme nyní některé z předešlých vět doplniti, a sice:

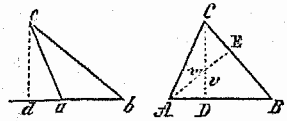
a) Znamenajíce přeponu a odvěsny pravoúhelného trojúhelníka písmenami a, b, c, vyjádřujeme pythagorskou větu dle § 34. 4, dodat. rovnicí $a^2=b^2+c^2$. Rovnice tato udává návod, jak lze jednu stranu pravoúhelného trojúhelníka počtem určiti, když by které koliv dvě z nich dány byly; jest totiž $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

b) *Druhá mocnina strany, která leží v trojúhelníku naproti tupému úhlu, jest větší, druhá mocnina ale strany, která leží v trojúhelníku naproti ostrému úhlu, jest menší nežli součet druhých mocnin ostatních dvou stran.*

---

*) O všeobecném kořenování spůsobem grafickým viz § 50, 3.

Důkaz. Budiž v obr. 134. $cd \perp ab$; dle pythagorské věty bude tu $\overline{bc}^2 = \overline{cd}^2 + \overline{db}^2$. Avšak $\overline{db}^2 = (\mathrm{da} + \mathrm{ab})^2$, a $\overline{cd}^2 = \overline{\mathrm{ca}}^2 - \overline{\mathrm{ad}}^2$, pročež bude také, když tyto hodnoty do první rovnice dosadíme, $\overline{\mathrm{bc}}^2 = \overline{\mathrm{ca}}^2 - \overline{\mathrm{ad}}^2 + (\mathrm{da} + \mathrm{ab})^2 = \overline{\mathrm{ca}}^2 - \overline{\mathrm{ad}}^2 + \overline{\mathrm{ad}}^2 + 2\mathrm{ad}\,.\,\mathrm{ab} + \overline{\mathrm{ab}}^2$, nebo $\overline{bc}^2 = \overline{\mathrm{ca}}^2 + \overline{\mathrm{ab}}^2 + 2\mathrm{ad}\,.\,\mathrm{ab}$, nebo když se na pravé straně $2ad\,.\,ab$ vynechá a tak rovnosť poruší, $\mathrm{bc}^2 > \mathrm{ca}^2 + \mathrm{ab}^2$.



Obr. 134.

V ostroúhelném trojúhelníku ABC (obr. 134) bude taktéž, jestliže uděláme $\mathrm{CD} \perp \mathrm{AB}$, $\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2$; že ale jest na druhé straně $\overline{\mathrm{CD}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{AD}}^2$, a $\mathrm{BD} = \mathrm{AB} - \mathrm{AD}$, bude opět, když hodnoty tyto dosadíme, $\overline{\mathrm{CB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{AD}}^2 + (\mathrm{AB} - \mathrm{AD})^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 - 2\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{AD}$, nebo když se $2\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{AD}$ na pravé straně ještě přidá a tak rovnosť poruší, $\overline{\mathrm{BC}}^2 < \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2$.

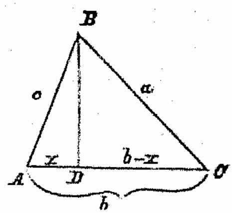
3. *Dána-li strana pravidelného trojúhelníka, má se počtem určiti jeho výška.*

Provedení. Budiž v obr. 134. $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{AC} = s$, $\mathrm{CD} = v$; dle pythagorské věty jest tu $\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2$, a z toho $\overline{\mathrm{CD}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{AD}}^2$, t. j. $v^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 - \frac{s^2}{4}$, a z toho

$$v = \sqrt{\frac{4s^2 - s^2}{4}} = \frac{s}{2}\sqrt{3}.$$

4. *Dána-li v nějakém trojúhelníku velikosť jeho stran, má se počtem určiti a) na základně bod, do něhož padne výška, b) výška trojúhelníka.*

Provedení. a) Poznamenáme-li v trojúhelníku ABC (obr. 135.) pro krátkosť strany jedním písmenem, dáme výšku $\mathrm{CD} = v$, a pojmenujeme neznámý úsek $\mathrm{AD} = \mathrm{x}$, tak že bude délka druhého úseku $\mathrm{DC} = b - \mathrm{x}$; obdržíme z $\triangle$ ADB $v^2 = c^2 - x^2$, ... 1)
v trojúhelníku pak BCD $v^2 = a^2 - (b - \mathrm{x})^2 = a^2 - b^2 + 2b\mathrm{x} - x^2$, z kterýchžto rovnic plyne



Obr. 135.

$$2b\mathrm{x} = c^2 + b^2 - a^2, \quad \text{nebo} \quad \mathrm{x} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b} \qquad \text{. . . . . . . 2)}$$

Pozn. Rovnicí touto jest bod D na základně dokonale určen; kdyby však bylo $a^2 > b^2 + c^2$, t. j. kdyby ležela strana a naproti tupému úhlu, stal by se čitatel zlomku a následovně i x samo záporným, což ale nic jiného neznačí, než že se úsek AD místo v pravo od A na levé straně na prodloužení strany AB vzíti má. Výška by tudy, jak již od jinud známo, padla mimo trojúhelník.

b) Výšku najdeme, když v rovnici (2) nalezenou hodnotu za x dosadíme do rovnice (1), kterou si dříve takto napíšeme: $v^2 = c^2 - x^2 = (\mathrm{c} + \mathrm{x})(\mathrm{c} - \mathrm{x})$,

$$v^2 = \left(c + \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)\left(c - \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right) = \left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2b}\right)$$
$$\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2b}\right) = \left[\frac{(b+c)^2-a^2}{2b}\right]\left[\frac{a^2-(b-c)^2}{2b}\right]$$
$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b} \cdot \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b},$$
a z toho konečně
$$v = \frac{1}{2b}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} \quad \ldots\ldots 3)$$

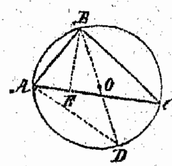
Poslední rovnice obdrží jednodušší formu, jestliže poznamenáme obvod $a+b+c=2s$, z čehož snadno najdeme
$b+c-a = a+b+c-2a = 2s-2a = 2(s-a)$,
$a+c-b = a+b+c-2b = 2s-2b = 2(s-b)$,
$a+b-c = a+b+c-2c = 2s-2c = 2(s-c)$, kteréžto hodnoty když dosadíme do rovnice (3), obdržíme
$$= \frac{1}{2b}\sqrt{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}$$
$$= \frac{1}{2b}\sqrt{16s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ nebo}$$
$$v = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4)$$

Dodatek. Měly-li by se určiti hodnoty obou odvěsen pravoúhelného trojúhelníka, v němžto dána jest přepona h a algebraický součet obou odvěsen $(a \pm b)$ bude počet následující.

Dosadíce pro krátkosť $a+b=s$, a v druhém případu $a-b=d$, obdržíme rovnice $s^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \ldots\ldots \alpha)$
$h^2 = a^2 + b^2$ (dle pyt. věty) $\ldots\ldots \beta)$; odečtením tedy
$$s^2 - h^2 = 2ab.$$

Odečte-li se rovnice poslední od rovnice $\beta)$, bude
$2h^2 - s^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, a z toho
$a - b = \sqrt{2h^2 - s^2}$, s kteroužto rovnicí když spojíme
$a + b = s$, obdržíme
$$a = s + \frac{\sqrt{2h^2-s^2}}{2}, \quad b = \frac{s - \sqrt{2h^2-s^2}}{2}.$$

Čtenáři zůstavuje se provedení této úlohy, když by bylo dáno $a-b=d$. (Měřické provedení téže úlohy viz v § 23. 10.)



Obr. 136.

6. *Jsou-li dány v kruhu tětivy dvou oblouků, má se určiti velikosť tětivy náležející k součtu těchto oblouků.*

Provedení. Budiž poloměr daného kruhu $BO = r$ (obr. 136.), tětiva $AB = a$, $BC = b$, a tětiva, jež napíná oblouk $AB + BC = \text{arc. } ABC$, budiž $AC = c$. Narejsujeme-li průměr DB, a spojíme bod A s D, a spustíme ještě $BE \perp AC$, bude $\triangle ABD \sim \triangle BEC$ (stejné úhly), pročež $AB:BD = BE:BC$, t. j. $a:2r = BE:b$, z čehož plyne $BE = \frac{a.b}{2r} = \frac{ab}{d}$.

V trojúhelníku ABE jest však jedna strana úsekem žádané tětivy, totiž

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2b^2}{d^2}} = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2}} \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Druhý úsek EC jest zase

$$EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2b^2}{d^2}} = b\sqrt{1 - \frac{a^2}{d^2}} \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Když obě rovnice 1) a 2) sečteme, obdržíme

$$AE + EC = AC = c = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2}} + b\sqrt{1 - \frac{a^2}{d^2}}.$$

Pozn. Kdyžby byla dána tětiva náležející k jistému oblouku a měla by se určiti tětiva náležející k oblouku dvojnásobnému, potřebujeme dáti zde $a = b$, a obdržíme po krátkém počtu $c = 2a\sqrt{1 - \frac{a^2}{d^2}}$. — Sem náleží úlohy § 40. 3—10.

6. Obojstředna dvou kruhů, jejichž poloměry jsou r a ϱ, jest e; má se určiti a) jak daleko jest zevnitřní bod podobnosti, b) vnitřní bod podobnosti od středu většího z daných kruhů.

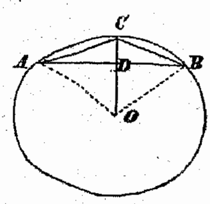
(ad a) $s = \frac{er}{r + \varrho}$, ad b) $t = \frac{er}{r - \varrho}$).

Strany a obvody pravidelných mnohoúhelníků.

§ 38.

Výsledky předešlého paragrafu dovolují nyní, aby se určila nějakou rovnicí závislosť mezi poloměrem kruhu a stranami pravidelných mnohoúhelníků, z kteréžto rovnice by se dle libosti buď poloměr kruhu a nebo ta která strana prav. mnohoúhelníka počtem určiti mohla. Věty takovéto jsou:

1. *Dána-li strana do kruhu vepsaného prav. n-úhelníka, má se určiti strana prav. 2n-úhelníka, který témuž kruhu vepsán jest* (obr. 137).



Obr. 137.

Provedení. Budiž $AB = s$ daná tětiva; spustí-li se ze středu O na tětivu AB kolmice, bude nejen AB v bodu D nýbrž i oblouk AB v bodu C rozpůlen (§ 25. 2), a při tom $AC = s_{2n} = \sqrt{AD^2 + CD^2}$

$\sqrt{\left(\frac{s_n}{2}\right)^2+(CO-DO)^2}$, nebo $s_{2n}=\sqrt{\frac{s_{2n}}{4}+(r-DO)^2}$; že ale jest $DO=\sqrt{AO^2-AD^2}=\sqrt{r^2-\frac{s_{2n}}{4}}$, bude, když tuto hodnotu za DO dosadíme,

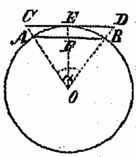
$$s_{2n}=\sqrt{\frac{s_{2n}}{4}+\left(r-\sqrt{r^2-\frac{s_{2n}}{4}}\right)}=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{s_{2n}}{4}}},$$

nebo $s_{2n}=\sqrt{2r\left(r-\sqrt{r^2-\frac{s_{2n}}{4}}\right)}$.

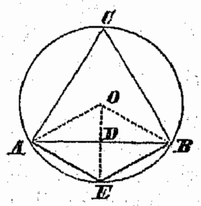
2. *Dána-li strana do kruhu vepsaného n-úhelníka, má se určiti strana n-úhelníka opsaného.*

Budiž *AB* daná strana vepsaného obrazce (obr. 138); spustíme-li z O kolmici na AB a postavíme v *E* tečnu tak dlouhou, až by byla prodlouženými poloměry OA a OB omezena, bude CD stranou podobného opsaného *n*-úhelníka (§ 28, 6).

Poznamenáme-li pro krátkost AB $=s$, CD $=S$, obdržíme z podobnosti trojúhelníků OCD a OAB srovnalost CD : AB = EO : FO, t. j. $S:s=r:\sqrt{r^2-\frac{s^2}{4}}$, a z toho konečně $S=\frac{sr}{\sqrt{r^2-\frac{s^2}{4}}}$



Obr. 138.



Obr. 139.

3. *Má se určiti strana prav. do kruhu vepsaného trojúhelníka,* t. j. tětiva oblouku 120stupňového.

Provedení. Naneseme-li poloměr OE (obr. 139.) šestkráte v obvodu kruhu a spojíme průsečníky tyto ob jeden, obdržíme (AB) stranu prav. trojúhelníka. Důkaz zůstavuje se čtenáři.

Při tom bude v $\triangle ADO$, když střed O s rohy A a B spojíme a stranu AB pro krátkost s_3 poznamenáme a při tom uvážíme, že jest OD=DE, AD=BD (dle § 15. 3) $AD=\frac{s_3}{2}=\sqrt{AO^2-OD^2}=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}=\sqrt{\frac{4r^2-r^2}{4}}=\frac{r}{2}\sqrt{3}$, a z toho $s_3=r\sqrt{3}$.

Pozn. Pomocí prvního odstavce v tomto paragrafu obdržíme, jestliže za s_n dosadíme právě nalezenou hodnotu $s_3=r\sqrt{3}$ a všechno náležitě provedeme, že tětiva 60° č. strana prav. šestiúhelníka $s_6=r$.

Taktéž zase z této ceny obdržíme dosadíce ji do nadzmíněného vzorce

$$s_{12} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}\right)} = \sqrt{2r\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)} = \sqrt{r\left(2r - r\sqrt{3}\right)},$$

$= r\sqrt{2-\sqrt{3}}$; z toho pak dosazením nalezené ceny za s_n

$$s_{24} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2(2-\sqrt{3})}{4}}\right)} = r\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

$$s_{48} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}, \text{ atd.}$$

4. *Strana prav. do kruhu vepsaného čtyrúhelníka, to jest tětiva oblouku 45stupňového rovná se* $r\sqrt{2}$.

Stranu prav. čtyrúhelníka obdržíme, když postavíme dva průměry na sebe kolmo a krajní jejich body spolu spojíme.

Velikosť strany bude, jak z obrazce viděti lze

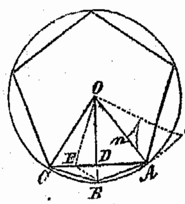
$AB = s_4 = r\sqrt{2}$, a dosazením hodnoty této do vzorce (1)

$$s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}},\quad s_{16} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$s_{32} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \text{ atd.}$$

5. *Strana prav. do kruhu vepsaného desítiúhelníka rovná se většímu úseku dle spojité srovnalosti rozděleného poloměru.*

Důkaz. Je-li v obr. 140. $An : nO = nO : OA$, a při tom $On = AB = BC$, bude dle § 34. 5, $\sphericalangle AOB = 36^0 = \frac{360}{10}$; oblouk k tomuto úhlu náležející bude tudy desátý díl celého obvodu a následovně tětiva $AB = BC$ stranou pravid. desítiúhelníka. Velikosť této strany vypočte se následovně: Dosadíme-li do dané srovnalosti, v nížto jest $An = AO - On$, za On stranu $AB = s_{10}$, a za OA poloměr r, obdržíme $(r - s_{10}) : s_{10} = s_{10} : r$, a z toho $s^2_{10} + s_{10}r = r^2$; rovnice tato jest druhého stupně a dává $s_{10} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = r\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$.



Obr. 140.

Že však se zde jenom kladná cena veličiny kořenové vzíti může (strana s_{10} byla by jinak zápornou), bude konečně $s_{10} = r\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$.

6. Dříve nežli se přistoupí k algebraickému určení strany prav. pětiúhelníka, musí být zjištěna věta: *Poloměr kruhu a strany jemu vepsaného prav. desíti- a pětiúhelníka zavírají spolu pravoúhelný trojúhelník, v němžto jest strana pravidelného pětiúhelníka přeponou.*

Důkaz. Spojíme-li v obr. 140. bod A s C, bude tětiva AC stranou prav. pětiúhelníka, a $\sphericalangle AOC = 72^0 = \frac{360}{5}$. Rozpůlením úhlu BOC vznikne $\sphericalangle BOE = \frac{36}{2} = 18^0$, tak že bude $\sphericalangle AOE = 36 + 18 = 54^0$. Že ale jest $\sphericalangle AOC = 72^0$, bude v $\triangle AOC$, který jest rovnoramený, $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = \frac{180 - 72^0}{2} = 54^0$ a proto $\triangle AOE \sim \triangle AOC$ ($\sphericalangle A = A$, $\sphericalangle AOE = OCA = 54^0$, tudy $\sphericalangle OEA = AOC$); následovně bude $AE : AO = AO : AC$, a z toho

$$AO^2 = AE . AC \; .... \; 1)$$

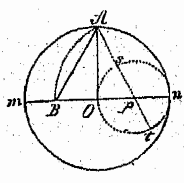
Že však jest také $CE = BE$ (ze shodnosti trojúhelníků COE a BOE) a $\sphericalangle ABC = 2 \times 72^0 = 144^0$, bude nejen $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BCA = \frac{180 - \sphericalangle ABC}{2} = 18^0$, nýbrž i $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CBE = 18^0$, a následovně v trojúhelníku BCE $\sphericalangle CEB = 144^0$; pročež musí být $\triangle CEB \sim \triangle ABC$, a z toho $CE : CB = CB : CA$, nebo $CB^2 = CE . CA \; ... 2)$.

Sečtěním rovnic 1) a 2), jež udávají druhé mocniny poloměru a strany desítiúhelníkové, obdržíme konečně $\overline{AO}^2 + \overline{BC}^2 = AE . AC + CE . CA = CA(AE + CE) = \overline{CA}^2$, to jest

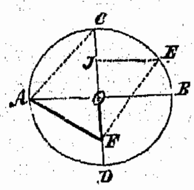
$$r^2 + s^2_{10} = s^2_5 \; .... 3)$$

Pozn. 1. Známá konstrukce, jížto se najde strana prav. pěti- i desítiúhelníka najednou, zakládá se na větě právě dokázané. Postaví se totiž na libovolný průměr mn (obr. 141.) ve středu kolmice OA; rozpůlí-li se na to poloměr on a narejsuje se z p poloměrem pA oblouk AB tak, aby bylo $pA = pB$, kude OB sranou prav. desítiúhelníka a AB stranou prav. pětiúhelníka, jež do téhož kruhu vepsány býti mohou.

Důkaz. Prodlouží-li se Ap, až by proseklo obvod nad On narejsovaného kruhu, bude dle § 35. 3. $\overline{AO}^2 = As . At$; dosazením stejných hodnot z toho ale obdržíme $\overline{Om}^2 = As(As + st) = BO(BO + mO) = \overline{BO}^2 + Om . OB$, a z toho zase $BO^2 = Om - Om . OB = Om(Om - OB) = Om . mB$. t. j. poloměr Om jest v B rozdělen dle spojité srovnalosti, následovně OB stranou prav. desítiúhelníka, a dle hlavní věty b) AB stranou prav. pětiúhelníka.



Obr. 141.



Obr. 142.

Pozn. 2. Zajímavá pro svou jednoduchosť jest následující, ještě málo známá konstrukce strany pěti- a desítiúhelníkové: Postaví se průměr $CD \perp AB$ (obr. 142.), utne se $CE = CO = r$ a udělá $EF = AC$; i bude potom OF stranou prav. desítiúhelníka a AF stranou prav. pětiúhelníka vepsaného do kruhu O.

Důkaz. Spustí-li se $EJ \perp CO$, bude dle § 37. 2, 6, $\overline{CE}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{FE}^2 - 2\, CF . JF$, nebo když za $EF = AC = 2r^2$ a za $JF = JO + OF = \frac{r}{2} + OF$ dosadíme, $r^2 = (r + OF)^2 + 2r^2 - 2(r + OF)\left(\frac{r}{2} + OF\right)$, z čehož po náležitém provedení obdržíme $\overline{OF}^2 + r . OF = r^2$, nebo $OF = \frac{r}{2} (-1 \pm \sqrt{5})$ jako v odstavci 5).

Jest tedy OF stranou prav. desítiúhelníka, a jelikož jest $\triangle$ AOF pravoúhelný, AF stranou prav. pětiúhelníka.

7. *Má se určiti strana prav. do kruhu vepsaného pětiúhelníka.*

Dosadíce do rovnice (3) v odstaci 6. známou hodnotu strany desítiúhelníkové, obdržíme $r^2 + r^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = s_5^2$, nebo $s_5^2 = r^2\left(\frac{4+6-2\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{r^2}{4}(10-2\sqrt{5})$, a z toho $s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$

Pozn. Též na základě věty § 37. 6 pozn. může se strana prav. pětiúhelníka určiti, dosadíme-li tam za *a* stranu desítiúhelníka; jest totiž z obr. 147.

$$c = AC = s_5 = 2.r\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\sqrt{1-\frac{r^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{d^2}} =$$

$$r(\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{4r^2-r^2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)}{4r^2}} = \frac{r\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{4-\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)} =$$

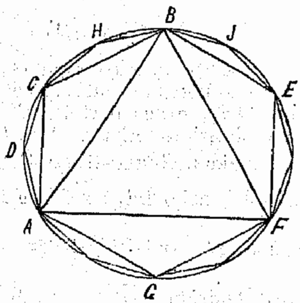
$$= \frac{r(\sqrt{4}-1)}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2\,(10+2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}. —$$

Dodatek. Poněvadž jsou úhlopříčny prav. pětiúhelníka sobě rovny a dle § 19, 6) zavívají spolu úhel 36°; jest mezi úhlopříčnou a stranou prav. pětiúhelníka týž poměr jako mezi poloměrem kruhu stranou vepsaného desítiúhelníka. Poznačíme-li tedy úhlopříčnu d, bude $d = \frac{2s_5}{\sqrt{5}-1} = \frac{s_5}{2}(1+\sqrt{5})$. — Sem náleží úlohy v § 40, 10—17.

8. *Má se určiti strana prav. do kruhu vepsaného patnáctiúhelníka.*

Poněvadž jest $^1/_{15} = {}^2/_{30} = {}^5/_{30} - {}^3/_{30} = {}^1/_6 - {}^1/_{10}$, potřebujeme od šestého dílu obvodu kruhového odříznouti desátý díl; tětiva zbytku bude stranou prav. patnáctiúhelníka. Jak z obr. 141 vysvítá, jest dle tohoto důvodu mB stranou prav. patnáctiúhelníka, tak že konstrukcí touto najednou strany tří prav. mnohoúhelníků obdržíme.



Obr. 143.

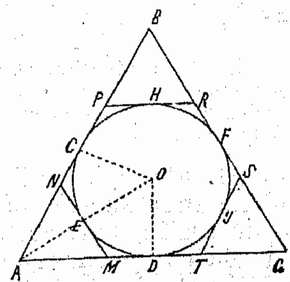
9. Vpíše-li se do kruhu prav. n-úhelník a pomocí toho pak jiné prav. mnohoúhelníky s dvoj-, čtyr- . . . násobným počtem stran ($2n$, $2.2n$, $4.2n$, atd.), jest *α) obvod každého následujícího mnohoúhelníka větší obvodu předeslého; β) obvod však každého do kruhu vepsaného mnohoúhelníka zůstává menší nežli obvod kruhu.*

Důkaz. Buď v obr. 143. AB stranou

prav. trojúhelníka, tak že bude, jestliže obvod písmenem O poznamenáme, $O_3 = 3AB$. Spojí-li se střední body oblouků AB, BF, FA s rohy tohoto trojúhelníka, budou AC, CB, BE a t. dále strany prav. šestiúhelníka, a tudy $O_6 = 6 . AC$. Že ale jest v $\triangle ACB$ $AC + CB > AB$, nebo $2 . AC > AB$, bude znásobením $6AC > 3AB$, t. j. $O_6 > O_3$.

Z podobných příčin jsou AD, DC, HC atd. strany prav. dvanáctiúhelníka a $12 . AD = O_{12}$. Že jest tu ale opět $AD + DC > AC$, nebo $2AD > AC$; bude, když to 6 znásobíme, $12AD > 6AC$, to jest $O_{12} > O_6$. A tak shledáme, když by se dále pokračovalo, že jest vždycky obvod následujícího $2n$-straného mnohoúhelníka větší obvodu předcházejícího n-straného mnohoúhelníka, vůbec že jest $O_{2n} > O_n$. Že ale počet stran půlením oblouku vždycky ještě růsti může, budou i obvody vepsaných takto prav. mnohoúhelníků stále růsti a obvodu kruhovému se přibližovati. Při tom jsou strany vepsaných mnohoúhelníků jakožto tětivy oblouků, třeba jich i nekončeně mnoho bylo, předce jen kratší nežli jimi napnuté oblouky, následovně bude i obvod kruhu větší nežli obvod kteréhokoliv vepsaného mnohoúhelníka. Pročež díme: *Obvody prav. vepsaných mnohoúhelníků přibližují se tím více obvodu kruhu, čím větší jest počet jejich stran.*

10. Opíše-li se kolem kruhu prav. n-úhelník, a pomocí toho pak jiné pravid. mnohoúhelníky s dvoj-, čtyr- . . . násobným počtem stran, bude *α) obvod každého následujícího mnohoúhelníka menší nežli obvod mnohoúhelníka předešlého; β) obvod však každého kruhu obepsaného mnohoúhelníka zůstává při tom větší obvodu kruhu.*



Obr. 144.

Důkaz. Buď ABG (obr. 144.) kruhu obepsaný prav. trojúhelník, tak že jest $O_3 = 3AB$. Rozpůlí-li se oblouky mezi tečnými body C, D, F (rozpůlením úhlů A, B, G) a narejsují se v půlících bodech E, H, y tečny, vznikne prav. kruhu obepsaný šestiúhelník MNPRST, v němžto jest $O_6 = 6 . MN$. Trojúhelníky AMN, BPR a GST jsou však pravidelné (proč?), následovně $AM = AN = BP = MN = BR$ . . .; mimo to jest ale také ještě v těchto trojúhelnících

$$AM + AN > MN$$
$$GT + GS > ST,$$
$$BP + BR > PR,$$

což když se na obou stranách sečte a k tomu ještě na obou stranách vynechané částky NP, RS, MT přidají, dá $ABG > MNPRST$, t. j. $O_3 > O_6$.

Podobným spůsobem pokračujíce najdeme, že vůbec $O_n > O_{2n}$.

Obvody kruhu obepsaných mnohoúhelníků, jež vždycky mimo kruh ležeti musí, přibližují se tudy obvodu kruhu ubýváním, aniž by ho kdy dosáhnouti mohly, poněvadž i kdyby se byl některý mnohoúhelník obvodu kruhovému již dosti přiblížil, jiný mnohoúhelník s dvojnásobným počtem stran kruhu ještě blíže státi může, kteréžto přibližování tudy ani konce nemá. (Viz § 43. 12, dodatek).

Pozn. Obě tyto poslední věty, že se totiž obvody prav. vepsaných mnohoúhelníků přibýváním a obvody obepsaných mnohoúhelníků ubýváním obvodu kruhovému přibližují, nabývají zvláštního objasnění způsobem algebraickým na základě rovnice § 38, 2. Je-li totiž $S = \dfrac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$, bude $S^2 = \dfrac{s^2}{1 - \frac{s^2}{4r^2}}$, nebo $S^2 = \dfrac{s^2}{1 - \frac{s^2}{d^2}}$, (poznamenáme-li $2r = d$), a z toho

$1 - \dfrac{s^2}{d^2} = \dfrac{s^2}{S^3}$, nebo když s^2 zkrátíme

$\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{S^2}$, což může se i takto napsati:

$\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{S^2} = \dfrac{1}{d^2}$. Rovnice tato dává ale

$\dfrac{1}{s^2 n^2} - \dfrac{1}{S^2 n^2} = \dfrac{1}{d^2 n^2}$, nebo, jestliže obvod obepsaného mnohoúhelníka (nS) velkým O a obvod vepsaného mnohoúhelníka (ns) malým o poznamenáme $1/o^2 - 1/O^2 = \dfrac{1}{n^2 d^2}$.

Z této rovnice jest patrno, že rozdíl obou obvodů tím menší bude, čím větší bude n, a se že tudy obvody vepsaných a obepsaných prav. mnohoúhelníků zdvojnásobováním stran neustále jisté mezi přibližují, kterou by i dosáhnouti mohly pro $n = \infty$.

11. Aby bylo i očividno, že obvody vepsaných mnohoúhelníků počtem stran se zvětšují, obvody pak obepsaných mnohoúhelníků se zmenšují a tudy že se oba k sobě přibližují, jsou v následující tabulce výsledky předešlých počtů přehledně sestaveny, a to k vůli pohodlnějšímu počtu pro hodnotu poloměru $r = 1$.

$s_6 = 1{\cdot}0000000$	$S_6 = 1{\cdot}1547005$
$s_{12} = 0{\cdot}5176381$	$S_{12} = 0{\cdot}5358984$
$s_{24} = 0{\cdot}2610523$	$S_{24} = 0{\cdot}2633039$
$s_{48} = 0{\cdot}1308662$	$S_{48} = 0{\cdot}1310869$
$s_{96} = 0{\cdot}0654381$	$S_{96} = 0{\cdot}0654732$
$s_{192} = 0{\cdot}0327234$	$S_{192} = 0{\cdot}0327278$
$s_{384} = 0{\cdot}0163622$	$S_{384} = 0{\cdot}0163628$
$s_{768} = 0{\cdot}0081812$	$S_{768} = 0{\cdot}0081812$
$s_{1536} = 0{\cdot}0040906$	$S_{1536} = 0{\cdot}0040906$

Pro obvody o_n a O_n obdržíme z toho číselné hodnoty

$o_6 = 6{\cdot}0000000$	$O_6 = 6{\cdot}928203\ldots$
$o_{12} = 6{\cdot}211658\ldots$	$O_{12} = 6{\cdot}430782\ldots$
$o_{24} = 6{\cdot}265257\ldots$	$O_{24} = 6{\cdot}319320\ldots$
$o_{48} = 6{\cdot}278700\ldots$	$O_{48} = 6{\cdot}292172\ldots$
$o_{96} = 6{\cdot}282065\ldots$	$O_{96} = 6{\cdot}285430\ldots$
$o_{192} = 6{\cdot}282905\ldots$	$O_{192} = 6{\cdot}283746\ldots$
$o_{384} = 6{\cdot}283115\ldots$	$O_{384} = 6{\cdot}283325\ldots$
$o_{768} = 6.283165\ldots$	$O_{768} = 6{\cdot}283220\ldots$
$o_{1536} = 6{\cdot}283181\ldots$	$O_{1536} = 6{\cdot}283194\ldots$
$o_{3072} = 6{\cdot}283183\ldots$	$O_{3072} = 6{\cdot}283187\ldots$

O obvodu kruhu.

§ 39.

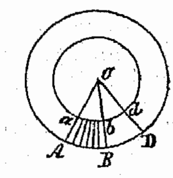
1. Jelikož každý kruh považovati lze za mnohoúhelník pravidelný s nesčíslným počtem stran, budou dle § 34. 9, pozn. 2, všechny kruhy sobě podobny; a z této příčiny *mají se obvody dvou kruhů k sobě, jako jejich poloměry nebo průměry.* Poznamenáme-li tedy obvody dvou kruhů písmenami O a O' a poloměry jejich r a r' bude dle toho $O : O' = r : r' = 2r : 2r'$, nebo $O : 2r = O' : 2r'$ t. j. *poměr obvodu k průměru jest ve všech kruzích stejný.*

Matematikové znamenají ode dávna stálý tento poměr řeckým písmenem π, tak že jest $O : 2r = \pi$. Číslo poměr tento vyjádřující slove obyčejně **číslem Ludolfským***).

Ze vzorce $O/2r = \pi$ plyne konečně $O = 2r\pi$, t. j. *obvod kruhu rovná se průměru znásobenému ludolfským číslem.* Naopak ale zase bude $2r = d = O/\pi$, t. j. *průměr kruhu rovná se obvodu dělenému ludolfským číslem.*

Vyjádření kruhové čáry v délkomíře (v dílech poloměru) slove **zpřímením** nebo **rektifikací** kruhu.

2. *Oblouky téhož kruhu mají se k sobě, jako příslušné k nim úhly středové.*



Obr. 145.

Důkaz. Buď v obr. 145. $\sphericalangle ACB : \sphericalangle BCD = m : n$; že ale jest dle § 26. 4, dodat. $\sphericalangle ACB = \text{arc}.AB$, $\sphericalangle BCD = \text{arc}.BD$, bude též $\sphericalangle ACB : \sphericalangle BCD = \text{arc}.AB : \text{arc}.BD = m : n$, následovně $\text{arc}.AB : \text{arc}.BD = m : n$.

Dodatek. 1. Jeden z těchto úhlů může vzrůsti až na 4R, při čemž vzroste oblouk k němu přináležející na obvod kruhu, a odtuď pak plyne **věta**: *Oblouk má se k celému obvodu kruhu, jako jeho úhel středový ku 4R*

---

*) Podle matematika Ludolfa van Zeulen, který žil ku konci 16. století a určením čísla π se zanášeje až na 35 decimálek ho vypočetl.

Dodatek 2. Poněvadž jest i arc. ab:arc. $bd = m:n$, bude také arc. AB:arc.BD = arc. ab : arc. bd, a na tom zakládá se věta: *Oblouky dvou kruhů jsou si podobny, jsou-li jejich příslušné úhly středové sobě rovny,* nebo: podobné oblouky jsou k celým kruhům v stejném poměru.

3. *Má-li se určiti délka kruhového oblouku,* musí být dán nejen poloměr kruhu, nýbrž i příslušný úhel středový. Jest totiž dle předešlé věty (dodat. 1.), když úhel středový poznačíme písmenem α, arc. α : O $= \alpha : 4R$, nebo arc. $\alpha : 2r\pi = \alpha : 4R$, a z toho

$$\text{arc}.\,\alpha = 2r\pi\,.\,\alpha/4R.$$

Pozn. 1. Zde sluší však k tomu přihlédnouti, aby byly v poměru $\alpha/4R$ oba členy stejnorodými, t. j. je-li udáno α v stupních, musíme vzít 4R za 360°; je li však α udáno v minutách, musí tím býti i $4R = 4 \times 90 \times 60 = 21600'$, atd.

Pozn. 2. V počtech brává se zhusta poloměr kruhu za jedničku délkomíry a tu pak jest vzorec pro obvod a oblouk kruhový: $O = 2\pi$, arc. $\alpha = 2.\pi\frac{\alpha}{4R}$, tak že π může také i půl obvodu nebo oblouk 180° označovati. Oblouk 1° jest potom arc. $1. = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$.

Dodatek. V stavitelství a mechanice nazývá se tětiva oblouku jeho **světlostí** (Bogen- oder Lichtweite) a kolmice v středním bodu světlosti vztyčená a až k vrcholu oblouku dosahující slove **výškou oblouku** (Bogenhöhe). V obr. 138. jest na př. AB světlostí a *CD* výškou oblouku ACB. Přibliženě rovná se délka oblouku součtu z jeho světlosti a výšky.

4. *Podobné oblouky kruhové mají se k sobě, jako poloměry jejich kruhů.*

Důkaz. V obr. 145. jest dle odstavce (2) arc. AB : O $= \sphericalangle ACB : 4R$, a arc. ab : O' $= \sphericalangle aCb : 4R$; že ale v těchto srovnalostech jest $\sphericalangle ACB = \sphericalangle aCb$, budou i levé strany sobě rovny, t. j. arc. AB : O = arc. ab : O', nebo také arc. AB : arc. ab = O : O' = 2r : 2r' = r : r'; pročež arc. AB : arc. ab = r : r'.

Pozn. Dle toho určí se délky oblouků **pro jakýkoliv poloměr**, kdyžby byly délky podobných oblouků pro poloměr $r = 1$ vypočteny, jestliže se délka oblouků pro poloměr $r = 1$ znásobí novým poloměrem.

Dodatek. Ze vzorce pro délku oblouku (3), který obsahuje tři veličiny, totiž: oblouk, úhel středový a poloměr, může býti kterákoliv z těchto veličin počtem určena, jestliže druhé dvě dány jsou. Pro úhel středový jest totiž $\alpha = 4R\,.\,\frac{\text{arc}.\,\alpha}{2r\pi}$,

pro poloměr „ „ $r = \frac{4R\,.\,\text{arc}.\,\alpha}{2\pi\,.\,\alpha}$,

v kterýchžto vzorcích α a 4R stejnojmenými čísly v míře úhlové, r a arc. α pak stejnorodými čísly v délkomíře vyjádřeny býti musí.

5. **Určení Ludolfského čísla.** Dle § 38. 9, a 10, jest obvod vepsaného prav. mnohoúhelníka menší, obvod ale témuž kruhu

obepsaného podobného mnohoúhelníka větší nežli obvod kruhu. Pročež bude, když obvod kruhu poznamenáme P, poloměr jeho r, obvod opsaného prav. n-úhelníka O_n, a obvod vepsaného prav. n-úhelníka o_n,

$$o_n < P < O_n.$$

Obvody však vepsaných a obepsaných těchto mnohoúhelníků přibližují se dle § 38. 11, k sobě neustále, když se počet jejich stran, t. j. n zvětšuje, a pro $n = 3072$ liší se oba obvody, jak v nadzmíněném odstavci počtem ukázáno, teprvé v šesté decimálce od sebe. Společná část tohoto čísla, t. j. 6·28318, musí tudy i obvod kruhu, který mezi oběma obvody mnohoúhelníkovými leží, na pět decimálek dokonale určovati, tak že bude pro poloměr $r = 1$ $o_{3072} < 2\pi < O_{3072}$, nebo $6{\cdot}283183 < 2\pi < 6{\cdot}283187$, a z toho přibliženě $2\pi = 6{\cdot}28318$, t. j. $\pi = 3{\cdot}14159$. Takovýmto spůsobem pokračujíce můžeme Ludolfské číslo i ve více decimálkách zevrubně určiti, které na 20 decimálek vypočteno jest:

$$\pi = 3{\cdot}14159\ \text{ale}\ 26535\ 8979323\ 846\ \ldots.$$

V novější době jest α až na 250 decimálek vypočteno.

Pozn. Dle potřeby a dokonalosti, jakou ve výpočtech žádáme, udáváme Ludolfské číslo větším nebo menším počtem decimálek; kdyby se však proměnilo číslo 3·1415926 . . . v zlomek řetězový, byly by jednotlivé zlomky přibližné $^3/_1$, $^{22}/_7$, $^{336}/_{106}$, $^{355}/_{113}$, atd., z nichž se nejčastěji potřebuje $^{22}/_7$. — Nejprvé udal π Archimedes (zemřel r. 212. před Kr.); postupuje spůsobem v odstavcích předešlých naznačeným až k prav. 96-úhelníku, shledal $\pi = {}^{22}/_7$ aniž by znal našich číslic a zlomků desítiných*. (Sem náleží úlohy § 40, 3, 17—28.)

II. Úlohy k cvičení.

§ 40.

1. Jakou délku bude míti přímka ve skutečnosti 890° dlouhá ve výkresu, který jest rejsován dle měřítka 1:2500?

2. V jakém poměru bude plán okolí vyrejsován, když se na jeden palec vzalo a) 100°, b) 500°?

3. V jakém poměru jest strana čtverce k jeho úhlopříčně?

4. Jak daleko jest od jednoho rohu k druhému na poli, které má podobu obdélníka a 42°+2′ dlouhé a 28°+5′ široké jest?

5. Přepona pravoúhelného a zároveň rovnoramenného trojúhelníka jest a) 4½″, b) 5′ 4″; jak dlouhé jsou jeho odvěsny?

6. Jak dlouhý musí býti řebřík, aby dole od stavení 1° 5′ vzdálen na něm 15′ vysoko dosahoval?

7. Jakou výšku má pravidelný trojúhelník, když jeho strana 6″ měří? a jaký obvod prav. trojúhelník, jehož výška 4¾″ obnáší?

8. Jakou výšku má trojúhelník, jehož strany jsou $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ palců?

9. Narejsuj trojúhelník, jehož obvod se rovná 120′ a jehož strany jsou v poměru 3:4:5.

10. Poloměr kruhu jest 2″; jak velká bude strana a) prav. témuž kruhu vepsaného trojúhelníka, b) dvanáctiúhelníka, čtyr-, pěti-, osmi-, šestnáctiúhel-

*) Obšírné vědecké a historické pojednání o Ludolfském čísle viz v časopise „Krok“ ročník 1864, str. 275, od Frant. Müllera.

níka; c) jak velké budou strany témuž kruhu obepsaných podobných mnohoúhelníků?

11. Dána jest strana *s* prav. pětiúhelníka, má se určiti a) poloměr vepsaného kruhu, b) poloměr obepsaného kruhu, c) délka jedné úhlopříčny.

12. Do kruhu má se narejsovati a taktéž kruhu obepsati a) pravid. troj-, šesti- a dvanáctiúhelník, b) prav. čtyr-, osmi- a šestnáctiúhelník, c) prav. pěti-, desíti- a dvacítiúhelník. Provedení zakládá se na § 38.

13. Obvod pravidelného osmiúhelníka jest 42·58'; jaký poloměr bude míti kruh, a) který jest obrazci tomuto obepsán, b) který jest do něj vepsán?

14. Jak daleko od středu jest tětiva 5°2'6" dlouhá v kruhu, jehož poloměr 4°3' obnáší, a jak dlouhá bude tětiva v témž kruhu, která jest 2°1' od středu vzdálená?

15. Položí-li se obě tětivy předešlého příkladu v témž kruhu od jednoho bodu za sebou, jak velká bude vzdálenosť druhých jejich krajů?

16. V kruhu, jehož poloměr jest 2'8", buď tětiva nějakého oblouku 3'10"; jak dlouhá bude tětiva a) oblouku polovičného, b) oblouku dvojnásobného?

17. Průměr předních kol jest u nějakého vozu 3', průměr zadních kol 4'; a) mnoho-li ujel vůz, když se každé přední kolo 1500krát otočilo; b) kolikrát se otočilo při tom každé zadní kolo?

18. Jaký průměr musí míti kolo u vozu, aby se na míli cesty 2000krát otočilo?

19. Jak daleko budou od sebe zuby kola 4'3" v průměru majícího, když je na něm 65 zubů po palci širokých?

20. Mnoho-li musí míti kolo *A* v průměru, aby se, řemenem s kolem *B* spojeno, 25krát otočilo, když se kolo *B*, které má 3'8" v průměru, 6krát otočí?

21. Průměr naší země obnáší 1719 zeměpisných mil (dokonaleji 1718·834); jaký obvod má rovník? A poněvadž se země za 24 hodin jednou kolem své osy otočí, kolik mil urazí jeden bod na rovníku za hodinu? Jakou rychlostí pohybují se tudy body na rovníku?

22. Jakou délku má oblouk jednoho stupně na poledníku naší země (poloměr země 859·4 míle)?

23. Jakou délku má kruhový oblouk 74°, je-li poloměr kruhu 1"? Jakou délku má oblouk, jehož světlosť $s = 4^0 5'$ a výška $v = 3^0$?

24. Kolik stupňů musí míti oblouk, aby se jeho délka vyrovnala poloměru?

25. Jakým poloměrem musí býti narejsován kruh, aby v něm byly oblouky jedné vteřiny pouhým okem k rozeznání, t. j. aby oblouk 1" aspoň $^1/_{10}$ čárky dlouhý byl? (÷ 23).

Kniha šestá.

O plošném obsahu.

I. Velikosť a poměry ploch vůbec.

§ 41.

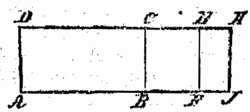
1. Mluví-li se o velikosti obrazce, rozumí se vždycky rozsáhlosť jeho plochy (§ 10. 2), a dva obrazce slovou sobě rovnými, mají-li stejnou plochy rozsáhlosť. — Velikosť obrazce slove též i jeho **plošný** nebo **ploský obsah** (Flächeninhalt).

Pozn. Mluvíce o ploském obsahu trojúhelníků, čtyrúhelníků, atd. vyslovujeme obyčejně pro krátkosť jen: trojúhelník, čtyrúhelník, atd. Taktéž ploský obsah kruhu slove někdy toliko „kruh".

Podobně jako jsme při posuzování velikosti délek a úhlů vždycky stejnorodou jedničku za základ položili, musíme i při posuzování ploských obsahů **nějakou určitou** plochu za měřítko č. za **jedničku** vzíti, s nížto by se každá jiná plocha porovnati dala. **Tvar** této plošné jedničky jest sice zcela libovolný; nicméně ale **hodí** se k tomu nejlépe čtverec, jehož strana zároveň jedničkou **délkomíry** jest. Dle toho slove potom za míru vzatý čtverec, když jeho strana dlouhá jest 1″, 1′, 1°, atd. **čtvercový palec, čtvercový střevíc**, atd. a znamená se □″, □′, □°, atd.

Velikost ploského obsahu určiti záleží tehdy v tom, že se udá **číslem**, kolikrát jest plocha za jedničku vzatého čtverce v nějaké **ploše** obsažena. Musí se proto čtverec se všemi obrazci porovnávati; a poněvadž rovnoběžníky, a mezi těmito zase obdélník čtverci svým tvarem nejblíže stojí, musíme nejdříve rovnoběžníky mezi sebou blíže porovnati.

2. *Součet (nebo rozdíl) dvou obdélníků, které mají stejnou výšku, rozličné ale základny, rovná se obdélníku jedinému téže výšky, jehož základna se rovná součtu (nebo rozdílu) daných základen.*

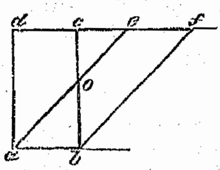


Obr. 146.

Důkaz. a) Postaví-li se dané obdélníky **tak** vedle sebe, aby dvě a dvě stejné strany (výšky, obr. 146.) k sobě přilehly a se pokryly, padnou jejich základny v přímku jedinou (dle § 6. 3), na př. AJ, a oba obdélníky dají dohromady obdélník jediný, jehož základna $AJ = AB + BJ$. Jest proto $ABCD + BJHC = AJHD$.

b) Postaví-li se za druhé menší obdélník na př. ECBF do většího tak, aby zase výšky jejich k sobě přilehly a vespolek se pokryly, padnou opět základny jejich na sebe a nepokrytá část velkého obdélníka, t. j. ABCD, udává potom rozdíl daných obdélníků, t. j. $ABCD = AFED - BFEC$.

3. *Každý obdélník rovná se kosodélníku, s nímžto má stejnou výšku i stejnou základnu.*



Obr. 147.

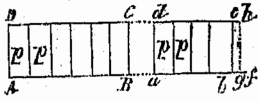
Důkaz. Položíme-li kosodélník $abef$ (obr. 147.) a obdélník $abcd$ tak, aby se jejich stejné základny pokryly, padnou protější jejich strany za příčinou stejných výšek v přímku $df \parallel ab$. I bude potom $\triangle ade \cong \triangle bcf$; pročež také, když na obou stranách $\triangle coe$ odečteme, $adco = boef$. K tomu-li se nyní přidá na obou stranách $\triangle aob$, vznikne $adco + \triangle aob = aoef + \triangle aob$, t. j. $abcd = abfe$.

Dodatek. Z věty této plyne, *že všechny rovnoběžníky, které mají stejné výšky i stejné základny, sobě rovny jsou*, protože by se každý z nich rovnal obdélníku téže výšky a základny.

Pozn. Nauka tato pronáší se mnohdy i takto: „Rovnoběžníky, které stojí na téže základně mezi dvěma rovnoběžkami, mají stejné ploské obsahy.

4. *Ploské obsahy dvou obdélníků o stejných výškách mají se k sobě jako jejich základny.*

Důkaz. Vyšetří-li se společná míra obou základen AB a ab (obr. 148.), tak aby bylo $AB = \alpha . m$, $ab = \beta . m$, následovně $AB : ab = \alpha : \beta$, můžeme ihned obě základny rozděliti v samé stejné dílky velikosti m a vztyčiti v dělících bodech kolmice. Tím rozpadne se každý z daných obdélníků v tolikéž menších a jednostejných obdélníků p, na kolik částí základny jejich rozděleny byly, tak že bude $ABCD = \alpha p$, $abcd = \beta p$, následovně $ABCD : abcd = \alpha : \beta = AB : ab$.



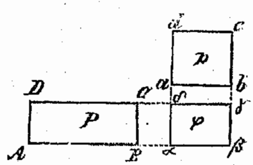
Obr. 148.

Pozn. Zde se předpokládalo, že jsou obě základny směřitelné; avšak i kdyby nebyly směřitelnými, musejí býti obsahy obdélníků v přímém poměru svých základen, což se dokáže nepřímo takto: Kdyby se poměr $ABCD : abcd$ nerovnal poměru $AB : ab$, musel by se rovnati poměru jinému, na př. poměru $AB : af$, při čemž jest $af \gtrless ab$. V případu prvém může se ale AB rozděliti v samé stejné částky, které by byly menší dílku bf, a takováto část dala by se i na ab několikrát vnésti, jenže by žádný dělící bod nemohl padnouti do b, poněvadž by v takovémto případu byly AB a ab směřitelnými. Musí tudy aspoň jeden dělící bod přes b mezi body b a f padnouti, na př. do g. Tu však budou přímky AB a ag směřitelnými a poměr $ABCD : abcd = AB : ag$. Vzhledem však k tomu, že má také býti $ABCD : abcd = AB : af$, muselo by být $af = ag$, což však zde jest nemožné. — Podobně bychom přišli k nesrovnalostem, kdyby mělo být za druhé $af < ab$.

Dodatek. Přijmeme-li v obdélnících $ABCD$ a $abcd$ (obr. 148) $AD = ad$ za základny a AB a ab za jich výšky, bude výsledek věty této zníti: *Ploské obsahy dvou obdélníků o stejných půdicích mají se k sobě jako jejich výšky.*

5. *Ploské obsahy dvou obdélníků vůbec jsou v složeném poměru jejich základen a výšek.*

Důkaz. Jsou-li dány obdélníky $ABCD = P$ a $abcd = p$, (obr. 149.), porovnejme obsahy jejich s obdélníkem třetím φ, který by měl s jedním, na př. s P, stejnou výšku, s druhým pak stejnou základnu. I bude potom $P : \varphi = AB : \alpha\beta$, a taktéž $\varphi : p = \beta\gamma : bc$, z čehož obdržíme znásobením



Obr. 149.

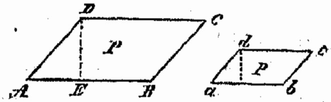
$P : p = AB . \beta\gamma : \alpha\beta . bc$, nebo, když za $\beta\gamma$ a $\alpha\beta$ dosadíme jiné hodnoty, $P : p = AB . BC : ab . bc$, t. j. $P : p = Z . V : z . v$, což se někdy vyslovuje: Ploské obsahy dvou obdélníků mají se k sobě, jako součiny z jich základen a výšek.*)

6. *Ploské obsahy dvou stejnoúhelných kosodélníků mají se k sobě jako součiny dvou v témž rohu sbíhajících se stran.*

---

*) Musíme podotknouti, že v dalším pokračování všude pro krátkost součiny přímek poměrnými čísly vyjádřeny jsou.

Důkaz. Kosodélníky ABCD a *abcd* (obr. 150.) rovnají se dle (3) svým obsahem obdélníkům P a p, s nimiž mají stejné základny AB a ab i stejné výšky DE a de. Tudy jest $ABCD : abcd = P : p$, a poněvadž jest $P : p = AB . ED : ab . ed$ (5), bude také $ABCD : abcd = AB . DE : ab . de$ . . . . 1)



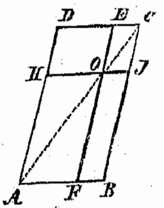
Obr. 150.

Z podobnosti trojúhelníků ADE a *ade* plyne ale $DE : de = AD : ad$, kterážto srovnalosť když se spojí s následující . . . . . $AB : ab = AB : ab$ dá $AB . DE : ab . de = AB . AD : ab . ad$ . . . 2). — Z porovnání konečně srovnalostí 1) a 2) jde $ABCD : abcd = AB : ab . ed$.

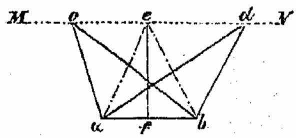
7. *Vedou-li se v nějakém rovnoběžníku libovolným bodem některé úhlopříčny rovnoběžky ku stranám, vzniknou čtyry nové rovnoběžníky, z nichžto ony dva, kterými úhlopříčna neprochází, jsou sobě rovny.*

Důkaz. Veďmež na př. bodem O úhlopříčny AC (obr. 151.) přímky $EF \parallel AD$, $HJ \parallel DE$; i bude potom

$\triangle ACD \cong \triangle ABC$, a taktéž
$\triangle AHO \cong \triangle AFO$, následovně, když odečteme,
$HOCD = COFB$; že ale jest také
$\triangle EOC \cong \triangle OJC$, můžeme zase odečísti, a obdržíme
$HOED = OJBF$.



Obr. 151.



Obr. 152.

Dodatek. Mimo těchto dvou stejných rovnoběžníků jest tu ještě $DEFA = ABJH$, čehož dokázání čtenáři se zůstavuje.

§ 42.

1. *Každý trojúhelník rovná se polovici rovnoběžníka, s nímžto má stejně velkou základnu i výšku.* (Obr. 152.)

Důkaz. Dán-li $\triangle abd$, veď $ae \parallel bd$ a $ed \parallel ab$, čímž vznikne rovnoběžník *abde*; a v tom jest $\triangle abd \cong \triangle aed$, pročež $\triangle abd = \frac{1}{2} abed$.

Dodatky. a) Z této a z nauky 3. následuje: Trojúhelníky mající stejné základny a stejné výšky, jsou si rovny, a naopak: mají-li dva stejné trojúhelníky stejné základny, mají také i stejné výšky.

b) Dva trojúhelníky mající stejné základny a jichžto vrcholy leží v přímce se základnou rovnoběžné, jsou si rovny, na př. v obr. 152. $\triangle abd = \triangle abe = \triangle abc$.

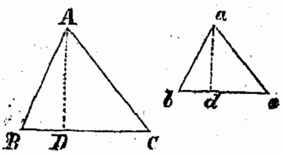
c) Vrcholy trojúhelníků, jež mají stejné ploské obsahy a společné základny, leží v přímce, která jest se základnou rovnoběžná.

d) Ploské obsahy dvou trojúhelníků vůbec mají se k sobě, jako součiny z jejich základen a výšek; při stejných výškách ale jako jejich základny, a při stejných základnách jako jejich výšky (důkaz dle § 41, 4 a 5).

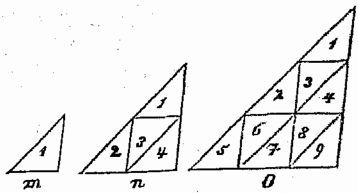
e) Ploské obsahy trojúhelníků, majících po jednom stejném úhlu, mají se k sobě, jako součiny stran úhel tento zavírajících (dle § 41, 6).

2. *Ploské obsahy podobných trojúhelníků mají se k sobě, jako druhé mocniny jejich stejnolehlých stran.*

Důkaz. Dle odstavce (1, d) jest $\triangle ABC : abc = BC . AD : bc . ad$ (obr. 153); že však si oba trojúhelníky podobny jsou, jest $BC : bc = AB : ab$. K tomu jestliže přidáme z trojúhelníků ABD a *abd*, $AD : ad = AB : ab$, obdržíme znásobením $BC . AD : bc . ad = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; pročež také $\triangle ABC : \triangle abc = \overline{AB}^2 : \overline{ba}^2$. Když ale uvážíme, co se předpokládalo, totiž $\triangle ABC \sim \triangle abc$, bude $AB : ab = BC : bc = AC : ac$, tudy i $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{bc}^2 = \triangle ABC : \triangle abc$.



Obr. 153.



Obr. 154.

Pozn. Nauka tato ukazuje, jak lze velikosť podobných trojúhelníků počtem určiti, kdyby byl poměr jejich stran dán, což lze ostatně i následovně znázorniti: narejsujeme-li podobné trojúhelníky, aby byl poměr jejich stran 1 : 2 : 3 atd. (obr. 154.), a vedeme-li dělícími body rovnoběžky ku stranám; rozpadne se okamžitě každý trojúhelník v menší, $\triangle m$ podobné trojúhelníky, kterých bude dle řady 1^2, 2^2, 3^2, . . ., tak že bude $\triangle m : \triangle n : \triangle o = 1 : 4 = 9$.

Dodatek. Dán-li poměr dvou podobných trojúhelníků čísly $m : n$, bude těmito čísly udán již i zdvojmocněný poměr stran, které tudy budou v poměru druhých kořenů čísel m a n, t. j. $S : s = \sqrt{m} : \sqrt{n}$.

3. *Ploské obsahy podobných mnohoúhelníků mají se k sobě, jako druhé mocniny stejnolehlých stran (nebo příček).*

Důkaz. Že jest $ABCDE \sim abcde$ (obr. 112.), musí být
$AB : ab = BC : bc = CD : cd =$ atd., následovně také (zdvojmocněním)
$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2 =$ atd. . . . . 1)

Že ale jsou $\triangle AED \sim \triangle ade$, $\triangle ADC \sim \triangle adc$, $\triangle ABC \sim \triangle abc$ (dle § 34. 8), bude

$\triangle ABC : \triangle abc = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$,

$\triangle ACD : \triangle acd = \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2 = \overline{AB}^2 : ab^2$ (dle rovnice 1) totiž),

$\triangle AED : \triangle aed = \overline{DE}^2 : \overline{de}^2 = \overline{AB}^2 : ab^2$, z čehož plyne

$\triangle ABC : \triangle abc = \triangle ACD : \triangle acd = \triangle AED : \triangle aed = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; pročež také $(\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle AED) : (\triangle abc + acd + \triangle aed) = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$, t. j. $ABCDE : abcde = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 =$ atd.

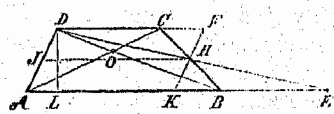
Dodatek. Z této a z věty § 34. 9, pozn. 2, následuje:

a) Plochy podobných pravidelných mnohoúhelníků mají se k sobě, jako druhé mocniny jejich stran ($S^2 : s^2$), nebo jako druhé mocniny poloměrů buď vepsaných buď opsaných kruhů ($r^2 : r_1{}^2$);

b) plochy dvou kruhů mají se k sobě, jako druhé mocniny jejich poloměrů (nebo průměrů a nebo i tětiv náležejících k podobným obloukům).

4. *Každý lichoběžník rovná se svým ploským obsahem a) trojúhelníku téže výšky, jehož základna se ale rovná součtu obou rovnoběžných stran; b) rovnoběžníku téže výšky, jehož základna se ale rovná přímce spojující střední body různoběžných stran.*

Důkaz. a) V lichoběžníku ABCD (obr. 155.) prodlouží se spodní strana AB a udělá se $BE = DC$, tak že bude $AE = AB + DC$; i bude pak, když spojíme bod D s E, $\triangle DCH \cong \triangle HBE$, a tudy $\triangle DCH + DABH = DABH + \triangle HBE$, t. j. $ABCD = \triangle ADE$.



Obr. 155.

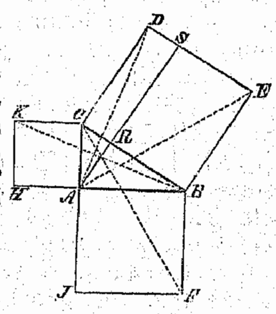
b) Je-li $CH = HB$ a $JD = JA$, bude, když protáhneme bodem H ještě $KF \parallel AD$, $\triangle HCF \cong \triangle HKB$, a tudy $\triangle HCF + DCHKA = \triangle HKB + DCHKA$, t. j. $ADFK = ABCD$. V rovnoběžníku AKFD jest však dle § 18. 6, $JH \parallel AB$, pročež věta naše potvrzena.

5. *Narejsují-li se v lichoběžníku obě úhlopříčny, vzniknou čtyry trojúhelníky, z nichžto mají ony dva, jež přiléhají k různoběžným stranám, stejné ploské obsahy.*

Důkaz. Dokáže se, že jest $\triangle ABD = \triangle ABC$ (obrazec 155.) a odejme se od toho $\triangle AOB$.

6. *V každém pravoúhelném trojúhelníku rovná se čtverec na přeponě oběma čtvercům na odvěsnách.* (Věta pythagorská.)

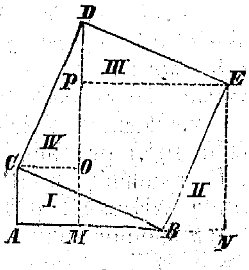
Důkaz. Poznamená-li se pro krátkost čtverec na přeponě $\square BC$ (obr. 156.) a podobným spůsobem čtverce na odvěsnách $\square AC$, $\square AB$; má být $\square BC = \square AB + \triangle AC$. Spustí se s vrcholu pravého úhlu kolmice na přeponu, t. j. udělá se $AS \parallel CD$, a dokáže se nejprvé, že obdélník $RCDS = \square AC$, a potom že $RBES = \square AC$. K tomu cíli veď přímky CF a AE, i bude $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ ($BF = BA$, $BC = BE$, $\sphericalangle CBF = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC + 90^0$); a poněvadž jest $\triangle ABE = {}^1/_2 RBES$ (§ 42. 1), $\triangle CBF = {}^1/_2 ABEJ$, bude také ${}^1/_2 RBES = {}^1/_2 ABFJ$, t. j. obdélník $RBES = \square AB \ldots I$.



Obr. 156.

Z podobných příčin jest $\triangle$ CBK $\cong$ $\triangle$ ACD; a jelikož $\triangle$CBK $= \frac{1}{2}$KCAH a $\triangle$ACD $= \frac{1}{2}$RCDS, bude zase $\frac{1}{2}$RCDS $= \frac{1}{2}$KCAH, t. j. obdélník RCDS $= \square$ AC .... II. Sečtením rovnic I. a II. obdržíme RBES + RCDS $= \square$ AB + $\square$ AC, nebo $\square$ BC $= \square$ AB + $\square$ AC.

Dodatek. Zde byla věta pythagorská dokázána na základě rovnosti obrazců; v § 34. 4, dodat. přišlo se k témuž výsledku na základě podobnosti trojúhelníků a v § 34. 3, dodat. na základě nauky o kruhu. Také ale ze shodnosti trojúhelníků dá se věta tato dokázati, a sice následovně: Sestroj na přeponě pravoúhelného trojúhelníka ABC čtverec (obr. 157.) a spusť s rohů D a E kolmice na AB a rovněž tak i CO ‖ EP ‖ AB. Tím vzniknou čtyry shodné trojúhelníky ABC, BNE, EPD, DCO (mají vždy jednu stranu a přilehlé k ní úhly vespolek sobě rovny), z nichžto plyne, že AC = CO, a AB = EN = EP; jest tudy ACOM čtvercem na odvěsně AC a MNEP čtvercem odvěsny AB, následovně plocha ANEPOC $= \square$ AC + $\square$ AB. Jestliže nyní z této šestistrané plochy odřízneme trojúhelníky I. a II. a přiložíme je k ní zase nahoře tak, aby se jimi pokryly prostory trojúhelníků II. a III., zůstane velikosť její nezměněna, jenom že obdrží jiný tvar a sice objeví se plocha ta v podobě čtverce BCDE; pročež bude $\square$ BC $= \square$ AC + $\square$ AB.

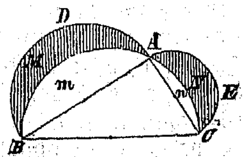


Obr. 157.

Opak pythagorské věty byl již dokázán v § 34. 4, dodatek 2.

7. *Sestavíme-li nad stranami pravoúhelného trojúhelníka jakékoliv obrazce sobě podobné* (tedy ne zrovna vždycky čtverce), *rovná se vždycky plošký obsah obrazce na přeponě součtu plošných obsahů druhých dvou obrazců.*

Důkaz. Pojmenujme pro krátkosť obrazec na přeponě narejsovaný p, a podobné mu obrazce na odvěsnách p' a p'', tak že bude $p:p':p'' = \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$, (obr. 158.); že ale jest také $\square$ BC : $\square$ AB : $\square$ AC $= \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$, musí být též $p:p':p'' = \square$ BC : $\square$ AB : $\square$ AC. Ze srovnalosti $p':p'' = \square$ AB : $\square$ AC obdržíme ale $(p'+p''):p' = (\square$ AB + $\square$ AC$) : \square$ AB, nebo vzhledem k odstavci (6), $(p'+p''):p' = \square$ BC : $\square$ AB; že ale jest dle hořejší srovnalosti $\square$BC : $\square$ AB $= p:p'$, bude také $(p'+p''):p' = p:p'$, a z toho $p' + p'' = p$.

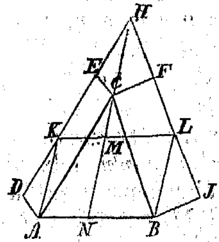


Obr. 158.

Dodatek. K zajímavému výsledku přijdeme, když na základě této věty plochy kruhové porovnáme; musí být totiž půlkruh nad přeponou narejsovaný tak velký, jako oba půlkruhy nad odvěsnami dohromady. Odečteme-li nyní úseky velkého kruhu m

a n od půlkruhů na odvěsnách, a nazveme vybylé výkružky ADB = M, ACE = N, bude $p = \triangle ABC + m + n$,
$p' = M + m$,
$p'' = N + n$, což když se dosadí do rovnice $p = p' + p''$, dá: $\triangle ABC + m + n = M + m + N + n$, nebo $\triangle ABC = M + N$, t. j. ploský obsah pravoúhelného trojúhelníka ABC rovná se součtu obou výkružců, jež také měsíčky Hypokratovými slovou*.

8. *Sestrojí-li se nad dvěma stranami nějakého trojúhelníka libovolné rovnoběžníky ACDE a BCFJ, a nad třetí stranou jiný rovnoběžník, jehož dva rohy K a L v stranách prvních dvou rovnoběžníků tak by ležely, aby byly jeho strany AK a AL rovnoběžny s přímkou, vrchol C s průsečníkem H spojující; bude ploský obsah posledního rovnoběžníka tak velký, jako oba první rovnoběžníky dohromady* ** (obr. 159).



Obr. 159.

Důkaz. Je-li AK ∥ BL ∥ HN, bude AK = HC = BL, následovně ABLK rovnoběžník, a sice takový, který má být rovným ADEC + BCFJ.

Jest totiž dle § 41. 3, dodat.
AKMN = AKHC = ADEC, a taktéž
BLMN = BLHC = BJFC, následovně

AKMN + BLMN = ADEC + BJFC, t. j. ABLK = ADEC + BJFC.

Poznámky. Zvláštní případ jest věta pythagorská; vezme-li se totiž trojúhelník pravoúhelný a narejsují se spůsobem tímto nikoliv nad libovolnými dvěma stranami, nýbrž nad odvěsnami čtverce, obdržíme větu pythagorskou.

Dodatky. Čtenář podej důkaz a provedení následujících vět: a) Vedou-li se rohy jakéhokoliv čtyrúhelníka rovnoběžky s jeho úhlopříčnami, vznikne rovnoběžník, jehož ploský obsah se rovná dvojnásobnému obsahu daného čtyrúhelníka (na záhladě § 42. 1, a § 17. 2). b) Spojíme-li v jakémkoliv čtyrúhelníku střední body stran přímkami, vznikne pokaždé rovnoběžník, jehož ploský obsah se rovná polovičce čtyrúhelníka daného (na základě § 18. 5,).

II. Vypočítávání ploských obsahů.

§ 43.

1. V § 41. 1, bylo již vysvětleno, že velikosť ploského obsahu určiti v tom záleží, počtem udati, kolikrát jest za míru vzatý čtverec v jisté ploše obsažen. Při skutečném vyměřování ploského obsahu měla by se dle toho čtvercová míra tolikrát na dané ploše

* Dle Hypokrata, původce této věty, který žil 450 před Kr.
** Věta Papusova, který žil ku konci 4. století před Kr.

vedle sebe položiti, kolikrát by to vůbec šlo; způsobu tohoto však, který by byl v každém ohledu nepohodlným a mnohdy snad i nemožným, neužívá se ve skutečnosti, poněvadž by se práce dosti přísně provésti nedala, a jelikož měřictví kratší cestou přichází k výsledkům mnohem dokonalejším. Měřictví udává totiž na základě svých vět návody, jak lze počtem ploský obsah určiti, když by toliko některé strany obrazce změřeny býti mohly.

2. *Ploský obsah obdélníka rovná se součinu z jeho základny a výšky.**)

Důkaz. Budiž P ploský obsah obdélníka, jehož základna jest z a výška v, a M budiž čtverec za míru přijatý, jehož základna jest m. I bude pak $\mathrm{P}:\mathrm{M} = zv:m.m$ (dle § 41. 5), to jest $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}} = \frac{z}{m} \cdot \frac{v}{m}$. Při tom udává poměrné číslo $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}$, kolikrát jest míra čtvercová v ploše daného obdélníka obsažena; poměry pak z/m a v/m udávají, kolikrát jest strana čtverce, t. j. míra délky obsažena v základně z a ve výšce v. Chtějíce tedy určiti číslo P/M, udávající velikosť ploského obsahu nějakého obdélníka, změřme jeho základnu i výšku a čísla změřením tímto nalezená spolu znásobme.

Může-li se na př. strana za míru vzatého čtverce pětkrát do délky a třikrát do výšky vnésti, t. j. je-li základna obdélníka 5, výška pak 3 (stopy, palce, sáhy ...), můžeme celý obdélník rozděliti ve 3 pásky, z nichžto každý 5 malých čtverců obsahovati bude. Plocha P bude tehdy $3 \times 5 = 15 \square m$ (a to buď $\square'$, $\square''$ ..., dle toho, znásobily-li se délkové stopy, palce ...).

Dodatek. Součin dvou čísel vyjádřuje proto vždycky plochu nějakého obdélníka, a za tou příčinou nazývá se mnohdy také součin dvou činitelů „plochou obdélníka“. — Když by byla dána naopak velikosť ploského obsahu (součin z výšky a základny) a mimo to ještě na př. délka, najde se šířka, když číslo vyjádřující plochu délkou odnásobíme, t. j. $v = \mathrm{P}/z$, a taktéž $z = \mathrm{P}/v$.

Pozn. Kdyby jeden z těchto rozměrů a nebo snad i oba vyjádřeny byly čísly vícejmenými, musí se oba činitelé uvésti na stejné pojmenování, kteréžto pojmenování napotom (v míře čtvercové ale) obdrží i součin.

3. Jelikož čtverec též obdélníkem jest, jehož základna se rovná výšce, bude nauka: *Ploský obsah čtverce rovná se druhé mocnině jeho strany.*

Odtud to přijde, že druhá mocnina čísel též „čtvercem“ se nazývá, a nebo že se mluví: „když přímku samu sebou znásobíme (t. j. číslo, délku její vyjádřující), povýšíme ji na čtverec.“

Dle této věty obdržíme nyní rozdělení míry čtvercové:

---

*) Číslu, které udává velikosť ploského obsahu, přikládá se pro krátkosť a pro vyrozumění jeho původu také jméno „ploský obsah“, nebo jen „plocha“ právě tak, jako číslo, délku přímky udávající, též jen krátce základna, výška a t. d. slove.

$1\square^0 = 6.6 = 36\square'$ (protože bychom obdrželi z jednoho čtvercového sáhu 6 pásků po 6 čtver. střev.),
$1\square' = 12.12 = 144\square''$,
$1\square'' = 12.12 = 144\square'''$ atd.

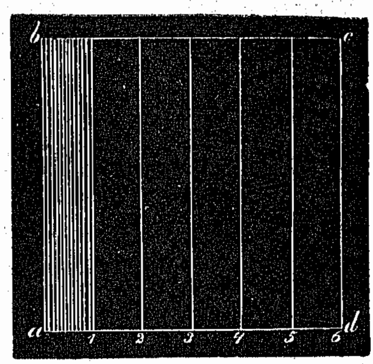
Podobně má 1 □ míle $4000^2 = 16000000\square^0$. — V rakouských zemích slove plocha $1600\square^0$ jítro (Joch), jehožto se nejvíce k změření pozemků užívá; jest to čtverec, jehož jedna strana 40^0 dlouhá jest.

V Německu měří se polnosti na pruty (Ruthe, tolik co sáh), a i tu má čtvercový prut $12^2 = 144\square'$. — Francouzové přijali za plochu jeden dekametr ve čtverci a nazvali ho are (čti „ar"), který se dle desetiné, u Francouzů obyčejné, soustavy rozděluje.

Dodatek. Naopak určí se strana čtverce, když by jeho plocha dána byla, jestliže se číslo plochu jeho vyjádřující oddvojmocní, t. j. *strana čtverce rovná se druhému kořenu z jeho ploského obsahu.*

Pozn. V životě obecném nerozděluje se čtvercový sáh vždycky dle tohoto dvanáctiného rozdělení; někdy se užívá desetiného, t. obyčejné sáhy, střevíce, atd. rozdělují se do 10 nižších jednotek, a tu pak je $1\square^0 = 10^2 = 100\square'$, $1\square' = 10^2 = 100''$ atd. — Že však jedno i druhé rozdělení uváděním na stejné pojmenování vede do počtů zlomkových anebo k velikým číslům, děje se skutečné vypočítávání ploch tak zvaným **sáhováním** (Toisiren), které v tom záleží, že se položí celému počtu za základ sáh.

Jeden čtver. sáh rozdělí se při tom do 6 stejných pásků, z nichžto každý 1^0 dlouhý a $1'$ široký jest a krátce **sáhový střevíc** slove (Klafterschuh, $1^{0'}$ dle obr. 160). Sáhový střevíc rozdělí se opět do 12 stejných pásků (sáhových palců, $1^{0''}$), z nichž zase každý 1^0 dlouhý a $1''$ široký jest. Podobným způsobem rozděluje se jeden sáhový palec do 12 sáhových čárek atd. Střevíce, palce a čárky tohoto druhu mají stejnou délku (1^0), tak že při nich toliko šířku počítati potřebujeme. Míra tato slove pro svou podobu též **míra pásková** (Riemenmaß), a poskytuje té výhody, že násobením vícejmených čísel obdržíme vždycky buď sáhy čtvercové a nebo obdélníky, které ač rozličně široké, předce vždycky sáh dlouhé jsou.



Obr. 160.

Když na př. délku $25^0 5' 9''$ šířkou 5^0 znásobiti chceme, obdržíme tři obrazce, z nichžto první $25 \times 5 = 125\square^0$, druhý je 5^0 dlouhý a $5'$ široký, což právě tolik jest jakobychom plochu 1^0 dlouhou a $5'$ širokou (5 sáhových střevíců) pětkrát vedle sebe postavili. Plocha tato má tudy $5 \times 5 = 25^{0'}$, což když na čtver. sáhy uvedeme (25 : 6), dá $4\square^0 + 1^{0'}$. Třetí obrazec byl by 5^0 dlouhý, jen ale $9''$ široký, což jednostejné jest s obrazcem $9''$ širokým a 1^0 dlouhým ($9^{0''}$) pětkráte vedle sebe postaveným. Má tedy obrazec tento $9 \times 5 = 45^{0''}$, což na sáhové střevíce uvedeno (45 : 12) dá $3^{0'} + 9^{0''}$. Součet všech tří obrazců jest proto $129\square^0 4^{0'} 9^{0''}$.*)

*) O skutečném počítání tohoto druhu, při němž se vlašské praktiky čili počtu rozkladného s prospěchem upotřebuje, viz v Joendlově poučení o stavitelství od Niklasa a Šandy „O rozpočtech". (V Praze, 1865 I. L. Kober.)

4. *Ploský obsah rovnoběžníka vůbec (tedy i kosodélníka) rovná se součinu z jeho základny a výšky,* protože jest dle § 41. 3, rovným obdélníku téže výšky a základny. (Sem náleží úlohy § 45, 1—7.)

5. *Ploský obsah každého trojúhelníka rovná se polovičnímu součinu z jeho základny a výšky.* V obr. 153. jest na př. $\triangle ABC = \frac{1}{2} CB . AD$, protože se $\triangle ABC$ rovná polovičce rovnoběžníka, jehož plocha $p = CB \times AD$.

Dodatek 1. Vzhledem k tomu, že v trojúhelníku výška početem určena býti může, když jest dána délka jeho stran (§ 37, 4, b), lze také i ploský obsah trojúhelníka určiti, když by byly dány jeho strany. Dosadíme-li totiž do vzorce $p = \frac{1}{2} zv$, jímžto se plocha trojúhelníka určuje, cenu za v z § 37. 4, b, bude $\triangle ABC =$

$$p = \frac{z}{2} . \frac{2}{z} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

při čemž s pro krátkost značí $\frac{a+b+c}{2}$.

Dodatek 2. Pro plochu trojúhelníka pravidelného obdržíme snadným výpočtem (pomocí pythagorské věty) vzorec $p = \frac{s^2}{4} \sqrt{3}$

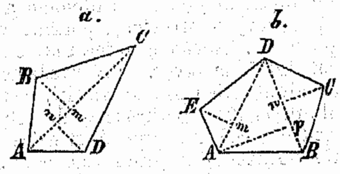
6. *Ploský obsah lichoběžníka rovná se součinu z jeho výšky a polovičního součtu obou rovnoběžných stran.*

Dle § 42. 4 jest v obr. 155. $ABCD = \triangle ADE = \frac{AE . DL}{2} =$

$$\frac{DL(AB + BE)}{2} = DL \left(\frac{AB + DC}{2} \right).$$

Pozn. Dle § 42, 4 jest také $ABCD = \triangle AED = AKFD$; poznamenáme-li tedy pro krátkost $AB = a$, $CD = b$, $JH = m = \frac{a+b}{2}$, $DL = v$, bude plocha lichoběžníka $p = mv$. Kdyby bylo $a = b$, proměnil by se lichoběžník v rovnoběžník, jehož plocha by byla, poněvadž jest $m = a$, $p = mv$. Kdyby ale bylo $b = 0$, proměnil by se lichoběžník v trojúhelník, jehož plocha by byla, poněvadž pak jest $m = \frac{a}{2}$, zase $p = \frac{1}{2} mv$.

Vzorec $p = mv$ platí tudy pro plochu lichoběžníka, trojúhelníka i rovnoběžníka a dává větu: *Ploský obsah lichoběžníka, trojúhelníka i rovnoběžníka rovná se součinu ze střední čáry a výšky.*



Obr. 161.

7. Vypočítávání všech ostatních obrazcův zakládá se na udání ploského obsahu trojúhelníků, rovno- a lichoběžníků; vhodnými přímkami rozloží se každý přímočarný obrazec v trojúhelníky nebo lichoběžníky, které se jednotlivě vypočísti dají. Součet pak všech takto nalezených trojúhelníků a lichoběžníků dá ploský obsah mnohoúhelníka. Tak na př. obdržíme ploský obsah různoběžníka ABCD (obr. 161.), když ho úhlopříčnou AC rozložíme ve dva trojúhelníky: $ABCD = \triangle ABC +$

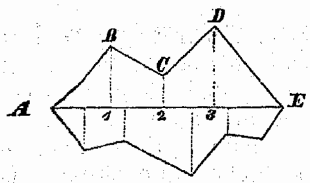
$\triangle ADC = \frac{AC.Bm}{2} + \frac{AC \times Dn}{2} = \frac{AC}{2}(Dn + Bm)$. O ploše čtyrúhelníka tětivového viz § 68. 7, b. (Sem náleží úlohy § 45. 8—19.)

8. *Má se určiti ploský obsah libovolného mnohoúhelníka.*

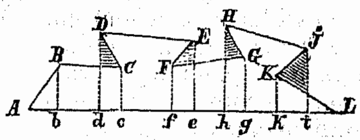
Způsob 1. Obrazec rozdělí se úhlopříčnami na samé trojúhelníky, které jednotlivě vypočísti potřebujeme. Při tom urychlí se práce, když se dá dvěma vedle sebe ležícím trojúhelníkům, kdykoliv se to vůbec učiniti nechá, společná základna, jelikož se tím měření uspoří. V obr. 161. jest na př. $ABCDE = \triangle AED + \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2}AD.Em + \frac{1}{2}BD.Ap + \frac{1}{2}BD.Cn$.

Způsob 2. V jistých případech určí se ploský obsah mnohoúhelníka pomocí souřadnic (Koordinat). Narejsuje se totiž pohodlná osa úseček (osa abscisová), zde na př. v obr. 162 úhlopříčna AE a spustí se na ni se všech rohů kolmice. Vypočte-li se nato plocha každého takto vzniklého lichoběžníka a krajních trojúhelníků, dá jejich součet ploský obsah celého mnohoúhelníka.

Ve zvláštních případech nemohou však lichoběžníky tyto prostě sčítány býti, jelikož některé z nich od celého součtu odečtěny



Obr. 162.



Obr. 163.

býti musí. Byl-li by dán na př. ABC . . . KL (obr. 163), musí se dáti do součtu nejprvé lichoběžník *DCdc* se záporným znaménkem, poněvadž vyčárkovaná jeho část, která bez toho ještě v lichoběžníku *DEde* počítána bude, k ploše vlastně ani nenáleží, a dolejší jeho část, ačkoliv již v lichoběžníku BC*bc* obsažena jest, ještě jednou do počtu dána bude, v lichoběžníku totiž *DEde*, tak že se i s vyčárkovanou částí záporně vzíti musí, nemá-li jinak dvakrát do součtu uvedena býti. Musí se tudy celý lichoběžník *CDcd*, a podobně i *FEfe*, *HGhg* a *KIki* záporně do součtu dáti. — Na první pohled poznati lze, že se pouze takové lichoběžníky od celku odejmouti musí, jichžto jedna strana ramenem jest úhlu do vnitř vbíhajícího.

9. *Ploský obsah mnohoúhelníka pravidelného rovná se součinu z polovičného jeho obvodu a z poloměru vepsaného kruhu.*

Důkaz. Přímkami totiž vedenými ze středu k rohům pravid. mnohoúhelníka rozpadne se celý obrazec v samé shodné, rovnoramenné trojúhelníky, z nichž každý má za základnu stranu prav. mnohoúhelníka a za výšku poloměr vepsaného kruhu; pročež bude zapotřebí jen jeden takovýto trojúhelník vypočísti a n-krát ho vzíti. V obr. 52. jest na př. $ABCDEF = 6 \times \frac{AB \,.\, Om}{2} = \frac{O}{2} \,.\, Om$ (když jest $6AB = O$), a vůbec bude $P = \frac{O}{2} r$. Jaké vzorce obdržíme pro ploské obsahy pravid. mnohoúhelníků, když by byla dána toliko jedna strana?

$P_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$P_4 = a^2$

$P_5 = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 1{\cdot}720477 a^2$

$P_6 = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$

$P_8 = 2a^2(1 + \sqrt{2})$

$P_{10} = \frac{5a^2}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$

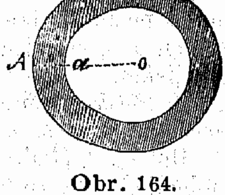
10. *Ploský obsah kruhu rovná se buď polovičnímu součinu z jeho obvodu a poloměru, nebo součinu z druhé mocniny jeho poloměru a Ludolfského čísla.*

Důkaz. a) Kruh lze považovati, jak již vícekráte podotknuto, a pravidelný mnohoúhelník s nesčíslným počtem stran, tak že ho také ze středu vedenými přímkami na samé shodné rovnoramenné trojúhelníky rozložiti můžeme (na př. v obr. 145). Základny těchto trojúhelníků musí ale tak malé býti, bychom je mohli přijmouti za přímky; výška pak každého takovéhoto trojúhelníka jest rovna poloměru kruhu, tak že bude jeden takovýto trojúhelník $p = \frac{z}{2} . r$, následovně celá plocha kruhu $K = \frac{nz \,.\, r}{2} = \frac{O}{2} \times r$.

b) Dosadíme-li do tohoto vzorce za obvod O známou hodnotu $2\pi r$, bude ploský obsah kruhu také ještě $K = 2\pi r \times \frac{r}{2} = r^2\pi$.

Dodatek. Dána-li naopak plocha kruhu a má se určiti jeho poloměr, musí se dříve číslo, plochu kruhovou vyjádřující, Ludolfským číslem odnásobiti a z podílu toho pak druhý kořen vzíti, t. j. $r = \sqrt{\frac{K}{\pi}}$.

Jak se najde plocha kruhu, dán-li jeho obvod?



Obr. 164.

11. *Ploský obsah mezikruží čili věnec vypočte se, když se plocha malého kruhu odečte od plochy velkého kruhu.* Jsou-li totiž r a r_1 poloměry obou kruhů (obr. 164), bude $P = r^2\pi - r_1{}^2\pi = \pi(r^2 - r_1{}^2)$. Když ale uvážíme, že $r^2 - r_1{}^2 = (r + r_1)$

$(r-r_1)$ a poznamenáme pro krátkost rozdíl $r-r_1=\check{s}$, bude také $P=\pi(r+r_1)\check{s}=\frac{2\pi r+2r_1\pi}{2}\times\check{s}$, t. j. *mezikruží rovná se také součinu z polovičního součtu obou obvodů a své šířky.**)

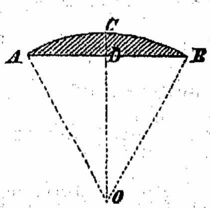
12. *Ploský obsah kruhového výseku rovná se polovičce součinu z jeho oblouku a poloměru.*

Důkaz. Dle § 39. 2, dodat. 1, má se oblouk nějaké výseče k obvodu celého kruhu, jako jeho úhel středový k 4R; z toho plyne, že ploský obsah výseku jest v témž poměru k celému kruhu, jako příslušný oblouk k celému obvodu, t. j. obr. 145. ABC:K $=n:360^0=$ arc.AB$:2r\pi$. Dosadíme-li tudy za K známou již hodnotu $r^2\pi$, bude ABC$:r^2\pi=n:360$, a z toho výsek ABC $=\frac{r^2\pi n}{360}$ (když jest totiž dán úhel středový); nebo z druhé srovnalosti ABC$:r^2\pi$ $=$ arc.AB$:2\pi r$, ABC $=\frac{\text{arc.AB}.r^2\pi}{2r\pi}=$ arc.AB $\times\frac{r}{2}$ (když jest dán oblouk).

Dodatek. Určí-li se spůsobem tímto ploský obsah kruhového výseku AEBO (obr. 138.) i trojúhelníka COD, v němžto jest CD tečnou kruhu; bude $\triangle$COD $=$ CD$.\frac{\text{OE}}{2}$, výsek AEBO $=$ arc. AEB $+\frac{\text{OE}}{2}$. Že ale jest $\triangle$COD $>$ výs. AEBO, bude také CD $\times\frac{\text{OE}}{2}>$ arc.AEB $\times\frac{\text{OE}}{2}$, a z toho CD $>$ arc.AEB, nebo $\frac{\text{CD}}{2}>$ arc. $\frac{\text{AEB}}{2}$, t. j. CE $>$ arc.AE, což se obyčejně vyslovuje: tečna jest vždycky větší nežli oblouk k ní přináležející. (Srovnej s tím § 38. 10.)

13. *Ploský obsah kruhového úseku určí se, když se nejprvé ustanoví plocha celého výseku a od toho odečte ploský obsah tětivou a oběma poloměry zavřeného trojúhelníka.*

V obr. 165. rovná se na př. plocha úseku ACB $=$ ACBO $-\triangle$ABO; při tom musí být dána délka oblouku (nebo jeho středový úhel) a poloměr kruhu. Když by byla dána pouze tětiva AB a výška CD, určí se poloměr následovně: budiž pro krátkost výška CD $=v$, světlost AB $=s$, a poloměr AO $=r$, tak že jest AD $=s/_2$, DO $=r-v$. V trojúhelníku AOD jest pak $\overline{\text{AO}}^2=\overline{\text{AD}}^2+\overline{\text{DO}}^2$, t. j. $r^2=\frac{s^2}{4}+(r-v)^2=\frac{s^2}{4}+r^2-2rv+v^2$, nebo $v^2-2rv+\frac{s^2}{4}=0$, a z toho $r=\frac{4v^2+s^2}{8v}=\frac{s^2}{8v}+\frac{v}{2}$.

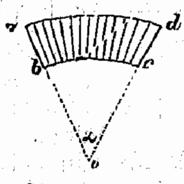


Obr. 165.

*) Podobně jako lichoběžník.

14. *Ploský obsah věncového výseku rovná se součinu z polovičního součtu obou oblouků a jeho výšky.*

V obr. 166. jest $abcd =$ výs. aod — výs. $boc = \frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{r_1{}^2\pi\alpha}{360}$ (při čemž značí $r = bO$), nebo abcd $= \frac{\pi\alpha}{360}(r^2 - r_1{}^2) = \frac{\pi\alpha}{360}(r + r_1)(r - r_1)$. Nazveme-li rozdíl $r - r_1 = ao - bo = ab$ výškou výseku (ν), bude $abcd = \frac{\pi\alpha}{360}(r + r_1)\nu = \nu\left(\frac{r\pi\alpha}{360} + \frac{r_1\pi\alpha}{360}\right) = \nu\left(\frac{\text{arc}.\,ad}{2} + \frac{\text{arc}.\,bc}{2}\right)$.



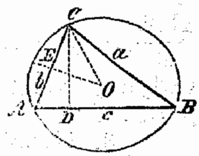
Obr. 166.

Dodatek. Ploské obsahy všech ostatních přímočarných nebo kruhovými oblouky omezených obrazců, jež snad dosud uvedeny nebyly, určují se tím, že si je rozložíme na částky, které by se dle pravidel dosud uvedených vypočísti mohly, jak to na některých příkladech později ukázáno bude (§ 45. 20—34).

§ 44.

1. *Poloměr trojúhelníku opsaného kruhu rovná se součinu stran lomenému čtyrnásobnou plochou.*

Dán-li trojúhelník ABC (obr. 167.), jehož strany a, b, c taktéž známé jsou, obepíše se kruh dle § 15. 7, jehož poloměr CO $= r$; spusť CD⊥AB, tak že bude $\triangle ABC = p = AB.\frac{CD}{2} = \frac{c \times \nu}{2}$ .. 1), z kteréžto rovnice jen ν vyloučiti třeba. K tomu cíli spusť OE⊥AC, načež bude $\triangle BCD \sim \triangle OCE$ ($\sphericalangle D = E = R$, $\sphericalangle B = \sphericalangle O = \frac{1}{2}$ arc. AC); jest tudy CD : BC = CE : CO, nebo $\nu : a = b/_2 : r$, a z toho $r = \frac{ab}{2\nu}$. Dosadíme-li do této rovnice hořejší cenu za ν z rovnice 1), totiž $\nu = \frac{2p}{c}$, bude $r = \frac{a.b.c}{4p}$.

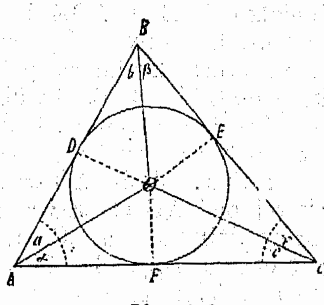


Obr. 167.

Pozn. Jiný důkaz této nauky jest následující: v obr. 136. jest, když narejsujeme průměr BD a spojíme bod D s A, $\triangle ABD \sim \triangle BCE$; bude tedy AB : BD = BE : BC, a z toho AB . BC = BD . BE, t. j. $a.c = 2r.\nu$. Znásobí-li se rovnice tato AC $= b$, bude $a.b.c = 2r.\nu.b$, a poněvadž jest $\nu.b = 2p$, můžeme také psáti $a.b.c = 2r.2p$, a z toho konečně $r = \frac{a.b.c}{4p}$.

2. *Poloměr v trojúhelník vepsaného kruhu rovná se dvojnásobné ploše trojúhelníka dělené jeho obvodem.*

Důkaz. Budiž do trojúhelníka ABC (obr. 168.) narejsován kruh dle § 15. 8, tak že bude $OD = OE = OF = r'$. Nyní jest $\triangle AOC = AC \cdot \frac{r'}{2}$, $\triangle AOB = \frac{AB \cdot r'}{2}$, $\triangle BOC = \frac{BC \cdot r'}{2}$, kteréžto rovnice když se sečtou, dají $\triangle AOC + \triangle AOB + \triangle BOC = \frac{r'}{2}(AC + AB + BC)$, nebo, jestliže plochu i strany trojúhelníka opět jen jedním písmenem poznamenáme, $r' = \frac{2p}{a+b+c}$.

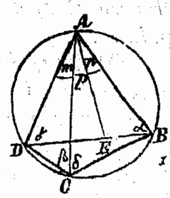


Obr. 168.

3. *V každém do kruhu vepsaném čtyrúhelníku rovná se součet obdélníků sestavených z protilehlých stran obdélníku z obou úhlopříčen* (věta Ptolemeova).

V čtyrúhelníku ABCD (obr. 169.) má být $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

Důkaz. Přiloží-li se $\sphericalangle m$ k straně AB, tak aby byl $\sphericalangle m = \sphericalangle n$, bude, jelikož také jest $\sphericalangle \alpha = \beta$, trojúhelník $ACD \sim \triangle ABE$, následovně $BE : AB = CD : AC$, a z toho $AC \cdot BE = AB \cdot CD$ . . 1). Poněvadž jest ale také $\sphericalangle m + p = \sphericalangle n + p$, t. j. $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB$ a $\sphericalangle \gamma = \delta$; musí být také $\triangle DAE \sim \triangle ABC$, následovně $DE : DA = BC : AC$, a z toho $AC \cdot DE = BC \cdot DA$ . . . . 2). Sečtením obou dvou rovnic 1) a 2) obdržíme $AC(BE + DE) = AB \cdot CD + BC \cdot DA$, t. j. $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$.



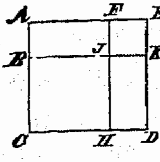
Obr. 169.

Naopak: *Rovná-li se v čtyrúhelníku součet obdélníků z protilehlých stran obdélníku z obou úhlopříčen; leží rohy čtyrúhelníka v obvodu kruhu.*

Důkaz. Dán-li čtyrúhelník ABCD (obr. 169.), v němžto jest $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$, přilož opět $\sphericalangle m$ k straně AB tak, aby byl $\sphericalangle m = n$, a sřízni rameno AE tak, aby činilo čtvrtou srovnalostnou k AC, AD, AB, t. j. aby bylo $AC : AD = AB : AE$; konečně spoj bod E s rohy D a B. Vzhledem k tomuto ke všemu musí být $\triangle ADC \sim \triangle ABE$; když pak v poslední srovnalosti přemístíme vnitřní členy, bude $AC : AB = AD : AE$ a že také ještě jest $\sphericalangle m + p = n + p$, musí býti též i $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Následovně bude 1) $AB : BE = AC : DC$, 2) $AD : DE = AC : BC$, a z toho α) $AC \cdot BE = AB \cdot CD$, β) $AC \cdot DE = AD \cdot BC$. Dosazením těchto cen do rovnice v předpokladu vznikne $AC \cdot BE + AC \cdot DE = AC \cdot BD$, což když se zkrátí číslem AC, dá $BE + DE = BD$. Z této rovnice nutně plyne, že bod E musí ležeti v přímce BD; jest tudy úhel ABE jednostejný s úhlem ABD a poněvadž následkem podobnosti trojúhelníků ABE a ADE i $\sphericalangle$ ABE $=$ $\sphericalangle$ ACD, musí také i $\sphericalangle$ ABD $=$ $\sphericalangle$ ACD. Úhly tyto, ač mají vrcholy rozličné, stojí dle § 27. 1, a, v témž kruhu na společném oblouku AD; pročež leží všechny čtyry body A, B, C, D v obvodu kruhu.

4. *Čtverec sestavený ze součtu dvou přímek rovná se součtu z obou čtverců daných přímek a dvojnásobnému obdélníku těchto přímek.*

Důkaz. Je-li AC $=$ AB $+$ BC (obr. 170.), sestroj nad AC čtverec a přenes i na ostatní jeho strany délky AB a BC, t. j. smízni BC $=$ CH, a veď oběma body B a H rovnoběžky ku stranám čtverce. Tím rozpadne se čtverec ACED ve čtyry menší obrazce, z nichžto jest BCHJ $= \overline{BC}^2$, JFEK $= \overline{AB}^2$ (protože jest FE $=$ EK $=$ AB), ABJF $=$ AF.AB $=$ AB.BC, a konečně KDHJ $=$ KD.DH $=$ BC.AB; následovně jest $\overline{AC}^2 = (AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + 2AB \cdot BC + \overline{CB}^2$.

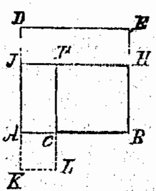


Obr. 170.

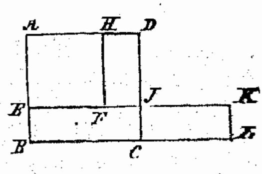
Pozn. Věta tato jest měřický výraz algebraického vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

5. *Čtverec sestavený z rozdílu dvou přímek rovná se součtu z obou čtverců daných přímek zmenšenému o dvojnásobný obdélník z daných přímek.*

Důkaz. Je-li BC $=$ AC $-$ AB (obr. 171.), sestroj opět nad AB čtverec a přidej k němu na AC postavený čtverec AKLC. Oba tyto čtverce tvoří dohromady šestihraný obrazec DKLCBE, v němžto, když se odřízne BC $=$ BH a vedou body H a C rovnoběžky ku stranám čtverce ABDE, bude EH $=$ DJ $=$ AC, a BH $=$ JA $=$ BC. Tím však vznikl nový čtverec BCFH $= \overline{BC}^2$ a dva obdélníky, DJHE $=$ DE.EH $=$ AB.AC, a JKLF $=$ JK.KL $=$ AB.AC. Odečtou-li se nyní od celého obrazce oba tyto obdélníky, které mají stejné ploské obsahy, bude $\overline{BC}^2 = (AB - AC)^2 =$ ABED $+$ ACKL $-$ (DEHJ $+$ JFLK), t. j. $\overline{BC}^2 = (AB - AC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot AB \cdot AC$.



Obr. 171.



Obr. 172.

Pozn. Věta tato jest měř. výraz algebraického vzorce $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

6. *Rozdíl čtverců, sestavených z dvou rozličných přímek, rovná se obdélníku sestavenému ze součtu a rozdílu těchto přímek.*

Buďtež AB a AE dané přímky (obr. 172), a ABCD, AEFH jejich čtverce; rozdíl těchto čtverců jest šestistraný obrazec

EBCDHF, který sestává (když se prodlouží EF až ku J) z obdélníků EBCJ a FHDJ. Oba tyto obdélníky mají stejnou výšku $EB = HD = AB - AE$ a dají tudy dle § 42. 2, jediný obdélník téže výšky, jehož základna se rovná součtu jejich základen, t. j. uděláme-li $JK = JD$, bude $EBLK = EBCJ + JFHD$. Pročež jest $EBLK = \overline{AB}^2 - \overline{AE}^2 = BL.BE = (BC + CL)(AB - AE) = (AB + AE)(AB - AE)$.

Pozn. Věta tato jest měřický výraz algebraického vzorce $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Shoda pak těchto tří vět s algebraickými vzorci zakládá se na větě § 43. 1 a jejím dodatku a důkaz mohl se tedy snadno provésti odvoláním se k nadzmíněnému dodatku, tak že by se dotyčným algebraickým vzorcům jen patřičný význam měřický podložiti potřeboval. Sluší však na tomto místě obraznému provedení přednost dáti, dílem k vůli větší názornosti a dílem i proto, aby měřictví jeho samostatnost a neodvislost zachována byla.

Úlohy k vypočítávání ploch.

§ 45.

1. Jakou plochu má čtverec a) když jest jeho strana dlouhá $4^0 5' 8''$, b) když jest jeho úhlopříčna dlouhá $2^0 4' 6''$?

2. Plocha čtverce jest jedno jítro; jak dlouhá bude a) jeho strana, b) jeho úhlopříčna?

3. Jak velká bude strana čtverce, který se rovná svým obsahem a) součtu, b) rozdílu dvou jiných čtverců, jichžto strany jsou $8^0 3' 4''$ a $2^0 5'$?

4. Mnoho-li váží čtvercová, $1^3/_4{}'$ dlouhá tabule plechu, když 1□' váží $1^1/_2$ lib., b) mnoho-li korců výsevku má pole $62^0 5'$ dlouhé a $18^0 4^1/_2{}'$ široké?

5. Sál $9^0 4'$ dlouhý a $6^0 3'$ široký má dostati podlahu; kolik by bylo potřeba a) prken 3^0 dlouhých a $14''$ širokých, b) kolik parket $21''$ do čtverce? c) mnoho-li vosku bylo by k vyvoskování téhož sálu potřeba, když se na 1□° počítá $1^1/_2$ lotu?

6. K vydláždění $11^0 2'$ dlouhé a $1^0 2'$ široké chodby mohou se vzíti buď $10''$ dlouhé a $8''$ široké dlaždice a nebo obyčejné cihly (1' do délky a $6''$ do šířky); mnoho-li bude k tomu kterých zapotřebí?

7. Zahrada mající podobu obdélníka má být posázena stromky; kolik sazenic bude k tomu třeba, když jedna od druhé 10' vzdálena býti má, a zahrada 12^0 široká a $17^0 5'$ dlouhá jest? (Plocha čtverce pro jednu sazenici jest $10^2 = 100$□', velikosť zahrady 7704□', následovně bude třeba 77 sazenic.)

8. Jak velká jest a) odvěsna, b) přepona pravoúhelného trojúhelníka, jehož plocha $p = 21{\cdot}24$□° a jehož druhá odvěsna $7^0 2'$ dlouhá jest?

9. Jakou plochu má trojúhelník, jehož základna z výška v jest a) $z = 20^0 4'$, $v = 3^0 2' 8''$; b) $z = 15{\cdot}25$, $v = 8{\cdot}05$?

10. Urči se plocha prav. trojúhelníka, měří-li jeho strana a) n, b) $3{\cdot}5''$; c) měří-li jeho výška v, d) $4^1/_4{}''$; e) dán-li poloměr vepsaného, f) poloměr opsaného kruhu.

11. Urči se strana pravidelného trojúhelníka, jehož plocha jest a) n□°, b) 209□°88□'; c) jehož výška jest $6''$.

12. Základna rovnoramenného trojúhelníka buď z a jedna ze stejných stran a; jaká bude jeho plocha?

13. Urči se α) výška, β) plocha trojúhelníka, jsou-li jeho strany a) $10''$, $20''$, $25''$; b) $16''$, $30''$, $38''$; c) 0·2, 0·3, 0·4″.

14. Urči se strany a plocha trojúhelníka, když jsou dány: jedna jeho strana a, součet druhých dvou stran a poloměr vepsaného kruhu.

15. a) V pravoúhelném trojúhelníku měří jedna odvěsna $17^0 2'$ a kolmice z vrcholu pravého úhlu na přeponu spuštěná 8^0; jak velké jsou ostatní strany téhož trojúhelníka, a jaká bude jeho plocha?

15. b) Strany trojúhelníka jsou a, b, c, a na c leží bod; má se tímto bodem vésti přímka tak, aby se odřízl z daného trojúhelníka kus, který by byl s trojúhelníkem v poměru $m:n$. — Provedení dle § 55, 1, e) a odříznutý kus strany a rovná se $x = \frac{n.c.a}{d.m}$, jestliže poznačíme daný kus na straně c písmenem d. Buď $a = 10''$, $b = 1'8''$, $c = 2'$ vzdálenost daného bodu od rohu t. j. $d = 5''$, a průměr $m:n = \frac{1}{3}$, jaké bude x?

15. c) Dány jsou opět strany trojúhelníka $a = 3''$, $b = 4''$, $c = 5''$, z tohoto trojúhelníka má se odříznouti polovička tak, aby dělící přímka byla s c rovnoběžna.

15. d) Plocha rovnoramenného trojúhelníka má se určiti z obou jeho výšek.

16. Přímka 132'' dlouhá rozdělí se ve tři částky dle poměru 3:4:5, kteréžto částky se v dělících bodech ohnou, ažby uzavřely trojúhelník; a) jaká bude jeho plocha; b) jak velký bude poloměr kruhu opsaného, c) kruhu vepsaného?

17. Jak velkou plochu bude míti lichoběžník, který vznikne, když tři rovnostrané trojúhelníky k sobě seřadíme a jedna strana trojúhelníka jest a?

18. Odměř pomocí setinného měřítka a vypočti plochy obrazců 171 a 172.

19. Jakou plochu má lichoběžník, jehož rovnoběžné strany jsou a a b a nerovnoběžné strany c a d? (na základě § 18. 1 a 46. 4—5). Vypočti úlohu tu pro $a = 57$, $b = 36$, $c = 25$, $d = 40$.

20. Jakou plochu má kruh, jehož obvod měří a) $7\frac{1}{4}'$, b) jehož obvod rovná se obvodu čtverce, v němžto měří úhlopříčna $3\frac{1}{2}'$.

21. V zahradě 28°2' dlouhé a 19°3' široké nachází se rybník v podobě kruhu, jehož poloměr jest 5°4'; mnoho-li jest v zahradě suché půdy?

22. Jakou plochu má kruh, v němžto jest vepsán obdélník 8'' dlouhý a 5'' široký.

23. V kruhu, jehož poloměr $r = 3'$, určí se a) výsek 30°, b) úsek, jehož výška jest 10''.

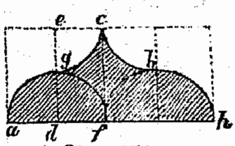
24. Obvody dvou soustředných kruhů jsou $13\frac{1}{2}'$ a $16'$; a) jakou plochu zavírají oba kruhy spolu, b) jakou plochu má výsek tohoto věnce, jehož menší oblouk 4' dlouhý jest?

25. Jakou plochu má úsek kruhu, a) jehož tětiva jest $= s$, výška $= v$, a jehož oblouk má délku b? b) když se jeho tětiva rovná poloměru a oblouk jest opět b?

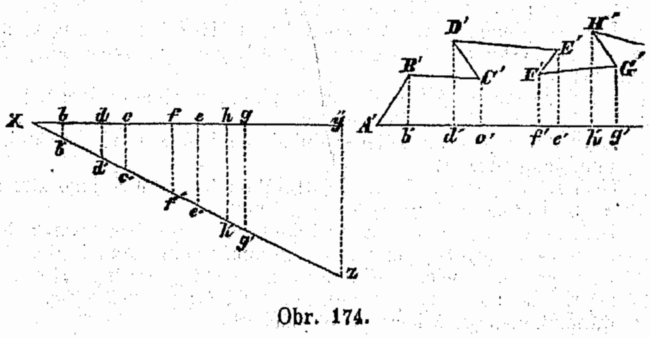
26. Jakou plochu má vyčárkovaný obrazec 173., jehož délka $ah = 8'$, a $eg = dg$?

26. Jakou plochu má a) prav. pětiúhelník, b) pravid. desítiúhelník, když strana obrazce vždycky 1 palec dlouhá jest?

27. Jakou plochu má a) do kruhu vepsaný čtverec, b) kruhu obepsaný čtverec, když poloměr kruhu 3'' ob-



Obr. 173.



Obr. 174.

náší; c) jakou plochu bude mít čtverec, jehož rohy leží v středních bodech do kruhu vepsaného čtverce.

29. Vypočtou se ploské obsahy a) do kruhu vepsaného prav. trojúhelníka, šesti-, dvanáctiúhelníka, b) témuž kruhu opsaných podobných obrazců; určí se poměr opsaného a obepsaného trojúhelníka, a taktéž poměr vepsaných a obepsaných čtyr-, šesti-, a osmiúhelníků, když jest poloměr kruhu 1''.

30. Jaké plochy mají měsíčky v obr. 158, je-li AB = 4'', BC = 3''?

31. Narejsuje se obrazec podobný obrazci 163, který by měl plochu a) o třetinu větší, b) dvakrát, čtyřykrát ... tak velkou. (V obrazci 174. jest provedení úlohy první.)

32. Narejsuje se a) čtverec, jehož plocha stojí s plochou jiného čtverce, jehožto strana $s = 3''$, v poměru $\sqrt{2} : 5$; b) čtverec, který má tak velkou plochu, jako kruh, jehož poloměr $r = \sqrt{11}$.

33. O mnoho-li jest kopie větší nežli original, když se mají strany originalu ku stranám kopie, jako 2 : 3?

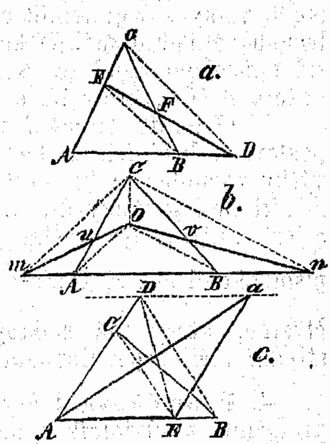
34. Jak velká musí být plocha prav. osmiúhelníka, jehož ploský obsah rovná se třetině jiného prav. osmiúhelníka, jehož strana jest S?

III. Proměny a dělení obrazců.

§ 46.

1. Skutečné vypočítávání ploských obsahů stává se tím obtížnější, čím nepravidelněji jest obrazec omezen; bývá proto mnohdy prospěšno a usnadňuje výpočet, když se mnohostranné omezení obrazce bez proměny velikosti jeho ploského obsahu zjednoduší. Podle zásady, že se touto proměnou obrazci na některém místě tolik přidati musí, kolik z něj na jiném místě odpadlo, záleží proměna obrazců v tom, že se má sestrojiti obrazec nový, který by měl s obrazcem daným plochu stejně velkou a při tom ještě i některým zvláštním výminkám zadost činil.

2. **Proměňování trojúhelníka.** a) Má-li se daný trojúhelník proměnit v jiný trojúhelník téže výšky, který by byl na př. rovnoramený, a nebo který by měl na základně jeden úhel předepsané velikosti; vede se vrcholem *d* (obr. 152.) rovnoběžka ku základně *ab*. Rovnoramený trojúhelník *aeb* obdržíme pomocí kolmice u prostřed základny postavené; taktéž se může v některém kraji základny jakýkoliv úhel narejsovat a rameno jeho prodloužit, ažby rovnoběžku MN proseklo. Tím vzniknou trojúhelníky rozličné podoby a dle § 42, 1, b) stejné velikosti.



Obr. 175.

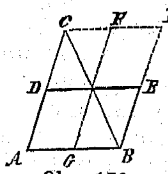
b) *Nový trojúhelník má míti buď jinou základnu, buď jinou výšku.* — Budiž na př. ABC daný trojúhelník (obr. 175, a) a AD žádaná nová základna; spoj bod D s vrcholem C a narejsuj BE || CD, i bude potom žádaný trojúhelník AED = △ ABC. Neboť jest vynechaná část ECF rovnou přidané částce BFD (§ 42, 5). Sestrojení trojúhelníka o jiné výšce provede se na základě této a předešlé nauky.

c) *Vrchol nového trojúhelníka má ležeti buď uvnitř daného trojúhelníka, na př. v bodu O, a nebo mimo trojúhelník v bodu a.*

V obou těchto případech změní trojúhelník svou základnu i výšku zároveň, a provedení bude následující: V případu prvém (obr. 175. b) spojí se daný bod o s krajními body základny a vedou se s vrcholu C rovnoběžky k oA i oB, ažby základnu v bodech m a n prosekly. Jest pak △ ABC = △ mno, protože jest na jedné straně přidaná část muA = △uCo, a na druhé △Bnv = △ Cov (§ 42. 5). V případě druhém vede se daným bodem a (obr. 175. c) rovnoběžka k základně a některá strana daného trojúhelníka (na př. AC) prodlouží se, až by ji prosekla (v D). Spojí-li se nyní bod D s B a vede CE || BD, bude AEa žádaný trojúhelník. Jest totiž △ AEa = △ ADE = △ ACB (dle b).

d) Počtem též lze daný trojúhelník v jakýkoliv jiný, třeba i v pravidelný trojúhelník proměniti; když totiž poloviční součin z dané základny a výšky novou základnou (nebo výškou) odnásobíme, obdržíme polovičku nové výšky (nebo základny). Stranu trojúhelníka pravidelného na př. obdržíme, když z rovnice $\frac{1}{2}vz = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$ neznámou stranu s určíme (§ 43. 5. dodat.).

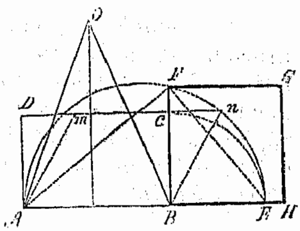
3. **Proměňování trojúhelníka v čtyrúhelník.** Aby se udělal z trojúhelníka rovnoběžník vůbec, rozpůlí se jedna jeho strana, na př. AC (obr. 176.) v bodu D, vede se odtud rovnoběžka k některé celé straně, na př. DE || AB a taktéž BE || AC. Rovnoběžník ABED jest pak stejně velký s trojúhelníkem ABC, s nímžto i společnou základnu má. Důkaz podej čtenář. — Tímtéž spůsobem mohl se △ABC proměniti v rovnoběžník AGCF, který by s ním měl stejnou výšku.



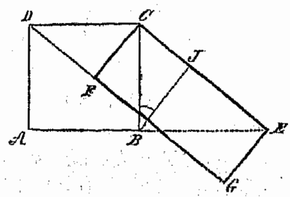
Obr. 176.

V obdélník promění se trojúhelník, když se postaví v krajních bodech základny kolmice a středním bodem výšky rovnoběžka ku základně. V čtverec dá se trojúhelník proměniti buď graficky dle 4. c, nebo také počtem. Strana čtverce s jest totiž, když výšku a základnu trojúhelníka poznamenáme písmenkami v a z, $s^2 = \frac{1}{2}vz$, z čehož $s = \sqrt{\frac{vz}{2}}$, to jest strana čtverce, který má s daným trojúhelníkem stejnou plochu, jest střední měř. srovnalostnou mezi $v/_2$ a z, nebo mezi $z/_2$ a v.

4. **Proměňování čtyrúhelníka.** a) Jak lze kosodélník proměniti v obdélník a naopak, vysvítá z § 41. 3; má-li se ale narejsovati čtverec, který by měl s nějakým rovnoběžníkem vůbec



Obr. 177.



Obr. 178.

stejnou plochu, proměň nejprvé kosodélník ABmn v obdélník ABCD (obr. 177.) a z tohoto obdržíš čtverec následovně: prodluž základnu AB, učiň $BE = BC$, a sestroj nad celou AE půlkruh AFE. Prodlouží-li se na to výška BC až k F, bude BF stranou žádaného čtverce. Jest totiž $\overline{BF}^2 = AB \, . \, BE = AB \, . \, BC$ (§ 35. 1, dodat. 1). Má-li se kosodélník proměniti v jiný, jehož základna by měla délku určitou, provede se konstrukce dle § 41, 7. Dán-li na př. rovnoběžník DEOH (obr. 151.), prodluž HO i EO a udělej OJ rovno nové základně. Bodem J veď rovnoběžku k DH a body C a O přímku tak daleko, až by prodlouženou DH protekla. Doplní-li se nyní rovnoběžník ABCD, jest $HDOE = OJBF$.

b) *Čtverec má se proměniti v obdélník určité délky.* Dán-li čtverec BFGH (obr. 177), prodluž jednu jeho stranu a sřízni na AB danou délku žádaného obdélníka. Výška obdélníka určí se pomocí pravého úhlu AFE, který jest úhlem v polokruhu a najde se, když na přímku AF postaví se kolmice; BE rovná se potom výšce obdélníka BC. (Srovnej s tím 4, a.)

Jednodušší provedení úlohy této jest následující: Stranu daného čtverce, na př. AB (obr. 178.), prodluž přes roh B a pořízni ji z C danou délkou CE; vede-li se na to z D rovnoběžka s CE a spustí se na tuto z C a z E kolmice, bude $FCEG = ABCD$.

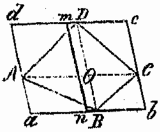
Důkaz. Spustí li se ještě $BJ \perp CE$, bude $BCJ \cong \triangle CDF$, následovně $CJ = CF$; v $\triangle BCE$ jest ale $\overline{BC}^2 = CJ \, . \, CE$ (§ 34. 4), pročež, když za CJ dosadíme hodnotu CF, $\overline{BC}^2 = CF \, . \, CE$.

c) Nyní může se již i trojúhelník graficky proměniti ve čtverec, a sice: Trojúhelník ABO (obr. 177.) proměň nejprvé v obdélník ABCD a tento zase předešlou konstrukcí ve čtverec BFGH, tak že bude $\triangle ABO = ABCD = BFGH$.

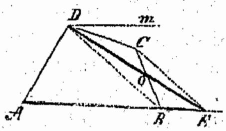
d) *Obdélník promění se v trojúhelník*, když se jedna jeho strana o vlastní svou délku prodlouží a tato celá přímka přijme se za základnu; vrchol trojúhelníka může pak ležeti kdekoliv ve straně protilehlé. (Vyobrazení toho a důkaz podej čtenář.) Tímto spůsobem lze každý rovnoběžník vůbec proměniti v libovolný trojúhelník.

e) *Lichoběžník* promění se v rovnoběžník dle § 42, 4, a z toho pak se může udělati dle libosti každý jiný rovnoběžník i trojúhelník.

f) *Různoběžník* promění se v rovnoběžník takto: K úhlopříčnám AC a BD (obr. 179.) vedou se protilehlými rohy rovnoběžky, čímž vznikne rovnoběžník *abcd*, který jest dle § 42. 8, dodat. a) dvakrát tak velký jako různoběžník ABCD. Bude tudy zapotřebí rovnoběžník tento rozpůliti přímkou vedenou buď po délce nebo po šířce rovnoběžníka (dle § 17. 4), tak že bude *nbcm* = ABCD.



Obr. 179.

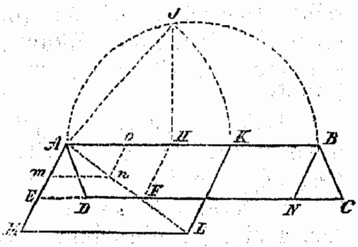


Obr. 180.

g) *Různoběžník má se proměniti přímo v trojúhelník.* — V různoběžníku *ABCD* (obr. 180.) veď některou úhlopříčnu, na př. BD, a narejsuj k ní z *c* rovnoběžku, až by tato prosekla prodlouženou základnu v *E*. Jest pak △AED = ABCD, protože △DOC = △BOE (dle § 42. 4). Trojúhelníky, jež by se svou plochou rovnaly obrazci ABCD, mohou míti potom při základně AE své vrcholy v kterémkoliv bodu přímky *Dm*, která jest s AE rovnoběžna.

h) *Daný rovnoběžník má se proměniti v jiný, který by byl určitému rovnoběžníku podoben.*

Budiž AKLM žádaný rovnoběžník, který jest rovnoběžníku *Amno* podoben a rovným danému rovnoběžníku ABCD (obr. 181). Následkem podobnosti obou rovnoběžníků musí úhlopříčna *An* i rohem *AL* procházeti (bod A jest jejich bodem podobnosti); průsečník její se stranou CD budiž *F* a průsečník této strany se stranou AM budiž *E*. I bude potom, když ještě narejsujeme FH || AM, AE : AM = AH : AK, nebo proměněním vnitřních členů AE : AH = AM : AK. Jestliže v této srovnalosti znásobíme první poměr číslem AB, a druhý poměr číslem AK, obdržíme AE . AB : AH . AB = AM . AK : $\overline{AK}^2$. Že ale dle předpokladu jest AKLM = ABCD = ABNE, bude také dle § 41. 6, AK . AM = AE . AB, a tudy i v předešlé srovnalosti AH . AB = $\overline{AK}^2$, nebo AH : AK = AK : AB, t. j. strana žádaného rovnoběžníka jest střední měř. srovnalostnou mezi AH a danou stranou AB. Z toho pak jest již dle § 36. 3, provedení podané konstrukce v obraze 181. zřejmé.

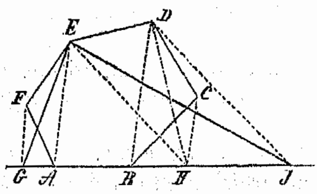


Obr. 181.

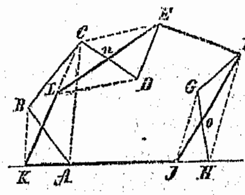
Dle této nauky proveď úlohu: Daný čtyrúhelník má se proměniti v obdélník, jehož úhlopříčna a jedna strana jsou v poměru $m:n$.

5. **Mnohoúhelník má se proměniti v jiný, který by měl o jednu stranu méně.**

a) Šestistraný obrazec na př. ABCDEF (obr. 182.) promění se nejprvé v stejně velký pětistraný, když se jeho lomené omezení v některém rohu promění v přímé dle odstavce 4. g), tak že potom bude ABCDEF = GBCDE. Opakováním této konstrukce zamění se lomené omezení opět v některém rohu pětiúhelníka, na př. v rohu *C* přímkou DH, tak že bude GBCDE = GHDE, kterýžto čtyrúhelník dále opět se promění v $\triangle$GJE.



Obr. 182.



Obr. 183.

D o d a t e k. Jelikož spůsobem tímto každý mnohoúhelník proměniti lze v trojúhelník a tento zase v jakýkoliv rovnoběžník, následovně i ve čtverec proměněn býti může; leží na bílední, že se každý přímočarný obrazec nahraditi dá stejně velkým čtvercem, což v měřictví **čtvercováním** nebo **quadraturou obrazcův** slove.*)

b) Kdyžby měl k proměnění předložený obrazec do vnitř vbíhajících úhlů, jako na př. v obr. 183, kdežto jsou úhly D a G takovýmito úhly; musí se nejprvé úhly tyto odstraniti. Zde odstranil se na př. úhel G a obrazec zarovnal se přímkou FJ; napotom zaměnil se roh B přímkou KC, a v šestiúhelníku tak vzniklém KCDEFJ vyrovnal se roh D přímkou EL ($\triangle$C*n*L = $\triangle$E*n*D). Tím vznikl obrazec, v němžto se žádných do vnitř vbíhajících rohů nenachází.

c) Mnohoúhelníky mohou býti také p o č t e m, zvláště mnohoúhelníky pravidelné, dle libosti proměňovány. Má-li se na př. prav. šestiúhelník, jehož strana a jest, proměniti v stejně velký trojúhelník pravidelný, určí se nejprvé jeho ploský obsah. Ten jest $p = 6a.\frac{r}{2}$ (r značí poloměr vepsaného kruhu, který se rovná, jak snadno vypočtěno býti může, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$), a nebo když za r patřičnou cenu

*) Quadratura k r u h u může se toliko přibliženě uskutečniti, a úloha, g r a f i c k y udati čtverec, který by se rovnal svou plochou danému kruhu, není dosud úplně k provedení.

dosadíme, $p = \frac{6a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Plocha ale prav. trojúhelníka, jehož strana na př. budiž s, vyjádřuje se dle § 43. 5, dodat. 2) vzorcem $\frac{s^2\sqrt{3}}{4}$, tak že máme rovnici $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$, z které po krátkých změnách obdržíme stranu pravid. trojúhelníka $s^2 = 6a^2$, nebo $s = a\sqrt{6}$.

Úloha 1. Jak velká bude strana a) čtverce, b) prav. desítiúhelníka, který se svou velikostí rovná prav. šestiúhelníku, jehož strana jest a?

Úloha 2. Má se narejsovati kruh, který by se rovnal a) součtu, b) rozdílu dvou prav. trojúhelníků, c) součtu neb rozdílu dvou kruhů.

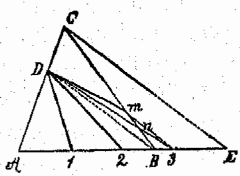
§. 47.

1. **Dělení trojúhelníků.** Trojúhelník má se rozděliti na částky v poměru $m:n:p$ tak, aby a) *dělicí přímky vybíhaly z vrcholu téhož trojúhelníka.*

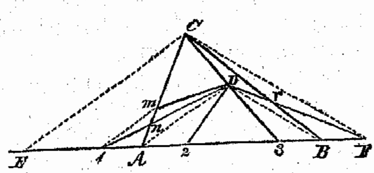
Provedení. Rozděl základnu dle § 36. 1, na částky v poměru $m:n:p$, a spoj dělící body s vrcholem protilehlého rohu. Důkaz dle § 42. 1, d. Kdyby se měl rozděliti trojúhelník v dílky sobě rovné, rozdělí se i základna v tolikéž sobě rovných dílků.

b) *Dělicí přímky mají vybíhati z některého bodu na obvodu.*

Provedení. Budiž bod D, z kterého dělící přímky vybíhati mají, na straně AC (obr. 184.). Proměň nejprvé dle § 46. 2, b) daný trojúhelník ABC v jiný, jehož vrchol by ležel v D; základna tohoto nového trojúhelníka byla by AE, kterou nyní dle daného poměru rozděliti potřebujeme, na př. na 4 stejné částky. Trojúhelníky 1AD, 1D2, 2D3, atd. jsou potom čtvrtiny trojúhelníka ADE, následovně i stejně velkého trojúhelníka ABC. Při tom však leží jedna část trojúhelníka 2D3 mimo daný obrazec ABC, a musí býti tak poopravena, aby celý ten dílec ležel v $\triangle$ABC. Vede se totiž $3m \parallel$ BD', čímž se určí přímka DM a bude $\triangle Dmn = 3Bn$, následovně i $\triangle 2D3 = 2BmD$. — Takto-li již tři stejné dílce (čtvrtiny) určeny jsou, zbývá ostatní dílec, t. j. mDC na čtvrtou čtvrtinu.



Obr. 184.



Obr. 185.

Rozděl dle toho $\triangle$ABC ve tři díly, které se mají k sobě jako 1:2:3.

c) *Dělicí přímky mají vybíhati z bodu vně trojúhelníka ležícího.*

Provedení. Proměň opět daný trojúhelník ABC (obr. 185.) v jiný, jehož vrchol by ležel v daném bodu D, na př. v $\triangle$DEF, a rozděl jeho základnu EF dle daného poměru (zde opět ve 4 stejné díly); i budou potom trojúhelníky 1ED, 12D, 23D, 3DF čtvrtinami trojúhelníka DEF, následovně stejného s ním $\triangle$ABC. Zaměnī-li se konečně některé částky dílců těchto, jež mimo $\triangle$ABC padly, za jiné v $\triangle$ABC ležící, jako na př. $\triangle nA1$ za $\triangle mnD$, $\triangle BrF$ za $\triangle rCD$, bude úloha provedena. Důkaz podej čtenář.

d) *Dělící přímky mají jíti k některé straně trojúhelníka rovnoběžně.*

Provedení. Některá strana trojúhelníka (ne však ta, k nížto mají býti dělící přímky rovnoběžny) rozdělí se dle daného poměru, zde na př. ve 3 stejné díly v bodech m a n, a sestrojí se nad touže stranou půlkruh. Postaví-li se v dělících bodech kolmice na AC (obrazec 186.) ažby půlkruh prosekly, a přenesou se tětivy CD a CE z C počínaje na AC, tak aby bylo CD = CF, CE = CH, bude jenom třeba body F a H žádané rovnoběžky narejsovati. Jest totiž ABHJ = HJFG = CFG = $^1/_3$ ABC.

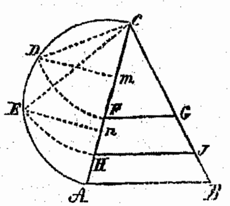
Důkaz. Trojúhelníky CFG, CHJ a CAB jsou sobě podobny a tudy $\triangle$CFG : $\triangle$CHJ : $\triangle$CAB = $\overline{CF}^2 : \overline{CH}^2 : \overline{CA}^2$ . . . . I).

Dle § 34. 4, jest však $\overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 = mC \cdot CA = \frac{AC}{3} \cdot AC = {}^1/_3\, \overline{AC}^2$,

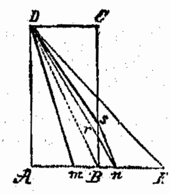
a taktéž

$\overline{HC}^2 = \overline{EC}^2 = nC \cdot CA = {}^2/_3 AC \cdot AC = {}^2/_3\, \overline{AC}^2$,

následovně $\overline{CF}^2 : \overline{CH}^2 : \overline{CA}^2 = {}^1/_3\, \overline{AC}^2 : {}^2/_3\, \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2$, nebo $\overline{CF}^2 : \overline{CH}^2 : \overline{CA}^2 = 1 : 2 : 3$ . . . II), pročež z této a ze srovnalosti I) $\triangle$CGF : $\triangle$CHJ : $\triangle$ABC = 1 : 2 : 3, a vůbec = $\alpha : (\alpha + \beta) : (\alpha + \beta + \gamma)$, t. j. trojúhelník CGF rovná se jedné třetině, $\triangle$HCJ dvěma třetinám celého trojúhelníka ABC.



Obr. 186.



Obr. 187.

Z poslední srovnalosti vychází, že $\triangle$CGF : ($\triangle$CHJ — $\triangle$CGF) $\alpha : (\alpha + \beta - \alpha) = \alpha : \beta$, t. j. $\triangle$CFG : FGHJ = $\alpha : \beta$, zde tedy = 1 : 1, tak že jest nejen $\triangle$CGF, nýbrž i FGHJ třetinou trojúhelníka ABC, a následovně i zbytek ABJH.

2. **Dělení čtyr- a mnohoúhelníků.** a) Má-li se rovnoběžník rozděliti dle daného poměru přímkami, které by byly k některé jeho straně rovnoběžny, rozdělí se pouze strana druhý směr mající dle daného poloměru a dělícími body vedou se rovnoběžky k dané straně. (Důkaz dle § 41. 4.)

b) *Dělící přímky mají vybíhati z některého rohu.* Daný rovnoběžník ABCD (obr. 187) promění se nejprvé v trojúhelník téže výšky ($\triangle$ ADE) a tento rozdělí se dle žádaného poměru přímkami Dm a Dn atd.

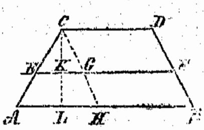
3. Ostatní úlohy, dělení obrazců se týkající, dají se snadně počtem provésti, a to tak, že se potřebné šířky nebo délky počtem určí, načež ostatní práce graficky snadno provedena býti může, jako na př. v následujících úlohách.

Úloha 1. *Lichoběžník má se rozděliti ve dva díly dle poměru $m:n$ tak, aby šla dělící čára rovnoběžně k základně AB* (obr. 188.).

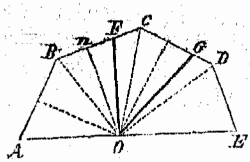
Provedení. Budiž EF žádaná přímka, a odříznutá část plochy CDEF $= p$; bude se potom jednati toliko o výšku CK $= x$, kterou se určí bod K a tím i rovnoběžka EF. Nazveme-li CD $= a$, EG $= b$, AH $= m$, CL $= v$, CK $= x$; bude $CDEF = p = (CD + EF)\frac{CK}{2} = (2a + b)\frac{x}{2}$ . . . I)

Z podobných trojúhelníků CEG a CAH však plyne CK : EG = CL : AH, nebo $x : b = v : m$, a z toho $b = \frac{mx}{v}$, kteroužto cenu když dosadíme do rovnice I), obdržíme $\left(2a + \frac{mx}{v}\right)\frac{x}{2} = p$, t. j. $x^2 + \frac{2av}{m}x = \frac{2vp}{m}$, a z toho $x = -\frac{av}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{av}{m}\right)^2 + \frac{2vp}{m}}$.

Zde se podrží ale jenom kladná hodnota kořenové veličiny, poněvadž x přirozeně záporným býti nemůže. — Vypočteno-li takto x = CK, odřízni ho z C počínaje a veď bodem K rovnoběžku k AB.



Obr. 188.



Obr. 189.

Úloha 2. *Mnohoúhelník ABCD* (obr. 189.) *má se rozděliti v dílce dle daného poměru* (na př. ve tři stejné díly) *tak, aby dělící přímky vybíhaly z bodu O.*

Provedení. Spoj bod O se všemi rohy, odměř na tisíciném měřítku základny i výšky trojúhelníků AOB, BOC, COD. . ., vypočti jejich obsahy, které dohromady sečteny ploský obsah celého obrazce dají. Číslo toto rozděl dle daného poměru (zde ve 3 stejné díly), načež poznáš, zdali $\triangle$ AOB sám jeden takový dílec neobnáší; byl-li by na př. $\triangle$ AOB menší jedné třetiny celého obrazce, odřízni od vedlejšího trojúhelníka tolik v podobě trojúhelníka o výšce On, mnoho-li trojúhelníku AOB na doplnění jedné třetiny zapotřebí. Základna tohoto přídavku p jest $BF = z = \frac{2p}{On}$. — Podobným způsobem naloží se s $\triangle$ OED, kterému se musela část OGD přidati, aby žádaný dílec vznikl atd.

Kniha sedmá.

Grafické zobrazování výrazů algebraických.

§ 48.

1. Dosud jsme seznali způsob a výhody algebraického určování veličin měřických (kniha V. a VI.), které v tom záleželo, že se hodnoty veličin měřických vyjádřily číslicemi, jež potom výkonům algebraickým podrobeny býti mohly. Způsobem tímto určily se ale zase jen číselné hodnoty veličin měřických, které jsouce algebraicky vyjádřeny napotom teprv příslušnými konstrukcemi zobrazeny býti musí.*) Řada měřických konstrukcí, jež k vůli určení neznámé veličiny podle algebraického vzorce provedeny býti musí, nazývá se **grafické zobrazení** algebraických výrazů (graphische Darstellung).

Algebraické určení veličin měřických vede vždycky k rovnicím; následovně splývá i grafické zobrazení výrazů algebraických **s měřickým řešením rovnic** dohromady.

Rovnice slove měřicky (konstruktivně) rozřešena, vyjádří-li se cena neznámé veličiny přímkou. Při tom shledáme, že jest k měřickému určení hodnoty jakékoliv veličiny vždycky toliko přímek potřeba, když jest rovnice prvního stupně (rovnice linearní); je-li ale rovnice druhého stupně (rovnice čtvercová), určí se obě hodnoty veličiny neznámé pomocí průsečníků přímky s kruhem. Konstrukce rovnic vyšších stupňů leží pak mimo obor nižšího měřictví, a řešení jejich přesahovalo by tudy meze dílu tomuto vytknuté.

2. Při grafickém zobrazení výrazů algebraických nesmí se spustiti z paměti, že velikost měřic. veličin ve výrazu algebraickém toliko čísly poměrnými vyjádřena jest (§ 3, § 31), a zejmena že jednoduchým číslem poměrným, na př. číslem a nějaká délka, součinem ale dvou jednoduchých čísel, na př. číslem $a.b$ plosky obsah nějakého obdélníka vyjádřen bývá. Aby tudy nějaký algebraický výraz zobrazen býti mohl, musí čísla v něm se nacházející dříve svého původního významu měřického obdržeti. Tím ale pozbydou veličiny algebraické svého všeobecného číselného významu a mohou potom v algebraickém vzorci jen tehdáž nějakého významu míti, pokud jsou stejnorodé.

Číselné hodnoty uvedou se zpět na veličiny měřické, když je spojíme s nějakou linearnou veličinou jakožto mírou, t. j. s přím-

*) Francouzský mathematik Vieta (nar. 1540, † 1603 v Paříži), který v matematice čísla vyjádřovati začal všeobecně písmenkami a tím se pokládati musí za původce počtu algebraického, učil také nejprvé i grafické zobrazování algebraických výrazů; vyjádřuje z počátku měřické úlohy způsobem algebraickým přicházel takto k jich obecnému řešení.

kou, která byla vzata při určování velikosti přímek za jedničku. Když by na př. byl dán výraz $x^2 = ab$, mysleme sobě, že jsou x, a, b poměrnými čísly přímek X, A, B, jež byly měřeny mírou m, tak že jest $X = mx$, $A = ma$, $B = mb$. Tím přejde algebraický výraz v následující měřický $\left(\frac{X}{m}\right)^2 = \frac{A}{m} \cdot \frac{B}{m}$ nebo $\frac{X^2}{m^2} = \frac{AB}{m^2}$, t. j. $X^2 = AB$.

Pozn. 1. Při tom se snadno přesvědčíme, že jsou číselné hodnoty přímek A, B, X od míry m nezávislé; neboť kdybychom byli zvolili jinou délku za míru, na př. délku n, při čemž by bylo na př. $n = am$, zůstal by předce poměr veličin měřických týž, bylo by totiž $\frac{A}{B} = \frac{am}{bm} = \frac{a \cdot am}{b \cdot am} = \frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$, t. j. poměr přímek A : B zůstal i při nové míře rovným číselnému poměru.

Algebraické výrazy, vyjádřující buď délky přímek (jednoduchá čísla) nebo velikost ploch (součiny dvou činitelů), dostávají dle tvaru měřického, jehož velikost udávají, jména výrazů o jednom nebo o dvou rozměrech, kterýžto rozměr vždycky se součtem exponentů každého výrazu souhlasí. Při tom se rozměr výrazu každým linearným činitelem o jeden rozměr zvětší, právě tak, jako se zase každým linearným dělitelem o jeden rozměr zmenšuje. Taktéž shledáme, že mocněním nějakého výrazu udavatele rozměru znásobíme, kořenováním ale odnásobíme.

Z toho jde: a) Rozměr zlomku určíme odečtouce udavatele rozměru jmenovatele od udavatele rozměru čítatele; b) rozměr kořene určíme dělíce mocnitele dobyvatelem.

Pozn. 2. Na exponenty číslic nebeře se tu ohledu a považujeme tyto za pouhé součinitele, jako na př. ve výrazu $2r$, nebo $2\pi r$, r^2, $4\pi r^2$, kde jen r jakožto veličina linearná o rozměru výrazu rozhodovati může.

Dle těchto výkladů jsou a, $3b$, $\frac{ab}{c}$, $\frac{abd}{c^2}$, $\frac{a^3}{mn}$, $3\sqrt{a^2m}$ výrazy o jednom rozměru, ab, $2a^2$, $\frac{abc}{d}$, $\frac{x^3}{y}$, $\left(\frac{m^2n}{rs}\right)^2$, $\sqrt{\frac{ab^3c}{n}}$ výrazy o dvou rozměrech.

3. Výrazy algebraické slovou vzhledem ke svým členům stejnorodé, mají-li všechny jejich členy jednostejný rozměr. Tak by byla rovnice $x^2 - ax = \frac{bx^2}{a} - cx$ vzhledem k veličinám a, b, c, x stejnorodá. Na takovouto rovnici přijdeme, když z přímek, jež písmenami poznamenáme a do rovnice dáme, žádná není mírou ostatních.

Kdyby se ale některá z daných přímek stejnorodého výrazu přijmula za míru ostatních, přestal by býti výraz stejnorodým, protože by pak všechny činitelé a dělitelé přímky této dle obyčeje počtářského vypadly z počtu. Je-li na př. v rovnici $x = \frac{abc}{m^2}$ m

mírou, přejde rovnice ta, protože se dělitel $1^2 = 1$ pomíjí, v různorodou $x = abc$, kterou bychom mylně za výraz o 3 rozměrech držeti mohli.

Chceme-li různorodý výraz učiniti stejnorodým, poznamenejme míru č. jedničku nějakým písmenem kladouce na př. $m = 1$, a připišme ho s náležitým udavatelem do různorodého výrazu za dělitele nebo za činitele tak, aby se všude stejnorodnosti docílilo. Aby se udělal na př. výraz $x = ab$, který, ač se o dvou rozměrech býti zdá, předce toliko jen o jednom rozměru jest, stejnorodým, budiž m délkomírou, i bude potom $x = \frac{ab}{m}$. Nyní ale nemají již písmena x, a, b téhož významu co dříve, kde bylo mírou $m = 1$; nynější míra jest zcela jiná, všeobecná č. neurčitá, tak že by se tu měla vlastně psáti čísla $\frac{x}{m}$, $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, čímž by původní výraz přešel v $\frac{x}{m} = \frac{a \,.\, b}{m \,.\, m}$, nebo $x = \frac{ab}{m}$.

Má-li se udělati stejnorodým výraz na př. $x = \frac{a - b^2}{cd}$, v němžto jest x jakožto veličina linearná toliko o jednom rozměru, jmenovatel ale zlomku na pravé straně o dvou rozměrech, musí se dříve proměniti čítatel tak, aby byl o 3 rozměrech. To se stane, když přijmouce na př. α za míru znásobíme a druhou mocninou α^2, b^2 pak první mocninou α. I bude potom $x = \frac{a\alpha^2 - b\alpha.}{cd}$

Tím se vlastně za čísla x, a, b, c, d zavedla jiná $\frac{x}{\alpha}$, $\frac{a}{\alpha}$ . . ., a podoba vzorce přešla v $\frac{x}{\alpha} = \frac{\frac{a}{\alpha} - \frac{b^2}{\alpha^2}}{c/\alpha \,.\, d/\alpha}$, t. j. $x = \frac{a\alpha^2 - b^2\alpha}{cd}$.

1. Měřické řešení rovnic prvního stupně.

§ 49.

Všechny linearné tvary rovnic prvního stupně, jež na dosavádních základech měřických zobrazeny býti mohou, dají se uvésti na několik jednoduchých základných tvarů, a sice: $x = a \pm b$, $x = \frac{ab}{c}$, $x = \frac{a^2}{b}$, jichžto konstrukci dle pořádku v následujícím provedeme.

1. Kterak se sestrojí přímka, jížto hodnota jest $x = a + b - c + d - e + \ldots = (a + b + d + \ldots) - (c + e + \ldots)$, vysvítá z § 2. 3; udělá se totiž jedna přímka A tak dlouhá, mnoho-li udává součet délek $a + b + \ldots$, a opět jedna přímka B, jižto délka se skládá z délek $c + e + \ldots$, načež se sřízne z A délka B; zbytek udává pak délka x.

Tamtéž bylo ukázáno, jak se sestrojí na př. přímka $x = 2a$ $x = \frac{3a}{5}$ atd.

2) Rovnice $x = \frac{ab}{c}$, která v srovnalosť proměněna dává $c : a = b : x$, žádá, aby se narejsovala ku třem daným přímkám hodnoty c, a, b čtvrtá srovnalostná, což se stane dle § 36, 2.

Dodatek. I rovnice $x = ab$ dá se spůsobem tímto provésti. Přijme se totiž nějaká libovolná délka (na př. $c = 1$) za jedničku, a pak bude $x = \frac{ab}{1}$, nebo $1 : a = b : x$. — Taktéž i rovnice $x = \frac{a}{b}$ splývá s touto konstrukcí v jedno; jest totiž $x = \frac{1 \cdot a}{b}$, nebo $b : a = 1 : x$. — Podobně dá rovnice $x = a^2$, konstruktivně podle $1 : a = a : x$ provedena, třetí srovnalostnou k přímkám 1 a a.

3. Rovnice $x = \frac{a^2}{b}$ dává srovnalosť $b : a = a : x$, která žádá sestrojení třetí srovnalostné přímky k b a a (dle § 36, 2).

4. Má-li se vyobraziti přímka výrazu složitějšího, na př. $x = \frac{abc}{de}$, rozložme druhou stranu v činitele, jež mohou dle předešlých odstavců zobrazeny býti. Jest totiž $x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e}$. Narejsuje se tedy nejprvé dle odstavce (2) přímka $\frac{ab}{d} = m$, čímž bude $x = \frac{mc}{e}$, a výraz tento může se tímtéž spůsobem dále zobraziti.

I v rovnici $x = \frac{abc^2}{def} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c^2}{e} \cdot \frac{1}{f}$ narejsují se nejprvé přímky $\frac{ab}{d} = m$, $\frac{c^2}{e} = n$, a konečně přímka $x = \frac{mn}{f}$.

Výraz $x = \frac{3a^2b^3}{2c^3d}$ rozloží se v $x = \frac{3a^2}{2c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{d}$, a konstrukce bude:

Nejprvé určí čtvrtou srovnalostnou přímku ku $2c$, $3a$, a, tak aby bylo $m = \frac{3a^2}{2c}$; napotom čtvrtou srovnalostnou k přímkám c, m, b, která bude $n = \frac{mb}{c}$; dále k přímkám c, n, b, která bude $p = \frac{nb}{c}$; a konečně ještě k přímkám d, p, b, která bude $x = \frac{pb}{d}$.

Pozn. 1. Příklad tento zároveň ukazuje, že se udavatelem rozměru v jmenovateli určuje již i počet potřebných konstrukcí, které k určení čtvrtých srovnalostných provedeny býti musí.

Pozn. 2. Výraz $x=\frac{a^2-b^2}{c}$, který se dá rozložiti v $x-\frac{(a+b)(a-b)}{c}$, žádá zobrazení přímek $(a+b)$, $(a-b)$, a $\frac{mn}{c}$. Jak se zobrazí $\frac{2b^3}{3a^2}$?

5. Je-li čítatel zlomku mnohočlený, jmenovatel ale toliko jednočlený, jako na př. v rovnici $x=\frac{abc+def-ghi}{mn}$, učiníme nejlépe, když celý zlomek rozložíme v jednotlivé menší zlomky, které by se dle předešlých odstavců zobraziti daly. Zde na př. bude $x=\frac{abc}{mn}+\frac{def}{mn}-\frac{ghi}{mn}$, což dá tré přímek $\frac{abc}{mn}=\alpha$, $\frac{def}{mn}=\beta$, $\frac{ghi}{mn}=\gamma$, a konečně čtvrtou přímku $x=\alpha+\beta-\gamma$. Jak se zobrazí $x=\frac{a^2d-b^2d}{ac}$? I rovnice $x=\frac{a^2-b^2+c^2}{c+d}$ dá se spůsobem tímto zobraziti; jest totiž $x=\frac{a^2-b^2}{c+d}+\frac{c^2}{c+d}=\frac{(a+b)(a-b)}{c+d}+\frac{c^2}{c+d}$, což žádá zobrazení přímek $a+b=m$, $a-b=n$, $c+d=p$, na to zobrazení přímek $\frac{mn}{p}=\alpha$, $\frac{c^2}{p}=\beta$, tak že bude konečně $x=\alpha+\beta$.

6) Když by byl jmenovatel vyjádřen číslem vícečleným, musí se dříve proměniti v jednočlen, jako na př. v rovnici $x=\frac{abc}{de+fg}$. Zde značí totiž v jmenovateli číslo de plochu obdélníka právě tak jako číslo fg; součet jejich musí býti tudy zase obdélník. Následovně musí se proměniti celý jmenovatel v součin dvou činitelů, tak že bude $de+fg=d(e+\frac{fg}{d})$. A nyní vyobrazí přímky $\frac{fg}{d}=m$, $e+m=n$; načež bude $x=\frac{abc}{dn}$, což se dá dle (4) zobraziti.

7. Máme-li konečně zobraziti linearnou hodnotu zlomku, jehož čítatel i jmenovatel zároveň mnohočlení jsou, jako na př. v rovnici $x=\frac{a^3-bc^2}{de+fg}$, proměňme nejprvé jmenovatele v jednočlen a pokračujeme dále dle (5).

V příkladu předloženém jest totiž $de+fg=d(e+\frac{fg}{d})$; sestroj tedy $\frac{fg}{d}=m$, $e+m=n$, a na to $x=\frac{a^3-bc^2}{dn}=\frac{a^3}{dn}-\frac{bc^2}{dn}$.

V rovnici $x=\frac{a^2bc-de^2f+e^3g}{he^2-c^2K+lmn}$ musí obdržeti jmenovatel tvar jednočlenu o třech rozměrech; dá se totiž $he^2-c^2K+lmn=e^2(h-\frac{c^2K}{e^2}+\frac{lmn}{e^2})$, a zobrazí se přímky $\frac{c^2K}{e^2}=\alpha$, $\frac{lmn}{e^2}=\beta$, $h-\alpha$

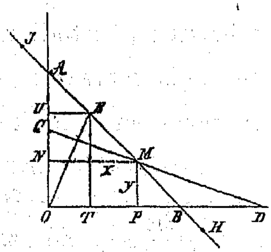
$+\beta = \gamma$, tak že obdržíme potom v jmenovateli pouze $e^2\gamma$. Napotom bude $x = \frac{a^2bc}{e^2\gamma} - \frac{de^2f}{e^2\gamma} + \frac{eg}{\gamma}$.

V rovnici $x = \frac{3a^3 + 2a^2b - ab^2 + c^3}{2a^2 - 3ab + b^2}$ promění se zlomek vyjmutím společného činitele v následující

$$x = \frac{a^2\left(3a + 2b - \frac{b^2}{a} + \frac{c^3}{a^2}\right)}{a\left(2a - 3b + \frac{b^2}{a}\right)},$$

což aby čtenář dále provedl, odporučujeme.

8. Z daných rovnic $ax + by = ab$
$cx + dy = cd$
mají se určiti grafickým spůsobem neznámé x a y, když přímky a, b, c a d dány jsou.



Obr. 190.

Provedení. Považujeme-li v první rovnici a a b za odvěsny pravoúhelného trojúhelníka AOB (obr. 190.), v němžto jest OA $= a$, OB $= b$, a spojíme-li libovolný bod E přímky AB s vrcholem O; rozpadne se celý $\triangle$ AOB ve dva jiné, tak že bude $\triangle$AOE $+$ $\triangle$OEB $=$ $\triangle$AOB...α). Narejsujeme-li v těchto menších trojúhelnících výšky přináležející ku stranám a a b, a poznačíme je EU $= \nu_a$, EF $= \nu_b$; budeme moci rovnici α) psáti: $a\nu_a + b\nu_b = ab$ . . . . . . 1).

Nyní narejsuj pro druhou z daných rovnic nový pravoúhelník, který by měl s $\triangle$ AOB společný vrchol a jehož odvěsny by byly OC $= c$, OD $= d$; i budou potom, jak se podobnou cestou přesvědčiti můžeme, opět kolmice z libovolného bodu přepony CD na odvěsny spuštěné vyhovovati rovnici $c\nu_c + d\nu_d = cd$ . . . . 2).

Oběma rovnicím 1) a 2) zároveň vyhovují tedy kolmice z vespolného průsečníku M spuštěné, kde jest totiž MN $= \nu_a = \nu_c$, a MP $= \nu_b = \nu_d$. Jsou tudíž x $=$ MN $=$ OP, y $=$ MP $=$ ON žádané hodnoty za neznámé x a y.

Dodatek. Pro body, které leží na přímce AB v prodloužení přes A a nebo přes B, jako jsou na př. body J a H, byl by $\triangle$ OJB $-$ $\triangle$ OJA $=$ $\triangle$ ABO, $\triangle$ AOH $-$ $\triangle$ OBH $=$ $\triangle$ AOB, tak že bychom dosazením součinů z výšek a základen obdrželi po případu $b\nu_b - a\nu_a = ab$, nebo $a\nu_a - b\nu_b = ab$. Z rovnic těchto ale vysvítá, že daným rovnicím $ax + bx = ab$, a $cx + dx = cd$ konstrukcí vysvětlenou jen tak dalece vyhoveno býti může, pokud se přepony AB a CD protínají mezi rameny pravého úhlu AOB. Pro jaké rovnice udala by rovnice vysvětlená kořeny, když by se přepony AB a CD přetínaly mimo ramena pravého úhlu?

9. Když by se měly vyobraziti neznámé v rovnicích

$$ax + by = mn$$
$$cx + dx = pq,$$

vyobraz nejprvé přímky $e = \frac{mn}{a}$, $f = \frac{mn}{b}$, $g = \frac{pq}{c}$, $h = \frac{pq}{d}$, dosaď za a, b, c a d nové hodnoty, tak že bude

$$\frac{mnx}{e} + \frac{mny}{f} = mn,$$

$$\frac{pqx}{e} + \frac{pqy}{d} = pq,$$ načež se promění rovnice tyto osvobozením od jmenovatelů a náležitým zkrácením v jednodušší

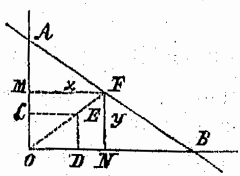
$$fx + ey = ef,$$
$$dx + cy = cd,$$

kteréžto rovnice se dají způsobem předešlým zobraziti.

10. Mají se vyobraziti neznámé z rovnic

$$ax + by = ab$$
$$cx = dy.$$

Polož na ramena pravého úhlu OA $= a$, OB $= b$ (obr. 191.), a spoj A s B, tak že budou opět kolmice spuštěné z kteréhokoliv bodu přepony AB na odvěsny OA a OB udávati neznámé vzhledem k první z daných rovnic. Odřízneme-li ale OC $= c$, OD $= d$, a sestavíme z těchto stran obdélník CODE, budou zase kolmice spuštěné z úhlopříčny OE a jejího prodloužení na odvěsny OC a OD udávati neznámé vzhledem k druhé z daných rovnic. Jest totiž EC:ED $=$ OD:OC $= d:c$, tudíž c.EC $= d$.ED. Kolmice tedy, které spustíme s průsečníku F úhlopříčny OF a přepony AB, budou udávati hodnoty x a y, vyhovující oběma rovnicím.



Obr. 191.

Dodatek. Pro ten případ, že by rovnice tyto měly podobu $ax + by = mn$, a $cx = dy$, vyhoví se úloze způsobem v (9) naznačeným. — Jak se zobrazí neznámé v rovnicích $ax - by = ab$, nebo $by - ax = ab$ a
$cx = dy$?

2. Měřické řešení rovnic druhého stupně.

§ 50.

1. Čistá rovnice druhého stupně dá se uvésti vždycky na některý z následujících tvarů: $x = \sqrt{ab}$, $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, v kterých se bude toliko o to jednati, jak lze nesměřitelný výraz nahraditi výrazem směrným.

V prvním případu $x = \sqrt{ab}$ jest x střední měřickou srovnalostnou ku přímkám a a b, totiž $x^2 = ab$, nebo $a x : = x : b$, a dá se dle § 36. 3 snadno určiti.

V případu druhém $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ značí x přeponu pravoúhelného trojúhelníka, jehož odvěsny jsou a a b; v rovnici konečně $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ značí x odvěsnu pravoúhelného trojúhelníka, jehož přeponou jest a, a jednou odvěsnou b. Také by se ale mohlo $\sqrt{a^2 - b^2}$ rozložiti v činitele $\sqrt{(a+b)(a-b)}$, a pak by bylo x střední měř. srovnalostnou k přímkám $a + b = m$, a $a - b = n$.

Pozn. V rovnicích čtvercových musí býti veličina podkořenová vždycky druhého stupně (o dvou rozměrech), má-li jinak býti potom kořen o jednom rozměru (§ 48. 2, b).

2. Všechny složitější tvary čistých rovnic čtvercových dají se převésti na některý jednoduchý, jak to v následujícím ukázáno bude.

a) V rovnici $x = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 \ldots}$ skládej členy pod kořenem tak dlouho, až posléze obdržíš některý z předešlých tvarů jednoduchých. Jest totiž dle odstavce (1) $a^2 - b^2 = m^2$ odvěsnou pravoúhelného trojúhelníka; $n^2 = m^2 + c^2$ jest přeponou pravoúhelného trojúhelníka, jehož odvěsny mají délku m a c; a podobně bude dále $n^2 - d^2 = p^2$, tak že konečně obdržíme $x = \sqrt{p^2 + e^2}$.

b) V rovnici $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$ promění se veličina podkořenová buď v součin, totiž $a^2 \pm bc = a\left(a \pm \frac{bc}{a}\right)$, což dá, když dříve narejsujeme $\frac{bc}{a} = m$, $a \pm m = n$, součin an, tak že bude $x = \sqrt{an}$; nebo se zadruhé sestrojí $bc = \alpha^2$, při čemž jest α střední měřickou srovnolostnou k přímkám b a c, tak že bude potom $x = \sqrt{a^2 \pm \alpha^2}$. Jak se zobrazí dle toho $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, $x = \sqrt{ab - cd + ef - hk}$?

3. Z toho, co dosud vysvětleno bylo o zobrazení rovnic čtvercových, plyne, jak lze *druhé kořeny číslic graficky zobraziti*, to jest přímkami vyjádřiti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ atd., když by se vzala jistá délka za jedničku. Dané číslo pod kořenem rozloží se totiž příhodným spůsobem buď v činitele, jako na př. v rovnici $x = \sqrt{10} = \sqrt{2 \times 5}$, kdežto potom jen sestrojiti potřebujeme střední měř. srovnalostnou k přímkám 2 a 5; a nebo se také rozloží číslo pod kořenem ve čtvercové sčítance, na př. $x = \sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$, kdežto pak jest x přeponou pravoúhelného trojúhelníka, jehož odvěsny jsou 3 a 1.

Tak jest $x = \sqrt{7} = \sqrt{2^2 + 2^2 - 1^2}$; $x = \sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$; $\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1^2}$; $x = \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}$; $x = \sqrt{15} = \sqrt{3 . 5}$ nebo $= \sqrt{4^2 - 1^2}$; $x = \sqrt{43} = \sqrt{7^2 - 2^2 - 1^2 - 1^2}$; $x = \sqrt{30} = \sqrt{5 . 6}$ nebo $= \sqrt{5^2 + 1^2 + 2^2}$. (O provedení těchto konstrukcí viz v § 36. 12, jakož i o grafickém mocnění v § 36, 11.)

Pozn. $a\sqrt{2}$ jest úhlopříčnou čtverce, jehož strana jest a, nebo také i stranou čtverce, který jest do kruhu, poloměrem a narejsovaného, vepsán. Podobně jest $a\sqrt{3}$ stranou do kruhu vepsaného pravidelného trojúhelníka.

4) I kdyby se měla zobraziti rovnice $x = \sqrt[4]{a^3 b}$, rozloží se opět veličina podkořenová v činitele; nejprvé se totiž narejsuje $ab = m^2$ (střední měř. srovnalostná k přímkám a a b), načež bude $x = \sqrt[4]{a^2 m^2} = \sqrt{am}$. Týmž spůsobem zobrazí se

$$x = \sqrt[4]{a^2bc+a^3d-b^2c^2+a^4} = \sqrt[4]{a^2(bc+ad-\frac{b^2c^2}{a^2}+a^2)},$$

když se nejprvé narejsuje $bc = m^2$, $ad = n^2$, $\frac{b^2c^2}{a^2} = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 = p^2$, tak že potom bude $x = \sqrt[4]{a^2(m^2+n^2-p^2+a^2)}$, čehož zobrazení nepodléhá již žádným nesnázím.

5. Pro ten případ, že by měla rovnice tvar $x = a\sqrt{\frac{b}{c}}$, musí se dáti dříve veličina směřitelná pod kořen; zde by bylo na př.

$$x = \sqrt{\frac{a^2b}{c}} = \sqrt{a \cdot \frac{ab}{c}} = \sqrt{am}.$$

6. Příklady. a) Má se graficky určiti x z rovnice $x = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.

Zde jest $x = \sqrt{\frac{5a^2-a\sqrt{5a^2}}{10}}$, tak že se musí nejprvé zobraziti $\sqrt{5a^2} = \sqrt{(2a)^2+a^2} = m$; načež bude $x = \sqrt{\frac{m^2-am}{10}} = \sqrt{\frac{m(m-a)}{10}}$ a tak dále.

b) $x = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3a.a} = \sqrt{ba}$; c) $x = \sqrt{5m^2}$; d) $x = \sqrt{\frac{n^2}{2}} = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)n}$;

e) $x = \frac{r(\sqrt{5} \mp 1)}{2}$; f) $x = a.\frac{b+c}{\sqrt{d^2+e^2}}$; g) $x = \sqrt{\frac{abc}{\sqrt{ab+bc+ca}}}$;

h) $x = \sqrt{c^2-2a^2+2\sqrt{a^4-4b^4}}$; k) $x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$.

§ 51.

1. Obecný tvar **smíšené čtvercové rovnice** o jedné neznámé jest, když se i k možným znamením zřetel vezme, $x^2 \pm ax = \pm b$. Vyjádřují-li na levé straně a a x přímky, musí následkem stejnorodosti obou stran b značiti nějakou plochu, která by se zečtvercovati a na př. c^2 označiti mohla. Jestliže by ale mělo býti b **veličinou lineарnou**, musela by se celá rovnice k vůli stejnorodosti obou stran znásobiti dříve nějakou mírou (na př. m), tak že by potom obdržela tvar $x^2 \pm ax = \pm bm$. Že ale i obdélník bm nějakým čtvercem nahražen býti může, zůstane pro grafické určení

hodnoty x ze smíšené čtvercové rovnice předce zase jen tvar rovnice $x^2 \pm ax = \pm c^2$, kterážto rovnice dává čtyry rozličné případy:

$$1)\ x^2 + ax = c^2, \qquad 3)\ x^2 + ax = -c^2$$
$$2)\ x^2 - ax = c^2, \qquad 4)\ x^2 - ax = -c^2.$$

Pozn. Jak snadno nahlédnouti, vzniká rovnice (2) z (1) právě tak, jako rovnice (4) za třetí, když v první nebo po případu ve třetí dosadíme za x hodnotu zápornou, tak že by se rovnice druhá mohla také psáti $(-x)^2 + a(-x) = c^2$, a rovnice čtvrtá $(-x)^2 + a(-x) = -c^2$. A poněvadž se v konstruktivních pracích vždycky toliko jen o skutečnou hodnotu přímek jedná bez ohledu na to, v jakém směru vzaty byly; můžeme směle zobrazení čtvercových rovnic smíšených na grafické provedení rovnice 1. a 3. nebo také 1. a 4. obmeziti.

2. Obecný vzorec, jímžto se kořeny čtvercových rovnic smíšených udávají jest, jak z algebry známo, $x = \pm\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \pm c^2}$, a výraz tento může se dle předešlých odstavců zobraziti. Nejprvé se totiž určí $\sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2} = m$, nebo $\sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2} = n$, a potom bude $x = \pm\frac{a}{2} \pm m$, nebo $x \pm = \frac{a}{2} \pm n$.

Mnohem jednodušeji ale a rychleji obdržíme obě hodnoty x najednou konstrukcí následující:

a) V první rovnici $x^2 + ax = c^2$, jížto kořeny udávají se vzorcem $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2}$ a která se také dá rozložiti v $x(x+a) = c^2$, jsou x a $(x+a)$ přímky, jichžto rozdíl dává a a ku kterým jest c střední měř. srovnalostnou. Provedení konstrukce bude tudy následující:

Na libovolné přímce odřízne se AB=c (obr. 127.), postaví se $AC \perp AB$ a sřízne se $OA = \frac{a}{2}$; narejsuje-li se konečně z O poloměrem OA kruh, a vede se sečna BO až k E, budou BD a BE udávati žádané kořeny. Neboť jest $BO = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2}$, $BE = BO + OE = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2} = x_1$, $BD = x_2 = BO - OD$, nebo $-BD = OD - BO = a'_2 - \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2}$.

Pozn. Grafické provedení této úlohy mohlo se také státi, aniž by třeba bylo rovnici dříve řešiti. Uvede-li se totiž daná rovnice na formu $x(x+a) = c^2$, promění se ihned předložená úloha v onu, která byla v § 36. 6, provedena. Zároveň vysvítá z této konstrukce, která vždycky k provedení jest a dvé rozličných přímek za výsledek dává, že pro tento případ rovnice čtvercová dva rozdílné, realné kořeny míti musí.

b) **Rovnice** $x^2 - ax = c^2$ vzniká, jak svrchu podotknuto, z **rovnice** $x^2 + ax = c^2$ dosazením záporné hodnoty za x; kořeny její **budou míti** následovně jednostejnou velkosť s kořeny předešlými, **avšak s** obrácenými znaménky. Toutéž konstrukcí shledáme totiž, **že jest** $x_1 = -AD$, $x_2 = -BE$.

3. **Rovnice** $x^2 - ax = -c^2$, jížto kořeny jsou $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2}$, **dá se rozložiti** v $x(x-a) = -c^2$, a žádá tudy opět vyobrazení **střední měř.** srovnalostné ku dvěma přímkám x a $(a-x)$, jichžto **součet dává** a. Konstrukce jest následující:

Nad přímkou $AB = a$ (obr. 126.) narejsuje se kruh poloměrem $a/_2$; **v krajním** bodu postaví se $AC \perp AB$ a vede $CF \parallel AB$; **i budou** potom $CD = AE$ a $CF = AH$ žádané hodnoty kořenů. Jest **totiž, když** postavíme $DE \perp AB$, a taktéž $FH \perp AB$, $AE . EB = \overline{ED}^2$; **že ale jest** $AE = CD = HB$, $DE = AC = FH$, jsou $CD = EA$, $CF = AH = EB$ **žádané přímky,** k nimžto jest $c = AC = ED$ střední měř. **srovnalostnou,** a následovně $AE = x_1$, $AH = x_2$.

Pozn. 1. Avšak i algebraický výraz $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2}$ dochází touto **konstrukcí svého** zobrazení. Jest totiž, když spojíme bod O s F, $OH = OE = \sqrt{\overline{OF}^2 - \overline{FH}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2}$, následovně $AH = AO + OH = a/_2 + \sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2} = x_1$; taktéž musí být $AE = AO - EO = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2} = x_2$.

Pozn. 2. Konstrukce tato jest jen potud možnou, pokud jest $c = AC < AO = a/_2$, poněvadž v tomto případu rovnoběžka CF kruh skutečně **ve dvou místech** protíná a tak dvé rozličných hodnot za x udává. Kdyby bylo **ale** $AC = AO$, t. j. $c^2 = a^2/_4$, proměnila by se sečna CF v tečnu a dala by **jen jedinou** hodnotu $AO = a/_2$, což s tím souvisí, že se kořenová veličina $\sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2}$ pro tento případ promění v nulu a rovnice $x = a/_2 + 0$ skutečně **jen jeden** kořen $x = a/_2$ udává. Kdyby bylo konečně $c = AC > AO = a/_2$, **neprosekla by** přímka CF více kruh, tak že bychom tu neobdrželi žádných hodnot **za x. To** souvisí s tím dohromady, že by veličina kořenová $\sqrt{\frac{a^2}{4} - c^2}$ **pomyslnou se** stala.

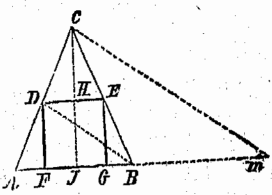
Úlohy.

§ 52.

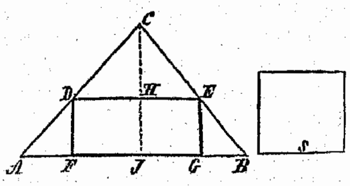
K dokonalejšímu cviku v řešení měřických úloh, jichžto provedení **nezřídka algebraických** výpočtů i konstrukcí zároveň vyžaduje, stůjtež zde **některé úlohy.**

1. *Danému trojúhelníku má se vepsati čtverec.* Úloha tato dala by se **provésti spůsobem** v § 36. 10, vysvětleným; a však i samostatně může se **strana žádaného** čtverce počtem určiti, při čemž výraz, velikosť její udávající,

již i potřebnou konstrukci udá. Budiž tedy $\triangle$ ABC (obr. 192) daný trojúhelník a DEFG žádaný čtverec. Zde se bude jednati toliko o bod D, který velikost čtvercové strany tím určí, že se bodem E musí vésti rovnoběžka k AB. Označíme-li tedy pro krátkost $AB = z$, $CJ = v$, $HJ = DF = DE = x$, následovně $HC = v - x$, bude z podobnosti $\triangle ABC$ a $\triangle DEC$ $AB : CJ = DE : HC$, to jest $z : v = x : (v - x)$, z čehož plyne $(z + v) : z = v : x$, nebo $x = \frac{vz}{v + z}$. Výraz tento žádá jen sestrojení čtvrté srovnalostné k přímkám $(v + z)$, v, z, čehož provedení obraz vysvětluje.



Obr. 192.



Obr. 193.

2. *Danému trojúhelníku má se vepsati pravoúhelník velikosti daného čtverce.*

Provedení. Budiž ABC (obr. 193.) daný trojúhelník, s strana daného čtverce a k vůli rozboru i DEFG žádaný pravoúhelník, v němžto se bude opět jednati pouze o bod D nebo H, protože musí býti $DE \parallel AB$, a určením některého těchto bodů již také i základna i výška pravoúhelníka určena bude. Poznamenáme-li tedy $AB = z$, $CJ = v$, $DF = x$, následovně $HC = v - x$ a $FG = u$; bude z podobnosti trojúhelníků ABC a DEC $AB : CJ = DE : HC$, nebo $z : v = u : (v - x)$, z toho pak $u = \frac{z(v - x)}{v}$. Že ale musí být dle předpokladu $DEFG = s^2$, t. j. $ux = s^2$, dosaďme do této poslední rovnice nalezenou právě hodnotu za u, a obdržíme $\frac{z(v - x)}{v} \cdot x = s^2$, z toho pak po náležitém provedení

$$x^2 - vx = -\frac{vs^2}{z}, \text{ nebo } x = v/2 \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - \frac{vs^2}{z}}.$$

Rovnice tato, jejížto grafické provedení v § 51. 3, ukázáno bylo, vyjádřuje, že předložená úloha jen potud řešitelnou jest, pokud není veličina kořenová nemožnou (pomyslnou), t. j. dokud jest $v^2/4^2 \geqq \frac{vs^2}{z}$ nebo dokud $\frac{vz}{4} \geqq s^2$, což chce říci, že plocha daného čtverce nesmí přesahovati poloviční plochu daného trojúhelníka; pravoúhelník většího obsahu neměl by v trojúhelníku místa. Rovnal-li by se daný čtverec polovičnímu trojúhelníku, to jest bylo-li by $\frac{v^2}{4} = \frac{vs^2}{z}$, odpadla by v našem výpočtu veličina kořenová a bylo by $x = v/2$. Pro případ ale, že by plocha čtverce byla menší polovičního trojúhelníka, obdržíme dvě rozdílné hodnoty za x a tím i dva rozdílné čtyrúhelníky, což aby čtenář provedl odporučujeme.

3. *Kolem daných tří bodů A, B, C mají se narejsovati kruhy, které by se vespolek dotýkaly.*

Buďtež vzdálenosti bodů $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$ i bude se o to jednati, jak lze určiti poloměr některého z těchto kruhů, na př. poloměr $AD = x$, protože potom bude $BD = c - x$, $CE = b - x$.

Poněvadž jest $BF = a - CF = a - (b - x)$, bude rovnice $c - x = a - (b - x)$, a z té $x = \frac{c + b - a}{2} = \frac{c}{2} + \frac{b - a}{2}$.

Bude tedy provedení: Sřízni $Cm = CB$, tak aby bylo $Am = b - a$; rozpůl tento zbytek v bodu O a taktéž AB v bodu n. Udělej ještě $nD = Ao = \frac{b-a}{2}$, tak aby bylo $AD = An + nD = \frac{c}{2} + \frac{b-a}{2} = x$, a poloměr kruhu A jest určen. (Vyobrazení podej čtenář.)

4. Dány jsou dvě rovnoběžky a libovolný bod; bodem tímto má se vésti přímka, jejížto mezi danýma rovnoběžkami obsažená část měla by délku určitou.

5. Má se sestrojiti obdélník, jehož ploský obsah a obvod dány jsou.

6. *Rohy daného čtverce mají se tak seříznout, aby zbyl pravidelný osmiúhelník.*

Budiž v obr. 194. strana čtverce $AB = a$, a při tom $AF = AG = BH = BJ = \dots x$; i bude potom strana osmiúhelníka, t. j. $GH = GF = x\sqrt{2}$ (jakožto úhlopříčna čtverce nad AG narejsovaného). Můžeme tedy psáti $AB = a = x + x\sqrt{2} + x = x\,(2 + \sqrt{2})$, a z toho $x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = a \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = a - \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Bude proto konstrukce: Vedou-li se obě úhlopříčny AC a BD, bude $AO = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, pročež $x = AB - AO$, t. j. z rohů A, B, C a D poloměrem AO narejsované kruhy určí na každé straně daného čtverce žádané body E, F, G, H....

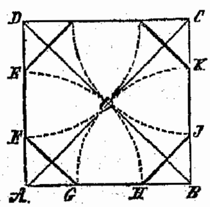
Kniha osmá.

O příčkách a harmonickém dělení.

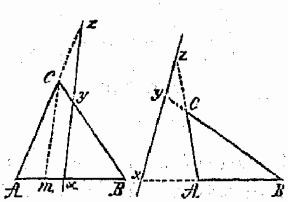
I. O příčkách.

§ 53.

1. Přímka slove **příčkou** (Transversale), když veškeré strany nějakého obrazce protíná (§ 9, 5). Při tom slovou částky stran od vrcholu až k průseku s příčkou (třeba i v prodloužení) **úseky**.



Obr. 194.



Obr. 195.

Tak jsou na př. v $\triangle ABC$ (obr. 195.), jehož strany příčka xz protíná, úseky Ax, Bx, By, Cy, Az, Cz, z čehož viděti lze, že má trojúhelník 6 úseků, z nichžto vždycky tři, jenž v témž pořádku od každého rohu po sobě jdou, tak položeny jsou, že nemají žádného bodu společně.

Rohová příčka (Ecktransversale) slove ta, která některým rohem procházejíc buď uvnitř nebo zevnitř obrazce leží.

Pozn. Kdykoliv nějaká příčka protíná strany trojúhelníka, leží vždycky dva průsečníky v obvodu a třetí průsečník v prodloužení některé strany, nebo se nachází všechny tři průsečníky mimo obvod obrazce v prodloužení stran (obr. 195.); jiný případ není možný.

2. *Kdykoliv protíná nějaká příčka strany trojúhelníka, jsou součiny z úseků k sobě nepřiléhajících vespolek sobě rovny.*

Důkaz. V obr. 195. má být $Ax . By . Cz = Az . Bx . Cy$. — Narejsuje-li se některým rohem rovnoběžka k příčce na př. $Cm \parallel xz$, bude v $\triangle Azx$ $zC : zA = xm : xA$,

v $\triangle BCm$ $By : Cy = xB : xm$, k čemuž když se přidá

$Ax : Bx = Ax : Bx$, bude znásobením

$Ax . By . Cz : Bx . Cy . Az = 1 : 1$, t. j. $Ax . By . Cz = Az . Bx . Cy$.

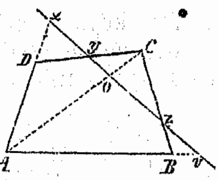
Dodatek. Z poslední rovnice plyne

$$Ax : Bx = Cy : By = Cz : Az.$$

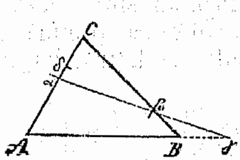
3. Věta předešlá platí i pro jakýkoliv mnohoúhelník a zní tedy vůbec: *Protíná-li nějaká příčka strany jakéhokoliv mnohoúhelníka, jsou vždycky součiny z úseků k sobě nepřiléhajících vespolek sobě rovny.*

Důkaz. Úhlopříčnami rozvrhne se obrazec na samé trojúhelníky, a provede se hořejší věta v každém trojúhelníku zvlášť. Zde jest na př. v obr. 196. v $\triangle ACD$ $Ao . Cy . Dx = Ax . Co . Dy$, a z toho $Ao : Co = Dy : Cy = Dx : Ax$; v $\triangle ABC$ jest $Ao . Bv . Cz = Av . Bz . Co$, a z toho $Ao : Co = Av : Bv = Cz : Bz$, pročež také $Av : Bv = Dy : Cy = Cz : Bz = Dx : Ax$, a z toho konečně

$$Av . Dx . Cy . Bz = Ax . Dy . Cz . Bv.$$



Obr. 196.



Obr. 197.

4. *Určí-li se ve dvou stranách a v prodloužení třetí strany, nebo v prodloužení všech tří stran nějakého trojúhelníka body tak, aby byly součiny z úseků k sobě nepřiléhajících vespolek sobě rovny; budou všechny tyto body ležeti na přímce jediné* (obrácená věta 2.).

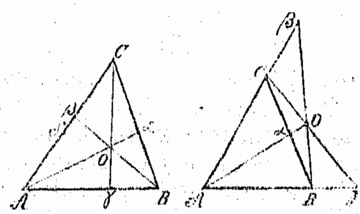
Důkaz nepřímý. Body α, β, γ (obr. 197.) leží tak, že jest $A\alpha . C\beta . B\gamma = C\alpha . A\gamma . B\beta$. Protáhne-li se dvěma z těchto bodů na př. β a γ přímka, musí tato nutně i bodem α procházeti; nebo kdyby procházela některým jiným bodem strany AC, na př. bodem δ, muselo by být dle odstavce (2) $A\delta . C\beta . B\gamma = C\delta . A\gamma . B\beta$. Z toho by však následovalo, když by se předešlá rovnice touto rozdělila, že jest $\frac{A\alpha}{A\delta} = 1$, nebo $A\alpha = A\delta$, t. j. bod, v němžto příčka body β a γ vedená stranu AC prosekne, splyne s bodem α dohromady, a tím leží všechny tři body v přímce jediné.

5. *Vedou-li se jakýmkoliv bodem, který buď uvnitř nebo i mimo trojúhelník leží, příčky rohové, rozpadnou se strany trojúhelníka v úseky, které objeden vzaty dávají stejné součiny.*

Důkaz. Přímka $B\beta$ jest příčkou trojúhelníka $AC\gamma$ a podobně jest přímka $A\alpha$ příčkou trojúhelníka $BC\gamma$; pročež bude (v obr. 198.)
$A\beta . CO . B\gamma = C\beta . AB . O\gamma$, a [cení obdržíme
$O\gamma . C\alpha . BA = CO . A\gamma . B\alpha$, z čehož znásobením po náležitém skrá-

$A\beta . C\alpha . B\gamma = C\beta . A\gamma . B\alpha$.

Dodatek. Kdyžby jedna z těchto příček procházela středním bodem některé strany, tak žeby bylo na př. $A\gamma = B\gamma$; proměnila by se poslední rovnice s následující $A\beta . C\alpha = C\beta . B\alpha$, z nížto plyne $A\beta : C\beta = B\alpha : C\alpha$, t. j. druhé dvě strany byly by příslušnými příčkami srovnalostně proseknuty, a dle § 31. 2, dodat. 3, byla by přímka spojující bod α s β rovnoběžnou s AB. — A naopak: Kdykoliv jsou dvě strany trojúhelníka srovnalostně rozděleny a dělící body spojí se s protilehlými rohy a vede-li se mimo to průsečníkem takto vzniklým přímka k rohu třetímu; bude strana rohu tomuto protilehlá rozpůlena. Důkaz zůstaven čtenáři.



Obr. 198.

6. *Určí-li se ve všech stranách trojúhelníka a nebo také jen v jedné a v prodloužení druhých dvou stran body α, β, γ tak, aby byly součiny z úseků k sobě nepřiléhajících vespolek sobě rovny; budou míti přímky, jež body tyto s protilehlými rohy spojují, společný průsečník.* (Obrácená věta 5.)

Důkaz. Je-li v obr. 198. $A\beta . C\alpha . B\gamma = C\beta . A\gamma . B\alpha$, spoj dva takovéto body na př. α a γ s přináležejícími rohy přímkami $C\gamma$ a $A\alpha$; přímky tyto proseknou se v O, kterýmžto bodem když se protáhne rohová příčka BO, musí býti strana AC proseknuta v bodu β. (Provedení důkazu dle 4.)

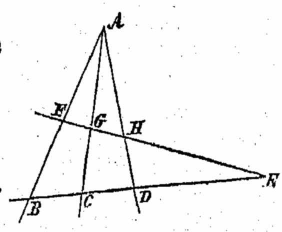
Pozn. Na základě této věty dají se také dokázati věty o společném průsečníku výšek i přímek, jež v trojúhelníku rozpůlují úhly (§ 15. 8), a nebo jimižto se spojují vrcholy se středními body protilehlých stran (§ 18. 8).

7. *Třemi z téhož bodu vybíhajícími přímkami rozdělí se dvě sbíhavých přímek v takové částky, že budou součiny z nepřiléhajících k sobě úseků na obou přímkách v témž poměru.*

Důkaz. V obr. 199. má být $FG . HE : GH . FE = BC . DE : CD . BE$. Dle odstavce (2) jest, když si pomyslíme, že byl trojúhelník GCE

proseknut nejprvé příčkou AB a potom příčkou AD, $BC.EF.GA = EB.CA.FG$, a $GH.DE.CA = EH.GA.CD$; z toho pak plyne
AG : AC = FG : FE = BC : BE, . . . 1)
AG : AC = HG : HE = DC : DE . . . 2).

Rozdělíme-li první rovnici druhou, bude
$\frac{FG}{FE}:\frac{HG}{HE}=\frac{BC}{BE}:\frac{DC}{DE}$, a z toho konečně
FG . HE : GH . FE = BC . DE : CD . BE.

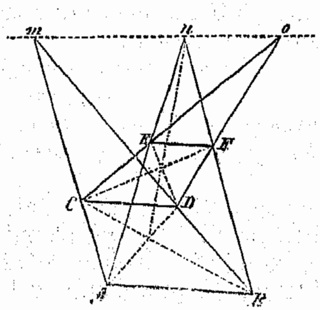


Obr. 199.

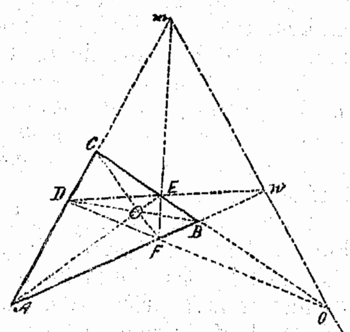
8. *Spojí-li se krajní body daných rovnoběžek AB, CD, EF vespolek přímkami, které se po dvou proseknou v bodech m, n, o, budou ležeti průsečníky tyto na přímce jediné.*

Důkaz. V △mAB (obr. 200.) jest mC : mA = CD : AB,
△nAB „ nA : nE = AB : EF,
△oCD „ oE : oC = EF : CD, což když se znásobí, dá mC . nA . oE : mA . nE . oC = 1 : 1, to jest součiny mC . nA . oE a mA . nE . oC jsou sobě rovny. Body m, n, o mají tudy vzhledem k trojúhelníku ECA takové položení, že leží nejen na prodloužení jeho stran, nýbrž že jsou i součiny z nepřiléhajících k sobě úseků vespolek sobě rovny; leží tudy dle odstavce (4) na téže přímce.

Pozn. Narejsují-li se v lichoběžnících CDEF, ABCD, ABEF úhlopříčny a nazvou se průsečníky jejich x, y, z; budou i z těchto bodů vždycky dva s jedním z dřívějších bodů m, n, o ležeti na přímce jediné, čehož vyobrazení a důkaz zůstaven čtenáři.



Obr. 200.



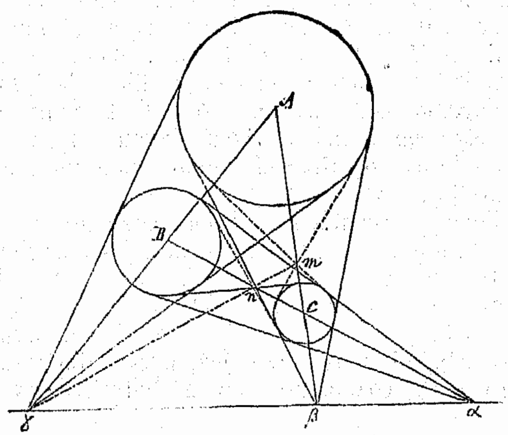
Obr. 201.

9. *Vpíše-li se do trojúhelníka ABC jiný trojúhelník DEF tak, aby přímky spojující protilehlé body obou trojúhelníků procházely týmž bodem; budou průsečníky, jež prodloužením stran protilehlých vzniknouti musí, ležeti na přímce jediné.*

Důkaz. Buďtež ABC a DEF (obr. 201.) dané trojúhelníky. Považuje-li se An za příčku trojúhelníku ADE, Am za příčkuí trojúhelníku EBF a Cp za příčku trojúhelníku ADF; bude po případu

$En . BC . DA = Dn . EF . CA,$
$Fm . EC . BA = BC . Em . FA,$
$Dp . FB . AC = AB . Fp . DA,$ z čehož znásobením a náležitým skrácením obdržíme
$EC . En . DA . Fm . FB . Dp = Dn . EF . Em . FA . Fp . DC.$
Že ale jest dle (5) $AD . CE . FB = FE . CD . AF$, můžeme touto rovnicí rovnici předešlou rozděliti, a obdržíme $En . Fm . Dp = Dn . Em . Fp$. t. j. body m, n, p leží v prodloužení trojúhelníka DEF a nachází se dle (4) na přímce jediné.

10. *Jak mile jsou dány tři kruhy, leží vždycky 1) všechny tři zevnitřní body podobnosti na přímce jediné; 2) dva a dva vnitřní body podobnosti leží vždycky s jedním zevnitřním bodem podobnosti též na přímce jediné.*



Obr. 202.

Důkaz. Duďtež A, B, C (obr. 202.) dané kruhy, jichžto poloměry dle řady jsou r_1 r_2 r_3, a zevnitřní body podobnosti α, β, γ. Dle § 35. 6, dodat. 3, jest, když středy daných kruhů vespolek spojíme,
$A\gamma : B\gamma = r_1 : r_2$
$B\alpha : C\alpha = r_2 : r_3$
$C\beta : A\beta = r_3 : r_1$, z čehož plyne
$A\gamma . B\alpha . C\beta : B\gamma . C\alpha . A\beta = 1:1$, t. j. $A\gamma . B\alpha . C\beta = B\gamma . C\alpha . A\beta$.

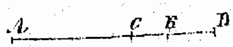
Body α, β, γ leží v prodloužení stran trojúhelníka ABC, a tudy vzhledem k této rovnici a odstavci (4) na přímce jediné.

Že vnitřní body podobnosti, na př. m a n s bodem γ leží na přímce jediné, plyne z konstrukce bodů m a n ve spojení s odstavcem 4).

II. Harmonické paprsky a harmonické dělení.

§ 54.

1. Přímka slove **harmonicky** rozdělenou, určí-li se v ní dva body C a D tak, aby vzdálenosti jejich od obou krajů A a B v témž poměru byly. Jsou-li na př. v obr. 203. vzdálenosti bodu C od obou krajů (AC a BC) v témž poměru, jako vzdálenosti bodu D (AD a BD), tak že by bylo CA : CB = DA : DB; jest přímka AB v bodech C a D harmonicky rozdělena.



Obr. 203.

Body C a D, jimiž se rozdělení toto stalo, slovou **body harmonické** (harmonische Punkte); tímtéž právem ale slovou i body A a B harmonickými body přímky CD, poněvadž se jimi, jak z následující srovnalosti vysvítá, přímka CD taktéž harmonicky rozděluje. Je li totiž AC : BC = AD : BD, bude také přirozeně AD : BD = AC : BC a z toho proměněním vnitřních členů AD : AC = BD : BC, t. j. přímka DC jest body A a B harmonicky rozdělena.

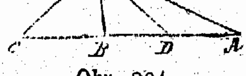
Z těchto čtyr harmonických bodů slovou vždycky ony dva, jež k sobě náleží, **body spojitými** nebo **sdruženými** (conjugirte oder zugeordnete P.).

2. Harmonickým rozdělením rozpadne se přímka ve tři části, z nichžto obě krajní takový součin dávají, jako část vnitřní s celou přímkou. Je-li totiž AC : BC = AD : BD, bude AC . BD = BC . AD. A poněvadž se mohou z dvou stejných součinů udětati srovnalosti rozličné, jest patrno, že se může i přímka rozličným spůsobem, t. j. dvěma rozličnými body dle téhož, avšak libovolného poměru harmonicky rozděliti, což ostatně i z následující věty na jevo vychází.

3. *Rozpůlí-li se v nějakém trojúhelníku jeden vnitřní a jeho vedlejší zevnitřní úhel, bude protilehlá strana trojúhelníka půlicími přímkami harmonicky rozdělena.*

Důkaz. Dle § 31, 6 jest v obr. 204. AD : DB = AO : OB, a taktéž AC : BC = AO : OB, pročež AD : BD = AC : BC.

Dodatek. Dokud body A a B svého místa nezmění, může se určit na přímce AB libovolné množství harmonicky sdružených bodů, poněvadž může nad AB rozličných trojúhelníků bez počtu sestrojeno býti, jichžto druhé dvě strany vždycky v jiném poměru k sobě budou. Rozpůlením úhlů, jež v trojúhelnících těchto okolo protilehlého rohu leží, obdržíme totiž pokaždé dva harmonicky sdružené body C a D.

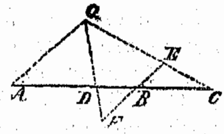


Obr. 204.

Úloha. *Mezi dvěma body A a C mají se určiti jiné dva body B a D tak, aby byly A, B, C, D body harmonickými.*

Provedení. Vezme se mimo přímku AC libovolný bod O (obr. 204.) a spojí se s oběma boy A a C; postaví-li se v O kolmice na OC (OD ⊥ AC), bude v D jeden žádaný bod. Narejsuje-li se nyní v témž vrcholu ∢b = α, určí rameno OB druhý bod B. Důkaz dle věty (3). Že při tom musí být OD ⊥ OC, plyne z § 6. 2, γ.

Jiné provedení této úlohy zakládá se na odstavci (2). Vezme se totiž opět mimo přímku AC (obr. 205.) libovolný bod O a spojí se s oběma krajními body A a C. Nyní ale vezme se na přímce AC mezi oběma krajními body úplně libovolný bod *B* a protáhne se jím rovnoběžka k AO; udělá-li se ještě BF = BE, a spojí bod *F* s *O*, budou B a D příslušnými body harmonickými.



Obr. 205.

Důkaz. V △AOC jest AC:BC = AO:BE, nebo když za BE dosadíme BF, AC:BC = AO:BF. Že ale jest △ADO ∼ △BDF, bude také AO:AD = BF:DD, nebo AO:BF = AD:BD. Z této a ze srovnalosti předcházející plyne AC:BC = AD:BD, kterážto srovnalosť jednostejnou jest s onou v odstavci (3).

Obě tyto konstrukce shodují se úplně s tím, co v odstavci (2) o harmonickém dělení na jiném základě odůvodněno bylo.

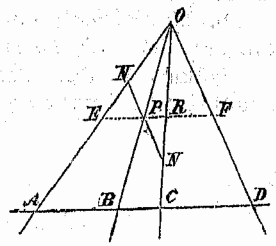
4. Přímky, jež čtyrmi harmonickými body procházejíce, buď vespolek rovnoběžné jsou a nebo ve společném bodu se sbíhají, slovou **harmonické paprsky** (harmonische Strahlen, Harmonikalen); z nich pak slovou ony, které procházejí body sdruženými, **paprsky sdružené.**

Na přímce, která jest s jedním ze čtyr harmonických bodů rovnoběžná, odříznou druhé dva sdružené paprsky část, která jest čtvrtým paprskem rozpůlena.

Důkaz. Buďtež A, B, C, D čtyry harmonické body (obr. 206.), tudy AO, BO, CO, DO čtyry harmonické paprsky, a při tom MN ∥ OD; má se dokázati, že jest MP = NP. Vede-li se bodem P, v němžto paprsek s DO sdružený přímku MN protíná, rovnoběžka k *AD*, bude △EMP ∼ △EOF, pročež

MP : OF = EP : EF . . . . I) a

△PNR ∼ △ORF, pročež NP : OF = PR : RF . . . . II).



Obr. 206.

Vzhledem však k § 31. 5, jsou rovnoběžky AD a EF sbíhavými přímkami proseknuty srovnalostně; musí být tudy i EF v témž poměru jako AD, t. j. také harmonicky rozdělená, tak že bude EP : EF = PR : RF; a když jest v srovnalosti I. EP : EF = MP : OF, musí být také PR : RF = MP : OF.

Z této a ze srovnalosti II. plyne pak NP : OF = MP : OF, a z toho NP = MP.

5. *Každá příčka, jež protíná čtyry harmonické paprsky, jest jimi sama harmonicky rozdělena.*

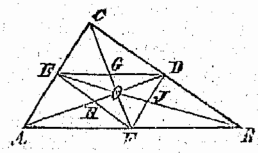
Důkaz. Buďtež OA, OB, ON, OF čtyry harmonické paprsky (obr. 206.) a EF libovolná příčka. Vede-li se bodem P ku pomoci

$MN \parallel OF$, bude $\triangle EMP \sim \triangle EOF$, a tudy $EP:EF = MP:OF$,
$\triangle NPR \sim \triangle ORF$, „ $RP:RF$, $MP:OF$.

Když ale dle odstavce (4) jest $MN = NP$, jsou v těchto srovnalostech obě pravé strany sobě rovny, pročež také $EP:EF = RP:RF$.

6. *Spojí-li se v jakémkoliv trojúhelníku střední body stran mezi sebou a mimo to ještě příčkami s protilehlými rohy; bude každá takováto příčka vzniklými průsečníky harmonicky rozdělena.*

Má se v obr. 207. dokázati, že jsou A, H, O, D, potom B, J, O a E, a konečně C, G, O a F pokaždé čtyry harmonické body.



Obr. 207.

Důkaz. Příčky AD, BE, CF protínají se v jediném bodu (§ 15, 8), a poněvadž jest také $EF \parallel CB$, bude $\triangle AEH \sim \triangle ACD$, pročež $AH:AD = EH:CD$. Že ale jest v $\triangle ABC$ $CD = DB$, bude v podobném $\triangle AEF$, $EH = HF$, a následovně v předešlé srovnalosti $AH:AD = FH:CD$ . . . . I.

Z podobnosti trojúhelníků FHO a OCD plyne ale $OH:OD = FH:CD$, tak že z této a ze srovnalosti (I) obdržíme $AH:AD = OH:OD$, t. j. body A, H, O, D jsou čtyry harmonické body.

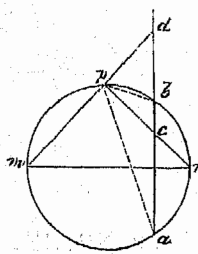
Další důkaz vede se tímtéž způsobem a zůstavuje se čtenáři.

7. *Každá tětiva kruhu, která stojí kolmo na průměru, jest obvodem kruhu a přímkami, jež spojují libovolný bod obvodu s krajními body průměru, harmonicky rozdělena.*

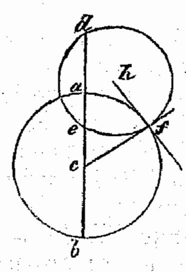
Důkaz. Vzhledem k tomu, že jest v obr. 208. úhel mpn pravý a $\sphericalangle bpn = \sphericalangle npa$ (§ 25. 2 a § 26. 4), provede se důkaz dle odstavce (3).

8. *Střední body dvou kruhů C a c a oba jejich body podobnosti jsou vespolek body harmonickými.*

Důkaz. V obr. 121. jest dle § 35. 6, dod. 3, $CB:cB = r:r'$, a taktéž $Cb:cb = r:r'$; pročež i $CB:cB = Cb:cb$.



Obr. 208.



Obr. 209.

9. *Když se dva kruhy pravoúhelně protínají, jsou průměry jednoho kruhu obvodem druhého kruhu harmonicky rozděleny.*

Důkaz. Protínají-li se oba kruhy na př. v bodu f pravoúhelně (§ 21. 7, pozn. 2), bude když v kruhu c (obr. 209.) libovolný průměr, na př. ab narejsujeme a prodloužíme, $\overline{cf}^2 = ce.cd$ (§ 35, 3), což se i takto psáti může $ce.cd = \overline{ca}^2 = ca.cb$, nebo $ce:ca = cb:cd$. . . . I. Z této srovnalosti plyne předně $(ce+ca):ca = (cb+cd):cd$, t. j. $be:ca = bd:cd$, nebo $be:bd = ca:cd$, ... II.

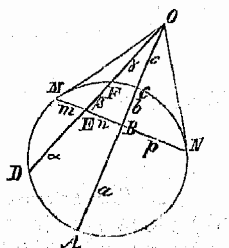
Z této poslední srovnalosti plyne $be:(bd-eb) = ca:(cd-ca)$, nebo $be:ed = ca:ad$ . . . . α).

Ze srovnalotti (I) obdržíme ale za druhé ještě $(ce+ac):ec = (cb+cd):cb$, t. j. $bc:ce = bd:bc$, nebo když ještě dosadíme za $bc = ca$, $be:ce = bd:ca$, nebo $be:bd = ce:ca$, z kteréhož opět plyne $be:(bd-eb) = ce:(ca-ce)$ t. j. $be:ed = ce:ae$. . . β).

Z porovnání srovnalostí α) a β) vychází nyní, že $ce:ae = ca:ad$, nebo $(ce+ae):ae = (ca+ad):ad$, to jest $ca:ae = cd:ad$, a z toho zase, když součiny $ae.cd = ca.ad$ postavíme v jinou srovnalost $ae:ad = ca:cd$. Musí tudy, když se k této a k srovnalosti (II) zřetel vezme, býti konečně $be:bd = ae:ad$.

10. *Každá sečna, jež z libovolného, mimo kruh ležícího bodu stejnodobě s dvěma tečnami vychází, jest obvodem kruhu a tětivou, tečné body spojující, harmonicky rozdělena.*

Důkaz. Buďtež OM a ON dvě tečny (obr. 210.), OD a OA dvě sečny, z nichž tato středem kruhu prochází, a MN tětiva, která tečné body spojujíc dané sečny v bodech E a B protíná. Poznačíme-li k vůli krátkosti úseky AB, BC, CO dle řady a, b, c, úseky pak DE, EF, FO písmenkami α, β, γ, a úseky ME, EB, BN dle řady m, n, p; bude předně v $\triangle$ BON: $\overline{NO}^2 = (b+c)^2 + p^2$, a poněvadž jest také $\overline{NO}^2 = OC.OA = c(a+b+c)$, bude $(b+c)^2 + p^2 = c(a+b+c)$, což když se provede a za p^2 se dosadí stejná hodnota $a.b$, dá $b^2 + 2bc + c^2 + a.b = ac + bc + c^2$, nebo $ac = b^2 + bc + ab = b(a+b+c)$, t. j. AB . CO = BC . AO. . . (I).



Obr. 210.

Za druhé jest $\overline{NO}^2 = \overline{OB}^2 + p^2$; že ale jest v $\triangle$ BEO: $\overline{OB}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{EB}^2 = (\beta+\gamma)^2 - n^2$, bude také $\overline{NO}^2 = p^2 + (\beta+\gamma)^2 - n^2$, nebo když za p dosadíme hodnotu $p = m + n$, $\overline{NO}^2 = (m+n)^2 + (\beta+\gamma)^2 - n^2 = m^2 + 2mn + (\beta+\gamma)^2 = m(m+2n) + (\beta+\gamma)$. Avšak $m + 2n = m + n + n = p + n =$ NE, pročež $m(m+2n) =$ EM . EN, a dle § 35. 1, EM . EN = DE . EF $= \alpha . \beta$, tak že bude $\overline{NO}^2 = \alpha . \beta$ $(\beta+\gamma)^2$. Nyní jest ale i pro sečnu DO, $\overline{ON}^2 =$ OF . OD $= \gamma(\alpha+\beta+\gamma)$, pročež také $\alpha\beta + (\beta+\gamma)^2 = \gamma(\alpha+\beta+\gamma)$, což když se provede, dá $\alpha\beta + \beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2 = \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2$, nebo $\alpha\gamma = \beta^2 + \alpha\beta + \beta\gamma = \beta(\alpha+\beta+\gamma)$, t. j. DE . FO = EF . DO . . . . (II).

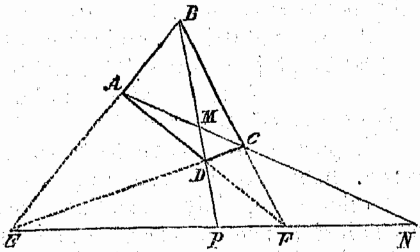
Úloha 1. Ku třem, na téže přímce ležícím bodům určí se čtvrtý bod tak, aby byly všechny čtyry body harmonické.

Úloha 2. Ze čtyr harmonických bodů jsou dány dva sdružené body a poměr vzdáleností jejich od jednoho z druhých dvou sdružených bodů; mají se určiti tyto dva body.

211. *Prodlouží-li se v jakémkoliv různoběžníku dvě a dvě proti-*

lehlé strány a vedou se mimo to obě úhlopříčny; budou vzniklými průsečníky nejen obě úhlopříčny, nýbrž i přímka průsečníky protilehlých stran spojující harmonicky rozděleny.

Budiž ABCD (obr. 211.) daný různoběžník, a E, F průsečníky protilehlých jeho stran. Aby se dokázalo, že jest na př. úhlopříčna AC v bodech M a N harmonicky rozdělena, pozorujme některý ze čtyrech trojúhelníků, jež mají AC za společnou stranu, na př. $\triangle ABC$. V tomto trojúhelníku jsou vedeny bodem D rohové příčky, pročež dle § 53. 5, $AM.CF.BE = MC.BF.AE$. Avšak i EF jest tomuto trojúhelníku příčkou, pročež také dle § 53. 2, $AN.CF.BE = CN.BF.AE$. Rozdělí-li se touto rovnicí rovnice předešlá, bude $AM:AN = MC:CN$, t. j. úhlopříčna AC jest harmonicky rozdělena.



Obr. 211.

Že jest také $BM:MD = BP:PD$, a $EP:PF = EN:FN$, plyne z § 54. 4 a 5.

III. Dodatky.

Mocnina bodu a osa rovnomocnin. Pol a polárka.

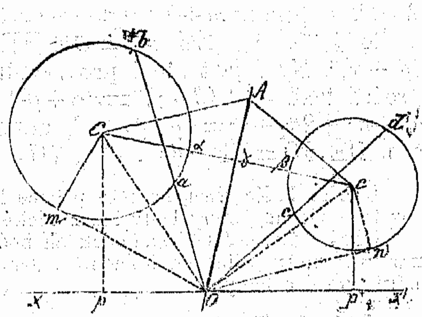
§ 55.

1. **Mocninou** bodu vzhledem k nějakému kruhu (Potenz des P.) slove součin z obou, mezi tímto bodem a obvodem kruhu obsažených úseků jaké koliv tímto bodem procházející sečny.

Součin tento, který se dle § 35. 3, rovná druhé mocnině tečny z daného bodu ke kruhu vedené, jest závislým toliko na vzdálenosti daného bodu od středu kruhu a na poloměru téhož kruhu, tak že jím jest pro týž bod a týž kruh vyjádřena plocha určité velikosti.

V obr. 212. jest na př. $Oa.Ob = \overline{Om}^2$ mocninou bodu O vzhledem ke kruhu C, a $Oc.Od = \overline{On}^2$ mocninou téhož bodu vzhledem ke kruhu C'.

Vzhledem k dvěma kruhům může míti bod stejné mocniny, jestliže jsou součiny z nadzmíněných úseků pro oba kruhy sobě rovny, jako na příklad v obr. 212.,



Obr. 212.

kde jest $Oa.Ob = \overline{Om}^2$, $Oc.Od = \overline{On}^2$, a při tom $\overline{Om}^2 = \overline{On}^2$.

2. *V kolmici spuštěné z bodu stejných mocnin na obojstřednu daných kruhů jest každý bod bodem stejných mocnin pro tyto kruhy.*

Důkaz. Budiž $Oa.Ob = Oc.Od$ (obr. 212.) a při tom $OA \perp CC'$; spojí-li se bod O s oběma středy, bude dle § 35. 3, $Oa.Ob = \overline{Om}^2$, $Oc.Od = \overline{On}^2$, následovně $\overline{Om}^2 = \overline{On}^2$, t. j. tečny z bodu stejných mocnin na oba kruhy spuštěné jsou sobě rovny. Že ale jest $\overline{Om}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{Cm}^2$, $\overline{On}^2 = \overline{OC_1}^2 - \overline{C_1n}^2$, bude také $\overline{OC}^2 - \overline{Cm}^2 = \overline{OC}^2_1 - \overline{C_1n}^2$, a z toho $\overline{OC}^2 - \overline{OC_1}^2 = \overline{Cm}^2 - \overline{C_1n}^2 = r^2 - r_1^2$, a nebo jak z pravoúhelných trojúhelníků $OC\gamma$ a $OC_1\gamma$ obdržíme $\overline{OC}^2 - \overline{OC}^2_1 = \overline{C\gamma}^2 - C_1\gamma$ . . . I).

Podobně jest pro některý jiný bod na přímce OA, na př. pro bod A, $\overline{AC}^2 = \overline{C\gamma}^2 + \overline{\gamma A}^2$, $\overline{AC}^2_1 = C_1\lambda^2 + \overline{A\gamma}^2$ a z toho odečtěním $\overline{AC}^2 - \overline{AC}^2_1 = \overline{C\gamma}^2 - \overline{C_1\gamma}^2$ . . . . II). Z této a z rovnice (I) plyne konečně, že jest $OC^2 - OC_1^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AC_1}^2$, t. j. jako bod O jest i bod A bodem stejných mocnin pro kruhy C a C_1.

Pozn. Měřické místo bodu, který má vzhledem k dvěma kruhům stejné mocniny, jest dle předešlé věty přímka na obojstředně kolmo postavená.

Přímka (OA), jejížto veškeré body mají vzhledem k dvěma kruhům stejné mocniny, slove **osou rovnomocnin** nebo **čarou mocnosti** (Potenzlinie, Chordale, Radical-Achse).

Výsledky. a) Osa rovnomocnin stojí na obojstředně kolmo.

b) Protínají-li se dva kruhy, jest pospolná tětiva čarou mocností.

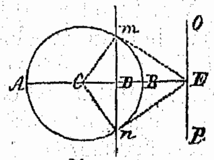
c) Dotýkají-li se dva kruhy vespolek, jest společná jich tečna osou rovnomocnin.

d) Osa rovnomocnin půlí každou, k daným kruhům náležející společnou tečnu (důkaz snadný).

e) Jsou-li ku třem kruhům z nějakého bodu vedené sečny vespolek sobě rovny, jest tento bod společným průsečníkem os rovnomocnin k těmto kruhům náležejících, a slove **středem rovnomocnin** pro tyto kruhy (Chordalpunkt, Radical-Centrum).

Pozn. Konstrukce čáry stejných mocností provede se na základě výsledků *a* a *d*.

3. **Pol a polárka.** Jsou-li ze čtyr harmonických bodů některé dva sdružené krajními body průměru kruhového, slove každý z druhých dvou sdružených bodů **polem** druhého, a kolmice postavená v některém z těchto polů, na přímku všemi body procházející jmenuje se **polárkou** nebo **čarou polarní** (Polare, Pollinie) přináležejícího polu. Tak jsou na př. v obr. 213., jestliže bylo dříve uděláno AD : DB = AE : BE, body



Obr. 213.

D a E jeden druhému polem (Pol) a přímka $mn \perp AB$ jest pak polárkou bodu E právě tak jako jest kolmice op polárkou bodu D.

Porovnáme-li s tímto vysvětlením uvedené věty o harmonických bodech v § 54, shledáme o polech D a E následující vlastnosti:

a) Přibližuje-li se jeden pol kruhovému středu, bude se druhý pol od něj vzdalovati, a jak mile by první z nich přišel do středu kruhu, bude druhý v nekonečné od něj vzdálenosti.

b) Přibližuje-li se ale jeden pol krajnímu bodu průměru (B), bude se mu i druhý pol přibližovati, a to tak dlouho, až se v něm konečně oba sjednotí, z čehož potom plyne: „polárkou nějakého bodu v obvodu kruhovém jest tečna bodu tomuto přináležející."

4. *Poloměr kruhu jest střední měř. srovalostnou mezi vzdálenostmi obou polův od středu kruhu.*

Důkaz. Jsou-li totiž A, B, D, E (obr. 213.) harmonickými body, jest $AD:BD = AE:BE$, kteréžto hodnoty mohou se rozložiti a také následovně psáti $(BC+CD):(BC-CD) = (CE+BC):(CE-BC)$; z toho pak upotřebením známé vlastnosti srovnalostí $(a+b):(a-b) =$ atd. obdržíme $BC:CD = CE:BC$, nebo obrácením $CD:BC = BC:CE$.

5. *Přímky spojující zevnitřní pol s průsečníky, které vzniknou proseknutím se kruhu a vnitřní polárky, jsou tečnami kruhu.*

Důkaz. Dle předešlé věty jest $EC:Cm = Cm:CD$, z čehož následuje, že jest $\triangle CDm \sim \triangle CEm$, t. j. že konečně $\sphericalangle CmE = D = R$, a Em že jest tedy tečnou.

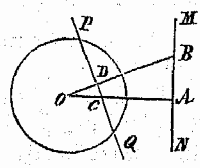
Pozn. Vedeme-li proto z nějakého bodu obě tečny ke kruhu a spojíme tečné body přímkou, bude tato polární čarou daného bodu. Srovnej s tím § 54, 2 a 3.

6. *Sečna libovolným bodem ke kruhu vedená jest tímto bodem, obvodem kruhu a svou polárkou harmonicky rozdělena.*

Vyobrazení a důkaz na základě § 54. 10. a § 55. 2 zůstaveno čtenáři.

7. *Polárky veškerých bodů nějaké přímky procházejí polem dané přímky.*

Důkaz. Je-li C polem přímky MN (obr. 214.) a PQ přináležející polárkou bodu B, musí jíti PQ bodem C. Jest totiž dle (4) $OD.OB = r^2$, a $CO.AO = r^2$, pročež $OD.OB = CO.AO$; body C, D, A a B leží tudy dle § 35. 2, na obvodu kruhu, a poněvadž jest při tom $\sphericalangle A = R$, musí, když bod C spojíme s D, v tětivovém čtyrúhelníku ABCD i protilehlý úhel $CDB = R$.



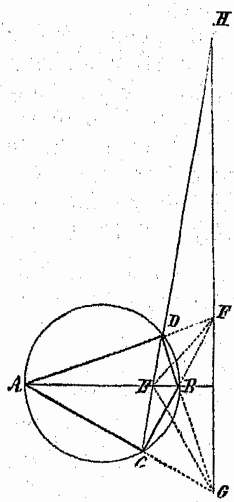
Obr. 214.

Výsledky. a) Pol jakékoliv přímky, která daným bodem prochází (na př. v obr. 214. bodem C) leží v polárce daného bodu. Naopak zase b) polárka jakéhokoliv bodu, který leží na dané přímce (na př. na MN), prochází polem dané přímky.

c) Prochází-li bod nějakou přímkou (na př. přímkou MN), bude se jeho přináležející polárka v polu dané přímky otáčeti.

8. *V každém do kruhu vepsaném čtyrúhelníku určí se průsečníkem obou úhlopříčen a průsečníky protilehlých stran trojúhelník, v němžto jest každý roh polem protilehlé strany.*

V obrazci 215. jest EFG takovýto trojúhelník, v němžto musí být E polem strany FG, F polem strany EG, a G polem strany EF. Na důkaz prodlouží se obě úhlopříčny, až by prosekly přímku FG; i budou pak přímky AJ, HC i HG harmonicky rozděleny (§ 54. 11). Že ale vzhledem k větě (6) při harmonických bodech C, E, D, H polárka k bodu E náležející proseknouti musí přímku HC, a při bodech A, B, E, J zase přímku AJ; musí polárka tato nutně skrze H a J jíti a splyne tudy v jedno s přímkou FG, t. j. přímka FG jest polárkou bodu E. — Podobným spůsobem dokáže se, že jest G polem strany EF, a F polem strany EG.



Obr. 215.

9. **Největší a nejmenší hodnoty** (maxima a minima). Ačkoliv určování největších a nejmenších hodnot, jakéž veličiny měřické při jistých konstrukcích dosáhnouti mohou, celkem do oboru vyššího počtářství náleží; nebude předce od místa, aspoň ony případy, které v měřictví nižším po různu sem a tam roztroušené přicházejí a známými nám dosud prostředky dosti jednoduše určiti se dají, blíže objasniti.

Tak byly na př. již vysvětleny a zjištěny následující největší a nejmenší hodnoty:

a) Nejkratší čarou mezi dvěma body jest přímka.

b) Nejkratší vzdáleností nějakého bodu od dané přímky jest kolmice z tohoto bodu na přímku spuštěná.

c) Nejkratší čarou, která mezi dvěma rovnoběžkami od jedné k druhé vedena býti může, jest kolmice z jedné rovnoběžky na druhou spuštěná.

d) Největší tětivou v kruhu jest průměr.

e) Nejkratší ze všech tětiv, které uvnitř ležícím bodem procházejí, jest ta, která stojí na průměru bodem tímto procházejícím kolmo atd.

10. *Ze všech pravoúhelníků stejného obvodu má čtverec největší plochu.*

Důkaz. Narejsuje-li se nad přímkou rovnající se polovičce daného obvodu, na př. nad AD (obr. 125.) půlkruh, a rozloží se průměr ve dvě částky rovnající se po případu výšce a délce pravoúhelníka; bude tu $\overline{AO}^2 > \overline{EC}^2 > \overline{GH}^2$ atd., t. j. $\overline{AO}^2 > AC.CD > AG.GD$ a t. d.

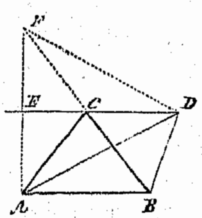
11. *Ze všech pravoúhelníků stejného obsahu má čtverec nejmenší obvod.* (Obrácená věta předešlá. Důkaz snadný.)

12. *Ze všech trojúhelníků, které mají stejné obsahy a stejné základny, má trojúhelník rovnoramený nejmenší obvod.*

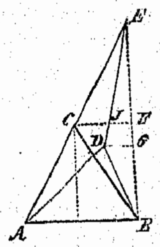
Důkaz. Postaví-li se dva takové trojúhelníky, na př. ABC a ABD (obr. 216.) na společnou základnu AB, budou vrcholy jejich následkem stejných obsahů ležeti v přímce, která jest se základnou rovnoběžná, na př. v ED ‖ AB. Spustí-li se nyní AE⊥ED a prodlouží se BC a k *F*, bude EF = EA, FC = CA (§ 13. 5), tak že bude nejen trojúhelník AFC nýbrž i △AFD rovnoramený a tudy FD = AD, následovně AD + DB = FD + DB. Také ale v △BFD bude FD + DB > FB, nebo dosazením stejných hodnot AD + DB > AC + CB, a z toho připočtěním základny AD + DB + AB > AC + CB + AB.

D o d a t e k. Jelikož pravidelný trojúhelník taktéž rovnoramenným jest, bude věta: *Ze všech trojúhelníků stejného obsahu má trojúhelník pravidelný nejmenší obvod.* (Důkaz na základě předešlé věty a § 13. 6, 46. 2, b.)

P o z n. V trojúhelníku FDB bude míti součet FD + DB nejmenší hodnotu, když se promění lomená čára FDB v přímku FB.



Obr. 216.



Obr. 217.

13. *Ze všech trojúhelníků, které mají při téže základně stejný obvod, má trojúhelník rovnoramený největší obsah.*

Buďtež trojúhelníky ABC a ABD (obr. 217.), které, majíce stejné obvody stojí na společné základně; v prvním jest AC = BC, v druhém však AD > DB, a následkem stejných obvodů AC + BC = AD + BD. Prodlouží-li se AC o CE = AC, a spojí se E s body B a D, bude AD + DE > AE, následovně také AD + DE > AC + CB, nebo AD + DE > AD + DB a z toho DE > DB. Že ale jest △BCE rovnoramený, bude, když ještě narejsujeme CF ‖ AB ‖ DG, základna EB v F rozpůlena a při tom CF⊥EG (proč?); z nerovnosti pak DE > DB plyne, že bod D neleží v kolmici CF, nýbrž v prodloužení strany EJ, tak že musí patka kolmice DG padnout pod patku F, t. j. BF jakožto výška trojúhelníka ABC jest větší nežli výška trojúhelníka ABD (BG), tedy také △ABC > △ABD.

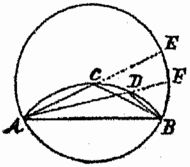
D o d a t e k. Ze všech trojúhelníků stejného obvodu má trojúhelník pravidelný největší obsah. (Důkaz na základě předešlé věty.)

14. *Ze všech v kruhovém úseku narejsovaných trojúhelníků, které mají k oblouku náležející tětivu za základnu, má trojúhelník rovnoramený největší plochu i největší obvod.*

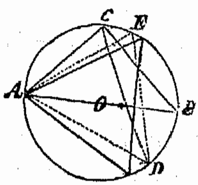
Důkaz. Největší hodnota ploského obsahu plyne z okolnosti, že jest tu výška trojúhelníka rovnoramenného ze všech ostatních výšek největší (obr. 218.). O největší hodnotě obvodu přesvědčíme se takto: úhly ACB a ADB jsou sobě rovny (§ 27. 1, a, b), pročež vzhledem k § 11. 3, b, v rovnoramenných trojúhelnících CEB a DFB i $\sphericalangle E = F$. Úhly tyto stojíce na téže tětivě AB mají vrcholy v obvodu kruhu, jehož středem jest C, a kde jest průměr $AE > AF$, t. j. $AC + CE > AD + DF$, nebo $AC + CB + > AD + DB$, a z toho $AC + CB + AB > AD + AD + AB$.

15. *Ze všech do kruhu vepsaných trojúhelníků má trojúhelník pravidelný největší obvod i největší obsah.*

Důkaz. Že má pravidelný trojúhelník větší plochu i větší obvod nežli každý jiný nad jeho základnou v kruhu narejsovaný trojúhelník, plyne z odstavce (14); přijde jenom na to, zdali některý jiný rovnoramený trojúhelník, který by měl totiž větší základnu, nežli trojúhelník pravid., ještě větší obvod a plochu míti nemůže. Největší základnou rovnoramenného trojúhelníka v kruhu může býti průměr; musí se tedy dokázati, že i takovýto trojúhelník svým obvodem i svou plochou menší jest troúhelníka pravidelného.



Obr. 218.



Obr. 219.

V obr. 219. jest na př. $\triangle ABC$ takovýmto trojúhelníkem; narejsujeme-li ale nad jeho ramenem AC jakožto základnou jiný rovnoramený trojúhelník, bude dle předešlého odstavce $\triangle ABC < \triangle ACD$; a však z téhož důvodu jest i rovnoramený $\triangle ADC < ADE$, tak že bude $\triangle ABC < \triangle ACD < ADE$ .... Takovýmto postupem dají se v kruhu sestavovati i dále nové rovnoramené trojúhelníky, které budou svým obvodem i obsahem vždycky větší předešlých, až se konečně přijde na takový rovnoramený trojúhelník, jenž na kterou koliv stranu postaven, pokaždé zase rovnoramenným zůstává, tak že v kruhu více žádného zvětšení nepřipouští. Takovýmto trojúhelníkem jest ale toliko trojúhelník pravidelný.

Dodatek. Vůbec má vždycky ze všech do kruhu vepsaných mnohoúhelníků při stejném počtu stran mnohoúhelník pravidelný největší obvod i obsah.

Díl druhý.

Trigonometrie.

Kniha první.

O funkcích úhloměrných vůbec.

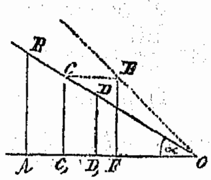
§ 56.

1. Dosavádní nauky měřické o přímočarných obrazcích zůstaly by neúplnými, kdybychom toliko vlastnosti přímek a obrazců zevrubně znali mohouce je nejen konstruktivně nýbrž i na základě algebraického pojmutí všeobecným výkonům počtářským podrobovati; k dokonalému poznání obrazcův přímočarných náleží ještě úplná známosť úhlů, zejmena známosť jejich závislosti na stranách obrazců, ku které již dříve na rozličných místech poukázáno bylo (§ 12, 19, 34). Dosud mohli jsme totiž velikosť a závislosť úhlů na stranách obrazců jen při takových úhlech určiti, které se graficky přímo určiti daly, jako na př. úhel pravý, úhly $\frac{1}{2}R$, $\frac{1}{3}R$, $\frac{2}{3}R$, 36^0, 72^0 . . ., k čemuž obrazce pravidelné zvláště a půlení úhlů vůbec příležitosť poskytovaly.

Ostatní úhly, jež se při určování obrazců naskytly, mohly jen zvláštními konstrukcemi nebo úhloměrem blíže udány býti. Výsledky takto určené mají ale tu vadu do sebe, že pro nedokonalosť upotřebovaných při tom nástrojů a nebo i následkem nedostatečné práce vždycky nespolehlivé a mnohdy jen přiblížené dobré jsou. Zvláště rejsováním určená dokonalosť úhlů nedá se zaručiti, protože malé, třeba až na minuty a vteřiny udané úhly kružidlem tak snadno ani určiti nelze.

Algebraické určování veličin měřických rozšířilo se proto i na úhly, a to tak, že se vždycky počtem určí všechny neznámé částky obrazce, když jeho určovací částky taktéž číselně dány jsou, kterýžto oddíl měřictví slove **trigonometrie** vůbec. Spůsobem tímto odstraní se všechny z nedokonalosti našich nástrojů povstalé nedostatky a překážky každého měření.

2. Velikosť úhlů, která závisí na vespolném odchýlení se jednoho ramena od druhého, může se určiti zvláštními poměrnými čísly, a sice následovně: Pomyslíme-li sobě, že na př. úhel α (obr. 220) vznikl, když se pohyblivé rameno BO odchýlilo od pevného ramena AO tak daleko, až přišlo do položení v obrazci naznačeného, a spustíme-li na to s rozličných míst pohyblivého ramena kolmice na rameno pevné; vzniknou samé pravoúhelné, vespolek sobě podobné trojúhelníky t. j. $\triangle DD_1O \sim \triangle CC_1O \sim \triangle BAO$. Z podobnosti této pak následuje:



Obr 220.

$$1)\ \frac{AB}{BO} = \frac{CC_1}{CO} = \frac{DO}{D_1O},\quad 2)\ \frac{AO}{BO} = \frac{C_1O}{CO} = \frac{D_1O}{DO},\quad 3)\ \frac{AB}{AO} = \frac{CC_1}{C_1O} = \frac{DD_1}{D_1O},$$

$$4)\ \frac{BO}{AO} = \frac{CO}{C_1O} = \frac{DO}{D_1O},\quad 5)\ \frac{BO}{AB} = \frac{CO}{CC_1} = \frac{DO}{DD_1},\ \text{atd.}$$

Číselná hodnota poměrů těchto nemůže se, jak z obrazu viděti lze, změniti, dokud pohyblivé rameno svého směru nezmění; kdykoliv se ale položení tohoto ramena, t. j. velikosť úhlu α promění, změní nutně i nadzmíněné poměry svou hodnotu. Poměr na př. $\frac{EF}{FO}$ má zcela jinou hodnotu nežli poměr $\frac{CC_1}{C_1O}$, ač v obou stejný člen $CC_1 = EF$ přichází.

Poněvadž tedy hodnota poměrů těchto záleží na velikosti úhlu α, může se i naopak z velikosti těchto poměrů souditi zase na velikosť úhlu, čímž poměry ty pro algebraické určování úhlů zvláštní důležitosti nabývají a **úkony** č. **funkcemi úhloměrnými** slovou*).

3. K určení velikosti nějakého úhlu postačí známosť jednoho takovéhoto poměru, který vždycky dvě strany pravoúhelného trojúhelníka obsahuje, a z nichžto se nazývá:

a) poměr protilehlé odvěsny k podponě **sinus** úhlu α, což se zkráceně znamená $\frac{AB}{BO} = \sin \alpha$;

b) poměr přílehlé odvěsny k podponě **cosinus** úhlu α, což se píše $\frac{AO}{BO} = \cos \alpha$;

---

* Slovem úkon neboli funkce značí se v matematice vůbec každá veličina, jížto hodnota se může měniti a na jiné, taktéž proměnlivé veličině nějakým spůsobem závislá jest. Tak jest na př. ploský obsah kruhu funkcí jeho poloměru.

c) poměr odvěsny protilehlé k odvěsně přílehlé **tangenta** úhlu α, což se píše $\frac{AB}{AO} = tang\ \alpha$;

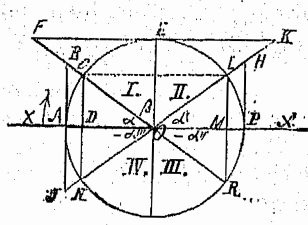
d) poměr odvěsny přílehlé k odvěsně protilehlé **cotangenta** úhlu α, což se píše $\frac{AO}{BO} = cot\ \alpha$;

e) poměr podpony k odvěsně přílehlé **secanta** úhlu, což se píše $\frac{BO}{AO} = sec\ \alpha$;

f) poměr podpony k odvěsně protilehlé **cosecanta** úhlu α, což se píše $\frac{BO}{AB} = cosec\ \alpha$.

Číselné veličiny sinus, cosinus, tangenta, cotangenta, secanta a cosecanta jsou tudy, poněvadž velikosť jejich na velikosti úhlů závisí a s ním se změniti musí, **úkony** č. **funkce úhloměrné**, a díl trigonometrie, který jedná o jich vlastnostech, nazývá se **úhloměrství** nebo **goniometrie** (odtud i název „funkce goniometrické").

4. Názvy některých úkonů úhloměrných jsou původu měřického, jak z grafického jich vyobrazení vysvítá. Vezme-li se totiž na pohyblivém ramenu část, která podponu pravoúhelného trojúhelníka představuje, za míru ostatních stran a položí se za ni jednička, splynou číselné hodnoty některých stran s hodnotou funkcí úhloměrných, jak z obr. 221. viděti lze. Je-li totiž v obr. 221. xx_1 ramenem pevným, FO ramenem pohyblivým, a při tom $CO = 1$; bude $\frac{CD}{CO} = \frac{CD}{1} = CD = sin\ \alpha$, $\frac{DO}{CO} = \frac{DO}{1} = DO = cos\ \alpha$, t. j. kolmice spuštěná s krajního bodu pohyblivého ramena na rameno pevné zobrazuje nám $sin\ \alpha$, a část pevného ramena od patky sinusu až k vrcholu zobrazuje nám $cos\ \alpha$. — Jestliže pak narejsujeme poloměrem $CO = 1$ z vrcholu O kruh a postavíme i v A kolmici na pevné rameno ($AB \perp AO$), bude dle hořejších výměrů $\frac{CD}{DO} = \frac{BA}{AO} = \frac{BA}{1}$ t. j. $BA = tang\ \alpha$, a $\frac{CO}{DO} = \frac{BO}{AO} = \frac{BO}{1}$, t. j. $BO = sec\ \alpha$. **Tangentu** úhlu zobrazuje tudy část tečny v krajním bodu pevného ramena vztýčené, která jest obsažena mezi tečným bodem a pohyblivým ramenem; taktéž **secantu** úhlu zobrazuje část pohyblivého ramena od vrcholu až k průsečníku s tangentou.



Obr. 221.

Pozn. Slovem tečna a sečna rozumí se v měřictví přímky vzhledem k jich položení v kruhu, bez ohledu ale na jich délku; v trigonometrii jsou to však určité číselné hodnoty, které proto i jinak pojmenovati třeba; odtud rozdíl v názvech tangenta a tečna, secanta a sečna.

Postaví-li se konečně ve vrcholu daného úhlu na pevné rameno kolmice (EO⊥AO) a učiní se EF ∥ AO, až by EF proseklo pohyblivé rameno, bude následkem podobnosti trojúhelníků CDO a EFO $\frac{DO}{CD}=\frac{FE}{EO}=\frac{FE}{1}$, t. j. FE $= cotang\,\alpha$, a $\frac{CO}{CD}=\frac{FO}{EO}=\frac{FO}{1}$, t. j. FO $= cosec\,\alpha$, tak že cotangenta zobrazuje se přímkou EF a cosecanta přímkou OF.

Přímky CD, DO, AB, BO, EF, FO, jichžto hodnota poloměrem AO změřena velikosť úhloměrných funkcí udává, zobrazují tedy po případu tyto funkce, a dostávají, ač neprávě, také jejich jména.

Příklad. Je-li v △ABO obr. 221. AB = 3, AO = 4; bude BO = 5, a při tom $\sin\alpha=\frac{AB}{BO}={}^3/_5$, $\operatorname{Cos}\alpha=\frac{AO}{BO}={}^4/_5$, $\operatorname{tang}\alpha=\frac{AB}{AO}={}^3/_4$, $\sec\alpha={}^5/_4$, $\operatorname{Cotg}\alpha={}^4/_3$, $\operatorname{Cosec}\alpha={}^5/_3$. — Jakou hodnotu obdrží tyto funkce, když by bylo AB = 5, AO = 8?

Dodatek. Délka pohyblivého ramena, jižto za míru ostatních přímek přijmeme, nemá na velikosť funkcí úhloměrných žádného vlivu, poněvadž hodnota těchto dle odstavce (3) jen poměrem zmíněných přímek udána býti může a tento pro jakou koliv délku pohyblivého ramena jednostejný zůstává (odst. 2). Že pak se přijmul zrovna poloměr kruhu za jedničku, stalo se pouze k vůli jednoduchosti a že dle § 48. 2, pozn. číselné hodnoty přímek od míry nezávislé jsou a ihned na jinou míru r uvedeny býti mohou.

5. Dle dosavádního vysvětlení úkonů úhloměrných mohlo by se zdáti, že úkony svrchu jmenované náležejí jen k úhlům ostrým, jaké se nacházejí v trojúhelníku pravoúhelném; uvážíme-li ale, že každý tupý úhel již určen jest, jak mile jeho výplněk (ostrý úhel) známe, bude také i tupý úhel funkcemi svého výplňku dostatečně určen.

Potřebujeme jenom zvláštními znaménky poznačiti, kde a jakým výplňkem jest ostrý úhel, k němuž se funkce naše vztahují, a tak bude lze, význam úhloměrných úkonů i na úhly ostatních čtverníků rozšířiti, jak se o tom zobrazením následovně přesvědčiti můžeme.

Mysleme sobě totiž, že pohyblivé rameno *BO* od pevného *AO* směrem šipu se odchylujíc všechny čtverníky kruhu prošlo (obr. 221.) a při tom s pevným ramenem všechny úhly od 0° až do 360° zavíralo. Úhel v druhém čtverníku, na př. tupý úhel AOL bude určen, jak mile se udá jeho ostrý výplněk LOP(∢AOL = 180° — α'); taktéž bude zcela určen vypouklý úhel v třetím čtverníku, na př. ∢AOR, jestliže se udá ostrý úhel POR(∢AOR = 180° + α''). Konečně i vypouklý úhel ve čtvrtém čtverníku, na př. ∢AON bude určen ostrým úhlem α'''. Jelikož tu tedy vždycky přijde jen na určení ostrého úhlu, který dle toho, jaké položení má, buď se připočísti nebo odečísti má; musíme i u funkcí úhloměrných nejen k jich velikosti nýbrž i k jich položení zřetel vzíti, aby se potom z funkce úhloměrné s jistotou poznati mohlo, zdali do počtu toliko úhel ostrý, tupý, nebo vypouklý atd. vzat býti má.

§ 57.

1. Majíce na zřeteli, že se duté i vypuklé úhly rozložiti dají na úhel přímý nebo plný, k nimžto se patřičný ostrý úhel jen připočte a to buď kladně nebo záporně; přikládáme i úkonům úhloměrným znaménka kladu a záporu. Zejména přijmulo se položení všech úkonů, v jakém se nám objevují při ostrém úhlu prvního prostoru, za kladné, kdežto pak položení tomuto protivné za záporné přijmuto.

Jest tudy a) **sinus** kladným v prostoru prvním a druhém, kdežto přímka, hodnotu jeho zobrazující, na pevné rameno shora dopadá; ve třetím však a ve čtvrtém prostoru bude sinus záporným, jelikož se přímka, sinus zobrazující, pod ramenem pevným nachází.

b) **Cosinus** jest kladným v levo od vrcholu na pevném ramenu (v prostoru 1. a 4.), záporným ale v pravo na prodloužení pevného ramena, t. j. v prostoru 2. a 3.

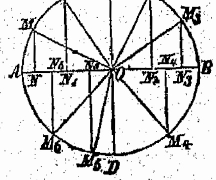
c) **Tangenta** jest kladnou v 1. a 3. prostoru, když jest totiž přímka tangentová vzhůru vztyčená; zápornou jest však tangenta v 2. a 4. prostoru, když přímka tangentová z krajního bodu pevného ramena dolů dopadá.

d) **Cotangenta** jest taktéž jako tangenta kladnou v 1. a 3. prostoru, směřuje-li totiž přímka cotangentová k levé straně; zápornou ale v 2. a ve 4. prostoru, kde přímka cotangentová v pravo směřuje.

e) **Secanta** jest kladnou v 1. a ve 4. prostoru, kdežto se částkou pohyblivého ramena zobrazuje; zápornou ale ve 2. a 3. prostoru, když k jejímu zobrazení pohyblivé rameno přes vrchol prodloužiti musíme.

f) **Cosecanta** jest kladnou ze stejných příčin jako secanta v prostoru 1. a 2., zápornou pak v prostoru 3. a 4.

2. Abychom mohli spůsob závislosti každé jednotlivé funkce na úhlu blíže pozorovati, mysleme sobě, že úhel α rostl od 0^0 až do 360^0, a funkce že jsou při tom vždycky náležitými přímkami zobrazeny. Snadno tu potom shledáme, když poloměr kruhu za jedničku přijmeme, že a) kdykoliv úhlu v prvním prostoru ubývá (obr. 222.) stejnodobě i **sinusu** ubývá, až konečně bude $\sin 0^0 = 0$.



Obr. 222.

b) Přibývá-li však úhlu od 0^0 až k 90^0, na př. $\sphericalangle$ AOM < $\sphericalangle$ AOM$_1$ < atd., bude i sinusu přibývati, až konečně pro $\alpha = 90^0$ splyne sinus s poloměrem CO dohromady, tak že bude $\sin 90^0 = CO = +1$. — Zvětšuje-li se úhel α dále, tak že pohyblivé rameno přejde do druhého čtverníku, na př. při úhlu AOM$_2$, bude hodnota sinusu, která pořád ještě kladnou jest, klesati, až konečně pro úhel $\alpha = 180^0$ opět nejmenší své ceny dosáhne, t. j. $\sin 180^0 = 0$. — Při dalším zvětšování se úhlu α přejde pohyblivé rameno do 3. čtverníku (na př. při úhlu AOM$_4$) a sinus stane se záporným (M$_4$N$_4$); při tom bude ale sinus zároveň s úhlem růsti, až pro $\sphericalangle \alpha = 270^0$ splyne s poloměrem DO, tak že bude $\sin 270^0 = DO = -1$. Pro úhel konečně $\alpha > 270^0$ zůstane sinus vždycky ještě záporným, avšak hodnoty jeho bude ubývati (na př. při úhlu AOM$_5$), až konečně bude $\sin 360^0 = 0$.

c) Kdyby se pohyblivé rameno místo nahoru bylo pohybovalo dolů pod rameno pevné, mohlo by s tímto opět svírati úhel rovný úhlu α, (v obr. 121. na př. $\sphericalangle$ AOB $= \sphericalangle$ AON); ten však byl by vzhledem k položení úhlu AOB na protivné straně, následovně záporným, t. j. je-li $\sphericalangle AOB = +\alpha$, musí být $\sphericalangle AON = -\alpha$. Při tom jest, jak z rovnoramenného $\triangle$ NOC plyne, v němžto uděláno bylo $CD \perp AO$, $CD = -ND$; že ale CD představuje $\sin \alpha$, a DN zase $\sin(-\alpha)$, bude také $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, t. j. dva stejné, znaménkem ale protivné úhly mají také stejné, znaménkem protivné sinusy.

d) Kdyžby pohyblivé rameno úhel 360^0 několikrát kolem do kola proběhlo, opakovalo by se při každém novém otočení všechno, co v odstavcích a) a b) o úhlu a jeho sinusu pověděno bylo, znovu v témž pořádku za sebou, protože ramena nových úhlů pokryjou vždycky ramena úhlů dřívějších; z této příčiny jest $\sin \alpha = \sin(360^0 + \alpha) = \sin(n \cdot 360^0 + \alpha)$.

Pozn. Dle § 39, 3. pozn. 2. vyjádřuje, když poloměr kruhu za jedničku přijmeme, 2π obvod kruhu č. oblouk náležející k 360^0; a poněvadž se na místo úhlu dosaditi může i jeho míra, psává se také zhusta $2\pi = 360^0$, t. j. $\pi = 180^0$, čímž vzorec právě vysvětlený obdrží jednodušší formu: $\sin \alpha = \sin(2\pi + \alpha) = \sin(n \cdot 2\pi + \alpha)$.

3. **Cosinus** 0^0 rovná se, jak z obrazu 221. viděti lze, poloměru AO, tak že máme, když poloměr za jedničku přijmeme, a) $\cos 0^0 = +1$.

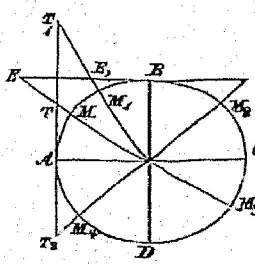
Přibývá-li pak úhlu od 0^0 do 90^0 (na př. $\sphericalangle AOM < \sphericalangle AOM_1 < \ldots$), bude cosinusu ubývati, až pro úhel $AOC = 90^0$ bude $\cos 90^0 = 0$; zvětšuje-li se úhel α ještě dále, přejde pohyblivé rameno do 2. čtverníku a cosinus stane se tím záporným. Hodnoty jeho bude stále přibývati, až konečně bude $\cos 180^0 = OB = -1$. I pro úhly, jichžto pohyblivé rameno se ve 3. čtverníku nachází, zůstane cosinus záporným, jenže hodnoty jeho zase ubývati bude, až konečně bude $\cos 270^0 = 0$. Konečně ve 4. čtverníku, kde zase cosinus hodnotu kladnou obdrží, shledáme, že cosinusu od 0 až do 1 přibývá, tak že bude $\cos 360^0 = +1$.

Jest tedy cosinus kladným a hodnota jeho mezi 0 a 1 pro úhly od 0^0 až do 90^0, nebo pro úhly od 270^0 až do 360^0; záporným ale a hodnota jeho mezi 0 a -1 pro úhly od 90^0 až do 180^0 nebo od 180^0 až do 270^0.

b) Pro záporný úhel $AON = \sphericalangle AOC$ (obr. 221.) bude cosinus právě tak přímkou DO zobrazen jako pro kladný úhel AOC; pročež máme $Cos(-\alpha) = Cos\,\alpha$, t. j. dva stejné, znaménkem rozdílné úhly mají jednostejný cosinus. Taktéž jest zde, jako bylo u sinusu, $Cos\,\alpha = Cos\,(2\pi + \alpha) = Cos\,(n\,.\,2\pi + \alpha)$.

Dodatek. Z porovnání těchto dvou úkonů úhloměrných vysvítá, že jsou sinus a cosinus čísla obsažená mezi $+1$ a -1, tak že každá číselná hodnota, která leží mezi $+1$ a -1, za sinus nebo cosinus nějakého úhlu považována býti může.

4. Přibývání a ubývání **tangenty** a **secanty** bude nyní dle předešlého již z pouhého vyobrazení zřetelné; jest totiž, jak z obr. 223. viděti lze a) pro úhel 0^0, kde obě ramena dohromady splynou, $tang\,0^0 = 0$, $sec\,0^0 = AO = +1$. Roste-li ale úhel od 0^0 až do 90^0, bude přibývati i tangenty i secanty, jenže mnohem rychleji, nežli přibývalo sinusu nebo cosinusu (na př. tg AOM $=$ AT, $tg\,AOM_1 = AT_1$, atd.), a dosáhne-li úhel 90^0, bude tangenta i secanta nekonečně velká, protože se v krajním bodu A vztýčená tečna s pohyblivým ramenem BO teprvé v nekonečnosti sejde. Jest tedy $tg\;90^0 = +\infty$, $sec\;90^0 = +\infty$.



Obr. 223.

Přijde-li pohyblivé rameno do druhého čtverníku, na př. při tupém úhlu AOM_2, bude se muset v bodu A postavená tečna dolů prodloužiti, t. j. tangenta stane se zápornou ($tg\,AOM_2 = -AT_2$), a taktéž secanta bude se muset přes vrchol prodloužiti a stane se tím zápornou, t. j. $sec\,AOM_2 = -OT_2$. Obou těchto funkcí bude ale ubývati, čím více se bude úhel v druhém čtverníku zvětšovati, až konečně bude $tg\,180^0 = 0$, $sec\,180^0 = -1$.

Pozn. Tangenta proběhne tedy v prvním čtverníku všechny hodnoty od 0 až do $+\infty$, přeskočí odtud na $-\infty$, a proběhne tu všechny hodnoty od $-\infty$ až do 0. Secanta, ačkoliv také vzroste až na $+\infty$ nebo $-\infty$, nemůže se zmenšiti než na $+1$ nebo -1.

Roste-li úhel dále od 180^0 do 270^0, bude tangenty i secanty přibývati, jenže bude při tom hodnota této zápornou, oné pak kladnou. Pro úhel 270^0 bude $tg\,270^0 = +\infty$, $sec\,270^0 = -\infty$. Pro úhly konečně přes 270^0 bude zase obou funkcí ubývati, při čemž bude tangenta zápornou a secanta kladnou, až konečně shledáme, že $tg\,360^0 = 0$, $sec\,360^0 = +1$.

b) Pro záporný úhel jest, jak z obr. 121. viděti lze, $tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$ (protože jest AB = AJ), $sec(-\alpha) = sec\,\alpha$.

Pozn. Z ubývání a přibývání hodnot tangenty a secanty vysvítá, že jest právě tak 0 jako ∞ přechodem neboli hranicí mezi hodnotami kladnými a zápornými.

5. **Cotangenty** a **cosecanty** ubývá v prvním čtverníku stále, když úhlu od 0^0 až do 90^0 přibývá, a při tom jest

a) $Cotg\,0^0 = +\infty$, $Cosec\,0^0 = +\infty$; na to jich obou stále ubývá, až pak jest $Cotg\,90^0 = 0$, $Cosec\,90^0 = +1$. V druhém čtverníku jich zase obou přibývá do nekonečnosti, jenže se při tom stane Cotangenta zápornou, tak že bude $Cotg\,180^0 = -\infty$, $Cosec\,180^0 = +\infty$. Pro úhly ve třetím čtverníku stane se cosecanta zápornou, cotangenta ale kladnou, a obou jich bude ubývati, až pak bude $Cotg\,270^0 = 0$, $Cosec\,270^0 = -1$. Ve čtvrtém čtverníku obdrží cotangenta i cosecanta hodnotu zápornou, která roste zároveň s úhlem, až jest konečně $Cotg\,360^0 = -\infty$, $Cosec\,360^0 = -\infty$.

Pozn. Z toho jest viděti, že mají tangenta a cotangenta všechny možné ceny, které jsou obsaženy mezi $+\infty$ a $-\infty$, tak že se může jakékoliv číslo, buď si ono kladné nebo záporné, vždycky považovati buď za tangentu nějakého úhlu.

b) Pro záporný úhel jest $Cotg(-\alpha) = -Cotg\,\alpha$, $cosec(-\alpha) = -cosec\,\alpha$. K vůli lepšímu přehledu jsou znaménka kladu a zápornosti při každém jednotlivém úkonu úhloměrném v následující tabulku sestavena:

Úkon úhloměrný	v I. čtverníku	v II. čtverníku	ve III. čtverníku	ve IV. čtverníku
sinus	jest + a roste od 0 do +1	jest + a klesá od 1 do 0	jest — a roste od 0 do —1	jest — a klesá od —1 do 0
Cosinus	+ klesá od +1 do 0	— roste od 0 do —1	— klesá od —1 do 0	+ roste od 0 do +1
tangenta	+ roste od 0 do ∞	— klesá od $-\infty$ do 0	+ roste od 0 do $+\infty$	— klesá od $-\infty$ do 0
cotangenta	+ klesá od $+\infty$ do 0	— roste od 0 do $-\infty$	+ klesá od $+\infty$ do 0	— roste od 0 do $-\infty$
secanta	+ roste od +1 do $+\infty$	— klesá od $-\infty$ do —1	— roste od —1 do $-\infty$	+ klesá od $+\infty$ do +1
cosecanta	+ klesá od $+\infty$ do +1	+ roste od +1 do $+\infty$	— klesá od $-\infty$ do —1	— roste od —1 do $-\infty$

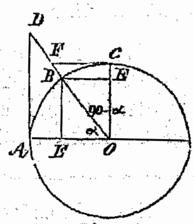
6) V některých spisech uvádějí se ještě dva zvláštní úkony úhloměrné, totiž **sinus příčný** (sinus versus) a **cosinus příčný**

(cosinus versus), jichžto se ale jen velmi zřídka ve výpočtech potřebuje, an se bez nich vždycky obejíti lze. Sinus příčný jest totiž doplňkem cosinusu na jedničku, t. j. na poloměr za míru vzatý, jako na př. v obr. 121., kde jest $Cos\,\alpha + AD = 1$, a tudy $AD = sin\,v\,.\,\alpha$. Taktéž doplňuje se sinus nějakého úhlu příčným cosinusem na jedničku, jako na př. v obr. 121., kde jest $EH + HO = EH + sin\,\alpha = 1$, a tudy $EH = Cos\,v\,.\,\alpha$.

Pozn. Když veškerou proměnu funkcí úhloměrných přehledneme, objeví se nám pozoruhodná okolnost, a sice že v prvním čtverníku, z něhož se vlastně hodnoty funkcí úhloměrných vyvozují, *sinus, tangenta* a *secanta* zároveň s úhlem rostou (ovšem že rozličnou rychlostí a v rozličných mezích), **cosinus**, **cotangenta** a **cosecanta** ale klesají. Z příčin, které se nám později vysvětlí (§ 59. 1), slovou posledně jmenované funkce **funkcemi doplňkovými** nebo **co**funkcemi funkcí prvějších. Cosinus jest na př. doplňková funkce neboli cofunkce sinusu, atd.

§ 58.

1. Když jsme v předešlém seznali zákony o změnách každé funkce úhloměrné zvláště, pozorujme nyní jejich souvislost mezi sebou, což se opět státi může nejpohodlněji způsobem měřickým na základě podobných trojúhelníků. Vyobrazíme-li totiž všechny k úhlu α (obr. 224.) náležející funkce úhloměrné, bude $\triangle DAO \sim \triangle BEO \sim \triangle FCO$, v kterých, když se přijme poloměr kruhu za míru, bude zobrazovati $BE = sin\,\alpha$, $EO = Cos\,\alpha$, $AD = tg\,\alpha$, $DO = sec\,\alpha$, $FC = Cotg\,\alpha$, $OF = cosec\,\alpha$.



Obr. 224.

Z pravoúhelných těchto trojúhelníků vychází přímo, že jest

$$\left.\begin{array}{l} \overline{BE}^2 + \overline{EO}^2 = \overline{BO}^2 \\ \overline{DA}^2 + \overline{AO}^2 = \overline{DO}^2 \\ \overline{FC}^2 + \overline{CO}^2 = \overline{FO}^2 \end{array}\right\} \text{ nebo } \begin{array}{ll} sin\,\alpha^2 + Cos\,\alpha^2 = 1 \;\ldots\ldots & 1) \\ tg\,\alpha^2 + 1 = sec\,\alpha^2 \;\ldots\ldots & 2) \\ Cotg\,\alpha^2 + 1 = Cosec^2 \;\ldots\ldots & 3) \end{array}$$

Z podobnosti trojúhelníků BEO a DAO vychází dále, že jest

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{BE}{EO} = \dfrac{DA}{AO}, \\ \dfrac{BO}{EO} = \dfrac{DO}{AO}, \end{array}\right\} \text{nebo } \begin{array}{ll} \dfrac{sin\,\alpha}{Cos\,\alpha} = tg\,\alpha \;\ldots\ldots & 4) \\ \dfrac{1}{Cos\,\alpha} = sec\,\alpha \;\ldots\ldots & 5) \end{array}$$

Z podobnosti pak trojúhelníků BEO a FCO vychází, že jest

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{EO}{BO} = \dfrac{FC}{CO}, \\ \dfrac{BO}{BE} = \dfrac{FO}{CO}, \end{array}\right\} \text{nebo } \begin{array}{ll} \dfrac{Cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = Cotg\,\alpha \;\ldots\ldots & 6) \\ \dfrac{1}{sin\,\alpha} = cosec\,\alpha \;\ldots\ldots & 7) \end{array}$$

Konečně pak vychází ještě z podobnosti trojúhelníků ADO a FCO

$$\frac{AD}{AO} = \frac{CO}{FC}, \text{ t. j. } tg\,\alpha = \frac{1}{Cotg\,\alpha} \;\ldots\ldots \quad 8)$$

Pozn. Těchto 8 základných rovnic musí sobě čtenář dobře v paměť vštípiti, jelikož se téměř všechno další trigonometrické počítání na nich zakládá; nejlepší prostředek k tomu jest arciť časté opakování jejich měřického odůvodnění. A že rovnice tyto pravosť svou podrží i pro každou jinou velikosť úhlu α, můžeme se ihned náležitým vyobrazením a vespolným porovnáním vzniklých tak trojúhelníků přesvědčiti.

Dodatek. Bedlivý pohled na rovnice hořejší objeví nám pozoruhodnou okolnosť,

že se rovná cotangenta zvrácené hodnotě tangenty (8)
" " " cosecanta " " sinusu (7)
" " " secanta " " cosinusu (5),

tak že tu vlastně vždycky jen s třemi úhloměrnými funkcemi, sinusem totiž, cosinusem a tangentou vystačiti můžeme.

2. *Dána-li jedna z funkcí úhloměrných nějakého úhlu, mají se téhož úhlu ostatní funkce počtem nalezti.*

a) Budiž dán nejprvé ku př. $\sin\alpha$, mají se ostatní funkce úhlu α sinusem vyjádřiti. — Z rovnice (1) předešlého odstavce plyne $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha^2}$.

Pozn. Jelikož v rovnici této veličina kořenová kladnou i zápornou býti může, jest i $\cos\alpha$ toliko co do velikosti určen; zdali se ale na levé nebo na pravé straně, t. j. kladně nebo záporně vzíti má, zůstává tak dlouho nerozhodnuto, dokud není blíže udán úhel α, protože číslo $\sin\alpha$ tak dobře k ostrému úhlu jako k tupému náležeti může. Poznámka tato platí i pro všechny následující rovnice.

Když právě nalezenou hodnotu dosadíme do rovnice (4) a (6) bude $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}}$, $\cot g = \frac{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}}{\sin\alpha}$.

Z rovnice (5) a (7) obdržíme, když tam známou již hodnotu za $\sin\alpha$ dosadíme, $\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}}$, $\operatorname{Cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

b) Budiž dán $\cos\alpha$; mají se ostatní funkce vyjádřiti $\cos\alpha$. — Spůsobem v odstavci (a) provedeným obdržíme z rovnice (1) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos\alpha^2}$; dále pak $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos\alpha^2}}{\cos\alpha}$; $\operatorname{Cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos\alpha^2}}$; $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$; $\operatorname{Cosec}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos\alpha^2}}$.

c) Když jest dána $tg\,\alpha$, bude z rovnice (6) $\sin\alpha = \cos\alpha \,.\, tg\,\alpha$; že ale jest dle rovnice (5) $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$ a z rovnice (3) $\sec\alpha = \sqrt{1 + tg\,\alpha^2}$, bude také $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg\,\alpha^2}}$, a z toho konečně

$sin\,\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg\,\alpha^2}}$. Podobnou cestou postupujíce shledáme $sec\,\alpha = \sqrt{1 + tg\,\alpha^2}$; $Cosec\,\alpha = \frac{\sqrt{1 + tg^2}}{tg\,\alpha}$; $Cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$.

d) Když jest dána $cotg\,\alpha$, bude dle podobných redukcí, které aby čtenář vykonal, odporučujeme: $sin\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg\,\alpha^2}}$; $cos\,\alpha = \frac{Cotg\,\alpha}{\sqrt{1 + Cotg\,\alpha^2}}$; $tg\,\alpha = \frac{1}{Cotg\,\alpha}$; $sec\,\alpha = \frac{\sqrt{1 + cotg\,\alpha^2}}{Cotg\,\alpha}$; $cosec\,\alpha = \sqrt{1 + Cotg\,\alpha^2}$.

e) Když jest dána $sec\,\alpha$, bude $sin\,\alpha = \frac{\sqrt{sec\,\alpha^2 - 1}}{sec\,\alpha}$; $Cos\,\alpha = \frac{1}{sec\,\alpha}$; $tg\,\alpha = \sqrt{sec\,\alpha^2 - 1}$; $Cotg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{sec\,\alpha^2 - 1}}$; $cosec\,\alpha = \frac{sec\,\alpha}{\sqrt{sec\,\alpha^2 - 1}}$

f) Je-li dána konečně $cosec\,\alpha$, bude $sin\,\alpha = \frac{1}{Cosec\,\alpha}$; $cos\,\alpha = \frac{\sqrt{cosec\,\alpha^2 - 1}}{Cosec\,\alpha}$; $tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{cosec\,\alpha^2 - 1}}$; $cotg\,\alpha = \sqrt{cosec\,\alpha^2 - 1}$; $sec\,\alpha = \frac{Cosec\,\alpha}{\sqrt{cosec\,\alpha^2 - 1}}$.

Příklady. Jakou hodnotu budou mít v každém z následujících případů ostatní funkce, když se rovná 1) $sin\,\alpha$ a) $^3/_5$, b) $^7/_{25}$, c) $\frac{28}{55}$;

„ „ „ 2) $Cos\,\alpha$ a) $^5/_{13}$, b) $\frac{21}{29}$, c) $\frac{56}{65}$;

„ „ „ 3) $tg\,\alpha$ a) 1, b) $^8/_{15}$, c) $2^7/_{10}$;

„ „ „ 4) $cotg\,\alpha$ a) $\sqrt{\frac{1}{3}}$, b) $1^9/_{40}$, c) $3^5/_{12}$.

Čtenář pokus se o grafické zobrazení každé z těchto funkcí! Jak se vyobrazí neznámá z rovnic: $x = a\,sin\,\alpha$, $y = b\,tg\,\alpha$, $z = \frac{c}{cos\,\alpha}$?

Vztahy úhloměrných funkcí dvou úhlů.

§ 59.

1. Dva úhly doplňujíce se na vzájem na 90°, slovou úhly doplňkovými a mohou se vyjádřiti α a $90^0 - \alpha$; dva úhly však, jichžto součet se rovná úhlu přímému, slovou úhly výplňkovými a mohou se vyjádřiti α a $180^0 - \alpha$ (§ 5. 11). V obr. 224. jest na př. když poloměr kruhu opět za jedničku přijmeme a rameno BO za pohyblivé považujeme $sin(90^0 - \alpha) = BJ = EO = Cos\,\alpha$ . . . . . . 9)

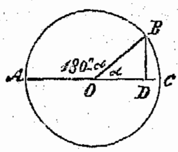
$Cos(90^0 - \alpha) = JO = BE = sin\,\alpha$ . . . . . . 10)

$tg\,(90^0 - \alpha) = FC = cotg\,\alpha \ldots 11)$ $sec\,(90^0 - \alpha) = OF = cosec\,\alpha \ldots 13)$
$cotg\,(90^0 - \alpha) = AD = tg\,\alpha \ldots 12)$, $cosec\,(90^0 - \alpha) = OD = sec\,\alpha \ldots 14)$

Rovnice tyto pronášejí se obyčejně všeobecnou větou: *funkce ostrého úhlu rovná se cofunkci úhlu doplňkového* (viz § 57. 6, pozn.).

2. Je-li dán v obr. 225. úhel AOB, který se úhlem BOD $= \alpha$ doplňuje na 180^0, bude $\sphericalangle AOB = 180^0 - \alpha$, a při tom, když zase rameno BO za pohyblivé přijmeme:

$$sin\,(180^0 - \alpha) = BD = sin\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$
$$Cos\,(180^0 - \alpha) = DO = -Cos\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad 16).$$



Obr. 225.

Dle vzorců (4) a (6) obdržíme, hodnoty právě nalezené za sinus a cosinus dosadíce:

$$tg\,(180^0 - \alpha) = \frac{sin\,(180^0 - \alpha)}{cos\,(180^0 - \alpha)} = \frac{sin\,\alpha}{-Cos\,\alpha} = -tg\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad 17)$$

$$cotg\,(180^0 - \alpha) = \frac{Cos\,(180^0 - \alpha)}{sin\,(180^0 - \alpha)} = \frac{-Cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = -Cotg\,\alpha \quad \ldots \quad 18).$$

Pozn. Dle § 58. 1, dodat. není podobných rovnic pro secantu a cosecantu úhlu $180^0 - \alpha$ třeba, ano i rovnice 17. a 18. jsou již známé, jak mile by dány byly rovnice 15. a 16.; a z této příčiny budou na příště vždycky jen sinusy a cosinusy udávány.

3. Náležitým vyobrazením přesvědčíme se ještě o pravosti rovnic, které aby čtenář slovy pronesl a konstruktivně odůvodnil, dobrým bude cvičením:

$$\left.\begin{array}{ll} sin\,(90^0 + \alpha) = Cos\,\alpha, & Cos\,(90^0 + \alpha) = -sin\,\alpha, \\ tg\,(90^0 + \alpha) = -Cotg\,\alpha, & Cotg\,(90^0 + \alpha) = -tg\,\alpha, \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 19)$$

$$\left.\begin{array}{ll} sin\,(180^0 + \alpha) = -sin\,\alpha, & Cos\,(180^0 + \alpha) = -Cos\,\alpha, \\ tg\,(180^0 + \alpha) = tg\,\alpha, & Cotg\,(180^0 + \alpha) = +Cotg\,\alpha, \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 20)$$

$$\left.\begin{array}{ll} sin\,(270^0 \mp \alpha) = -Cos\,\alpha, & Cos\,(270^0 \mp \alpha) = \mp sin\,\alpha, \\ tg\,(270^0 \mp \alpha) = \pm Cotg\,\alpha, & Cotg\,(270^0 \mp \alpha) = \pm tg\,\alpha, \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 21)$$

$$\left.\begin{array}{ll} sin\,(360^0 \mp \alpha) = \mp sin\,\alpha, & Cos\,(360^0 \mp \alpha) = +Cos\,\alpha, \\ tg\,(360^0 \mp \alpha) = \mp tg\,\alpha, & Cotg\,(360^0 \mp \alpha) = \mp Cotg\,\alpha, \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 22).$$

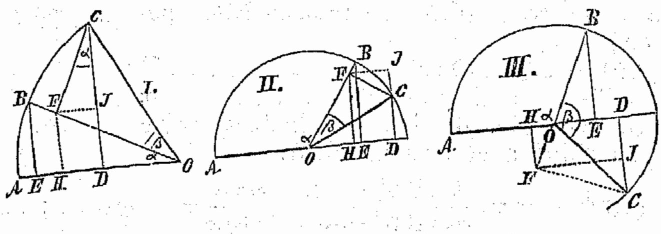
Rovnice uvedené v tomto a v předešlém odstavci nabývají pro praktické počítání veliké důležitosti tím, že kdykoliv se má vzíti funkce úhlu tupého, tento se rozložiti může buď na $180^0 - \alpha$, nebo na $90 + \beta$. Má-li se na př. určiti $sin\,124^0 13' 24''$, bude $sin\,(124^0 13' 24'') = sin\,55^0 46' 36''$ (dle rovnice 15), nebo dle rovnice (19) $= Cos\,34^0 13' 24''$. Pohodlnější jest spůsob poslední, protože se od daného úhlu snáze 90^0 odečte, nežli daný úhel od 180^0. Jak se může určiti $Cos\,158^0 36' 40''$?

Podobně se může vzíti místo a) $sin\,213^0$, b) $sin\,289^0$, c) $sin\,(-54^0)$, d) $Cos\,124^0$, e) $Cos\,298^0$, f) $Cos\,387^0 \ldots$ pohodlněji $-sin\,67^0$, $-sin\,19^0$, $-sin\,54^0$, $-Cos\,56^0$, $-Cos\,62^0$, $-Cos\,27^0$ atd.

Pozn. Co zvláštní případ sluší vytknouti funkce pro úhel 45^0; jest totiž jak se vyobrazením úhlu 45^0 a pythagorskou větou přesvědčíme: $sin\,45^0 =$

$Cos\,45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $tg\,45^0 = Cotg\,45^0 = 1$; $sec\,45^0 = Cosec\,45^0 = \sqrt{2}$. (Další příklady o velikosti funkcí úhloměrných přijdou v § 60.)

4. *Má se určiti sinus a cosinus součtu dvou úhlů, jsou-li dány jejich sinusy i cosinusy.*



Obr. 226.

Buďtež $\sphericalangle AOB = \alpha$, $\sphericalangle BOC = \beta$ (obr. 226.), tudy $\sphericalangle AOC = \alpha + \beta$. Přijmeme-li opět poloměr AO za jedničku a uděláme $CF \perp BO$, bude

$$BE = sin\,\alpha,\quad CF = sin\,\beta,\quad CD = sin\,(\alpha + \beta),$$
$$EO = Cos\,\alpha,\quad FO = Cos\,\beta,\quad DO = Cos\,(\alpha + \beta).$$

Nyní má se $sin\,(\alpha+\beta)$ i $cos\,(\alpha+\beta)$ vyjádřiti sinusem a cosinusem úhlů α a β. K účelu tomu udělej $FH \perp AO$, $FJ \perp CD$, a bude

$$sin(\alpha + \beta) = CD = CJ + JD = CJ + FH \quad \ldots\ldots\ldots \quad m)$$
$$Cos(\alpha + \beta) = DO = OH - HD = OH - FJ \quad \ldots\ldots\ldots \quad n)$$

Že ale jest $\sphericalangle FCJ = \alpha$ (§ 11. 7, pozn.), můžeme přímky v posledních rovnicích uvedené nahraditi funkcemi úhlů α a β, a sice: v trojúhelníku FCJ jest $CJ = CF\,.\,Cos\,\alpha = sin\,\beta\,.\,Cos\,\alpha$, $FJ = FC\,.\,sin\,\alpha = sin\,\beta\,.\,sin\,\alpha$; v $\triangle$ FHO jest $FH = FO\,.\,sin\,\alpha = Cos\,\beta\,.\,sin\,\alpha$, $HO = FO\,.\,Cos\,\alpha = Cos\,\beta\,.\,Cos\,\alpha$.

Následovně obdržíme dosazením těchto hodnot do rovnic (m) a (n)

$$sin\,(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\,.\,Cos\,\beta + sin\,\beta\,.\,Cos\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad 23).$$
$$Cos\,(\alpha + \beta) = Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta - sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta \quad \ldots\ldots \quad 24).$$

Pozn. Tyto dva vzorce podrží svou platnost, nechť mají úhly α a β hodnotu jakoukoliv, ačkoliv se při jich výpočtu jaksi mlčky předpokládalo, že jsou oba úhly ostré a při tom $\alpha + \beta < 90^0$ dle obr. 226. I. Kdyby byl na př. některý z úhlů α a β tupý (obr. 226, II., kde jest $\sphericalangle\alpha > 90^0$ a $\sphericalangle\beta < 90^0$), potřebujeme pouze zřetel míti k prvním třem odstavcům tohoto paragrafu a každou úhloměrnou funkci vzíti s jejím přináležejícím znaménkem. Tak bude na př. v obr. 226. II. $Cos\,\alpha$ záporným, a při tom $sin(\alpha + \beta) = CD = JD - CJ = FH - CJ$. Že ale jest $\sphericalangle BOD = 180^0 - \alpha$, a při tom $FCD = \alpha$ (§ 11. 7), jest také $\sphericalangle FCJ = 180^0 - \sphericalangle FCD = 180^0 - \alpha$; a nyní může se již dosaditi

za $FH = FO\,.\,sin\,(180^0 - \alpha) = FO\,.\,sin\,\alpha = Cos\,\beta\,.\,sin\,\alpha$, a

za $CJ = FC\,.\,Cos(180^0 - \alpha) = -FC\,.\,Cos\,\alpha = -sin\,\beta\,.\,Cos\,\alpha$, tak že bude konečně vzhledem k tomu, že jest $Cos\,\alpha$ záporným, zase $sin\,(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta + sin\,\beta\,.\,Cos\,\alpha$.

Podobně bude v obr. III., kde jest $\sphericalangle\alpha > 90^0$ i $\sphericalangle\beta > 90^0$, a následovně oba cosinusy záporné. Jest totiž $\sin(\alpha+\beta)=-CD=-(CJ+JD)=-(CJ+FH)$. Že ale jest $\sphericalangle FOA=180^0-\alpha$, a při tom $\sphericalangle FCJ=\sphericalangle FOA$, bude v $\triangle CFJ$ $CJ=FC.\,Cos\,(180^0-\alpha)=-FC.\,Cos\,\alpha$, a v $\triangle FOH$ bude $FH=FO.\,sin\,(180^0-\alpha)=FO.\,sin\,\alpha$; když pak ještě dosadíme za $FO=Cos\,(180^0-\beta)$, a za $FC=sin\,(180-\beta)$, bude konečně $sin\,(\alpha+\beta)=-(-FC.\,Cos\,\alpha+FO.\,sin\,\alpha)=-(-sin\,\beta.\,Cos\,\alpha-Cos\,\beta.\,sin\,\alpha)=sin\,\alpha.\,Cos\,\beta+sin\,\beta.\,Cos\,\alpha$.

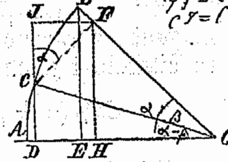
Ostatně mohly se případy tyto jednoduššeji i tak dokázati, že by se pro tupý úhel α dalo $\alpha=90^0+m$, a pro tupý $\sphericalangle\beta=90^0+n$; bylo by potom $sin\,(\alpha+\beta)=sin\,(180^0+\{m+n\})=-sin\,(m+n)$, kterýžto vzorec obsahuje již jen ostré úhly a dává $-sin\,(m+n)=-[sin\,m.\,Cos\,n+sin\,n.\,Cos\,m]$ t. j. vzorec jednostejný se vzorcem (23). Čtenáři odporučuje se provedení $Cos\,(\alpha+\beta)$ pro tyto případy rozličné.

5. *Jsou-li dány sinusy a cosinusy dvou úhlů, má se určiti sinus a cosinus jich rozdílu.*

Budiž dán $\sphericalangle AOB=\alpha$, $\sphericalangle BOC=\beta$, následovně $\sphericalangle AOC=\alpha-\beta$ obr. 227.). Spustí-li se $CD\perp AO$, $BE\perp AO$, $CF\perp BO$, $FH\perp AO$ a $FJ\perp CD$, bude opět jako v předešlém odstavci $sin\,(\alpha-\beta)=CD=JD-JC=FH-JC$, a $Cos\,(\alpha-\beta)=DO=HO+DH=HO+JF$, z čehož podobným spůsobem zase po krátkém provedení obdržíme:

$sin(\alpha-\beta)=sin\,\alpha.\,Cos\,\beta-sin\,\beta.\,Cos\,\alpha$ ..... 25).

$Cos(\alpha-\beta)=Cos\,\alpha.\,Cos\,\beta+sin\,\alpha.\,sin\,\beta$ ..... 26).



Obr. 227.

Pozn. Obě tyto rovnice plynou z rovnice 23. a 24., kdyžby se v těchto přijmul úhel β za záporný a dosadily se hodnoty jeho $sin\,(-\beta)=-sin\,\beta$, $Cos\,(-\beta)=+Cos\,\beta$.

Dodatek. Rovnice v tomto a v odstavci předešlém vyvinuté psávají se někdy také v obecnější formě společně následovně:

$$sin\,(\alpha\pm\beta)=sin\,\alpha.\,Cos\,\beta\pm sin\,\beta.\,Cos\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad A)$$

$$Cos\,(\alpha\pm\beta)=Cos\,\alpha.\,Cos\,\beta\mp sin\,\alpha.\,sin\,\beta \quad \ldots\ldots \quad B)$$

Kdyby se za α nebo β dosadila nějaká jiná hodnota, na př. za β součty, $\beta+\gamma$, $\beta-\gamma$ atd., mohly by se snadno určiti 1) $sin\,(\alpha+\beta+\gamma)=sin\,[\alpha+(\beta+\gamma)]=sin\,\alpha.\,cos(\beta+\gamma)+cos\,\alpha.\,sin(\beta+\gamma)=sin\,\alpha\,(cos\,\beta\,cos\,\gamma-sin\,\beta.\,sin\,\gamma)+cos\,\alpha\,(sin\,\beta\,cos\,\gamma+sin\,\gamma\,cos\,\beta)=sin\,\alpha.\,cos\,\beta.\,cos\,\gamma-sin\,\alpha.\,sin\,\beta.\,sin\,\gamma+cos\,\alpha.\,sin\,\beta.\,cos\,\gamma+cos\,\alpha.\,cos\,\beta.\,sin\,\gamma$; 2) $Cos\,(\alpha+\beta+\gamma)=cos\,\alpha.\,cos\,\beta.\,cos\,\gamma-cos\,\alpha.\,sin\,\beta.\,sin\,\gamma-sin\,\alpha.\,cos\,\beta.\,sin\,\gamma-cos\,\alpha.\,sin\,\beta.\,cos\,\gamma$. 3) $sin\,(\alpha+\beta-\gamma)$; 4) $sin\,(\alpha-\beta-\gamma)$ atd., což aby čtenář provedl odporučujeme. — A kdyby bylo v rovnicích 1) a 2) $\alpha=\beta=\gamma$, obdrželi bychom 5) $sin\,3\alpha=3sin\,\alpha.\,cos\,\overline{\alpha}^2-sin\,\overline{\alpha}^3$, a nebo když dosadíme za $cos\,\overline{\alpha}^2=1-sin\,\overline{\alpha}^2$, konečně $sin\,3\alpha=3\,sin\,\alpha-4\,sin\,\overline{\alpha}^3$.

6. Všecky ostatní rovnice, vlastností úkonů úhloměrných se týkající, dají se z rovnic dosavadních počtem vyvoditi, aniž by k tomu bylo zvláštního vyobrazení třeba, jak se o tom v následujících odstavcích přesvědčíme.

Tak obdržíme, jestliže rovnici 23. rozdělíme rovnicí 24. a taktéž vzorec 25. vzorcem 26. dle vzorce (4)

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{Cos(\alpha+\beta)}=tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\,.\,Cos\,\beta+\sin\beta\,.\,Cos\,\alpha}{Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta-\sin\alpha\,.\,\sin\beta},$$
$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{Cos(\alpha-\beta)}=tg(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\,.\,Cos\,\beta-\sin\beta\,.\,Cos\,\alpha}{Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta+\sin\alpha\,.\,\sin\beta},$$

v kterýchžto zlomcích, když čítatele i jmenovatele rozdělíme číslem $Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta$, bude

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\,.\,Cos\,\beta}{Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta}+\dfrac{\sin\beta\,.\,Cos\,\alpha}{Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta}}=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}\;.\;.\;.\;.\;.\;27).$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\,.\,Cos\,\beta}{Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta}-\dfrac{\sin\beta\,.\,Cos\,\alpha}{Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta}}{1+\dfrac{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta}}=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,.\,tg\beta}\;.\;.\;.\;.\;.\;28).$$

Obrátíme-li zlomky tyto, bude vzhledem k rovnici (8)
$Cotg\,(\alpha\pm\beta)=\dfrac{1\mp tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}{tg\,\alpha\mp tg\,\beta}$, a nebo když do tohoto vzorce dosadíme za tangentu zvrácenou hodnotu dle rovnice 8.), a zkrátíme hned na to čítatele i jmenovatele číslem $Cotg\,\alpha\,.\,Cotg\,\beta$,

$$Cotg\,(\alpha\pm\beta)=\frac{Cotg\,\alpha\,.\,Cotg\,\beta\pm1}{Cotg\,\beta\pm Cotg\,\alpha}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;29)$$

Příklady. Mají se vypočísti $\sin(\alpha\pm\beta)$, $Cos\,(\alpha\pm\beta)$, $tg\,(\alpha\pm\beta)$, když jest dáno
a) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$; b) $Cos\,\alpha=\frac{45}{52}$, $\sin\beta=\frac{8}{17}$; c) $tg\,\alpha=2\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$;
d) $Cos\,\alpha=\frac{18}{25}$, $tg\,\beta=1\frac{5}{9}$; e) $Cos\,\alpha=\frac{7}{24}$, $Cos\,\beta=\frac{35}{38}$.

7. Dosadíce ve vzorcích 23. a 24., 27. a 29. jakožto zvláštní případ $\alpha=\beta$, obdržíme

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\,.\,Cos\,\alpha$ . . . . 30), $tg\,2\alpha=\dfrac{2tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha^2}$ . . . . . 32)

$Cos\,2\alpha=Cos\,\alpha^2-\sin\alpha^2$ . . . 31), $Cotg\,2\alpha=\dfrac{Cotg\,\alpha^2-1}{2Cotg\,\alpha}$ . . . . . 33)

kteréžto vzorce ukazují, *jak lze určiti z funkcí daného úhlu kteroukoliv funkci úhlu dvojnásobného.*

Dodatek. Vzorce v odstavci tomto uvedené psávají se mnohdy také tím spůsobem, že se dosazuje za 2α pouze α, a následovně za celé α jen $\alpha/_2$, tak že pak obdržíme

$$\sin\alpha=2\sin\alpha/_2\,.\,Cos\,\alpha/_2\;.\;.\;.\;.\;A)$$
$$Cos\,\alpha=Cos\,\alpha/_2{}^2-\sin\alpha/_2{}^2\;.\;.\;.\;B)\text{ atd.}$$

V jaké vzorce promění se způsobem tímto pro $\alpha=\beta$ vzorce 25. a 26. nebo 28.?

Pozn. Položilo-li by se ve vzorcích 23. a 24. za $\beta = 2\alpha$ obdrželi bychom $\sin 3\alpha = \sin\alpha . \cos 2\alpha + \cos\alpha . \sin 2\alpha$, do kteréžto rovnice když by se dosadily za $\sin 2\alpha$ a $\cos 2\alpha$ hodnoty v rovnicích 30. a 31. nalezené, bylo by vzhledem k tomu, že jest také $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2 - \sin\alpha^2 = 1 - 2\sin\alpha^2$,
$\sin 3\alpha = \sin\alpha(1 - 2\sin\alpha^2) + \cos\alpha . 2\sin\alpha . \cos\alpha$, nebo
$\sin 3\alpha = \sin\alpha - 2\sin\alpha^3 + 2\sin\alpha\cos\alpha^2 = \sin\alpha - 2\sin\alpha^3 + 2\sin a(1 - \sin\alpha^2)$,
a nebo konečně $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin a^3$ . . . . . A);*)
podobně by bylo $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha$ . . . . . B),
kteréžto vzorce učí, jak lze určiti z funkcí daného úhlu sinus neb cosinus úhlu trojnásobného.

8. *Má se určiti z funkcí daného úhlu jaká koliv funkce úhlu polovičního.*

Když známé již rovnice

$$\cos\alpha/_2{}^2 + \sin\alpha/_2{}^2 = 1, \text{ a}$$
$$\cos\alpha/_2{}^2 - \sin\alpha/_2{}^2 = \cos\alpha$$

jednou spolu sečteme a po druhé odečteme, obdržíme $2\cos\alpha/_2{}^2 = 1 + \cos\alpha$, a $2\sin\alpha/_2{}^2 = 1 - \cos\alpha$, z čehož pak následuje

$$\cos\alpha/_2 = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \;\ldots\; 34), \quad \sin\alpha/_2 = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \;\ldots\; 35.)$$

Dělením obdržíme dále z těchto rovnic

$$\frac{\sin\alpha/_2}{\cos\alpha/_2} = tg\,\alpha/_2 = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \;\ldots\; 36.)$$

Za $tg\,\alpha/_2$ psává se ale tento vzorec ještě jiným způsobem, totiž

$$tg\,\alpha/_2 = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha^2}}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \;\ldots\; \text{A},$$

nebo

$$tg\,\alpha/_2 = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha^2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \;\ldots\; \text{B}$$

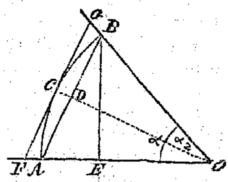
Jest tehdy také

$$tg\,\alpha/_2 = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \;\ldots\; 37.)$$

Pozn. Zdali se v odstavci tomto má vzíti veličina kořenová kladně nebo záporně, rozhodne velikost úhlu vzhledem k § 58, 2, pozn. Jeli na př. $\cos\alpha = a$, bude $\sin\alpha/2 = \sqrt{\frac{1}{2}(1-a)} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2a}$, $\cos\alpha/_2 = {}^1/_2\sqrt{a+2a}$; $\sin\frac{\alpha}{4} = {}^1/_2\sqrt{2-\sqrt{2+2a}}$, $\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2a}}$, atd.

---

*) Vzorce, v nichžto se vyjádřují sinusy a cosinusy libovolného násobku daného úhlu mocninami těchto funkcí a naopak, nenáleží do oboru nižšího měřictví. Ostatně může se pilnější čtenář o ně pokusiti dosadíc ve vzorci 40. $(n+1)\alpha$ za x, a $(n-1)\alpha$ za y, čímž obdrží $\sin(n+1)\alpha + 2\sin(n-1)\alpha = 2\sin n\alpha . \cos\alpha$, nebo $\sin(n+1)\alpha = 2\sin n\alpha . \cos\alpha - \sin(n-1)\alpha$, v kterémžto vzorci potřebuje pak jen dávati po sobě za $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ (Viz dodat. odstavce 5.)



Obr. 228.

Rovnice 34. a 35. plynou také přímo z obrazce. Je-li totiž $\sphericalangle AOB = \alpha$ (obr. 228.), opiš z O poloměrem $AO = 1$ oblouk a spusť z O kolmici na tětivu AB, i bude potom $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC = \alpha/_2$, a při tom $AD = DB$. Když se ještě postaví $BE \perp AO$, bude $BE = \sin\alpha$, $BD = \sin\alpha/_2$, $EO = \operatorname{Cos}\alpha$, $DO = \alpha/_2$.

V trojúhelníku ABE jest pak $\overline{AB}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{BE}^2 + (AO - EO)^2$, nebo $(2 . BD)^2 = 4 \sin\alpha/_2{}^2 = \sin\alpha^2 + (1 - \operatorname{Cos}\alpha)^2 = \sin\alpha^2 + 1 - 2 \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Cos}\alpha^2$, t. j. $4 \sin\alpha/_2{}^2 = 2 - 2 \operatorname{Cos}\alpha$, a z toho $\sin\alpha/_2{}^2 = \frac{1 - \operatorname{Cos}\alpha}{2}$, neb

$$\sin\alpha/_2 = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos}\alpha}{2}}.$$

Podobně jest $\overline{DO}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{BD}^2$, nebo $\operatorname{Cos}\alpha/_2{}^2 = 1 - \sin\alpha/_2{}^2$, do kteréhož vzorce když se dosadí nalezená právě cena za $\sin\alpha/_2$, bude $\operatorname{Cos}\alpha/_2{}^2 = 1 - \frac{1 - \operatorname{Cos}\alpha}{2} = \frac{2 - 1 + \operatorname{Cos}\alpha}{2}$, a z toho

$$\operatorname{Cos}\alpha/_2 = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{Cos}\alpha}{2}}.$$

Dodatek. Jiné vzorce, jimiž se určí sinus a cosinus polovičního úhlu, najdeme spůsobem následujícím:
$(\operatorname{Cos}\alpha/_2 + \sin\alpha/_2)^2 = \operatorname{Cos}\alpha/_2{}^2 + 2 \sin\alpha/_2 . \operatorname{Cos}\alpha/_2 + \sin\alpha/_2{}^2 = 1 + 2 \sin\alpha/_2 . \operatorname{Cos}\alpha/_2 = 1 + \sin\alpha$, a z toho $\operatorname{Cos}\alpha/_2 + \sin\alpha/_2 = \sqrt{1 + \sin\alpha}$ ...... m)

Podobně jest $\operatorname{Cos}\alpha/_2 - \sin\alpha/_2 = \sqrt{1 - \sin\alpha}$ ...... n)

Sečtením nebo odečtením těchto dvou rovnic obdržíme konečně

$$\sin\alpha/_2 = \frac{\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots 38)$$

$$\operatorname{Cos}\alpha/_2 = \frac{\sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots 39.)$$

Příklady. Udej $\sin\alpha/_2$ i $\operatorname{Cos}\alpha/_2$, když jest a) $\sin\alpha = {}^3/_5$, b) $\sin\alpha = \frac{120}{169}$, c) $\operatorname{Cos}\alpha = {}^7/_{15}$, d) $\operatorname{Cos}\alpha = \frac{24}{25}$.

9. *Součet (neb rozdíl) buď dvou sinusů anebo dvou cosinusů má se proměniti v součin funkcí úhloměrných.*

Sečtouce i odečtouce rovnice 23. a 25, potom zase rovnice 24. a 26, dostaneme:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha . \operatorname{Cos}\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{Cos}\alpha . \sin\beta,$$
$$\operatorname{Cos}(\alpha + \beta) + \operatorname{Cos}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{Cos}\alpha . \operatorname{Cos}\beta,$$
$$\operatorname{Cos}(\alpha + \beta) - \operatorname{Cos}(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha . \sin\beta.$$

Položíme-li v těchto vzorcích $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$, bude po krátké redukci $\alpha=\frac{x+y}{2}$, $\beta=\frac{x-y}{2}$, následovně

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\operatorname{Cos}\frac{x-y}{2}\ \ldots\ldots\ 40)$$

$$\sin x-\sin y=2\operatorname{Cos}\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}\ \ldots\ldots\ 41)$$

$$\operatorname{Cos}x+\operatorname{Cos}y=2\operatorname{Cos}\frac{x+y}{2}.\operatorname{Cos}\frac{x-y}{2}\ \ldots\ldots\ 42)$$

$$\operatorname{Cos}x-\operatorname{Cos}y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}\ \ldots\ldots\ 43)$$

Z rovnic těchto vychází snadným spůsobem

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{\sin\frac{x+y}{2}.\operatorname{Cos}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}}=tg\frac{x+y}{2}.\operatorname{Cotg}\frac{x-y}{2}$$

$$=\frac{tg\frac{x+y}{2}}{tg\frac{x-y}{2}}\ \ldots\ldots\ 44.)$$

10. *Součty $\cos\alpha+\sin\beta$ nebo $\cos\alpha-\sin\beta$ mají se proměniti v součiny.*

Dosadíce $\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$, obdržíme dle vzorce 40)

a) $\cos\alpha+\sin\beta=\sin(90^0-\alpha)+\sin\beta=2\sin[45^0-\frac{\alpha-\beta}{2}]\cos[45^0-\frac{\alpha+\beta}{2}]=2\cos[45^0+\frac{\alpha-\beta}{2}]\sin[45^0+\frac{\alpha+\beta}{2}]$*)

b) $\cos\alpha-\sin\beta=\sin(90^0-\alpha)-\sin\beta=2\cos(45^0-\frac{\alpha-\beta}{2})\sin(45^0-\frac{\alpha+\beta}{2})=2\sin[45^0+\frac{\alpha-\beta}{2}]\cos[45^0+\frac{\alpha+\beta}{2}]$.

Dodatek. Snadno se přesvědčíme, že jest

c) $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}.\sin(45^0+\alpha)=\sqrt{2}.\cos(45^0-\alpha)$,
d) $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}.\sin(45^0-\alpha)=\sqrt{2}.\cos(45^0+\alpha)$.

Čtenáři zůstaveno ještě dokázati vzorce:

m) $tg\,\alpha\pm tg\,\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha.\cos\beta\pm\sin\beta.\cos\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha.\operatorname{Cos}\beta}=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$

n) $\operatorname{cotg}\alpha\pm\operatorname{cotg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$

*) Vyobrazením náležitým se o tom přesvědčíme, obdržíce dva pravoúhelné trojúhelníky, z nichžto má každý jeden úhel $45^0+\alpha$, a druhý $45^0-\alpha$.

p) $cotg\,x + tg\,x = \frac{1}{cos\,x\,sin\,x} = \frac{2}{sin\,2x}$

q) $cotg\,x - tg\,x = \frac{cos\,2x}{cos\,x\,.\,sin\,x} = 2\,cotg\,2x$

r) $\frac{sin\,x + sin\,y}{cos\,x + cos\,y} = \frac{cos\,y - cos\,x}{sin\,x - sin\,y} = tg\frac{x+y}{2}$

s) $\frac{sin\,x - sin\,y}{cos\,x + cos\,y} = tg\frac{x-y}{2}$

Vypočítávání funkcí úhloměrných.

§ 60.

1. Ač pohodlné a důkladné výpočty sinusů, cosinusů a tangent, jakých novější doba na základě vyšší matematiky zná, tuto uváděti nemůžeme, musíme předce aspoň ukázati, jak lze dosavádními měřickými naukami funkcí úhloměrných vypočísti. Základem k tomu jsou tětivy některých středových úhlů v kruhu, jichžto délka se spůsobem zcela měřickým snadno určiti dá.

Při tom sluší míti na zřeteli větu, jejížto jasnosť již z pouhého pohledu na obrazec vysvítá: *sinus nějakého úhlu rovná se poloviční tětivě úhlu dvojnásobného.* V obr. 228. na př., kde se narejsovalo $OC \perp AB$, jest $\sphericalangle AOB = 2 \sphericalangle COB$, a při tom $BD = \frac{AB}{2} = sin\,\alpha/_2$, tak že můžeme psáti $sin\,\alpha/_2 = {}^1/_2\,chord.\,\alpha$, nebo také $sin\,\alpha = {}^1/_2\,chord.\,2\alpha$. Naopak zase *rovná se tětiva každého úhlu středového dvojnásobnému sinusu úhlu polovičního*, tak že se dají sinusy vyvoditi z tětiv a tětivy zase ze sinusů, při čemž poloměr kruhu za jedničku vzat býti musí.

2. Strany mnohoúhelníků pravid., jichžto délku ihned určiti můžeme, jak mile dán jest poloměr kruhu, jsou takovýmito k určitým středovým úhlům náležejícími tětivami; zejména mohou se za známé považovati středové úhly a strany pravid. 3—, 4—, 5—, 6—, 8—...úhelníků. Jest totiž dle § 38., když poloměr kruhu za jedničku přijmeme:

$$s_3 = chord.\,120^0 = 2\,sin\,60^0 = \sqrt{3} = 1{\cdot}732050\ldots,$$
$$s_4 = chord.\;\;90^0 = 2\,sin\,45^0 = \sqrt{2} = 1{\cdot}414213\ldots,$$
$$s_5 = chord.\;\;72^0 = 2\,sin\,36^0 = {}^1/_2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 1{\cdot}175570\ldots,$$
$$s_6 = chord.\;\;60^0 = 2\,sin\,30^0 = 1,$$
$$s_8 = chord.\;\;45^0 = 2\,sin\,22^0\,30' = \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0{\cdot}765366\ldots,$$
$$s_{10} = chord.\;\;36^0 = 2\,sin\,18^0 = {}^1/_2(\sqrt{5}-1) = 0{\cdot}618033\ldots,$$
$$s_{12} = chord.\;\;30^0 = 2\,sin\,15^0 = \sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{\cdot}517637\ldots,\ \text{atd.}$$

Bude tehdy $sin\,60^0 = Cos\,30^0 = 0.866025\ldots,$

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = 0{\cdot}707106\ldots,$$
$$\sin 36^0 = \cos 54^0 = 0{\cdot}587785\ldots,$$
$$\sin 30^0 = \cos 60^0 = 0{\cdot}5, \text{ atd.}$$

Spůsobem tímto jakož i pomocí vzorců pro úhly poloviční nebo dvojnásobné, nebo také pro součet a rozdíl dvou úhlů mohou se určiti dále ještě funkce velikého množství jiných úhlů; výpočty tyto byly by ale předce jen příliš omezené, ponèvadž nedávají funkce *každého libovolného* úhlu. Vycházíme proto, chtíce určiti buď $\sin 1^0$ nebo $\sin 1'$ raději od věty v § 43. 12, dod. uvedené, že totiž oblouk každého úhlu větší jest nežli jeho tětiva, menší ale nežli jeho tečna, tak že můžeme vzhledem k obrazci 228. psáti: $FG > arc. ACB > AB$, a nebo když z toho polovičky vezmeme: $tg\,\alpha > arc.\,\alpha > \sin\alpha$. Z toho pak plyne, když pro krátkosť za oblouk α^0 dosadíme a, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > a > \sin\alpha$, t. j. $\sin\alpha > a \cos\alpha$, a nebo

$$\sin\alpha > a\sqrt{1-\sin\alpha^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Když ale jest dle této věty $a > \sin\alpha$, bude také $a^2 > \sin\alpha^2$, což když se dosadí v rovnici I) za $\sin\alpha^2$, bude tím spíše $\sin\alpha >$

$$a\sqrt{1-a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Taktéž víme, že pro úhly od 0^0 do 45^0 (vlastně až k 57^0) oblouk kratší jest nežli poloměr, tak že když poloměr přijmeme za jedničku, pro takovéto malé úhly bude $a < 1$, t. j. a bude pravým zlomkem; následovně musí být také pravým zlomkem číslo $1-a^2$, a tudy $1-a^2 < \sqrt{1-a^2}$, což když porovnáme se vzorcem II), bude tím spíše $\sin\alpha > a(1-a^2)$, z čehož konečně vychází, že $\sin\alpha > a - a^3$, nebo $a - \sin\alpha < a^3$, t. j. *pro všechny úhly pod 45^0 jest rozdíl oblouku a přináležejícího sinusu menší nežli třetí mocnina oblouku.*

Na základě této věty můžeme nyní určiti sinus jednoho stupně anebo i sinus jedné minuty a sice: oblouk jedné minuty jest pro poloměr $r = 1$ $arc\,1' = \frac{2\pi}{360\,.\,60} = 0{\cdot}0002908882$, následovně $a^3 = 0{\cdot}000000000246$; že ale rozdíl oblouku a sinusu pro $1'$ menší jest tohoto čísla, musí oba v prvních 10 místech desítiných spolu souhlasiti, tak že bude jako pro $arc.\,1'$ též i pro $\sin 1' = 0{\cdot}0002908882$.

Z toho obdržíme snadno i $\cos 1'$, $tg\,1'$; dále pak pomocí vzorců 23. a 30. $\sin 2'$, $\sin 3'$ atd. až do 1^0, a konečně i dále od 1^0 až do 45^0, přes který úhel, jak již známo, dále jíti nepotřebujeme. Kdybychom chtěli určiti sinusy pro menší úhly, na př. pro $1''$, potřebujeme toliko zase vypočísti oblouk $1''$, který se od přináležejícího sinusu ještě méně lišiti bude, a potom se dají $\sin 2''$, $\sin 3''$ atd. již předešlou cestou snadno určiti.

Sestavíme-li spůsobem tímto hodnoty sinusů, cosinusů, tangent a cotangent na př. od minnuty k minutě a nebo třeba v odstavcích po $10''$, obdržíme tak zvané **tabulky trigonometrické** (desky úhloměrné). Že ale pro praktické výpočty prospěšnější jest, místo takovýchto čísel, která až na malé výminky veskrz nesměřitelnými budou, raději jich logaritmy znáti, určily se také logaritmy dotyčných funkcí a ty bývají obyčejně v tak zvaných *logaritmicko-trigonometrických tabulkách* skutečně udány.*)

Dle toho, na mnoho-li míst desítiných takovéto tabulky vypočítány jsou, budou také hodnoty jednotlivých funkcí více nebo méně dokonale udány. Sedmimístné desky udávají hodnotu funkcí úhloměrných až na setiny vteřin dokonale a hodí se tudy již i k sebe přísnějším výpočtům; k obyčejné potřebě vystačejí i pětimístné.

3. Poněvadž sinusy a cosinusy všech ostrých úhlů jakož i tangenty úhlů pod 45^0 a cotangenty úhlů mezi 45^0—90^0 menší jsou nežli 1, byly by jich logaritmy veskrz záporné a musely by dostati zápornou charakteristiku, čemuž se ale v počtech logaritmických, pokud možno, vyhýbáme. Za touto příčinou uvedeny jsou v logaritmicko-trigonometrických tabulkách všechny logaritmy na stejnou charakteristiku -10, která se jim v zadu přivěšuje; je-li na př. $sin\,30^0 = 0{\cdot}5$, a tudy $log\,sin\,30^0 = log\,0{\cdot}5 = 0{\cdot}6989700-1$, píše se raději $log\,sin\,30^0 = 9{\cdot}6989700-10$, kdežto se pak záporná desítka pro uspoření místa v tisknutých deskách mlčky vynechává. Tak bude dle tohoto spůsobu:

$log\,sin\,38^0 17' = 9{\cdot}792077-10$; $log\,tg\,1^0 25' 40'' = 9{\cdot}396628-10$; $log\,cos\,76^0 31' 48'' = 9{\cdot}367237-10$ atd.

Že pak každá funkce, jak mile úhel 45^0 překročí, stane se funkcí doplňkovou, uvádějí se v tabulkách logaritmicko-trigonometrických funkce vždycky jen až do 45^0, kdežto se potom dole uvedením jich doplňků dále pokračuje od 45^0 až do 90^0. Minuty a vteřiny prvějších úhlů uvádějí se potom souhlasně s úhly *na levé straně shora dolů*, kdežto minuty a vteřiny ostatních úhlů *na pravé straně od spodu vzhůru pokračují.*

Mimo to nacházejí se ještě v každých log. trigonometrických tabulkách zvláštní oddělení, obyčejně velkým *D* (rozdíly) nadepsané. Z těchto rozdílů náleží jedna řada sinusu, jedna cosinusu, a třetí řada tangentě i cotangentě společně, protože jejich ceny zvrácené jsou a číselné hodnoty jejich logaritmů tudy jen svým znaménkem se od sebe lišiti mohou. — V rozličných tabulkách bývají rozdíly tyto také rozdílně udány, a sice: buď jsou to rozdíly dvou po sobě následujících, v tabulce uvedených logaritmů, a nebo se jimi udává rozdíl dvou logaritmů, jež by po jedné úhlové vteřině postupovaly, což se poznamená $D.1''$.

Byly-li by na př. *A* a *B* dva po sobě následující, v tabulce uvedené logaritmy, bude $A-B=D$ rozdíl pro takový počet vteřin, o mnoho-li logaritmy v tabulce postupují. Jestliže by tedy logaritmy v tabulkách postupovaly po *n* vteřinách (obyčejně od $10''$ k $10''$), byl by rozdíl dvou logaritmů A a B pro $1'' = D/n$.

---

*) Známost počtů logaritmických se zde již předpokládá; do počtu trigonometrického zavedl logaritmy J. Neper (1550).

Má-li se potom udati logaritmus nějaké funkce, vyhledá se pro daný úhel nejbližší menší logaritmus; byl-li by ale daný úhel o několik vteřin větší nežli tento právě v tabulce vyhledaný, určí se na př. pro x vteřin číslo $\frac{D}{n}.x$, které se k vyhledanému logaritmu přidá buď kladně nebo záporně, podle toho, zdali to jest funkce pouhá nebo cofunkce, poněvadž funkce pouhé s úhlem rostou (následovně i jich logaritmy), cofunkce ale zvětšením úhlu ubývá (následovně ubývá i jejího logaritmu).

Příklad 1. Měl-li by se vzíti na př. $log\ 27^0\ 46'\ 25{\cdot}4''$, bude nejbližší logaritmus $log\ sin\ 27^0\ 46' = 9.668267$; rozdíl pro 1″ jest tu 4·00, pročež pro ostatní vteřiny $25{\cdot}4 \times 4 = 101{\cdot}6 = 102$. A poněvadž žádaný logaritmus náleží toliko funkci pouhé, bude
$log\ sin\ 27^0\ 46'\ 25{\cdot}4'' = 9.668267 + 0{\cdot}000102 = 9{\cdot}668369$ (vlastně by mělo býti $0{\cdot}668369-1$).

Příklad 2. Urči se $log\ cos\ 76^0\ 31'\ 28''$.
$log\ cos\ 76^0\ 31' = 9{\cdot}367659-10$, a poněvadž jest tu $D\ .\ 1'' = 8{\cdot}79$,
bude $8{\cdot}79 \times 28 = \quad -246$, následovně
$log\ cos\ 76^0\ 31'\ 28'' = 9{\cdot}367413-10$.

Čtenář udej ještě
1) $log\ sin\ 0^0\ 35'\ 46''$, 5) $log\ sin\ 129^0\ 39'\ 12''$
2) $log\ cos\ 50^0\ 2'\ 37''$, 6) $log\ cos\ 97^0\ 18'\ 35{\cdot}5''$
3) $log\ tg\ 68^0\ 27'\ 14''$ 7) $log\ tg\ 164^0\ 22'\ 42{\cdot}8''$
4) $log\ cotg\ 89^0\ 21'\ 15''$; 8) $log\ Cotg\ 111^0\ 42'\ 17{\cdot}56''$.

4. Má-li se naopak určiti k nějakému funkce úhloměrné logaritmu přináležející úhel, na př. když by byl dán $log\ sin\ x = 9{\cdot}956695-_{10}$ vyhledá se nejprvé v řadě nadepsané sinusem nejblíže menší logaritmus (když by tam tento předložený úplně nebyl) a poznamená se k němu přináležející úhel. Zde jest na př. nejbližší sinusový logaritmus 9·956684, který náleží k úhlu $x = 64^0\ 50'$. Rozdíl obou těchto logaritmů jest ale 11; a poněvadž v tomto rozdíl pro 1″ (0·99) obsažen jest 11·11krát (11 : 0·99), musí se vyhledaný úhel o 11·11″ zvětšiti, tak že bude $9\,956695 -_{10} = log\ sin\ 64^0\ 50'\ 11{\cdot}11''$.

Příklad. Pro $log\ cotg\ x = 11{\cdot}620869_{-10}$ bude z velkých tabulek, v nichžto úhly postupují od 10 k 10″, $11{\cdot}620615_{-10} = log\ Cotg\ 1^0\ 22'\ 20''$; rozdílem obou logaritmů jest tu . . . . 253, což přináležejícím rozdílem pro 1″ rozděleno, dává $253 : 88\,0 =$ . . . . 3″; odečtením této opravy bude tehdy $\quad x = 1^0 22' 17''$.

Čtenář udej ještě příslušné úhly v následujících příkladech:

1) $log\ sin\ x = 9{\cdot}793578$, 5) $log\ sin\ x = 8{\cdot}400913$
2) $log\ cos\ x = 9{\cdot}179739$, 6) $log\ cos\ x = 8{\cdot}125444$
3) $log\ tg\ x = 8{\cdot}473804$, 7) $log\ tg\ x = 10{\cdot}645706$
4) $log\ Cotg\ x = 10\,216711$, 8) $log\ Cotg\ x = 12{\cdot}446029$

Jakou hodnotu má neznámá v následujících rovnicích:

a) $x = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}$, když jest $\alpha = 67^0 10' 16''$ a $\beta = 42^0\ 12'\ 35''$?

b) $x = \frac{37\,sin\,\alpha\,.\,Cos\,\beta}{146\,tg\,\gamma}$, když jest $\alpha = 68^0 10' 12''$, $\beta = 97^0 35' 26''$, $\gamma = 75^0 42' 35''$?

c) $y = 9\sqrt[3]{sin\,\alpha\,.\,tg\,\beta}$, pro $\alpha = 115^0 18' 21''$ a $\beta = 217^0 4' 30''$?

d) $x = \dfrac{14 \sin\alpha \,.\, Cotg\beta}{25 \sqrt[3]{Cos\gamma}}$, pro $\alpha = 312^0 33' 25''$, $\beta = 23^0 16' 48''$, $\gamma = 242^0 38' 5''$?

e) $x = \dfrac{1}{tg\alpha \sqrt{\sin\beta \sin\gamma}}$, pro ceny v příkladu předešlém udané.

Kniha druhá.

O trigonometrickém řešení obrazců rovinných.

A) Řešení trojúhelníků pravoúhelných.

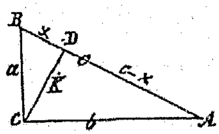
§ 61.

Při trigonometrickém řešení trojúhelníků vůbec musí býti **číselně** udány všechny potřebné částky určovací, načež se ostatní neznámé částky vypočísti dají. Především musíme ale vzájemnou závislosť úhlů a stran vyjádřiti zvláštními rovnicemi, které by obsahovaly dané i neznámé částky trojúhelníka a jichžto vypočtením by i tyto nalezeny býti mohly.

Znamenajíce v každém pravoúhelném trojúhelníku, jako se vůbec dříve dělo, úhly velkými písmenami A, B, C, a protilehlé jim strany souhlasně malými písmenami a, b, c (obr. 229.), a majíce na paměti, že tu $\sphericalangle A + B = 90^0$, můžeme dle předešlých nauk psáti:

1) $a = c \sin A$, 3) $a = b\, tg\, A$,

2) $b = c\, Cos\, A$, 4) $b = a\, cotg\, A$,



Obr. 229.

kteréžto rovnice obsahují následující základné věty řešení pravoúhelného trojúhelníka se týkající:

a) *V každém pravoúhelném trojúhelníku rovná se jedna odvěsna přeponě znásobené buď sinusem úhlu naproti této odvěsně ležícího, a nebo cosinusem úhlu k ní přilehajícího.*

b) *V každém pravoúhelném trojúhelníku rovná se jedna odvěsna buď součinu z tangenty úhlu protilehlého a druhé odvěsny, a nebo součinu z cotangenty úhlu přilehajícího a druhé odvěsny.*

Pomocí těchto dvou vět a věty pythagorské lze každý pravoúhelný trojúhelník trigonometricky vypočísti, když jsou dány buď dvě jeho strany, a nebo jen jedna strana a jeden ostrý úhel.

1. Úloha. *Dána-li jest přepona a jeden ostrý úhel, mají se ostatní částky trojúhelníka vypočísti.*

Je-li na př. dán $\sphericalangle B$ a strana c, bude $A = 90 - B$, $b = c \sin B$, $a = c \,.\, \cos B$. Budiž na př. $B = 37^0\, 40'$, $c = 2487'$. Z rovnice $b = c \sin B$ plyne: $\log b = \log c + \log \sin B$, z druhé pak rovnice plyne: $\log a = \log c + \log \cos B$. Máme tudy

$log\ c = 3{\cdot}395676$ $\qquad$ $log\ c = 3{\cdot}395676$
$log\ sin\ 37^0\ 40' = 9{\cdot}786089 - _{10}$ $\qquad$ $log\ cos\ 37^0 40' = 9{\cdot}898494 - _{10}$

$log\ b = 3{\cdot}181765$, a z toho $\qquad$ $log\ a = 3{\cdot}294170$, a z toho
$b = 1519{\cdot}72'$ $\qquad$ $a = 1968{\cdot}65'$
konečně $\sphericalangle A = 90^0 - (37^0\ 40') = 52^0\ 20'$.

Vypočti ostatní částky tohoto trojúhelníka, když jest 1) $A = 51^0\ 38'\ 40''$, $c = 258{\cdot}64'$; 2) $B = 62^0\ 18'\ 25''$, $c = 33{\cdot}79$.

2. Úloha. *Dána jest jedna odvěsna (na př. a) a jeden ostrý úhel (na př. A); mají se určiti ostatní částky trojúhelníka.*

Úhel $B = 90 - A$, $c = \frac{a}{sin\ A}$, $b = \frac{a}{tg\ A}$. Je-li na př. $a = 714{\cdot}3'$, $A = 58^0\ 43'\ 30''$, bude $B = 31^0\ 16'\ 30''$;
$log\ a = 2{\cdot}853881$ $\qquad$ $log\ a = 2{\cdot}853881$
$log\ sin\ A = 9{\cdot}931806 - _{10}$, odečtením $\quad$ $log\ tg\ A = 10{\cdot}216516 - _{10}$, odečtením

$log\ c = 2{\cdot}922075$, a z toho $\qquad$ $log\ b = 2{\cdot}637365$, a z toho
$c = 835{\cdot}75'$ $\qquad$ $b = 433{\cdot}86'$.

3. Úloha. *Dány jsou obě odvěsny a a b.*

Přepona $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, a nebo $c = \frac{a}{sin\ A}$, při čemž se určí dříve úhel A z rovnice $tg\ A = Cotg\ B = {}^a/_b$, nebo $tg\ B = cotg\ A = {}^b/_a$.
Budiž na př. $a = 325'$, $b = 418'$. — $log\ a = 2{\cdot}511883$
$log\ b = 2{\cdot}621176$, odečtením

$log\ tg\ A = 9{\cdot}890707 - _{10}$, a z toho
$A = 37^0\ 51'\ 56''$, následovně $B = 52^0\ 8'\ 4''$.
$log\ a = 2{\cdot}511883$
$log\ sin\ A = 9{\cdot}788034 - _{10}$, odečtením

$log\ c = 2{\cdot}723849$, a z toho $c = 529{\cdot}48'$, kterážto hodnota i větou pythagorskou vychází.

4. Úloha. *Dána jest přepona c a jedna odvěsna,* na př. *b.*

$Cos\ A = \frac{b}{c} = sin\ B$, a druhý úhel *B* buď z této rovnice nebo $B = 90^0 - A$.

Je-li na př. $c = 4659'$, $b = 3572'$, bude
$log\ b = 3{\cdot}552912$ $\qquad$ $log\ b = 3{\cdot}552912$
$log\ c = 3{\cdot}668293$, odečtením $\qquad$ $log\ tg\ B = 10{\cdot}077054 - _{10}$, odečt.

$log\ sin\ B = 9{\cdot}884619 - _{10}$, a z toho $\qquad$ $log\ a = 3{\cdot}475858$, a z toho
$B = 50^0\ 3'\ 22{\cdot}3''$ pročež $\qquad$ $a = 2991{\cdot}21'$.
$A = 39^0\ 56'\ 37{\cdot}7''$.

5. Úloha. *Dán jest součet (nebo rozdíl) přepony a jedné odvěsny $(a \pm c)$ a jeden ostrý úhel (B); mají se ostatní částky vypočísti.*

Úhel $A = 90^0 - B$, a pro krátkost budiž $a + c = m$; aby se nyní mohla některá strana zvláště určiti, vezmeme rovnici $a = c\ Cos\ B$, tak že bude $a + c = m = c + c\,\mathrm{Cos}\,B = c(1 + \mathrm{Cos}\,B)$, a z toho $c = \frac{m}{1 + \mathrm{Cos}\,B}$, nebo podle vzorce (34) $c = \frac{m}{2(\mathrm{Cos}\,B|_2)^2}$.

Známe-li nyní c a A, bude další výpočet dle úlohy 1.

Jak bude provedení této úlohy, když jest $a - c = 165{\cdot}4'$, $A = 43^0\ 18'\ 35{\cdot}5''$?

6. Úloha. *V pravoúhelném trojúhelníku jest dána přepona c a kolmice z vrcholu pravého úhlu na ni spuštěná; mají se ostatní částky trojúhelníka určiti.*

Budiž v obr. 229. kolmice CD $= k$, jeden úsek přepony BD$= x$ a druhý AD$= c - x$; i bude potom v $\triangle$BCD: $x = \frac{K}{tg\,B}$, v $\triangle$ACD ale $c - x = \frac{K}{cotg\,B}$, pročež sečtením $c = \frac{k}{tg\,B} + \frac{k}{cotg\,B} = \frac{k}{tg\,B} + k\,.\,tg B$, nebo $k\,.\,tg\,B^2 - c\,tg\,B = -k$, a konečně $tg\,B^2 - \frac{c}{k}tg\,B = -1$, z čehož plyne $tg\,B = \frac{c}{2k} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4k^2}{4k^2}} = \frac{c \pm \sqrt{(c + 2k)(c - 2k)}}{2k}$. — Zde se musí vzíti u veličiny kořenové znaménko kladné a nebo záporné, podle toho, je-li $x \lesssim (c - x)$.

Jaké bude tu provedení, když 1) $c = 5^0$, $k = 2{\cdot}4^0$; 2) $c = 165'$, $k = 78{\cdot}35'$?

Příklady k cvičení. V pravoúhelném trojúhelníku jest dáno:

1) $b + c = 576'$, $A = 45^0\ 14'\ 24''$; má se určiti a, b, c, B.
2) $c - a = 238'$, $B = 38^0\ 24'\ 35''$, má se určiti a, b, c, A.
3) $a + b = 165'$, $c = 118{\cdot}25'$; má se určiti a, b A a B.
4) $c + k = 475'$, $A = 52^0\ 16'$; „ „ „ a, b, c, k, B.
5) V rovnoramenném trojúhelníku jest dán úhel při vrcholu $A = 140^0\ 16'\ 28''$, a délka ramena AB$=$AC$= 505{\cdot}67$; má se určiti plocha trojúhelníka, jeho základna i jeho výška.
6) V rovnoramenném trojúhelníku jest dána délka ramena AB$=$AC$= 304'$ a ploský obsah $p = 7945\square'$; mají se určiti úhly i základna trojúhelníka.

Látku k cvičení v trigonometrickém řešení pravoúhelných trojúhelníků poskytuje pilnému čtenáři následující tabulka provedených příkladů pomocí sedmimístných logaritmů:

a	b	c	A	B
167·8796'	266·0158'	314·56'	32° 15' 20''	57° 44' 40''
2267·02	2489·76	3367·237	42° 19' 8·5''	47 40 51·5
377·01	423·5	567	41 40 34·6	48 19 25·4
186·345	295·974	349·75	32 11 40	57 48 20
0 8745932	0·5670073	1·042311	57 2 39	32 57 21
1193191	1676675	2057898	35 27 14	54 33 46

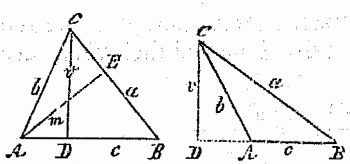
B. Řešení trojúhelníků kosoúhelných.

§ 62.

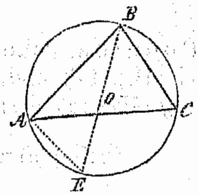
1. Znamenajíce úhly trojúhelníka (v obr. 230) A, B, C, a strany jim protilehlé malým a, b, c, máme větu: *V každém trojúhelníku mají se strany k sobě jako sinusy protilehlých úhlů.*

Důkaz. Rozvrhne-li se trojúhelník ABC výškou CD ve dva pravoúhelné, bude $v \triangle ACD: v = b \sin A$, $v \triangle BCD$ pak $v = a \sin B$; tudíž $b \sin A = a \sin B$, a z toho $a : b = \sin A : \sin B$ . . . . α)

Podobným spůsobem obdržíme, jestliže spustíme výšku $m \perp BC$, $m = b \sin C = c \sin B$, a tudy $b : c = \sin B : \sin C$ . . . . β). Obě tyto srovnalosti dávají proto $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ . . . . . I).



Obr. 230.



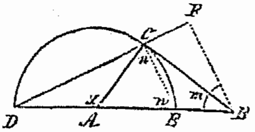
Obr. 231.

Pozn. Jiný důkaz věty této, která jest pro trigonometrické výpočty na nejvýš důležita a v trigonometrii takové místo zaujímá, jako věta pythagorská v plochoměrství, jest následující: Obepíše-li se kolem daného trojúhelníka kruh (obr. 231.) a narejsuje se průměr $BE = d$ a spojí mimo to bod E s A, bude $AB = d . \sin E$, a z toho, když ještě uvážíme že $\sphericalangle E = C$, $d = \frac{AB}{\sin C}$. Podobným spůsobem snadno bychom obdrželi $d = \frac{BC}{\sin A}$ a $d = \frac{AC}{\sin B}$; následovně jest $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin B} = \frac{AC}{\sin B}$, a z toho $BC : AC : AB = \sin A : \sin B : \sin C$.

2) *V každém trojúhelníku má se součet dvou stran k jich rozdílu, jako tangenta polovičního součtu úhlů protilehlých k tangentě polovičního rozdílu těchto úhlů.*

Důkaz. Z předešlé věty $a : b = \sin A : \sin B$ plyne $(a + b) : (a - b) = (\sin A + \sin B) : (\sin A - \sin B)$; dle vzorce 44. (v § 59. 9) jest ale $(\sin A + \sin B) : (\sin A - \sin B) = tg \frac{A+B}{2} : tg \frac{A-B}{2}$, pročež také $(a + b) : (a - b) = tg \frac{A+B}{2} : tg \frac{A-B}{2}$ . . . . II).

Pozn. I pro tuto větu plyne důkaz neodvisle od věty (I), a sice následovně: Je-li v $\triangle ABC$ (obr. 232.) $AB > AC$, učin $AC = AD = AE$, tak že



Obr. 232.

bude kruh z A poloměrem AD narejsovaný procházeti body D, C, E. Narejsuje-li se CE a vede $BF \| CE$, bude $\sphericalangle F = \sphericalangle DCE \,||\, 90^0$; přijmeme-li tehdy BF za jedničku uvážíce při tom, že jest $\sphericalangle n = m + B$, obdržíme v $\triangle$ BCF $CF = tg\, m$, a v $\triangle$ BDF $DF = tg\,(m + B) = tg\, n$. Že ale jest $\sphericalangle x = 2n$, a taktéž $\sphericalangle x = B + C$ (co zevnější), bude také $2n = B + C$, a z toho $\sphericalangle n = \frac{B+C}{2}$. Z předešlé rovnice $\sphericalangle n = m + B$ plyne dále $m = n - B = \frac{B+C}{2} - B = \frac{C-B}{2}$; pročež jest $CF = tg\, m = tg\, \frac{C-B}{2}$ a $DF = tg\, n = tg\, \frac{C+B}{2}$. Konečně pak máme v $\triangle$ DBF $BD : BE = DF : FC$, nebo $(BA + AD) : (BA - AE) = tg\, \frac{C+B}{2} : tg\, \frac{C-B}{2}$, což dá, jak z obrazu viděti lze, $(BA + AC) : (BA - AC) = (c + b) : (c - b) = tg\, \frac{C+B}{2} : tg\, \frac{C-B}{2}$.

D o d a t e k. Jako jsme obdrželi v tomto paragrafu z rovnice (I.) rovnici (II.), tak obdržíme z ní ještě i následující věty, které slovou *věty Mollweidovy*:

$$a : (b + c) = Cos\, \frac{B+C}{2} : Cos\, \frac{B-C}{2} \quad \ldots \ldots \quad \alpha)$$

$$a : (b - c) = sin\, \frac{B+C}{2} : sin\, \frac{B-C}{2} \quad \ldots \ldots \quad \beta)$$

Jest totiž z rovnice (I) $a : (b + c) = sin\, A : (sin\, B + sin\, C)$; uvážíme-li ale, že jest $A = 180^0 - (B + C)$, a následovně $sin\, A = sin (B + C) = 2\, sin\, \frac{B+C}{2} \,.\, Cos\, \frac{B+C}{2}$ (dle § 59. 7, A), a dále že jest $sin\, B + sin\, C = 2\, sin\, \frac{B+C}{2} \,.\, Cos\, \frac{B-C}{2}$, obdržíme dosadíce tyto ceny do hořejší srovnalosti, $a : (b + c) = 2\, sin\, \frac{B+C}{2} \,.\, Cos\, \frac{B+C}{2} : 2\, sin\, \frac{B+C}{2} \,.\, Cos\, \frac{B-C}{2}$, nebo $a : (b + c) = Cos\, \frac{B+C}{2} : Cos\, \frac{B-C}{2}$. — Důkaz vzorce ($\beta$) zůstavujeme čtenáři.

3. *V každém trojúhelníku rovná se čtverec které koliv strany součtu ze čtverců druhých dvou stran zmenšenému o dvojnásobný součin z těchto dvou stran a úhlu jima sevřeného.* (Věta Carnotova.*)

Důkaz. Spustí-li se opět v $\triangle$ ABC (obr. 230) $CD \perp AB$, bude $AD = b \,.\, Cos\, A$, $BD = a\, Cos\, B$, kteréžto rovnice sečtením dají

$$AD + BD = c = b \,.\, Cos\, A + a \,.\, Cos\, B.$$

---

*) Francouzský státník a učenec C a r n o t žil r. 1753—1823.

Podobným spůsobem obdrželi bychom

$$b = a \,.\, Cos\, C + c \,.\, Cos\, A,$$
$$a = b \,.\, Cos\, C + c \,.\, Cos\, B.$$

Znásobíce první z těchto rovnic c, druhou b, třetí a, obdržíme

$$a^2 = ab \,.\, Cos\, C + ac \,.\, Cos\, B$$
$$b^2 = ab \,.\, Cos\, C + bc \,.\, Cos\, A,$$
$$c^2 = bc \,.\, Cos\, A + ac \,.\, Cos\, B.$$

Odečte-li se nyní od některé z těchto rovnic součet druhých dvou, obdržíme $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \,.\, Cos\, A$, nebo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, Cos\, A \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

Toutéž cestou obdrželi bychom

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \,.\, Cos\, B \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \,.\, Cos\, C \quad \ldots\ldots \quad \gamma)$$

Dodatek. Kratší odůvodnění věty Carnotovy jest následující: Dle sinusové věty jest

$$b\, sin\, A = a\, sin\, B,$$

a mimo to $b\, cos\, A = c - a\, cos\, B$;

když pak obě tyto rovnice zdvojmocníme a spolu sečteme, obdržíme $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \,.\, cos\, B$. —

Pozn. 1. Pro tupý úhel A byla by $c = BD - AD = a\, Cos\, B - b\, Cos\, A$; uvážíme-li ale, že jest cosinus tupého úhlu záporný, zůstanou i zde všecky věty v platnosti, jež o ostroúhelném trojúhelníku tuto vyvinuty byly.

Pozn. 2. Carnotova věta plyne také přímo z věty § 37. 2, b, kde bylo $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \,.\, AD$ (obr. 230); dosadíme-li zde totiž za $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = b\, Cos\, A$, bude $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, Cos\, A$.

Věta pythagorská jest tudíž jenom zvláštním případem této věty Carnotovy, v nížto jenom vzíti potřebujeme čtverec strany naproti úhlu pravému. V kterých větách byla věta pythagorská již obsažena?

4. *Carnotova věta má být přispůsobena k počítání logaritmickému.*

Určeme k tomu cíli z rovnice α) předešlého odstavce úhel A, $Cos\, A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; když pak tuto rovnici jednou odečteme a po druhé připočteme k rovnici $1 = 1$, obdržíme

$$1 - Cos\, A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc},$$

$$1 + Cos\, A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ nebo}$$

$$1 - Cos\, A = \frac{a^2 - (b+c)^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(a-b+c)}{2bc},$$

$$1 + Cos\, A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}, \text{ následovně také}$$

$$\sqrt{\frac{1 - Cos\, A}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}},$$

$$\sqrt{\frac{1 + Cos\, A}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Obě tyto rovnice dají vzhledem ke vzorcům 34) a 35) v odstavci 8. § 59.

$$sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}},\ a\ Cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+b-a)}{4bc}}.$$

Vyjádříme-li zde jako již dříve při určování ploského obsahu trojúhelníka poloviční součet stran písmenem s, obdržíme podle § 37. 4, b)

$$sin\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \ldots\ldots\ \mathrm{I)}$$

$$Cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\ \ldots\ldots\ \mathrm{II)},$$

z kterýchžto rovnic plyne dělením

$$tg\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\ \ldots\ldots\ \mathrm{III)}.$$

Kdyžby se provedly podobné výpočty pro úhel B a C, dostali bychom tytéž výsledky, na př. $sin\,B/_2=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$, $Cos\ C/_2=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$, čehož provedení zůstavuje se pilnosti čtenáře.

Pozn. Jelikož by zde k veličině kořenové dáti se mohlo dvoje znaménko, mohlo by se z toho souditi, že úhel $A/_2$ není uvedenými právě vzorci dokonale určen; uvážíme-li ale, že $A/_2$ jakožto poloviční úhel trojúhelníka vždycky ostrý býti a co takový všechny funkce kladné míti musí (§ 57. 1), odpadne všechna pochybnosť. Pro malé úhly dává vzorec (III) nejdokonalejší výsledek, vzorec (II) ale nejméně dokonalý, poněvadž cosinus pro úhly blízko 0^0 ležící jen příliš pozvolna a nepatrně se mění. Totéž platí o vzorci (I) a sinusu pro úhly, které jsou blízko 90^0. Pro malé úhly hodí se tedy nejlépe vzorec (III), pro velké vzorec (II).

Dodatek 1. Znásobením předešlých vzorců pro $sin\,A/_2$ a $cos\ A/_2$ obdržíme $sin\,A/_2\,.\,Cos\,A/_2=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{bc}}$, a nebo, jestliže to ještě dvojkou znásobíme,

$$2\,sin\,A/_2\,.\,Cos\,A/_2=sin\,A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \ldots\ldots\ \mathrm{IV.)}$$

Čtenář udej ještě takovéto vzorce pro $sin\,B$ a $sin\,C$.

Dodatek 2. Plocha trojúhelníka ABC (obrazec 230.) byla by $p=\frac{AB\,.\,CD}{2}=\frac{c\,.\,v}{2}$; že ale jest $v=b\,sin\,A=a\,sin\,B$, bude také $p=\frac{1}{2}\,bc\,sin\,A=\frac{1}{2}\,ac\,sin\,B$, t. j. *plocha trojúhelníka rovná se polovičnímu součinu z dvou stran a sinusu úhlu těmito stranami zavřeného.*

§ 63.

Na větách předešlého paragrafu spočívá úhloměrné řešení trojúhelníků, t. j. vypočítávání neznámých částek z daných částí určujících, jak to v následujícím ukážeme.

1. *Dány jsou v trojúhelníku jedna strana* **a** *a oba k ní přiléhající úhly B a C; mají se určiti druhé dvě strany* **b** *a* **c** *jakož i jeho ploský obsah.*

Provedení. Třetí úhel $A = 180^0 - (B + C)$; strany b a c obdržíme ze sinusových srovnalostí $a : b = sin\,A : sin\,B$, $a : c = sin\,A : sin\,C$, a sice $b = \frac{a\,sin\,B}{sin\,A} = \frac{a\,sin\,B}{sin(B+C)}$, $c = \frac{a\,sin\,C}{sin\,A} = \frac{a\,sin\,C}{sin\,(B+C)}$.

Aby se vyjádřila i plocha p danými částkami, dejme $p = \frac{av}{2} = \frac{ab\,sin\,C}{2} = \frac{a^2 sin B\,.\,sin C}{2\,sin(B+C)}$.

Příklad 1. Budiž $a = 487{\cdot}5'$, $B = 103^0 48'$, $C = 42^0 25'$. $B + C = 146^0 13'$, následovně $A = 180^0 - (146^0 13') = 33^0 47'$. Ostatní počet provede se nejjednodušeji v následujícím pořádku:

$$
\begin{array}{rl}
log\,a = & 2{\cdot}6879746 \\
log\,sin\,B = & 9{\cdot}9872793_{-10} \\
log\,sin\,C = & 9{\cdot}8289930_{-10} \\
\hline
log\,a + log\,sin\,B = & 12{\cdot}6752539_{-10} \\
-log\,sin\,A = & 9{\cdot}7441165_{-10} \\
 & - \qquad\qquad + \\
\hline
log\,b = & 2{\cdot}9301374, \text{ a z toho} \\
b = & 851{\cdot}4068'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
log\,a + log\,sin\,C = & 12{\cdot}5169676_{-10} \\
log\,sin\,A = & 9{\cdot}7451169_{-10} \\
- \qquad\quad - & \qquad\qquad + \\
\hline
log\,c = & 2{\cdot}7718507, \\
c = & 591{\cdot}3584 \\
2\,log\,a + log\,sin\,B + log\,sin\,C = & 25{\cdot}1922215_{-20} \;{}^{*)} \\
log\,2 \pm log\,sin\,A = & 10{\cdot}2461469_{-10} \\
- \qquad\quad - & \qquad\qquad + \\
\hline
log\,p = & 4{\cdot}9460746 \\
p = & 88323{\cdot}16\square'
\end{array}
$$

Příklad 2. *Dána jest strana* $c = 105'$, $A = 59^0 29' 24''$, $B = 53^0 7' 48''$. Úhel $C = 180^\circ - (A + B) = 67^0 22' 48''$; $a = \frac{c\,sin\,A}{sin\,C}$, $b = \frac{c\,sin\,B}{sin\,C}$.

$$
\begin{array}{rl}
log\,c = & 2{\cdot}0211893 \\
log\,sin\,A = & 9{\cdot}9352757_{-10} \\
log\,sin\,B = & 9{\cdot}9030894_{-10} \\
log\,sin\,C = & 9{\cdot}9652374_{-10} \\
\hline
log\,c + log\,sin\,B = & 11{\cdot}9242787_{-10} \\
log\,sin\,C = & 9{\cdot}9652474_{-10} \\
- \qquad\quad - & \qquad\qquad + \\
\hline
log\,b = & 1{\cdot}9590413 \\
b = & 91'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
log\,c + log\,sin\,A = & 11{\cdot}9564650_{-10} \\
-log\,sin\,C = & 9{\cdot}9652374_{-10} \\
\hline
log\,a = & 1{\cdot}9912276 \\
a = & 98'
\end{array}
$$

		a	$\sphericalangle B$	$\sphericalangle C$
Úlohy k cvičení. Dáno jest	1.	438·7,	$23^0 48' 52{\cdot}3''$,	$43^0 39' 58{\cdot}72''$
	2.	0·48,	$65^0 33' 16{\cdot}9''$,	93 47 22·5
	3.	62789,	3 24 11·36,	171 13 29·4.

2. *Dány jsou dvě strany* **a** *a* **b** *a úhel jimi sevřený C; mají se určiti třetí strana c, druhé dva úhly A a B, jakož i plocha p.*

---

*) Čtenář navykej sobě z logaritmů, jež vyhledány a jako zde k vůli přehledu pod sebe napsány byly, takovýto složený součet i číselně najednou psáti, zde na př. se řeklo: 2.6 = 12 a 3 = 15, 2.4 a 1 = 9 a 9 = 18 a 3 = 21, 2.7 = 14 a 2 = 16 a 7 = 23 a 9 = 32, atd.

Provedení. K určení úhlů A a B slouží věty § 62. 2, a sice $(a+b):(a-b)=tg\,\frac{A+B}{2}:tg\,\frac{A-B}{2}$, v kteréžto srovnalosti znajíce $A+B=180^0-C$, následovně i $\frac{1}{2}(A+B)=90^0-C/_2$, potřebujeme toliko určiti úhel $\frac{1}{2}(A-B)$. Jest totiž $tg\,\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\,.\,tg\,\frac{A+B}{2}$; že ale jest $tg\frac{A+B}{2}=tg(90-C/_2)=Cotg\;C/_2$, bude také $tg\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}.Cotg\,C/_2$. — Znajíce nyní součet i rozdíl úhlů A a B, obdržíme velikosť úhlů samých; neboť je-li na př. $\frac{A+B}{2}=m$, $\frac{A-B}{2}=n$, bude $A=m+n$, $B=m-n$.

Ješto nyní známe všechny úhly, které musí dáti, jinak-li dobře počítáno, dohromady 180^0, můžeme určiti třetí stranu buď dle sinusové věty a nebo i dle Mollweidova vzorce. Jest totiž, když dříve $\frac{A-B}{2}$ určeno bylo, $c:(a+b)=Cos\frac{A+B}{2}:Cos\frac{A-B}{2}$, nebo $c:(a-b)=sin\frac{A+B}{2}:sin\frac{A-B}{2}$, a z toho

$$c=\frac{(a+b)\;cos\frac{A+B}{2}}{cos\,\frac{A-B}{2}}=\frac{(a-b)\,sin\,\frac{A+B}{2}}{sin\,\frac{A-B}{2}}.$$

Plocha konečně $p=\frac{a\,.\,b}{2}sin\,C$.

Příklad. Buď $a=375'$, $b=748'$, $C=63^0\,35'\,30''$. Počet bude tu následující:

$b+a=1128'$,
$b-a=373'$,
$B+A=116^0 24' 30''$,
$oj(b-a)+\,log\,cotg\,C/_2=12.7793692_{-10}$
$-log\,(a+b)=-\;3\,0503798$

$log\,ty\,\frac{A-B}{2}=\;9{\cdot}7289894_{-10}$

$\frac{B-A}{2}=28^0 10' 52''$

$B-A=56^0 21' 44''$

následovně $B=86^0 23' 7''$
$A=30^0 1' 23''$.

$log\,(b-a)=\;2{\cdot}5717088$
$log\,(b+a)=\;3{\cdot}0503798$
$log\,Cotg\,C/_2=10{\cdot}2076604_{-10}$
$log\,(a+b)=3{\cdot}0503798$
$log\,cos\frac{(A+B)}{2}=9{\cdot}7215573_{-10}$

$12{\cdot}7719671_{-10}$
$-log\,cos\frac{A-B}{2}=-9{\cdot}9542022_{\underset{+}{-}10}$

$log\,c=\;2{\cdot}8177649$
$c=\;657{\cdot}302'$

Konečně $log\,a+log\,b+sin\,log\,C=15{\cdot}4000698_{-10}$
$-log\,2=\;0{\cdot}3010300$

$log\,p=\;5{\cdot}0900398$, a z toho $p=125614{\cdot}5\square'$.

	b	c	A
Úlohy. Dáno jest	248·6577,	102·1208,	$99^0 32' 43{\cdot}52''$
	48737 ,	35263 ,	$8^0\;5' 17''$
	58 ,	236 ,	127 38 18.

3. *Dány jsou dvě strany a a b a jeden protilehlý úhel, na př. úhel A;* má se určiti c, B, C.

Úhel B najdeme ze sinusové věty $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$; majíce takto úhly A a B určené, obdržíme $C = 180^0 - (A+B)$. — Na to ustanovíme stranu c též ze sinusové věty, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$; konečně $p = \frac{ab}{2} . \sin C$.

Dodatek 1. Vzorce tyto jsou veskrz pro logaritmické počítání spůsobilé; okolnosť však, že jest úhel B toliko sinusem vyvyjádřen, spůsobuje neurčitosť zvláštního druhu. Hodnota totiž sinusu B může náležeti ku dvěma úhlům, které se vzájemně doplňují na 180^0, tak že tu obdržíme i pro úhel B dvě rozdílné hodnoty, jednu totiž přímo z desk logaritmických, a druhou, jížto se tato doplňuje na 180^0. — Aby se tehdy rozhodlo, zdali oba a nebo který z těchto úhlů úkolu našemu vyhovuje, musíme na paměti míti a rozeznávati, zdali jest z protilehlých stran $a >$ nebo $< b$.

α) Je-li $a > b$, musí být podle vět z plochoměrství známých také $A > B$; následovně musí být v tomto případu B vždycky úhlem ostrým, a tím jest již hodnota úhlu B určena.

β) Kdyby bylo $a < b$, musel by býti úhel $A < B$, a tu ovšem může míti B dvě rozdílné hodnoty, tak že tu potom obdržíme i dvě rozdílné hodnoty za C, a následovně také dva rozdílné trojúhelníky. Také se může ale v tomto případu státi, že neobdržíme žádného trojúhelníka, jestliže by totiž bylo $A + B > 180^0$, což dle § 11. 3 a 4 žádného trojúhelníka nepřipouští.

Příklad 1. $a = 58900'$, $c = 53792{\cdot}8'$, $A = 43^0\,55'$.

Zde plyne ze vzorce $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$, $\log \sin C = \log c + \log \sin A - \log a$.

$$\begin{aligned} \log c + \log \sin A &= 14{\cdot}5718404_{-10} \\ \log a &= -\ \ 4{\cdot}7701153 \\ \hline \log \sin C &= \ \ 9{\cdot}8017251_{-10}, \end{aligned} \text{ a z toho } \begin{cases} C_1 = \ \ 39^0\,18'\,23{\cdot}4'' \\ C_2 = 140^0\,41'\,36{\cdot}6''. \end{cases}$$

Že ale jest v naší úloze $a > c$, musí být také $A > C$, tak že tu můžeme vzíti za C jenom první cenu $39^0 18' 23{\cdot}4''$. Nyní tedy bude $A + C = 83^0\,13'\,23{\cdot}4''$, následovně $B = 180^0 - (A+C) = 96^0 46' 36{\cdot}6''$. Pro stranu b máme $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin (A+c)}{\sin A}$, a z toho

$$\begin{aligned} \log a + \log \sin (A+C) &= 14{\cdot}7670704_{-10} \\ \log \sin A &= \ \ 9{\cdot}8411162_{-10} \\ \hline \log b &= \ \ 4{\cdot}9259542, \end{aligned} \text{ pročež } b = 84324{\cdot}6'.$$

Příklad 2. Buď $a = 375'$, $b = 308'$, $B = 37^0 45'$. — Zde obdržíme ze vzorce $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$, $\log \sin A = \log a + \log \sin B - \log b$.

$$\begin{aligned} \log a + \log \sin B &= 12{\cdot}3609369_{-10} \\ -\log b &= -\,2{\cdot}4885507 \\ \hline \log \sin A &= \ \ 9{\cdot}8723862_{-10} \end{aligned} \text{ a z toho } \begin{cases} A_1 = \ \ 48^0\,11'\,34{\cdot}8'' \\ A_2 = 131^0 48' 25{\cdot}2'', \end{cases}$$ následovně také $C_1 = 180^0 - (A_1 + B) = 94^0 3' 25{\cdot}2''$, a $C_2 = 10^0 26' 34{\cdot}8''$.

Jelikož zde jest $a > b$, musí být také $A > B$, kteréžto podmínce ale obě hodnoty úhlu A vyhovují, tak že potom i obě hodnoty za C vzíti můžeme

Podle vzorce $log\, c = log\, b + log\, sin\, C - log\, sin\, B$ obdržíme tedy

$$\begin{array}{ll} log\, b + log\, sin\, C_1 = 12{\cdot}4874610_{-10} & log\, b + log\, sin\, C_2 = 11{\cdot}7468461_{-10} \\ -log\, sin\, B = -\ 9{\cdot}7869056_{-10} & -log\, sin\, B = -\ 9{\cdot}7869056_{-10} \\ \qquad - \qquad + & \qquad\qquad + \\ \hline log\, c_1 = 2{\cdot}7005554, \text{ a z toho} & log\, c_2 = 1{\cdot}9599405, \\ c_1 = 501{\cdot}83'. & \text{a z toho } c_2 = 91{\cdot}1886'. \end{array}$$

Úlohy.

a	b	A
124·365,	94·7634,	67° 24′ 36·4″
695 ,	427	112 26 38·3
487365 ,	523794 ,	38 19 17·6.

Dodatek 2. Že není trojúhelník dokonale určen, když by byly dány dvě strany na př. a a c, a úhel proti té menší ležící, plyne přímo z následujícího: určíme-li plochu trojúhelníka, $p = \frac{1}{2} ac\, sin B$, a stranu b dle věty Carnotovy: $b^2 = a^2 = c^2 - 2ac . cos\, B$, můžeme v této poslední čtvercové rovnici určiti c a dosaditi jeho hodnotu do rovnice první. Jest totiž $c = a\, cos\, B \pm \sqrt{b^2 - a^2 + a^2\, cos\, B^2} = a\, cos\, B \pm \sqrt{b^2 - a^2 sin\, B^2}$, tudy $p = \frac{1}{2} a\, sin\, B\, (a\, cos\, B \pm \sqrt{b^2 - a^2\, sin\, B^2})$.

Dokudby bylo $b > a$, má i kořenová veličina dvojí cenu; že ale p vždycky jenom kladné býti musí, smí se vzíti též i kořenová veličina toliko kladně. Pro $b < a$ mohou se vzíti buď obě ceny, aniž by proto p záporným býti muselo, a nebo bude celá hodnota pomyšlenou.

4. *Dány jsou všechny strany a, b, c; mají se určiti A, B, C a p.*

Dle vzorců I, II a III § 62. 4, najde se každý úhel zvláště a dle dodatku 2. téhož paragrafu i plocha trojúhelníka.

Příklad. Budiž $a = 328{\cdot}5'$, $b = 424{\cdot}8'$, $c = 395{\cdot}7$, tudy $a + b + c = 1149$, a následovně $s = 574{\cdot}5$, $s - a = 246$, $s - b = 149{\cdot}7$, $s - c = 178{\cdot}8$; i bude potom

$$\begin{array}{ll} log\, s = 2{\cdot}7592900 & log\, tg\, A/_2 = {}^1/_2 [log(s-b) + log(s-c) - log\, s - log(s-a)] \\ & = 9{\cdot}6386821 \\ log\, s-a = 2{\cdot}3909351\,. & log\, tg\, B/_2 = {}^1/_2 [log(s-a) + log(s-c) - log\, s - log(s-b)] \\ & = 9{\cdot}8543954 \\ log\, s-b = 2{\cdot}7152218 & log\, tg\, C/_2 = {}^1/_2 [log(s-a) + log(s-b) - log\, s - log(s-c)] \\ & = 9{\cdot}7772497 \\ log\, s-c = 2{\cdot}2523675, & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{a z toho} & A/_2 = 23^0\ 31'\ 6'' & \text{pročež} & A = 47^0\ \ 2'\ 12'' \\ \text{,,} & B/_2 = 35^0\ 34'\ 13{\cdot}2'' & \text{,,} & B = 71^0\ \ 8'\ 26{\cdot}4'' \\ \text{,,} & C/_2 = 30^0\ 54'\ 40{\cdot}7'', & \text{,,} & C = 61^0\ 49'\ 21{\cdot}4'' \end{array}$$

Pro plochu najdeme $log\, p = 4{\cdot}7889072$, a z toho $p = 61504{\cdot}54\square'$.

Pozn. Je-li všude dobře počítáno, musí součet polovičních úhlů dáti 90° a součet celých úhlů 180°, jak to zde až na 0·2″ skutečně také vychází. Takováto nepatrná chyba nemůže se ale uvaliti na počtáře, an desky logaritmické samy v posledních místech sem tam nedokonalé jsou; při logaritmech pětimístných objevila by se odchylka ještě větší. — Podobně by se mohlo státi, kdyby se byly hledaly pomocí vzorců pro sinus neb pro cosinus polovičního úhlu, že by se ku konci též objevily nepatrné odchylky.

Úlohy.

a	b	c
371	357	464
1936	3493·9	3132·4
1·42742	2·04736	3·47068
725·7572	709·2305	149·4755.

Praktické úlohy.

§ 64.

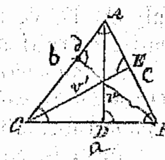
1. *Mají se určiti strany i úhly trojúhelníka, v němžto jest dáno: plocha $p = 45\square'$, a dvé jeho výšek $v = 8'$, $v' = 9'$.*

V trojúhelníku ACD (obr. 233.) jest $v = b\,sin\,C$, v $\triangle$ ACE jest $v' = b\,sin\,A$, a v $\triangle$ ABC bude $c : b = sin\,C : sin\,B$, z kteréžto srovnalosti plyne $c = \frac{b\,sin\,C}{sin\,B} = \frac{v}{sin\,B}$ . . . . . 1)

Plocha trojúhelníka ABC jest $p = {}^1\!/_2\, c \,.\, v = \frac{v \,.\, v'}{2\,sin B}$, tedy $sin\,B = \frac{v \,.\, v'}{2p} = \frac{72}{90} = {}^4\!/_5 = 0{\cdot}8$, a z toho $log\,sin\,B = log\,0{\cdot}8 = 9{\cdot}9030900_{-10}$, nebo $B = 53^0\,7'\,54''$.

Nyní jest v $\triangle$ ADB $c = \frac{v}{sin\,B} = \frac{8}{0{\cdot}8} = 10$,

v $\triangle$ BCE $a = \frac{v'}{sin\,B} = \frac{9}{0{\cdot}8} = 11{\cdot}25$.



$v = b\,Sin\,C$
$v' = b\,Sin\,A$

Obr. 233.

Když nyní známe dvě strany c a a a úhel jimi sevřený (B), splývá další provedení úlohy v § 63. 2, dohromady.

2. *V trojúhelníku ABC (obr. 233.) jest dána základna $BC = 234'$, rozdíl úhlů k ní přiléhajících $B - C = d = 30^0\,59'\,34''$, a rozdíl druhých dvou stran $AC - AB = 98'$; mají se určiti úhly trojúhelníka a jeho strany AC a AB.*

Dle Mollweidových vzorců jest $a : (b - c) = sin\frac{B + C}{2} : sin\frac{B - C}{2}$,

a z toho $sin\frac{B + C}{2} = \frac{a \,.\, sin\frac{B - C}{2}}{b - c}$; z rovnice této obdržíme pomocí logaritmu snadno úhel B + C, který když se spojí s B − C, dá B i C zvláště. — Nyní když známe stranu a a úhel k ní přiléhající, obdržíme ostatní částky dle § 63, 1.

3. *V trojúhelníku ABC (obr. 233.) byla by dána základna a, součet druhých dvou stran, a úhel při vrcholu (A); mají se určiti ostatní jeho částky.*

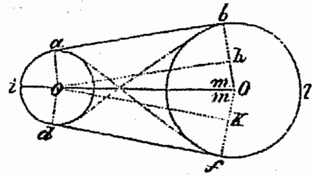
Dle Mollweidových vzorců jest $a : (b + c) = Cos\frac{B + C}{2} : Cos\frac{B - C}{2}$;

že ale jest $Cos\frac{B + C}{2} = Cos\left(\frac{180^0 - A}{2}\right) = cos\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = sin\frac{A}{2}$, bude ze srovnalosti naší $cos\frac{B - C}{2} = sin\frac{A}{2} \,.\, \frac{b + c}{a}$, z čehož zase obdržíme počtem logaritmickým úhel B − C. Další provedení snadné.

4. *Plocha trojúhelníka, jehož strany jsou $AB = 11$, $AC = 7$, $BC = 5$, má se rozpůliti přímkou procházející bodem D, který leží na straně AC od vrcholu C 2″ daleko* (t. j. $CD = 2''$).

Určí se nejprvé úhel A, načež bude výška odříznutého trojúhelníka $DE = v = AD . \sin A$; když takto známe $\frac{p}{2}$ a výšku v, najdeme i délku základny snadno.

Čtenáři zůstavuje se provedení následujících ještě případů: a) V pravoúhelném trojúhelníku dán jest ploský obsah a jeden ostrý úhel; mají se určiti ostatní jeho částky. b) Dány jsou v pravoúhelném trojúhelníku poloměr vepsaného kruhu a jedna odvěsna. c) V kosoúhelném trojúhelníku dány jsou úhly A, B, C, a jeho plochý obsah p; mají se určiti strany.



Obr. 234.

5. *Poloměry dvou kol jsou $r = 1'$, $R = 3'$, a vzdálenosť jich středu $oO = e = 6'$; má se určiti délka řemenu, který jest kolem obou kol napnut* (obr. 234.).

Protože se řemen obvodů kol v krajních bodech ovinutých částek dotýká, jsou úhly a a b, d a f pravými, a jestliže se udělá ku pomoci $oh \parallel ab$, $ok \parallel df$, bude $hO = kO = R - r$. V pravoúhelném trojúhelníku ohO jest potom $hO = R - r = e . \cos m$, a z toho $\cos m = \frac{R-r}{e}$, což dá středový úhel $m = oOb = \sphericalangle oOf = \sphericalangle aoi = 70^0 31' 46{\cdot}6''$.

Když známe nyní úhel aoi, bude $arc . aid = \frac{2r\pi}{360} . 2m$, $arc . blf = \frac{2r\pi}{360}(360^0 - 2m)$, $ab = oh = e . \sin m$, tak že bude konečně délka celého řemenu $D = 2e . \sin m + \frac{r\pi m}{90} + \frac{r\pi}{90}(180^0 - m) = 25{\cdot}24'$.

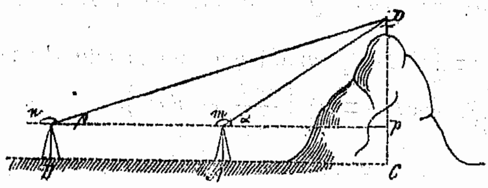
Jak by se provedla úloha ta, když by se řemeny křižovaly směrem vnitřních tečen?

6. *Má se určiti výška nějakého předmětu, k jehož patě není přístupu.**)

Budiž na př. v obr. 235. CD v výška předmětu (kopce na př.) nad rovinou AB. Změř na rovině této vzdálenosť dvou bodů, z nichžto bys mohl na vrchol předmětu viděti, na př. vzdálenosť $AB = d$, jížto prodloužení jde patou kolmice CD. Na to změř pomocí úhloměru, jehož výška $nB = mA$ taktéž změřena býti musí,

*) Velikého upotřebení dochází trigonometrie v zeměměřictví vůbec a ve hvězdářství; že ale jest při tom nutně potřebná i jakási známosť rozličných nástrojů měřických, nemůžeme se zde spouštěti do takovéhoto obšírného upotřebování trigonometrie, a uvedeme jen některé příklady.

oba úhly $Dmp = \alpha$, $Dnp = \beta$; i bude potom v $\triangle mnD$ dána strana $mn = AB = d$, $\sphericalangle \beta$, $\sphericalangle nmD = 180^0 - \alpha$, $\sphericalangle nDm = \alpha - \beta$, tak že obdržíme $mn : mD = sin\,(\alpha - \beta) : sin\,\beta$, a z toho konečně $mD =$



Obr. 235.

$\dfrac{d\,.\,sin\,\beta}{sin\,(\alpha - \beta)}$. — V pravoúhelném trojúhelníku mpD jest nyní známa přepona a všechny úhly, pročež $Dp = mD\,.\,sin\,\alpha = \dfrac{d\,.\,sin\,\beta\,.\,sin\,\alpha}{sin\,(\alpha - \beta)}$, což dá, když se k tomu připočte výška stroje (Am), celou výšku CD.

Dodatek. Kdyby se nacházela pata předmětu, jehož výšku udati máme, v rovině pozorovateli přístupné, jako na př. když by bylo v obr. 235. v m stanovisko pozorovatele a p pata předmětu Dp (nějakého stromu); změř toliko na rovině vzdálenosť $mp = d$ a $\sphericalangle \alpha$. I jest potom výška $Dp = mp\,.\,tg\,\alpha$.

7. Když považujeme naši zemi za kouli, jejíž poloměr $r = 859{\cdot}5$ míle, má se určiti: a) *jak dlouhý bude oblouk jednoho stupně na rovníku; b) jaký poloměr r' bude míti rovnoběžný kruh procházející městem, které leží pod $49^0\ 24'\ 57''$ severní šířky? c) jak dlouhý bude oblouk jednoho stupně na tomto rovnoběžníku?*

V prvním případu shledáme oblouk jednoho stupně $arc.\,1^0 = \dfrac{2r\pi}{360} = 15$ mil. V druhém případu jest obloukem AB (obr. 298.), který stupně severní šířky vyjádřuje, vlastně dán středový úhel $\alpha = BOA$, a hledá se poloměr BC. Jak z obrazu viděti lze, jest $BC \parallel AO$, a tudy $\sphericalangle B = \alpha$, pročež $BC = r' = r\,Cos\,B$, tak že bude $log\,r' = log\,859{\cdot}5 + log\,Cos\,m = 2{\cdot}934246 + 9{\cdot}813290_{10} = 2{\cdot}747536$, a z toho $r' = 559{\cdot}15$ míle.

8. *Jakou rychlostí kolem zemské osy pohybuje se Praha ležící pod rovnoběžníkem $50^0\ 5'\ 19''$ severní šířky?*

Dle předešlého příkladu určí se nejprvé poloměr příslušného rovnoběžníku, na to obvod tohoto kruhu, který Praha ve 24 hodinách proletí. Rychlostí bude tu dráha vykonaná za 1 vteřinu (0·04 míle).

9. *Má se určiti ploský obsah kruhového úseku, když jest dán: a) poloměr kruhu a k oblouku náležející úhel středový; b) poloměr a délka oblouku.*

Považuje-li se úsek za rozdíl výseku a trojúhelníka, bude výsek $v = \dfrac{r^2\pi\alpha}{360}$, plocha trojúhelníka $p = \dfrac{s\,.\,d}{2} = r\,sin\,\alpha/_2\,.\,r\,cos\,\alpha/_2 =$

$\frac{1}{2} r^2 \sin\alpha$, pročež úsek $x = r^2\left(\frac{\alpha\pi}{360} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha\pi}{180} - \sin\alpha\right)$.

10. *V kruhovém výseku jest dán poloměr a úhel středový; má se určiti tětiva, vzdálenosť její od kruhového středu, plocha výseku i úseku.*

Tětiva $s = 2r \cdot \sin \alpha/_2$, vzdálenosť od středu $d = r \cdot Cos\, \alpha/_2$, výsek $m = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$, úsek $n = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha\pi}{180} - \sin\alpha\right)$.

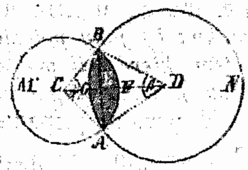
11. *Dán jest v kruhovém výseku poloměr a tětiva; určí se ostatní částky.* Provedení snadné.

12. *Dán jest v kruhovém výseku oblouk (v úhloměře) a jeho tětiva; má se určiti poloměr, plocha výseku i úseku.*

Po krátkých redukcích najdeme $r = \frac{s}{2 \sin \alpha/_2}$; vzdálenosť tětivy od středu $d = r\, Cos\, \alpha/_2 = \frac{s\, Cos\, \alpha/_2}{2 \sin \alpha/_2} = \frac{s}{2} cotg\, \alpha/_2$; výsek $m = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{s^2\pi\alpha}{4 \cdot \sin^2 \alpha/_2 \cdot 360}$; úsek $n = \frac{s^2\pi\alpha}{4 \cdot 360 \cdot \sin^2 \alpha/_2} - \frac{s^2}{4} cotg\, \alpha/_2$.

13. *Určí se ploský obsah obrazce, který vznikne proseknutím se dvou kruhů (čočka), jsou-li dány jejich poloměry r a r' i obojstředné.*

Plocha tato sestává (obr. 236.) z dvou úseků, totiž $p = u_1 + u_2$, kteréžto úseky se tedy dříve určiti musí. K tomu cíli určí se nejprvé středové úhly $ACB = \alpha$, $\sphericalangle ADB = \beta$ z trojúhelníka ACD, jehož všechny tři strany jsou dány. Jest totiž $AC = r$, $AD = r'$, $CD = c$, tudíž



Obr. 236.

$\sin \frac{ACD}{2} = \sqrt{\frac{(s-r)(s-c)}{r \cdot c}}$, $\sin \frac{ADC}{2} = \sqrt{\frac{(s-r')(s-c)}{cr'}}$, z kterýchžto vzorců obdržíme počtem logaritmickým úhly $ACB = \alpha$, $\sphericalangle ADB = \beta$. Další provedení splývá s úlohou 9.

Budiž na př. $r = 4''$, $r' = 6''$, $c = 8''$. I bude potom $s = 9$, $s - r = 5$, $s - r' = 3$, $\log \sin \frac{ACD}{2} = \frac{1}{2}[\log 5 + \log 1 - \log 4 - \log 8]$ $= 9{\cdot}596910_{-10}$, a z toho $\frac{ACD}{2} = 23^0\, 16'\, 1{\cdot}4''$, nebo $\sphericalangle ACD = \alpha/_2 = 46^0\, 32'\, 2{\cdot}8''$, $\alpha = 93^0\, 4'\, 5{\cdot}6''$; $\log \sin \frac{ADC}{2} = \frac{1}{2}[\log 3 + \log 1$ $- \log 6 - \log 8] = 9{\cdot}397940_{-10}$, a z toho $\frac{ADC}{2} = 14^0\, 28'\, 38{\cdot}9''$, nebo $\sphericalangle ADC = \frac{\beta}{2} = 28^0 57' 17{\cdot}8''$, $\beta = 57^0 14' 35{\cdot}6''$.

Nyní bude dle úlohy 9. úsek AEBF $= u_1 = r^2/_2(\frac{\alpha\pi}{180} - \sin\alpha) =$ $8\left[\frac{46{\cdot}534 \times 3{\cdot}1415}{180} - 0{\cdot}7257)\right] = 8(0{\cdot}812 - 0{\cdot}7257) = 0{\cdot}6964 \square''$; úsek AEBG $= u_2 = r^1/_2(\frac{\beta\pi}{180} - \sin\beta) = 18(\frac{57{\cdot}243 \times 3{\cdot}1415}{180} - 0{\cdot}8409)$ $= 1{\cdot}2648 \square''$, následovně plocha čočky AFBG $= u_1 + u_2 = 1{\cdot}9612 \square''$.

Jak se určí nyní měsíčky AMB a ANB?

Čtenář vypočti: a) částky rovnoběžníka, dán-li jest jeho obvod u, jedna úhlopříčna d a úhel na proti ležící δ.

b) Všechny částky trojúhelníka, v němž jest dána jedna strana a, poloměr opsaného kruhu R a poloměr vepsaného kruhu r.

14. **Řešení pravidelných mnohoúhelníků.** a) *Dána-li strana prav. n-úhelníka, má se určiti jeho plocha, poloměr vepsaného i obepsaného kruhu, a strana i plocha témuž kruhu obepsaného prav. n-úhelníka.*

Budiž v obr. 138. AB $= s$ daná strana; i bude potom $\sphericalangle$AOB $=$ $\alpha = \frac{360^0}{n}$, $\alpha/_2 = \frac{180}{n}$, OF $= r_1 = \frac{s}{2} \cdot \cot g\, \alpha/_2$, AO $= r = \frac{s}{2 \sin\alpha/_2}$ *).

Ze srovnalosti $s : r_1 = S : r$ obdržíme pak

$$S = CD = \frac{r \cdot s}{r_1} = \frac{s}{\sin\alpha/_2 \cdot \cot g\, \alpha/_2} = \frac{s}{\cos\alpha/_2}.$$

Konečně pak jest plocha daného mnohoúhelníka $p = \frac{ns}{2} \cdot r_1 =$ $\frac{ns^2}{4} \cdot \cot g\, \alpha/_2$, a plocha obepsaného prav. mnohoúhelníka P $= n$S$.\frac{r}{2} =$ $\frac{ns^2}{2 \cos\alpha/_2 \cdot \sin\alpha/_2} = \frac{ns^2}{\sin\alpha}$.

Pozn. Z příkladu toho vysvítá, že spůsobem trigonometrickým mnohem snadněji a rychleji úlohy o prav. obrazcích provedeny býti mohou, nežli spůsobem v plochoměrství naznačeným (§ 38), který pro veliká kořenová čísla příliš složený a mnohdy i zcela nemožný jest.

Je-li na př. strana pravidelného dvanáctiúhelníka 1·0718, jak velká bude S_{12}, r, r^1, p, P?

b) *Dán-li poloměr kruhu, má se určiti strana i plocha jak vepsaného tak i obepsaného prav. n-úhelníka.*

Dáno jest, jak z obr. 138. vysvítá, AO $= r$, a zároveň i středový úhel $\alpha = \frac{360^0}{n}$; i bude tehdy AB $= s_n = 2r \cdot \sin\alpha/_2$, CD $= S_n =$ $2r \cdot tg\,\alpha/_2$, OF $= r_1 = r \cdot \cos\alpha/_2$, $p = \frac{ns}{2} \cdot r_1 = \frac{nr^2 \cdot 2 \sin\alpha/_2 \cos\alpha/_2}{2} =$ $\frac{nr^2 \sin\alpha}{2}$, P $= \frac{nSr}{2} = ur^2 tg\,\alpha/_2$.

---

*) Z těchto dvou rovnic plyne $\frac{r_1}{r} = \cos\alpha/_2$.

Příklad. Je-li na př. plocha kruhu 50□″, jak velkou plochu bude mít vepsaný prav. osmiúhelník, opsaný desítiúhelník, a jaká bude strana vepsaného sedmiúhelníka?

Poloměr kruhu bude $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} = 3{\cdot}9866''$; $p_8 = \frac{8r^2 \sin\alpha}{2}$, při čemž $\alpha = \frac{360}{8} = 45^o$, následovně $p_8 = 4 . \sin 45^o . \frac{50}{\pi}$, a z toho

$$\left.\begin{array}{r} \log 4 = 0{\cdot}602060 \\ \log \sin 45^o = 9{\cdot}819185_{-10} \\ \log 50 = 1{\cdot}698970 \\ \hline 2{\cdot}150515 \\ -\log\pi = 0{\cdot}497758 \\ \hline \log p = 1{\cdot}652757, \end{array}\right\}$$

pročež plocha vepsaného prav. osmiúhelníka $p_8 = 44{\cdot}952$□″.

Další provedení zůstaveno čtenáři.

c) *Dána jest plocha prav. n-úhelníka; má se určiti jeho strana a poloměr vepsaného i obepsaného kruhu.*

Zde známe opět α a mimo to ještě p. Poněvadž jest $p = \frac{ns}{2} . r_1$, bude $s = \frac{2p}{nr_1}$, v kteréžto rovnici jen r_1 vyjádřiti potřebujeme stranou; jest totiž $s/_2 = r_1 tg\, \alpha/_2$, a z toho $r_1 = \frac{s}{2\, tg\, \alpha/_2} = \frac{s}{2} cotg\, \alpha/_2$

Bude proto $s = \frac{2p \,.\, 2 tg\, \alpha/_2}{n . s}$, nebo $s^2 = \frac{4p\, tg\, \alpha/_2}{n}$ . . . . . . 1)

Poloměr r obdržíme z rovnice $r_1 = r\, Cos\, \alpha/_2$, která dá $r = \frac{r_1}{Cos\, \alpha/_2}$ nebo když za r_1 nalezenou právě hodnotu dosadíme,

$$r^2 = \frac{4p\, tg\, \alpha/_2}{4n . (tg \alpha/_2 . cos\, \alpha/_2)^2} = \frac{p}{n . sin\, \alpha/_2 . Cos\, \alpha/_2} = \frac{2p}{n\, sin\, \alpha},$$ pročež

$$r = \sqrt{\frac{2p}{sin\, \alpha}} \quad . \; . \; . \; . \; 2)$$

Konečně plyne z této rovnice $r = r\, Cos/_2$

$$r_1 = \sqrt{\frac{p\, Cotg\, \alpha/_2}{n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3).$$

Příklady.*) 1. Je-li na př. plocha pravidelného desítiúhelníka $p = 18$□″, jaká bude jeho strana, a jaká bude plocha opsaného i vepsaného kruhu?

2. V pravid. pětiúhelníku jest poloměr vepsaného kruhu 6″, jaká bude plocha a jaká strana tohoto pětiúhelníka?

3. Dána jest $s_3 = 3'$; má se určiti p_3, P_3, S_3, atd.

4. Do jakého kruhu může být vepsán prav. patnáctiúhelník, jehož plocha $p = 68$□″?

---

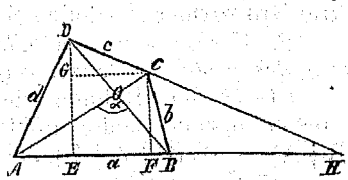
*) Jak z dosavádních rovnic o prav. mnohoúhelnících vysvitá, mohou být vždycky z osmi veličin n, α, r, r^1, s, S, p, P, všechny ostatní rovnicemi určeny, kdyžby z nich byly dvě dány.

C. Řešení čtyrúhelníků.

§ 65.

K řešení čtyrúhelníků, ano i mnohoúhelníků vůbec, dají se podobné vzorce ustanoviti, jakých jsme v § 62—64 pro řešení trojúhelníků byli našli; zde budou však vyvinuty jenom věty, kterými se určuje vespolná závislosť stran a úhlů v **čtyrúhelníku**, protože mnohoúhelníky nepravidelné, majíce je trigonometricky řešiti, obyčejně rozkládáme na trojúhelníhy nebo příhodné čtyrúhelníky.

1. Budiž dán různoběžník ABCD (obr. 237.), jehož úhly a strany podobně jako v trojúhelníku poznačíme dle řady A, B, C, D, a, b, c, d. — Prodloužíme-li strany CD a AB až k průsečníku H, a spustíme na základnu AB kolmice DE, FC, a mimo to ještě CG∥AB; bude v △ADE DE= DG + GE = $d\,sin$ A. Že ale jest DG=$c\,.\,sin$ DCG = $c\,.\,sin$ H = $c\,sin\,(180^0-[\mathrm{A}+\mathrm{D}])=c\,sin\,(\mathrm{A}+\mathrm{D})$, a GE = CF =$b\,sin$ B=$b\,sin\,[360^0-(\mathrm{A}+\mathrm{C}+\mathrm{D})]=-b\,sin\,(\mathrm{A}+\mathrm{C}+\mathrm{D})$; bude také DG+GE=$c\,sin\,(\mathrm{A}+\mathrm{D})-b\,sin\,(\mathrm{A}+\mathrm{C}+\mathrm{D})$ t. j.



Obr. 237.

$$d\,sin\,\mathrm{A}=c\,sin\,(\mathrm{A}+\mathrm{D})-b\,sin\,(\mathrm{A}+\mathrm{D}+\mathrm{C}),$$

kteréžto rovnice určuje závislosť tří po sobě následujících stran a úhlů k nim přiléhajících; závislosť tuto i pro jiné tři strany vyjádříce obdržíme podobným spůsobem

$$\left.\begin{array}{l} a\,sin\,\mathrm{B}=d\,sin\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})-c\,sin\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{D}) \\ b\,sin\,\mathrm{C}=a\,sin\,(\mathrm{C}+\mathrm{B})-d\,sin\,(\mathrm{C}+\mathrm{B}+\mathrm{A}) \\ c\,sin\,\mathrm{D}=b\,sin\,(\mathrm{D}+\mathrm{C})-a\,sin\,(\mathrm{D}+\mathrm{C}+\mathrm{B}) \\ d\,sin\,\mathrm{A}=c\,sin\,(\mathrm{A}+\mathrm{D})-b\,sin\,(\mathrm{A}+\mathrm{D}+\mathrm{C}) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ \mathrm{I)}$$

Dále jest △ ADE AE=$d\,cos$ A, EF=CG=$c\,.\,cos$ DCG=$c\,.\,cos$ H =$c\,.\,cos\,(180^0-[\mathrm{A}+\mathrm{D}])=-c\,.\,cos\,(\mathrm{A}+\mathrm{D})$, a FB=$b\,cos$ B=$c\,cos\,(360^0-[\mathrm{A}+\mathrm{D}+\mathrm{C}])=b\,cos\,(\mathrm{A}+\mathrm{D}+\mathrm{C})$; pročež sečtěním těchto rovnic AE+EF+FB=a=$d\,cos\,\mathrm{A}-c\,.\,cos\,(\mathrm{A}+\mathrm{D})+b\,cos\,(\mathrm{A}+\mathrm{D}+\mathrm{C})$, kteréžto rovnice, udávajíc vespolnou závislosť čtyr po sobě následujících stran a úhlů jimi sevřených, může se podobným spůsobem i pro ostatní strany určiti, tak že bude vůbec

$$\left.\begin{array}{l} a=d\,cos\,\mathrm{A}-c\,cos\,(\mathrm{A}+\mathrm{D})+b\,cos\,(\mathrm{A}+\mathrm{D}+\mathrm{C}) \\ b=a\,cos\,\mathrm{B}-d\,cos\,(\mathrm{B}+\mathrm{A})+c\,cos\,(\mathrm{B}+\mathrm{A}+\mathrm{D}) \\ c=b\,cos\,\mathrm{C}-a\,cos\,(\mathrm{C}+\mathrm{B})+d\,cos\,(\mathrm{C}+\mathrm{B}+\mathrm{A}) \\ d=c\,cos\,\mathrm{D}-b\,cos\,(\mathrm{D}+\mathrm{C})+a\,cos\,(\mathrm{D}+\mathrm{C}+\mathrm{B}) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ \mathrm{II)}$$

Každá z těchto posledních rovnic obsahuje 7 částek; že ale jakýkoliv čtyrúhelník dokonale jest určen jen pěti částkami,*)

*) Když čtyrúhelník rozvrhneme úhlopříčnou ve dva k sobě přiléhající trojúhelníky, bylo by k jich určení potřeba dvakrát po třech určovacích částek; že ale oba trojúhelníky jednu stranu mají, sníží se též i počet určovacích částek o jednu, a čtyrúhelník bude určen vůbec pěti danými částkami.

a úhly každého čtyrúhelníka 360° dávají; budou oboje tyto rovnice k řešení čtyrúhelníků úplně postačovati.

Dodat. Jiná vlastnost stran a úhlů čtyrúhelníkových plyne z následujícího. V obr. 237. jest $\triangle ABC = \frac{1}{2} ab . sin B$, $\triangle ADC = {}^1/_2 cd\, sin D$, a z toho sečtením pro plochu celého čtyrúhelníka

$$P = \tfrac{1}{2} ab\, sin B + {}^1/_2 cd\, sin D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad m)$$

Podobným spůsobem obdrželi bychom

$$P = {}^1/_2 bc\, sin C + {}^1/_2 ad\, sin A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n)$$

Z rovnic těchto plyne vespolným porovnáním

$$ab\, sin B + cd\, sin D = ad\, sin A + bc\, sin C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

kterážto rovnice obsahuje nejen všechny strany, nýbrž i všechny úhly.

2. *V různoběžníku ABCD (obr. 237.) jsou dány tři úhly A, B, C a dvě protilehlé strany, mají se ostatní částky počtem určiti.*

Čtvrtý úhel D bude zde $360^\circ - (A + B + C)$; stranu mezi a a c ležící určíme podle některé z rovnic (I), a sice $a\, sin B = d\, sin (B + A) - c\, sin (B + A + D)$, nebo $a\, sin B = d\, sin (B + A) + c\, sin D$, a z toho

$$d = \frac{a\, sin B - c\, sin D}{sin (B + D)}.$$

Podobně bude $b = \dfrac{c\, sin D - a\, sin A}{sin (A + D)}$.

Plochu různoběžníka najdeme, rozvrhnouce ho úhlopříčnou ve dva trojúhelníky, jichžto plochy mohou jednotlivě určeny býti.

3. *V různoběžníku jsou dány strany a, b, c, a úhly jimi sevřené B a C; jak se najdou ostatní částky?*

Najdi nejprvé úhlopříčnu BD a úhel DBC; pomocí těchto částek snadno potom určíš oba trojúhelníky ABD a BDC.

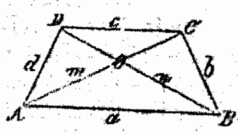
4. *Ploský obsah různoběžníka rovná se polovičnímu součinu z obou úhlopříčen a sinusu úhlu jima sevřeného.*

Důkaz. Poznamenáme-li $\sphericalangle AOB = \alpha$ (obr. 237.), bude $\triangle AOB = {}^1/_2 AO . BO\, sin \alpha$, $\triangle BOC = {}^1/_2 CO . OB\, sin \alpha$, a z toho sečtením $\triangle ABC = {}^1/_2 BO . AC\, sin \alpha \ldots 1)$

Podobnou cestou obdržíme

$$\triangle ADC = {}^1/_2 AC . BD\, sin \alpha \quad \ldots . . 2)$$

Když pak tyto dvě rovnice sečteme, obdržíme $ABCD = {}^1/_2 DB . AC\, sin \alpha$.



Obr. 238.

5. Rovnice v odstavci (I) paragrafu tohoto vyvinuté zjednoduší se znamenitě, jak mile se daný čtyrúhelník promění buď v lichoběžník, nebo v rovnoběžník, poněvadž tím přistoupí do počtu nové určovací vlastnosti stran a úhlů.

V lichoběžníku ABCD na př. (obr. 238.), kde jest $A + D = B + C = 180^\circ$, a tím $sin (A + D) = sin (B + C) = 0$, $Cos (A + D) = Cos (B + C) = -1$, následovně $sin A = sin (180^\circ - D) = sin D$, $sin B = sin C$, $Cos A = Cos (180^\circ - D) = - Cos D$, $Cos B = - Cos C$; promění se rovnice (I) v odstavci prvním vyvinuté v následující:

$$a\, sin B = d\, sin (A + B) + c\, sin B$$
$$b\, sin C = d\, sin A = a\, sin D$$
$$c\, sin D = b\, sin (C + D) - a\, sin (180 + D), \text{ atd.}$$

Úloha. *V lichoběžníku ABCD (obr. 238.) byly by dány obě základny $AB = 48'$, $CD = 35'$, a úhly k AB přiléhající $A = 31^0 42' 58''$, $B = 48^0 12' 32''$; mají se určiti ostatní částky i plocha lichoběžníka.*

Úhel $D = 180^0 - A$, $C = 180^0 - B$; dle hořejších rovnic bude pak $a \sin B = d \sin(A + B) + c \sin B$, a z toho $d = \frac{(a - c) \sin B}{\sin(A + B)}$. Podobně obdržíme z rovnice $a \sin A = b \sin(A + B) + c \sin A$ stranu $b = \frac{(a - c) \sin A}{\sin(A + B)}$.

Plocha bude

$$p = \frac{c + a}{2} \cdot b \sin B = \frac{c + a}{2} \cdot \frac{\sin A \cdot \sin B (a - c)}{\sin(A + B)} = \frac{(a^2 - c^2) \sin A \cdot \sin B}{2 \cdot \sin(A + B)}.$$

Jak se promění vzorce svrchu uvedené (I. a II.), když by se stal daný čtyrúhelník rovnoběžníkem?

6. *Má se určiti v lichoběžníku vespolná závislost mezi jeho stranami a úhlopříčnami.*

V obr. 238. buďtež $AC = m$, $BD = n$ dané úhlopříčny; i bude potom v $\triangle ABD$ dle Carnotovy věty $n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \operatorname{Cos} A$,
v $\triangle ADC$ " $m^2 = c^2 + d^2 - 2cd \operatorname{Cos} A$ (proto že jest $D = 180^0 - A$).

Znásobíme-li první z těchto rovnic c, druhou pak a, a sečtem na to obě rovnice, obdržíme $cn^2 + am^2 = a^2c + d^2c + ac^2 + ad^2 = d^2(a + c) + ac(a + c)$, nebo . . . $cn^2 + am^2 = (a + c)(d^2 + ac)$ . . . . 1)

Podobným spůsobem obdržíme

z $\triangle ABC$, $m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos} B$,
z $\triangle BCD$, $n^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} B$,

a z toho tímtéž spůsobem jako dříve $cm^2 + bn^2 = b^2(c + a) + ac(a + c)$, nebo $cm^2 + bn^2 = (a + c)(b^2 + ac)$ . . . . 2)

Sečtením rovnice (1) a (2) obdržíme konečně po náležitém zkrácení číslem $(a + c)$

$$m^2 + n^2 = d^2 + b^2 + 2ac \quad . . . . 3)$$

t. j. *v každém lichoběžníku rovná se součet čtverců z obou úhlopříčen součtu čtverců z obou nerovnoběžných stran zvětšenému o dvojnásobný součin stran rovnoběžných.*

Odečtením rovnic (1) a (2) obdržíme touto cestou pokračujíce

$$m^2 - n^2 = (d^2 - b^2) \frac{a + c}{a - c} \quad . . . . 4)$$

t. j. *rozdíl čtverců z obou úhlopříčen má se k rozdílu čtverců z obou nerovnoběžných stran, jako součet z rovnoběžných stran k jich rozdílu.*

Konečně obdržíme z rovnic (3) a (4) po krátkém počtu

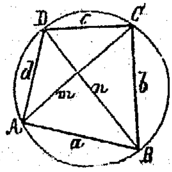
$$m^2 = \frac{a(d^2 - c^2) - c(b^2 - a^2)}{a - c}, \quad n^2 = \frac{a(b^2 - c^2) - c(a^2 - d^2)}{a - c} \quad . . . 4)$$

Úloha 1. *Dány jsou v lichoběžníku všechny čtyry strany; mají se určiti jeho úhlopříčny, úhly, výška i plosný obsah.*

Úhlopříčny dávají nám rovnice (5) v předešlém odstavci. Úhel D určí se na to z $\triangle ADC$, v němžto již známe všechny tři strany, a taktéž úhel C z $\triangle BCD$. — Výška bude $v = b \sin B = d \sin A$; a plocha $p = \frac{1}{2}(a + c) d \sin A$.

Úloha 2. Dány jsou v lichoběžníku obě rovnoběžné strany, jakož i obě úhlopříčny; mají se určiti ostatní částky.

7. *Jsou-li dány všechny čtyry strany v čtyrúhelníku z tětiv, mají se určiti jeho úhly, úhlopříčny, plocha a poloměr kruhu obepsaného.*



Obr. 239.

a) Určení úhlů. Poněvadž jest v obr. 239. $A = 180^0 - C$, $B = 180^0 - D$, potřebujeme jen úhly A a B najíti. Dle Carnotovy věty obdržíme v trojúhelnících ABD a BCD $n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \,.\, \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \,.\, \cos A$ . . . . α)

z kteréžto rovnice plyne $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$ . . . . . . β)

Aby vzorec tento podroben býti mohl počtu lagaritmickému, odečtěme jej a po druhé připočtěme k rovnici $1 = 1$, načež obdržíme, počínajíce sobě podobným spůsobem jako v § 62, 4)

$$\sin A/_2 = \sqrt{\frac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{4(ad + bc)}}$$

$$\cos A/_2 = \sqrt{\frac{2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{4(ad + bc)}}$$ nebo

$$\sin A/_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{ad + bc}}$$

$$\cos A/_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a + d)^2 - (c - b)^2}{ad + bc}},$$ a konečně

$$\sin A/_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a + b + c - d)\,(b + c + d - a)}{ad + bc}},$$

$$\cos A/_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a + c + d - b)\,(a + b + d - c)}{ad + bc}}.$$

Položíme-li i zde jako v § 62, 4) $a + b + c + d = 2s$, bude jak se snadno přesvědčíme, $b + c + d - a = 2(s - a)$, $a + c + d - b = 2(s - b)$, $a + b + d - c = 2(s - c)$, $a + b + c - d = 2(s - d)$, tak že poslední naše dva vzorce budeme moci také psáti:

$$\sin A/_2 = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - d)}{ad + bc}} \quad . . . . \quad \mathrm{I)}$$

$$\cos A/_2 = \sqrt{\frac{(s - b)\,(s - c)}{ad + bc}} \quad . . . . \quad \mathrm{II)}$$

z kterýchžto vzorců obdržíme dělením a potom zase násobením

$$tg\, A/_2 = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - d)}{(s - b)\,(s - c)}} \quad . . . . \quad \mathrm{III)}$$

$$\sin A = \frac{1}{2(ad + bc)} \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

Pro druhý úhel B obdržíme podobným počtem

$$tg\,B/_2 = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}.$$

Pozn. Promění-li se čtyrúhelník z tětiv v trojúhelník, pro ten případ totiž, že by bylo $d=o$, přejdou ihned vzorce tyto ve vzorce v § 62. 4) pro trojúhelník vyvinuté.

b) Ploský obsah obdržíme sečtením trojúhelníků ABD a BCD, v nichžto známe dvě strany a jimi sevřený úhel. Jest totiž $\triangle ABD = \frac{1}{2} ad . sin A$, $\triangle BCD = \frac{1}{2} bc . sin C$; že ale jest $\sphericalangle C = 180^0 - A$, bude, když za sin C dosadíme sin A, a obě rovnice sečteme

$ABCD = P = \frac{(ad+bc)}{2} sin A = (ad+bc) sin A/_2 . Cos A/_2$, a nebo když tu dosadíme za $sin A/_2$ a $cos A/_2$ ceny vzorců I a II

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

c) Úhlopříčny určí se následovně: Dosaď ve vzorci (β) nalezenou hodnotu za $Cos A = \frac{a^2+d^2-(b^2+c^2)}{2ad+2bc}$ do vzorce (α) udávajícího hodnotu n^2, a obdržíš uvedením na společného jmenovatele a provedením naznačeného násobení

$$n^2 = \frac{2a^2bc+2d^2bc+2b^2ad+2c^2ad}{2ad+2bc} = \frac{(a^2+d^2)bc+ad(b^2+c^2)}{ad+bc}$$
$$= \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}$$

a z toho $n = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}$.

Podobným počtem najdeme pro druhou úhlopříčnu

$$m = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{cd+ab}}.$$

Dodatek. Z obou těchto vzorců, jimiž se udávají úhlopříčny čtyrúhelníka z tětiv, obdržíme $mn = ac + bd$ (věta Ptolemeova v § 44, 3), a dále $\frac{m}{n} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$ (věta v § 35, 7).

d) Poloměr obepsaného kruhu obdržíme z $\triangle$ ABD podle § 43, 1), a sice $r = \frac{adn}{4p}$, nebo vzhledem k tomu, že jest $p = \frac{1}{2} ad . sin A$, $r = \frac{n}{2 sin A}$.

Když pak dosadíme za n a sin A svrchu nalezené hodnoty a naznačené výkony provedeme, bude konečně

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

Úloha 1. Z čtyrúhelníku z tětiv jest $a=435$, $b=78$, $c=325$, $d=406$; mají se určiti ostatní částky. (Provedením naznačených zde vzorců najdeme $m=459$, $n=377$, $\sphericalangle C=126^0 52' 22{\cdot}6''$, $D=103^0 5' 33{\cdot}2''$, $P=80784$, $r=235\,{}^5/_8$).

Úloha 2. V čtyrúhelníku z tětiv mají se určiti ostatní částky, když jest dán $r=10$, $a=16{\cdot}345$, $\sphericalangle A=72^0 14' 26{\cdot}34''$, $B=93^0 44' 36{\cdot}04''$.

8. *Má se udati vzdálenosť dvou bodů C a D, k nimžto není přístupu.*

Provedení. Zvol sobě na příhodném místě přímku AB (dle obr. 237.), která by byla co možná s *CD* v téže vodorovné rovině a z nížto bys na oba body C a D viděti a úhly ABD, ABC, BAC, BAD pohodlně změřiti mohl. Změří-li se na to ještě přímka AB, budou dány i $\sphericalangle ADB = 180^0 - (\sphericalangle DAB + DBA)$, $\sphericalangle ACB = 180^0 - (\sphericalangle CDB + BCD)$, tak že se budou moci v trojúhelnících ABD a BCA určiti úhlopříčny AC a BD, jakož i strany AD a BC. Vzdálenosť konečně obou bodů C a D určí se buď z trojúhelníka ACD nebo z $\triangle BCD$ dle § 63, 2.

Pozn. Zde bude rádno, žádanou délku CD z obou trojúhelníků určiti, jelikož se tím nabyde přesvědčení o správnosti počtu. Aby se na př. změřila vzdálenosť dvou věží, vyhledáno jest příhodné stanoviště a odměřeno jest následující: $AB=125^0$, $\sphericalangle BAD=108^0 11' 42''$, $\sphericalangle CAB=36^0 52' 11''$, $\sphericalangle ABC=101^0 26' 15''$, $\sphericalangle ABD=41^0 26' 24''$; jak daleko jsou věže ty od sebe?

Úloha 1. V rovnoběžníku jsou dány dvé v témž rohu sbíhající se strany a a b a úhel jimi sevřený α; mají se určiti obě úhlopříčny, úhel těmito sevřený a ploský obsah rovnoběžníka.

Úloha 2. Buďtež v obr. 238. $a=33{\cdot}24$, $b=25{\cdot}6$, $c=18{\cdot}5$, $d=27$; mají se určiti úhly, úhlopříčny, výška i ploský obsah lichoběžníka ABCD.

3. Najdi vzdálenosť dvou bodů na poli, k nimžto není přístupu.

4. Najdi vzdálenosť dvou bodů na poli, z nichžto jest přístupný jenom jeden.

Kniha třetí.

DODATKY.

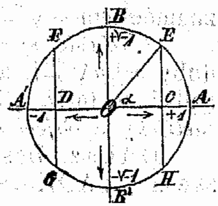
A. Veličiny pomyslné a trigonometrická věta binomialní.

§ 66.

1. Není tomu ještě dávno, kde se **veličiny pomyslné** čili imaginárné jakožto něco nemožného z počtu vší mocí vylučovaly. Rozeznávaly se toliko veličiny celistvé, lomené, kladné a záporné; veličiny pak podoby $n\sqrt{-1}$ nepovažovány za nic skutečného leč jenom za přechodný tvar, kterým se činí výsledek nějakého výpočtu nepotřebným. — Leč jako pro člověka znajícího toliko jen obyčejné výpočty živnostenské s čísly celistvými a lomenými čísla **nesměřitelná** i **záporná** pouhými výmysly a nemožnostmi jsou, kdežto jim předce ze stanoviska vědeckého ani hodnoty ani

významu upříti nelze; tak jest i veličina $\sqrt{-1}$ jen tak daleceě nemožnou nebo pomyslnou, pokud se obmezujeme na dosavádní číselnou řadu $\ldots -3, \ldots -2, \ldots -1, \ldots 0, \ldots +1, \ldots +2, \ldots +3, + \ldots$ v nížto nepřichází ni jediného čísla, jehož čtverec by dával -1.

Dá se však mysleti, že i v tomto případu náležitým rozšířením číselné soustavy veličina $\sqrt{-1}$ realné hodnoty a náležitého významu obdržeti může. Takovéto rozšíření číselné soustavy nemůže se ale státi v dosavádní přímočarné řadě $\ldots -2, \ldots -1, \ldots 0, \ldots +1, \ldots +2, \ldots$ protože řada tato od nuly k levé i k pravé straně, t. j. směrem záporným i kladným do nekonečna ubíhá a od $-\infty$ až do $+\infty$ bez toho všechna možná čísla obsahuje. Nezbývá nic jiného, nežli přímočarnou tuto soustavu i do šířky rozšířiti, tak aby zobrazení její nabylo tvaru plošného.



Obr. 240.

Představme sobě totiž, že od nějakého bodu O (obr. 240.) vybíhají protivným směrem přímky OA a OA', a poznamenejme tyto směry též protivnými znaménky kladu a záporu. Veškerá realná, celistvá i lomená čísla představují potom rozličné vzdálenosti bodů na přímce AA' od bodu O, na př. $OC = x$, $AO = 1$, $OD = -z$, atd. Chceme-li ale přijíti z bodu O do E, tu můžeme jíti cestou rozličnou; nejprvé na př. vykonáme cestu $OC = x$ a napotom cestu $CE = y$, tak že jsme celkem urazili $x + y$. Při tom ale jest potřeba nějakého poznačení, kterým by se vyjádřilo, že jest směr CE od směru OE rozdílný, a že tedy dráha OC+CE není přímočarná, v kterémžto případu by bod E zcela někde jinde ležeti musel. Poznamenejme nový tento směr nějakou značkou, tak že potom bude číslo, jímžto se udává vykonaná dráha a zároveň i místo bodu E, vyjádřeno $x + y$. Pro $n = o$ budou se udávati číslem $x + y_0$ místa ležící toliko na přímce OA, a pro $x = o$ číslem $0 + y_n$ místa bodů ležících na přímce OB.

Položení bodu F (v levo nahoře) určilo by se dle toho hodnotami $OD = -x$ a $DF = y_n$, celkem tedy číslem $-x + y_n$; vůbec bychom dle této zásady vyjádřili položení bodů ve čtverníku AOB' (v pravo dole) číslem $x - y_n$, ve čtverníku A'OB' ale číslem $-x - y_n$.

Přijmem-li poloměr kruhu $OA = OB$ za jedničku a uvážíme, že směr $OB = +1_n$, ležíc mezi směrem kladným a záporným, vzniká z onoho, když původní rameno (OA) otočíme o 90^0 v levo, bude dle významu násobení číselných veličin *) součin $+1 \,.\, 1_n$ vyjádřovati číslo ležící na ramenu, jehož směr vznikl odchýlením se kladného směru + o 90^0, tak že bude $+1 \,.\, 1_n = 1_n$. Po-

*) Pro násobení číslic udává algebra všeobecnou definici: a znásobiti číslem b značí, utvořiti z a nové číslo tímtéž způsobem, jakým vzniklo b z jedničky. Dle toho značí na př. 8×3 utvořiti z 8 nové číslo takým spůsobem, jakým vznikla 3 z 1; a poněvadž $3 = 1 + 1 + 1$, bude také $8 \times 3 = 8 + 8 + 8 = 24$,

dobně bude součinem $1_n . 1_n$ vyjádřeno číslo ležící na ramenu, které se od postraního směru $1_n = OB$ o 90^0 odchýlilo, t. j. číslo ležící na ramenu OA', tak že bude $1_n . 1_n = -1$; a nebo $(1_n)^2 = -1$, z čehož plyne $1_n = \sqrt{-1}$.

Vidíme tedy, že tak zvaná pomyslná veličina $\sqrt{-1}$ vyjádřuje skutečnou realnou veličinu onoho směru, který v naší číselné přímočarné soustavě leží směrem mezi kladným a záporným od obou stejně vzdálen. Dle toho značí $y\sqrt{-1}$ přímku, která má délku y kolmo stojíc na přímce původní; a čísly $x + y\sqrt{-1}$, $-x + y\sqrt{-1}$, $x - y\sqrt{-1}$, $-x - y\sqrt{-1}$ určí se v našem obrazci dle řady místa E, F, H, G.

Znaménka $+\sqrt{-1}$ a $-\sqrt{-1}$ jsou tedy pro plošné rozšíření číselné soustavy naší tím, čím jsou $+1$ a -1 pro její přímkové prodloužení. Značí-li na př. $+1$ jeden krok od bodu O v pravo, -3 tři kroky v levo, vyjádřuje se znaménkem $+\sqrt{-1}$ přechod od kteréhokoliv čísla dané řady na strany vzhůru, a naopak znaménkem $-\sqrt{-1}$ na stranu dolů.

2. *Každá spojitá č. tak zvaná komplexní veličina*, t. j. číslo podoby $x \pm y\sqrt{-1}$, a nebo jak se dle novějšího spůsobu píše, $x \pm yi$ (když se totiž $\sqrt{-1}$ poznačí krátce i) *může býti vyjádřena trigonometricky a objeví se při tom v podobě* $r(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)$.

Důkaz. Dosadíme-li v našem obrazci 240. za $OE = r$, a nazveme $\sphericalangle AOE = \alpha$, bude $OC = x = r\cos\alpha$, a $CE = y = r\sin\alpha$; pročež $\frac{y}{x} = tg\,\alpha$, a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, nebo také $r = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$, a následovně $x \pm y\sqrt{-1} = r\cos\alpha \pm r\sin\alpha . \sqrt{-1} = r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)$.

Příklady. a) $1 + 3\sqrt{-3} = 1 + 3i$ dá dle toho přetvoření $2(\cos 60^0 + i\sin 60^0)$
b) $33 + 56i = 65(\cos 59^0 29' 23{\cdot}2'' + i \sin 59^0 29' 23{\cdot}2'')$
c) $1 - \sqrt{-3} = \sqrt{2}(\cos 45^0 - i\sin 45^0)$.

Dodatek 1. Jak se provedením naznačeného násobení snadno přesvědčíme, jest $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = 1$.

Dodatek 2. Veličina r v takových výrazech slove modul (modulus) a veličina α argumentem spojité veličiny.

3. *Věta Moivrova čili tak zvaná trigonometrická věta binomialní:* $(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n = \cos n \pm i \sin n\alpha$.

Dejme nejprvé $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta + i(\sin\alpha . \cos\beta + \sin\beta . \cos\alpha) = \sin(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$; i bude potom toutéž cestou vůbec:

a) $[\cos\alpha \pm i\sin\alpha][\cos\beta \pm i\sin\beta] = \cos(\alpha + \beta) \pm i\sin(\alpha + \beta)$,
b) $[\cos\alpha \pm i\sin\alpha][\cos\beta \mp i\sin\beta] = \cos(\alpha - \beta) \pm i\sin(\alpha - \beta)$.

Když pak spůsobem zde naznačeným provedeme součin tří činitelů, bude vzhledem k § 59. 5) dodat.:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma) =$$
$$[\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)][\cos\gamma + \sin\gamma] = \cos(\alpha + \beta + \gamma) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma),$$

a vůbec $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)(\cos\delta + i\sin\delta \ldots =$
$$\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots).$$

Dejme tomu nyní, že by bylo v těchto součinech $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\ldots$, a všech dvoučlenových činitelů že by bylo n; i bude potom

$$[\cos\alpha+i\sin\alpha]^n=\cos n\alpha\mp i\sin n\alpha \quad \ldots\ldots 1)$$

Kdyby bylo na místě $+\alpha$ jenom $-\alpha$, obdrželi bychom, protože jest $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, a $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, přirozeně

$$[\cos\alpha-i\sin\alpha]^n=\cos n\alpha-i\sin n\alpha \quad \ldots\ldots 2),$$ tedy vůbec

$$[\cos\alpha\pm i\sin\alpha]^n=\cos n\alpha\pm i\sin n\alpha \quad \ldots\ldots 3),$$

kterýžto vzorec slove trigonometrická věta binomialní nebo vzorec Moivrův.

Dodatek. Sečtením a odečtením rovnic 1) a 2) obdržíme:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=2\cos n\alpha \quad \ldots\ldots a)$$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n-(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=2i\sin n\alpha \quad \ldots\ldots b)$$

Že platí vzorec Moivrův pro jakýkoliv exponent, nechť jest totiž n číslo kladné, záporné, celistvé neb lomené, plyne z následujícího: Budiž nejprvé

$$(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)^{-n}=\frac{1}{(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)^n}=\frac{1}{\cos n\alpha\pm i\sin n\alpha}=$$

$$\frac{\cos n\alpha\mp i\sin n\alpha}{\cos n\alpha^2-(i\sin n\alpha)^2}=\frac{\cos n\alpha\mp i\sin n\alpha}{\cos n\alpha^2+\sin n\alpha^2}=\cos(-n\alpha)\pm i\sin(-n\alpha)\ldots . m)$$

t. j. Moivrův vzorec platí i pro záporného mocnitele.

Dosadíme-li nyní ve vzorci $(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha\pm i\sin n\alpha$, který zůstává platným pro jakýkoliv úhel α, za $\alpha=\frac{\beta}{n}$, následovně $n\alpha=\beta$, bude $(\cos\frac{\beta}{n}\pm i\sin\frac{\beta}{n})^n=\cos\beta\pm i\sin\beta$, a z této rovnice odmocněním $\sqrt[n]{\cos\beta\pm i\sin\beta}=(\cos\beta\pm i\sin\beta)^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{\beta}{n}\pm i\sin\frac{\beta}{n}$, nebo když povýšíme obě strany na mocninu m-tou, vůbec

$$(\cos\beta\pm i\sin\beta)^{\frac{m}{n}}=\left(\cos\frac{\beta}{n}\pm i\sin\frac{\beta}{n}\right)^m=\cos\frac{m\beta}{n}\pm i\sin\frac{m\beta}{n} \quad \ldots\ldots n)$$

kterýžto vzorec ukazuje, že Moivrova věta podrží svou platnosť i pro lomeného mocnitele, jest tedy platná všeobecně.

4. Uvážíme-li, že $\cos\alpha=\cos(\alpha+k\,.\,360^0)$, a $\sin\alpha=\sin(\alpha+k\,.\,360^0)$, při čemž k vyjadřuje libovolné celistvé, buď kladné nebo i záporné číslo (§ 57, 2, d), bude $(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)n=\cos n(\alpha+k.360^0)\pm i\sin n(\alpha+k.360^0)$, čímž se stane Moivrův vzorec mnohovýznamným a hodí se tak k řešení rovnic, jichžto tvar jest $\sqrt[n]{\cos\alpha\pm i\sin\alpha}$; číslo k může tu obdržeti všechny hodnoty od nuly až do $n-1$. — Ukazuje nám tedy trigonometrie, *že jsou veličiny kořenové mnohovýznamné.*

Příklady. 1. Jaké hodnoty může míti neznámá v rovnici $x=\sqrt[5]{3+4i}$?

Dle odstavce (2) dá se rovnici této nejprvé trigonometrický tvar dosazením $3+4i=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, při čemž bude $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\cos\alpha=\frac{3}{r}=\frac{3}{5}$,

$sin\,\alpha = \frac{4}{r} = \frac{4}{5}$, a tudy $\alpha = 53^0\,7'\,48''$; i bude potom $\sqrt[5]{3+4i} = \sqrt[5]{5(cos\alpha + i\,sin\,\alpha)}$.
Že ale jest
$\sqrt[5]{cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha} = (cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha)^{1/5} = cos\,(\alpha/_5 + k.\,360^0) (+ i\,sin) \frac{\alpha}{5} + k.\,360^0)$, bude
když dosadíme do vzorce
$\sqrt[5]{5(cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha)} = \sqrt[5]{5}\,[cos\,(\frac{\alpha}{5} + k.\,360^0) + i\,sin\,(\frac{\alpha}{5} + k.\,360^0)]$ po sobě $k = o$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ až konečně $k = 4$,
$x_1 = \sqrt[5]{5}\,[cos\,\frac{\alpha}{5} + i\,sin\,\alpha/5] = \sqrt[5]{5}\,[cos\,10^0 37' 33{\cdot}6'' + i\,sin\,10^0 37' 33{\cdot}6''] = 1{\cdot}35587 + i\,.\,0{\cdot}25441$,

$x_2 = \sqrt[5]{5}\,[cos(\frac{\alpha}{5} + 72^0) + i\,sin\,(\frac{\alpha}{5} + 72^0)] = 0{\cdot}17708 + 1{\cdot}36832\,i$

$x_3 = \sqrt[5]{5}\,[cos(\frac{\alpha}{5} + 144^0) + i\,sin(\frac{\alpha}{5} + 144^0)] = -1{\cdot}24663 + 0{\cdot}59125\,i$

$x_4 = \sqrt[5]{5}\,[cos(\frac{\alpha}{5} + 216^0) + i\,sin\,(\alpha/5 + 216^0)] = -0{\cdot}94754 - 1{\cdot}00290\,i$

$x_5 = \sqrt[5]{5}\,[cos\,(\alpha/5 + 288^0) + i\,sin\,(\alpha/5 + 288^0)] = 0{\cdot}66101 - 1{\cdot}21108\,i$.

Zde totiž jest v prvním případu $\alpha/5 = 10^0 37' 33{\cdot}6''$

$log\,cos\,\alpha/5 = 9{\cdot}992366$, $log\,\sqrt[5]{5} = 0{\cdot}139794$, $log\,sin\,\alpha/5 = 9{\cdot}265755$,
$cos\,\alpha/5 = 0{\cdot}982575$ $\sqrt[5]{5} = 1{\cdot}37973$, $sin\,\alpha/5 = 0{\cdot}184397$,
$\sqrt[5]{5} \times Cos\,\alpha/5 = 1{\cdot}35577$, $\sqrt[5]{5} \times sin\,\alpha/5 = 0{\cdot}25441$,
a spůsobem tímto najdou se i ostatní hodnoty.

2. Kolik a jaké hodnoty má $\sqrt[3]{1}$?

Abychom tomu dali podobu trigonometrickou
$\sqrt[n]{x + iy} = \sqrt[n]{r(cos\,\alpha + i\,sin\alpha)}$, potřebujeme dle odstavce (2) dáti $x = 1$, $y = 0$, tak že bude
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, $cos\,\alpha = 1$, tudy $\alpha = 0$; i bude potom

(1) $^{1}/_{3} = cos\left(\frac{0^0}{3} + \frac{k}{3}.\,360^0\right) + i\,sin\left(\frac{0^0}{3} + \frac{k}{3}.\,360^0\right)$, a z toho, když dáme dle řady $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$,

$x_1 = cos\,0^0 + i\,sin\,0^0 = 1$,

$x_2 = cos\,120^0 + i\,sin\,120^0 = -cos\,60^0 + i\,sin\,60^0 = -(\frac{1}{2} - i\sqrt{3})$

$x_3 = cos\,240^0 + i\,sin\,240 = -cos\,60^0 - i\,sin\,60^0 = -(^1/_2 + i\sqrt{3})$.

3. Spůsobem tímto obdržíme za neznámou v rovnici $x = \sqrt[5]{1}$:

$x_1 = cos\,0^0 + i\,sin\,0^0 = 1$
$x_2 = cos\,72^0 + i\,sin\,72^0$,
$x_3 = cos\,144^0 + i\,sin\,144^0 = -cos\,36^0 + i\,sin\,36^0$
$x_4 = cos\,216^0 + i\,sin\,216^0 = -cos\,36^0 - i\,sin\,36^0$
$x_5 = cos\,288^0 + i\,sin\,288^0 = -cos\,72^0 - i\,sin\,72^0$.

4. Jaké hodnoty má $\sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[4]{+1}$?

B. Upotřebení trigonometrie při řešení rovnic goniometrických.

§ 67.

V rozličných výpočtech fysiky, mechaniky, atd. přicházejí mnohdy rovnice, v nichžto neznámá veličina neobjevuje se přímo nýbrž ve spůsobě funkcí úhloměrných; i jedná se tudy o to, jak lze takovéto rovnice řešiti, t. j. jakým spůsobem najdeme úhel, rovnici vyhovující. Při řešení takovýchto rovnic, které **rovnicemi úhloměrnými** slovou (goniometrickými), nemáme tak obecných návodů jako pro řešení rovnic čistě algebraických; jenom bystré obraty a dokonalá známosť celé goniometrie vedou tu k cíli.

Některá důležitější pokynutí, jež tuto na vybraných příkladech naznačíme, doufáme že postačí, aby čtenář s řešením rovnic goniometrických blíže seznámiti se mohl.

1. *Je-li rovnice jenom o jedné neznámé* a dá se uvésti na formu $a \sin x = b \cos x$, děl na obou stranách $\cos x$, a obdržíš $a \operatorname{tg} x = b$, t. j. $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$, kterážto rovnice pomocí logaritmů žádanou cenu dá.

Bylo-li by na př. $48 \sin x = 85 \cos x$, bude $\operatorname{tang} x = \frac{85}{48}$; následovně

$$\begin{array}{rl} \log 85 = 1{\cdot}929419 & \\ -\ \log 48 = 1{\cdot}681241 & \qquad x = 60^0\, 32'\, 48{\cdot}7'' \\ \hline \log x = 10{\cdot}248178_{-10} & \end{array}$$

Nalezená takto hodnota není však ta jediná, která předložené rovnici vyhovuje, poněvadž všechny úhly, které buď o 180^0 nebo o nějaký násobek 180^0 větší jsou, nežli nalezené x, mají tutéž tangentu. Museli bychom tedy v naší rovnici psáti

$$x = n\pi + 60^0\, 32'\, 48{\cdot}7''.$$

Obyčejně jsou ale rovnice takovéto ještě vázány na jiné, s předmětem, k němuž se úloha vztahuje, souhlasící podmínky, na př. že jest úhel x úhlem nějakého trojúhelníka; v těch a podobných případech rozhodují potom okolnosti, kolik a nebo které hodnoty má neznámá obdržeti. My se budeme v následujících příkladech držeti jenom té ceny, kterou nám logar. trigonometrické tabulky bezprostředně podají.

Příklady.

1. Z rovnice $\sin x^2 - \cos x^2 = 0$ obdržíme $\operatorname{tg} x^2 = 3$, nebo $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$, a z toho $x_1 = 60^0$, $x_2 = 120^0$.

2. Udej hodnotu neznámé v rovnici $213 \sin x = 325 \cos x$!

3. Udej neznámou v rovnici $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{1}{3}$! Osvobozením od jmenovatelů vznikne $3\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{1+\cos x}$, nebo $9(1-\cos x)=1+\cos x$, atd., až konečně $x=36^0 51' 11{\cdot}7''$

4. Udej neznámou z rovnic: a) $8{\cdot}1234 \sin x^2 - 3{\cdot}0419 \cos x^2 = 0$, b) $a \sin x^n = b \cos x^n$.

2. Dá-li se rovnice uvésti na výraz mající podobu $a \sin(\alpha+x) = b \sin(\beta+x)$, dosaď za $\sin(\alpha+x)$ a $\sin(\beta+x)$ známe hodnoty z § 59, a obdržíš

$a \sin\alpha \,.\, \cos x + a \sin x \cos\alpha = b \sin\beta \,.\, \cos x + b \sin x \cos\beta$; když pak tu rozdělíš $\cos x$, bude

$$a \sin\alpha + a \cos\alpha \,.\, tg\, x = b \sin\beta + b \cos\beta \,.\, tg\, x,\ \text{nebo}$$

$tg\, x\,(a \cos\alpha - b \cos\beta) = b \sin\beta - a \sin\alpha$, a z toho $tg\, x = \frac{b \sin\beta - a \sin\alpha}{a \cos\alpha - b \cos\beta}$.

Příkady. Udej neznámou v rovnicích: a) $14 \cos(35^0 - x) = \cos(x + 59{\cdot}6^0)$]; b) $145 \sin(x+16^0) = 356 \cos(118^0 - x)$; c) $21 \sin(72^0 - x) = 17 \cos(112^0 + x)$,

3. Poněkud obšírnější upotřebení goniometrie vymahá následující podoba rovnice $a \sin x + b \cos x = c$. — Zde nejprvé rozděl rovnici součinitelem a, tak že bude $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$. Dosaď nyní za $\frac{b}{a} = tg\,\alpha$, z kteréžto přechodné rovnice pomocný úhel α blíže se určiti může; i bude pak $\sin x + tg\,\alpha \,.\, \cos x = \frac{c}{a}$, nebo

$$\frac{\sin x \,.\, \cos\alpha + \cos x \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{c}{a},\ \text{což dá konečně}$$

$$\sin(x+\alpha) = \frac{c \cos\alpha}{a}.$$

Pozn. Jest provedení této rovnice možné pro jakou koliv cenu čísel a, b, c, a nebo podléhá nějakému omezení? Jaké bude provedení rovnice $a\, tg\, x + b\, cotg\, x = o$?

Příklady. 1. $\sin x \sqrt{3} = \sqrt{3} - \cos x$

2. $8 \sin x + 15 \cos x = 17$

3. $tg\, x + 4\, cotg\, x = 4$

4. $21 \sin x - 20 \cos x = 29$

5. $tg\, x \,.\, cotg\, 2x = 2$

6. $\frac{Cotg\, x - sec\, x}{cotg\, x} = \frac{1}{16}$

7. $tg\, x = \sin x + \sin 2x$.

Poslední tato rovnice jest čtvercová. Uveď totiž $\sin 2x$ na funkce úhlu jednoduchého, dosaď za $tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$, děl na to rovnici $sin\,x$, a obdržíš konečně čtvercovou rovnici $Cos\,x^2 + \frac{1}{2}\,cos\,x = \frac{1}{2}$, která dává $cos\,x = \frac{-1 \pm 3}{4}$, a z toho $x =$ atd.

4. Je-li daná rovnice o dvou neznámých, musíme rozeznávati, zdali přicházejí neznámé v obou rovnicích ve spůsobě funkcí úhloměrných a nebo, jak to častěji bývá, jenom v jedné rovnici, kdežto pak v druhé rovnici dán jest buď součet neb rozdíl neznámých.

V prvním případu musíme dáti pozor, zdali se neobjevuje každá z neznámých v obou rovnicích v téže funkci úhloměrné, jako na př. v rovnicích

$$sin\,x^4 + cos\,y^4 = 1.$$
$$sin\,x^2 + cos\,y^2 = 1.$$

V takovémto případu jest nejlépe, když proměníme rovnice goniometrické v čistě algebraické, zde na př. dosazením $sin\,x = u$, $cos\,y = v$, tak že potom obdržíme $u^4 + v^4 = 1$ a $u^2 + v^2 = 1$, jichžto vypočtení nepodléhá žádným nesnázím.

Příklady. 1. $sin^3 + cos\,y^3 = 1$
$sin\,x \,.\, cos\,y = 0{\cdot}5$,

2. $sin\,x \,.\, cos\,y = 0{\cdot}315 - cos\,x \,.\, cos\,y$
$Cos\,x + Cos\,y = 0{\cdot}734$;

3. $tg\,x^3 + cotg\,y^3 = 14{\cdot}356$
$tg\,x + cotg\,y = 5{\cdot}104$;

4. $sec\,x^4 = cos\,y^4 = 5$
$tg\,x^2 = \frac{1}{sec\,y} = 2.$

V druhém případu jedná se pouze o to, abychom v rovnici goniometrické určili funkci rozdílu, dán-li byl součet neznámých a naopak.

Jsou-li na př. dány rovnice

$$x + y = 2s$$
$$sin\,x + sin\,y = m,$$ dej

$sin\,x + sin\,y = 2\,sin\frac{x+y}{2} \,.\, cos\frac{x-y}{2} = m$; a poněvadž jest $\frac{x+y}{2} = s$ veličinou známou, bude $cos\frac{x-y}{2} = \frac{m}{2\,sin\,s}$. Určil-li se rovnicí touto rozdíl $x - y = d$, obdržíš snadno $x = s + d$, $y = s - d$,

Jiný příklad byly by rovnice

$$tg\,x + tg\,y = a$$
$$x + y = s.$$

Dej první rovnici podobu $\frac{sin\,x}{cos\,x} + \frac{sin\,y}{cos\,y} = a$, nebo $sin\,x \,.\, cos\,y + sin\,y + cos\,x = a\,cos\,x \,.\, cos\,y$, t. j. $sin\,(x+y) = a\,cos\,x \,.\, cos\,y$.

Vzhledem ke vzorcům § 59. 9, přejde pak rovnice tato v následující: $2\,sin\,(x+y) = a\,cos\,(x+y) + a\,cos\,(x-y)$, nebo $cos\,(x-y) = \frac{2\,sin\,(x+y) - a\,cos\,2s}{a}$, kterážto rovnice dá rozdíl $x - y$.

Příklady.

1. $\sin x - \sin y = 0{\cdot}35$
   $x - y = 25^0 14' 36''$;
2. $\cos x + \cos y = 1$
   $x + y = 90^0$;
3. $\sin x + \sin y = 0{\cdot}43301$
   $x - y = 30^0$;
4. $\cos x \,.\, \cos y = 0{\cdot}43301$
   $x + y = 90^0$;
5. $\sin^2 x + \sin^2 y = 1{\cdot}345$
   $x - y = 33^0 21' 30''$;
6. $tg\, x \,.\, tg\, y = 12$
   $x + y = 60^0$;
7. $\sin x + \cos y = 1$
   $x - y = 72^0\, 14' 24''$;
8. $\dfrac{tg\, x}{tg\, y} = 2/3$
   $x - y = 20^0$.

Díl třetí.

Měřictví v prostoru.

(Tělesoměrství č. stereometrie.)

Kniha první.

Položení přímky a roviny v prostoru vůbec.

§ 68.

1. Všechny dosavádní tvary měřické mohly býti položeny a rozprostřeny v jedné rovině, což nejen jich vyobrazení nýbrž i porovnání znamenitě usnadňovalo. Upustíme-li ale od této omezující podmínky pozorujíce měřické tvary v prostoru bez ohledu na to, zdali se nacházejí v téže rovině nebo ne, pozbydou ihned všechny dosavádní spůsoby konstrukce svou platnost, protože se body a čáry, které neleží v jedné rovině nýbrž v prostoru za sebou, nemohou na rovině, jakou náš papír jest, lečjen perspektivně zobraziti, kterýžto spůsob nám tvary měřické představuje nejčastěji v jiné podobě nežli jak skutečně jsou; a pozorovatel musí sobě potom takovýto perspektivní obraz prohlížeti z pravého stanoviště, aby na něm poznal to, co tu zobrazeno.

Tak se nám objeví na př. kruh v perspekt. vyobrazení jakožto ellipsa, čtverec jakožto kosodélník, dvě rovnoběžky jakožto přímky sbíhavé, přímka vodorovná jakožto přímka kosá, atd.

K vůli lepšímu porozumění takovýchto vyobrazení myslíme sobě, jakoby byly všechny plochy a rovinné obrazce neprohledné, tak že čáry nacházející se pro jistého pozorovatele *za* rovinami, jakožto těmito zakryté a neviditelné jenom tečkovaně rejsovati musíme.

2. Dle pojmů v planimetrii vysvětlených (úvod II. 4, III.), že totiž čáry lze vytvořiti pohybováním se bodů a plochy pohybováním se čar, bude jasné, že se dá i zde dvěma, jakkoli položenýma body protáhnouti také jenom jedna přímka; pročež díme: *položení přímky v prostoru určuje se dvěma body.*

3. *Třemi body, které neleží na téže přímce, dá se položiti rovina.*

Důkaz. Spojme dva z těchto bodů přímkou a pomysleme sobě rovinu, která by přímku tuto obsahovala a kolem ní jako kolem nějaké osy otáčeti se mohla. Kdyby rovina tato ihned třetím bodem neprocházela, tedy ji můžeme kolem nadzmíněné přímky tak dlouho otáčeti, ažby tohoto bodu dosáhla. Dále však nesmí se již potom rovina otáčeti, nemá-li jinak bod tento zase opustiti, tak že jenom v tomto jediném položení rovina všechny tři dané body obsahovati bude.

Výsledky. Z věty této a z pojmu o rovině plyne: a) *Přímkou dá se položiti rovin libovolné množství.*

b) *Poloha roviny jest dokonale určena* α) dvěma přímkama, které se protínají; β) dvěma rovnoběžnýma přímkama; γ) přímkou a bodem mimo ni ležícím; δ) třemi body, které neleží v téže přímce.

c) *Dvě rovnoběžné přímky leží vždycky v jedné rovině.*

Pozn. Rovina může býti dle toho vytvořena, 1) když pohybující se přímka, která slove **přímkou tvořící** (Erzeugende) postupujíc po jiné přímce, která slove **přímkou řídící** (Richtungslinie) zůstává svému původnímu směru rovnoběžná; 2) když tvořící přímka kolem některého svých bodů se točíc protíná stále jinou přímku řídící.

4. *Přímky co do polohy* jsou v prostoru a) buď vespolek **rovnoběžné**, b) buď **sbíhavé**, ležíce v obou případech v jedné rovině; c) nebo **mimoběžné** (sich kreuzende oder windschiefe Geraden), neležíce obě v jedné rovině.

Sbíhavé přímky protínají se dostatečně jsouce prodlouženy, mimoběžné přímky však, jdouce jedna kolem druhé, neprotínají se aniž mohou býti spolu rovnoběžny, což se dvěma hůlkama snadno znázorniti může. Žáci nechť udají ve školní světnici nacházející se mimoběžky.

Výsledky. a) Daným bodem v prostoru dá se jenom jedna přímka položiti, která by byla s určitou přímkou rovnoběžná.

b) Dvě přímky v prostoru s třetí rovnoběžné jsou i spolu rovnoběžné.

c) Rovnoběžky, které protínají nějakou přímku, leží i s touto v jedné rovině. Rovina totiž, která jest vytvořena první rovnoběžkou pohybující se po přímce dané, obsahuje ostatní rovnoběžky jakožto další polohy přímky tvořící.

5. *Položení přímky k rovině* jest trojí, a sice: a) buď leží celá přímka mimo rovinu *jsouc s ní rovnoběžná*, v kterémžto případu nemá přímka s rovinou žádného bodu společně; b) daná přímka ležíc mimo může se s ní někde sbíhati č. protínati; c) konečně může celá přímka ležeti v rovině.

Proseknouti může ale přímka rovinu jenom v bodu jediném, který slove její **patou** nebo **stopou** (též prostup, Fußpunkt, Durchstoß); neboť kdyby protínala rovinu ve dvou bodech, měla by s touto dvé bodů společně a musela by k ní v celé své rozsáhlosti přilehnouti (úvod III. 2), což předpokladu našemu, že přímka leží mimo rovinu, odporuje.

Pozn. Přímka nemá tedy s rovinou buď žádného bodu, buď jenom jeden bod a nebo všechny body společně.

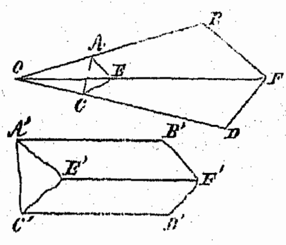
6. *Dvě roviny mohou se protínati jenom dle přímky*, což se také vyslovuje: *průsečnice dvou rovin jest přímá čára.*

Důkaz. Kdyby nebyla průsečnice čarou přímou, mohli bychom třemi jejími body, které také neleží v jedné přímce, položiti rovinu (§ 68. 3, 6). Že ale celá průsečnice a následovně i tyto tři její body leží v obou protínajících se rovinách zároveň, musela by i rovina řečenými body položená v obou rovinách zároveň ležeti, t. j. všechny tři roviny splynuly by v rovinu jedinou a dané dvě roviny nebyly by rovinami rozličnými, vespolek se protínajícími, což našemu předpokladu odporuje.

Pozn. Z věty této plyne, že se dá přímkou položiti rovin nesčíslné množství.

7. *Protínají-li se tři roviny vespolek, budou průsečnice jejich buď všechny vespolek rovnoběžny, a nebo se proseknou v bodu jediném.*

Důkaz. Budiž v obr. 241. AB průsečnice rovin ABEF a ABCD, EF průsečnice rovin ABEF a EFCD, a konečně CD průsečnice rovin ABCD a EFCD.

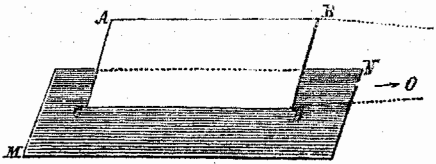


Obr. 241.

a) Protínají-li se dvě z těchto průsečnic, na př. AB a CD, které leží obě v rovině ABCD, v bodu O, musí bod tento, poněvadž leží za jedno v průsečnici AB, náležeti oběma protínajícím se rovinám ABCD a ABEF; že ale leží bod O také ještě v průsečnici CD, musí náležeti též oběma protínajícím se rovinám ABCD a EFCD. Když takto bod O náleží rovinám ABEF i EFCD zároveň, musí ležeti v jich průsečnici EF, t. j. všechny průsečnice AB, CD, EF procházejí bodem O.

b) Kdyžby byly dvě z těchto průsečnic spolu rovnoběžné, na př. A′B′ ∥ C′D′, musí být i E′F′ s nimi rovnoběžná. Neboť kdyby nebyla na př. s průsečnicí AB se protínala, musela by se dle předešlého odstavce i C′D′ s A′B′ protínati, což předpokladu odporuje.

Pozn. Mluví-li se o rovině vůbec, musíme si vždycky mysliti rovinu neomezenou a do nekonečna rozprostřenou. V perspektivních vyobrazeních nemůžeme ale rovinu leč jen co omezenou zobraziti a tu si ji obyčejně k měrickým účelům, není-li jinak tvar její napřed určen, vyobrazujeme rovnoběžníkem, který se vyslovuje jen dvěma protilehlýma písmeny na př. v obr. 242 rovina MN.



Obr. 242.

8. *Je-li daná přímka v prostoru rovnoběžná s jinou přímkou ležící v rovině MN, jest rovnoběžná i s touto rovinou.*

Důkaz. Protože jest dle předpokladu AB || CD (obr. 242.), leží obě tyto přímky v jedné rovině, která nemá s MN mimo průsečnici CD žádného bodu více společně (§ 68. 3). Kdyby pak AB neměla býti s rovinou MN rovnoběžná, musela by ji někde v prodloužení na př. v bodu O proseknouti; průsečník tento ležel by však také i s přímkou AB v rovině ABCD, následovně v obapolné průsečnici rovin MN a BC, t. j. v prodloužení CD, což ale předpokladu, že jest AB || CD, odporuje.

9. *Přímka rovnoběžná s rovinou MN jest také rovnoběžná i s průsečnicí této a které koliv jiné roviny, která byla danou přímkou položena.*

Důkaz nepřímý a snadný.

Výsledky. Z obou předešlých vět plyne: a) Přímka v prostoru jest s nějakou rovinou rovnoběžná, je-li aspoň s jednou v této rovině ležící přímkou rovnoběžná. b) Když jest z dvou rovnoběžných přímek v prostoru jedna rovnoběžná s nějakou rovinou, jest s ní i druhá přímka rovnoběžná.

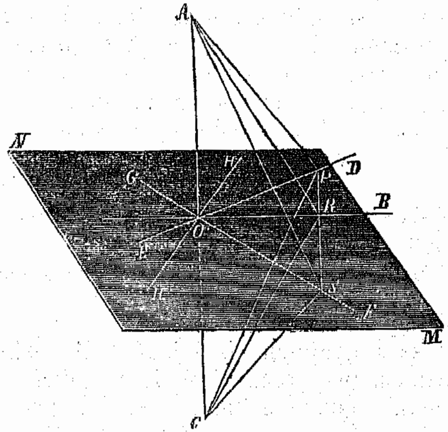
Vespolné naklonění přímek a rovin.

§. 69.

1. Přímka, která rovinu v nějakém bodu protíná, může na této státi buď kolmo nebo šikmo. O přímce díme, že stojí na rovině kolmo, když se všemi přímkami od její paty po rovině vedenými zavírá úhly pravé; nejsou-li ale všechny tyto úhly veskrz pravé, stojí přímka na rovině šikmo.

2. *Přímka, která stojí kolmo na dvou v nějaké rovině ležících a stopou její procházejících přímkách, stojí kolmo na každé, v této rovině ležící přímce a následovně i na rovině samé.*

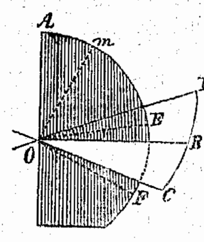
Důkaz. Je-li na rovině MN (obr. 243.) AO⊥ED, AO⊥FG, musí být také AO⊥OB, OA⊥OH, atd. vůbec AO⊥MN. K tomu cíli prodluž AO dolů, sřízni OC = OA, a spoj libovolný bod *S* přímky FG jakož i libovolný bod P přímky DE s body *A* a *C*; i bude potom △ AOS ≅△COS a △ AOP≅△COP, protože mají po dvou odvěsnách sobě rovných; následovně jest $AS = CS$ a $AP = CP$. Nyní pak bude $\triangle ASP \cong \triangle CSP$ (všechny 3 strany), pročež $\sphericalangle ASP = \sphericalangle CSP$. Spojí-li se ještě průsečník přímek PS a OB, t. j. bod R s A a C, bude též $\triangle ASR \cong \triangle CSR$, a tudy $AR = CR$; konečně bude $\triangle AOR \cong \triangle COR$, pročež $\sphericalangle AOR = \sphericalangle COR$, čímž jest kolmosť přímek AC BO přímo dokázána.



Obr. 243.

3. *Tři neb i více v jednom bodu protínajících se přímek, na nichž stojí jiná přímka zároveň kolmo, leží v jedné rovině (obrácení věty předešlé).*

Důkaz. Stojí-li v obr. 244. AO kolmo na OD, OC i OB zároveň, polož protínajícími se přímkami OD a OC rovinu, a dokaž, že v této rovině musí také OB ležeti. — Kdyby totiž OB neležela v rovině DOC, musela by ležeti buď nad ní (na př. OE) nebo pod ní (OF). V prvním případu polož rameny úhlu AOE rovinu, která dostatečně jsouc prodloužena, rovinu DOC někde prosekne, na př. v OB. Poněvadž ale jest dle předpokladu $\sphericalangle AOB = R$, musel by býti $\sphericalangle AOE < R$, což ale vyjádřuje, že by pak nestála AO na všech tří přímkách kolmo. — Podobně se dokáže, že OB nemůže pod rovinou DOC ležeti.



Obr. 244.

D o d a t e k. Přímka stojící na nějaké rovině kolmo, zavírá s každou přímkou, která patou její procházejíc nad rovinou leží, úhel ostrý; s přímkou ale, která patou její procházejíc pod rovinou leží, úhel tupý.

4. *V jednom bodě může býti jenom jedna kolmice na rovinu vztyčena.*

Důkaz. Buď AO (obr. 244.) kolmo na rovině DOC; kdyby měla mimo AO ještě jiná přímka v bodu O na téže rovině kolmo státi, na př. *Om*, polož oběma přímkama *OA* a *Om* rovinu, která by danou rovinu prosekla podél OB. I bude potom $\sphericalangle AOB = R$ (dle předpokladu) a $\sphericalangle AOB > \sphericalangle mOB$, pročež $\sphericalangle mOB < R$.

5. *S jednoho bodu v prostoru lze na rovinu jenom jednu kolmici spustiti.*

Důkaz. Kdyby se daly s tohoto bodu dvě kolmice spustiti, vzniklby, když bychom oběma rozbíhavýma přímkama položili rovinu až by danou rovinu prosekla, trojúhelník, v němžto by byly dva pravé úhly, což jest nemožné (§ 11. 4, a).

6. *Stojí-li jedna z dvou rovnoběžek na rovině kolmo, stojí na ní kolmo i druhá rovnoběžka.*

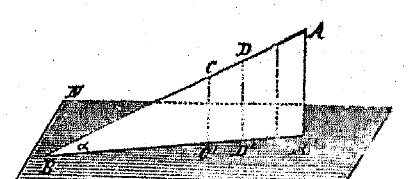
Veď po rovině od pat obou kolmic libovolným směrem dvě a dvě rovnoběžky, čímž vzniknou vždy dva stejné úhly (§ 8. 7), z nichžto jest jeden pravým, atd.

7. *Přímky, které stojí na téže rovině kolmo, jsou spolu rovnoběžné!*

Důkaz nepřímý a snadný.

8. Spustí-li se s krajních bodů jaké koliv přímky kolmice na rovinu, slove přímka, paty těchto kolmic spojující, **průmětem** dané přímky (Projekzion). Spuštěné kolmice slovou **přímkami promítajícími** (projizirende Geraden), a rovina, na níž se daná přímka promítala, slove **rovinou základnou** nebo zkrátka **průmětnou** (Grund- oder Projekzionsebene); rovina konečně přímkama promítajícíma určená slove **rovinou promítající** (projizirende Eb.).

Průmět přímky na rovině jest opět přímka. Spustí-li se totiž s některého bodu přímky *AC* (obr. 245.) kolmice, na př. $AA' \perp MN$, polož oběma přímkama AA′ a AC rovinu, jejíž s MN průsečnice buď A′C′. V rovině A′C veď nyní z kterého koliv bodu, na př. z C, rovnoběžku k AA′ nebo z D rovnoběžku DD′; rovnoběžky tyto, jakožto v rovině AC′ ležící, dopadnou stejnodobě s touto rovinou na MN, čímž bude i průmět bodů C a D na průsečnici A′C′ ležeti.



Obr. 245.

Odtud jde, že průměty veškerých bodů přímky *AB* leží na průsečnici A′B′. — Též jest nyní patrno, že promítající rovina obsahuje všechny kolmice, které s jakých koliv bodů dané přímky na průmětnu spuštěny býti mohou, a za druhé že se průmět přímky objevuje jakožto průsečnice roviny promítající s rovinou průmětnou.

Průmět dané přímky může se dle toho určiti: a) promítnou se dva které koliv body dané přímky a stopama takto vzniklýma protáhne se přímka; b) danou přímkou položí se promítající rovina a určí se její průsek s průmětnou.

9. Úhel, jejž zavírá přímka se svým průmětem na rovině, slove její **nakloněni k rovině** (Neigung gegen die Eb.) nebo také **úhel sklonu** (Neigungsw.); a jak z obr. 245. viděti lze, jest průmět $A'B = AB \cdot Cos\,\alpha$, $BC' = BC \cdot Cos\,\alpha$, vůbec: *průmět jakékoliv přímky na rovině rovná se skutečné délce této přímky znásobené cosinusem jejího úhlu sklonu.* A poněvadž jest cosinus vždycky < 1, musí být také průmět přímky menší nežli skutečná její délka; jenom když jest přímka s průmětnou rovnoběžná, bude průmět přímky rovným skutečné její délce.

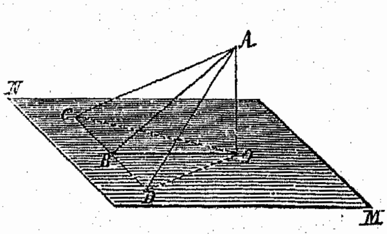
Položení přímky k rovině určuje se obyčejně jejím průmětem a úhlem sklonu.

Pozn. Poněvadž promítající přímky v tomto případu stály na průmětně kolmo, slove i vzniklý průmět přímky **průmětem pravoúhelným** (rechtwinkelige- oder Orthogonalprojekzion) na rozdíl **průmětu šikmého** (schiefe Projekz.), kde protínající přímky dopadají k průmětně pod úhlem stálým sice, ale nikoliv pravým. Mimo to rozeznáváme ještě **průmět polární č. středový** (centrale Projekz.), kde promítající přímky vybíhají z pevného bodu (pólu nebo středu).

10. *Rovnoběžné přímky mají k téže rovině stejné naklonění.* Zřiď sobě průměty obou přímek na této rovině, a obdržíš podobné trojúhelníky, atd. — Žáci nechť dokážou i větu obrácenou.

11. *Přímka, která stojí v rovině kolmo na průmětu nějaké přímky, stojí i na této kolmo.*

Budiž v obr. 246. AB k rovině MN nakloněná přímka a BO její průmět, tak že jest $AO \perp MN$; je-li nyní $CD \perp BO$, musí být také $CD \perp AB$. Šízni za tím účelem na CD libovolný kus $BC = BD$ a veď přímky DO, CO, DA, CA; i bude potom $\triangle BDO \cong \triangle CBO$, následovně $CO = DO$.



Obr. 246.

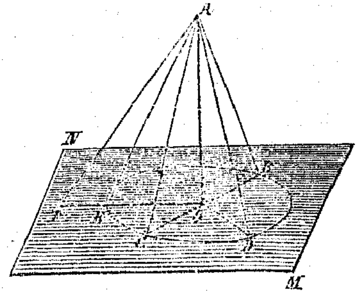
Dále jest $\triangle ADO \cong \triangle ACO$, pročež $AC = AD$; konečně bude $\triangle ABD \cong \triangle ABC$, z čehož plyne, že $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD = R$, t. j. přímky AB a CD stojí na sobě kolmo.

Pozn. Přímka stojící na rovině šikmo stojí aspoň na jedné přímce této roviny kolmo, a sice na té, která stojí v rovině na průmětu dané přímky kolmo.

12. *Stejně velké a k téže rovině stejně nakloněné přímky mají na této i stejné průměty.* Důkaz snadný.

13. *Spustí-li se s nějakého bodu v prostoru na rovinu MN kolmice a několik přímek šikmých, bude: a) ze všech těchto přímek kolmice přímkou nejkratší; b) stejné přímky mají stejné průměty i stejné k rovině naklonění a naopak; c) z dvou šikmých přímek jest ta větší a má menší k rovině naklonění, která má delší průmět a naopak.*

Důkaz. a) Je-li $AO \perp MN$ (obr. 247.), polož touto kolmicí a kterou koliv jinou přímkou, na př. AB, AC . . . . rovinu, až by rovinu MN prosekla; i budou potom trojúhelníky ABO, ACO, ADO .... pravoúhelné a tudy —AO<BO, AO<CO, AO<DO... b) Je-li ještě AB=AC=AD...., polož roviny ABO, ACO, ADO...; i budou potom pravoúhelné trojúhelníky AOB, AOC ... vespolek shodné, a tudy OB=OC=OD=..., a zároveň ∢ABO=∢ACO=∢ADO=.... Opak snadný. — c) Je-li OB < OF, a při tom ∢AOB=∢AOF=R, musí být ∢ABO < R, následovně jeho vedlejší úhel tupým a tudy i AF > AB a ∢AFO < ∢ABO.



Obr. 247.

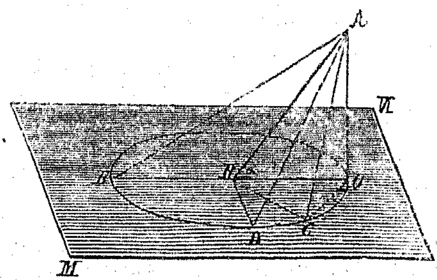
Dodatky. a) Kolmicí spuštěnou s daného bodu v prostoru k nějaké rovině udává se vzdálenosť daného bodu od této roviny.

b) Body B, C, D, E ..., které ležíce vesměs v rovině MN stejnou mají od bodu A vzdálenosť, mají též stejnou vzdálenosť i od paty jeho kolmice a leží tudy v obvodu kruhu, jehož středem jest právě tato pata, a poloměrem průmět OB.

c) Kolmice v středním bodu nějakého prav. mnohoúhelníka na rovinu jeho vztyčená jest měřickým místem bodů, které mají ode všech rohů pravid. mnohoúhelníka stejnou vzdálenosť.

d) Všechny kolmice spuštěné na rovinu s přímky, která jest s touto rovnoběžná, jsou sobě rovny.

14. *Ze všech úhlů, které může nějaká, k rovině nakloněná přímka zavírati s přímkami její stopou v rovině vedenými, jest úhel sklonu této přímky nejmenší a jeho vedlejší úhel největší; ostatní úhly jsou tím větší, čím větší úhel zavírá druhé v rovině ležící rameno s průmětem dané přímky.*



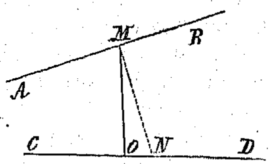
Obr. 248.

Důkaz. Budiž v obr. 248. AB k rovině MN nakloněná přímka, jejíž průmětem bude, když uděláme AO ⊥ rov. MN, přímka BO, a ∢ABO jejím úhlem sklonu. Vedeme-li patou *B* nějakou přímku, na př. BC, bude zajisté $\sphericalangle ABO < \sphericalangle ABC$, a sice: Učiň $BC = BO$, a spoj bod A s C; i bude potom v pravoúhelném trojúhelníku ACO přepona $AC > AO$. Trojúhelníky ABO a ABC mají tudy po dvou sobě rovných stranách, kdežto třetí jejich strany jsou nestejné; musí být proto $\sphericalangle ABO < \sphericalangle ABC$ (§ 15, 2). Narejsujeme-li nyní z bodu B kruh poloměrem BO, který by přímky bodem B procházející proseknul v bodech O, C, D, E, a vedeme přímky AO, AC, AD, AE, budou zajisté tětivy $OC < OD < OE$, a tím $\sphericalangle OBC < \sphericalangle OBD < \sphericalangle OBE$. Že se ale tětivy OC, OD, OE objevují co průměty přímek AC, AD, AE, jsou také dle předešlého odstavce (c) i. $OA < AC < AD < AE$, a následovně

$$\sphericalangle OBA < \sphericalangle ABC < \sphericalangle ABD < \sphericalangle ABE \quad (\S\ 13,\ 3).$$

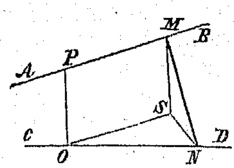
15. *Přímka, udávající nejkratší vzdálenosť dvou mimoběžek, stojí na obou zároveň kolmo; a naopak jest nejkratší vzdáleností dvou mimoběžek přímka, jež na obou zároveň kolmo stojí.*

Důkaz. a) Udává-li MN v obr. 249. nejkratší vzdálenosť mimoběžek AB a CD, nemůže mimo ní žádná jiná přímka na AB a CD zároveň kolmo státi. Neboť kdyby stála na př. MO na obou mimoběžkách kolmo, byl by $\triangle MON$ pravoúhelný a v něm $MO < MN$, což předpokladu odporuje.



Obr. 249.

b) Stojí-li MN na obou mimoběžných přímkách AB a CD zároveň kolmo, musí být MN kratší, nežli každá jiná, které kolív dva body těchto mimoběžek spojující přímka. Kdyby měla být na př. v obr. 250. PO ještě menší nežli MN, která stojí kolmo na AB i na CD, spusť s bodu M přímku MS, která by byla rovnoběžna i rovna přímce OP, tak že bude $OS \# PM$ (§ 17. 6). Poněvadž ale stojí MN kolmo na AB i CD, tedy také na OS, musí státi též kolmo na rovině přímkama CD a OS položené (§ 69. 2); následovně bude dle odstavce (14) MS k této rovině šikmě dopadati a jest tudy $MS > MN$, nebo rovným nahraženo, $OP > MN$, což by předpoklad nemožným činilo.



Obr. 250.

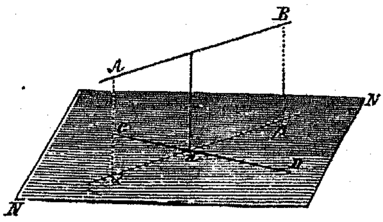
D o d a t e k. Přímka, která stojíc na dvou mimoběžných přímkách zároveň kolmo udává jich nejkratší vzdálenosť, slove pro krátkosť o s o u t ě c h t o m i m o b ě ž e k.

Úlohy. 1. *V určitém bodu dané přímky má se na tuto postaviti kolmá rovina.* — Polož danou přímkou dvě libovolné roviny a narejsuj v každé z nich v určitém bodu kolmici na danou přímku; kolmicemi těmito položená rovina jest pak na dané přímce kolmo. Důkaz zůstaven čtenáři.

2. *Dána jest přímka a mimo ní bod; tímto bodem má se položiti rovina kolmo na danou přímku.* — Danou přímkou AB a bodem C polož rovinu, v této spusť z bodu C kolmici na AB, čímž obdržíš kolmici CD; polož na to

přímkou AB ještě jinou rovinu a vztyč v ní opět v bodu A na AB kolmici DE. I jest potom kolmicemi CD a DE položení žádané roviny určeno.

3. *Má se určiti nejkratší vzdálenosť dvou mimoběžných přímek AB a CB* (obr. 251.). — Libovolným bodem jedné z daných mimoběžek, na př. CD, veď rovnoběžku k AB, a těmato protínajícíma se přímkama polož rovinu MN, která bude s AB rovnoběžná. Promítni pak na rovinu MN přímku AB a postav v průsečníku tohoto průmětu $\alpha\beta$ s CD, to jest v bodu n, kolmici mn, která bude představovat žádanou vzdálenoť. Důkazy zůstaveny čtenáři.



Obr. 251.

Položení rovin mezi sebou.

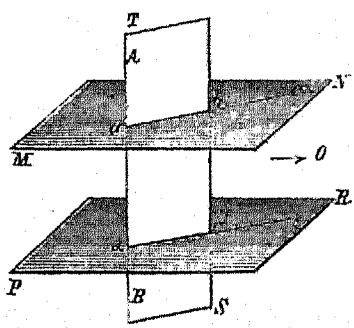
§ 70.

1. Položení dvou rovin v prostoru může býti dvojí: a) buď jsou spolu rovnoběžné, když leží totiž jedna mimo druhou nemohouce se, třeba do nekonečna prodlouženy, sejíti; b) nebo se, byvše dostatečně prodlouženy, dle přímky protínají (§ 73. 6).

2. *Veškeré přímky, které leží v jedné z dvou rovnoběžných rovin jsou i s druhou rovinou rovnoběžné.* Neboť nemohouce vystoupiti ze své roviny, která se s druhou rovinou nikde nesetkává, zůstávají stále mimo tuto vovinu, t. j. jsou s ní rovnoběžné (§ 68. 5).

3. *Průsečnice dvou rovnoběžných rovin s rovinou třetí jsou spolu rovnoběžné.*

Důkaz. Průsečnice ab a $\alpha\beta$ (obr. 252) roviny ST s rovnoběžnými rovinami MN a RP ležíce obě v sekoucí rovině ST nemohou být mimoběžnými; že ale ležejí v rovinách vespolek rovnoběžných, nemohou se též protínati: pročež jsou nezbytně spolu rovnoběžné.



Obr. 252.

Z věty této plyne: a) *Rovnoběžné přímky mají na téže rovině i rovnoběžné průměty.* Průměty tyto objevují se totiž co průsečnice dvou rovnoběžných (promítajících) rovin s rovinou třetí (průmětnou). b) *Rovnoběžné přímky mezi rovnoběžnými rovinami jsou sobě rovny a paty jejich na obou rovinách mají stejnou od sebe vzdálenosť.* — Položíme-li totiž danýma rovnoběžkama rovinu, obdržíme s rovnoběžnými rovinami rovnoběžné průsečnice a tu budou rovnoběžky mezi rovnoběžkami stejné.

c) Všechny kolmice mezi rovnoběžnými rovinami mají délku jednostejnou a udávají jakožto nejkratší přímky vzdálenosť těchto rovin.

d) Dvě roviny rovnoběžné s rovinou třetí jsou rovnoběžnými mezi sebou.

4. *Stojí-li nějaká přímka na dvou rovinách zároveň kolmo, jsou tyto spolu rovnoběžné.*

Důkaz. Stojí-li v obr. 252. AB ⊥ MN a taktéž AB ⊥ PR, má být MN ∥ PR. Polož přímkou AB jakou koliv rovinu, která by obě dané roviny proseklа, na př. dle průsečnic *ac* a *αγ*, a na nichž stojí AB dle § 69. 2) kolmo. Jsou-li dané roviny rovnoběžné, budou i tyto průsečnice spolu rovnoběžné (dle předešlé věty); kdyby tomu tak nebylo, musely by se obě průsečnice, protože leží v jedné rovině, někde proseknouti, na př. v bodu *O*. Pak bychom ale dostali trojúhelník *aαO*, v němžto by byly dva pravé úhly *a* a *α*, což jest nemožné.

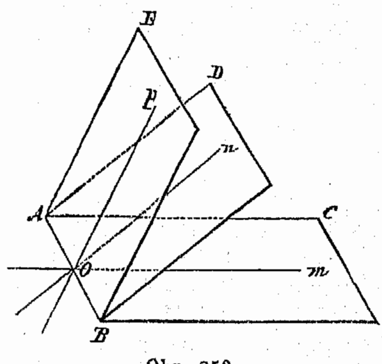
5. *Přímka, která stojí kolmo na jedné z dvou rovnoběžných rovin, stojí kolmo též na druhé rovině.* Důkaz podobný předešlému.

6. *Šikmá přímka má k rovinám rovnoběžným stejné naklonění.*

Důkaz. Buď v obr. 259. MN ∥ PR a SB daná přímka; spusť z libovolného jejího bodu S kolmici na rovinu MN, kterážto přímka bude i na PR kolmá, a polož těmato přímkama rovinu. Průsečnice B′O′ a BO (jakožto průměty SB na rovinách MN a PR) budou na to dle věty (3) rovnoběžné; pročež úhly *SB′O* a SBO co souhlasné sobě rovny.

7. Dvě protínající se roviny jsou k sobě vespolek nakloněné, kteréžto naklonění zvětšiti neb zmenšiti může se tím, když bychom jednu z těchto rovin kolem společné jich průsečnice otáčeli. Toto vespolné naklonění dvou rovin zove se **plošný úhel** (Flächenwinkel) nebo úhel sklonu, a tak jako v plochoměrství máme i zde stejné i nestejné, vedlejší, vrcholové, ostré, tupé nebo pravé úhly plošné. Průsečnice obou rovin slove potom **vrcholice** (Scheitellinie).

Velikosť plošného úhlu dvou rovin udává se úhlem, jejž svírají spolu dvě přímky na průsečnici obou rovin v kterém koliv jejím bodu kolmo postavené a v řečených rovinách položené.



Obr. 253.

Tak udává, když v obr. 253. roviny BC, BD, BE . . . považujeme za jednotlivé polohy kolem AB točené roviny, a při tom když bylo uděláno *mo* ⊥ AB, *no* ⊥ AB, *po* ⊥ AB, úhel *mon* vespolné naklonění rovin BC a BD, ∢*mop* vespolné naklonění rovnic BC a BE, ∢*nop* vespolné naklonění rovin BD a BE atd.

Při otáčení roviny otáčelo a odchylovalo se totiž od ramena *om* i druhé rameno *on*, a tím se stává, že úhel tento tím větší jest, čím více se roviny jedna od druhé odchýlily, a že úhel ten úplně zmizí, t. j. přejde v nulu, jak mile by obě roviny na sebe padly.

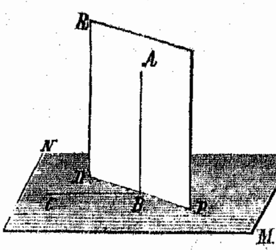
Že má úhel plošný velikosť jednostejnou, nechť si v kterémkoliv bodu průsečnice AB kolmice rejsovány byly, vysvítá již z toho, že by všechny takto narejsované úhly měly ramena na vzájem rovnoběžná.

Je-li úhel sklonu dvou rovin pravý, díme, že roviny stojí na sobě **kolmo**; pakli jest ale úhel sklonu kosý, díme, že stojí roviny na sobě šikmo a nebo že jsou k sobě **nakloněné**.

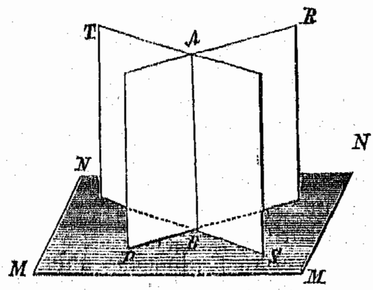
8. *Stojí-li nějaká přímka na dané rovině kolmo, bude na ní stát kolmo i každá touto přímkou položená rovina*; a naopak: *jsou-li dvě roviny na sobě kolmo, bude též každá přímka, která v jedné rovině na společné průsečnici kolmo stojí, i na druhé rovině kolmo.*

Důkaz. a) Stojí-li $AB \perp MN$, (obr. 254.), polož přímkou AB rovinu PR, jejížto průsečnice s rovinou MN buď PD; na tuto průsečnici postav v rovině MN kolmici, na př. $BC \perp PD$; i bude potom $\sphericalangle ABC$ úhlem sklonu obou rovin MN a PR. Týž úhel jest ale pravý (§ 69, 3. dodat.), pročež také rovina $PR \perp MN$.

b) Je-li rovina $PR \perp MN$ a při tom uděláno $AB \perp DP$, postav v rovině MN přímku $BC \perp PD$; i bude potom $\sphericalangle ABC$ úhlem sklonu obou rovin. Že ale jest $PR \perp MN$, musí být $\sphericalangle ABC = R$, pročež $AB \perp BC$, a tudy i $AB \perp MN$.



Obr. 254.



Obr. 255.

9. *Stojí-li dvě roviny kolmo na rovině třetí, stojí i jejich průsečnice na této rovině kolmo; a naopak: stojí-li průsečnice dvou rovin kolmo na rovině třetí, stojí na ní i obě první roviny kolmo.*

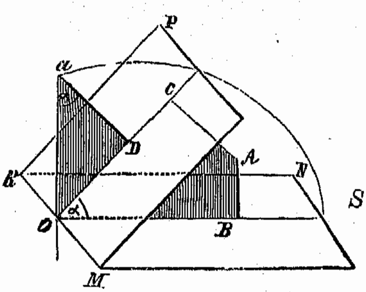
Důkaz. Buďtež v obr. 255. SB a PB průsečnice roviny MN s rovinami PR a ST, které na ní obě kolmo stojí; i musí též průsečnice $AB \perp MN$. Na důkaz pomysleme sobě v bodu *B* vztyčenou kolmici na rovinu MN, která musí dle odstavce b) předešlé věty ležeti v rovině PR i v rovině ST, t. j. kolmice tato splyne s průsečnicí AB v jedno. — Důkaz obrácené věty podej čtenář na základě předešlé věty.

10. *Úhel, jejž spolu zavírají kolmice spuštěné s nějakého bodu na dvě protínající se roviny, rovná se jich úhlu sklonu a nebo ho doplňuje na 180°.*

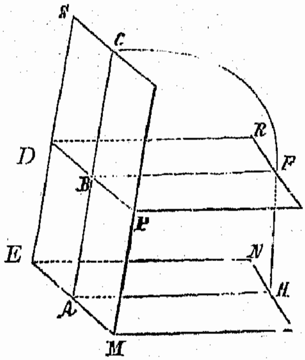
Důkaz. a) Buďtež v obr. 256. MN a MP dané roviny; spustíme-li s bodu a přímku $aO \perp MN$ a $aD \perp MP$, bude dle (8) i rovina, kolmicemi těmato položená, t. j. rov. OaS, na obou daných rovinách kolmo státi, následovně dle (9) i na jejich průsečnici MR, t. j. $MR \perp$ rov. OaS. Rovina tato prosekne roviny MN a MP v přímkách OB a OD, které se na průsečnici MR v bodě O setkají. Že ale stojí MR kolmo i na všech v rovině OaS obsažených přímkách, tedy $MR \perp OC$, a $MR \perp OB$, t. j. $\sphericalangle COS$ jest úhlem sklonu rovin MN a MP, a dle § 11. 7 jest $\sphericalangle a = \sphericalangle COS$.

b) Kdyby nadzmíněné kolmice vybíhaly z bodu A, který leží mezi danýma rovinama, byla by opět rovina kolmicemi AC a BA určená na obou rovinách, následovně i na jejich průsečnici kolmo, a tak dále.

Výsledek: *Rovina úhlu sklonu stojí na daných rovinách kolmo.*



Obr. 256.



Obr. 257.

11. *Rovnoběžné roviny mají k třetí rovině stejné naklonění.*

Důkaz. Buďtež v obr. 257. roviny MN || PR proseknuty rovinou MS. Veď $AH \perp EM$ a taktéž $AC \perp EM$, a polož přímkama AH a AC rovinu CAH, která prosekne rovinu PR v přímce BF rovnoběžné s AH (§ 70. 3.).

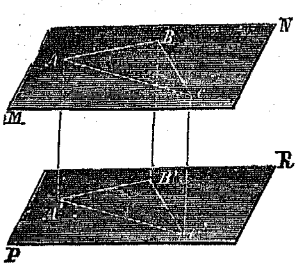
Úhly CAH a CBF představují potom, poněvadž jest DP || EM, úhly sklonu roviny MS k rovinám PR a MN a jsou si rovny (§ 8. 1).

Dodatek. Jsou-li dvě roviny střídavě rovnoběžné jiným dvěma rovinám, budou i jejich úhly sklonu buď vespolek sobě rovny a nebo dohromady rovny 2R.

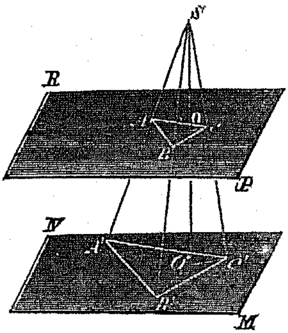
12. *Úhly, jichžto ramena jsou v prostoru stejným směrem spolu rovnoběžná, jsou sobě rovny a leží v rovnoběžných rovinách.*

Důkaz. Buď v obr. 258. $AB \parallel A'B'$ a $AC \parallel A'C'$. Sřízni $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, a polož ještě přímky BC, AA', BB', CC' a $B'C'$; i budou potom $ABB'A'$ a $ACC'A'$ rovnoběžníky, následovně $BB' \# A'A'$ $CC' \# A'A'$. Z toho plyne ale, že i $BB' \# CC'$ a tudy že jest $BC \# C'B'$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, majíce stejné strany, jsou tehdy shodné, a proto $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$. Že jsou nyní roviny MN a PR spolu rovnoběžné, plyne z § 70, 3, 6.

Výsledky. a) Spojíme-li body, v nichžto rovnoběžné přímky prostupují rovnoběžné roviny, vzniknou shodné obrazce.



Obr. 258.



Obr. 259.

b) Jsou-li v prostoru mezi dvěma rovinama tři přímky (nebo i více) vespolek rovnoběžné a stejně dlouhé, jsou i obě roviny spolu rovnoběžné.

§. 71.

Jako v plochoměrství slovou i zde přímky v prostoru z téhož bodu vybíhající **paprsky**, a bod O, z něhož paprsky vybíhají, jejich **střed** nebo **pól** (Centrum, Pol). Veškeré paprsky téhož středu slovou **chumáč** (Büschel).

1. Protíná-li dvé rovnoběžných rovin chumáč paprsků, jsou

a) *stejnolehlé úseky paprsků vespolek v stejném poměru; b) obrazce, jež spojením jednotlivých prostupů na obou rovinách vzniknou, jsou si podobny, a c) obsahy jejich mají se k sobě, jako čtverce jejich vzdálenosti od pólu S.*

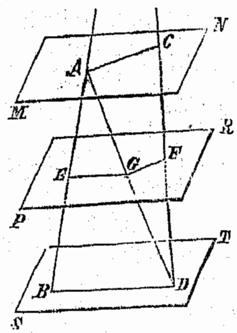
Důkaz. a) Buďtež A, B, C . . . (obr. 259.) prostupy jednotlivých paprsků s rovinou PR, a A', B', C' . . . s rovinou $MN \parallel PR$. I bude potom $SA : SA' = SB : SB' = SC : SC'$ . . ., což plyne z následujícího: Rovina položená oběma paprsky SA' a SB' prosekne ronoběžné roviny v přímkách AB a $A'B'$, které jsou dle § 70. 3 spolu rovnoběžné. Musí být tudy $\triangle SAB \sim \triangle SA'B'$ a následovně $SA : SA' = SB : SB'$. — Položíme-li tímtéž spůsobem rovinu oběma paprsky SB' a SC', bude zase $SB:SB' = SC:SC'$, a konečně v rovině $SA'C'$ ještě $SC:SC' = SA:SA'$.

b) Z podobnosti trojúhelníků SAB a $SA'B'$ jde $AB:A'B' = SB:SB'$; že ale jest v $\triangle SBC \sim \triangle SB'C'$ zase $SB:SB' = BC:B'C' = SC:SC'$, jest také $AB:A'B' = BC:B'C'$. Dle § 70. 12. jest ale $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, pročež $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

c) Dle § 42, 2 jest $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{BC}^2 : \overline{BC'}^2$; že ale jest v $\triangle SB'C'$ $BC:B'C' = SC:SC'$, bude také $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{SC}^2 : \overline{SC'}^2$. Spustíme-li nyní s bodu S kolmici na rovinu MN a poznamenáme její prostupy s oběma rovinama, bude v $\triangle SC'O'$ $SC:SC' = SO:SO'$, kterážto srovnalosť když se zdvojmocní a porovná s předešlou, dá $\triangle ABC : A'B'C' = \overline{SO}^2 : \overline{SO'}^2$.

2. *Když jest chumáč paprsků proseknut třemi rovnoběžnými rovinami, jsou úseky paprsků mezi dvěma rovinama vždycky srovnalostné.* Důkaz snadný.

3. *Protíná-li tré rovnoběžných rovin dvě přímky mimoběžné, budou taktéž stejnolehlé úseky obou přímek srovnalostné.*



Obr. 260.

Důkaz. Buďtež v obrazci 260. roviny $MN \parallel PR \parallel ST$, a AB a CD dvě mimoběžné přímky, které dané roviny v bodech A, E, B a C, F, D prostupují. Aby se dokázalo, že jest $AE:EB = CF:FD$, položme přímku AD, která rovinu PR v bodu G prosekne; i bude potom dle předešlé věty $AE:EB = AG:GD$, v $\triangle ACD$ bude ale $AG:GD = CF:FD$, z kterýchžto srovnalostí plyne $AE:EB = CF:FD$.

Úlohy, které se v oddělení tomto o přímkách a rovinách obyčejně ještě uvádějí, přecházíme, an vlastně do oboru zobrazujícího měřictví náležejí.

Kniha druhá.

O tělesném rohu.

§ 72.

1. Dle § 68, 7 jsou průsečnice tří protínajících se rovin buď vespolek rovnoběžné a nebo procházejí jedním bodem. Spůsobem tímto může se i více rovin protínati, tak že v druhém případu i více průsečnic jedním bodem procházeti bude. V tomto případu uzavřou roviny, které sobě jich průsečnicemi omezené myslíme, část prostoru, která jest na jedné straně neomezená a **tělesný roh** nebo

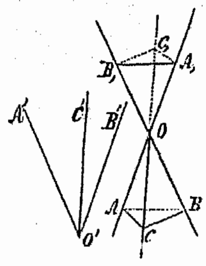
kout (též tělesný úhelník) slove (förperliche Ecke, körp. Winkel). Tělesný roh nebo-li kout jest tedy třemi nebo i více rovinami, jichžto průsečnice se v jednom bodu sbíhají, omezená část prostoru.

Dle počtu protínajících se rovin rozeznáváme kouty tří-, čtyr-, vůbec *n*-strané, a jmenujeme je také tělesný trojúhelník, čtyrúhelník, atd. — Na každém tělesném rohu slovou jednotlivé roviny stranami rohu (též **stěny** nebo **boky**, Seitenflächen); průsečnice pak, v nichžto se dvě roviny protínají, slovou jeho **hrany** (Kanten), a společný průsečník hran slove **vrchol** nebo **špička** rohu (Scheitel oder Spitze).

Mimo to rozeznáváme na každém tělesném rohu **úhly hranové** (Kantenwinkel), t. j. úhly, které spolu zavírají dvě a dvě v téže rovině ležící hrany, a za druhé **úhly plošné** (Flächenw.), kterými se udává vespolné naklonění dvou stěn.

Při každém tělesném rohu sluší pozor míti a) na *počet hran* (protože má roh právě tolik stěn, úhlů hranových a tolik též úhlů plošných), b) na *velikost úhlů hranových*, t. j. na velikost stěn, c) *na velikost úhlů plošných*, a d) *na pořádek, v kterém jdou stěny za sebou.*

V písmě znamenáme tělesný roh písmenami tím způsobem, že písmeno při vrcholu postavené napíšeme nejdříve a vedle něj ostatní, jednotlivé hrany označující písmena v témž pořádku za sebou, jak tyto po sobě jdou, na př. v obr. 261., kde jest třístraný roh O′A′B′C′. — Jak úhly hranové tak i plošné mohou býti v tělesném rohu ostré, pravé i tupé. Na rohy, jichžto jednotlivé úhly hranové nebo plošné by 2R přesahovaly, nebudeme zde bráti žádného ohledu.



Obr. 261.

Dle toho, jsou-li všechny úhly hranové mezi sebou jakož i všechny plošné úhly vespolek stejné nebo ne, slove tělesný roh buď pravidelný nebo nepravidelný; jsou-li ale jen toliko všechny úhly hranové vespolek stejné, slove roh rovnostraný. Mimo to slove třístraný roh rovnoramenným, jestliže má toliko dva stejné hranové úhly.

Pozn. Tělesné rohy a mnohoúhelníky v rovině mají jakousi obdobu a sice: že se v obou střídají strany s úhly, jenom že jsou strany mnohoúhelníků rovinných veličiny o jednom rozměru (přímky), kdežto u tělesných úhelníků strany dva rozměry mají (plochy). Strany rovinných i tělesných mnohoúhelníků mají vespolné naklonění, které se v obou případech udává úhlem. — Následkem této obdoby nazývají se též rohy tělesné **tělesnými mnohoúhelníky** a rozdělují se také na rovnostrané, pravidelné atd. jako v plochoměrství. Tělesný roh třístraný jest vůbec pro tělesoměrství tím, čím jest trojúhelník rovinný v plochoměrství.

2. Prodloužením hran nějakého rohu přes vrchol vznikl by

roh nový, který slove vzhledem k rohu danému **roh vrcholový** (Scheitel- oder Gegenecke), protože jsou hranové úhly obou rohů úhly vrcholovými, jako na př. v obr. 261., kde jsou rohy OABC a OA'B'C' jeden druhému vrcholovým.

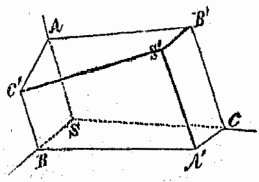
Též mohou býti rohy tělesné jako obrazce roviné vespolek shodné, jestliže náležitě jeden do druhého byvše vložen tak se pokryjou, aby se stejnolehlé částky sjednotily; takové rohy mají tedy všechny úhly (plošné i hranové) *v témž pořádku a směru* za sebou stejné. Kdyby měly dva tělesné rohy souhlasné strany a úhly sice stejné a však v protivném směru nebo pořádku, slouly by toliko **souměrné** (symmetrisch), poněvadž se potom nemohou nikdy pokrýti. Vrcholové rohy jsou vždycky souměrnými.

V obr. 261. jest na př. $\sphericalangle AOC = A'O'C'$, $\sphericalangle COB = C'O'B'$, $\sphericalangle AOB = A'O'B'$ a mimo to jsou tu ještě dva a dva plošné úhly sobě rovny, a předce není roh O' shodný s rohem O. Příklad souměrných tvarů tělesných dávají nám naše ruce (dlaně), které ač úplně stejné částky v témž pořádku za sebou obsahují nikdy na sebe tak poleženy býti nemohou, aby se pokryly. Též jest každé těleso se svým obrazem v zrcadle vůbec souměrné. — Rozdíl shodnosti a souměrnosti objevuje se ostatně jenom v tělesoměrství.

3. *Jsou-li stejnolehlé hrany dvou tělesných rohů stejným směrem spolu rovnoběžné, musí být oba rohy shodnými; mají-li ale rovnoběžné hrany směr protivný, jsou rohy toliko souměrné.*

Důkaz první části zakládá se na § 70. 12, a 11, dodat.

4. Spustíme-li z nějakého bodu v prostoru kolmice na stěny daného tělesného rohu a položíme kolmicemi roviny, vznikne nový tělesný roh, který slove vzhledem k danému rohu **rohem polárným** nebo **výplňkovým** (Supplementar- oder Polarecke).



Obr. 262.

O rozích těchto platí věty: a) *Stojí-li hrany jednoho rohu kolmo na stěnách rohu druhého, stojí i naopak hrany druhého rohu kolmo na stěnách rohu prvního.*

Důkaz. V obr. 262. na př., kde jest SABC daný roh, udělalo se $S'C' \perp ASB$, $S'B' \perp ASC$ a $S'A' \perp BSC$; musí tedy dle § 70, 8 a 9) rovina položená přímkama S'C' a S'B' kolmo státi i na průsečnici rovin ASB a ASC, t. j. rov. $B'C' \perp AS$. Podobně jest rovina položená kolmicemi S'C' a S'A' kolmo na průsečnici rovin ASB a CSB, t. j. rov. $A'C' \perp BS$; a taktéž musí být rov. $A'B' \perp SC$.

Dodatek. Je-li tehdy jeden ze dvou rohů tělesných polárným rohem druhého, jest též druhý polárným rohem prvnímu.

Zde byl roh S' narejsován uvnitř daného rohu S.

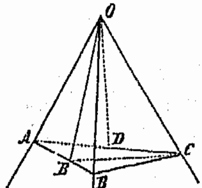
b) *V polárných rozích doplňují se hranové úhly jednoho rohu s plošnými úhly rohu druhého na 180°.*

V obr. 262. jsou úhly ASB, ASC a BSC hranovými úhly daného rohu S, a dle § 70. 10, výsl.) představují úhly C'BA', C'AB' a B'CA' jeho plošné úhly. Pro polárný roh S' jsou hranovými úhly $A'S'B'$, $A'S'C'$, $B'S'C'$, a poněvadž stojí průsečnice rovin $A'C'$ a $A'B'$ kolmo na rovině BSC, bude dle § 70. 10, b) naklonění stěn $A'C'$ a $A'B'$ vyjádřeno úhlem $BA'C$, atd. tak že budou plošnými úhly rohu S' úhly $BA'C$, $AB'C$ a $AC'B$.

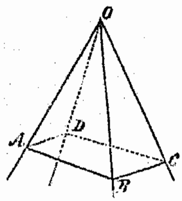
Nyní jest v čtyrúhelníku $AC'BS$ $\sphericalangle ASB + BC'A = 2R$, protože jsou $\sphericalangle C'AS = C'BS = R$; podobně jest v čtyrúhelníku $BSCA'$ $\sphericalangle BSC + BA'C = 2R$ a v čtyrúhelníku $ASCB'$ $\sphericalangle ASC + AB'C = 2R$. — Pro polárný trojúhelník jest zase z podobné příčiny v čtyrúhelníku $BC'S'A'$ $\sphericalangle C'S'A' + C'BA' = 2R$, v čtyrúhelníku $CA'S'B'$ $\sphericalangle A'S'B' + A'CB' = 2R$, a konečně i $\sphericalangle C'S'B' + C'AB' = 2R$.

5. *V každém tělesném trojúhelníku jest součet dvou hranových úhlů větší nežli třetí úhel hranový.*

Důkaz. V rovnostraném trojúhelníku tělesném jest věta tato patrná; avšak i v nerovnostraném, kde jest na př. jako v obr. 263. $\sphericalangle AOC > AOB$, musí být $\sphericalangle AOB + BOC > \sphericalangle AOC$. Odřízni totiž v rovině ASC úhel $ASD = \sphericalangle ASB$, a učiň při tom $OD = OB$; polož dále body B a D libovolnou rovinu, která prosekne hrany OA a OC v bodech A a C. I bude potom $\triangle AOD \cong \triangle AOB$, a tudy $AD = AB$. Ve spodním trojúhelníku ABC jest ale $BC > AC - AB$, nebo $BC > AC - AD$, t. j. $BC > DC$, následovně v trojúhelnících BOC a DOC dle § 15. 2, $\sphericalangle BOC > DOC$; pročež také bude $\sphericalangle BOC + AOB > \sphericalangle DOC + AOD$, t. j. $\sphericalangle BOC + AOB > \sphericalangle AOC$.



Obr. 263.



Obr. 264.

Z věty této plyne snadno, že jest v trojúhelníku tělesném rozdíl dvou stran (stěn) menší nežli strana třetí.

6. *V každém tělesném rohu jest součet hranových úhlů menší nežli 4R.*

Důkaz. Řízni všechny hrany libovolnou rovinou, tak že obdržíš n postraních trojúhelníků a dole mnohoúhelník n-straný (v obr. 264. na př. čtyrúhelník). I bude potom součet úhlů ve všech postraních trojúhelnících $S = n.2R$ . . . . 1), od kteréhož součtu potřebujeme jen odečísti součet spodních úhlů $OAB + OBA + OBC + OCB + \ldots = S'$, abychom obdrželi součet hranových úhlů při vrcholu $= s$. Spodní tyto úhly působí po dvou ku společné hraně přiléhajících s úhlem mnohoúhelníka $ABCD \ldots$, jehož vrcholem hrana ta právě prochází, tělesný trojúhelník (na př. úhly ABO, CBO a ABC), a jsou dle předešlé věty oba větší nežli tento třetí úhel, t. j.

$\sphericalangle ABO + CBO > \sphericalangle ABC$; podobně jest v ostatních rozích
$\sphericalangle BCO + DCO > \sphericalangle BCD$,
$\sphericalangle CDO + ADO > \sphericalangle ADC$,
$\sphericalangle DAO + BAO > \sphericalangle BAD$ atd., dohromady tedy
$S' > \sphericalangle ABC + BCD + ADC + BAD + \ldots$

Dle planimetrie jsou ale úhly v mnohoúhelníku $\sphericalangle ABC + BCD + ADC + \ldots = n.2R - 4R$, pročež $S' > n.2R - 4R \ldots$ 2).

Když tuto nerovnosť odečteme od rovnice 1), obdržíme

$$S - S' = s < 4R.$$

Pozn. Kdyby hranové úhly nějakého rohu dávaly dohromady 4R, přilehly by jeden vedle druhého v rovinu, v nížto by se i celý roh proměnil.

7. *Součet plošných úhlů jest v každém tělesném rohu větší nežli $(n-2)2R$, menší ale nežli $n.2R$.*

Důkaz provede se pomocí rohu polárného. Znamená-li totiž S součet plošných úhlů a s součet úhlů hranových v rohu daném, budiž S' součet hranových úhlů v rohu polárném. I bude potom dle odstavce 4, b) $S + s' = n.2R \ldots$ α) následovně S samo menší nežli $n.2R$, t. j. $S < n.2R \ldots$ 1).

Že ale jest dle odstavce 6) $s' < 4R$, bude také, když tuto nerovnosť odečteme od rovnice α),

$$S > n.2R - 4R, \text{ t. j. } S < (n-2)2R \ldots 2).$$

Dodatek. *V tělesném trojúhelníku jest dle toho součet plošných úhlů větší nežli $2R$, menší ale nežli $6R$,* což se může i přímo dokázati následovně. Poznačíme-li plošné úhly tělesného trojúhelníka A, B, C a protilehlé jim strany (hranové úhly) a, b, c, v polárném pak trojúhelníku stejnolehlé úhly a strany těmitéž písmenami čárkovaně, bude zase dle odstavce 4, b)

$$\sphericalangle A + a' = 2R,$$
$$\sphericalangle B + b' = 2R,$$
$$\sphericalangle C + c' = 2R, \text{ dohromady tedy}$$

$\sphericalangle A + B + C + a' + b' + c' = 6R$, a z toho přirozeně $\sphericalangle A + B + C$ pro sebe $< 6R$. Když by se ale od tohoto součtu odečtla nerovnosť $\sphericalangle a' + b' + c' < 4R$, obdrželi bychom $\sphericalangle A + B + C > 2R$, tak že máme v tělesném rohu trojúhelníku vůbec $\sphericalangle A + B + C \begin{matrix} < 6R \\ > 2R \end{matrix}$.

8. *V tělesném trojúhelníku jest součet dvou plošných úhlů menší nežli o $2R$ zvětšený třetí úhel, rozdíl ale menší nežli doplněk třetího úhlu na $2R$.*

Při stejném poznamenání jako v předešlém dodatku máme dle odstavce 5) $\sphericalangle a' + b' > c'$; že ale jest $a' = 2R - A$, $b' = 2R - B$, $c' = 2R - C$, bude také, když hodnoty tyto dosadíme, $4R - A - B > 2R - C$, t. j. $2R + C > A + B \ldots$ α). Z nerovnosti této plyne také ještě $2R - B > A - C \ldots$ β).

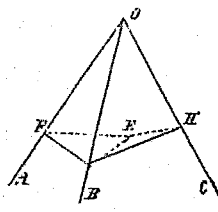
Pozn. Tato vlastnosť plošných úhlů v tělesném trojúhelníku musí se míti na zřeteli, když by se měl tělesný trojúhelník z plošných úhlů sestaviti.

Byl-li by na př. $\sphericalangle A = 140^0$ a $B = 70^0$, obdržíme pro $\sphericalangle C$ dvě meze, a sice a) $140^0 + 70^0 < 180^0 + C$, b) $140^0 - 70^0 < 180^0 - C$, což provedeno dává

$$\sphericalangle C \begin{matrix} < 110^0 \\ > 30^0. \end{matrix}$$

9. *V tělesném trojúhelníku leží a) naproti stejným stranám stejné úhly plošné a naopak; b) naproti větší straně leží také větší plošný úhel a naopak.*

Důkaz. a) Buď v obr. 265. $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC$. Spusť z libovolného bodu D společné hrany OB kolmici na třetí stranu, t. j. $DE \perp$ *rov.* AOC, a mimo to ještě $DF \perp OA$, $DH \perp OC$; i bude potom $\sphericalangle EFD$ úhlem sklonu rovin AOB a AOC, úhel pak EHD úhlem sklonu rovin BOC a AOC. Jak z obrazu viděti lze, jest $\triangle DOF \cong \triangle DOH$, pročež $DF = DH$; také jest ale $\triangle DEF \cong \triangle DEH$, následovně $\sphericalangle EFD = \sphericalangle EHD$.



Obr. 265.

Pro obrácenou větu podrží celá konstrukce svou platnosť, jen že se předpokládá rovnosť úhlů EFD a EHD; dokáže se tedy nejprvé shodnosť trojúhelníků EFD a EHD, a na to shodnosť trojúhelníků OFD a OHD.

b) Je-li nyní při téže konstrukci plošných úhlů $\sphericalangle BOH > \sphericalangle DOF$, bude v pravoúhelných trojúhelnících DOF a DOH, které mají stejnou přeponu DO, nestejné ale úhly BOH a BOF, nutně $DH > DF$; tím však bude ale zase v pravoúhelných trojúhelnících DEH a DEF, které mají společnou odvěsnu DE a nestejné přepony, $\sphericalangle DFE > \sphericalangle DHE$, t. j. naproti větší straně leží i větší úhel plošný.

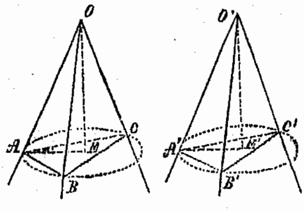
Je-li naopak úhel zavřený rovinami AOC a BOC (obr. 263.) větší nežli úhel zavřený rovinami AOC a BOA, polož hranou CO rovinu, která by zavírala se zadní rovinou AOC týž úhel, jako rovina AOB, na př. rovinu EOC; i budou potom v tělesném trojúhelníku OAEC dva stejné plošné úhly, následovně budou dle předešlé věty také hranové úhly AOE a EOC sobě rovny. Nyní jest v tělesném trojúhelníku OEBC dle odstavce 5)
$\sphericalangle EOB + EOC > \sphericalangle BOC$, nebo $\sphericalangle EOB + AOE > \sphericalangle BOC$, to jest $\sphericalangle AOB > \sphericalangle BOC$.

§ 73.

Již z posledních vět bylo patrno, že jako v planimetrii mezi stranami a úhly trojúhelníka jakési závislosti stávalo, tak i v tělesném trojúhelníku strany a úhly vespolek určitému zákonu podléhají, který dovoluje trojúhelník tělesný sestaviti, i když bychom neznali všech jeho 6 částek. K dokonalému určení trojúhelníka tělesného jest jako v planimetrii potřeba toliko tré určovacích částek, z nichžto se jeho tvar i velikosť poznati dají. Máme tedy i zde známky shodnosti, a sice:

1. *Dva tělesné trojúhelníky jsou shodné, mají-li všechny tři hranové úhly v témž pořádku za sebou stejné.*

Důkaz. Je-li v obr. 266. $\sphericalangle AOB = A'O'B'$, $\sphericalangle AOC = A'O'C'$, $\sphericalangle BOC = B'O'C'$, sřízni $OA = OB = OC = O'A' = O'B' = O'B'$, a polož body A, B, C i body A' B' C' roviny. I bude potom $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$, $\triangle BOC \cong \triangle B'O'C'$, $\triangle AOC \cong \triangle A'O'C'$, a z toho $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ a $AC = A'C'$, následovně $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. — Spustí-li se nyní s vrcholu na rovinu tuto kolmice, t. j. $OM \perp rov. ABC$, $O'M' \perp rov. A'B'C'$, budou dle 69, 14. b) v M a M' středy trojúhelníkům ABC a A'B'C' opsaných kruhů a tudy $AM = A'M'$. — Postavíme-li nyní tělesný trojúhelník O'A'B'C' do rohu OABC tak, aby se plošné trojúhelníky ABC a A'B'C' pokryly, musí se i jejich středy M a M' pokrýti, a poněvadž v jednom bodu na rovinu jenom jedna kolmice vztyčena býti může, musí se i kolmice OM a O'M' sjednotiti. Že ale jest nad to ještě $OM = O'M'$, padne bod O' do bodu O a tím se spůsobí, že se pokryjou hrany AO s A'O', BO s B'O' a CO s C'O'.



Obr. 266.

Pokrývají-li se takto hrany, musejí se i plochy jimi omezené pokrývati, čímž se sjednotí i všechny souhlasné úhly plošné, to jest, oba tělesné trojúhelníky pokrývají se úplně ve všech svých částích a jsou shodnými.

Dodatek. Kdyžby stejné hranové úhly jednoho rohu v obráceném pořádku za sebou následovaly, byly by oba tělesné trojúhelníky toliko souměrné.

2. *Dva tělesné trojúhelníky jsou shodné, mají-li v stejném pořádku za sebou dva hranové úhly a jimi zavřené plošné úhly stejné.*

Důkaz. Je-li v obr. 266. $\sphericalangle AOB = A'O'B'$ a $\sphericalangle BOC = B'O'C'$ a jsou-li při tom úhly těmito stěnami zavřené sobě rovny, vlož roh O'A'B'C' zase do rohu OABC tak, aby se sjednotily stěny BOC a B'O'C'. Následkem předpokladu musí potom nejen strana A'O'B' pokrýti úplně stranu AOB, nýbrž i hrana A'O' hranu AO. Jak mile se ale nyní pokrývají všechny hrany i vrchol, splynuly oba tělesné trojúhelníky v jeden a jsou tudy shodné.

3. Další známky shodnosti dají se podobným spůsobem dokázati a jsou: *Dva tělesné trojúhelníky jsou shodné, a) mají-li všechny plošné úhly v témž pořádku za sebou stejné; b) mají-li jednu stranu a oba k ní přiléhající úhly plošné v témž pořádku za sebou stejné*, čehož důkazy zůstavují se čtenáři.

Pozn. Důkaz o shodnosti vícestranných rohů provede se tím spůsobem, že se příhodnými řezy rozvrhne mnohostraný roh v samé třístrané, jako se dělo se shodnými mnohoúhelníky v planimetrii. Konstrukce tělesných trojúhelníků z daných určovacích částek, jakož i ostatní úlohy o přímce a rovinách náležejí vlastně do oboru měřictví zobrazujícího, kdežto se všechny takovéto úlohy s neobyčejnou lehkostí a důkladností provésti dají.

Kniha třetí.

O tělesích vůbec.

1. Druhy těles a jich rozdělení.

§ 74.

1. V knize předešlé pozorovali jsme prostor jen částečně omezený; nyní přistoupíme k úplně omezeným částkám prostoru. Plochami úplně omezená část prostoru nazývá se, jak již v úvodu vysvětleno, tělesem (Körper); a poněvadž se prostor rozmanitými plochami rozličně omeziti může, jsou tělesa rozličného tvaru.

Když jest těleso omezeno samými rovinami, slove **těleso hranaté** (eckiger oder ebenflächiger K.); omezují-li ale těleso rozličné křivé plochy, bude také jeho tvar rozličně zakulacený, tak že tu podle druhu křivých ploch obdržíme i tělesa rozličně kulatá.

Zde přihlídneme přede vším k tělesům hranatým.

2. K úplnému omezení tělesa hranatého jest potřeba nejméně 4 roviných obrazců, protože tři roviny, jak jsme u tělesného rohu viděli, prostor na jedné straně neuzavřený nechávají. Jednotlivé roviny č. obrazce, jimiž se těleso omezuje, slovou jeho **stěny** (Grenzflächen) a veškeré stěny dohromady nazýváme **povrch tělesa** (Oberfläche des K.), který, jestliže se dá rozprostříti v jednu rovinu, slove též **síť tělesa** (Netz).

Dle počtu stěn jmenujeme těleso, ač nemá-li již nějakého zvláštního jména, čtyr-, pěti-, vůbec **mnohostěn** (Tetraeder, Pentaeder, . . . Polyeder).

Na každém hranatém tělesu rozeznáváme a) stěny, b) jich průsečnice hrany, a c) body, v nichžto se hrany sbíhají č. rohy tělesa. Stěna, na níž si těleso postaveno myslíme, slove jeho základnou nebo podstavou (půdicí, Grundfläche, Basis), kdežto ostatní stěny stěnami pobočnými slovou (Seitenflächen). — Úhlopříčnou tělesa (körperliche Diagonale) slove každá přímka, jížto se spojují dva jeho rohy, které by nebyly přímo některou hranou spojeny; úhlopříčným řezem (Diagonalschnitt) slovou ale roviny, které procházejí hranou a některým protilehlým rohem.

Obsah tělesa (Inhalt) slove veškerými jeho stěnami omezená část prostoru, tak že obsah tělesa vlastně jeho velikosť značí. Obsah tento slove **obsah tělesný** (körperliche J.) na rozdíl obsahu ploského (Flächeninhalt) v plochoměrství.

3. Dvě tělesa jsou si **rovna**, když mají stejné obsahy bez ohledu na jich tvar. Podobnými jsou si tělesa, když jsou omezena stejným množstvím podobných obrazců, které v témž pořádku k sobě přiléhají a pod stejnými úhly (plošnými) k sobě nakloněny jsou. — Stejnolehlé hrany podobných těles budou tedy v stejném poměru.

Kdyby podobné obrazce, jimiž dvě tělesa omezena jsou, i s jich stejnolehlými úhly plošnými v protivném pořádku k sobě přilehaly, byla by si tělesa toliko souměrně podobna (symmetrisch-ähnlich).

Konečně slovou tělesa shodnými, mohou-li se tak do sebe vložiti, aby se veškeré jejich stejnolehlé částky pokryly a sjednotily.

Pozn. Matematika beře při pojmu tělesa jen na takové vlastnosti jeho zřetel, jimiž se určuje velikosť a tvar tělesa; všechny ostatní vlastnosti, ano i ty nejobecnější, bez nichžto bychom si obyčejná tělesa ani pomysliti nemohli, na př. neprostupnosť, váhu, atd. při tom odmítá, a odtud to přijde, že se tělesa v matematice na společnou základnu stavěti, do sebe vkládati, vespolek se pokrývati, ano i sjednotiti mohou.

4. Veškerá tělesa hranatá rozvrhujeme a) na **hranoly** (Prisma), které mají dva shodné a rovnoběžné mnohoúhelníky za základny a po stranách samé rovnoběžníky. Kolmá vzdálenosť obou základen slove výškou hranolu. — Dle počtu stran na základně rozeznáváme hranoly čtyrstrané, pěti- a vůbec n-strané. Dále pak rozdělujeme hranoly α) na přímé č. kolmé (gerad oder senkrecht), jichžto postraní plochy nebo také i hrany na základně kolmo stojí; a β) na šikmé nebo nakloněné (schiefes P.), kde tomu tak není.

Postraní hrany každého hranolu jsou tudíž všechny vespolek rovnoběžny a stejně dlouhé, a hranol jest od spodu až nahoru všude stejně tlustý. Povrch n-straného hranolu sestává dle toho z $n+2$ ploch a má n rohů dole a taktéž n rohů nahoře, celkem tedy $2n$ rohů; hran jest dole n, nahoře n, a taktéž po straně n, celkem tedy $3n$.

Co zvláštní druh hranolu jest **rovnoběžnostěn** (Parallelepiped), který má i za základny rovnoběžníky, tak že jest samými rovnoběžníky omezen. — Jsou-li pak u přímého rovnoběžnostěnu všechny stěny čtverce, slove zvláště krychle (Würfel, Cubus). Krychle jest tedy omezená 8 shodnými čtverci.

Výsledky. Na každém rovnoběžnostěnu jsou a) protilehlé stěny spolu rovnoběžné a shodné; b) rohy, které nejsou žádnou hranou spolu spojeny, jsou souměrné.

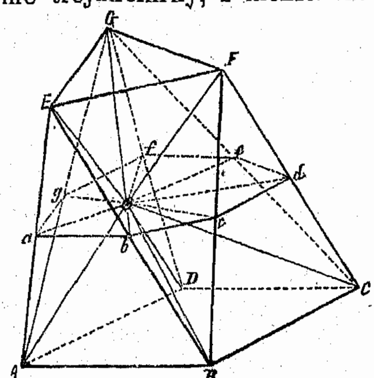
b) Hranatá tělesa rozdělujeme za druhé na **jehlance** (Pyramide), mající libovolný mnohoúhelník za základnu, po stranách ale samé trojúhelníky, které se v jednom, mimo základnu ležícím bodu sbíhají. Společný tento bod slove vrcholem nebo špičkou jehlance (Scheitel, Spitze); vzdálenosť pak vrcholu od základny nazývá se **výškou** jehlance. — Dle počtu stran na základně slove opět jehlanec tří-, čtyr-, vůbec n-straný.

Pozn. Veškerý povrch jehlance sestává z $n+1$ stěn, a má $n+1$ rohů a $2n$ hran.

Jsou-li všechny postraní hrany jehlance stejně dlouhé, musí padnouti kolmice s vrcholu na základnu spuštěná do středu základny, a jehlanec slove potom **přímý** č. **kolmý**, jinak ale **nakloněný** nebo **šikmý**. Postraní stěny přímého jehlance jsou tudíž samé rovnoramené a vespolek shodné trojúhelníky a základna musí býti obrazec pravidelný (§ 69. 14).

Jehlanec, jehož všechny hrany jsou sobě rovny, tak že jest na základně obrazec pravidelný a i po straně samé pravid. trojúhelníky, nazývá se **jehlanec pravidelný** (regelmäßig, regulär). Poněvadž jsou ale ve vrcholu pravid. jehlanců samé úhly po 60^0, může se dle § 72. 6 sbíhati ve vrcholu jenom nanejvýš 5 pravid. trojúhelníků; máme tedy jenom pravid. jehlance tří-, čtyř- a pětistrané. Sřízne-li se jehlanec rovinou, která by byla k základně rovnoběžná, zbyde mezi oběma rovinama těleso, které nazýváme **jehlanec komolý** (abgestutzte Pyr., Trunkus), a které jest omezeno dvěma podobnými mnohoúhelníky jakožto půdicemi, a po stranách tolika lichoběžníky, mnoho-li má základna stran.

c) Co zvláštní těleso hranaté jest tak zvaný **hranolec** (Prismatoid), který má dva **libovolné**, avšak **rovnoběžné** mnohoúhelníky za základny a po stranách vůbec samé trojúhelníky, z nichžto má každý s jednou základnou roh, s druhou pak stranu společně, jako na př. v obr. 267., kde jsou půdicemi rovnoběžník ABCD a trojúhelník EFG. Těleso toto může se ale rozličně změniti. Kdyby na př. byly někde dvě a dvě strany obou základen spolu rovnoběžné, přešly by přináležející trojúhelníky v rovnoběžníky nebo lichoběžníky. — Postraních trojúhelníků má hranolec tolik, mnoho-li stran mají obě základny dohromady; kdyby však některé trojúhelníky přešly v rovno- nebo lichoběžníky, bylo by jich méně.



Obr. 267.

Kolmá vzdálenosť obou základen slove výškou hranolce, a rovina položená prostředkem výšky rovnoběžně k půdicím rozpůlí každou postraní hranu (§ 71. 3); obrazec takto vzniklý má vždycky tolik stran, mnoho-li jich mají obě základny dohromady, zde tedy sedm.

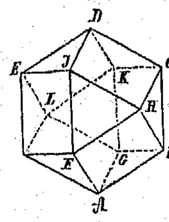
Obvod tohoto středního řezu rovná se polovičnímu součtu obvodů obou základen. (Důkaz snadný.)

Pozn. Hranolec jest těleso teprv nedlouho do počtu jednoduchých těles měřických uvedené a zaujímá mezi hranolem a jehlancem, v nějžto se i proměniti může, takového místa v tělesoměrství, jako v plochoměrství lichoběžník mezi trojúhelníkem a rovnoběžníkem. Podobně totiž jako byla v § 43, 6) pozn. uvedená věta o lichoběžníku, dle níž se dá určiti ploský obsah trojúhelníka, lichoběžníka i rovnoběžníka, mohou se i dle věty, udávající jak lze vypočísti tělesný obsah hranolce, určiti také tělesné obsahy hranolu i jehlance, poněvadž která koliv základna hranolce může přejíti i v přímku, ano i v bod, o čemž v § 91, 3.

d) Konečně rozeznáváme mezi hranatými tělesy také ještě **tělesa pravidelná** (regelm. K.), která jsou omezena veskrz pravidelnými obrazci téhož druhu, a jejichžto rohy jsou vesměs spolu shodné. Hrany, jakož i všechny úhly hranové a plošné jsou v pravidelném tělesu vespolek sobě rovny.

Pozn. Pouhé omezení tělesa obrazci pravidelnými nepostačuje ještě k jeho úplné pravidelnosti; neboť kdyby se na př. přiložily dva pravid. třístrané jehlance k sobě na společnou základnu, vzniklo by těleso omezené 6 pravid. trojúhelníky, které by nebylo již z té příčiny pravidelné, že by se ve dvou rozích sbíhalo jen po třech, v ostatních třech rozích ale po čtyrech trojúhelnících.

Zvláštní druh sem náležejících těles jsou tak zvaná tělesa **polopravidelná** (halbregelm. Polyeder), která jsou taktéž omezená jenom pravidelnými obrazci, a však nikoliv obrazci téhož druhu, jako na př. 268., kdež jest každý roh omezen dvěma pravidelnými trojúhelníky a dvěma pravid. čtyrúhelníky.



Obr. 268.

Vlastnosti těles hranatých vzhledem k jich stěnám, hranám a rohům.

§ 75.

1. *Každé hranaté těleso má právě tolik hran, mnoho-li plošných úhlů.*

Důkaz. Dvě a dvě stěny zavírají spolu jeden plošný úhel a dávají spolu jednu průsečnici — hranu —; jest tudy jedněch tolik co druhých.

2. *Hranových úhlů jest na povrchu každého mnohoúhelníka dvakrát tolik co hran.*

Důkaz. Ku každé hraně přiléhají 4 hranové úhly, a sice po dvou na každé stěně; kdyby tedy bylo hran h, bylo by celkem hranových úhlů $4h$. Při tom jest však každý úhel počítán dvakráte, jednou totiž co přilehající k jednomu a po druhé zase co přilehající k druhému ze svých ramen; rozdílných tedy úhlů bude proto jen polovice, t. j. $\frac{4h}{2} = 2h$.

3. *V každém mnohostěnu jest počet stěn s a rohů r dohromady o dvě větší nežli počet hran h, t. j. $s+r=h+2$.* (Eulerova věta.)

Důkaz. Budiž v obr. 268. libovolný mnohostěn tak vyobrazen, aby se žádná stěna pozorovateli neobjevila co přímka, t. j. aby bylo všechny stěny i hrany a rohy viděti, čímž náš obrazec právě tolik stěn, hran a rohů míti bude, jako těleso skutečné. Při tom jest jedna část povrchu jakožto k pozorovateli obrácená vyobrazena přímkami plnými, zadní pak neviditelná část přímkami tečkovanými. I bude nyní snadné, součet veškerých úhlů hranových na tomto mnohostěnu dvojím spůsobem vyjádřiti, a sice jednou na základě úhlů v obrazci, a po druhé na základě úhlů kolem jednoho bodu.

Mějtež tedy předně jednotlivé mnohoúhelníky DEJ, DJHC, CBGK . . . ., jimiž těleso omezeno jest, stran n, n', n'' . . ., tak že bude, poněvadž v každém mnohoúhelníku úhly dohromady dávají $n.2R-4R=(2n-4)R$, součet veškerých těchto úhlů

$$S=[(2n-4)+(2n'-4)+(2n''-4)+\ldots]R,$$

což vzhledem k tomu, že jest všech mnohoúhelníků s, také psáti můžeme

$$S=[2(n+n'+n''+\ldots)-4s]R.$$

Že ale každá hrana tělesa ve dvou obrazcích jakožto strana počítána jest, bude hran jenom polovic tolik, mnoho-li jest všech mnohoúhelníkových stran, t. j. $h=\frac{1}{2}(n+n'+n''+\ldots)$, čímž předešlá rovnice obdrží jednodušší tvar, totiž $S=(4h-4s)R\ldots\alpha)$. Aby se našel nyní druhý výraz pro S, budiž počet rohů na obvodu ABCDE... celkem m, a počet rohů na přední viditelné části m' (t. j. J, H, F...), na zadní neviditelné části m'' (t. j. K, L, G...). Úhly kolem každého z těchto bodů, který v našem obrazci nenáleží k obvodovému mnohoúhelníku ABCDE..., rovnají se 4R, a dávají tedy na přední i na zadní části celkem $m'4R+m''4R=(4m'+4m'')R$. Úhly pak kolem m bodů ležících v obvodu ABCDE... dávají jakožto úhly v m-straném obrazci $2mR-4R=(2m-4)R$ na přední viditelné částce, a toliktéž i na zadní neviditelné části, tak že bude veškerý součet všech úhlů kolem těchto bodů

$$S=[2(2m-4)+(4m'+4m'')]R,$$

nebo když závorky malé otevřeme,

$$S=[4(m+m'+m'')-8]R.$$

Jelikož ale číslo $(m+m'+m'')$ udává počet veškerých rohů tělesa, můžeme poslední rovnici i takto psáti $S=(4r-8)R\ldots\beta)$.

Spojením obou rovnic $\alpha)$ a $\beta)$ obdržíme nyní $(4h-4s)=(4r-8)$, a z toho konečně $r+s=h+2$.

Pozn. K větě této, z nížto plyne celá řada menších vět o vzájemné závislosti počtu stěn, hran a rohů*), podáno jest od nejslovutnějších matematiků rozličných důkazů; shledáno však, že pro zvláštní, z dosavádních měřických těles skládáním vzniklá tělesa věta Eulerova platnosti pozbývá, a z této příčiny nazvána jsou dosavadní tělesa měřická též Eulerovskými.

---

*) Viz o tom spisy: *J. H. van Svinden* Elemente der Geometrie, aus dem Holländischen von C. Jacobi, a Geometrie von Dr. *E. Heiss und Eschweiler*.

§ 76.

1. Nyní můžeme blíže přihlídnouti k tělesům pravidelným, jichžto nemůže býti, jak se ukáže, více nežli pět.

V pravidelném trojúhelníku má totiž jeden úhel 60^0, a dle § 72. 6, nemůže se jich v jednom rohu více sbíhati nežli nanejvýš pět, poněvadž 3.60^0, 4.60^0, 5.60^0 pořád ještě menší zůstává nežli 4R. Šest pravid. trojúhelníků nemůže se již v žádném rohu sbíhati, an $6.60^0 = 4R$; jest tehdy pravid. trojúhelník omezující stěnou jenom u tří rozličných těles pravidelných.

Z podobné příčiny mohou se jen tři pravidelné čtyrúhelníky t. j. čtverec, v jednom rohu sbíhati, ant by čtyry vyplnily již rovinu. Samými čtverci může býti proto jenom jedno pravid. těleso omezeno. A poněvadž jeden úhel v pravid. pětiúhelníku má 108^0, jest zase jenom $3.108^0 < 4R$, kdežto by bylo již $4.108^0 > 4R$.

Mohou se proto jenom tři pravid. pětiúhelníky v jednom rohu sbíhati a tím bude také jenom jedno pravid. těleso samými pravid. pětiúhelníky omezeno.

Z pravid. šestiúhelníků, kdežto má jeden úhel 120^0, nemohou se již ani tři v jednom rohu sbíhati, protože by vyplnily rovinu, tak že pravid. šestiúhelníky žádné pravid. těleso omeziti nelze, a tím méně tedy pravid. mnohoúhelníky s ještě větším počtem stran.

Máme proto jenom 5 pravidelných těles, která dostávají podle počtu stěn své pojmenování. — Aby se tento počet stěn jakož i počet hran a rohů na každém pravidelném tělesu vůbec určiti mohl, buďtež stěny, jimiž pravid. těleso omeziti chceme, m-strané, a sbíhejž se jich v jednom rohu vůbec n. Dle Eulerovy věty jest potom $s + r = h + 2$. Že ale vždycky dvě strany omezujících obrazců splynou v jednu hranu, budou míti všechny obrazce dohromady stran $2h$; tento počet stran veškerých omezujících obrazců vyjádřuje se ale také ještě, poněvadž je všech stěn s a každá má m stran, číslem ms, a nebo číslem nr, když totiž uvážíme, že jest na tělesu všech rohů r a v každém že se sbíhá po jedné straně každého obrazce, jichžto se v každém rohu sbíhá n.

Máme tedy rovnice $2h = ms = nr$, což dává

$$s = \frac{2h}{m}, \quad \text{a} \quad r = \frac{2h}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

Dosadíce hodnoty tyto za s a r do Eulerovy věty, obdržíme

$$\frac{2h}{m} + \frac{2h}{n} = h + 2, \text{ a z toho konečně } h = \frac{2mn}{2m(+n) - mn} \quad \ldots \quad \beta)$$

Ze vzorce tohoto mohlo by se souditi, že číslo h vypadne někdy záporně když by totiž bylo $mn > 2(m+n)$; to však se nemůže státi, an mají m i n hodnoty hořejší větou omezené, totiž, že pravid. těleso mohou omezovati jenom prav. troj-, čtyr- nebo pětiúhelníky, a že se prvních může v jednom rohu sbíhati nanejvýš 5, druhých pak po třech. A při tomto omezení jest vždycky $2(m+n) > mn$.

Dosadíce tedy za $m = 3$, bude moci býti $n = 3$, 4 nebo i 5; načež obdržíme dle hořejších rovnic α) a β)

a) $m = 3, \quad n = 3, \quad h = 6, \quad s = 4, \quad r = 4;$
b) $m = 3, \quad n = 4, \quad h = 12, \quad s = 8, \quad r = 6;$
c) $m = 3, \quad n = 5, \quad h = 30, \quad s = 20, \quad r = 12.$

Pro omezení tělesa pravid. čtyrúhelníky jest dále

d) $m = 4, \quad n = 3, \quad h = 12, \quad s = 6, \quad r = 8;$

a konečně pro omezení pravid. pětiúhelníky bude

e) $m = 5, \quad n = 3, \quad h = 30, \quad s = 12, \quad r = 20.$

Pravidelné těleso může býti dle toho omezeno jenom:

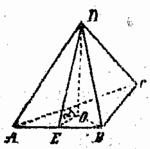
1) čtyrmi trojúhelníky, kdežto slove **čtyrstěn** (Tetraeder, obr. 269.);

2) osmi trojúhelníky, kdežto slove **osmistěn** (Oktaeder, obr. 270.);

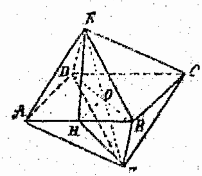
3) dvacíti trojúhelníky, kdežto slove **dvacítistěn** (Ikosaeder, obr. 271.);

4) šesti čtverci, kdežto slove **šestistěn** nebo **krychle** (Hexaeder, Cubus, obr. 299.);

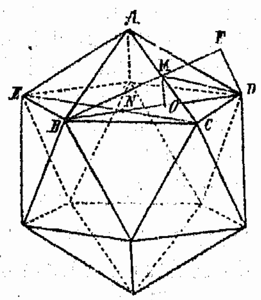
5) dvanácti pětiúhelníky, kdežto slove **dvanáctistěn** (Dodekaeder, obr. 272.).



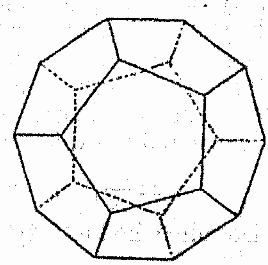
Obr. 269.



Obr. 270.



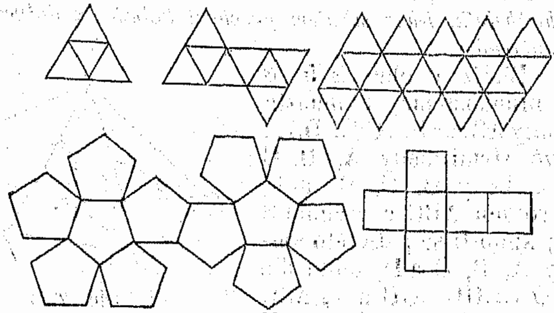
Obr. 271.



Obr. 272.

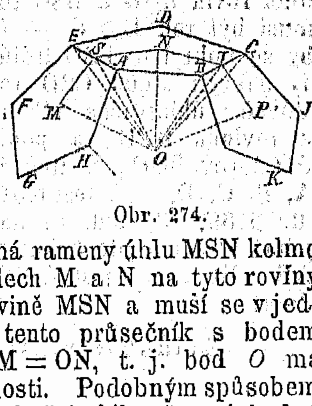
Pozn. Uvedená zde tělesa pravidelná slovou též **tělesa platonická**, protože se jimi platonická škola nejvíce zabývala; nynějšího času nemají v měřictví daleko té důležitosti jako jindy. Přímá a dokonalá jich konstrukce náleží měřictví zobrazujícímu; pilnějším žákům však odporučujeme, aby sobě veškerý povrch každého z těchto těles pomyslili rozprostřený v jednu rovinu a shotovili sobě tak ze silnějšího papíru podle obr. 273. sítě pravid. těles.

O tělesích polopravidelných, která slovou též **archimedickými**, nedovoluje nám obsah díla tohoto dále jednati.*)



Obr. 273.

2. *V každém pravid. mnohostěnu nachází se uvnitř bod, který má a) ode všech stěn, b) ode všech rohů, c) ode všech hran stejné vzdálenosti.*



Obr. 274.

Důkaz. a) Buďtež ABCDE, AEFGH a BCJK (obr. 274.) tři stěny pravid. dvacítistěnu, a M, N, P jich středy. Spojí-li se tyto středy se středními body společných stran AE a BC, budou MS a NS kolmo na AE, NT a PT kolmo na BC atd.; následovně bude ∢MSN úhlem sklonu rovin AG a AC, úhel pak NTP úhlem sklonu rovin AC a BK, a rovina položená rameny úhlu MSN kolmo na průsečnici AE. I budou tedy v bodech M a N na tyto roviny vztyčené kolmice MO a NO ležeti v rovině MSN a muší se v jednom bodu *O* proseknouti. Spojí-li se tento průsečník s bodem *S*, bude $\triangle MOS \cong \triangle NOS$, a z toho $OM = ON$, t. j. bod *O* má od obou rovin AG a AC stejné vzdálenosti. Podobným spůsobem dokáže se dále, že jest také $ON = OP$, jakož i dále, že má bod *O* i ode všech ostatních stěn stejnou vzdálenost.

b) Poněvadž vzdálenosti bodu *O* ode všech stěn, t. j. OM, ON, OP, . . . na těchto kolmo stojí a zároveň jejich středními body procházejí, budou dle § 69, 14, dod. b) i jeho vzdálenosti od rohů A, B, C, D, . . . vespolek sobě rovny.

c) Trojúhelníky AEO, BCO, . . . jsou dle předešlého rovnoramenné, a poněvadž byly společné strany AE, BC, . . . rozpůleny, jest $OS \perp AE$, $OT \perp BC$, . . . t. j. přímky OS, OT, . . . udávají vzdálenost bodu O od hran AE, BC . . . Ze shodnosti konečně trojúhelníků SNO, PTO, . . . plyne, že $OS = OT = \ldots$

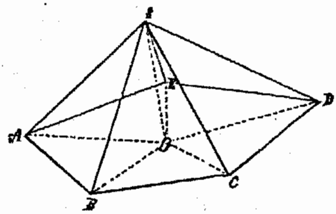
Dodatek. Bod *O* mající v pravid. mnohostěnu jak ode všech stěn, tak ode všech rohů i hran stejné vzdálenosti, slove **středem pravid. mnohostěnu.**

---

*) O tělesích archimedických viz pojednání prof. M. Pokorného v „První roční zprávě real. gymnasia v Praze, 1867.“

3. *U každého pravid. mnohostěnu leží krajní body hran z téhož rohu vybíhajících ve společné rovině na obvodě kruhu, určujíce tak pravid. mnohoúhelník, jehož středem prochází kolmice z dotyčného rohu na rovinu spuštěná.*

Důkaz. Budiž v obr. 275. *S* roh pravid. mnohostěnu, v němžto se sbíhají hrany $AS = BS = CS = DS$... Polož nejprvé třemi body A, B, C rovinu, na to body B, C, D atd., a spusť na rovinu ABC s vrcholu S kolmici *SO*; spojí-li se pata této kolmice s body A, B, C a D, bude dle § 69. 13, b) $OA = OB = OC$ a $\sphericalangle ASO = \sphericalangle BSO = \sphericalangle CSO$, následovně $\triangle AOS \cong \triangle BOS \cong \triangle COS$, a taktéž $\triangle AOB \cong \triangle BOC$, a z toho $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC$. Poněvadž ale jest dle předpokladu plošný úhel rovin ASB a BSC rovný plošnému úhlu rovin BSC a CSD, musí být roh $B \cong C$. — Otoč tedy celé těleso kolem osy SO, až by se pokryl $\triangle BSC$ trojúhelníkem ASB; i musí stěna BSC rohu B pokrýti stěnu CSD rohu C, čímž padne BC na CD a následovně i úhlopříčna AC na BD, t. j. rovina ABC splyne v jedno s rovinou BCD, a poněvadž jest $SO \perp$ rov. ABC, bude také $SO \perp$ rov. BCD, a tím $AO = BO = CO = DO$, atd. Krajní body A, B, C, D, . . . leží tedy v společné rovině, na níž stojí *SO* kolmo; dle § 69, 13, dod. b) nacházejí se body tyto v obvodu kruhu, jehož středem jde kolmice SO, a poněvadž jsou dle předpokladu $AB = BC = \ldots$, jest ABCD . . . do kruhu vepsaný obrazec pravidelný.



Obr. 275.

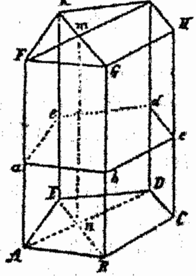
Zvláštní vlastnosti hranolu a jehlance.

§ 77.

1. *Řez hranolu k jeho základně rovnoběžný jest s ní shodný.*

Důkaz. Průsečnice jednotlivých stěn s rovinou sekoucí jsou dle § 70, 3) k souhlasným stranám základny rovnoběžné, v obr. 276. tedy $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC, \ldots$, a poněvadž jsou i postranní hrany hranolu mezi sebou rovnoběžné, jest také $ab \# AB$, $bc \# BC \ldots$, a následovně $\sphericalangle eab = EAB$, $\sphericalangle abc = ABC, \ldots$, t. j. řez *abcde* . . . a základna *ABCDE* . . . mají stejné hrany i úhly a jsou vespolek shodné.

Dodatek. Kdyby se proříznul hranol dvěma rovnoběžnýma rovinama, které nejsou ku základně rovnoběžné, byly by vzniklé řezy taktéž spolu shodné. Důkaz jako předešlý.



Obr. 276.

2. Řez hranolu, který prochází dvěma protilehlýma hranama, slove **řez úhlopříčný** (Diagonalschnitt) a jest vždycky rovnoběžníkem. Proč?

Průsečnice dvou úhlopříčných řezů jest s postranními hranami hranolu rovnoběžná.

Důkaz. Buďtež v obr. 276. ADFJ a BEGK úhlopříčné řezy a *mn* jejich průsečnice. Hrana BG || AF, a poněvadž tato leží v rovině ADFJ, musí být BG || rov. ADFJ (§ 68, 8). Přímkou touto položená rovina protíná tedy rovinu ADFJ dle přímky s *BG* rovnoběžné (§ 68. 9), tak že jest *mn* || BG, a následovně i rovnoběžná s ostatními postranními hranami.

Dodatek. Každý hranol dá se úhlopříčnými řezy rozděliti v samé třístrané hranoly téže výšky.

3. *Prořízne-li se jehlanec rovinou se základnou rovnoběžnou, bude řez základně podobný a ploské jejich obsahy budou ve čtvercovém poměru jich vzdáleností od vrcholu.* Důkaz podle § 71, 1.

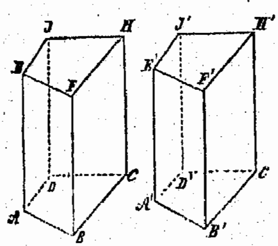
4. *Kolmice spuštěná s vrchole rovnostraného jehlance na jeho základnu padne do středu základny,* a naopak: *Vztýčí-li se ve středu pravidelného mnohoúhelníka kolmice a spojí se který koliv její bod s rohy pravid. mnohoúhelníka, vznikne rovnostraný jehlanec.* Důkaz snadný.

5. Čtenáři zůstavuje se důkaz ještě následujících vět:

a) Každý úhlopříčný řez jehlance dává trojúhelník; z toho pak plyne, že se každý mnohostraný jehlanec dá rozložiti úhlopříčnými řezy v samé třístrané.

b) V rovnoběžnostěnu protínají se všechny úhlopříčné řezy v jednom bodu, který má od protilehlých rohů i stěn stejné vzdálenosti a proto středem tělesa slove.

6. *Dva hranoly jsou shodnými, když mají jeden roh omezený třemi v souhlasném pořádku po sobě shodnými stěnami.*



Obr. 277.

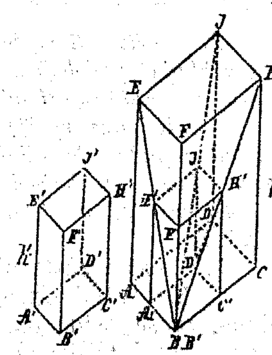
Důkaz. Budiž v obr. 277. při rozích B a B′ ABCD≅A′B′C′D′, ABEF≅A′B′E′F′, BCFH≅B′C′F′H′, a BCFH≅B′C′F′H′, tak že musí být hranové úhly ABF=∢A′B′F′, ∢CBF=∢C′B′F′, a ∢ABC=∢A′B′C′, a tedy roh B≅B′ (dle § 73, 1). — Vložíme-li roh B do rohu B′ tak, aby splynuly spolu v jediný, musí se také stěny, jimiž rohy tyto omezeny jsou, pokrýti po dvou stejnolehlých v jednu splývajíce; tím ale pokryjou se nejen všechny stejnolehlé rohy A, B, C, . . . s A′ B′ C′ . . ., nýbrž i stejnolehlé hrany AE, BF, CH s A′E′, B′F′, C′H′. Když se takto hořejší základny, které jsou se spodními půdicemi a následovně i mezi sebou shodné, ve třech bodech E, F, H, pokryly a třemi body položení roviny určeno jest; musí se i ostatní jejich stejnolehlé částky pokrýti, t. j. roh J padne do J' a tím jsou pokryté všechny stejnolehlé částky obou hranolů, které jsou proto shodnými.

Výsledek. Dva přímé hranoly jsou dle toho shodnými, když mají shodné základny a stejné výšky.

7. Jsou-li dva hranoly omezeny shodnými půdicemi i shodnými postraními stěnami, které ale v protilehlém pořádku za sebou následují, slovou hranoly **souměrnými**. U takových není třeba, aby byly i všechny souhlasné rohy souměrnými; jednotlivé z nich mohou býti při tom i shodnými, jenom když jest aspoň jeden roh na obou hranolech souměrný.

8. *Dva hranoly jsou si podobny, když mají jeden roh omezený třemi v souhlasném po sobě pořádku podobnými stěnami.*

Důkaz. Je-li v obrazci 278. ABCD ∼ A'B'C'D', ABEF ∼ A'B'E'F', BCFH ∼ B'C'F'H, tedy bude hranol $h \sim h'$. Vložme jen hranol h' do hranolu h tím způsobem, aby se body B a B' pokryly a hrany BF a B'F', BC a B'C', AB a A'B' aby padly při tom na sebe, což se musí státi, poněvadž jest dle předpokladu ∢ABF = ∢A'B'F', ∢FBC = F'B'C' a ∢ABC = A'B'C', následovně dle § 73. 1 roh B ≅ B'. Když takto leží hrany shodných rohů vespolek na sobě, musí ležeti i půdice A'B'C'D' zúplna v půdici ABCD, stěna A'B'F'E' v stěně ABFE, a stěna B'C'H'F' v stěně BCHF. Ostatní pak stěny obou hranolů jsou si střídavě rovnoběžny. — I jest nám nyní dokázati, že jest roh B těmto i všem ostatním souhlasným stěnám bodem podobnosti, to jest, že stejnolehlé jejich rohy ležíce na jednom paprsku mají od tohoto rohu vzdálenosti v stálém poměru. Ohledně rohů A a A', C a C' F a F', které leží na přímkách po dvou v jedno splynulých, vychází to již z předpokladu, an jest AB : A'B' = BC : B'C' = BF : B'F'. Vzhledem pak k rohům E a E' musí být, poněvadž jest dle předpokladu ABEF ∼ A'B'E'F' a tím ∢E = E', přímka EA || E'A'; následovně bude EA : E'A' = AB : A'B'. Že ale jest také ∢A = A', musí být △AEB ∼ △A'E'B', z čehož zase plyne AE : A'E' = EB : E'B', t. j. rohy E a E' leží na téže přímce a vzdálenosti jejich od rohu B stojí v témž poměru k sobě jako vzdálenosti rohů A a A'. — Totéž lze dokázati i o rohu H a H', J a J'.



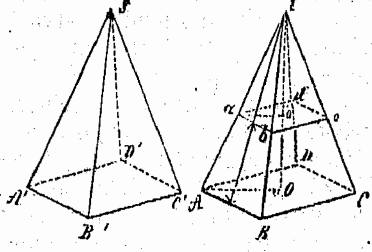
Obr. 278.

Oba hranoly dají se tedy postaviti do chumáče paprsků tak, jako se to může s podobnými obrazci státi (§ 34, 10) a jsou si tudy také podobny.

Dodatek. Všechny krychle jsou si dle toho podobny.

9. *Dva jehlance jsou shodnými, když mají na základně jeden roh omezený třemi, v souhlasném po sobě pořádku shodnými stěnami.*

Důkaz. V obr. 279. jest na př. $ABCD \cong A'B'C'D'$, $\triangle ABS \cong \triangle A'B'S'$, $\triangle SBC \cong \triangle S'B'C'$, následovně roh $B \cong B'$. Vložíme-li jehlanec $S'A'B'C'$ do jehlance $SABC$ tak, aby se shodné rohy B a B' pokryly, padnou souhlasné rohy A', B', C', D' a S' na A, B, C, D, S, čímž splynou i všechny souhlasné hrany dohromady a oba jehlance budou se tedy úplně pokrývati.



Obr. 279.

Dodatek. Kdyby na dvou jehlancích shodné, jeden roh omezující stěny následovaly v protivném za sebou pořádku, byly by jehlance souměrné.

10. Z odstavce (3) jest známo, že na jehlanci rovina se základnou rovnoběžná spůsobí řez základně podobný; a poněvadž jsou tu i úseky stěn vespolek podobné a při tom souhlasné úseky hran srovnalostné, jest dle výměru § 74, 3 odříznutý jehlanec celému podoben. Máme tudy věty:

a) *Sřízne-li se jehlanec rovnoběžně k základně, bude uříznutý jehlanec danému podoben.*

b) *Dva jehlance jsou si podobny, když mají na základně jeden roh omezený třemi v souhlasném po sobě pořádku podobnými stěnami.* (Důkaz, který se podobá důkazům o podobnosti trojúhelníků, zůstavuje se čtenáři.)

c) *Výšky podobných jehlanců jsou v poměru souhlasných hran.*

Tělesa kulatá.

a) Válec a kužel.

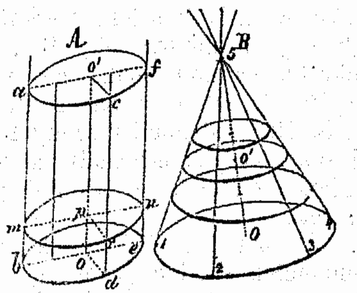
§ 78.

1. Tělesa kulatá jsou omezena plochami rozličně zkřivenými, které sobě můžeme, jak již v úvodu k tomu poukazováno bylo (II. 4), vytvořeny pomysliti pohybováním se všelikých čar, jež dle určitého zákona postupujíce jisté stopy za sebou zůstavují. Zvláště onen druh křivých ploch, jimiž se tělesa do oboru nižšího měřictví náležející omezují, představujeme sobě, že byly vytvořeny pohybováním se buď přímky nebo kruhu a sice:

a) Pohybuje-li se přímka tím spůsobem, aby procházela obvodem nějaké křivky zůstávajíc při tom svému původnímu směru ustavičně rovnoběžnou, vytvoří křivou plochu, která slove vůbec plocha válcová (Zylinderfläche, v obr. 280. A).

b) Pohybuje-li se však přímka tím spůsobem, aby opět procházela obvodem nějaké křivky, při tom aby ale některý její bod svého místa nezměnil, vytvoří křivou plochu, která slove vůbec **plocha kuželová** (Kegelfläche, konische Fl. na př. v obr. 280, B).

V obou těchto případech slove křivka, jejížto obvodem tvořící přímce procházeti jest, **čarou řídící** (Leitlinie, Richtungsl.) a jednotlivé polohy přímky zovou se stranami vytvořené plochy (Seitenlinien). Strany válcové plochy jsou tudíž vespolek rovnoběžné, strany plochy kuželové protínají se ve společném bodu.



Obr. 280.

Pozn. Jak plocha válcová tak i kuželová mohou býti také vytvořeny pohybováním se předešlé čáry řídící a sice: u válcové plochy pohybovala by se daná křivka tak, aby zůstávala svému původnímu položení rovnoběžnou, mezi tím co její některý bod po přímce nahoru nebo dolů se pošinuje (obr. 280 A); u plochy kuželové prostupovala by tvořící křivka tímtéž spůsobem, jen že by při tom i svou velikosť dle poměru výšky měniti musela, jak to v obr. B naznačeno.

Jaké plochy vytvořila by tvořící přímka, kdyžby se řídící čára v obou těchto případech proměnila v přímku?

c) Pohybuje-li se nějaká čára kolem pevné přímky tím spůsobem, aby každý její bod při svém otočení kolem této přímky, jež **osou** (Achse) slove, proběhl kruh, jehož rovina stojí kolmo na ose a jehož střed se nachází právě v ose; vznikne plocha, která slove vůbec **plocha točená** (Umdrehungsfläche). Točí-li se spůsobem tímto kruh kolem svého průměru, vytvoří **plochu koulovou** č. povrch koule (Kugelfläche). Z tohoto pojmu o plochách točených plyne:

a) Řezy točených ploch, spůsobené rovinami kolmo na osu jsou vždycky kruhy, jichžto středy leží v ose; kruhy tyto slovou **kruhy rovnoběžnými** (Parallelkr.).

b) Prochází-li sekoucí rovina osou, rozpůlí se plocha točená a křivka řezem tímto vzniklá slove **meridian** točené plochy. Všechny meridiany jsou spolu shodné; proč? —

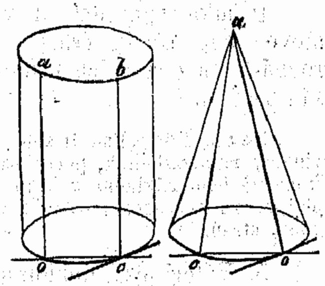
Pozn. I plocha válcová může býti plochou točenou, jestliže bude tvořící přímka, která se má nyní točiti, s osou rovnoběžná; též kuželová plocha může býti plochou točenou, když tvořící přímka při svém otáčení kolem osy tuto v některém bodu protíná. *)

---

*) Kdyby tvořící přímka, jež se kolem dané osy točiti má, byla s touto mimoběžná, vytvořila by zvláštní druh plochy, tak nazvaný hyperboloid o jednom povrchu, což necht se modelem znázorní.

Jakou plochu vytvořil by kruh, kdyby se otáčel a) kolem některé své tětivy, b) kolem tečny, c) kolem přímky ležící mimo kruh?

2. Položíme-li kterýma koliv dvěma stranami plochy válcové (nebo kuželové) rovinu, na př. v obr. 281. stranama *ao* a *bc* (na kuželi stranami *ac* a *ao*), budou se moci přímky tyto považovati za průsečnice této roviny s plochou válcovou (nebo kuželovou). Řídící čára jest při tom proseknuta v bodech *o* a *c*. — Točí-li se však tato sečná rovina *aoc* kolem jedné průsečnice, na př. kolem *bc* (na kuželi kolem *ao*), bude se bod *o* přibližovati bodu *c* jakož i přímka *ao* straně *bc* (na kuželi strana *ac* straně *ao*), až konečně přilehne přímka *ao* přímo vedle přímky *bc*, bod *o* k bodu *c*, t. j. až obě přímky i oba body splynou dohromady.



Obr. 281.

V tom položení promění se sečna *oc* v tečnu *tc* a sečná rovina bude míti potom s plochou válcovou (nebo kuželovou) toliko jednu dvojitou čili tečnou stranu společně a promění se tak v **rovinu tečnou** (Berührungsebene). *Tečná rovina dotýká se tedy plochy válcové* (nebo kuželové) *podél jedné tvořící přímky*, a její položení vyznačí se touto přímkou a tečnou na řídící křivku.

D o d a t e k. Dotkne-li se nějaká rovina plochy válcové (nebo kuželové) v jednom bodu, prodlouží se toto dotknutí podél celé tvořící přímky, která právě bodem tímto prochází.

3. **Plochy válcové a kuželové jsou rozvinutelné** (aufwickelbar), t. j. dají se bez porušení jich souvislosti rozvinouti a v jednu rovinu rozestříti. — Pomyslíme-li si totiž jednotlivé tvořící přímky na ploše válcové (nebo kuželové) přímo vedle sebe, budeme moci plochy tyto tak považovati, jakoby byla plocha válcová složena ze samých úzkých obdélníků. Dva a dva z těchto obdélníků nebo trojúhelníků jsou částky rovin, které se okolo své průsečnice otočiti a v rovinu jedinou položiti dají.

Takto-li bychom s rozbalováním jednotlivých částic rovinných postupně pokračovali, rozvinuli bychom celou plochu válcovou i kuželovou a rozestřeli je tak v jednu rovinu.

4. **Válcem** (Zylinder) slove těleso vůbec, když jest omezeno nějakou plochou válcovou a dvěma rovnoběžnýma rovinama. Válcová plocha slove potom **pláštěm** nebo **oblinou válce** (Mantelfläche), a roviny, jak dalece válec omezují, slovou jeho **podstavy** nebo **základny** (Grundflächen).

Dle toho, stojí-li strany válce na základně kolmo nebo šikmo, slove válec buď přímý č. kolmý (gerad, senkrecht) nebo nakloněný č. šikmý (schief). Válec plný, válec dutý.

Vzdálenosť obou rovnoběžných základen slove výškou válce a jak snadno nahlednouti, jest výška u přímého válce rovna jeho straně; u nakloněného válce jest výška menší nežli strana.

V užším smyslu a zvláště v oboru nižšího měřictví rozumí se slovem válec všeobecně jenom **válec kruhový** (Kreiszylinder), t. j. takový, jehož základny jsou rovnoběžné a shodné kruhy, a o takovém jenom bude také v následujícím řeč.

Přímka spojující u válce kruhového středy obou základen, slove jeho **osou** (Achse) a jest s tvořící přímkou rovnoběžná; rovná-li se osa válce průměru jeho základny, slove válec **rovnostraným**.

Pozn. Pomyslíme-li sobě, že by se u hranolu, jehož základnou jest pravidelný mnohoúhelník, počet stran na základně ustavičně zvětšoval, přešla by konečně jeho základna v kruh, a hranol proměnil by se ve válec. Odtud to přijde, že se často považuje válec za hranol, jehož základna má nesčíslný počet stran.

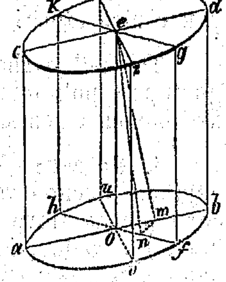
5. Válec jest dokonale určen základnou a délkou i polohou osy; pročež díme: a) *Dva válce jsou shodné*, mají-li shodné podstavy i osy jak co do polohy i co do délky. b) *Dva válce jsou si podobny*, mají-li jejich osy k podstavám polohu jednostejnou a co do délky k sobě se mají, jako poloměry základen.

6. *Řízne-li se válec rovinou k základně rovnoběžnou, vznikne řez se základnou shodný.*

Důkaz. Buďtež v obr. 280., kde jest oo' osou válce, rov. mn || rov. be a $mrnt$ způsobený řez. Každá rovina, vedena osou a některou tvořící přímkou, na př. rovina $aboo'$, protíná jak základnu tak i řez dle přímek mn a be, které jsou spolu rovnoběžné (§ 70. 3) a stejné, následovně $mneb$ rovnoběžník. Takto bychom obdrželi pro každý směr na základně i v obrazci průřezném dvé rovnoběžných a stejných přímek, na př. $pr = od$, $pn = oe$, atd. Položíme-li tedy řez $mrnt$ na bde tak, aby se pokryly body m a b, p a o, sjednotí se dvě a dvě jejich stejné přímky a obrazce se tak pokryjou, t. j. budou shodné.

Dodatky. a) V přímém válci jsou všechny osou vedené řezy shodné pravúhelníky. Proč?

b) V nakloněném válci jsou řezy, vedené jeho osou, nestejnými rovnoběžníky a nejmenší z nich jest ten, který prochází průmětem osy; největší, stoje na nejmenším kolmo, má k základně totéž naklonění jako jeho osa.



Obr. 282.

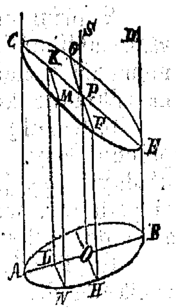
Buď na př. v obr 282. em kolmo na základně, tak že bude om průmět osy oe, a mimo to buď $fghk$ libovolný řez vedený osou *oe*. Spustí-li se z *m* kolmice na *hf*, bude i $en \perp hf$ (§ 69, 11) a $\sphericalangle enm$ bude úhlem sklonu roviny *fghk* k základně. Protože ale mají všechny rovnoběžníky vedené osou *oe* stejné základny, budou jejich ploské obsahy v poměru výšek; když pak uvážíme, že jest v pravoúhelném $\triangle emn$ $en > em$, v $\triangle eon$ ale $eo > en$, bude *em* ze všech těchto výšek nejmenší, a *eo* jakožto výška rovnoběžníka nemajícího postraního trojúhelníka *eon*, t. j. jakožto výška rovnoběžníka *ezvu*, v němžto jest $uv \perp om$, bude největší. — Jest proto rovnoběžník *abcd* nejmenší, a rovnoběžník *zvu* největší.

c) Řízne-li se válec rovnoběžně s osou, vznikne vždycky rovnoběžník, a sice v přímém válci pravoúhelník, v nakloněném kosodélník. Důkaz snadný.

d) Každá osou válce procházející a jeho plášť protínající přímka jest osou rozpůlena. Důkaz snadný.

7. *Řízne-li se šikmý válec rovinou k základně nakloněnou tak, aby osa válce zavírala se základnou válce i s touto rovinou stejné a v jedné rovině ležící úhly, vznikne kruh tak velký, jako jest základna válce.*

Důkaz. Buď v obr. 283. šikmý válec, jehož osou jest OS, proříznut rovinou CE, která stojí na rovině CABD kolmo, tak ale, aby byl v rovině CABD$\sphericalangle$EPO$=\sphericalangle$BOP; CE jest průsečnice řezu CFEG s rovinou CABD, v *O* střed základny a v *P* průsečník osy s CE. Aby se nyní dokázala shodnost řezu CFEG se základnou ANB, veď ještě z libovolného bodu průsečnice CE, na př. z K KL || OP, a polož přímkou KL rovinu KMNL kolmo na rovinu CABD. Rovina tato prosekne rovinu našeho šikmého řezu v KM, základnu válce v LN, a jeho plášť v MN. Že jest ale dle předpokladu i $\sphericalangle$OPC$=\sphericalangle$POA, jest KLOP lichoběžníkem rovnoramenným a tudy PK$=$LO; avšak i KM a LN jsou



Obr. 283.

následkem předpokladu a dle § 70, 9 na rovině CABD kolmo, tedy spolu rovnoběžné, a že jest také KL || MN, (obě jsou s osou rovnoběžné), musí být KMNL rovnoběžníkem, a proto KM$=$NL. Dáme-li nyní bod *P* řezu CEG do středu základny a položíme oba obrazce na sebe tak, aby přímky AO a CP na sebe přilehly a obě roviny dohromady splynuly; musí padnout bod K do L, KM na LN a bod M do N. Takto by se pokrývaly i ostatní souhlasné body a přímky obou obrazců, z čehož plyne, že se oba obrazce úplně pokrývají a tudy spolu shodnými jsou.

D o d a t e k. Takovýto řez šikmého válce, který dává, ač má od základny rozdílný směr, předce této úplně shodnou průsečnici, slove **řez střídný** čili s t ř í d n o l e h l ý (Wechselschnitt), a jak z obrazu viděti, stojí jeho rovina kolmo na nejmenším, osou položeným rovnoběžníku.

Všechny ostatní řezy kruhového válce, o nichžto tuto nebylo jednáno, dávají za průsečnici zcela jiné čáry, nežli přímku a kruh, zejmena ellipsu, o které však bude na jiném místě jednáno.

8. **Kužel** (Kegel, Conus) jest těleso omezené plochou kuželovou a jednou rovinou. Plocha kuželová slove tu opět **plášťěm** nebo **oblinou kužele**, a rovina, jak dalece kužel omezuje, slove jeho **základnou**. Bod, jímžto všechny tvořící přímky pláště (strany kužele) procházejí, slove **vrchol** kužele, a kolmá vzdálenost vrcholu od základny nazývá se **výškou** kužele.

V užším smyslu a zvláště v nižším měřictví rozumí se slovem kužel obyčejně jenom **kužel kruhový** (Kreiskegel), jehož základnou jest kruh. Přímka spojující potom střed základny s vrcholem, slove **osou** kužele, a dle toho, stojí-li tato na základně kolmo nebo šikmo, slove též kužel **přímý** č. **kolmý** a nebo **nakloněný** č. **šikmý**. — Rovná-li se strana kužele průměru základny, slove kužel **rovnostraný**.

Pozn. Jako se může považovati válec za hranol, jehož základna má nesčíslný počet stran, tak i kužel lze považovati spůsobem tímto za jehlanec.

V přímém kuželi jsou všechny strany sobě rovny, v šikmém však mají délku rozdílnou a nebo jsou jen po dvou sobě rovny; nejmenší a největší strana leží s osou v jedné rovině, která stojí na základně kolmo a prochází průmětem osy (§ 69, 14).

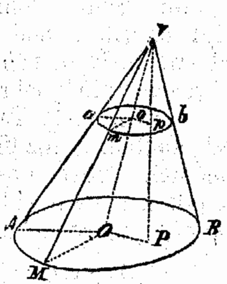
9. Kužel jest dle předešlého dokonale určen základnou a délkou i polohou osy. Proto jsou a) dva kužele shodné, mají-li shodné základny i osy jak co do polohy i co do délky; b) dva kužele jsou si podobny, mají-li jejich osy k podstavám polohu jednostejnou a co do délky k sobě se mají, jako poloměry jejich základen.

10. Proříznut může býti kužel spůsobem rozličným, při čemž vzniknou dle polohy sečné roviny také i rozličné řezy, které se vůbec **kuželosečky** jmenují (Kegelschnittslinien), a sice:

a) Prochází-li sečná rovina vrcholem a mimo to jednou stranou, objeví se vždycky trojúhelník co řez (dvě strany pláště a jedna tětiva základny); kdyby však takovýto řez procházel osou (řez osní, Achsenschnitt), byl by třetí stranou zmíněného trojúhelníka průměr základny.

V přímém kuželi jsou všechny osní řezy trojúhelníky rovnoramené, vespolek shodné a při tom kolmo na základnu; v **nakloněném** kuželi jest jenom jeden z nich rovnoramený a opět jen jeden na základně kolmo; které jsou to? — Nejmenší takovýto osní trojúhelník obsahuje největší a nejmenší strany a stojí na základně kolmo. (Důkaz jako v § 78, 6, dodat. b).

b) Je li sečná rovina k základně rovnoběžná, *vznikne kruh, jehož střed leží v ose, a ploský jeho obsah má se k obsahu základny jako druhé mocniny jejich vzdáleností od vrcholu.*



Obr. 284.

Důkaz. a) Budiž v obr. 284. k základně rovnoběžný řez amb, který osu protíná v bodu

o, a m libovolný bod jeho obvodu. Polož tvořící přímkou Vm a osou kužele rovinu; tím vzniknou průsečnice $om \parallel$ OM a bude v $\triangle$ VOM om : OM = Vo : VO. — Podobným spůsobem jest ale i v $\triangle$ VAO ao : AO = Vo : VO, pročež také om : OM = ao : AO; že ale jest OM = OA, musí být v poslední srovnalosti také $om = on$. Takto se dokáže i dále, že jsou všechny body řezu amb od bodu o stejně vzdáleny, t. j. řez ten jest kruh.

β) Spusť VP$\perp$rov. AMB, a polož touto výškou a osou rovinu; i bude potom $Vp \perp$ rov. amb, a při tom průsečnice $op \parallel$ OP, pročež Vp : VP = Vo : VO = op : OP, a nebo jestliže za výšky a poloměry dosadíme v, V, r, R, krátce $v : V = r : R$ . . . 1).

Že ale jsou obsahy kruhů v čtvercovém poměru jich poloměrů, bude amb : AMB = $r^2 : R^2$, následovně ze srovnalosti 1) také

amb : ABM = $v^2 : V^2$.

D o d a t e k. Kdykoliv se kužel seřízne rovnoběžně k základně, slove spodní pozůstalý díl **kužel komolý** (Kegelstutz, abgestutzter Kegel) a odříznutý kužel jest danému podoben.

c) Každý jiný roviný řez kužele přímého, který neprochází ani stranou aniž jest k základně rovnoběžný, dává od kruhu i od přímky zcela rozdílné čáry za průsečnici s kuželem, a sice α) buď **elipsu** (Ellipse), když řečená rovina všechny tvořící přímky protíná nejsouc k základně rovnoběžná; β) buď **parabolu** (Parabel), když jest s jednou tvořící přímkou rovnoběžná; nebo konečně γ) **hyperbolu** (Hyperbel), když jest s dvěma tvořícíma přímkama rovnoběžná, o kterýchžto čarách na svém místě jednáno bude.

b) K o u l e.

§ 79.

1. **Koule** (Kugel, Sphäre) jest těleso omezené jenom jednou křivou plochou, jejíž veškeré plochy mají od jednoho, uvnitř ležícího pevného bodu stejnou vzdálenosť. — Pevný tento bod slove **středem koule** a vzdálenosť jeho od povrchu koule slove její p o l o m ě r. P r ů m ě r e m k o u l e slove přímka, která spojujíc dva body povrchu koule jejím středem prochází.

Jako poloměry jsou i všechny průměry koule vespolek sobě rovny.

Koule vznikne, když se polokruh kolem svého průměru tak dlouho točí, až zase do svého původního položení přijde; střední bod tvořícího půlkruhu jest při tom středem koule. Z této příčiny čítáme koulovou plochu, t. j. povrch koule mezi p l o c h y t o č e n é a průměr tvořícího polokruhu slove potom osou koule.

Z tohoto pojmu o kouli plynou věty:

a) *Koule má jenom jeden střed* (důkaz jako o kruhu).

b) Bod, jehož vzdálenosť od středu koule jest menší nežli poloměr, leží uvnitř koule; bod však, jehož vzdálenost od středu koule její poloměr přesahuje, leží mimo kouli.

c) *Přímka nemůže povrch koule leč jenom nanejvýš ve dvou bodech proseknouti.* — Kdyby měla míti přímka totiž více bodů s povrchem kulovým společně, na př. tři, musely by míti všechny tyto body, jež na jedné přímce leží, od čtvrtého bodu (středu koule) stejnou vzdálenost, což jest nemožné.

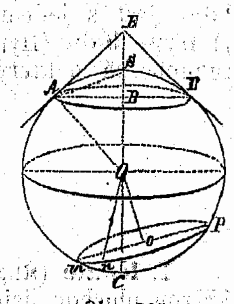
Každá přímka, která má s koulí dvé bodů společně, slove **sečnou** koule, a její část mezi oběma průsečníky, ležíc uvnitř koule, slove **tětivou** koule.

Pozn. I zde jsou tětivy tím menší, čím více se od středu koule vzdalují. Průměr jest pak největší tětivou. Proč?

Splynou-li oba průsečníky sečny v jeden bod dohromady, přejde sečna v **tečnu**, která nemá mimo tohoto tečného bodu s koulí nic více společně. Vzdálenosti totiž ostatních jejich bodů od středu koule jsou větší nežli poloměr koule.

Dodatek. Každá tečna na tvořícím kruhu zůstane při otáčení se tohoto i tečnou koule a vytvoří při otáčení se kolem osy plášť kužele (viz obr. 285.). Zároveň z toho vysvitá, a dá se snadno dokázati, že jsou všechny z nějakého bodu na kouli vedené tečny sobě rovny.

2. *Řez koule způsobený rovinou jest vždycky kruh a kolmice se středu koule na plochu řezu spuštěná jde jeho středem.*



Obr. 285.

Důkaz. Jde-li sekoucí rovina středem koule, vznikne na povrchu koule roviná křivka, jejíž veškeré body mají od středu koule stejnou vzdálenost, t. kruh. Neprochází-li sekoucí rovina středem koule, vznikne opět nějaká rovinná křivka, o níž ale nevíme více, leč že její veškeré body na povrchu koule leží. Budiž na př. v obr. 285. $mnpq$ takovýto řez, a Oo se středu koule na něj spuštěná kolmice; spoj bod o s několika body obvodu, na př. s m, n, p, a veď poloměry koule Om, On, Op . . ., čímž vzniknou pravoúhelné shodné trojúhelníky Omo, Ono, ..., i budou tedy $om = on = op$ . . . . t. j. bod o má ode všech bodů na obvodu řezu stejné vzdálenosti. Řez tento jest tedy kruh, jehož střed se nachází v o.

Výsledky. a) Kolmice vztyčená ve středním bodu kulového řezu prochází středem koule. (Důkaz jako u kruhu.)

b) Středy rovnoběžných řezů kulových nacházejí se na společném průměru koule, jehož krajní body slovou **póly** těchto **rovnoběžných kruhů** (Parallelkreise).*)

*) Takovouto soustavu rovnoběžných kruhů představuje nám zemský rovnoběžník se svými rovnoběžnými kruhy, k nimžto náleží pól severní a jižní.

3. *Průměry kulových řezů jsou tím větší, čím více se blíží středu koule, a řez vedený středem koule jest ze všech největší.* Důkaz jako o tětivách kruhu (§ 25. 5 a 6).

Pozn. Poznačíme-li poloměr koule r, poloměr řezu $bm = on = r'$ (obr. 285.), a jeho vzdálenost od středu koule $Oo = d$, bude $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$. Výraz tento dává také tím větší r', čím menší jest d, a naopak, roste li d, ubývá r', až konečně pro $d = r$ bude $r' = o$, pro $d = o$ bude $r' = r$.

Řez koule vedený jejím středem nazývá se z této příčiny **kruhem největším** nebo **hlavním** (der größte oder Normalkreis), kdežto ostatní řezy slovou **kruhy menšími** nebo **tětivovými** (kleinere oder Sehnenkreise).

Největší kruh jest dokonale určen dvěma body na povrchu koule, které však nesmí býti krajními body kulového průměru; potřebujeme totiž těmato dvěma body a středem koule položiti rovinu a obdržíme za průsečnici největší kruh. Kdyby byly ale dané dva body krajními body průměru, ležely by se středem koule v jedné přímce, a tou není položení roviny dokonale určeno (§ 68, 3, a).

Dodatky. a) Konce každého průměru koule nazývají se vůbec **body protilehlými** (Gegenpunkte).

b) Každému pravidelnému mnohostěnu může být koule vepsána i obepsána (§ 76, 2).

4. Rovná-li se vzdálenost kulového řezu od středu koule jejímu poloměru, bude dle předešlé poznámky poloměr řezu $= 0$, a kruh sám přejde v bod. Takováto s povrchem koule jenom jeden bod společně mající rovina slove **rovinou tečnou** (Berührungsebene), a jak z předešlých vět vysvitá, stojí poloměr koule, vedený k tečnému bodu, na tečné rovině kolmo.

Naopak: Kolmice vztyčená v tečném bodu na tečnou rovinu prochází středem koule a slove normala (Normale).

5. Hlavním kruhem dělí se koule na dvě polovice, jimž **polokoule** díme (Halbkugel, Hemisphaere); každým jiným kruhem dělí se koule na dvě nestejné částky, z nichž každá **kulovým úsekem** č. **skrojkem** slove (Kugelabschnitt, Kugelsegment). Kulový úsek jest tedy těleso omezené částkou kulového povrchu, který slove **vrchlík** (Calote oder Kugelmütze) a plochou kruhovou, která slove základnou úseku. Kolmice, v středním bodu základny vztyčená a k vrchlíku dosahující slove výškou kulového úseku.

Část koule obsažená mezi dvěma rovnoběžnýma kruhy slove **kulový pás** (Kugelzone), a odlehlost řečených kruhů slove výškou pásu.

Jak se dají vytvořiti točením kulový úsek a jak kulový pás?

Točí-li se kruhový výsek AOD (obr. 285.) kolem jednoho svých poloměrů, vznikne těleso, které slove **kulový výsek** (Kugelausschnitt), sestávající z kulového úseku a z kužele, jehož vrchol leží ve středu koule a jehož základnou jest základna úseku.

6. *Dva hlavní kruhy nemohou býti rovnoběžné, musí se ale ve dvou protilehlých bodech proseknouti a vzájemně rozpůliti.*

Důkaz. Průsečnice jejich rovin musí jíti nutně středem koule; bude to tedy přímka spojující dva body povrchu koule a procházející středem koule — průměr, jímžto se každý největší kruh, tedy i oba dané rozpůlí.

§ 80.

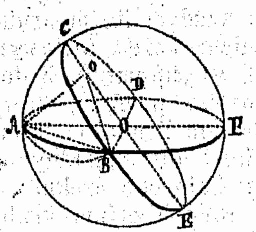
1. Jako byly předmětem zvláštního pozorování dříve obrazce roviné, tak i na povrchu koule rejsované obrazce vyznamenávají se zvláštními vlastnostmi, jež tuto blíže objasníme.

Na povrchu koule rejsované obrazce slovou vůbec **obrazce sférické** (sphärische Figuren), a kdykoliv se mluví o **čarách** na povrchu koule, rozumí se vždycky jen celé hlavní kruhy nebo jich oblouky, ač není-li opak toho zvláště podotknut. Zde se obmezíme toliko na sférické obrazce, jichžto strany jsou oblouky hlavních kruhů.

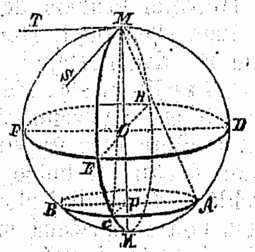
Vzdálenost dvou bodů na povrchu koule čili krátce řečeno **sférická vzdálenost** dvou bodů (sphärische Entfernung) určuje se obloukem hlavního kruhu těmato body vedeného, který jest mezi těmato body právě obsažen. A poněvadž se velikost oblouku nejčastěji vyjadřuje příslušným středovým úhlem, udává se i sférická vzdálenost dvou bodů obyčejně úhlem, jejž spolu zavírají poloměry koule vedené k daným bodům na povrchu koule.

2. *Sférická vzdálenost dvou bodů jest menší nežli který koliv, těmato body omezený oblouk menšího kruhu.*

Důkaz. Budiž *AmB* (obr. 286.) sfér. vzdálenost bodů A a B, a oblouk menšího, těmato body procházejícího kruhu *AnB*, jehož střed leží na př. v *o*. Spojíme-li bod A a B se středem koule (*O*) i s bodem *o* a vedeme ještě společnou tětivu AB, obdržíme dva rovnoramené trojúhelníky *ABO* a *ABo* na společné základně AB.



Obr. 286.



Obr. 287.

Že ale průměr menšího kruhu jen tětivou koule jest a tudy menší nežli její průměr, jest také $Ao < AO$, pročež $\sphericalangle AoB > \sphericalangle AOB$, a následovně i arc. A$n$B > arc. A$m$B, t. j. oblouk hlavního kruhu jest menší nežli oblouk kruhu tětivového.

3. *Stojí-li průměr koule na rovině nějakého hlavního nebo i menšího kruhu kolmo, jsou vzdálenosti každého koncového bodu průměru ode všech bodů hlavního nebo menšího kruhu sobě rovny.*

Důkaz. Buď MN kolmo na rovině hlavního kruhu DEF (obr. 287.)

i na rovině menšího kruhu ACB. Určíme-li sfér. vzdálenost na př. bodu M od dvou libovolných bodů A a C menšího kruhu položením hlavních kruhů MAN a MCN, bude $\sphericalangle$MPA $=$ $\sphericalangle$MPC $=$ R (buď na základě § 69, 1, nebo na základě shodnosti trojúhelníků MAP a MCP), a tudy k nim příslušící oblouky arc. MDA $=$ arc. MEC. — Z podobných příčin plyne rovnost úhlů DOM a EOM, a následovně i oblouků MD a ME.

Dodatek. Průměr koule stojící na rovině nějakého kruhu kolmo, slove jeho o s o u, a koncové body osy slovou p ó l y daného kruhu (viz § 79, 2, b). A poněvadž jest, jak obrazec ukazuje, arc. MEC + arc. CN $=$ 180°, můžeme tvrditi, že se vzdálenosti obou, k danému kruhu náležejících pólů doplňují na 180°; vzdálenosti pak polů náležejících ke kruhu hlavnímu jsou sobě rovny (arc. MD $=$ arc. DN $=$ 90°), tak že máme větu: *Oba póly největšího kruhu mají ode všech bodů jeho obvodu vzdálenost 90°.*

Naopak: „Rovnají-li se sfér. vzdálenosti nějakého bodu ode dvou jiných bodů, které nejsou krajními body téhož průměru, 90°; bude daný bod pólem hlavního kruhu, jenž řečenýma dvěma body určen jest.“

4. *Každý kruh oběma póly nějakého hlavního kruhu vedený dělí se póly a k nim přináležejícím hlavním kruhem ve čtyry čtvrti.*

Důkaz. Buďte M a N (obr. 287.) póly hlavního kruhu DEF, tak že jest MN $\perp$ rov. DEF, a MDNF hlavní kruh oběma póly vedený. I jsou potom DF a MN průměry tohoto kruhu, a poněvadž jest dle předpokladu MN $\perp$ DF, musí být arc. MD $=$ arc. DN $=$ arc. NF $=$ arc. FN.

5. *Průsečnice dvou kulových ploch jest vždyckg kruh, na jehož rovině stojí obojstředná daných koulí kolmo.*

Důkaz. Položíme-li rozličnými body průsečnice, která se nachází jak na povrchu jedné tak i druhé koule, a obojstřednou obou koulí roviny a spustíme v nich z řečených bodů na obojstřednou kolmice; snadno bude dokázati, že všechny tyto kolmice jediným bodem obojstředny procházejí a vespolek sobě rovny jsou. (Vyobrazení a důkaz snadný.)

6. Úhel, jejž spolu dva hlavní kruhy zavírají, jest vlastně úhlem sklonu jejich rovin a slove **úhlem sférickým.** Oba oblouky těchto hlavních kruhů slovou r a m e n y a jejich průsečník v r c h o l e m sférického úhlu.

Sférický úhel může se vyjádřiti dvojím spůsobem, a sice:

a) *úhlem, jejž spolu zavírají tečny obou ramen ve vrcholu;* v obr. 287. jest na př. sférický $\sphericalangle$EMF $=$ $\sphericalangle$SMT, poněvadž jsou na společné průsečnici obou rovin MEN a MFN, t. j. na MN obě tečny kolmo, čímž udávají jejich úhel sklonu (§ 70, 7, pozn. 2).

b) Za druhé může se sfér. úhel změřiti mezi rameny daného úhlu obsaženým *obloukem největšího kruhu,* jemuž jest vrchol úhlu právě pólem, v obr. 287. na př. obloukem EF. Položíme-li totiž hlavní kruh DEF kolmo na společnou průsečnici MN a narejsujeme v jeho rovině FO ⊥ OM, EO ⊥ OM; bude opět ∢EOF úhlem sklonu rovin *MEN* a MFN, jímžto se udává velikost sfér. úhlu EMF. A poněvadž má ∢EOF za míru oblouk EF, jest arc. EF i mírou sfér. úhlu EMF.

Dle § 70, 10) rovná se sfér. úhel také ještě úhlu, jejž spolu zavírají osy obou ramen daného úhlu.

D o d a t k y. a) Sférický úhel může míti dle toho všechny hodnoty od 0^0 až do 4R.

b) Prochází-li jedno rameno sfér. úhlu pólem ramena druhého, jest sfér. úhel pravým, poněvadž v tomto případu stojí roviny obou ramen na sobě kolmo.

c) Stojí-li dva hlavní kruhy na třetím kolmo, jest průsečník prvních dvou pólem kruhu třetího. (Proč asi?)

d) Prodlouží-li se ramena sfér. úhlu přes vrchol, jest takto vzniklý úhel danému úhlu úhlem v r c h o l o v ý m, a jak z pojmu o velikosti sfér. úhlů vysvítá, jsou i zde vrcholové úhly sobě rovny. Prodloužením ale jenom jednoho ramena přes vrchol vznikly by sfér. úhly vedlejší, které dávají i zde dohromady 180^0, na př. v obr. 287. ∢FME + ∢EMD = arc. FED = 180^0.

7. Část kulové plochy, která jest omezena dvěma hlavními polokruhy, na př. MFNE (obr. 287), slove kulový **dvouúhelník** (Zweieck). Obrazec tento má tedy dvě stejné strany (polokruhy) a dva stejné úhly sférické. (Proč jsou si úhly asi rovny?)

Sférický dvouúhelník jest dokonale určen, jak mile známe jeden z jeho úhlů.

P o z n. Čtenář odůvodní věty: a) K stejným sfér. úhlům náležejí na téže kouli i stejné sfér. dvouúhelníky. b) Dva sfér. dvouúhelníky mají se k sobě jako jejich sfér. úhly. c) Ploský obsah sfér. dvouúhelníka má se k povrchu koule, jako sfér. úhel ke 4R.

8. Část kulové plochy omezená třemi oblouky hlavních kruhů slove **sférický trojúhelník**, na př. v obr. 286. ABC. Kruhové oblouky AB, BC a CA slovou stranami sfér. trojúhelníka, který má také tři úhly. — Dostatečně prodlouženy protínají se tyto tři hlavní kruhy v 6 bodech (A, B, C, D, E, F) a omezují tak na celé kouli 8 sférických trojúhelníků (které jsou to?), z nichžto jsou si dva a dva p r o t i l e h l ý m i, t. j. rohy jednoho trojúhelníka jsou protilehlými rohy trojúhelníka druhého, na př. △ ABC a DEF, △ AEB a DCF, atd.

Z těch pak, které mají jednu stranu společnou, slovou trojúhelníky v e d l e j š í m i, na př. v obr. 286 △ ABC a ABE. Konečně slovou ty, které mají společný vrchol, trojúhelníky v r c h o l o v é (na př. △ ABC a BEF).

Ku každému sfér. trojúhelníku náleží tedy jeden protilehlý, tři vedlejší a tři vrcholové trojúhelníky.

Omezí-li se způsobem u trojúhelníka sfér. vysvětleným část kulového povrchu více než třemi oblouky hlavních kruhů, vzniknou čtyrúhelníky a vůbec sfér. mnohoúhelníky.

Sférické trojúhelníky mohou býti rovněž jako trojúhelníky roviné rovnostrané, rovnoramené, nerovnostrané, pravoúhelné, tupo- a ostroúhelné. Stává ale i takových sfér. trojúhelníků, jichžto jednotlivé strany jsou buď půlkruhy a nebo i ještě větší (na př. △ CFD, jehož strany jsou CD, DF, CAEF) a jichžto jednotlivé úhly taktéž mohou býti rovny 180° a nebo 2R i přesahovati; o těch jest však zbytečno jednati, poněvadž se dají snadno převesti na trojúhelníky jiné, v nichžto jest každá strana i každý úhel menší nežli 180°, a o těch bude v následujícím také jenom řeč.

Ku každému sférick. trojúhelníku, který jest menší nežli povrch polokoule, a jehož strana 180° přesahuje (na př. trojúhelník ACEB, obr. 286, jehož strany jsou AB, BE, ACFE), náleží totiž jiný sfér. trojúhelník, který má s prvním dvě strany společně a jehož třetí strana doplňuje třetí stranu daného trojúhelníka na 360°, zde na př. △ ABE, jehož strany jsou AB, BE a AJE, tak že částkami jednoho trojúhelníka určeny jsou již i částky trojúhelníka druhého.

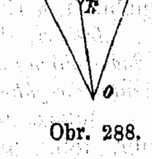
9. *Je-li ve sfér. trojúhelníku jedna strana menší nebo větší nežli 180°, jest i úhel naproti ní ležící menší nebo větší nežli 180°.*

Důkaz. a) Budiž v obr. 286. v △ ABC strana AB < 180°. Prodloužíme-li strany AB a AC až by se v F prosekly, bude arc. ABF i arc. ACF = 180° (dle § 79. 6). Že ale jest sfér. ∢ ACB + BCF = 180° (§ 80, 6, d), musí být o sobě ∢ ACB < 180°. Pozorujeme-li dále △ ACD, jehož strany jsou AC, CD, ABFD > 180°; bude opět, když oblouk AC na polokruh doplníme, ∢ ACD = ∢ ACB + ∢ BCF + FCD = 180° + ∢ FCD, tudíž o sobě ∢ ACD > 180°.

b) Je-li naopak ∢ ACD < 180°, musí ležeti prodloužení strany AC mimo trojúhelník ABC, t. j. nemůže padnouti mezi AC a BC, a musí proto stranu AB proseknouti teprvé v jejím prodloužení, a sice v *F*. Že ale jest arc. ABF = arc. AB + arc. BF = 180°, musí být arc. AB < 180°, atd.

§ 81.

1. Spojíme-li rohy sférického trojúhelníka se středem koule, určíme tak tři roviny, v nichžto se strany sfér. trojúhelníka objeví co částky hlavních kruhů. Roviny tyto omezí dohromady tělesný trojúhelník, jehož vrchol nachází se ve středu koule a jehož hranami jsou dotyčné tři poloměry koule (obr. 288.). Vzhledem pak k tomu, co se o měření úhlů vůbec (v planimetrii) a o sfér. úhlech v odstavci § 80. 6, b) zvláště povědělo, vidíme zde, že strany sfér. trojúhelníka vyjádřují velikosť úhlů hranových, a že úhly sférické vyjádřeny býti mohou plošnými úhly tohoto tělesného rohu. — Následkem této vzájemnosti mezi stranami a úhly sférického trojúhel-



Obr. 288.

níka s jedné a mezi částkami trojúhelníka tělesného se strany druhé musí věty dokázané o trojúhelníku tělesném (§ 72) podržeti svou platnost i u trojúhelníka sférického, jak mile tam dosadíme za úhly hranové **strany**, a za úhly plošné **úhly** sfér. trojúhelníka.

Máme tedy o sférickém trojúhelníku věty:

a) Součet dvou stran jest větší, rozdíl ale menší nežli strana třetí (§ 72, 5).

b) Součet všech tří stran jest v každém sfér. trojúhelníku menší nežli 360° (§ 72, 6) t. j., obvod sférického trojúhelníka jest menší nežli obvod hlavního kruhu.

c) Součet všech tří úhlů jest ve sfér. trojúhelníku větší nežli 2R, menší ale nežli 6R (§ 72, 7, dod.).

d) Součet dvou úhlů jest ve sfér. trojúhelníku menší nežli o 2R zvětšený třetí úhel, rozdíl ale dvou úhlů jest menší nežli doplněk třetího úhlu na 2R (§ 72, 8).

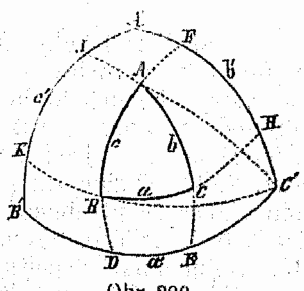
e) Ve sfér. trojúhelníku leží naproti stejným stranám stejné úhly a naopak; naproti větší straně leží také větší úhel a naopak (§ 72, 9). Důkaz této věty lze ostatně provésti toutéž cestou jako v planimetrii.

Dodatky. α) V rovnoramenném sfér. trojúhelníku jsou dle předešlého úhly na základné sobě rovny. A spustí-li se s některého vrcholu sfér. trojúhelníka na protilehlou stranu kolmice, t. j. hlavní kruh, který by stál na této straně kolmo, slove nadzmíněná kolmice výškou a podotknutá strana základnou sfér. trojúhelníka.

β) Jsou-li dvě strany sfér. trojúhelníka čtverníky, t. j. rovny 90°, jest třetí strana nejen na prvních dvou kolmo, nýbrž zároveň i mírou sférick. úhlu, který jest řečenými čtverníky uzavřen.

2. Považujeme-li rohy nějakého sfér. trojúhelníka za póly a určíme k nim přináležející hlavní kruhy; obdržíme proseknutím se těchto hlavních kruhů nový sfér. trojúhelník, který se nazývá **trojúhelníkem polárným** trojúhelníka daného (Polardreieck). Je-li na př. v obr. 289. ABC daný sfér. trojúhelník a uděláme-li AD = AE = BF = BH = CJ = CK = 90°; bude, jestliže položíme body F a H, D a E, J a K hlavní kruhy, trojúhelník A′B′C′ polárným trojúhelníka daného. Tento jest však zase, jak ihned ukážeme, naopak polárným trojúhelníkem trojúhelníku A′B′C′, tak že bude věta:

Je-li ze dvou sférických trojúhelníků jeden polárným druhého, jest i tento polárným trojúhelníkem prvého.



Obr 289.

Důkaz. Je-li A′B′C′ polárným trojúhelníkem trojúhelníku ABC (obr. 289.), jest bod A pólem kruhu B′C′, jekož všeckny body mají od A stejnou vzdálenosť $= 90^0$, tedy i roh C'. Že ale jest dále bod B pólem strany A'C', mají opět všechny její body od B vzdálenosť 90^0, tedy i C', t. j. $BC' = AC' = 90^0$. Roh C' má tedy od A i od B vzdálenosť 90^0 a jest proto pólem strany AB. — Z podobných příčin jest roh A' pólem strany BC, a roh B' pólem strany AC. Poněvadž jsou tedy rohy trojúhelníka A'B'C' póly stran trojúhelníka ABC, jest tento polárným trojúhelníkem onoho.

3. *V trojúhelnících polárných doplňují se strany jednoho trojúhelníka s úhly trojúhelníka druhého na 2R.*

Důkaz. Poznačíme-li totiž strany trojúhelníka ABC (obr. 289) a, b, c, souhlasné pak strany trojúhelníka polárného písmenami a', b', c', musí být

$$\left.\begin{aligned} a + A' &= 2R \\ b + B' &= 2R \\ c + C' &= 2R \end{aligned}\right\} \text{ a } \begin{aligned} a' + A &= 2R \\ b' + B &= 2R \\ c' + C &= 2R. \end{aligned}$$

Prodluž strany trojúhelníka ABC, až by proseklý strany trojúhelníka polárného; i budou všechny oblouky AD, AE, BF, . . jakož i A'K, A'H, B'E, B'J, . . . rovny 90^0. Následovně jest, když za úhel dosadíme jeho míru, t. j. příslušný oblouk největšího kruhu (§ 80, 6, b), $a + A' = BC + HK$, nebo když uvážíme, že $BC = BH - HC$ a $KH = KC + HC$, $a + A' = BH + KC = 2R$.

Podobně jest $b + B' = CA + EJ = CJ - JA + EA + JA = CJ + EA = 2R$, atd.

Pro druhý případ máme $a' + A = BC' + DE = B'E + EC' + DC' - EC' = B'E + DC' = 2R$, atd.

Pozn. 1. Věty o polárných trojúhelnících souhlasí s větami v § 72, 4, dod. o polárném č. výplňkovém rohu, z nichžto by se také daly vyvoditi na základně odstavce § 81, 1.

2. Věty v odst. § 81, 1. *c* a *d* o stranách a úhlech sférického trojúhelníka dají se pomocí polárného trojúhelníka také přímo dokázati, a sice: poněvadž jest $a' + A = 2R$, $b' + B = 2R$, $c' + C = 2R$, bude

$$\begin{array}{rl} a' + b' + c' + A + B + C = 6R; & \text{že ale jest} \\ a' + b' + c' \quad < 4R, & \text{obdržíme odečtením} \\ \hline A + B + C \quad > 2R. & \end{array}$$

Z rovnice $a' + b' + c' + A + B + C = 6R$ však také ještě plyne, že $A + B + C < 6R$ atd. Jak se dá dokázati pomocí polárného trojúhelníka věta § 81. 1, d?

Dodatky. a) Poněvadž ve sfér. trojúhelníku není součet úhlů veličinou stálou, nemůže se z dvou úhlů velikosť třetího určiti; rovněž bude nyní patrno, že může míti sfér. trojúhelník i dva nebo tři úhly pravé, ano 2 nebo 3 tupé úhly.

b) Z dosavádních vlastností o stranách a úhlech sfér. trojúhelníka plyne: α) že, je-li jedna strana větší nežli 2R, každá z ostatních dvou menší býti musí nežli 2R (proč?); β) poněvadž může být ve sfér. trojúhelníku jenom jedna strana větší nežli 180^0, může v něm být též jenom jeden úhel, který by 2R přesahoval (§ 80, 9).

c) Má-li sfér. trojúhelník dvě stejné strany, má jeho polárný trojúhelník dva stejné úhly a naopak; má-li však sfér. trojúhelník

3 stejné úhly, jest jeho polárný trojúhelník rovnostraný a naopak. Důkaz podej čtenář.

4. *Dva sfér. trojúhelníky slovou shodnými*, mohou-li na sebe tak položeny býti, aby se ve všech svých částích úplně pokrývaly. Takovéto trojúhelníky mají tedy všechny tři strany i všechny úhly v souhlasném pořádku za sebou na vzájem rovny. Kdyby ale stejné částky v protivném pořádku za sebou následovaly, byly by trojúhelníky toliko souměrné a stejné a nemohly by se pokrývati, jako to na př. platí o sfér. trojúhelnících vrcholových.

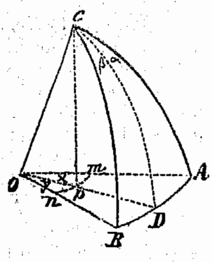
Pozn. U sférického dvojúhelníka odpadává pojem rozdílu mezi jeho shodností a souměrností, protože jsou strany sférických dvojúhelníků vždycky sobě rovny; sfér. dvojúhelníky jsou vůbec shodny, mají-li stejné úhly.

Známky shodnosti sfér. trojúhelníků plynou přímo ze známek shodnosti trojúhelníků tělesných (§ 73, 1—3) a jsou:

a) Dva sfér. trojúhelníky jsou shodnými, mají-li dvě strany a úhly jimi sevřené na vzájem stejné; b) mají-li jednu stranu a přilehající k ní úhly v témž pořádku za sebou stejné; c) mají-li všechny 3 strany stejné; d) když mají všechny tři úhly stejné.

Důkazy provedou se pokrýváním jako v plochoměrství a zůstavují se čtenáři.

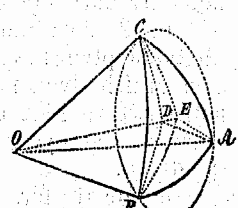
5. Jako v plochoměrství platí i zde věta: *V rovnoramenném sfér. trojúhelníku půlí kolmice s vrcholu na základnu spuštěná úhel při vrcholu i základnu.*



Obr. 290.

Důkaz. Je-li v obr. 290. arc. AC = arc. BC, a při tom arc. CD $\perp$ arc. AB; polož stranami daného trojúhelníka a středem koule O roviny. Rovina položená obloukem CD a středem koule musí být potom na rovině ABO kolmo (dle předpokladu). Spustí-li se ještě v rovině CDO s vrcholu C kolmice na přímku DO, a z její paty p kolmice na přímky AO a BO; budou ležeti všechny tři přímky pm, pn, pO v jedné rovině, a $\triangle pmO \cong \triangle pnO$ (proč?), následovně $\sphericalangle x = \sphericalangle y$. Že ale úhly tyto jsou mírou oblouků AD a BD, jest také arc. AD = arc. DB, t. j. základna jest kolmicí CD rozpůlena. — Nyní již plyne ze shodnosti trojúhelníků ADC a DBC, že $\sphericalangle \alpha = \beta$, t. j. kolmicí CD jest i úhel při vrcholu rozpůlen.

6. *Každý sfér. trojúhelník dá se rozděliti ve tři rovnoramenné.*



Obr. 291.

Důkaz. Buď v obr. 291. ABC daný sfér. trojúhelník, a v O střed koule. Spusť z O na rovinu kulového řezu ABC kolmici OD, která dostatečně jsouc prodloužena, prosekne sfér. trojúhelník v bodu E, a padne do středu kruhového řezu (§ 79, 2), tak že bude

DA = DB = DC. I jsou tedy $\triangle DOC \cong \triangle DOA \cong \triangle DOB$ (proč?), a následovně $\sphericalangle DOA = \sphericalangle DOB = \sphericalangle DOC$, pročež i k těmto úhlům přináležející oblouky hlavních kruhů, t. j. arc. EA = arc. EB = arc. EC, t. j. sfér. trojúhelníky EAB, EAC, EBC jsou rovnoramené.

Pozn. Poněvadž má dle této věty bod E ode všech rohů sfér. trojúhelníka stejné vzdálenosti, vidíme i zde, že může být každému sfér. trojúhelníku obepsán kruh. Podobně našel by se i střed kruhu, který jest do sfér. trojúhelníka vepsán, čehož provedení zůstaveno čtenáři.

Dodatek o kouli a tělesích pravidelných.

§ 82.

1. Dle věty § 76. 2) jest střed pravidelného tělesa zároveň také středem koule, a) která se dotýká všech stěn tělesa (koule tělesu vepsaná), b) která všemi rohy tělesa prochází (koule tělesu opsaná), a konečně c) která se všech hran tělesa dotýká.

Poloměry těchto koulí dají se u všech pravid. těles počtem snadno určiti, jak mile jest dána hrana a pravid. tělesa, a sice:

Z § 76. 3) jest známo, že konce hran, vybíhajících z téhož rohu pravideln. mnohostěnu, leží na společné rovině omezujíce prav. mnohoúhelník. Položíme-li tedy takovouto rovinu, sřízne se z tělesa rovnostraný jehlanec, jehož postraní hranou jest hrana pravid. tělesa (a) a výškou $SO = v$ (obr. 275.); poznačíme-li ještě poloměr kruhu, opsaného kolem základny ABCD . . ., t. j. $OA = u$, bude snadno, nejen v, nýbrž i poloměry dříve již zmíněných koulí určiti. Budiž na př. poloměr pravid. tělesu opsané koule R, poloměr koule vepsané r, a poloměr koule, která by se dotýkala hran tělesa, ϱ.

Z obr. 275. plyne přímo, $a^2 = v^2 + u^2$ . . . 1)

Položíme-li dále jednou hranou (na př. SA) největší kruh opsané (nebo i vepsané) koule, půjde jeho průměr středem kruhu, opsaného kolem základny ABCD . . . (viz obr. 285.), t. j. v obr. 285 bodem B, a bude mimo to státi na této základně kolmo. Máme tedy $\overline{AS}^2 = SB \cdot SC$, nebo $a^2 = v \cdot 2R$, a z toho

$$R = \frac{a^2}{2v} \quad . . . . 2)$$

Určíme-li ještě z rovnice (1) $v = \sqrt{a^2 - u^2}$, a dosadíme do rovnice (2), bude $R = \dfrac{a}{2\sqrt{a^2 - u^2}}$ . . . . . 3)

Poznačíme-li ještě v obr. 274. poloměr jedné stěně opsaného kruhu $MA = P$, poloměr vepsaného kruhu $MS = p$, a uvážíme, že značí v pravoúhelném trojúhelníku MAO $OA = R$, $OM = r$, a $OS = \varrho$; obdržíme nové tři rovnice, a sice

v $\triangle MAO$: $r^2 = R^2 - P^2$ . . . . A)

v $\triangle MAS$: $P^2 = p^2 + \frac{1}{4}a^2$ . . . B)

v $\triangle MOS$: $\varrho^2 = r^2 + p^2$ . . . . C).

Rovnice tyto i předešlé podrží svou platnost pro všech pět pravidelných těles, obdrží ale podle druhu tělesa zvláštní tvary a sice:

a) V čtyrstěnu, kde jest základna seříznutého jehlance prav. tojúhelník, jehož strana $= a$, bude $P = \frac{a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{1/3}$; dle pythagorské věty

$$p = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \text{ dle rovnice (3) } R = \frac{a}{4}\sqrt{6};$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad \varrho = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Dodatek. Z těchto hodnot plyne

α) $R : r : \varrho = 3 : 1 . \sqrt{3}$

β) $R : \varrho = \varrho : r$.

b) V krychli jest, jak již z vyobrazení snadno plyne, $P = \varrho = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $p = r = \frac{a}{2}$, a z úhlopříčného řezu konečně $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.*)

c) V osmistěnu, kde jest základnou seříznutého jehlance čtverec, jehož strana $= a$ jest zároveň hranou osmistěnu, a kde jest $u = \frac{a}{\sqrt{2}}$; bude zase $P = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $p = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; a dle rovnice (3)

$$R = \frac{a}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}}} = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ r = \frac{a\sqrt{6}}{6};\ \varrho = \frac{a}{2}.$$

d) V dvanáctistěnu, kde jest opět $P = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $p = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, tvoří základna odříznutého jehlance pravidelný pětiúhelník, v němžto bude dle § 38, 7 $u = \frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$; dosadíce tedy hodnotu tuto do rovnice (3), obdržíme

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{10 - 2\sqrt{5}}}} = \frac{a}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}} = a\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}.\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4}$$

$$= \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$r = \frac{a}{12}\sqrt{42+18\sqrt{5}} = \frac{a}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15});\ \varrho = \frac{a}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{a}{4}(\sqrt{5}+1).$$

e) V dvacítistěnu, kde jest

$$P = \frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{2a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}} = \frac{a}{2} . \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \frac{a}{2}\sqrt{2+\frac{2}{5}\sqrt{5}},$$

$p = \sqrt{P^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{5}}{10}} = \frac{a}{2}\sqrt{1 + {}^2/_5\sqrt{5}}$, bude základna odříznutého jehlance prav. trojúhelník, jehož stranou jest úhlopříčna pravid. pětiúhelníka a dle § 38, 7, dodat. $d = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$. Máme tedy $u = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{a}{6}(\sqrt{3}+\sqrt{15})$, a z toho zase

$$R = \frac{3a^2}{\sqrt{18-2\sqrt{45}}} = \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}};\ r = \sqrt{\frac{a^2}{40}(25+11\sqrt{5})} = \frac{a}{4}\sqrt{10+\frac{22}{5}\sqrt{5}};$$

$$\varrho = \frac{a}{4}(3+\sqrt{5}).$$

Dodatek. Kdyby zase naopak dán byl poloměr té neb oné koule, může se opáčný mpočtem snadno zase určiti hrana přináležejícího pravidelného mnohostěnu.

2. Jako poloměry vepsané a opsané koule závislé jsou na velikosti hrany každého jednotlivého pravid. mnohostěnu, tak jest i vespolné naklonění jednotlivých stěn (úhel plošný) závislé na druhu tělesa bez ohledu na velikosť jeho hrany.

---

*) Zde by seříznutý jehlanec nebyl prav., leč jen rovnostranný; jeho strana na základně byla by úhlopříčnou čtverce $= a\sqrt{2}$, u bylo by $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, což dává v provedení týž výsledek jako nahoře.

a) Tak jest plošný úhel v krychli R č. 90^0.

b) V čtyrstěnu obdržíme plošný úhel následovně: Na společnou průsečnici stěn ABC (obr. 269.) a ABD postav kolmou rovinu procházející vrcholem D; i bude potom $\sphericalangle DEO = \alpha$ žádaný úhel, k jehož bližšímu určení máme $DO = DE . \sin\alpha$ nebo $\sin\alpha = \frac{DO}{DE}$. Že ale jest OB poloměrem základně opsaného kruhu a $BO = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{BO}^2} = a\sqrt{^2/_3}$, $DE = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{BE}^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, bude $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ hrany a zcela nezávislý a dá $\alpha = 71^0 31' 43'' \doteq 71^1/_2{}^0$.

c) V osmistěnu postav opět na hranu AB (obr. 270.) kolmou rovinu procházející vrcholem E; i bude potom $\sphericalangle EHF$ žádaný úhel a $\sphericalangle EHO = \alpha/_2$ jeho polovička. V trojúhelníku EHO jest zase $EO = EH \sin\alpha/_2$; že ale jest $EO = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $EH = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, bude zase neodvisle od hrany $\sin\alpha/_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}$, a z toho $\alpha/_2 = 54^0 44' 8'$, nebo $\alpha = 109^0 28' 16''$.

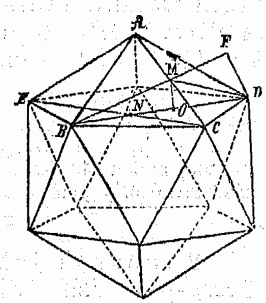
d) V dvanáctistěnu představuje, jak obr. 274. ukazuje, $\angle MSN$ vespolné naklonění dvou sousedních stran α $\sphericalangle MSO = \alpha/_2$ udává jeho polovičku. I jest tedy $MO = SO \sin\alpha/_2$, což dá, když opět za MO a SO jejich ceny z předešlého odstavce (1) dosadíme,

$$\sin\alpha/_2 = \frac{\sqrt{10 + \frac{22}{5}\sqrt{5}\,(3 - \sqrt{5})}}{4},$$

což na desítince uvedeno konečně dává $\alpha/_2 = 58^0 16' 57''$, a tudy $\alpha = 116^0 33' 54''$.

e) V dvacítiúhelníku (obr. 292.) rozpůl jednu hranu, na př. *AC* v *M*, spoj M s body B a D; i bude potom $\sphericalangle BMD$ žádaný úhel sklonu sousedních stěn ABC a ACD. — Aby se mohl blíže určiti, veď úhlopříčny EC a BD, a spusť $MO \perp BD$. Dle § 34, 6) jest pak $BN : ND = ND : BD$, nebo $\overline{DN}^2 = BD . BN$ a při tom $DN = DC$. Že ale jest také $DN = BD - BN$, nebo $\overline{DN}^2 = \overline{BD}^2 - 2 BD . BN + \overline{BN}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BN}^2 - 2\overline{DN}^2$, bude $3\overline{DN}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BN}^2$ . . . . 1)

Avšak $\triangle ACD$ jest rovnostraný a DM jeho výškou; musí být tedy, když v trojúhelníku DMC určíme $\overline{DC}^2$ pomocí pythag. věty, $3\overline{DC}^2 = 4\overline{DM}^2$ . . 2). Jelikož ale také $BO = OD$, a $\overline{BD}^2 = 4\overline{DO}^2$, plyne z obou rovnic (1) a (2) $4\overline{DM}^2 = 4\overline{DO}^2 + \overline{BN}^2$, což dává $4(\overline{DM}^2 - \overline{DO}^2) = \overline{BN}^2$, t. j. $4\overline{MO}^2 = \overline{BN}^2$, nebo $2MO = BN$ . . . . . 3)



Obr. 292.

Spustíme-li nyní s D kolmici na prodloužení BM, bude plocha $2\triangle BMD = BM . DF = BD . MO$ . . . . 4) nebo dosazením hodnoty za MO z rovnice (3). $\triangle BMD = \frac{1}{2} BN . BD = \frac{1}{2}\overline{DN}^2$. Když pak dáme za $\overline{DN}^2 = \overline{DC}^2$ hodnotu z rovnice (2), bude také $\triangle BMD = {}^2/_3\overline{DM}^2$ . . . 5).

Nyní již bude, když uvážíme, že jest $DM = BM$, a když porovnáme rovnice 5) a 4), $BM . DF = {}^2/_3\overline{BM}^2$, a z toho konečně $DF = {}^2/_3 DM$. — Výplněk žádaného úhlu nachází se tedy v pravoúhelném trojúhelníku DMF, v němžto jest strana naproti úhlu DMF ležící $^2/_3$ přepony. Dle sinusové věty bude tedy $\sin DMF = {}^2/_3$, což dává $\sphericalangle DMF = 41^0 48' 37''$; následovně plošný úhel $BMD = 180^0 - \sphericalangle DMF = 138^0 11' 23''$.

Kniha čtvrtá.

O povrchu těles.

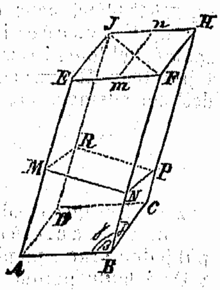
1. Povrchy těles hranatých.

§ 83.

1. Povrch tělesa hranatého obdržíme, když ploské obsahy veškerých jeho stěn sečteme. Ve zvláštních případech dá se počet zjednodušiti.

Povrch hranolu na př. rovná se jeho plášti a dvojnásobné podstavě, t. j. $P = p + 2z$. — Je-li hranol přímý, obdržíme jeho plášť, když obvod základny znásobíme pobočnou hranou (proč?).

U hranolu šikmého rovná se plášť součinu z obvodu kolmého řezu (na pobočné hrany) a z hrany pobočné. Poznamenáme-li totiž délku pobočné hrany h, bude v obr. 293. $ABEF = h . MN$, $BCHF = h . NP$, $CDJH = h . PR$, $ADEJ = h . MR$, sečtením tedy plášť $p = h(MN + NP + PR + RM)$.



Obr. 293.

Pozn. Kdyby byly dány u nakloněného rovnoběžnostěnu tři, v jednom rohu sbíhající se hrany $a = AB$, $b = BF$, $c = BC$, a úhly jimi sevřené α, β, γ, tak sice, aby úhel sevřený hranami a a c byl α, úhel hranami a a c sevřený β, atd.; budou obsahy v rohu B sbíhajících se stěn $ab \sin\gamma$, $bc \sin\alpha$, $ac \sin\beta$, následovně celý plášť

$$p = 2(ab \sin\gamma + bc \sin\alpha + ac \sin\beta).$$

2. Povrch jehlance rovná se součtu pláště a základny, $P = p + z$. Plášť jehlance přímého obdržíme však, když obvod základny znásobíme poloviční výškou v jednom postranním trojúhelníku (polovičním apotemem), a nebo: když obsah jednoho pobočního trojúhelníka vezmeme n-krát.

Povrch jehlance komolého rovná se součtu obou základen a pláště, sestávajícího z n lichoběžníků. Byl-li jehlanec přímý, tedy se rovná jeho plášť součinu z obvodu středního řezu (vedeného prostředkem výšky rovnoběžně se základnou) a z výšky v pobočném lichoběžníku. Důkaz snadný.

Povrch jehlance pravidelného, jehož hrana jest a, skládá se z n pravidelných trojúhelníků a ze základny, tedy $P = z + n . \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

3. Povrch tělesa pravidelného obdržíme, když vypočteme jednu jeho stěnu a obsah tento znásobíme počtem stěn. A poně-

vadž jest, když značí a stranu pravid. mnohoúhelníka, obsah trojúhelníka $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, čtverce a^2, pětiúhelníka $\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 1{\cdot}720477\,a^2$; budou povrchy jednotlivých pravid. těles:

povrch čtyrstěnu $P_4 = a^2\sqrt{3} = 1{\cdot}73205\,a^2$,

„ šestistěnu $P_6 = 6a^2$,

„ osmistěnu $P_8 = 2a^2\sqrt{3} = 3{\cdot}4641\,a^2$,

„ dvanáctistěnu $P_{12} = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 20{\cdot}645729\,a^2$,

„ dvacítistěnu $P_{20} = 5a^2\sqrt{3} = 8{\cdot}660254\,a^2$.

Dodatky. a) $P_4 : P_8 : P_{20} = 1 : 2 : 5$.

b) Když by byl dán povrch pravid. těles, najde se pomocí těchto rovnic hrana. Tak jest na př. hrana dvanáctistěnu

$$a_{12} = \sqrt{\frac{P}{3\sqrt{25+10\sqrt{5}}}}$$

c) Povrchy dvou podobných hranolů (nebo jehlanců) mají se k sobě, jako čtverce jejich stejnolehlých hran (nebo úhlopříčen).

Úlohy.

1. Z hrany krychle má se určiti její povrch P, tělesná úhlopříčna h a obsah úhlopříčného řezu p.
Je-li hrana krychle a, bude $P = 6a^2$, $h = a\sqrt{3}$, $p = a^2\sqrt{2}$.

2. Když jest povrch krychle $P = 7085\square'$, jaké jest a, h, p?

3. Rovná-li se obsah největšího trojúhelníka, který proříznutím krychle obdržíme, $m = 131{\cdot}02\square'$, jaká jest hrana krychle? $\left(a = \sqrt{\frac{2m}{\sqrt{3}}}\right)$.

4. Jaký povrch má třístraný přímý hranol, když měří každá hrana na základně $a = 5'$ a poboční hrana $b = 17'$?
$$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3ab.$$

5. V přímém šestistraném hranolu, jehož základnou jest pravidelný šestiúhelník, měří jedna hrana na základně $a = 6''$, výška $v = 1\tfrac{1}{2}'$; má se určiti jeho povrch P. $(P = 3a(a\sqrt{3} + 2v))$.

6. Když by u předešlého hranolu byly všechny hrany stejné ($a = v$) a veškerý povrch $P = 8{\cdot}6\square'$; jaká by byla výška? $v = \sqrt{\frac{P}{3(2+\sqrt{3})}}$

7. V přímém hranolu, jehož základnou jest pravid. pětiúhelník, jest postraní hrana $h = 11'$ a hrana na základně $a = 3'$; jaký bude jeho povrch? $\left(P = \frac{a^2}{2}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} + 5ab\right)$.

8. Má se určiti povrch přímého třístraného jehlance, v němž měří jedna hrana na základně a', a postraní hrana b'.

Základna jest $z = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, jeden postraní trojúhelník (na př. v obr. 269 $\triangle ABD) = \frac{1}{2}AB.ED = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{4b - a^2}$, pročež celý povrch $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$.

9. Má se určiti povrch a výška pravidelného jehlance, když jest dána jeho hrana a.

a) U třístraného jehlance $P = a^2\sqrt{3}$, $v = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$.

b) U čtyrstraného pravid. jehlance jest $P = a^2(1+\sqrt{3})$, $v = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

c) U pětistraného konečně

$$P = \frac{5a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{5a^2}{4}\sqrt{1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}} = \frac{5a^2}{4}\left(\sqrt{3} + \sqrt{1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}}\right),$$

$$v = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - a^2\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)} = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

10. V čtyrstraném přímém jehlanci, jehož základnou jest čtverec, jest postraní hrana $b = 24'$, a veškerý povrch $P = 1550\square'$; jak velká jest hrana na základné?

11. Má se určiti povrch pětistraného pravid. jehlance, kolem jehož základny může být opsán kruh poloměrem $6''$.

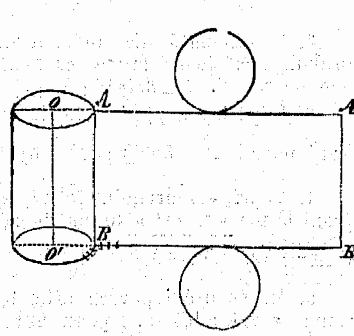
$$\left(P = \frac{5r^2}{8}\left(5\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)\right)$$

12. Má se určiti naklonění postraních ploch k základné v pravidelném jehlanci a) čtyrstraném, c) pětistraném.

2. Povrchy těles kulatých.

§ 84.

1. Jako jsme v plochoměrství při vyměřování ploských obsahů a i na rozličných jiných místech považovali kruh za pravid. mnohoúhelník *s nesčíslným počtem nekonečně malých stran*; můžeme i zde, kdykoliv nám jest s plochami křivými vůbec co dělati, na základě tohoto pojmu o nekonečně malém věc sobě usnadniti, když sobě představíme vůbec každou křivou plochu složenou *z nesčíslně mnoho nekonečně malých částic rovinných*, jako jsme to učinili již v § 78, 3 a 4, pozn. — Spůsobem tímto lze považovati válec za hranol, kužel za jehlanec a kouli za mnohostěn pravidelný, čímž se určování povrchů těles kulatých bez ublížení vědecké přesnosti ulehčí a nápadně zjednoduší.*)



Obr. 294.

Úloha naše bude tedy přede vším v tom záležeti, ukázati, jak lze určiti ploský obsah pláště válcového a kuželového. Jsou-li tělesa tato nakloněná, tu ovšem nepostačují dosavádní věty mě-

*) Spůsob tento, tak zvaný infinitesimalní, tvoří základ téměř veškerého nižšího měřictví.

řictví nižšího, a nezbývá nic jiného, než obmeziti předloženou úlohu na válec a kužel přímý.

2. *Plášť kolmého válce rovná se pravoúhelníku, jehož základnou jest obvod válcové základny a výškou strana válce (nebo osa).*

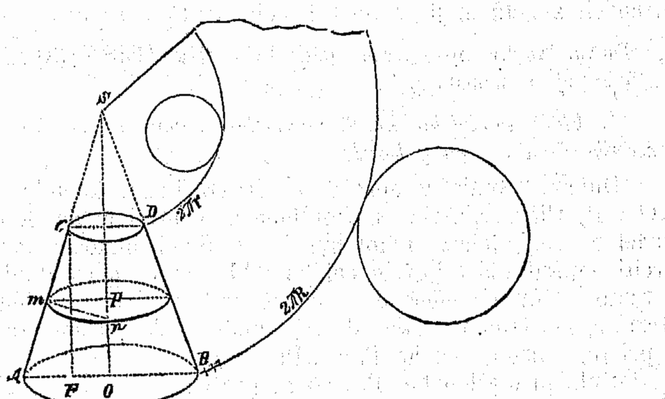
Důkaz. Pomyslíme-li sobě, že byl plášť válce podél jedné tvořící přímky rozříznut (na př. v obr. 294. dle AB) a na to v rovinu rozvinut (dle § 78. 3), obdržíme na této nesčíslně mnoho nekonečně úzkých pravoúhelníků, jichžto základny jsou B1, 12, 23, . . . a které mají vesměs stejnou výšku (stranu válce). Součet těchto pravoúhelníků dává opět pravoúhelník téže výšky, jehož základna se rovná rozbalenému obvodu základného kruhu, t. j. $p = AB \cdot BB' = v \cdot 2\pi r$. Pročež díme: *Plášť válce rovná se také součinu z obvodu základny a výšky.*

Výsledky. a) Pláště stejně vysokých přímých válců mají se k sobě, jako obvody, a tím tedy jako průměry nebo poloměry základny; při stejných půdicích ale jako výšky válců.

b) Poněvadž se veškerý povrch válce skládá z pláště a dvou kruhových základen, bude pro povrch válce $P = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi(r+v)$, t. j. *veškerý povrch válce rovná se pravoúhelníku, jehož základnou jest obvod základného kruhu a jehož výška se rovná součtu z výšky válce a poloměru základny.*

c) Ve válci rovnostraném, kde jest $v = 2r$, bude veškerý povrch $P = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r = 6r^2\pi$.

d) *Povrch válce dutého*, na př. válcové roury, skládá se z pláště vnitřního a zevnitřního a z dvou stejných ploch věncových, tedy $P = 2\pi(R^2 - r^2) + 2\pi v(R + r)$.



Obr. 295.

e) Povrchy dvou rovnostraných válců mají se k sobě jako $r^2 : r_1^2$.

3. *Plášť přímého kužele rovná se kruhovému výseku, jehož poloměrem jest strana kužele a jehož oblouk se rovná obvodu kuželové základny.*

Důkaz. Považujeme-li kužel za jehlanec, jehož základna má nesčíslně mnoho nekonečně malých stran, bude plášť kužele sestávati z nesčíslně mnoho nekonečně úzkých rovnoramenných trojúhelníků, jichžto vrchole se ve vrcholi kužele sbíhají. Když pak plášť ten podél jedné tvořící přímky rozřízneme, na př. dle SB (obr. 295.) a v rovinu rozbalíme; budou trojúhelníky tyto opět z jednoho bodu vybíhati a k sobě jednou stranou přilehati. Že jsou ale všechna jejich ramena vespolek stejná, nemůže jejich součet dáti jiný obrazec leč kruhový výsek, jehož poloměrem jest strana kužele a jehož oblouk rovná se součtu malých základen, t. j. obvodu základného kruhu.

Výsledky. a) Pláště přímých kuželů majících stejné strany, mají se k sobě, jako obvody základny; při stejných ale půdicích jako strany kužele.

b) Poněvadž se plocha kruhového výseku rovná $p = \text{arc.BB}' \times \frac{1}{2}\text{BS}$, a zde jest, když poznačíme stranu kužele $\text{BS} = s$, a poloměr základny $\text{OB} = r$, $\text{arc.BB}' = 2\pi r$, bude také plášť kužele $p = 2\pi r \,.\, \frac{s}{2} = \pi r s$, t. j. *plášť kužele rovná se polovičnímu součinu z obvodu základny a strany kužele.*

c) Povrch celého kužele, sestávající z pláště a kruhové základny, bude tedy $P = r^2\pi + r\pi s = \pi r(r + s)$.

d) Plášť kužele rovnostraného, v němžto jest $s = 2r$, bude $p = r\pi \,.\, 2r = 2r^2\pi$, a celý povrch $P = 3r^2\pi$. — Povrchy pak rovnostraných kuželů mají se opět k sobě $P : P_1 = r^2 : r^2_1$.

Pozn. Kdyby místo strany dána byla výška kužele $\text{SO} = v$, určí se $s = \sqrt{v^2 + r^2}$, a naopak.

4. *Plášť komolého kužele přímého rovná se součinu z obvodu středního řezu a strany kužele.*

Důkaz. Budiž v obr. 295. CDAB kužel komolý a při tom $\text{AO} = \text{R}$, $\text{CE} = r$, $\text{AC} = s$. Doplňme si v myšlenkách komolý tento kužel na celý, jehož vrchol byl by v S; i budeme moci potom určiti napřed plášť kužele celého SAB, na to plášť doplňku SCD a tento od onoho odečísti. Poznačíme-li výšku komolého kužele $\text{OE} = v$, neznámou výšku $\text{SE} = x$, bude výška celého kužele $v + x$, a při tom kužele celého $P_1 = \pi\text{R}(v + x)$,

kužele přimyšleného $P_2 = \pi r x$, pročež

plášť kužele komolého $p = \pi\text{R}(x + v) - \pi r x = \pi\text{R}v + \pi x(\text{R} - r) \ldots 1)$.

Neznámou x určíme z podobných trojúhelníků AOS a CES(CE || AO), v nichžto jest $\text{AO} : \text{CE} = \text{OS} : \text{ES}$, nebo $\text{R} : r = (v + x) : x$, a z toho $\text{R} - r : r = v : x$, následovně $x = \frac{vr}{\text{R} - r}$. — Dosadíce hodnotu tuto do rovnice (1), obdržíme $p = \pi\text{R}v + \pi v r = \pi v(\text{R} + r)$. Že ale jest, když narejsujeme prostředkem $ACmp \parallel AO$, $mp = \frac{CE + AO}{2}$,

čili $\varrho = \frac{R + r}{2}$, bude také $p = 2\pi v \varrho$ jak tvrzeno.

Výsledky. a) Veškerý povrch kužele komolého bude tedy $P = Z + z + p = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi v (R + r)$, kterýžto vzorec dává okamžitě povrch kužele celého, jak míle bylo by $r = 0$. Kdyby však byla dána místo strany komolého kužele jeho výška, určí se strana z trojúhelníka ACF, a sice $AC = \sqrt{\overline{FC}^2 + \overline{AF}^2}$, nebo $\sqrt{v^2 + (R - r)^2}$.

b) Rozbalením pláště kužele komolého obdržíme výseč věncovou.

Dodatek. Postavíme-li v středním bodu strany AC kolmici ($mn \perp AC$) až by trefila osu v n, bude $\triangle AFC \sim \triangle mnp$, a z toho $AC : FC = mn : mp$, nebo $AC . mp = FC . mn$, což když se znásobí 2π, dá $2\pi mp . AC = p = 2\pi mn . FC$, t. j. *plášť komolého kužele rovná se také součinu z jeho výšky a obvodu kruhu, jehož poloměrem jest kolmice v středním bodu strany vztyčená a až k ose dosahující.*

Úlohy.

1. Mnoho-li plechu jest potřeba na plechovou, nahoře otevřenou nádobu, jejíž výška $v = 5{\cdot}3'$ a tlouštka (průměr základny ($d = 3{\cdot}2'$?

2. Osou přímého válce, jehož výška $v = 10'$ a poloměr základny $r = 9'$, položeny jsou dvě roviny, které spolu zavírají úhel $\alpha = 23^0 20'$. Jaký povrch má vyříznutý tento výsek válce?

$$P = 2vr + \frac{\alpha r \pi}{180}(v + r) = 250{\cdot}136\square'.$$

3. Jaký povrch má kužel, jehož výška $v = 6'$ a poloměr základny $r = 8'$?

4. Osou přímého kužele vedený řez jest rovnostraný trojúhelník, jehož strana $s = 5{\cdot}2'$; má se udati povrch kužele.

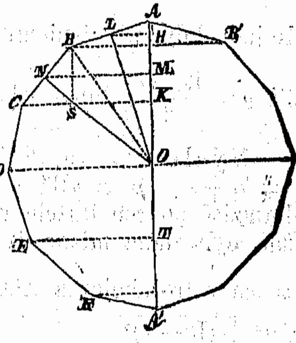
$$\left(P = \frac{3s^2\pi}{4} = 63{\cdot}71\square'.\right)$$

5. Má se určiti středový úhel kruhového výseku, ktery obdržíme rozbalením kužele, jehož výška $v = 8'$ a poloměr základny $r = 3'$. (Zde se snadno přesvědčíme, že se má tento úhel k 4R, jako $r : s$.)

6. V komolém kuželi jsou poloměry základen $R = 4$, $r = 3$, výška $v = 2'$; jaký bude jeho povrch?

5. *Povrch tělesa točeného, které vznikne otočením se pravidelného mnohoúhelníka kolem jeho průměru, rovná se součinu z tohoto průměru a obvodu do mnohoúhelníka vepsaného kruhu.*

Důkaz. Jak snadno nahlídnouti lze, vytvoří se otočením jedné polovice pravid. mnohoúhelníka totéž těleso, sestávající z celých a komolých kuželů a po případu snad i z nějakého válce. V obr. 296. na př. bude sestávati točené těleso z dvou shodných kuželů, vytvořených stranama AB a A'F, a ze čtyr komolých kuželů. Pro krátkosť poznamenejme plášť kužele AB p_1, plášť komolého kužele BC p_2, a plášť komolého kužele CD p_3; i bude potom celý povrch $P = 2(p_1 + p_2 + p_3)$ . . . . 1). Základna kužele ABB' má za poloměr BH, tak že bude $p_1 = \pi . BH . AB$... α) Spustíme-li ale z O na AB kolmici, bude AB v L rozpůlena, a $LO = r$ bude poloměrem vepsaného kruhu a při tom



Obr. 296.

$\triangle ABH \sim \triangle ALO$, tak že musí být $AH : BH = AL : LO$, nebo $BH . \frac{1}{2} AB = r . AH$, t. j. $BH . AB = 2r . AH$. — Dosadíce hodnotu tuto do rovnice α), obdržíme $p_1 = 2r\pi . AH$ . . . . 2)

Plášť komolého kužele BC bude, když BC v N rozpůlíme a uděláme $MN \perp AA'$, $p_2 = 2\pi . MN . BC$ . . . β). Že ale jest NO opět poloměrem vepsaného kruhu, bude, když spustíme $BS \perp CK$, $\triangle BCS \sim \triangle MNO$, následovně $BC : BS = NO : MN$, a z toho $BC . MN = BS . NO = BS . r = r \times HK$. Dosadíce hodnotu tuto do β), obdržíme zase $p_2 = 2\pi r . HK$ . . . . 3)

Tímtéž spůsobem najdeme $p_3 = 2\pi r . KO$ . . . . 4)

Sečtením konečně těchto rovnic obdržíme $P = 2(p_1 + p_2 + p_3) = 2 . 2\pi r(AH + HK + KO)$. Že ale jest $2(AH + HK + KO) = AA'$, bude také $P = 2\pi r . AA'$.

Dodatky. a) Má-li tvořící pravid. mnohoúhelník rovný počet stran, bude osa rovna průměru opsaného kruhu, a veškerý povrch tedy $P = 4\pi r R$.

b) Otáčela-li by se jenom nějaká část pravid. mnohoúhelníka, sestávající snad jen z několika jeho stran, na př. část BCDE, kolem nadzmíněné osy; rovnal by se povrch točeného tělesa opět součinu z obvodu vepsaného kruhu a z přináležející částky osy HT.

Úlohy.

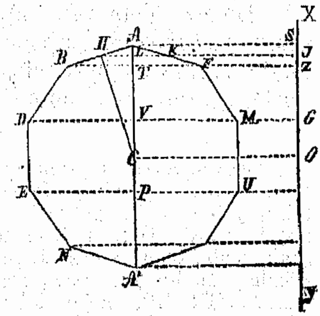
1. Jeli strana pravid. šestiúhelníka, tedy $R = 2'$, jaký povrch bude míti těleso, které vznikne otočením se tohoto šestiúhelníka kolem jeho průměru? (Poněvadž jest $r = \frac{R}{2}\sqrt{3}$, bude $P = 2\pi R^2 \sqrt{3} = 43{\cdot}531 \square'$.)

2. Pravidelný desítiúhelník, jehož strana $s = 2'$, točí se kolem průměru opsaného kruhu; jaký povrch bude mít vytvořené těleso?
$R = \frac{2s}{\sqrt{5} - 1}$, $r = \sqrt{R^2 - \frac{s^2}{4}}$, tudy $P = s^2\pi \times \sqrt{50 + 22\sqrt{5}} = 125{\cdot}1559 \square'$.

3. Pravidelný mnohoúhelník s rovným počtem stran, jehož $R = 1{\cdot}616'$ a $r = 1{\cdot}83884'$ točí se kolem průměru $2R$; jaký povrch bude míti vytvořené těleso?

6. Točí-li se pravid. mnohoúhelník s rovným počtem stran kolem osy, která leží *mimo jeho obvod* a jest s některým jeho průměrem rovnoběžná; vznikne *prstenovité těleso, jehož povrch se rovná součinu z obvodu daného obrazce a obvodu kruhu, jejž při otáčení se obrazce vytvoří jeho střední bod.*

Důkaz. Daný mnohoúhelník buď ABCDE . . . (obr. 297.), jeho střed v C, a osa $xy \parallel AA'$. Při otáčení se vytvoří každá strana mnohoúhelníka plášť komolého kužele, jehož osou jest xy. Rozpůlíme-li tedy AB v H, a narejsujeme $HJ \perp xy$, bude stranou AB vytvořený plášť $p_1 = 2\pi . HJ . AB$. — Totéž platí o plášti vytvořeném stranou AF, který bude $p_2 = 2\pi . JK . AF$. Že ale jest HJ+KJ=HL+LJ+LJ—KL =2LJ=2CO, a při tom AB=AF, bude součet obou plášťů $p_1 + p_2 = 2\pi(AB . HJ + AF . JK) = 2\pi . AB(HJ + KJ) = 2\pi . AB . 2CO = 4\pi . CO . AB$ . . . . . 1)



Obr. 297.

Podobným spůsobem dají oba pláště, vytvořené stranami BD a FM, dohromady dvojnásobný obvod $2\pi . CO$ znásobený stranou BD atd. Celý povrch bude tedy $P = 2\pi . OC \times 2(AB + BD + DE + EN + NA')$, nebo jestliže poznamenáme obvod tvořícího mnohoúhelníka m a vzdálenosť $CO = d$, $P = 2\pi d . m$. — Týž výraz obdržíme pro povrch kruhového prstenu, který vznikne, když se točí **kruh** kolem dané přímky, která leží mimo jeho plochu. Poznačíme-li totiž poloměr tvořícího kruhu r, vzdálenosť jeho středu od osy R, bude povrch prstenu $P = 2\pi r . 2\pi R$.

7. *Na povrchu prstenového tělesa jest polovička, vytvořená obvodem ABD . . . NA' větší nežli povrch, vytvořený druhou, ose bližší polovičkou, a sice o součin z obvodu kruhu, který jest do mnohoúhelníka vepsán, a z průměru kruhu opsaného.* (Obr. 297.)

Důkaz. Dle předešlého jest plášť vytvořený stranou AB, na př. $p = 2\pi . HJ . AB$, plášť vytvořený stranou AF ale $p' = 2\pi . KJ . AF$, pročež jich rozdíl $u = 2\pi . AB(HJ - KJ) = 2\pi . AB . HK$; že ale jest $HK = \frac{1}{2} BF = BT$, bude $u = 2\pi . AB . BT$. — Z podobnosti trojúhelníků ABT a AHC však plyne $AT : BT = AH : CH$, nebo $BT . AH = AT . HC$, a poněvadž $AH = \frac{1}{2} AB$, také $BT . AB = 2AT . HC$, následovně $u = 2\pi . 2HC . AT$.

Podobnou cestou najdeme rozdíl plášťů vytvořených stranami BD a FM, totiž $u_1 = 2\pi . 2HC . TV$, atd.; dohromady tedy rozdíl obou polovic

$$U = 2\pi . HC \times 2(AT + TV + \ldots) = 2\pi . HC . 2AA' = 2\pi r . 2R.$$

§ 85.

1. *Povrch koule rovná se čtyřnásobné ploše hlavního kruhu.*

Důkaz. Věta tato plyne přímo z věty (5) předešlého paragrafu, jestliže považujeme kruh, jehož otočením se kolem průměru koule vytvořena býti může, za pravid. mnohoúhelník s nesčíslným počtem stran. Jest potom dle této věty povrch koule

$$P = 2\pi r \cdot 2r = 4r^2\pi.$$

Pozn. Avšak i přímo dá se věta naše dokázati, a sice: Buď v bodu N (obr. 296.) na obvodu tvořícího kruhu sestrojená tečna BC nekonečně krátká, tak aby ji bylo lze považovati za obloučék kruhu samého, a při tom nechť jest BN = NC. Otočíme-li na to kruh i s tečnou kolem průměru AA', vytvoří kruh kouli, tečna ale plášť přímého kužele zkomoleného, který ke kouli tak přiléhá, že ho lze považovati za pranizounký pás koule. Tento plášť $p = 2\pi . MN . BC$, nebo když za veličiny MN a BC, které na kouli měřeny býti nemohou, dosadíme jiné, a sice z podobnosti trojúhelníků BSC a MNO, v nichžto jest $BS : BC = MN : NO$, nebo $MN . BC = BS . NO$, $p = 2\pi . SB . NO$, při čemž udává BS výšku tohoto pláště (nebo kulového pásu) a NO poloměr koule. Rozdělíme-li tedy v mysli celou kouli rovnoběžnými řezy na neskonalé množství takovýchto nizounkých pásů, znamenajíce jich povrchy $p_1, p_2, p_3 \ldots$, a výšky jejich $v_1, v_2, v_3 \ldots$, bude $p_1 = 2\pi r . v_1$, $p_2 = 2\pi r . v_2, \ldots$, sečtením $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 2\pi r (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots)$. Že ale součet všech povrchů dává povrch koule P, a součet všech výšek průměr $AB' = 2r$, bude zase

$$P = 2\pi r \times 2r = 4r^2\pi.$$

Dodatky. a) Povrch koule rovná se dle toho buď plášti rovnostranného kouli opsaného válce, nebo ploše kruhu, který má za poloměr průměr koule.

b) Povrchy koulí mají se k sobě jako čtverce jejich poloměrů (nebo průměrů).

c) Dán-li povrch koule P, bude $r = \sqrt{\frac{P}{2\pi}}$.

d) *Povrch kulového pásu, jakož i kulového skrojku* (úseku čili vrchlíku) *rovná se součinu z obvodu největšího kruhu a výšky pásu* (nebo úseku). Důkaz jako v předešlé poznámce o povrchu koule.

Pomyslíme-li sobě, že byl kulový úsek vytvořen otočením se kruhového oblouku, na př. v obr. 285. obloukem AS kolem průměru SC, obdržíme pro jeho povrch $P = 2r\pi . BS$; narejsujeme-li ale tětivu AS, jest dle § 35, 1. dodat. 1) $\overline{AS}^2 = BS . CS = BS . 2r$, což když se dosadí do předešlé rovnice a poznačí $AS = \varrho$, dá $P = \pi\varrho^2$, t. j. *povrch kulového úseku rovná se také ploše kruhu, jehož poloměrem jest tětiva tvořícího oblouku.*

2. Již v § 80 7, pozn.) bylo podotknuto, že sférický dvojúhelník vzroste na celou kouli, jak mile by jeho úhel vzrostl na 4R. Poznačíme-li tedy povrch koule P, povrch dvouúhelníka p, a sfér. úhel dvouúhelníka α, bude $p : P = \alpha : 4R$; z toho pak obdržíme

$p = \frac{P}{360} \cdot \alpha = \frac{4r^2\pi}{360}\alpha = r^2\pi\frac{\alpha}{90}$, t. j. *ploský obsah sférického dvouúhelníka rovná se ploše největšího kruhu znásobené úhlem dvojúhelníka děleným 90°.*

3. *Plocha sférického trojúhelníka.* Ve sfér. trojúhelníku ABC obr. 286., jehož plochu nám jest určiti, doplňme všechny strany na hlavní kruhy, čímž obdržíme nové trojúhelníky a mimo to i dvojúhelníky, z nichžto jest každý omezen dvěma stranama trojúhelníka a jich prodloužením. Poznačíme li tedy povrch koule P, bude dle předešlé věty dvouúhelník,

jehož úhel jest A, $ABC + CBF = \frac{P}{360} \cdot A$,

„ „ „ B, $ABC + ACD = \frac{P}{360} \cdot B$,

„ „ „ C, $ABC + ABE = \frac{P}{360} \cdot C$,

dohromady tedy $3.ABC + CBF + ACD + ABE = \frac{P}{360}(A + B + C)$.

A ješto má trojúhelník ACD, který se nachází na zadní polokouli, s trojúhelníkem BEF stejnou plochu (§ 81, 4), můžeme také předešlou rovnici psáti: $2ABC + (ABC + CBF + BEF + ABE) = P(\frac{A + B + C}{360^0})$. Čtyry trojúhelníky, jež tuto v závorce se nacházejí, dávají přední polokouli, tak že máme

$2ABC + \frac{P}{2} = P(\frac{A + B + C}{360^0})$, a z toho $2ABC = P/_2 [\frac{A + B + C}{180} - 1] = \frac{P}{2}(\frac{A + B + C - 180^0}{180^0})$.

Když konečně nadbytek sférických úhlů přes 180°, který slove obyčejně **nadbytek sférický** (ſphäriſcher Exzeß) a znamená se $e = A + B + C - 180^0$, do rovnice předešlé dosadíme, obdržíme pro plochu sfér. trojúhelníka $ABC = \frac{P}{4} \cdot \frac{e}{180^0} = r^2\pi \cdot \frac{e}{180^0}$, to jest, *plocha sférického trojúhelníka rovná se ploše největšího kruhu znásobené podílem* $e/_{180^0}$.

D o d a t k y. a) Poněvadž značí $(\frac{A + B + C - 180^0}{180})\pi r$ délku kruhového oblouku pro poloměr r a úhel $e = A + B + C - 180^0$, máme také, když tento oblouk poznačíme λ, pro plochu sférického trojúhelníka vzorec λr, t. j. *plocha sférického trojúhelníka rovná se součinu z poloměru koule a oblouku náležejícího k sfér. nadbytku.*

b) Plocha sfér. trojúhelníka má se k povrchu koule, jako sfér. nadbytek k 8R. (Důkaz snadný.)

c) Plochy sfér. trojúhelníků na téže kouli mají se k sobě jako jejich sfér. nadbytky.

d) Všechny sfér. trojúhelníky na téže kouli, jichžto úhly dávají stejné součty, mají také stejné ploské obsahy.

Úlohy.

1. Má se pozlatit kostelní kuple (polokoule) $7\frac{1}{2}^{\circ}$ v průměru mající; kolik lístků pozlátka $3\frac{1}{2}''$ širokých a $5''$ dlouhých bude k tomu třeba?

2. Jaký průměr musí mít globus, aby na něm jedna čtvercová míle zaujímala prostor $1\,\square'''$? $\left(d = \sqrt{\frac{9283284'''}{3\cdot 14159}}\right)$

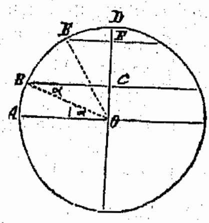
3. Když obvod zemského rovníku obnáší 5400 mil, jaký povrch bude mít naše zeměkoule?

4. Jaký povrch bude mít koule, která jest vepsána do přímého kužele, jehož výška $v = 9\cdot5'$ a poloměr základny $r = 3'$?
Strana kužele $s = \sqrt{v^2 - r^2}$, poloměr vepsané koule dle § 44. 2)

$\varrho = \frac{2p}{a+b+c}$. Že ale zde jest $a = 2r$, $b = c = s$, a při tom $p = rv$, bude

$$\varrho = \frac{rv}{r+\sqrt{v^2+r^2}} = \frac{v}{1+\sqrt{1+\frac{v^2}{r^2}}}, \text{ atd.}$$

5. Jaký povrch má každé pásmo naší země, když jsou obratníky $23^{\circ}28'$ vzdáleny od rovníka a toliktéž i polární kruhy od pólu? ($r = 859\cdot5$ míle.) — Povrch země dle $4\pi r^2$; u jednotlivých pásem přijde toliko na určení výšky. Tu pak jest, když na př. výšku horkého pásma poznačíme v, $CO = \frac{v}{2} = OB.sin\,\alpha = r.sin\,\alpha$ (obr. 298.), tedy $v = 2r.\,sin\,23^{\circ}28'$ a následovně povrch horkého pásma dle $2\pi r.v$, $P = 4r^2\pi\,sin\,23^{\circ}28' = 3696633\,\square$ míle. Při tom jest $v = 684\cdot134$ míle. Podobným způsobem najde se výška mírného pásma $CF = OF - OC$, při čemž jest $FO = r\,Cos\,EOF = r\,Cos\,23^{\circ}28'$ atd.



Obr. 298.

6. Jakou hranu má osmistěn, když povrch vepsané koule $186\cdot5\,\square'$ obnáší?

7. Jaký povrch má kulový úsek, jehož výška $v = 2\cdot1'$ a poloměr koule $r = 3\cdot6'$?

8. Když se točí kruh kolem průměru $d = 10\cdot6'$, jaký povrch vytvoří oblouk 45°? (Úsek $= \frac{d^2\pi}{2}[1 - \sqrt{\frac{1}{2}}]$).

9. Z jaké vzdálenosti museli bychom se dívati na naši zem, abychom přehledli celé studené pásmo $a = 334977\,\square$ mil?

V obrazci 285. byla by na př. vzdálenost ta $ES = EB - BS$. Že ale jest $a = 2\pi r.BS$, bude $BS = \frac{a}{2\pi r}$, a $BO = r - \frac{a}{2\pi r}$. Z podobnosti trojúhelníků EBA a ABO plyne však $\overline{AB}^2 = EB.BO$, nebo $EB = \frac{\overline{AB}^2}{BO}$ . . . . 1)

Že ale také jest $a = \overline{AS}^2.\pi$, a z toho $\overline{AS}^2 = \frac{a}{\pi}$, bude v rovnici (1)

$$EB = \frac{\overline{AS}^2 - \overline{BS}^2}{BO} = \frac{\frac{a}{\pi} - \frac{a^2}{4r^2\pi^2}}{BO} = \frac{\frac{a}{\pi} - \frac{a^2}{4r^2\pi^2}}{r - \frac{a}{2\pi r}} = \text{atd.} = 77\cdot834 \text{ míle.}$$

10) Jakou plochu omezují na kouli, jejíž poloměr $r = 10'$, dva hlavní kruhy, které spolu zavírají úhel $A = 15^{\circ}5'$?

11. Má se určiti na kouli, jejíž $r = 86'$, plocha sfér. trojúhelníka, jehož úhly jsou $A = 81^0 12'$, $B = 120^0 20'$, $C = 79^0 51$?

12. Sférický trojúhelník, jehož úhly jsou $A = 25^0 40' 7''$, $B = 68^0 22' 38''$, $C = 81^0 14' 54''$, má se proměniti v stejně velký dvouúhelník; jaký úhel budou spolu zavírati jeho strany?

13. Jaký poloměr má koule, když rovina $10''$ od středu vzdálená odřízne na ní vrchlík, který se rovná šestině celého kulového povrchu?

Kniha pátá.

O krychlovém obsahu těles.

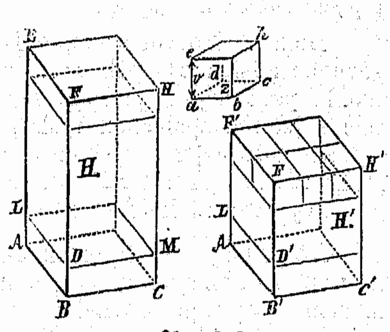
1. Porovnání tělesných obsahů.

§ 86.

Kdykoliv se mluví o rovnosti nebo poměru těles, rozumí se vždycky jejich tělesné obsahy, o nichž dříve některé vlastnosti znáti třeba. Nejjednodušším a k porovnání tělesných obsahů nejlépe se hodícím tělesem jest rovnoběžnostěn, o němž sluší sobě pamatovati:

1. *Pravoúhelné rovnoběžnostěny na shodných podstavách mají se k sobě jako jejich výšky.*

Důkaz. V obr. 299., kde jest $ABCD \cong A'B'C'D'$, bude hranol $H : H' = AE : A'E'$. — Nejdříve jest nám tu určiti poměr $AE : A'E'$; tu však z plochoměrství víme, že mohou být obě výšky spolu buď směřitelné nebo nesměřitelné. V případu prvém buď $AL = a$ jejich společnou mírou, tak že jest $AE = am$, $A'E' = na$, a $AE : A'E = m : n$ (zde jako $7 : 4$) . . . . 1)' Rozděl tedy výšku AE na m a výšku A'E' na n stejných dílů, a



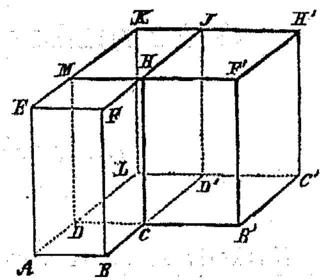
Obr. 299.

veď dělícími body řezy k základnám rovnoběžné, čím se oba rovnoběžnostěny rozdělí na samé shodné menší rovnoběžnostěny. Poznačíme-li jeden takový malý rovnoběžnostěn $AM = h$, bude přirozeně rovnoběžnostěn $H = mh$, $H' = nh$, pročež $H : H' = m : n$ . . . . . 2) Z této a ze srovnalosti (1) plyne konečně $H : H' = AE : A'E'$.

V případu druhém, kde by výšky mezi sebou byly nesměřitelnými, zůstává věta naše předce v platnosti, poněvadž obdržíme, jak dokázaný právě případ dostatečně objasňuje, pro obsahy rovnoběžnostěnu týž poměr jako pro výšky, jelikož jest poměr obsahů od základny zcela nezávislý.

2. *Pravoúhlé rovnoběžnostěny o stejných výškách mají se k sobě jako jich základny.*

Důkaz. Mají-li v obr. 300. rovnoběžnostěny $CE=H$ a $CH=H'$ stejné výšky, postav je na rovinu tak k sobě, aby se jednou postraní hranou stýkaly a spodní hrany BC a CD' aby padly v přímku BD'. Prodluž na to ještě hrany AD a $C'D'$, až by se v L protsekly, čímž povstane pravoúhelník $CDLD'$, s nímžto má každá z daných základen po jedné straně společně. Nad tímto pravoúhelníkem postavme (v myšlenkách) nový rovnoběžnostěn $CK=H''$ téže výšky jako rovnoběžnostěny dané, a porovnejme ho s nimi.



Obr. 300.

H a H'' majíce společnou základnu $DCHM$ dají $H:H''=CB:CD'$; H' a H'' majíce taktéž společnou základnu $CD'HJ$ dají $H'':H'=CD:CB'$. Znásobením obou srovnalostí tedy $H:H'=CB\times CD:CB'\times CD'$ jak bylo tvrzeno.

3. *Pravoúhelné rovnoběžnostěny vůbec mají se k sobě jako součiny z jejich základen a výšek.*

Důkaz. Rovnoběžnostěn H měj za základnu z a za výšku v; rovnoběžnostěn H' pak z' a v'. Abychom je vespolek porovnati mohli, porovnejme je nejprvé s rovnoběžnostěnem H'', který by měl s jedním společnou výšku, s druhým ale společnou základnu, tak že bude v jeho výškou a z' jeho základnou. I bude potom $H:H''=z:z'$, $H'':H'=v:v'$, znásobením tedy $H:H'=v.z:v'.z'$.

(Vyobrazení k tomu podej čtenář!)

Dodatky. a) Poznačíme-li hrany v jednom rohu rovnoběžnostěnu se sbíhající a, b, c, a uvážíme, že základna $z=a.b$, $v=c$, můžeme poslední srovnalost také psáti $H:H'=a.b.c:a'.b'.c'$, t. j. *pravoúhelné rovnoběžnostěny vůbec mají se k sobě, jako součiny v témž rohu sbíhajících se hran.*

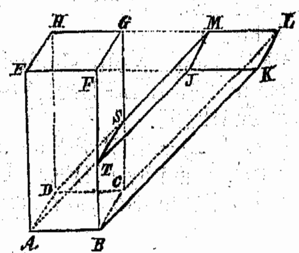
b) Pravoúhelné rovnoběžnostěny mající stejné základny i stejné výšky jsou si rovny.

c) Krychle mají se k sobě, jako třetí mocniny jejich hran.

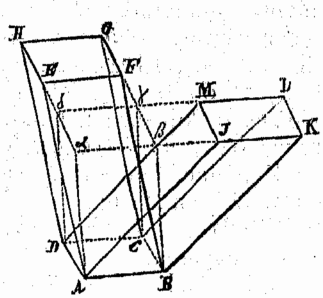
4. *Dva rovnoběžnostěny jsou si rovny, mají-li stejné základny i stejné výšky.*

Důkaz. Kdyby byly oba rovnoběžnostěny pravoúhelné, plyne důkaz z předešlé věty dod. b; v případu, že by byl některý z nich šikmý, postav je oba na společnou základnu ABCD (obr. 301.), s nížto musí být potom hořejší základny EFGH a JKLM, které leží v téže rovině, rovnoběžné. Musíme zde však rozeznávati dva případy, a sice a) když leží hořejší základny mezi dvěma rovnoběžkama, tak že přední stěny AF a AK jakož i zadní stěny DG a DL leží v jedné rovině.

V případu tomto představuje celý obrazec 301. čtyrstraný hranol H se základnou ABKE; mimo to máme zde také ještě dva třístrané hranoly AEJDHM $= h$, a BFKCGL $= h'$, které majíce nejen shodné základny ($\triangle$ AEJ $\cong \triangle$ BFK) nýbrž i jeden shodný roh (roh E $=$ F) jsou spolu shodné. Přidáme-li k oběma těmto hranolům spodní třístraný hranol ABTDCS a odejmeme od toho potom hořejší taktéž třístraný hranol FTJSGM, vyjde ABCDEFGH $=$ ABCDJKLM jak bylo tvrzeno.



Obr. 301.



Obr. 302.

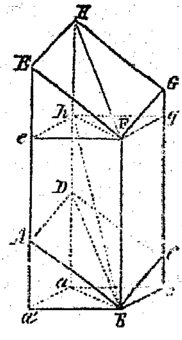
b) V druhém případu, když hořejší základny neleží mezi rovnoběžnými přímkami, ačkoli se nacházejí spolu v jedné rovině, máme opět dva rovnoběžnostěny BH a AL (obr. 302.) na společné základně. Prodluž strany JK a ML, až by se s prodlouženými stranami EH a FG proseklý; tím vznikne nový rovnoběžník $\alpha\beta\gamma\delta$, který jest s oběma předešlými shodný. Spojíme-li nyní rohy α, β, γ, δ s rohy spodní základny, vznikne nový rovnoběžnostěn ABCD$\alpha\beta\gamma\delta$, který má s oběma danýma nejen společnou základnu nýbrž i takové položení jako v případu prvém. Jest tedy rovnoběžnostěn AG $=$ Aγ $=$ AL, následovně také AC $=$ AL.

Výsledky. a) Každý šikmý rovnoběžnostěn dá se proměniti v stejně velký přímý rovnoběžnostěn, který by měl s ním stejnou základnu i stejnou výšku.

b) Přímý rovnoběžnostěn s kosoúhelnou základnou rovná se pravoúhelnému téže výšky (když kosoúhelnou základnu proměníme v pravoúhelnou).

5. *Každý rovnoběžnostěn rozpůlí se úhlopříčným řezem.*

Důkaz. Je-li rovnoběžnostěn přímý, jako na př. $BadceFgh$ (obr. 303.), tehdy se úhlopříčným řezem rozpadne ve dva třístrané shodné hranoly **BadehF** a **BcdhgF** (§ 77. 6, výsl.) a tím jest již také rozpůlen.



Obr. 303.

Je-li ale za druhé rovnoběžnostěn šikmý, jako na př. ABCDEFGH, tehdy veď nejprvé body F a B na pobočnou hranu BF kolmé řezy. I bude potom těmato řezy a prodlouženými postraními stěnami omezené těleso $BadcehgF$ rovnoběžnostěn přímý, který se úhlopříčným řezem rozpůliti dá. Že ale jest $AE = BF = ae$, musí být $AE - Ae = ea - Ae$, t. j. $Aa = Ee$, a tím jest také již $\triangle EFe \cong \triangle ABa$. A poněvadž jest dále $\sphericalangle EeF = \sphericalangle AaB$, $\sphericalangle Eeh = \sphericalangle Aad$, $\sphericalangle heF = \sphericalangle daB$, musí být roh $e \cong$ s rohem a (§ 73. 1). Položíme-li tedy shodné trojúhelníky ehF a adB na sebe, musí se všechny hrany rohů a a e pokrýti; a že jest při tom $eE = aA$, $EH \;\#\; AD$, musí padnouti i bod E do A, H do D, t. j. tělesa $adBAD$ a $ehFEH$ jsou spolu shodná. Přidáme-li konečně k těmto shodným tělesům těleso ehFBAD, obdržíme opět stejné součty, totiž $adBFhe = ABDFEH$.

Z podobných příčin jest také hranol $dcBFhg = BCDFGH$; a poněvadž jsou hranoly $adBFhe$ a $dcBFhg$ stejné, musí býti HFEABD $=$ HFGCDB, t. j. šikmý rovnoběžnostěn BH byl úhlopříčným řezem BDHF rozpůlen.

Výsledky. a) Třístraný hranol rovná se polovičce rovnoběžnostěnu, s nímžto má postraní tři hrany společné.

b) Třístrané hranoly, mající stejné základny i stejné výšky, jsou si rovny (z věty 4. a 5.); a poněvadž se dá i každý mnohostraný hranol úhlopříčnými řezy rozložiti v samé třístrané, platí vůbec: *hranoly o stejných výškách a základnách jsou si rovny.*

c) Třístraný hranol rovná se rovnoběžnostěnu, s nímž má stejnou základnu i výšku. (Doplň třístraný hranol na rovnoběžnostěn a rozpůl ho dle *mn* obr. 303.)

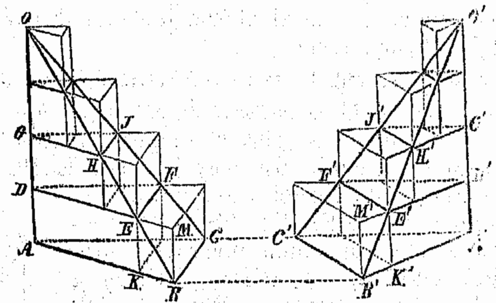
d) Mnohostraný hranol rovná se rovnoběžnostěnu téže výšky a základny.

e) Věty uvedené v § 86. 1, 2, 3) o rovnoběžnostěnu platí nyní o hranolech vůbec: dva hranoly na stejných základnách mají se k sobě jako jejich výšky; při stejných výškách jako jejich základny; a vůbec dva hranoly mají se k sobě, jako součiny z jejich základen a výšek.

§ 87.

1. *Jehlance, které mají stejné výšky i stejné základny, jsou si rovny.*

Důkaz. V jehlancích OABC a O'A'B'C' (obr. 304.) buďtež $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ a v společná jejich výška. Kdyby neměly být jehlance ty sobě rovny, rozděl jejich výšku (nebo kterou koliv postraní hranu) v n (zde na př. v 5) stejných dílů a veď dělícími body roviny rovnoběžné ku základně, čímž vzniknou na obou jehlancích řezy (DEF, GHJ, . . . na jednom, a D'E'F', G'H'J', . . .



Obr. 304.

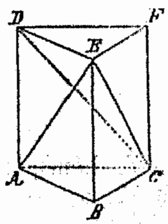
na druhém), z nichžto jest každý přináležející základně podoben (§ 77, 3). — Avšak dva a dva souhlasné z těchto řezů jsou si také rovny, t. j. $\triangle$ DEF $=$ $\triangle$ D'E'F', $\triangle$ GHJ $=$ $\triangle$ G'H'J', . . . (jest totiž, když poznačíme DO $= \frac{4}{5}v =$ D'O' $= u$, $\triangle$ DEF : $\triangle$ ABC $= u^2 : v^2$, a taktéž $\triangle$ D'E'F' : $\triangle$ A'B'C' $= u^2 : v^2$; následovně $\triangle$ DEF : $\triangle$ ABC $=$ $\triangle$ D'E'F' : $\triangle$ A'B'C'; a ještě $\triangle$ ABC $=$ $\triangle$ A'B'C', musí také $\triangle$ DEF $=$ D'E'F' . . .). Tímto způsobem rozvrhli jsme oba jehlance v samé komolé, stejně vysoké jehlance a jeden celý (svrchní). Spojme nyní s každým takovýmto zkomoleným jehlancem dva hranoly, z nichžto by měl jeden (zevnější) za základnu podstavu spodní, druhý pak (vnitřní) podstavu svrchní, jako jsou na př. dole hranoly ABCDMN a DEFKA.

Z hranolů těchto jest tedy jeden komolému jehlanci opsán, druhý vepsán, a zároveň jest při tom patrno, že jsou vždycky z těchto hranolů dva a dva souhlasné opsané i dva a dva souhlasné vepsané sobě rovny (§ 86, 5, b). Také z toho ale plyne, předně, že jsou součty S a S' opsaných hranolů i součty s a s' vepsaných hranolů v obou jehlancích vespolek sobě rovny, a za druhé, že od vrcholů O a O' počínaje v obou jehlancích jest každý opsaný hranol roveň následujícímu po něm hranolu vepsanému, protože mají stejné výšky i základny, tak že rozdíl $S - s$ (a nebo $S' - s'$) rovná se nejspodnějšímu opsanému hranolu ABCDMN $= h$. A nyní můžeme již tvrditi, že jehlanec J (nebo J') větší jest nežli součet hranolů vepsaných, menší ale nežli součet hranolů opsaných, tak že bude $s < J < S$ . . . . α). Na druhé straně bylo by $s' < J' < S'$; že ale jest $S = S'$, a $s = s'$, můžeme také psáti $s < J' < S$ . . . . β). Odečteme-li nyní od nerovnosti $J < S$ nerovnosť $J' > s$, vyjde nerovnosť $J - J' < S - s$, čili $J - J' < h$, t. j. kdyžby dané jehlance nebyly stejné, byl by jejich rozdíl menší nežli hranol, který má s oběma jehlanci stejnou základnu a jehož výška obnáší $n$tý díl výšky jehlanců. Jestliže však učiníme číslo n nekonečně velké, bude výška hranolu h nekonečně malá, pročež i krychlový jeho obsah nemůže nežli nekonečně malý býti; a poněvadž má být rozdíl našich jehlanců předce ještě menší, musí se rovnati nule, t. j. mezi oběma jehlanci není žádného rozdílu a J = J' jak bylo tvrzeno.

Pozn. Týž důkaz provedl by se i pro vícestrané jehlance.

2. *Třístraný hranol dá se rozložiti na tři stejné jehlance.*

Důkaz. V hranolu AF (obr. 305.) polož rovinu body A, C, E, čímž se odřízne z hranolu třístraný jehlanec EABC a zůstane čtyrstraný EACFD; tento rozděl zase rovinou CDE ve dva třístrané EACD a EDCF. Tyto dva posledně jmenované jehlance budou sobě rovny, protože mají stejné základny ($\triangle$ ACD $\cong$ $\triangle$ CDF) a společný vrchol v E t. j. stejnou výšku. A však i jehlanec EABC = EDCF (stejné základny ABC a DEF, a výška mezi EB a stěnou ACDF); jest tedy jehlanec ABCE = DFCE = DACE.



Obr. 305.

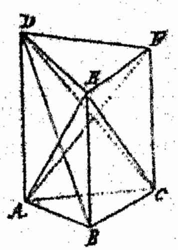
Výsledky. a) Každý třístraný hranol jest roveň trojnásobnému jehlanci, s nímžto má stejnou základnu i výšku; a naopak: třístraný jehlanec rovná se třetině hranolu, s nímžto má stejnou základnu i výšku.

b) Poněvadž se dá každý mnohostraný hranol úhlopříčnými řezy rozložiti v samé třístrané hranoly právě tak jako i mnohostraný jehlanec v samé třístrané jehlance téže výšky rozvrhnut býti může; *bude všeobecně každý jehlanec roveň třetině hranolu téže výšky a základny.*

c) Z věty této ve spojení s § 86, 5, výsl. e) plyne: Jehlance na stejných základnách mají se k sobě jako jejich výšky, při stejných výškách ale jako jejich základny; vůbec pak mají se obsahy dvou jehlanců k sobě, jako součiny z jejich výšek a základen.

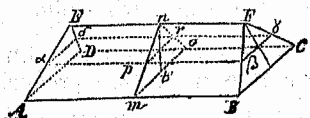
3. *Třístraný, k základně šikmo seříznutý hranol rovná se součtu tří jehlanců, které mají s ním společnou základnu a jichžto vrcholy leží v rozích šikmého řezu.*

Důkaz. V šikmo seříznutém hranolu AF (obr. 306.) polož zase roviny AEC a DEC, čímž obdržíš, jako v předešlém, opět tři třístrané jehlance, tak že bude hranol H = jehl. ABCE + ACDE + CDFE. Z těchto jehlanců má první, t. j. ABCE s hranolem stejnou základnu a vrchol v E. Druhý jehlanec ACDE jest roveň jehlanci ACDB, s nímžto má společnou základnu ACD a stejnou výšku (vrchol jest tu v B, a poněvadž jest EB rovnoběžna k stěně ACFD, mají všechny body BF od této stěny stejnou vzdálenosť). Postavíš-li nyní



Obr. 306.

tento jehlanec ACDB na stěnu ABC, bude jeho vrchol v D; následovně druhý jehlanec ACDE = ABCD, t. j. druhý jehlanec rovná se jehlanci, jehož základnou jest základna hranolu, a jehož vrchol leží v D. — Konečně třetí jehlanec DCFE rovná se jehlanci ACFE, s nímžto má společný vrchol v E (jest totiž △CDF = △ACF); ten však rovná se zase jehlanci ACFB (mají společnou základnu ACF a vrcholy E a B leží v přímce BE, která jest s ní rovnoběžná). Máme tedy DCFE = ACFB, kterýžto jehlanec, když ho postavíme na stěnu ABC, bude mít svůj vrchol v F, tak že bude také CDFE = ABCF, t. j. třetí jehlanec CDFE rovná se opět jehlanci, který má s hranolem stejnou základnu, a jehož vrchol leží v F. — Bude tedy hranol H = jehl. ABCE + ABCD + ABCF.



Obr. 307.

Dodatek. Třístraný hranol *na obou stranách šikmo sříznutý* (jako jsou hromádky na silnicích, obr. 307.) rovná se třem jehlancům, které mají kolmý řez na pobočnou hranu (t. j. *mno*) za základnu a pobočné hrany za výšky. (Důkaz na předešlé větě založený zůstaven čtenáři.)

2. Vypočítávání tělesného obsahu.

§ 88.

Tělesné obsahy mohou býti měřeny opět jen tělesy; a jako jsme činili v plochoměrství při určování ploského obsahu tak i při určování tělesných obsahů hledáme jen poměrné číslo udávající, kolikrát jest za míru přijmuté těleso v daném tělesu obsaženo. Nejpřiměřenější mírou jest tu krychle, jejíž hrana má známou č. určitou délku (délkomíra) a jejíž stěny jsou pak zároveň mírou čtvercovou. Tato míra tělesná slove proto také **mírou krychlovou** (Kubikmaß), a podle délky jedné hrany slove za míru vzatá krychle **krychlový palec** (1c″, Kubikzoll), **krychlový střevíc** (1c′) atd.

Poměrné číslo, udávající kolikrát jest krychlová míra v tělesu obsažená, slove pro vyrozumění jeho původu a na rozdíl obsahu ploského **obsah tělesný** nebo **krychlový** (körperliche oder Kubikinhalt), též **objem** (Volumen). — A poněvadž skutečné měření těles krychlovou jedničkou velmi obtížné a nejčastěji i nemožné jest, hledíme tělesný obsah určiti počtem a to z délky jistých hran, na níž jest velikost tělesa závislá. Úloha naše záleží tedy v tom, najíti tyto rozličné věty, na jichžto základě by se krychlový obsah všelikých těles vypočísti mohl.

a) Krychlový obsah hranolů a jehlanců.

1. *Krychlový obsah rovnoběžnostěnu rovná se součinu z jeho základny a výšky.*

Důkaz. Dle § 86, 3) jest v obr. 299., když přijmem krychli ah za míru, vol. AH: vol. ah = ABCD . BF : $abcd . bf$, nebo $\frac{\text{vol. AH}}{\text{vol. } ah} = \frac{\text{ABCD}}{abcd} \times \frac{\text{BF}}{bf}$, při čemž udává $\frac{\text{vol. AH}}{\text{vol. } ah}$ poměrné číslo vyjádřující krychlový obsah rovnoběžnostěnu = H, $\frac{\text{ABCD}}{abcd}$ udává poměrné číslo vyjádřující ploský obsah základny = Z, a $\frac{\text{BF}}{bf}$ poměrné číslo udávající výšku rovnoběžnostěnu = V. — Dosadíce tedy čísla tato do vzorce předešlého, obdržíme H = Z . V.

Pozn. Protože jest Z = AB . BC, bude H = AB . BC . BF; pročež díme také: *krychlový obsah rovnoběžnostěnu rovná se součinu v jednom rohu sbíhajících se hran.* Měří-li na př. A'B' = 2'', B'C' = 3'', a B'F' = 3'' bude krychlový obsah rovnoběžnostěnu H' = 2 . 3 . 3 = 18c''.

Výsledky. a) Poněvadž se dá každý šikmý rovnoběžnostěn proměniti v stejně velký přímý, s nímžto má stejnou základnu a výšku, díme vůbec: krychlový obsah každého rovnoběžnostěnu rovná se součinu z jeho základny a výšky.

b) Jsou-li v pravoúhelném rovnoběžnostěnu všechny tři hrany stejné a roveň a (krychle) vyjde $K = a^3$, t. j. *obsah krychle rovná se třetí mocnosti její hrany;* a naopak $a = \sqrt[3]{K}$.

Odtud to přijde, že slove třetí mocnina nějakého čísla též cubus. — Dle toho máme potom pro dvanáctiné rozdělení $1^{c0} = (6^3)^{c'} = 218^{c'}$, $1^{c'} = (12^3)^{c''} = 1728^{c''}$, $1^{c''} = 12^3 = 1728^{c'''}$, 1 krychlová míle $= (4000^3)^{c0} = 64000000000^{c0}$, atd. *)

2. Dle § 86, 5) dá se každý rovnoběžnostěn úhlopříčným řezem rozděliti ve dva stejné třístrané hranoly téže výšky; naopak bude tedy zase krychlový obsah třístraného hranolu roveň polovičce rovnoběžnostěnu, který má s ním stejnou výšku v, dvojnásobnou ale základnu, tedy $2z$. — A poněvadž by byl obsah rovnoběžnostěnu $2z . v$, bude obsah třístraného hranolu $H = z . v$, t. j. *krychlový obsah hranolu třístraného rovná se součinu z jeho základny a výšky.*

Mnohostranný hranol dá se však zase rozděliti v samé třístrané, které, když je jednotlivě vypočtem a obsahy jejich sečtem, dají

---

*) Při praktickém vypočítávání krychlových obsahů těles pevných, zejména v stavitelství, lesnictví atd. upouští se pro nepohodlná a veliká čísla nižších jednotek krychlových od této míry, a rozděluje se 1□° i 1c° dle míry páskové nebo pruhové (Riemenmaß, Schichtenmaß), kterýžto počet slove potom sáhování (Toisir-Rechnung). (Viz: „Jöndlovo stavitelství" od Niklasa a Šandy, str. 208.)

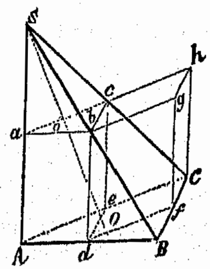
dohromady zase obsah mnohostranného hranolu, t. j. $H = V(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots) = VZ$. Máme tedy pro všechny hranoly vůbec: *Krychlový obsah každého hranolu rovná se součinu z jeho základny a výšky.*

Dodatek. Krychlové obsahy hranolů podobných mají se k sobě jako třetí mocniny jejich stejnolehlých hran. (Důkaz.)

3. *Krychlový obsah jehlance rovná se třetině součinu z jeho základny a výšky, tedy* $J = \frac{1}{3} Z . V$.

Důkaz dle věty předešlé na základě § 87, 2, výsl. b; avšak i samostatně a bez tohoto odkazu dá se věta naše dokázati následovně:

Budiž SABC třístraný jehlanec (obr. 308.). Rozpůl některou hranu, na př. $Sb = Bb$, a polož bodem b jednu rovinu (abc) rovnoběžně k základně ABC, druhou ($bcde$) rovnoběžně s hranou AS, a konečně třetí rovinu (bdf) rovnoběžně ku stěně ASC. Tímto rozpůlí se i všechny ostatní hrany (§ 71. 1) a daný jehlanec rozpadne se ve dva menší třístrané jehlance $Sabc$, $bdfB$, a ve dva třístrané hranoly $Adeabc$ a $bdfCec$. Dle § 77. 9 jest jehlanec $Sabc \cong bdfB$ a při tom jsou oba velkému jehlanci podobny; pročež také $\triangle abc \cong \triangle dBf \cong \triangle Ade$. Že ale jest $df \parallel AC$, musí



Obr. 308.

být $\triangle dfB \sim \triangle ABC$; pročež $\triangle dfB : \triangle ABC = \overline{Bd}^2 : \overline{BA}^2 = \frac{1}{4} : 1$, a tudy i $\triangle dfB = \frac{1}{4} \triangle ABC = \triangle abc = \triangle Ade$. Zbytek základny, t. j. $defc$ jest tedy $= \triangle ABC - 2.\frac{1}{4} \triangle ABC$ čili $defc = \frac{1}{2} \triangle ABC$. Nyní tedy odejmeme z celého jehlance oba malé jehlance, které mají za základny $\frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{1}{4} Z$, a za výšku $\frac{1}{2} SO = \frac{1}{2} V$, a vypočítejme krychlové obsahy pozůstalých hranolů. Hranol $abcAde = h = \frac{1}{4} Z . \frac{1}{2} V = \frac{1}{8} ZV$. Aby se mohl i obsah druhého hranolu pohodlně vyjádřiti, polož hranou bc rovinu rovnoběžně s ABC a učiň $fg \parallel hc \parallel bd$, tak aby vznikl rovnoběžnostěn, jehož základnou jest $defC = \frac{1}{2} Z$ a výškou $oO = \frac{1}{2} V$; jeho obsah bude tedy $K = \frac{1}{2} Z . \frac{1}{2} V = \frac{1}{4} ZV$. Že ale náš třístraný hranol $bdfCec$ jenom polovičku tohoto rovnoběžnostěnu obnáší, bude jeho obsah $h' = \frac{1}{8} V . Z$.

Poznačíme-li konečně obsah malých jehlanců p, obsah velkého jehlance P, bude $P = 2p + h + h' = 2p + \frac{1}{8}ZV + \frac{1}{8}ZV = 2p + \frac{1}{4}ZV$ . . . . α).

Nyní soudíme, poněvadž jehlanec není od spodu až nahoru všude stejně tlustý jako hranol, že může být obsah jehlance jenom nějaký díl, na př. $n$tý díl hranolu, s nímžto má stejnou základnu i výšku. Díl tento jest nám tedy určiti.

Takto-li soudíme i o našich třístranných, vespolek sobě podobných jehlancích, bude $P = \frac{1}{n}ZV$, $p = \frac{1}{n}zv = \frac{1}{n}.\frac{1}{4}Z.\frac{1}{2}V$, tak že dosadíce hodnoty tyto do rovnice α), obdržíme $\frac{1}{n}ZV = 2.\frac{1}{n}\frac{ZV}{8} + \frac{VZ}{4}$, nebo když součinem VZ zkrátíme, $\frac{1}{n} = \frac{1}{4n} + \frac{1}{4}$; a z toho $4 = 1 + n$, následovně $n = 3$.

Třístranný jehlanec jest tedy jenom třetina hranolu, s nímžto má stejnou základnu i výšku; a poněvadž se dá každý mnohostranný jehlanec rozložiti v samé třístranné, platí věta právě dokázaná o všech jehlancích.

4. *Krychlový obsah jehlance komolého rovná se součtu tří jiných jehlanců, které mají s ním jednostejnou výšku, jichžto základnými jsou ale dle řady spodní základna, svrchní základna, a třetí měřická srovnalostná obou základen jehlance daného.*

Důkaz. V obr. 279. buď $oO = v$ výška, $ABCD = Z$ spodní a $abcd = z$ svrchní základna komolého jehlance $ABCDabcd = K$. Doplníme-li si v myšlenkách toto těleso na celý jehlanec a poznamenáme obsah celého jehlance P, obsah pak malého jehlance $Sabcd = p$, bude $K = P - p$ . . . . α)

Poznačíme-li neznámou výšku malého jehlance $So = x$, budeme moci dle předešlé věty rovnici α) také psáti

$$K = \frac{Z}{3}(v + x) - \frac{1}{3}zx = \frac{1}{3}Zv + \frac{1}{3}x(Z - z) \;.\;.\;.\;.\;.\; \beta)$$

Neznámou x najdeme dle § 78, 10, b, $Z : z = (v + x)^2 : x^2$, nebo $\sqrt{Z} : \sqrt{z} = (v + x) : x$; a z toho $x = \frac{v\sqrt{z}}{\sqrt{Z} - \sqrt{z}}$. — Dosadíce hodnotu tuto do rovnice β), obdržíme

$$K = \frac{1}{3}Zv + \frac{1}{3}(Z - z)\frac{v\sqrt{z}}{\sqrt{Z} - \sqrt{z}} = \frac{1}{3}Zv + \frac{1}{3}v\sqrt{z}(\sqrt{Z} + \sqrt{z}),$$

nebo $$K = \frac{v}{3}(Z + \sqrt{Zz} + z).$$

Pozn. V praktických výpočtech považuje se obyčejně komolý jehlanec za hranol téže výšky a střední základny, t. j. jehož základna jest $\frac{Z+z}{2}$. O mnoho-li se tu od skutečnosti odchýlíme?

5. Dle § 87, 3. rovná se třístraný, šikmo seříznutý hranol třem jehlancům. Budiž tedy hranol tento nejprvé přímý, jeho základna z, a jeho poboční hrany a, b, c; i bude potom jeho kr. obsah $H = \frac{z}{3}(a+b+c)$, t. j. *krychlový obsah třístraného, šikmo seříznutého hranolu rovná se součinu z jeho základny a aritmetického středu jeho postranních hran.*

Kdyby byl takovýto přímý hranol na obou stranách seříznut, jako na př. v obr. 307., učiňme si na pobočné hrany kolmý řez $mno = p$; i bude potom levá částˇ tohoto tělesa $ADEmno = \frac{1}{3}p(Am + En + Do)$, druhá část $BCFmno = \frac{1}{3}p(mB + nF + oC)$; pročež dohromady celé těleso $K = \frac{1}{3}p(Am + mB + En + nF + Do + oC) = \frac{1}{3}p(AB + CD + EF)$, t. j. *krychlový obsah na obou stranách seříznutého hranolu* (hromádky na silnici, střechy s valbama, atd.) *rovná se součinu z kolmého řezu a aritmetického středu pobočných hran.*

Poznámky. a) Obyčejně bývají dvě pobočné hrany stejné ($AB = DC$ a tu pak jest $k = \frac{1}{3}p(2a+b)$, jestliže poznačíme $AB = DC = a$, $EF = b$; při tom jest $mo = BC$ (je-li ABCD rovnoběžníkem), následovně $p = \frac{mo \cdot nt}{2} = BC \cdot \frac{v}{2}$, tak že u hromádky takové potřebujeme jenom změřiti délku AB, šířku BC, vrcholici EF, a pomocí latě výšku v.

U hranolu šikmého musí se taktéž učiniti dříve kolmý řez p, kdežto jest potom jeho obsah $H = pa$ (značí-li a poboční hranu); nebo když by byl hranol ještě šikmo seříznut a m aritmetický střed jeho pobočních hran, $H = pm$.

Platí věta (5) a obě tyto poznámky též o hranolu mnohostraném?

Úlohy.

Hrana krychle jest $a = 8{\cdot}25''$; má se určiti její krychlový obsah K, povrch P, a tělesná úhlopříčna d.

2. Má se určiti povrch krychle, která má takový obsah jako tři jiné krychle, jichžto hrany jsou $a = 3'$ $b = 4'$ $c = 5'$. [Hrana $x = \sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}$, a povrch $P = 6\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)^2}$.]

3. Krychlový podstávec k pomníku jest z mramoru, jehož potažná váha $s = 2{\cdot}8$, a váží celkem 539·38 centů; jakou hranu obdrží podstavec ten? (Viz § 90, 8, b o určování krychl. obsahu pomocí váhy.)

4. Mnoho-li obilí vejde se do truhlíka 2°1′ dlouhého, 4′3″ širokého a 3′8″ vysokého, když jedna měřice $m = 1{\cdot}9471c' = 2c'$?

5. Mázová nádoba s čtvercovou základnou má být dvakrát tak vysoká,

jako jest dlouhá; jaké bude mít rozměry, když jeden máz $=77 \cdot 414 c''$? [Je-li strana základny x, bude výška $2x$, a celý obsah $2x^3=77 \cdot 414 c''$ atd.]

6. Rovnoběžnostěn jest $m=1 \cdot 5$krát tak široký jako vysoký, a $n=3$krát tak dlouhý jak široký; jeho obsah $H=18 \cdot 8425 c^0$.

Jaká bude jeho výška x, šířka y, a délka z?

$$x=\sqrt[3]{\frac{H}{m^2 n}}, \quad y=mx, \quad z=mnx.$$

7. Zahrada v podobě obdélníka, jehož délka $a=63'$ a šířka $b=42'$, má se ohraditi zdí, která by byla vysoká $v=10'$ a tlustá $1 \cdot 5'$. Mnoho-li cihel obyčejného rozměru ($1'$ do délky, $\frac{1}{2}'$ do šířky, a $3''$ do výšky) bude k tomu třeba a o jakou plochu zmenší se tím zahrada?

8. Třístraný hranol, jehož strany na podstavě jsou $a=2''$, $b=3''$, $c=4''$, jest $10''$ vysoký; má se určiti jeho povrch P i krychlový obsah H.

9. V šestistraném přímém hranolu jest výška $14'$ a hrana na základně $1\frac{1}{2}'$; jaký jest povvrch P, a jaký obsah H?

10. Základnou přímého hranolu, jehož krychlový obsah $H=972c'$, jest rovnostraný trojúhelník; postraní hrana a a strana b na základně mají se k sobě jako $3:2$. Jaké jsou hrany a jak velká jest základna toho hranolu?

$$H=z.a, \text{ a při tom } z=\frac{b^2}{4}\sqrt{3},\ b=\frac{2a}{3}; \text{ pročež } z=\frac{a^2\sqrt{3}}{9},\ a=\sqrt[3]{\frac{9H}{\sqrt{3}}}, \text{ atd.}$$

11. V přímém hranolu, jehož výška $v=13 \cdot 5'$ a krychlový obsah $H=36 \cdot 5c'$, jest základnou rovnostraný trojúhelník; má se určiti povrch hranolu.

$$P=2\left(\frac{H}{3}+\sqrt{3Hv\sqrt{3}}\right).$$

12. Jakýsi stroj ze železa váží 537 centů a jest $19 \cdot 7'$ dlouhý, $14 \cdot 7'$ široký, a $8 \cdot 5'$ vysoký. Má se shotoviti z téže látky model tohoto stroje, který by vážil jenom 1 cent; jaké budou jeho rozměry?

Souhlasné rozměry budou v poměru $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{537}$, t. j. $1:8 \cdot 1281$ atd.

13. V třístraném hranolu jsou postraní stěny $a=16$, $b=20$, $c=30$ a základna $z=7$ čtverč. stop; má se určiti jeho krychl. obsah.

14. Povrch pravoúhelného rovnoběžnostěnu jest $P\square'$, jeho délka přesahuje součet šířky a výšky o m palců, a jeho tělesná úhlopříčna obnáší k palců, jak se určí jeho obsah?

V obr. 303. bude, když poznačíme $aB=x$, $cB=y$, $BF=z$, úhlopříčnu $Bh=k$, $P=2(xy+xz+yz)$ . . . . 1), dále jest $z=x+y+m$ . . . . 2) a konečně $k^2=z^2+(x^2+y^2)$ . . . 3) z kterýchžto rovnic dají se již hrany i obsah určiti.

15. Jaký obsah má hromádka na silnici, je-li dole $13'$ a nahoře $8'$ dlouhá, u země $3'$ široká a při tom $2'$ vysoká?

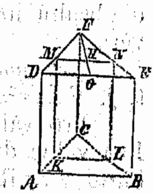
16. Z 20 liber olova mají se udělati krychle, jichžto obsahy mají se k sobě jako $5:3:2$; a) jaké budou jejich hrany, když potažná váha olova $v=11 \cdot 35$, b) mnoho-li korku muselo by se připevniti k nejmenší z nich, aby po vodě plovala?

$$\text{Krychlový obsah } K=\frac{20.1728}{56 \cdot 5 \times 11 \cdot 35}=11 \cdot 5c''; \text{ hrana první kryche}$$

$$a=\sqrt[3]{\frac{11 \cdot 5 \times 5}{10}},\ b=\sqrt[3]{\frac{11 \cdot 5 \times 2}{10}},\ c=\sqrt[3]{\frac{11 \cdot 5 \times 2}{10}}=\sqrt[3]{2.3c''}.$$ Třetí krychle, jejíž obsah $=2 \cdot 3c''$, váží $27 \cdot 3$ lotů, týž objem vody ale jenom $2 \cdot 4$ lotů; tedy se musí přivěsiti 25 lotů korku, aby mohla krychle ve vodě plovat.

17. V třístraném hranolu jest dáno: výška $v=56'$, strana základny $AB=a=36'$, $AC=BC=30'$; má-li se z tohoto hranolu odříznouti rovinou, která by byla

stěnou ABED rovnoběžná, čtyrstraný hranol obsahu $m=7392c'$, v jaké vzdálenosti od této stěny ($HG=d$) musí se rovina MNKL položiti?



Vzdálenost $d=FG-FH$; při tom $FG=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$. K určení FH provede se:

Obsah hranolu $H=vz=v.\frac{a}{4}\sqrt{4b^2-a^2}$, pozůstalá část $H'=a\frac{v}{4}\sqrt{4b^2-a^2}-m$, základna $MNF=z'=\frac{a}{4}\sqrt{4b^2-a^2}-\frac{m}{v}$; dále pak plyne ze srovnalosti $z:z'=\overline{BG}^2:\overline{BH}^2$, $BH=\frac{BG.\sqrt{z'}}{\sqrt{z}}$ atd., tak že bude konečně $d=4'$.

Obr. 309.

18. Jaký obsah krychlový má pravid. jehlanec a) třístraný, b) čtyrstraný, c) pětistraný, když jedna hrana $a=2''$?

19. Jaký obsah má pravid. čtyrstraný jehlanec, když poloměr základně opsaného kruhu $r=1\frac{1}{2}''$?

20. V třístraném jehlanci SABC stojí všechny tři v rohu A sbíhající se hrany vespolek na sobě kolmo, a mimo to jest základna $ABC=z=6\square'$, postraní stěna $SAB=a=7\frac{1}{2}\square'$ a stěna $SAC=b=10\square'$; mají se určiti všechny hrany, povrch a tělesný obsah jehlance.

Základna (pravoúhelný trojúhelník) $ABC=z=\frac{AB.AC}{2}$,

$\triangle SAB=a=\frac{AB.AS}{2}$, $\triangle SAC=b=\frac{AC.AS}{2}$, kteréžto rovnice dají jednotlivé hrany, atd.

21. V přímém jehlanci, který má čtvercovou základnu, jest výška $v=14''$ a veškerý povrch $P=860\square''$; a) jak velká jest hrana na základně, b) mnoho-li obnáší krychl. obsah?

22. Jehlanec, jehož základna $Z=343\square'$ a výška $V=12'$, má se rovnoběžně ku základně tak seříznout, aby odříznutý kus k pozůstalému byl v poměru 2:5. V jaké výšce musí se řez učiniti?

Obsahy daného a odříznutého jehlance buďte P a p, tedy jest $p:P=2:7$; a však $z:Z=v^2:V^2$, atd.

V kterém místě musel by se jehlanec ten přeříznouti (rovnoběžně k základně), když by se měl rozpůliti?

23. Obsah přímého jehlance jest $J=12255c'$; jestliže ho ve výšce $v=27'$ skomolíme, tak aby obsah komolého jehlance $T=10112c'$ obnášel, jaká byla výška a jaká základna celého jehlance, a konečně jak velký jest řez?

24. Jaký obsah krychl. má komolý jehlanec, jehož větší základna $Z=25\square'$, výška $v=24'$, a v němžto dvě souhlasné strany obou základen mají se k sobě jako $m:n=2\cdot5:2$? $(J=\frac{vZ}{3}[1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}])$.

25. Jak vysoký byl jehlanec, když spodní uříznutá jeho část (jehlanec komolý) má $Z=28\cdot8\square'$, $z=12\cdot8\square'$, a obsah $J=60\cdot8c'$?

$$v=\frac{3J}{Z^3-z^3}(Z^2+z\sqrt{Zz})=9'.$$

b. Krychlové obsahy válce a kužele.

§ 89.

1. Poněvadž každý válec, nechť jest jeho základnou jakýkoliv křivočarný obrazec, považovati se může za hranol, jehož základna

má nesčíslně mnoho nekonečně malých stran, podrží všechny věty o obsahu hranolu jednající i u válce svou platnost, tak že máme větu:

Krychlový obsah válce rovná se součinu z jeho základny a výšky, t. j. $V = r^2\pi v$ *) . . . . . . 1)

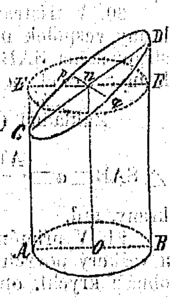
Pro váleč rovnostraný, kde jest $v=2r$, obdržíme $V=2\pi r^3$. . 2)

Pro válec dutý konečně, značí-li R a r poloměry základných kruhů, bude $V = R^2\pi v - r^2\pi v = \pi v(R^2-r^2) = \pi v(R+r)(R-r)$ . . . . 3)

D o d a t e k. Válce o stejných výškách mají se k sobě, jako jejich základny (tedy jako $R^2 : r^2$), při stejných půdicích jako jejich výšky; vůbec jsou krychlové obsahy válců v složeném poměru jejich výšek a základen. — Podobné válce (§ 78, 5.) mají se k sobě, jako třetí mocniny souhlasných přímek. (Důkaz snadný.)

2. *Krychlový obsah válce šikmo seříznutého rovná se součinu z jeho základny a střední výšky (nebo osy).*

Důkaz. Buď v obr. 310. CD šikmý řez válce, no osou válce, $Ao = r$ poloměr jeho základny. Polož středním bodem n rovinu EF rovnoběžně k základně, která prořízne rovinu šikmého řezu dle přímky pq a seřízne z válce část pqFD. Část tato jest shodná s částkou pqCE na druhé straně (proč?), jížto se seříznutý válec doplňuje na celý ABEF. Co se tehdy na jedné straně ubralo, přidalo se na druhé, tak že válec ABCD = ABEF $= \pi r^2 . no = \pi r^2 a.$



Obr. 310.

3. Jako se válec považoval za hranol, tak i kužel lze považovati za jehlanec, tak že bude věta:

Krychlový obsah kužele rovná se třetině součinu z jeho základny a výšky, t. j. $K = \frac{1}{3} z . v$ . . . . . . 1)

V rovnostraném kuželi, když jest místo výšky dána strana $a = 2r$, bude $K = \frac{1}{3} r^2\pi \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ . . . . . . 2)

Počínajíce sobě jako v § 88. 4, najdeme pro krychlový obsah k u ž e l e k o m o l é h o vzorec $K = \frac{1}{3} v\pi(R^2 + r^2 + Rr)$ . . . . 3)

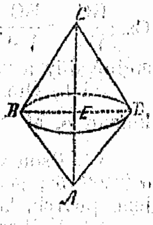
Kdyby bylo $r = 0$, přešel by ihned komolý jehlanec v plný $\frac{1}{3} r^2 v\pi$.

D o d a t e k. Všechno co bylo v dodatku předešlého odstavce uvedeno o poměrech válců, platí též i o kuželích.

4. *Krychlový obsah kužele dvojitého,* který vznikne otočením se trojúhelníka kolem jedné jeho strany, *rovná se třetině součinu z jeho osy a společné základny.*

*) Rovnice tato platí pro každý válec vůbec, tedy i pro šikmý na základě § 86. 4, výsledek a.

Důkaz. V obr. 311. vznikl dvojitý kužel ABCD otočením se trojúhelníka ABC kolem strany AC; poloměr společné základny jest $r = BE \perp CA$, výška svrchního kužele jest CE, spodního AE. Celý krychlový obsah sestává z dvou kuželů, tak že bude $K = \frac{1}{3}r^2\pi \,.\, CE + \frac{1}{3}r^2\pi \,.\, EA = \frac{1}{3}r^2\pi(CE+EA) = \frac{1}{3}r^2\pi . CA.$ (Viz § 90, 2, a.)



Obr. 311.

Dodatek. Uvážíme-li, že jest $BE = r$ výškou tvořícího trojúhelníka při základně $AC = b$, bude dle § 37. 4, b) $r = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, což když do naší rovnice dosadíme, obdržíme

$$K = \frac{1}{3}\pi \,.\, b \,.\, \frac{4}{b^2}s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{4\pi}{3b} \,.\, s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Úlohy.

1. Kolik mázů vejde se do plechovce (válce) 10'' vysokého a 6'' tlustého? (1 máz $= 77\cdot41c''$.)

2. Jak tlustá musí být mázová nádoba, je-li 9'' vysoká?

3. Jaký průměr musí obdržeti válec 2' vysoký, aby měřil zrovna 1 vědro $= 1\cdot792c'$?

4. K nějakému lisu jest potřeba 6 plných válců z litiny à 4' výšky a 1'3' v průměru. Mnoho-li budou válce ty státi, když libra litiny (potažná váha její jest 7·2) i s dovozem přijde na 15 kr.?

5. Mnoho-li bude stát při této ceně roura z litiny 1'' tlustá, $1^1/_2{}^0$ dlouhá, má-li vnitřní její průměr 8''?

6. Hmota válcové roury, která jest 12' dlouhá a jejíž průměr $d = 1\cdot66'$, obnáší $K = 9\cdot62c'$; jak tlustá jest roura ta?

7. Průměr mlýnského kamene $d = 5\cdot5'$, jeho tloušťka č. výška $v = 3\cdot5'$, a veškerý jeho obsah, t. j. pouhá hmota bez otvoru $V = 81\cdot567c'$. Jak velký jest průměr otvoru a jaký povrch má vnitřní i zevnitřní plášť?

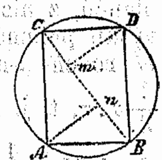
8. Špalek mající čtvercovou základnu, jejíž obsahy $z = 1\cdot2\square'$, má se po délce provrtati. Je-li špalek 10' dlouhý a v hmotě při každé straně 4·5'' tlustý zůstati musí; jaký obsah a jaký povrch bude mít špalek ten po vyvrtání?

9. Z mosazu, jehož potažná váha $s = 7\cdot9$, má se udělati závaží m těžké 1 libru, a sice v podobě válce dvakrát tak vysokého jako tlustého. Jaký rozměr obdrží závaží?

10. Dle výpočtu mechaniky snese vodorovný trám nejvíce, je-li z kmene tak přitesán, aby šířka a výška jeho průřezné plochy byly v průměru $1 : \sqrt{2}$. a) Jak se musí průřez tento odměřiti; b) mnoho-li dříví odpadne způsobem tímto z kmenu 4° dlouhého, který jest v průměru 2' tlustý?

ad a) Je-li v obr. 312. $CD \parallel AB$, $AC \parallel BD$, a při tom $CD : BD = 1 : \sqrt{2}$, spusť $Dm \perp BC$, a taktéž $An \perp BC$, i budou trojúhelníky CDm a ABn shodné, následovně $Cm = Bn$, $Dm = An$. Že ale jest $\overline{CD}^2 : \overline{DB}^2 = 1:2$, a $(\overline{CD}^2 + \overline{DB}^2) : \overline{CD}^2 = 3:1$, čili $\overline{BC}^2 : \overline{CD}^2 = 3:1$, bude $\overline{CD}^2 = \frac{\overline{BC}^2}{3}$, a následovně

$$\overline{BD}^2 = \frac{2}{3}\overline{BC}^2 \quad . \; . \; . \; . \quad \alpha)$$



Obr. 312.

Avšak i $Cm : CD = CD : BC$, nebo když za CD dosadíme hodnoty z α)

$Cm:\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{BC}{\sqrt{3}}:BC$, a z toho $Cm=\frac{BC}{3}$, t. j. průměr kruhu rozdělí se na 3 stejné díly a vztyčí se kolmice, čímž vzniknou rohy žádaného průřezu.

ad b) Otesáním spůsobený odpadek dříví jest, když dáme $BC=d$ a délku kmenu a, $M=\frac{ad^2}{12}(3\pi-4\sqrt{2})$.

11. Osou válce $a=8'$ jsou položeny dvě roviny, které spolu zavírají úhel $\alpha=24^{0}15'$; jak velký bude způsobem tímto učiněný výsek válce, a jaký bude jeho povrch, když poloměr základny $r=4'$?

12. Veškerý povrch přímého válce $P=51{\cdot}268\square''$ a jeho krychlový obsah $V=78{\cdot}537c''$; má se určiti jeho výška a tlouštka.

13. Jaký obsah V má válcová roura, která jest dlouhá $l=9'$, tlustá $d=1^1/_4''$, a jejíž obvod z venku jest $a=2'10''$?

$$V=\pi l(R^2-r^2)=\pi l(R+r)d=ald(2R-d)=\pi ld-\pi ld^2.$$

14. V komolém kuželi, jehož výška $v=4{\cdot}8'$ a spodní základna $Z=10\square'$, jsou poloměry obou základen v poměru $m:n=5:4$; má se určiti krychlový jeho obsah.

15. Veškerý povrch komolého kužele $P=754{\cdot}7676\square'$; jeho krychlový obsah $K=468{\cdot}25c'$ a jeho strana s rovná se trojnásobnému rozdílu poloměrů obou základen; mají se určiti obě základny i výška tělesa.

16. Osou vedený řez přímého kužele tvoří rovnostraný trojúhelník, jehož strana $a=5{\cdot}2'$; má se určiti povrch i krychl. obsah kužele.

17. Z 36 liber olova, jehož potažná váha $s=11{\cdot}4$, mají se shotoviti tři stejně vysoké kužele, jichžto základny stojí v poměru $m:n:p=8:5:3$; jakou výšku budou mít kužele a jaké poloměry budou mít jejich základny?

18. Z jedlového kmenu, který jest dole $32{\cdot}28''$ tlustý a 5^0 dlouhý, má se uříznouti špalek $55c'$ velký; v kterém místě musí se kmen přeříznouti?

19. Jak vysoký byl kmen, když uříznutý špalek $K=103{\cdot}5c'$ má dole v průřezu plochy $Z=44{\cdot}178\square''$ a nahoře $7\square''$?

$$\left(v=\frac{3K}{Z^3-z^3}[Z^2+z\sqrt{Zz}]\right).$$

20. Ze špalku dlouhého $d=5^0$, který jest na jednom konci tlustý $2R=3{\cdot}5'$ a na druhém $2r=2{\cdot}5'$, má se vysekati čtyrstraný všude stejně tlustý trám, tak aby jeho čelo tvořilo do menšího kruhu vepsaný čtverec; mnoho-li dříví odpadne tu osekáním? Obsah odpadku $K=\frac{1}{3}d\,[\pi R(R+r)-(6-\pi)r^2]=?$

c. Krychlové obsahy těles pravidelných a točených.

§ 90.

1. *Krychlový obsah tělesa pravidelného rovná se třetině součinu z jeho povrchu a poloměru vepsané koule.*

Důkaz. Položíme-li středem pravid. tělesa a veškerými jeho hranami roviny, rozpadne se těleso v n přímých a shodných jehlanců, z nichž každý má za podstavu jednu stěnu s tělesa, a za výšku poloměr r vepsané mu koule. Jest tedy pravid. mnohostěn M roveň n-násobnému takovémuto jehlanci, jehož obsah $p=\frac{1}{3}s.r$, t. j. $M=\frac{1}{3}nsr$; že ale dává ns povrch tělesa P, bude obsah $M=\frac{1}{3}Pr$. A jelikož jak povrch tělesa tak i poloměr vepsané koule závislé jsou na velikosti hrany mnohostěnu, bude lze určiti krychl. obsah každého pravid. mnohostěnu, jakmile by dána byla jeho hrana. Pročež bude, když poznačíme povrch pravid. tělesa O, jeho obsah V, s použitím rovnic § 82.

a) krychl. obsah **čtyrstěnu** $V_4 = \frac{1}{12}a^3\sqrt{3} = \frac{8}{27}R^3\sqrt{3} = 8r^3\sqrt{3} = {}^8/_3\varrho$; *)

b) „ „ **osmistěnu** $V_8 = {}^1/_3 a^3\sqrt{2} = \frac{4}{3}R^3 = 4r^3\sqrt{3} = \frac{8}{3}\varrho^3\sqrt{2}$;

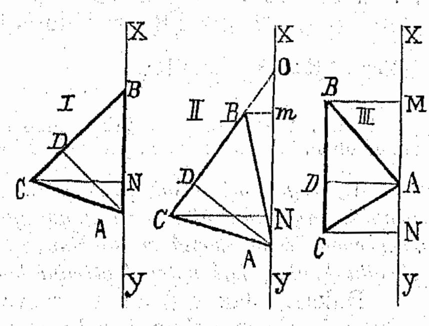
c) „ „ **dvanáctistěnu** $V_{12} = {}^1/_4 a^3\sqrt{5}(7+3\sqrt{5}) = \frac{2}{9}R^3(5\sqrt{3}+\sqrt{15}) = 10r^3\sqrt{130-58\sqrt{5}} = 2\varrho^3(3\sqrt{5}-5)$;

d) krychl. obsah **dvacítistěnu** $V_{20} = {}^5/_{12}a^3(3+\sqrt{5}) = {}^2/_3R^3\sqrt{2(5+\sqrt{5})} = 10r^3(7\sqrt{3}-3\sqrt{15}) = \frac{10}{3}\varrho^3(\sqrt{5}-1)$.

2. *Krychlový obsah tělesa vzniklého otočením se trojúhelníka kolem osy, která prochází jeho vrcholem, rovná se třetině součinu z pláště, vytvořeného základnou trojúhelníka, a z výšky k této základně náležející.*

Důkaz. Zde musíme rozeznávati 3 případy, a sice a) když osa xy splyne s jednou stranou trojúhelníka dohromady (v obr. 313. I. na př. s AB). V případu tomto jest vytvořené těleso dvojitým kuželem, jehož obsah dle § 89, 4) bude $V = {}^1/_3\overline{CN}^2 . \pi . AB$, když jest totiž $CN \perp xy$. Avšak součin AB.CN, udávající dvojnásobnou plochu tvořícího trojúhelníka, rovná se součinu BC.AD (když uděláme $AD \perp BC$); pročež bude také $V = {}^1/_3\pi . CN . BC . AD$. Součinem $\pi . CN . BC$ vyjádřuje se ale plášť kužele vytvořeného základnou BC, a AD jest k ní přináležející výškou, jak bylo tvrzeno.

b) V druhém případu, když osa procházející vrcholem A (obr. II.) leží mimo trojúhelník nejsouc se žádnou jeho stranou rovnoběžná, prodluž základnu BC, až by osu prosekla; tím vzniknou dva trojúhelníky ACO a ABO, z nichžto otočením se kolem xy vytvoří každý jeden dvojitý kužel. Rozdíl těchto dvojkuželů dá potom trojúhelníkem ABC vytvořené těleso.



Obr. 313.

*) Pilnému čtenáři odporučuje se skutečné provedení těchto výpočtů.

Bude tedy dle případu předcházejícího dvojkužel ACO = $\frac{1}{3}\pi . CN . CO . AD$, dvojkužel ABO = $\frac{1}{3}\pi . BM . BO . AD$; následovně těleso $V = \frac{1}{3}AD(\pi . CN . CO - \pi . BM . BO)$. V závorce jsou zde pláště dvou kuželů, jichžto rozdíl dává plášť komolého kužele CBMN; jest tedy naše těleso $V = \frac{1}{3}AD \times$ pláštěm BC.

c) Je-li osa se základnou rovnoběžná (obr. III.). Těleso trojúhelníkem ABC vytvořené rovná se válci vytvořenému základnou, zmenšenému o dva kužele, z nichžto jest jeden vytvořen stranou AB, druhý stranou AC. Máme tedy

$$V = \pi . \overline{AD}^2 . BC - [\frac{1}{3}\pi . \overline{BM}^2 . MA + \frac{1}{3}\pi . \overline{CN}^2 . NA];$$

že ale jest BM = AD = CN, bude

$$V = \pi . \overline{AD}^2 . BC - \frac{1}{3}\pi . \overline{AD}^2[MA + AN] = \frac{2}{3}\pi . \overline{AD}^2 . BC,$$

což vlastně zase dává základnou BC vytvořený plášť $2\pi . AD . BC$, znásobený výškou AD.

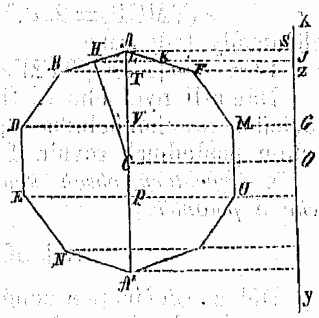
3. *Krychlový obsah tělesa vytvořeného otočením se pravidelného mnohoúhelníka kolem jeho průměru (sferoid) rovná se dvěma třetinám součinu z této osy a plochy do mnohoúhelníka vepsaného kruhu.*

Důkaz. V jedné polovici tvořícího mnohoúhelníka spoj rohy obvodu se středem obrazce, a obdržíš samé trojúhelníky, které se otáčejí kolem přímky procházející společným jejich vrcholem, a mají vesměs stejné základny i stejné výšky. Součet těles takto vytvořených dává potom žádaný sferoid. — Poznačíme-li tedy výšku trojúhelníků, t. j. poloměr vepsaného kruhu r, poloměr opsaného kruhu R, a pláště vytvořené jednotlivými stranami p; bude dle předešlé věty součet vytvořených těles $S = \frac{r}{3}(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots)$. Součet veškerých plášťů p dává však povrch sferoidu, který jest dle § 84. 5) $2R . 2r\pi$; dosadíce hodnotu tuto obdržíme $S = \frac{r}{3} 2r\pi . 2R = \frac{2}{3}r^2\pi . 2R$.

Pozn. Věta tato platí, jak snadno nahlídnouti lze, i pro tělesa vytvořená mnohoúhelníkem nepravidelným, pokud jenom může být do něj vepsán kruh.

4. *Krychlový obsah prstenového tělesa, které vznikne otočením se pravid. mnohoúhelníka s rovným počtem stran kolem osy s průměrem rovnoběžné, rovná se součinu z plochy tvořícího mnohoúhelníka a obvodu kruhu, jejž vytvoří střední bod obrazce.*

Důkaz. Jak v § 84. 6) vysvětleno bylo, sestává těleso toto z dvou částí; spustíme-li tedy se všech rohů tvořícího obrazce na osu $xy \parallel AA'$ (obr. 314.) kolmice, rozpadne se jimi a průměrem AA' tvořící mnohoúhelník v samé lichoběžníky, z nichžto na levé straně ležící vytvořejí onu větší část, na pravé straně průměru ale ležící onu menší část prstenového tělesa. I jest nám tedy nejprvé udati tělesa vytvořená jednotlivými těmito lichoběžníky BDTV, DVEP, . . . a potom tělesa vytvořená lichoběžníky FMVT, VMUP . . . . Pro krátkost budiž v lichoběžníku BTVD strana $BT = a$, $DV = b$, $TV = v$, $TZ = d$, a jeho ploský obsah $t = \frac{1}{2}(a+b)v$. — Otočením se kolem osy xy vytvoří obdélník TVGZ válec $= d^2\pi v$, tak



Obr. 314.

že bude těleso vytvořené lichoběžníkem BTVD, sestávající z rozdílu komolého kužele BDGZ a tohoto válce,

$$s = {}^1/_3\pi v[(a+d)^2+(b+d)^2+(a+d)(b+d)] - d^2\pi v =$$

$$^1/_3\pi v[3d(a+b)+a^2+b^2+ab] = 2\pi dt + \frac{1}{3}\pi v(a^2+b^2+ab) \;.\;.\;.\;.\; 1)$$

Těleso pak vytvořené lichoběžníkem TFMV bude

$$s' = d^2\pi v - {}^1/_3\pi v[(d-a)^2+(d-b)^2+(d-a)(d-b)] =$$

$$^1/_3\pi v[3d(a+b) - a^2 - b^2 - ab] = 2\pi dt - \frac{1}{3}\pi v(a^2+b^2+ab) \ldots 2)$$

V obou těchto rovnicích jest prvním členem součin z plochy tvořícího lichoběžníka t, a z obvodu kruhu vytvořeného středním bodem C; druhým členem, který jest pro levý lichoběžník kladně, pro pravý však záporně vzat, jest opět v obou rovnicích obsah komolého kužele, který by vznikl otočením se daného lichoběžníka kolem průměru AA'. — A poněvadž rovnice takovéto obdržíme u všech ostatních lichoběžníků, ano i pro krajní trojúhelníky (když by totiž bylo $a = 0$); můžeme nyní tělesa, vytvořená jednotlivými lichoběžníky, sečísti.

Bude tedy, když pro krátkost poznačíme těleso lichoběžníkem BTVD kolem osy xy vytvořené s (BTVD), komolý kužel pak tímtéž lichoběžníkem kolem průměru AA' vytvořený k (BTVD) . . ., pro levou část

$$s\,(ABT) = 2\pi d\,.\,ABT + k\,(ABT),$$

$$s\,(BTVD) = 2\pi d\,.\,BTVD + k\,(BTVD),$$

$$s\,(DVPE) = 2\pi d\,.\,DVPE + k\,(DVPE) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

což když se sečte, dá na jedné straně levou část prstenového tělesa $S = 2\pi d[ABT + BTVD + DVPE + \;.\;.\;.\;] + K$ . . . . . . α) při čemž značí K součet veškerých tuto uvedených kuželů komolých.

Pro pravou část obdržíme tímtéž spůsobem

$$s\,(ATF) = 2\pi d\,.\,ATF - k\,(ATF),$$

$$s\,(TFMV) = 2\pi d\,.\,TFMV - k\,(TFMV),$$

$s\,(\mathrm{VMUP}) = 2\pi d . \mathrm{VMUP}' - k(\mathrm{VMUP})'$ . . . .

dohromady tedy zase

$S' = 2\pi d\,[\mathrm{ATF} + \mathrm{TFMV} + \mathrm{VMUP} + \ldots\ldots] - K$ . . . . β)

Dáme-li nyní obě částky dohromady a poznamenáme plochu tvořícího mnohoúhelníka p, obdržíme pro celé těleso prstenové z obou posledních rovnic $T = 2\pi d . p$.

5. *Krychlový obsah koule rovná se třetině součinu z jejího povrchu a poloměru,*

$$\text{t. j. } K = \frac{1}{3} P . r = {}^{4}/_{3}\pi . r^3.$$

Důkaz. Počínajíce sobě jako u pravid. těles (§ 90. 1) určíme na povrchu koule nesčíslné množství malých trojúhelníků sférických, jichžto obloukové strany by se mohly vzíti za přímky. Vedouce na to jednotlivými takovýmito stranami a středem koule roviny, dostaneme malé jehlance, jichžto výška se rovná poloměru koule. Poznačíme-li tedy obsahy těchto jehlanců k a jejich základny z, bude $k_1 = z_1 . r/_3$, $k_2 = z_2 . r/_3$, $k_3 = z_3 . r/_3$, ..., následovně sečtením krychlový obsah koule $K = \frac{r}{3}(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots)$; a poněvadž veškeré tyto základny dávají dohromady povrch koule P, bude

$$K = {}^{1}/_{3} r . P = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Pozn. K témuž výsledku přijdeme na základě § 90, 3), když si totiž představíme kouli vytvořenou otočením se kruhu kolem jeho průměru. Považujeme-li totiž kruh za pravid. mnohoúhelník, jehož osa $= 2r$, bude dle § 90, 3 obsah vzniklého sféroidu (zde koule) ${}^{2}/_{3}\pi r^2 . 2r = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Dodatky. a) Dán-li obsah koule K, bude $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$.

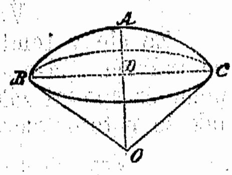
b) Jsou-li K a K' obsahy dvou koulí, jichžto poloměry jsou R a r, bude $K : K' = R^3 : r^3$.

c) Porovnejme nyní obsahy těchto tří neobyčejnějších těles, totiž kužele, koule a válce pro ten případ, že mají válec i kužel stejnou výšku, která by se rovnala průměru koule. Obsah válce buď při tom $V = r^2\pi . 2r = 2\pi r^3$, obsah kužele $C = r^2\pi . {}^{2}/_{3} r = {}^{2}/_{3}\pi r^3$, obsah koule $K = {}^{4}/_{3}\pi r^3$; tedy $V : K : C = 2\pi r^3 : {}^{4}/_{3}\pi r^3 : {}^{2}/_{3}\pi r^3$, nebo $V : K : C = 3 : 2 : 1$, kterýžto poměr nám ukazuje, že při tomto rozměru jest kužel třetina, koule pak dvě třetiny válce.*)

---

*) Vynálezce této věty, Archimedes, člen alexandrinské školy (viz VI.), pokládal ji za velmi důležitou a ustanovil, aby na jeho náhrobku byly postaveny válce a koule s nápisem, který by tento jejich poměr vyjádřoval. Cicero později dle toho našel Archimedův hrob, jehož místo bylo téměř již zcela zapomenuto a neznámo.

6. **Částky koule.** a) Podobným spůsobem jako při kouli najdeme též *krychlový obsah kulového výseku* BOCA (obr. 315.; Kugelausschnitt), který jest omezeň povrchem kulové úseče a pláštěm kužele BOC. — Rozložíme si ho totiž na nesčíslné množství malých jehlanců, z nichžto bude $k_1 = {}^1/_3 r . z_1$, $k_2 = {}^1/_3 r . z_2, \ldots$; sečtením obdržíme potom obsah kulového výseku, který bude, když povrch kulové jeho základny poznačíme p, $V = {}^1/_3 pr$. Že ale jest povrch $p = 2\pi r . AD$, bude $V = {}^2/_3 \pi r^2 . AD$ . . 1) t. j. *krychlový obsah výseku kulového rovná se dvěma třetinám součinu z plochy největšího kruhu a výšky úseku.*



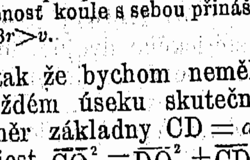
Obr. 315.

Kdyby však místo výšky úseku (AD) dán byl jeho poloměr $BD = \varrho$, byl by obsah celého výseku, poněvadž jest $AD = r - OD = r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}$, $V = \frac{2}{3}\pi r^2 (r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}) = {}^2/_3 (r^2\pi . r - r^2\pi\sqrt{r^2 - \varrho^2}$...2)

b) **Kulový úsek** ABC (obr. 315.) obdržíme, když od celého výseku $OBAC = V$ odečtem kužel $OBC = K$. Poznačíme-li tedy poloměr koule $r = OB$, výšku úseku $AD = v$, bude obsah výseku $V = {}^2/_3 \pi r^2 . v$, obsah kužele $K = {}^1/_3 \pi . \overline{BD}^2 . OD$; následovně úsek $S = {}^2/_3 \pi r^2 . v - {}^1/_3 \pi . \overline{BD}^2 . OD$. — Nyní musíme dosaditi za BD a DO veličiny příhodnější, a sice za $DO = r - v$, za $\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{DO}^2 = r^2 - (r - v)^2 = 2rv - v^2$; tím obdržíme
$S = {}^2/_3 \pi r^2 . v - {}^1/_3 \pi (r - v)(2rv - v^2) = {}^2/_3 \pi r^2 . v - {}^1/_3 \pi (2r^2 v - 3rv^2 + v^3)$,
nebo $S = {}^1/_3 \pi (3rv^2 - v^3) = v^2\pi (r - \frac{v}{3})$ . . . . . α)

Pozn. Zde by se mohlo myslet, že vzorec tento dá pro jistou výšku snad i záporný výsledek; avšak $r - v/_3$ jest, jak to přirozenost koule s sebou přináší, vždycky kladné, poněvadž jest vždycky $r > v/_3$, t. j. $3r > v$.

Kdyby však nebyl dán poloměr koule, tak že bychom neměli jiných veličin, leč takových, které se na každém úseku skutečně odměřiti dají, totiž výšku $AD = v$ a poloměr základny $CD = a$; urči poloměr r z trojúhelníka CDO, kde jest $\overline{CO}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{CD}^2$, nebo $r^2 = (r - v)^2 + a^2$, a z toho $r = \frac{a^2 + v^2}{2v}$. Dosadíce hodnotu tuto do předešlé rovnice α), obdržíme
$S = \frac{v\pi}{6}(3a^2 + v^2) = (\frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi v^2}{6})v$, ... β)
t. j. *obsah kulového úseku rovná se dvěma válcům téže výšky jako úsek, z nichžto má jeden za základnu* $\frac{1}{2}\pi a^2$, *a druhý* $\frac{1}{6}\pi v^2$.



Obr. 316.

c) **Krychlový obsah kulového pásu** najdeme, když ho považujeme za rozdíl dvou úseků, v obr. 316. na př. vol. ABCD = vol. AEB — vol. DEC. Poznačíme-li tedy poloměr koule AO $= r$, výšku EJ $= a$, výšku EF $= b$, bude vol. AEB $= a^2\pi(r - a/_3)$, vol. DEC $= b^2\pi(r - b/_3)$, následovně obsah pásu $V = a^2\pi(r - a/_3) - b^2\pi(r - b/_3)$, nebo

$$V = \pi r(a^2 - b^2) - {}^1/_3\pi(a^3 - b^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Že ale v tomto vzorci znáti musíme r, a, b, veličiny to, které na kulovém pásu nelze odměřiti; buď EJ — EF $= a - b =$ FJ $= v$, poloměr spodní základny AJ $= \alpha$, poloměr svrchní základny DF $= \beta$, tak že potom vzorec 1) budeme moci psáti

$$V = \pi r(a+b)(a-b) - {}^1/_3\pi(a-b)(a^2+ab+b^2), \text{ čili}$$
$$V = \pi v[r(a+b) - {}^1/_3(a^2+ab+b^2)].$$

Avšak v trojúhelníku AOJ jest $r = \frac{a^2+\alpha^2}{2a}$, a z toho $ar = \frac{a^2+\alpha^2}{2}$; v $\triangle$FCO jest podobně $br = \frac{b^2+\beta^2}{2}$, tak že by bylo $r(a+b) = ar + br = \frac{1}{2}(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)$.

Dosadíce hodnotu tuto do předešlého vzorce, obdržíme

$$V = \pi v\left[\frac{a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2}{2} - \frac{a^2+ab+b^2}{3}\right] =$$
$$= \frac{\pi v}{6}[(a-b)^2 + 3(\alpha^2+\beta^2)] = \frac{\pi v}{6}[v^2 + 3(\alpha^2+\beta^2)],$$

nebo konečně $V = \left[\frac{\pi\alpha^2}{2} + \frac{\pi\beta^2}{2} + \frac{\pi v^2}{6}\right]v$, t. j. *krychlový obsah pásu rovná se třem válcům tak vysokým jako je pás, z nichžto má jeden za základnu polovičku spodní, druhý polovičku svrchní podstavy pásu, a třetí* $\frac{\pi v^2}{6}$.

d) **Kulový klín** (Kugelkeil). Pomyslíme-li sobě veškeré body sférického dvojúhelníka spojeny se středem koule, obdržíme těleso omezené sférickým dvojúhelníkem a dvěma největšími polokruhy — kulový klín. Jako u kulového výseku obdržíme i zde krychlový obsah V, když plochu sférického dvojúhelníka poznačíme p,

$$V = p \cdot \frac{r}{3} = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{90} \cdot \frac{r}{3} = r^3\pi \cdot \frac{\alpha}{270}.$$

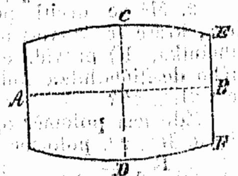
6. *Krychlový obsah kruhového prstenu rovná se součinu z plochy tvořícího kruhu a z obvodu kruhu, jejž vytvoří jeho střed.*

Je-li na př. poloměr tvořícího kruhu r, vzdálenosť jeho středu od osy R, bude obsah prstenu $V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2R \cdot \pi^2 r^2$.

Důkaz na základě § 90. 4, jestliže se při tom považuje kruh za pravid. mnohoúhelník.

7. Sem náleží také ještě určení **krychlového obsahu sudu**, který sobě představujeme, že byl vytvořen otočením se jistého oblouku kolem určité osy. Podle druhu oblouku udává se potom obsah sudu též spůsobem rozličným. Že se ale sudy dělají příliš

nepravidelným, ano téměř spůsobem nahodilým, než aby nějakému matematickému pravidlu podrobeny býti mohly; a že nám u látek, jichžto obsah se na sudy měří, na nějakou maličkosť nepřijde; udáváme obsah sudů a podobných nádob (vany, putny, kádě, atd.) jenom přibliženě. Sud považujeme obyčejně za válec, jehož výška by se rovnala délce sudu (v obr. 317. $BA = l$) a v němžto by se průměr základny rovnal třetině součtu z dvojnásobného průměru sudu u špuntu ($2CD = 2D$) a jednoduchého jeho průměru na dně (u čepu, $EF = d$) t. j. obsah sudu



Obr. 317.

$$S = \pi . l \left[\frac{2CD + EF}{2.3}\right]^2 = \pi l \left[\frac{2D + d}{6}\right]^2 = \frac{1}{9} \pi l \left[D + \frac{d}{2}\right]^2.$$

Pozn. Spůsob tento, Lambertem (nar. 1728 v Elsasku, † 1777 v Berlíně) zavedený a dle něho pojmenovaný, jest ze všech ostatních spůsobů nejdokonalejší. — Jsou-li, jak to obyčejně bývá, D, d, a l vyjádřeny v palcích, musejí se krychlové palce vzorem Lambertovým vypočítané proměniti potom na mázy nebo vědra. A poněvadž vědro $= 1{\cdot}792^{c'}$, 1 máz tedy $= \frac{1{\cdot}792 \times 1728^{c''}}{40} = 77{\cdot}414^{c''}$, následovně $1^{c''} = 0{\cdot}0129175$ mázu; bude obsah sudu $S = 0{\cdot}001127 \times l[2D + d]^2$ mázů.

8. Konečně musíme se ještě zmíniti o jiných spůsobech určování krychlového obsahu. **Obsah tekutin** určuje se také ještě na př. pomocí cejchovaných nádob, obyčejně dutých válců nebo rovnoběžnostěnů, do nichž tekutinu jenom nalejti potřebujeme; podle toho, jak vysoko tekutina v nádobě té stojí, pozná se z udaných tam čísel její krych. obsah.

Obsah těles pevných, avšak zcela nepravidelných, určí se dvojím spůsobem, a sice:

a) Vloží se dané těleso do jakékoliv duté nádoby, jejíž obsah jest znám a v nížto se nachází škála s přináležejícím rozdělením. Na to naplní se nádoba buď vodou, jestliže by těleso vodu do sebe nesáklo, a nebo pískem tak, aby bylo těleso úplně přikryto.

Vyndá-li se potom pevné těleso z nádoby a pozoruje se na škále, jaký obsah má pozůstalá voda nebo písek, bude rozdíl tohoto a obsahu předešlého udávati krychlový obsah tělesa.

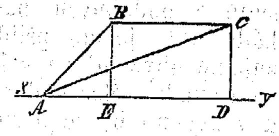
b) Též **vahou** dá se určiti krychl. obsah jakéhokoliv tělesa, jak mile jenom známe jeho potažnou váhu. Poznačíme-li totiž G váhu nějakého tělesa v librách, V jeho krychl. obsah v stopách, a s jeho potažnou váhu, jest, jak z fysiky známo, $G = V \times s \times 56{\cdot}5$, pročež $V = \frac{G}{s \times 56{\cdot}5}^{c'}$, nebo $\frac{G \times 1728^{c''}}{s \times 56{\cdot}5}$.

Úlohy.

1. Jaký obsah krychový V bude míti těleso, které vznikne otočením se trojúhelníka ABC (obr. 318.) kolem osy xy, když jest $BC \| xy$, a při tom základna $BC = a = 2\frac{1}{3}''$, výška $BE = v = 1\cdot8''$?

2. Má se určiti povrch i krychl. obsah tělesa, které se vytvoří otočením a) pravid. šestiúhelníka, b) pravid. osmiúhelníka, c) pravidelného desítiúhelníka kolem jeho průměru, který jest $2R = 4''$?

Zde jest poloměr opsaného kruhu pro každé těleso $R = 2''$, poloměr vepsaného kruhu jest



Obr. 318.

a) $r = \frac{R}{2}\sqrt{3}$, b) $r = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$,

c) $r = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$; následovně dle § 84, 5. povrch

$$P_6 = 2R \cdot 2\pi r = 2\pi R^2\sqrt{3};$$

$P_8 = 2\pi R^2\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $P_{10} = 2\pi R^2\sqrt{\frac{5+\sqrt{2}}{2}}$. — Krychlový obsah

$V_6 = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot 2R = \pi R^3$; $V_8 = \pi R^3\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)$; $V_{10} = \pi R^3\left(\frac{5+\sqrt{5}}{6}\right)$.

3. Pravidelný desítiúhelník, jehož strana $a = 2''$, točí se 1) kolem průměru opsaného kruhu, 2) kolem přímky, která procházejíc rohem obrazce jest s průměrem tímto rovnoběžná. Jaký povrch a jaký obsah bude mít vytvořené těleso v obou případech?

a) $P_{10} = a^2\pi\sqrt{50+22\sqrt{5}} = ?$ b) $P_{10} = 10 \cdot a \cdot 2\pi R = 10a^2\pi(\sqrt{5}+1) = ?$

$V_{10} = \frac{a^3\pi}{6}(15+8\sqrt{5}) = ?$ $V_{10} = p_{10} \cdot 2\pi R = \frac{5a^3\pi\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{3-\sqrt{5}} = ?$

4. Kolik koulí obdržíme z libry olova, když má být průměr koule $2r = 1\cdot1487''$, a $1c''$ olova váží $p = 0\cdot42$ lb.? $\left(n = \frac{6}{d^3\pi p} = 3 \text{ koule.}\right)$

5. Jaký krychlový obsah má a) naše zeměkoule, b) každé jednotlivé její pásmo, když jest poloměr země $r = 859\cdot5$ míle?
(Výšku pásma najdeš dle 5. úlohy v § 85, 3.)

6. Mnoho-li vody vejde se do parního kotle s půlkoulemi v krajích, když jest kotel celkem $15'$ dlouhý a $4'$ tlustý, tak že délka válcové části $11'$ obnáší?

7. Do nádoby, která má podobu obráceného kužele a jest naplněna vodou, ponoří se koule $1\frac{1}{2}''$ v průměru, čímž něco vody z nádoby vyteče; jak vysoko bude stát voda v nádobě, když se koule vytáhne a nádoba nahoře $2R = 3\frac{1}{2}''$ široká a $v = 9''$ vysoká jest?

Poznačíme-li poloměr koule r, poloměr kuželové základny nahoře R, bude obsah pozůstalé vody, který se objevuje v podobě kužele nádobě podobného a jehož výšku x hledáme, $K_1 = \frac{\pi}{3}(R^2v - 4r^3)$. Ze srovnalosti $K : K_1 = v^3 : v_1^3$,

najdeme konečně $v_1 = x = v\sqrt[3]{\frac{K_1}{K}} = v\sqrt[3]{\frac{R^2v - 4r^3}{R^2v}}$.

8. Jak velký jest povrch koule, která jest vepsána do přímého kužele, jehož krychl. obsah $K = 7028c'$ a výška $v = 9\cdot5'$?

Učiníme-li průřez těchto těles, objeví se nám kruh do trojúhelníka vepsaný, jehož poloměr ϱ se určiti musí. Budiž poloměr kuželové základné r (půl základny v trojúhelníku); obsah kužele $K = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot v$, a z toho $r = \sqrt{\frac{3K}{\pi v}} \ldots a)$

Dle planimetrie (§ 44, 2) jest ale

$\varrho = \frac{2p}{a+b+c}$, zde tedy, poněvadž jest $a = b = \sqrt{v^2 + r^2}$, $c = 2r$, a $p = rv$,

$\varrho = \frac{rv}{r + \sqrt{r^2 + v^2}}$, atd.

9. Urči krychlový obsah rovnostraného kužele, který má s koulí, jejíž obsah $V = 25^{c'}$, stejný povrch.

10. Obsahy tří koulí mají se k sobě jako čísla $m = 2$, $n = 5$, $p = 11$, a dávají dohromady $K = 30^{c'}$; jak velké jsou jejich poloměry x, y, z?

$$\left(x = \sqrt[3]{\frac{3mK}{(m+n+p)4\pi}},\ y = \sqrt[3]{\frac{3nK}{(m+n+p)4\pi}},\ z = \sqrt[3]{\frac{3pK}{(m+n+p)4\pi}}. \right)$$

11. Krychl. obsah duté a 12″ vysoké koule jest $K = 626{\cdot}69^{c''}$; jak tlustá jest koule v hmotě? (Urči obsah koule pro poloměr $r = 6''$, od toho obsahu odečti obsah K, čímž obdržíš obsah dutiny, atd.)

12. Z koule, jejíž poloměr $r = 12'$, vyřízl se dvěma rovnoběžnýma rovinama terč; má se udati jeho krychl. obsah S, když jsou vzdálenosti sekoucích rovin od středu koule $a = 3{\cdot}36'$, $b = 9{\cdot}6'$.

13. Jak tlustá v hmotě musí být koule, jejíž $r = 6''$, aby mohla ve vodě plovati?

Hranolec a jeho druhy.

§ 91.

1. Nyní teprvé bude příhodné, obšírněji promluviti o **hranolci**, jehož důležitost pro tělesoměrství již z toho vysvítá, že může být jak hranol tak i jehlanec, a to úplný i komolý, považován za zvláštní druh hranolce; ano i tělesa, která by se při určování jich krychlového obsahu zvláštními řezy v tělesa dosud známá rozkládati musela, připouštějí pohodlný spůsob určení jich krychlového obsahu, jak mile je vřadíme do některého druhu hranolce. Poohledněme se tedy, jaké druhy těles v hranolci zastoupeny jsou.

a) Hranolec, jehož obě základny mají stejné množství po dvou sobě rovnoběžných stran, aniž by proto základny spolu shodnými nebo si podobnými býti musely, jmenuje se **obeliskem** (Obelisk). Obelisk jest tedy omezen dvěma mnohoúhelníky stejného počtu po dvou sobě rovnoběžných stran a tolika lichoběžníky mnoho-li má základna stran. Některé postraní stěny mohou býti i rovnoběžníky. Kdyby byly obě základny obelisku sobě podobny, měly by postraní jeho hrany v bodu podobnosti společný průsečník, a obelisk proměnil by se v **komolý jehlanec**; kdyby ale byly obě základny spolu shodné, objevil by se hranol. Komolý jehlanec a hranol jsou tedy vždycky obeliskem, nikoliv ale naopak, a činí tak zvláštní druh hranolce.

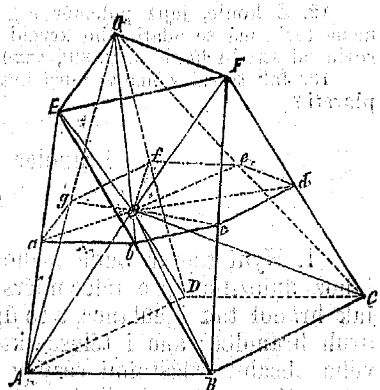
b) Jiný druh hranolce jest **klín** (Keil), u nějž svrchní základna přechází v pouhou čáru č. tak zvané **ostří** (Schneide), které může býti přímé i lomené. — Klín jest tedy omezen jedním libovolným mnohoúhelníkem a po stranách samými trojúhelníky, lichoběžníky a nebo i rovnoběžníky, které se ve společném ostří sbíhají.

My se zde obmezíme pouze na ostří přímočarné. Když by se toto proměnilo v pouhý bod, objevil by se klín ve spůsobě jehlance, který tedy také považovati sluší za zvláštní druh hranolce. Ano i třístraný, šikmo seříznutý hranol objevuje se býti klínem, jak mile některou jeho postraní stěnu přijmem za základnu a vrcholici jeho za ostří.

Z toho vidíme, že se skoro všechna dosavádní tělesa hranatá, vyjma tělesa pravidelná, dají považovati za odrudy hranolce; mimo tyto zde uvedené máme ale ještě mnoho jiných odrud, o kterých nám však nelze do podrobna zde se zmiňovati.

2. Chceme-li najíti pohodlný spůsob pro vypočítávání krychlového obsahu hranolce, rozložme si ho nejprvé příhodnými rovinami na taková tělesa, jichžto obsahy by se dle dosavádních pravidel určiti daly.

V obr. 319. na př., kde jsou základnými hranolce rovnoběžník ABCD a trojúhelník EFG, spojme libovolný bod O středního řezu *abcdefg* (§ 74, 4. c) se všemi rohy spodní i svrchní základny, a položme tímto bodem a všemi postraními hranami hranolce roviny, které rovinu středního řezu proříznou v přímkách, jimiž se tento bod O spojuje s příslušnými rohy středního řezu. Spůsobem tímto rozvrhnem celé těleso v následující částky:



Obr. 319.

a) V jehlanec OABCD, jehož základnou jest spodní základna hranolce Z, a jehož vrchol leží v O. Jeho výška jest, když poznačíme V celou výšku hranolce, $\frac{V}{2}$, tak že bude jeho krychl. obsah $P = \frac{1}{3} Z . V/_2 = {}^1/_6 ZV$.

b) V jehlanec OEFG, jehož základnou jest svrchní základna hranolce z, a jehož vrchol opět leží v O. Obsah tohoto jehlance bude tedy $P_1 = {}^1/_3 z . V/_2 = \frac{1}{6} Vz$.

c) V sedm třístraných jehlanců OABE, OBEF, OBFC . . . jichžto základnými jsou jednotlivé postraní stěny hranolce a jichžto vrcholy leží vesměs zase v O. Abychom mohli určiti krychl. obsahy těchto jehlanců, přihlídněme blíže k jednomu z nich, na př. k jehlanci OABE. Obě strany AE a BE jeho základny jsou stranou středního řezu (ab) rozpůleny, tak že jest $\triangle Eab = {}^1/_4 \triangle AEB$

(§ 42, 2); musí býti tedy i jehlanec OEab čtvrtinou jehlance OEAB (§ 87, 2, c), tak že bude vol. OEab = $^1/_4$ vol. OEAB . . . . . . α)

Přijmem-li u jehlance OEab $\triangle abO$ za základnu, bude E jeho vrcholem a následovně V/$_2$ jeho výškou; jeho krychl. obsah bude potom vyjádřen vzorcem $^1/_3 \triangle abO \cdot V/_2 = \triangle abO \cdot \frac{V}{6}$. Dosadíce tedy výraz tento do předešlé rovnice (α), obdržíme $^1/_4$ vol. OEAB $= \triangle abO \cdot \frac{V}{6}$, nebo vol. OEAB $= 2 \cdot \triangle abO \cdot \frac{V}{3}$ . . . . β)

K podobnému výsledku přišli bychom i u ostatních postraních jehlanců, tak že bude vůbec: *Krychlový obsah každého postraního jehlance rovná se dvojnásobnému obsahu jehlance jehož výška rovná se výšce hranolce, a jehož základnou jest příslušná část středního řezu.*

Bude tedy jehlanec OABE $= \frac{2}{3} V \cdot \triangle abO$,

„ OBEF $= ^2/_3 V \cdot \triangle bcO$,

„ OBCF $= ^2/_3 V \cdot \triangle cdO$, atd.

dohromady tedy, když veškerý obsah všech postraních jehlanců poznačíme p a ploský obsah středního řezu s,

$$p = {}^2/_3 V(\triangle abO + \triangle bcO + \triangle cdO + \ldots) = {}^2/_3 Vs = 2 \cdot \frac{Vs}{3}, \text{ t. j.}$$

krychl. obsah všech postraních jehlanců rovná se dvojnásobnému jehlanci téže výšky jako je hranolec, a jehož základnou jest střední řez hranolce.

Obsah celého hranolce H jest tedy nyní H = P + P$_1$ + p, a nebo

$$H = \frac{1}{6} VZ + \frac{1}{6} Vz + \frac{2}{3} Vs = \frac{1}{3} V \left[\frac{Z+z}{2} + 2s\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

Vzorec tento ukazuje, že k určení krychlového obsahu hranolce potřebujeme znáti toliko obě jeho základny, jeho výšku a střední řez, kdežto pak máme větu; *Každý hranolec rovná se součtu tří, s hranolcem stejně vysokých jehlanců, z nichžto má jeden za základnu poloviční součet obou základen, každý z druhých dvou ale střední řez hranolce.*

Posledně uvedený vzorec 1) můžeme také následovně psáti;

$$H = Vs + {}^1/_3 V \left[\frac{Z+z}{2} - s\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

což se vyjádřuje větou: *Hranolec rovná se součtu z hranolu a jehlance, které mají s hranolcem společnou výšku, z nichžto má ale hranol za základnu střední řez, jehlanec pak nadbytek, o nějž poloviční součet obou základen střední řez hranolce přesahuje.*

3. Abychom pravidlo toto upotřebili a zároveň ukázali, jak v tomto všeobecném vzorci obsaženy jsou všechny dřívější věty o vypočítávání krychl. obsahu dosud seznaných těles hranatých, provedeme zde některé výpočty pro jednotlivé druhy hranolce.

a) Když by byly obě základny spolu shodné a souhlasné jejich strany spolu rovnoběžné, přejdou postraní trojúhelníky hranolce v rovnoběžníky a hranolec promění se v obyčejný hranol. V případu tomto jest střední řez hranolce s oběma základnými úplně shodný, tak že bude $Z = z = s$, a obsah hranolce $H = \frac{1}{3}V[\frac{Z+z}{2} + 2s] = VZ$, jako v § 88, 2.

b) Přejde-li hořejší základna v pouhý bod, bude $z = 0$, a hranolec objeví se v podobě jehlance. Střední řez bude spodní základně podoben a zároveň $s = \frac{1}{4}Z$ (§ 42, 2); i bude tedy krychl. obsah hranolce $H = \frac{1}{3}V[\frac{Z}{2} + 2 . \frac{Z}{4}] = \frac{1}{3}VZ$, jako u jehlance.

c) Je-li hořejší základna spodní podobná a dvě a dvě souhlasné jejich strany spolu rovnoběžné, promění se hranolec v komolý jehlanec, a střední řez bude oběma podstavám hranolce taktéž podobný a dá se snadno určiti. Poznačíme-li totiž A a a dvě souhlasné strany obou základen, bude příslušná strana středního řezu $\left(\frac{A+a}{2}\right)$, a při tom $Z : s = A^2 : \left(\frac{A+a}{2}\right)^2$, $z : s = a^2 : \left(\frac{A+a}{2}\right)^2$

nebo $$\sqrt{Z} : \sqrt{z} : \sqrt{s} = A : a : \left(\frac{A+a}{2}\right),$$ a z toho

$$(\sqrt{Z} + \sqrt{z}) : \sqrt{s} = (A + a) : \left(\frac{A+a}{2}\right),$$ což dá

$$\sqrt{s} = \frac{\sqrt{Z} + \sqrt{z}}{2},$$ tak že bude konečně $s = \frac{Z + 2\sqrt{Zz} + z}{4}$.

Dosadíce tedy hodnotu tuto do vzorce pro krychl. obsah hranolce, obdržíme $K = \frac{1}{3}V[\frac{Z+z}{2} + 2 . \frac{Z + z + 2\sqrt{Zz}}{4}] =$

$$= \frac{1}{3}V[Z + z + \sqrt{Zz}]$$ jako v § 88, 4.

d) U třístraného, šikmo seříznutého hranolu, jejž dle § 91, 1, b) za klín považovati lze, bude, když dříve uděláme v obr. 307., kde jest $AB \parallel CD \parallel EF$, $A\alpha = \alpha E$, $B\beta = \beta F$, ..., $\alpha\beta\gamma\delta$ středním řezem klínu. Poznačíme-li k vůli krátkosti postraní hrany $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$, výšku kolmého řezu $nt = v$, a jeho základnu $mo = u$; bude $\alpha\beta = \frac{AB + EF}{2} = \frac{a + c}{2}$, $\gamma\delta = \frac{CD + EF}{2} = \frac{b + c}{2}$,

$pr = \frac{1}{2}mo = \frac{1}{2}u$, následovně spodní základna (vůbec lichoběžník)

$$Z = \frac{AB + CD}{2} . mo = \frac{a + b}{2} . u,$$ střední řez $\frac{(\alpha\beta + \gamma\delta)}{2}pr =$

$$\frac{a + b + 2c}{2} . \frac{4}{4},$$ a $z = 0$.

Krychl. obsah hranolce (zde klínu) bude tudy

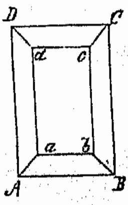
$$H = {}^1/_3 v\left[\frac{a+b}{2}\cdot\frac{u}{2} + 2\frac{(a+b+2c)}{2}\,\frac{u}{4}\right] = \frac{1}{3}\,\frac{vu}{2}\left[\frac{a+b}{2} + \frac{a+b+2c}{2}\right],$$

nebo $H = {}^1/_3 \frac{vu}{2}[a+b+c]$; a poněvadž udává $\frac{vu}{2}$ plochu kolmého řezu $mno = p$, bude konečně $H = p\frac{(a+b+c)}{3}$, jako v § 88, 5.

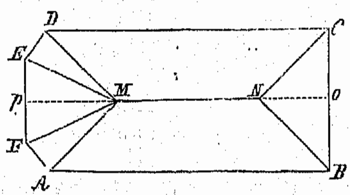
Z vět těchto vidíme tedy, že dřívější věty o vypočítávání krychl. obsahu těles hranatých jsou jen zvláštní případy všeobecného vzorce pro krychl. obsah hranolce, a hranolec že jest tedy skutečně zástupce všech jehlancovitých i hranolovitých mnohostěnů.

Úlohy.

1. V obr. 320. představuje ABCD pravoúhelnou základnu hráze, která jest nahoře rovinou *abcd* rovnoběžně se základnou ukončena, tak že vidíme v obr. 320. půdorys celé hráze. Jaký obsah má hráz, když jest její délka dole $AD = 14^0$, šířka $AB = 10^0$, nahoře délka $ad = 10^0$, šířka $ab = 6^0$, a výška celé hráze 5^0? — Zde jest $Z = AB.AD = 140\square^0$, $z = ab.ad = 60\square^0$, $s = \frac{14+10}{2}.\frac{10+6}{2} = 96\square^0$, následovně $H = 486\,{}^2/_3\,c^0$.



Obr. 320.



Obr. 321.

2. Mnoho-li vozů písku jest vyrovnáno na hromadě mající podobu této hráze, když by bylo $AD = 4^0$, $AB = 1\,{}^1/_2{}''$, $ad = 3^0 2'$, $ab = 1^0$, a výška hromady $v = 3'$ a jeden vůz $= 10c'$?

3. Jaký obsah má třístraný a 2^0 vysoký obelisk, když v jeho větší podstavě jest základna $a = 8'$, výška $5'$; ve svrchní podstavě pak základna $6'$ a výška $3\,{}^1/_2{}'$?

4. Půdorys střechy byl by ABCDEF (obr. 321.) a sklon jednotlivých ploch 45^0, tak že bude nárožní hranou úhel C rozpůlen. Jak velký jest při tom krych. obsah půdy, měří-li $AB = CD = 9^0$, $BO = CO = 16'$, $EP = PF = 14'$, $NO = PM$, a délka celé střechy $PO = 10^0$?

Řecká abeceda.

α Alfa,	ν Ny,
β Beta,	ξ Xi,
γ Gamma,	ο Omicron,
δ Delta,	π Pi,
ε Epsilon,	ρ Rho,
ζ Zeta,	σ Sigma,
η Eta,	τ Tau,
ϑ Theta,	υ Ypsilon,
ι Jota,	φ Fi,
κ Kappa,	χ Chi,
λ Lambda,	ψ Psi,
μ My,	ω Omega.