MĚŘICTVÍ

pro nižší gymnasia.

Sestavil

J. DŘÍZHAL.

Část první.

Páté vydání.

V PRAZE.
Nákladem knihkupectví I. L. Kobra.
1883.

Připomenutí.

Kdokoli se v školách nižších s předmětem tímto zanáší, ví zajisté z vlastní zkušenosti, jak uvážlivě se k tomu hleděti musí, aby se učba předmětu tohoto nestala buď malichernou hříčkou, beze všeho prospěchu a cíle, aneb aby se mladistvé schopnosti neukládalo učivo, kteréž žák rozumem buď jen s tíží chápe aneb docela osvojiti si nemůže.

Ze zkušenosti známo, že pouhým názornictvím beze vší samočinnosti učňovy v předmětu tomto jen nepatrné výsledky se docilují.

Má-li geometrické učivo ve školách nižších mládeži naší k zisku a prospěchu býti, myslím, že se názornictví se samočinností žactva stále spojovati musí.

Účel tohoto spisku jest, vésti žáka k tomu, aby pravídkem a kružidlem, a kdekoli toho třeba, úhloměrem útvary geometrické sestavoval a takto samočinně vlastnosti oněch útvarů poznával.

K snadnějšímu objásnění několika důležitých pouček upustil jsem od pořádku přesné soustavy, uspořádav učivo tak, aby žák, snadnými výkony počínaje, krok za krokem k vážnějším úkolům postupoval. Tak jsem na př. sestrojování úhlů ihned s učením o úhlu spojil, aby se učení o rovnoběžkách snadněji objasniti dalo. Taktéž myslím, že sestrojováním trojúhelníků učení o shodnosti obrazcův těchto jistěji s prospěchem se provede, než kdyby si žák z názorných tabulek ony případy o shodnosti pamatovati měl; neboť zajisté žák to pevněji v paměti zachová, o čemž si sám sestrojením takřka důkaz vésti může.

Každou poučku odůvodniti, bylo nezbytno. Při tom se ale hledělo k tomu, aby byl doklad co možná vyvinující se chápavosti přiměřený, a aby se učba nestala pouhým mechanickým nápodobením obrazcův. Tím však nemíněno, že by žák ony důvody bez rozdílu samostatně vyvozovati měl; obezřetným návodem se objasní a docílí vyrozumění dokladův a zabezpečí pokrok žákův.

Ku konci podotýkám, že mi všeliká k tomuto předmětu čelící pokynutí ctěných pp. kolegů povždy velevítána budou.

V Brně v květnu 1883.

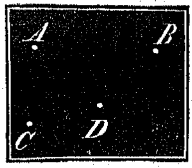
Spisovatel.

Úvod.

O bodu. Místa na tabuli, mapě, zeměkouli poznačujeme *bodem.* Poznačení toto se stává hmotou barvicí, křídou, tužkou.

Bod takto naznačený má vždy cosi hmotného a nazývá se *hmotný.*

Obr. 1.



Místo bodem hmotným poznačené jmenuje se bod *mathematický.*

Body se znamenají písmenami ku př. (obr. 1.) bod A, B, C, D.

Bod mathematický nemá žádné rozsáhlosti aniž tvaru.

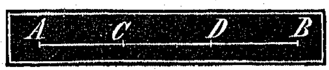
Na tabuli můžeme dva body na trojí způsob naznačiti, ku př. (obr. 1.) tak, jako jsou body A a B; o těchto bodech pravíme, že jsou *vedle* sebe. Body A a C jsou *nad sebou*; body A a D aneb B a D jsou k sobě *šikmo.*

Čáry neb linie.

Vznik čáry. Když se bod nějaký pohybuje a dráha pohybu toho poznačí, vznikne *čára* neb *linie.*

Čarou naznačuje se tedy dráha pohybu a sice *délka* dráhy této. Čáry jsou rozsáhlé, dlouhé — mají délku.

Obr. 2.



Čára hmotou barvicí naznačená nazývá se *hmotná;* délku čáry hmotné naznačuje čára *mathematická.*

U čáry nazývá se bod, z něhož čára vychází, *bod počáteční* a ten, jímž se čára končí sluje *bod konečný.* Oba nazývají se vůbec *konce.*

Čáry znamenáme písmenami. Písmeny tyto kladou se obyčejně v bodech konečných ku př. (obr. 2.) čára AB.

Mimo tyto poznačené body můžeme si v každé čáře ještě vícero jiných bodů mysliti. Bodem naznačuje se místo, jímž čára jde. Pravíme též o čáře, že se bodem tím vedla, ku př. v obr. 2. jde čára AB bodem C a D.

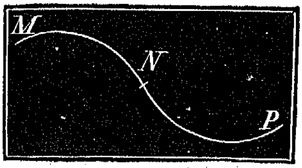
Přímka. Křivka. Čáry klikaté a smíšené.

Dráha, kterouž se bod při vzniku čáry pohybuje, nazývá se *směr*.

Je-li směr od počátku až ke konci pohybu tentýž — jednaký, jmenuje se čára, kteráž pohybem tím vzniká, *čára přímá*, *přímka* ku př. přímka AB (obr. 2.).

U přímky mají jednotlivé částky stejný směr.

Obr. 3.



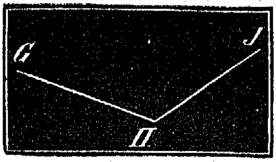
Když se ale směr pohybu od začátku až ke skonu neustále mění, činí dráha takovéhoto pohybu *čáru křivou* aneb *křivku* ku př. (obr. 3.) křivka MP.

U křivky mají jednotlivé dílky směr nestejný.

Tak má čára MP (obr. 3.) v bodu N jiný směr než v bodu P.

Sestává-li čára z rozdílných přímek, nazývá se *přímo-lomená* neb *přímo-klikatá* ku př. čára GJ (obr. 4.); sestává-li z několika křivek, sluje *křivo-klikatá*.

Obr. 4.



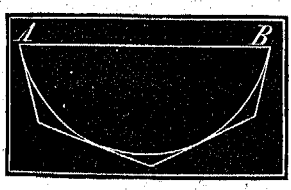
Čáry, které sestávají z přímek a křivek, nazývají se *smíšené*.

Vlastnosť přímky. Veďme dvěma body A a B (obr. 5.) přímku, křivku a čáru přímoklikatou.

Jestiť patrno, že by se mezi tě mato body ještě mnoho jiných křivek a čar lomených vésti mohlo.

Přímka se mezi nima dá vésti jen *jedna*. Protož pravíme: *Mezi dvěma body může se jen jedna přímka vésti.*

Obr. 5.



Jak z obrazce vidíme, jest přímka AB menší než křivka, a menší než čára klikatá.

Ze všech čar, kteréž by se mezi dvěma body vésti mohly, bude přímka *nejkratší. Přímkou se udá, určí nejkratší vzdálenosť dvou bodů.*

Čára kruhová neb *kružnice.*

Nejdůležitější z křivých čar jest *kružnice.*

Točíme-li přímku OA (obr. 6.) kolem pevného bodu O tak, až se opět do své prvotní polohy navrátí, opíše se bodem A křivá čára, kteráž se *kružnice*, *kruh* nazývá.

V kruhové čáře mají všechny body rovnou vzdálenosť od toho bodu, kolem něhož se otáčení dělo. Bod tento jmenuje se *střed*, (centrum). V obr. 6. jest jím bod O.

Každá částka kruhové čáry sluje oblouk (arcus), ku př. oblouk AB. Délka celé kruhové čáry nazývá se *obvod* neb *periferie.*

Přímka vedená ze středu k obvodu sluje *poloměr;* každá přímka, ježto dva body v obvodu spojuje a středem jde, jmenuje se *průměr.*

Průměr sestává tedy z dvou poloměrů.

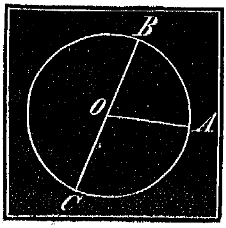
V obr. 6. jest OA poloměr, BC jest průměr.

Každý poloměr udává vzdálenosť obvodu a středu.

Délky tyto jsou si vesměs rovny.

V kružnici jsou poloměry jakož i průměry sobě rovny.

Obr. 6.



Kružnice sestrojují se kružidlem.

Plochy.

Pohledem na rozsáhlou planinu, hladinu vodní, povrch tabule, válce, koule nabudeme pojmu o *ploše.*

Pohybuje-li se v prostoru přímka směrem svým, vznikne pohybem tím opět přímka; pohybuje-li se však jiným směrem, opíše se dráha *dlouhá* a *široká* totiž *plocha.*

Přímým drátem se pohyb takový objasniti dá.

Každá plocha má dvojí rozsáhlosť: *šířku* a *délku.*

Abychom tedy zvěděli, jak velká jest plocha tabule, musíme věděti, jak jest tabule široká a dlouhá.

Rozeznáváme dvojí plochy; *přímé* a *křivé.*

Přímá plocha neb *rovina* sluje ta, po níž se každým směrem přímky vésti mohou.

Stěna, plocha tabule a stolu, jsou roviny.

Křivá plocha jest ta, po níž se buď jen některým směrem přímky vésti mohou, aneb docela vésti nemohou. Povrch klády, válce, koule jsou plochy křivé.

Těleso.

Cožkoli prostor zaujímá, nazývá se *těleso,* ku př. kniha, bedna, kostka, válec, koule.

Názorem poznáváme, že jsou tělesa se všech stran zakončená — omezená. Poznáváme, že má každé těleso určitou *polohu,* dle omezení jistou podobu — určitý *tvar* a dle rozsáhlosti určitou *velikosť.*

Tělesa, kteráž smysly svými ku př. hmatem poznáváme, sestávají z hmoty a nazývají se *hmotná* neb *fysická.* Prostor, jejž těleso hmotné zaujímá, sluje těleso *mathematické.*

Těleso mathematické jest tedy prostor všestranně omezený; ku př. prostor v školní světnici jest omezen podlahou, stropem a čtyrmi stěnami.

Každé mathematické těleso jest částkou prostoru.

U těles rozeznáváme trojí rozsáhlosť: *délku, šířku* a *výšku.*

Dle polohy nazývá se často tatáž rozsáhlosť *výška* neb *hloubka* neb *tlouštka;* ku př. světnice jest dlouhá, široká a vysoká; příkop jest dlouhý, široký a hluboký; deska jest dlouhá, široká a tlustá.

Když jsou z oněch tří rozsáhlostí dvě neb všechny tři sobě rovny, dává se jim toliko jeden název; ku př. roura jest dlouhá a široká, kláda jest dlouhá a tlustá; koule jest široká. U roury, klády jsou výška a šířka sobě rovny, u koule pak jsou všechny tři rozsáhlosti sobě rovny.

Dle omezení jsou tělesa dvojí: *hranatá* a *kulatá.*

Tělesa, kteráž jsou jen rovinami omezena, nazývají se hranatá, ku př. kostka; kulatá jsou omezena buď rovinami a křivou plochou, ku př. válec; aneb jen plochou křivou, ku př. koule.

Veličiny prostorné.

Tělesa, plochy a čáry jsou rozsáhlé, mají určitou velikosť v prostoru; protož nazývají se *veličiny prostorné.*

Bod nemá žádné rozsáhlosti v prostoru, není tedy veličinou prostornou.

Učení o veličinách prostorných nazývá se *měřictví* neb *geometrie.*

Měřictví obsahuje tedy náuku o čarách, plochách a tělesech.

Měřictví dělí se na dva díly; tyto jsou: *rovinné plochoměrství* neb *planimetrie* a *tělesoměrství* neb *stereometrie.*

Planimetrie jest učení o veličinách prostorných, které se v rovině utvořiti mohou; *stereometrie* obsahuje učení o těch veličinách, které se na jednu rovinu vměstnati nedají, které si v jedné rovině mysliti, představiti nemůžeme.

Planimetrie.

I. O přímkách.

1. Přímky polohou k povrchu země.

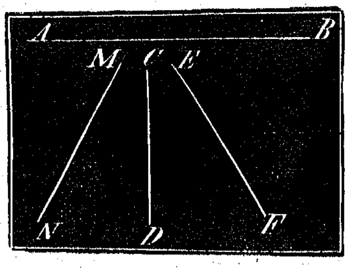
Dle polohy své k zemi jsou přímky trojí:

1. *Vodorovné*, *rovnovážné* jsou přímky, ježto mají směr vody stojaté, směr váhových ramen v rovnováze. Takovéto přímky nazývají se též *obzorové* neb *obzorné*.

2. *Svislé*, *prostopádné* jsou přímky ve směru těles zavěšených, ve směru těles prosto k zemi padajících.

3. Přímky jednou stranou k zemi se klonící jmenují se *šikmé*, *kosé*.

Obr. 7.



Na tabuli vede se vodorovná přímka přímým směrem od levé k pravé, jako AB v obr. 7.; svislá se vede shora přímo dolů, jako CD. Šikmo se vede přímka buď od levé šikmo k pravé, aneb od pravé šikmo k levé. V obr. 7. jest EF šikmá od levé k pravé, MN jest šikmá od pravé k levé.

Mají se jmenovati některé předměty, které mají polohu vodorovnou a předměty, které stojí na zemi svisle.

2. Přímky dle vzájemné polohy.

Přímky, kteréž běží stále v rovné od sebe vzdálenosti, jmenují se *rovnoběžné* neb *rovnoběžky;* běží-li ale v nerovné od sebe vzdálenosti, nazývají se *nerovnoběžné*, *různoběžné* neb *různoběžky*.

Různoběžky se jednou stranou k sobě kloní, druhou se však od sebe odchylují.

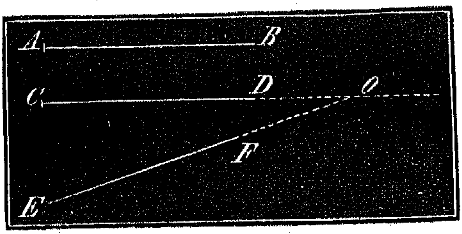
Známka rovnoběžnosti jest ||; známka různoběhu $\curlywedge$.

Přímka AB v obr. 8. jde rovnoběžně s přímkou CD, AB || CD; přímky CD a EF jsou různoběžné, CD $\curlywedge$ EF.

Mají se vésti vodorovné, svislé, šikmé rovnoběžky. Jsou v témž místě svislé přímky spolu rovnoběžné?

Průsek dvou různoběžek. Prodloužíme-li rovnoběžky, budou i prodlužky jejich rovnoběžné, jelikož se prodloužením vzájemná vzdálenosť přímek těchto nezmění. Prodloužíme-li ale dvě různoběžky tím směrem, jímž se k sobě kloní, setkají se v určitém bodu a bod ten nazývá se bod *protínací, průsečný,* neb *průsečník.* V obr. 8. jest bod O průsečníkem přímek CD a EF.

Obr. 8.



Jelikož se bodem C a O jen jedna přímka CO a bodem E a O taktéž jen jedna přímka EO vésti může, pravíme o přímkách průsečných:

Dvě přímky mohou míti jen jeden společný bod, mohou se jen v jednom bodu séci.

3. O délce přímek.

Vzdálenosť konečných bodů sluje *velkosť* neb *délka* přímky.

Porovnáme-li délky dvou přímek, mohou délky tyto býti buď *rovné* aneb *nerovné.*

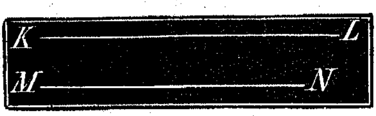
Dvě přímky jsou si rovny, když jest vzdálenosť konečných bodů jedné přímky tak velká, jako vzdálenosť těchže bodů u přímky druhé.

Obr. 9.

Mají-li ale konečné body dvou přímek nerovnou od sebe vzdálenosť, nejsou přímky tyto sobě rovny — jsou nerovny.

Položme rovné přímky AB a CD (obr. 9.) jednu na druhou dle směru jejich. Položí-li se počáteční bod C přímky CD na počáteční bod A přímky AB, padnou i konečné body D a B na sebe a přímky AB a CD se pokryjí.

Obr. 10.



Pročež pravíme: *Rovné přímky se kryjí, když se jedna na druhou náležitě položí; přímky, které se kryjí, jsou sobě rovny.*

Že jest přímka AB rovna přímce CD, píše se AB = CD.

Přímky nerovné se úplně pokrýti nemohou.

Známka nerovnosti jest: > aneb < :

Většina píše se do otvoru, menšina za otvor. Že jest přímka KL (obr. 10.) větší než přímka MN, aneb že jest MN menší než KL, napíše se takto:

KL $>$ MN, čte se: KL jest větší než MN.

MN $<$ KL, čte se: MN jest menší než KL.

Mají se vésti: 1. Dvě rovné rovnoběžky, 2. dvě rovné svislé, 3. dvě rovné rovnovážné, 4. dvě rovné šikmé rovnoběžky.

4. Počítání přímkami.

Přímkami se může tak počítati jako čísly.

Prodloužíme-li ku př. přímku AB o délku BC (obr. 11.), jest přímka AC rovna oběma přímkám AB a BC dohromady, čili přímka AC jest rovna *součtu* přímek AB a BC. Jest tedy:

Obr. 11.

$AC = AB + BC$.

Utne-li se od přímky AC délka BC, zbyde AB co *zbytek* neb *rozdíl* přímek AC a BC, což se takto píše: $AB = AC - BC$.

Vnesou-li se na přímku kružidlem rovné délky AB, BC, CD, DE (obr. 12.), jest délka AC dvakrát, AD třikrát, AE čtyrykrát tak dlouhá jak AB. Tímto způsobem vzniknou 2, 3, 4 . . . *násobné* délky. Jest tedy: $AC = 2AB$, $AD = 3AB$, $AE = 4AB$.

Obr. 12.

Naopak obnáší délka AB polovici přímky AC, třetinu délky AD a čtvrtinu délky AE. Jestiť: $AB = \frac{AC}{2} = \frac{AD}{3} = \frac{AE}{4}$.

Jak se přímky způsobem měřickým na rovné díly rozdělují, ukáže se v dalším učení.

Má se sestrojiti: 1. přímka rovna součtu tří daných přímek; 2. přímka rovna rozdílu dvou daných přímek; 3. přímka 2-, 3-, 4krát tak velká jak daná přímka; 4. z dvou nerovných přímek jest menší dána a rozdíl obou, má se vyhledati větší přímka; 5. z dvou nerovných přímek je větší dána a rozdíl obou, má se vyhledati menší; 6. jest dán třetí, čtvrtý a pátý díl přímky, má se vyhledati délka celé přímky.

5. Měření přímek.

K vyměření přímek béře se určitá délka za jedničku míry.

Jedničkou míry délkové jest metr (mètre). Měření metrem sluje *metrické.*

Aby se menší délky než metr jest měřiti mohly, rozděluje se metr na 10, 100, 1000 rovných dílů. Desátý díl metru jmenuje se *desimetr* (decimètre), *desetina* (metrová); stý díl sluje *santimeter* (centimètre), *setina* (metrová); tisící díl zove se *millimetr* (millimètre), *tisícina* (metrová).

Délka 10 metrů slove *dekametr*, 100 metrů *hektometr*, 1000 metrů *kilometr* a 10.000 metrů nazývá se *myriametr*.

Míra takto rozdělená jmenuje se *desetinná*. Před tím byla jedničkou míry délka, jež se jmenovala *stopa* neb *střevíc*. Míra tato dělila se pro menší délky na 12 rovných dílů *palce;* palec pak se dělil opět na 12 dílů *čárky* neb *linie*. Tato míra sluje *dvanáctinná*.

Délka šesti stop sloula *sáh*.

V písmě znamenal se sáh, stopa, palec, čárka takto: ^{0}, $'$, $''$, $'''$. Psalo se tedy 5 sáhů, 4 stopy, 10 palců, 11 čárek: $5^0\ 4'\ 10''\ 11'''$.

Při míře metrické poznačujeme: 4 metry, 5 desimetrů, 8 santimetrů a 3 millimetry takto: 4 *m*, 5 *dm*, 8 *cm*, 3 *mm*. Dále pak 8 dekametrů, 6 hektometrů, 7 kilometrů, a 2 myriametry píše se takto: 8 *dkm*, 6 *hm*, 7 *km*, 2 *Mm*.

Metr obnáší 3·1634′ anebo 3′ 2″.

Velké vzdálenosti měřily se na míle. Rozeznávala se míle dvojí: rakouská a zeměpisná; ona obnášela 4000°, tato pak 3912°. Nyní se měří veliké délky kilometrem.

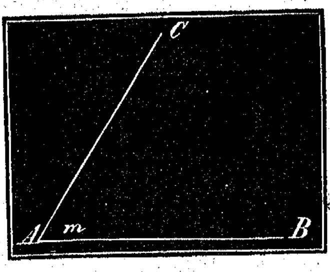
Má-li se určitá délka vyměřiti, stane se to, když se vyšetří, kolikrát se jednička (míra) na ni položiti dá. Užíváme pak k měření *měřídka*, kteráž pro menší i větší délky upravena jsou.

II. O úhlu.

1. Vznik úhlu.

Když se vedou z téhož bodu A (obr. 13.) dvě přímky AB a AC aneb, když se dvě přímky v témž bodu setkají, vznikne mezi směry obou přímek odchylka. Velkosť odchylky této jmenuje se úhel.

Obr. 13.



Úhel jest tedy odchylka směru dvou z téhož bodu vycházejících přímek aneb jinak, *úhel jest odchylka směru dvou přímek, kteréž se v témž bodu setkaly.*

Obě přímky AB a AC nazývají se *ramena* a bod A, z něhož obě přímky vycházejí, slove *vrchol*.

V písmě znamená se úhel známkou $\sphericalangle$, a poznačuje se buď jen jednou písmenou aneb třemi.

Má-li se úhel jen jednou písmenou poznačiti, klade se písmena ta buď do otvoru aneb při vrcholu úhlu. Do otvoru klade se obyčejně písmena malá. Píšeme tedy buď ∢ m aneb ∢ A.

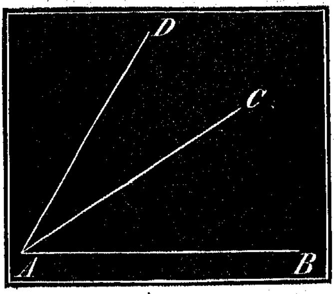
Poznačí-li se úhel třemi písmenami, čte a píše se písmena, kterouž se vrchol poznačí, uprostřed písmen, jimiž se poznačily konce ramen. Čte a píše se tedy: ∢ BAC neb ∢ CAB.

2. O velikosti úhlu.

Když ramena úhlu prodloužíme, nezmění se odchylka směrů ve vrcholu úhlu toho, a jelikož se odchylka ta úhlem nazývá, pravíme: *Úhel se nezmění, když ramena jeho prodloužíme.*

Jestliže se ale ramena od sebe odkloní aneb k sobě přikloní, změní se odchylka a tudíž i úhel. Pravíme: *Úhel se změní — zvětší neb zmenší — jestliže se ramena od sebe odkloní aneb k sobě přikloní.*

Obr. 14.



Velkosť úhlu závisí tedy jen na odchylce ramen jeho.

Dva úhly jsou sobě *rovny,* když jsou ramena jejich od sebe stejně odkloněná; jsou-li ramena od sebe nestejně odkloněná, nejsou úhly sobě rovny — jsou *nerovny.*

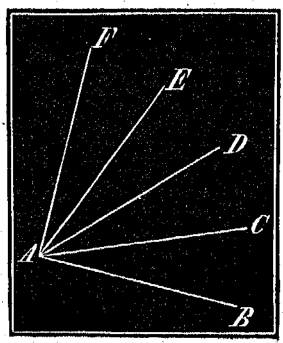
Položí-li se dva rovné úhly na sebe vrcholem a jedním ramenem, padnou na sebe i druhá ramena; úhly se pokryjí. Pročež pravíme: *Rovné úhly se kryjí, když se náležitě na sebe položí. Úhly, které se kryjí, jsou rovny.* Nerovné úhly se úplně pokrýti nemohou.

3. Jak se úhly počítá?

Úhly může se rovněž tak počítati jako čísly.

Pohybuje-li se rameno AC úhlu BAC (obr. 14.) až zaujme polohu AD, vznikne úhel BAD a úhel tento rovná se úhlům BAC a CAD dohromady, nebo jinak, je roven *součtu* úhlů těchto. Jest tedy: BAD = BAC + CAD.

Obr. 15.



Pohybuje-li se rameno AD úhlu BAD dolů k ramenu AB až zaujme směr AC, zbyde úhel BAC. Úhel BAC jest *rozdílem* úhlů BAD a CAD; jest tedy BAC = BAD — CAD.

Úhly BAC, CAD, DAE, EAF buďtež sobě rovny (obr. 15.) Jestiť patrno, že jest úhel BAD = 2. BAC, úhel BAE = 3. BAC, úhel BAF = 4. BAC.

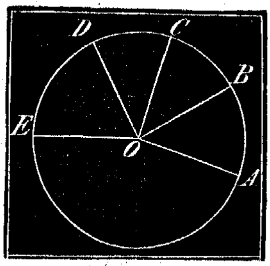
Na opak jest úhel $BAC = \frac{BAD}{2} = \frac{BAE}{3} = \frac{BAF}{4}$.

Úhly mohou se tedy sčítati i odčítati, násobiti i děliti.

4. Souvislosť úhlu s obvodem kruhovým.

Sestrojíme-li v kruhu (obr. 16.) dvěma poloměry OA a OB úhel AOB a točíme-li poloměr OB tak, až zaujme polohu OC, OD, OE, vzniknou rozličné úhly.

Obr. 16.



Ku každému úhlu přináleží určitý oblouk; čím větší úhel, tím větší jest příslušný oblouk.

Jsou-li úhly BOC a COD sobě rovny a položí-li se na sebe, pokryjí se. Poněvadž jsou ramena OB a OD sobě rovny — poloměry téhož kruhu — pokryjí se též, bod B padne na bod D, a jelikož mají oblouky BC a CD v každém bodu rovnou vzdálenosť od středu O, kryjí se taktéž — jsou si rovny. Pročež pravíme: *V kruhu náležejí k rovným úhlům rovné oblouky; k rovným obloukům rovné úhly.*

Rovněž jestiť patrno, že by se rovnosť úhlů BOC a COD nezrušila, kdyby se úhly tyto beze vší změny oblouků svých z obvodu kruhového vyňaly; pak by úhly ty tak byly, jako by se každý zvlášť byl sestavil.

Jsouť tedy úhly sobě rovny, když se shledá, že se oblouky jejich, jednakým poloměrem opsané, sobě rovnají.

5. Měření úhlů.

Úhly měříme obloukem kruhu.

Celý obvod kruhu rozděluje se totiž na 360 rovných dílů, ježto se *stupně* obloukové nazývají.

Rozdělíme-li obvod tím způsobem a vedeme-li k bodům rozdělovacím poloměry, vznikne 360 malých, rovných úhlů. Jeden takový úhel nazývá se též *stupeň* a sice *stupeň úhlový*. Stupeň úhlový jest jedničkou *míry úhlové*.

Měl-li by se nějaký úhel vyměřiti, muselo by se vyšetřit, kolikrát jednička míry v něm obsažena jest. Takovéto měření jmenovalo by se měření *bezprostředné*. Pohodlněji se však měří úhel *prostředečně* — obloukem kruhu. Pravíme totiž: *Každý úhel má tolik stupňů (úhlových), kolik má stupňů (obloukových) oblouk příslušný*, t. j. *mezi ramenama jeho rozpjatý*.

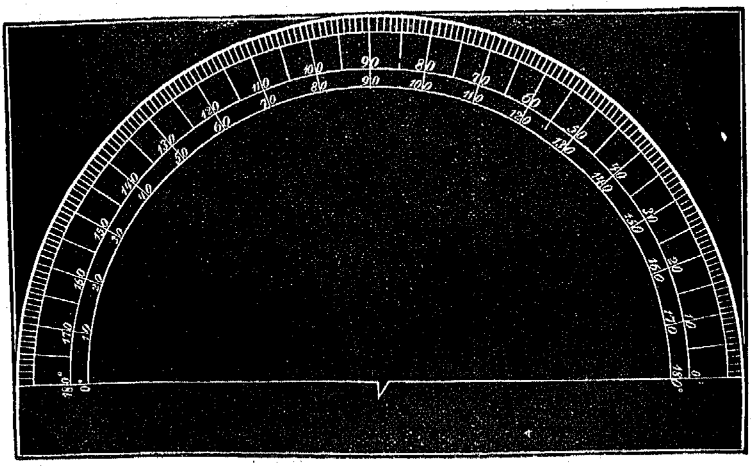
Má-li ku př. oblouk 30, 40, 50 stupňů, má tolik stupňů i úhel.

Jak úhlový, tak se dělí i obloukový stupeň na 60 rovných dílů — *minuty*, minuta též na 60 — *sekundy* (vteřiny).

V písmě poznačují se stupně, minuty a sekundy takto: 20° 40′ 50″ a čteme 20 stupňů, 40 minut a 50 sekund.

Měření koná se *úhloměrem* (transporteur), obr. 17.

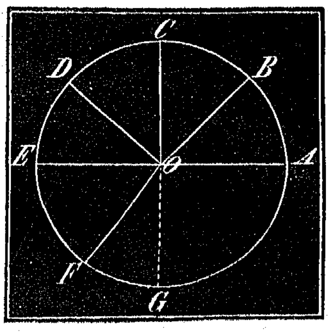
Obr. 17.



Má-li se úhel úhloměrem vyměřiti, položí se úhloměr vroubkem na vrchol úhlu; s jedním ramenem srovná se tak, až se pokryjí a hledí se, ku kterému dílku na rozměru druhé rameno úhlu přiléhá. S té strany, kde se úhloměr na rameno položil, se pak na rozměru stupně čítají.

6. Tvary úhlů.

Obr. 18.



Pohybuje-li se v kruhu poloměr OB z polohy OA polohami OC, OD, OE, OF, vzniknou rozličné úhly, obr. 18.

Úhel AOB jest menší než úhel AOC. Úhel AOC obnáší čtvrtý díl celého obvodu, tedy $\frac{360^0}{4}$, což se rovná 90^0.

Úhel AOC obnáší tedy 90 stupňů; úhel takový nazývá se *pravý*.

Úhel AOB, jenž jest menší pravého AOC, jmenuje se *ostrý*.

Úhel AOD jest větší než pravý úhel AOC, obnáší tedy více než 90^0 a nazývá se *tupý*.

Přidáme-li k úhlu AOD úhel DOE, vznikne úhel, jehož ramena mají směr přímopříčný. Úhel takový obnáší dva pravé, tedy 180° a sluje *úhel přímý*.

Pohybuje-li se poloměr z polohy OA až k poloze OF, vznikne velký úhel AOF, jenž jest větší, než úhel přímý a více obnáší než 180°. Úhel takový nazývá se *vypuklý*.

Úhel, který obnáší méně než 180°, jmenuje se vůbec *úhel dutý*.

Jsou tedy úhly: *duté* a *vypuklé*.

Duté jsou: ostrý, pravý, tupý.

Ostrý a tupý úhel jmenují se též *úhly kosé*.

Mají se od ruky sestrojiti: ostrý, pravý, tupý a vypuklý úhel.

7. Sestrojení úhlu.

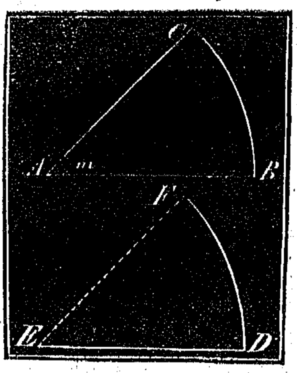
1. Úhloměrem se mohou úhly měřiti i sestrojiti.

Má-li se úhloměrem určitý úhel sestrojiti, vede se přímka, na ni položí se úhloměr středem na ten bod, jenž vrcholem úhlu býti má. Na rozměru se vyhledá úhel a u posledního dílku udělá se znaménko, ježto se pak s vrcholem spojí.

Mají se sestrojiti úhly: 20°, 30°, 40°, 60°, 80°, 90°.

Mají se libovolné úhly sestrojiti (od ruky) a úhloměrem vyměřiti.

Obr. 19.



Má se úhel sestrojiti, jenž se rovná součtu, rozdílu dvou daných úhlů.

Jest dán rozdíl dvou nerovných úhlů a menší úhel, má se vypočísti a sestrojiti úhel větší. Jest dán rozdíl a větší úhel, má se vypočísti a sestrojiti menší.

Dán jest úhel, má se sestrojiti 2-, 3-, 4krát tak veliký.

Má se sestrojiti 2, 3, 4, 6tý díl úhlu 120°.

2. K danému úhlu sestrojiti rovný. Jak z předešlého učení víme, náležejí k rovným, jednakými poloměry opsaným obloukům rovné úhly. Sestrojíme-li tedy týmž poloměrem kolem bodů A a E (obr. 19.) dva rovné oblouky BC a DF, budou úhly BAC a DEF sobě rovny.

Má-li se tedy k danému úhlu *m* sestrojiti rovný, vyhledá se nejprve oblouk, jakýž k úhlu tomu náleží. To se stane, když se kolem vrcholu A délkou AB opíše oblouk, až protne druhé rameno v bodu C. Oblouk ten budiž oblouk BC.

Když se oblouk vyhledal, vede se ED = AB; kolem bodu E se opíše poloměrem ED = AB oblouk a učiní se rovným oblouku BC; budiž DF = BC. Vede-li se EF, jest úhel DEF = BAC = m.

Má se k ostrému a tupému úhlu sestrojiti rovný.

Jak by se sestrojil úhel, jenž by se rovnal součtu, rozdílu dvou daných úhlů?

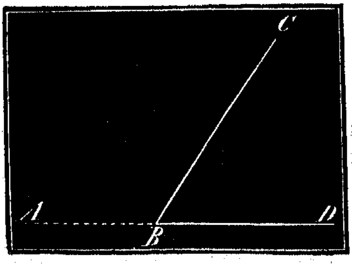
Poznam. Výkon předešlý může se poněkud zjednodušiti. Jestiť patrno, že se jedná při úhlu DEF o nález bodu F. Bod tento se vyhledá, opíšeme-li délkou DF = BC kolem bodu D a poloměrem ED = AB kolem bodu E průsečné oblouky. Průsek jest bod F.

8. Úhly vedlejší.

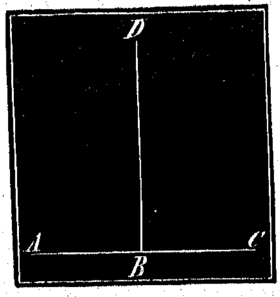
Prodloužíme-li vrcholem B úhlu CBD rameno BD až k bodu A (obr. 20.), vzniknou dva úhly ABC a CBD, kteréž se *vedlejší úhly* nazývají.

Vedlejší úhly mají jedno společné rameno a společný vrchol, druhá ramena leží na příč v přímé čáře.

Obr. 20.



Obr. 21.



Vedlejší úhly činí součtem vždy úhel přímý, obnášejí tedy dohromady 180°.

Když jest úhel CBD = 60°, 70°, 90°, 100°, mnoho-li obnáší úhel ABC?

K úhlu ostrému připadá vedlejší tupý, k pravému pravý a k tupému ostrý.

Stojí-li jedna přímka na druhé tak, že s ní činí pravé vedlejší úhly, nazývá se přímka ta *kolmá, kolmice* a pravíme, že stojí na druhé *kolmo*, ku př. přímka DB (obr. 21.) stojí kolmo ($\perp$) na přímce AC a sice v bodu B. Oba úhly DBA a DBC jsou pravé a tedy sobě rovny.

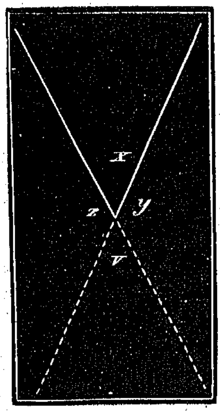
Jsou-li vedlejší úhly nerovné, stojí přímka na druhé *šikmo* $\vee$ ku př. (obr. 20.) BC $\vee$ AD.

Jak stojí rovnovážná na svislé?

9. Úhly vrcholové.

Prodloužíme-li vrcholem úhlu obě ramena, vzniknou čtyry úhly, z nichž se na kříž ležící nazývají *vrcholové* neb *křížové* ku př. z a y, x a v.

Obr. 22.



Úhly vrcholové mají společný vrchol, a ramena jejich leží na příč v přímé čáře.

Úhly $x + y$ (obr. 22.) činí 180^0; přidáme-li k úhlu y úhel v, činí $y + v$ také 180^0. Z toho vysvítá, že jest úhel $x = v$; jelikož se jak jedním, tak druhým týž úhel y na 180^0 vyplňuje t. j.:

Vrcholové úhly jsou si rovny.

Jelikož $x + y = 180^0$ a $z + v = 180^0$, jest tedy: $x + y + z + v = 360^0$ t. j.:

Součet všech vrcholových úhlů obnáší 360^0 neb čtyry pravé.

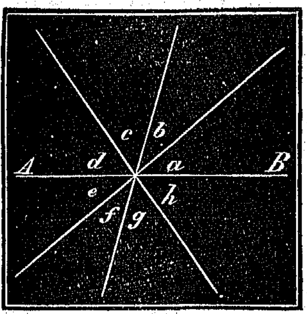
Známe-li z křížových úhlů jeden, vypočítáme dle vlastností úhlů těch i druhé úhly. Je-li $x = 40^0$, jest $v = 40^0$; $y = 140^0 = z$.

Je-li z křížových úhlů jeden pravý, jsou všechny pravé.

10. Úhly kolem jednoho bodu.

Protíná-li se více přímek v společném bodu, vzniknou kolem bodu toho rozličné úhly, z nichž však ty, kteréž na jedné straně též přímky leží, 180^0 obnášejí, jelikož činí dohromady úhel přímý, ku př. (obr. 23.) $a + b + c + d = 180^0$.

Obr. 23.



Úhly na druhé straně přímky AB činí taktéž přímý úhel neb 180^0.

Součet dolejších a hořejších úhlů činí tedy 360^0, protož pravíme:

Všechny úhly kolem jednoho bodu obnášejí dohromady 360^0 čili čtyry pravé.

Které úhly v obr. 23. jsou si rovny?

11. Úhly protilehlé, střídnolehlé a přilehlé.

Vedeme-li dvě přímky a přes obě průsečnou (obr. 24.), vznikne osm úhlů, kteréž dle polohy své zvláštní jména mají.

Nejprve jsou úhly zevnitřní a vnitřní.

Zevnitřní jsou: a b g h, totiž ty, kteréž jsou nad vrchní a pod spodní přímkou proťatou;

vnitřní: c d e f, slují ty, kteréž leží mezi proťatýma přímkama.

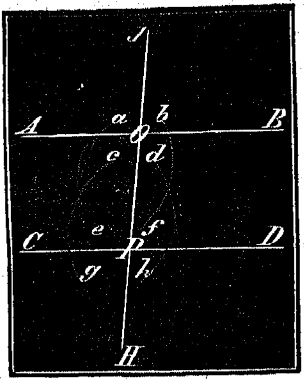
Dále rozeznáváme po dvou:

1. Úhel zevnitřní a vnitřní na též straně přímky protínací, ale v rozdílných vrcholech, nazývají se úhly *protilehlé* neb *protější;* jsou tedy protilehlé: ae, bf, cg, dh.

2. Dva vnitřní aneb dva zevnitřní na rozdílných stranách přímky protínací a v rozdílných vrcholech nazývají se úhly *střídnolehlé* neb *střídné;* jsou tedy střídné úhly: c f, d e, a h, b g.

3. Dva vnitřní aneb dva zevnitřní na též straně přímky protínací, ale v rozdílných vrcholech, jmenují se *přilehlé;* jsou tedy přilehlé: a g, b h, c e, d f.

Obr. 24.



Rovnoběžky s průsečnou. Jsou-li přímky AB a CD rovnoběžné a protíná-li obě přímka JH v bodech O a P (obr. 24.) jsou odchylky směrů OB a PD od přímky JH v bodech O a P rovné; neboť posmyká-li se rovnoběžka AB ve směru protínací přímky HJ dolů tak, že se při tom směr její nezmění, padne zcela do směru druhé rovnoběžky CD, jakmile průsečný bod O padne na průsečník P.

Úhly a a e, b a f se pokryjí a jsou si tedy *rovny*.

Taktéž jest $g = c$, $h = d$. Z toho vidíme:

1. Mezi rovnoběžkama jsou protilehlé úhly sobě rovny.

Jelikož jest $b = f$ a $b = c$, jest $f = c$, jakož i $d = e$, $a = h$, $b = g$ t. j.

2. Když se přímkou protnou dvě rovnoběžky, jsou střídné úhly sobě rovny.

$b + d = 180^0$, jelikož jest $b = f$, jest $f + d = 180^0$; taktéž jest $c + e = 180^0$, $a + g = 180^0$, t. j.

3. Přilehlé úhly mezi rovnoběžkama obnášejí po dvou dva pravé neb 180^0.

Protnou-li se tedy přímkou dvě rovnoběžky, jsou si rovny:

1. Úhly protilehlé, 2. úhly střídnolehlé a 3. přilehlé úhly obnášejí po dvou dva pravé neb 180^0.

Známe-li v průseku dvou rovnoběžek jeden úhel, vypočítáme dle vlastnosti této všechny ostatní úhly. Je-li ku př. $b = 70^0$, obnáší úhel f též 70^0; úhel $d = 110^0$ atd.

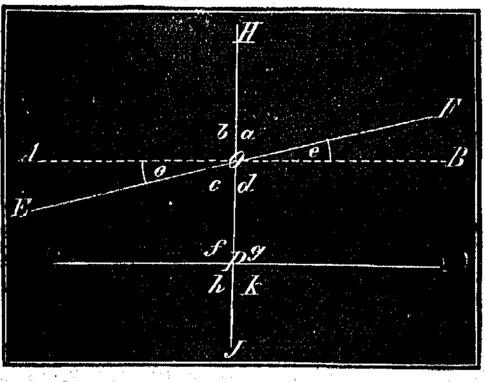
Různoběžky s průsečnou. Protnou-li se různoběžky CD a EF (obr. 25.) přímkou HJ v bodech O a P a jde-li bodem O s přímkou CD rovnoběžně přímka AB, jest:

$k = d,\ a + e = g$

$d = f,\ c + o = g$

$f + (c + o) = 180^0,\ d + g = 180^0.$

Obr. 25.



Porovnáme-li však úhly mezi různoběžkama, jest:

$(d + e) > k.$

$c < g,$

$(d + e) + g > 180^0$ a

$(f + c) < 180^0.$

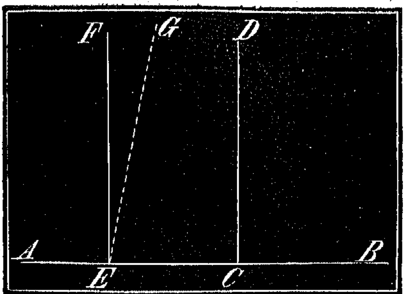
Protnou-li se tedy přímkou dvě různoběžky, jsou nerovny:

1. Úhly protilehlé, 2. úhly střídnolehlé a 3. úhly přilehlé jsou buď menší aneb větší než 180⁰.

Z předešlého učení vysvítá dále:

1. *Protnou-li se přímkou HJ* (obr. 24.) *dvě přímky AB a CD a jsou-li rovny buď úhly protilehlé, aneb úhly střídnolehlé aneb obnášejí-li přilehlé úhly po dvou dva pravé, jsou přímky AB a CD rovnoběžné, neboť by jinak té rovnosti nebylo.*

Obr. 26.



Stojí-li tedy dvě přímky CD a EF (obr. 26.) na téže přímce AB kolmo, jsou přímky tyto rovnoběžné.

Kolmou mezi dvěma rovnoběžkama udává se vzdálenosť těchto rovnoběžek; tak jest v obr. 26. EC vzdálenosť rovnoběžek EF a CD.

2. *Protnou-li se přímkou HJ* (obr. 25.) *dvě přímky EF a CD a jsou-li nerovny buď úhly protilehlé, aneb úhly střídnolehlé aneb jsou-li úhly přilehlé buď > aneb < 180⁰, jsou přímky EF a CD, různoběžné, neboť, kdyby byly rovnoběžné, nemohly by úhly ty býti nerovné.*

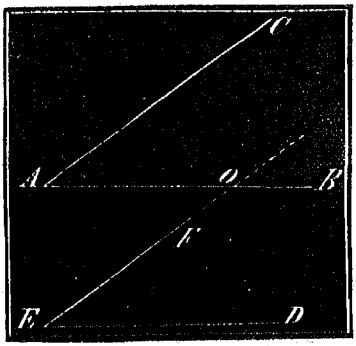
Stojí-li tedy z dvou přímek CD a EG (obr. 26.) na též přímce AB jen jedna kolmo, jsou přímky ty různoběžné.

Mohla by se mezi dvěma různoběžkama vésti nějaká přímka tak aby stála k oběma různoběžkám kolmo?

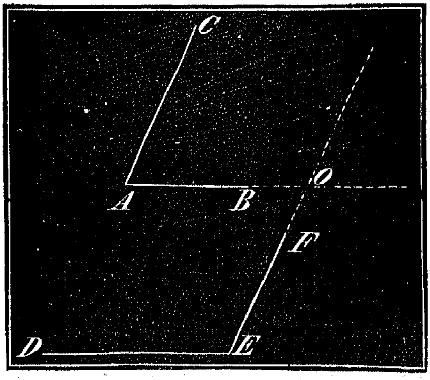
Úhly, jichž ramena jsou vzájemně rovnoběžná. Úhly BAC a DEF (obr. 27.) mají ramena vzájemně rovnoběžná. Prodloužíme-li EF až k průsečníku O ramene AB, jest úhel BAC = AOE = DEO neb DEF.

Úhly BAC a DEF (obr. 28.) mají taktéž ramena vzájemně rovnoběžná. Prodloužíme-li ramena AB a EF až k průsečníku O, jest úhel CAB = AOE; úhel BOE + DEF = 180° a dáme-li místo BOE rovný CAB, jest CAB + DEF = 180°.

Obr. 27.



Obr. 28.

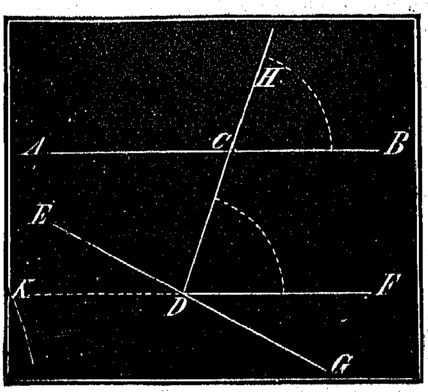


Mají-li tedy dva úhly ramena vzájemně rovnoběžná, jsou si buď rovny aneb obnášejí součtem 180°.

Obojí tento případ dá se snadno vyšetřiti takto:

Položí-li se v obr. 27. rameno DE úhlu DEF do směru ramena AB úhlu BAC, mají se úhly ty k sobě jako úhly protilehlé, pročež jsou si rovny. Položí-li se ale v obr. 28. rameno DE úhlu DEF do směru ramene AB úhlu BAC, mají se úhly ty k sobě jako úhly přilehlé a činí tedy součtem 180°.

Obr. 29.



Mají-li se tedy úhly s rovnoběžnýma ramenama k sobě tak jako (mezi rovnoběžkama) úhly protilehlé aneb střídné — jsou si rovny; mohou-li se ale tak k sobě položiti, že vzniknou z nich úhly přilehlé, obnášejí součtem dva pravé.

Má se bodem D (obr. 29.) *vésti přímka rovnoběžná s přímkou AB.*

Vede se daným bodem D přímka DH libovolně tak, aby přímku

AB protala ku př. v bodu C. U bodu D sestrojí se úhel CDF rovný úhlu BCH a přímka DF se prodlouží.

Přímka FK jde rovnoběžně s přímkou AB, poněvadž jsou protilehlé úhly sobě rovny.

Vedeme-li bodem D ještě jinou přímku EG, jest úhel CDG > CDF a protož též větší než úhel BCH. Přímky EG a AB jsou různoběžné.

Taktéž by nešla všeliká jiná přímka rovnoběžně s přímkou AB, byť bychom ji bodem D jakkoli vedli, protož pravíme:

Daným bodem může s danou přímkou jen jedna přímka rovnoběžně jíti.

Úlohy.

1. Veďte rovnovážnou přímku, protněte ji přímkou svislou. Jak stojí přímky ty na sobě, jaké činí spolu úhly?

2. Veďte přímku rovnovážnou, protněte ji přímkou šikmou. Kolik se utvoří úhlů? Jaké jsou ty úhly? Vyměřte úhloměrem z nich jeden a vypočítejte ostatní.

3. Veďte svislou přímku, protněte ji přímkou šikmo. Kolik vznikne úhlů? Udejte tupé úhly, vyměřte úhloměrem jeden tupý a vypočtěte ostatní úhly.

4. Sestrojte úhel libovolně, sestrojte k němu jiný rovný nejprve od ruky a pak dle návodu měřického.

5. Sestrojte úhloměrem úhly 10°, 15°, 20°, 25°; sestrojte jiné 2-, 3-, 4krát tak velké dle návodu měřického.

6. Sestrojte úhel libovolně; sestrojte zároveň jiný, jenž jest 2-, 3krát tak velký. Vykonejte úlohu tuto nejprve od ruky a pak dle návodu měřického.

7. Veďte dvě rovnovážné, protněte je přímkou svislou. Kolik vznikne úhlů? Jaké jsou to úhly?

8. Veďte dvě svislé, protněte je rovnovážnou; kolik vznikne úhlů a jaké jsou to úhly?

9. Veďte dvě šikmé rovnoběžky, protněte je přímkou svislou. Kolik vznikne úhlů? Pojmenujte všechny úhly; jmenujte úhly zevnitřní a vnitřní. Udejte všechny protilehlé, střídnolehlé a přilehlé úhly; vyměřte jeden úhel a vypočítejte ostatní.

10. Veďte rovnovážnou, protněte ji šikmo dvěma rovnoběžkama; pojmenujte všechny úhly, udejte proti-, střídno- a přilehlé úhly. Vyměřte pak úhloměrem jeden úhel, a vypočítejte ostatní.

11. Veďte přímku svislou, protněte ji šikmo dvěma rovnoběžkama. Pojmenujte, udejte a vypočtěte všechny úhly.

12. Veďte přímku libovolně, sestrojte od ruky jinou tak, aby šly spolu přímky ty rovnoběžně. Protněte obě od ruky tak, aby průsečná s nima činila úhly pravé.

13. Veďte přímku libovolně, protněte ji pravoúhelně. Některým bodem přímky protínací veďte k protaté přímce rovnoběžku nejprve od ruky a pak dle návodu měřického.

14. Veďte přímku, protněte ji šikmo. Některým bodem přímky protínací veďte k protaté přímce rovnoběžku, nejprve od ruky a pak dle návodu měřického. Ve výkonu tom mají se upotřebiti a) úhly střídné, b) úhly protilehlé.

15. Sestrojte úhly libovolně a k úhlům těm sestrojte jiné od ruky tak, aby byla ramena jejich na vzájem rovnoběžná.

16. Sestrojte úhel libovolně; v otvoru úhlu toho veďte od ruky k oběma ramenům rovnoběžky. Jak budou přímky ty k sobě? Protnou se jednou stranou? Bude úhel v průseku roven úhlu, jejž jste zprvu sestrojili?

17. Sestrojte úhel libovolně; v otvoru úhlu toho veďte z libovolného bodu od ruky rovnoběžky k ramenům úhlu toho a sice nejprve obě stejnosměrně, pak obě nestejnosměrně. Bude vzniklý úhel roven úhlu, jejž jste sestrojili?

18. Veďte dvě různoběžky, mezi nima veďte ku každé jednu rovnoběžku. Budou přímky ty k sobě taky různoběžné? Veďte ty přímky tak, aby se protaly. Bude úhel v průseku roven tomu úhlu, jejž by dané různoběžky spolu činily, až k průseku prodlouženy jsouce?

19. Veďte dvě různoběžky, mezi nima veďte z libovolného bodu ku každé jednu rovnoběžku; u vzniklého úhlu prodlužte vrcholem jedno rameno. Udejte který z obou úhlů jest roven úhlu, jejž by dané různoběžky spolu v průseku činily.

20. Veďte mezi dvěma různoběžkama k některé z nich rovnoběžku; prodlužte přímku tu tak, až protne druhou z daných různoběžek. Jaké vzniknou v průseku úhly a který je z nich roven tomu úhlu, jejž by různoběžky v průseku činily? Může se tedy vyhledat úhel dvou různoběžek i tehdáž, když by se přímky ty až k průseku prodloužiti nemohly? Udejte, jak by se taková úloha vykonala.

21. Veďte tři rovnoběžky, protněte je všechny přímkou šikmo. Kolik bude průseků, kolik úhlů vznikne celkem. Pojmenujte všechny úhly a vyhledejte rovné úhly z prvního a třetího vrcholu, vyměřte úhloměrem jeden úhel a vypočítejte všechny ostatní.

22. Veďte dvě průsečné, se křížící přímky; k přímkám těmto veďte bodem libovolným rovnoběžky. Kolik vznikne úhlů v obou vrcholech dohromady? Které z úhlů těch jsou sobě rovny? Oběma vrcholy veďte přímku neurčitě. Kolik úhlů přibude přímkou tou? Pojmenujte všechny úhly, vyhledejte úhly rovné, vyměřte jeden úhel a udejte všechny ostatní úhly v obou vrcholech.

III. O trojúhelníku.

1. Vznik a částky trojúhelníka.

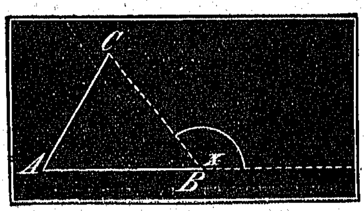
Rovina čárami omezená nazývá se *obrazec*. Rovina přímkami omezená sluje *obrazec přímočárný*.

Přímky, jimiž se obrazec omezuje, jmenují se strany.

Aby se rovina všestranně omezila, jest zapotřebí nejméně tří stran.

Dvěma přímkama AB a AC (obr. 30.) se rovina všestranně omeziti nemůže. Spojíme-li bod C s bodem B, omezíme všestranně rovinu ABC.

Obr. 30.



Obrazec třemi přímkami omezený nazývá se *trojúhelník*. Značí se známkou: △.

Trojúhelník sestává ze šesti částek; má totiž tři úhly a tři strany.

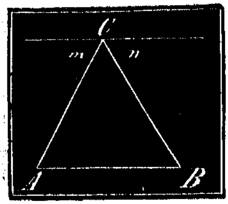
Úhly při stranách jmenují se *přilehlé;* třetí nazývá se pak *protilehlý* neb *protější.*

V trojúhelníku ABC (obr. 30.) jsou úhly B a C při straně BC úhly přilehlé, úhel A jest úhel protilehlý.

2. Úhly v trojúhelníku.

Prodloužíme-li u trojúhelníka některou stranu, vznikne úhel, jenž se nazývá *zevnitřní* neb *vnější;* úhly v trojúhelníku jmenují se *vnitřní.*

Obr. 31.



Prodlouží-li se AB (obr. 30.), jest úhel x úhel zevnitřní.

Úhly vnitřní. Vedeme-li (obr. 31.) vrcholem úhlu C trojúhelníka ABC k protější straně AB rovnoběžku, vzniknou při vrcholu C mimo vnitřní úhel C úhly m a n.

Úhly m, C, n činí dohromady úhel přímý. Jest tedy:

$$C + m + n = 180^0.$$

Úhly m a n jsou střídnolehlé k úhlům A a B, pročež jest $m = A$, $n = B$.

Dáme-li tedy místo úhlu m rovný A, místo úhlu n rovný B, bude součet:

$C + A + B = 180^0$, t. j.:

V trojúhelníku obnáší součet úhlů vnitřních 180⁰ neb dva pravé úhly.

Známe-li v trojúhelníku jeden úhel, vyhledá se součet obou druhých odčítáním třetího úhlu od 180^0.

Je-li $C = 40^0$, jest $A + B = 180^0 - 40^0 = 140^0$.

Známe-li dva úhly, vypočítává se úhel třetí, když se součet obou známých úhlů od 180^0 odečte.

Je-li $A = 68^0$, $B = 87^0$, jest $C = 180^0 - (68 + 87) = 25^0$. Mnoho-li obnáší úhel C, když jest $A = 80^0$, $B = 73^0$; $A = 68^0$, $B = 79^0$; $A = 74^0$, $B = 78^0$.

Z věty této vysvítá dále:

1. V trojúhelníku jest součet dvou úhlů vždy menší než 180⁰.

Mohou-li býti tedy v trojúhelníku dva pravé anebo dva tupé úhly?

2. Jsou-li u dvou trojúhelníků dva úhly vzájemně rovné, jsou i třetí úhly sobě rovny.

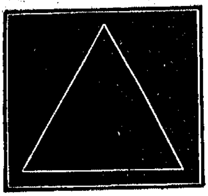
Trojúhelníky dle úhlů. Dle úhlů rozvrhují se trojúhelníky v *ostroúhelné* obr. 32., *pravoúhelné* obr. 33. a *tupoúhelné* obr. 34.

Trojúhelník ostroúhelný má samé ostré úhly; pravoúhelný má jeden pravý úhel a druhé dva jsou ostré. Trojúhelník tupoúhelný má jeden tupý úhel a dva ostré.

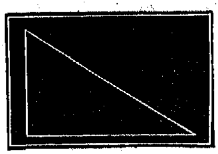
V trojúhelníku pravoúhelném obnášejí oba ostré úhly dohromady 90^0. Známe-li tedy jeden, vypočítá se odčítáním od 90^0 úhel druhý.

V trojúhelníku tupoúhelném obnášejí oba ostré úhly součtem méně než 90^0. Nemůže se tedy udáním jednoho vypočítati druhý.

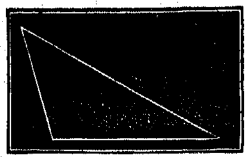
Obr. 32.



Obr. 33.



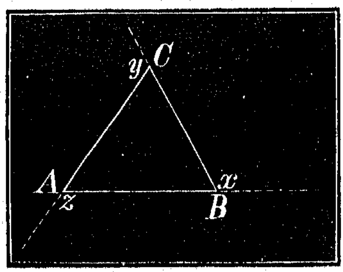
Obr. 34.



Sestrojte od ruky ostroúhelné, pravoúhelné a tupoúhelné trojúhelníky.

Úhly zevnitřní. Prodloužíme-li u trojúhelníku ABC (obr. 35.) každou stranu jedním směrem, vzniknou tři zevnitřní úhly x, y, z.

Obr. 35.



Jak z obrazce vysvítá, činí úhel x a B dohromady přímý úhel; jest tedy:

$x + B = 180^0$.

Jelikož jest součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku roven 180^0, totiž: $A + C + B = 180^0$; rovná se úhel x velikostí úhlům $A + C$, protož pravíme:

Úhel zevnitřní jest roven oběma vnitřním protilehlým ~~dohromady~~.

Z obou vnitřních úhlův jest tedy jeden i druhý menší, než úhel zevnitřní.

Známe-li oba vnitřní protilehlé, dá součet jejich úhel zevnitřní. Je-li $A = 64^0$, $C = 48^0$, jest zevnitřní úhel $x = 64^0 + 48^0 = 112^0$.

Jak velký jest zevnitřní úhel, když obnáší A 70^0, C 65^0?

Součet úhlů zevnitřních. Jelikož jest úhel zevnitřní roven součtu obou vnitřních protilehlých, jest tedy:

$x = A + C$

$y = A + B$

$z = B + C$

Součet zevnitřních úhlů x, y, z bude tedy:

$x + y + z = 2A + 2B + 2C = 2(A + B + C)$

$A + B + C = 180^0$,

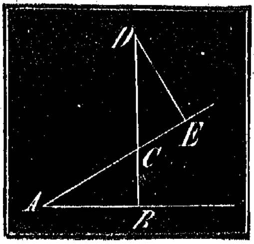
pročež jest:

$x + y + z = 2.180^0 = 360^0$, t. j.:

U trojúhelníka obnáší součet všech zevnitřních úhlů 360°, neb čtyry pravé úhly.

Vedeme-li k ramenům úhlů A (obr. 36.) z bodu vnějšího D, totiž z bodu, jenž jest za otvorem úhlu toho, přímky DE kolmo na AE a DB kolmo na přímce AB, vzniknou dva pravoúhelné trojúhelníky ABC a CDE.

Obr. 36.



Tyto trojúhelníky mají vzájemně rovné úhly; jest totiž E = B = 90° a vrcholové úhly v bodu C jsou též rovny. Jsou tedy i třetí úhly sobě rovny, totiž úhel A = D; pročež pravíme:

Když se vedou k ramenům daného úhlu z bodu vnějšího kolmé, jest úhel mezi kolmýma roven úhlu tomu.

3. Strany trojúhelníka.

Jak z učení o přímce víme, jest délka AB (obr. 35.) menší než čára klikatá AC + CB. Pravíme tedy:

V trojúhelníku jsou dvě strany dohromady, t. j. *součet dvou stran vždy větší než strana třetí* anebo jinak, *v trojúhelníku jest jedna strana vždy menší než součet obou druhých.*

Jest tedy: $AC + CB > AB$ neb

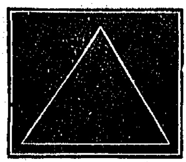
$AB < AC + CB$.

Odečte-li se od nerovnosti této délka CB, bude:

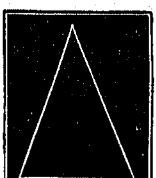
$AB - CB < AC$.

V trojúhelníku jest rozdíl dvou stran vždy menší než strana třetí.

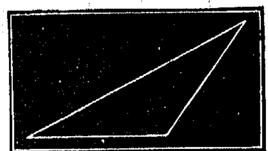
Obr. 37.



Obr. 38.



Obr. 39.



Trojúhelníky dle stran. Dle stran jsou trojúhelníky trojí; *rovnostranné* obr. 37., jsou-li všecky strany sobě rovny; *rovnoramenné* obr. 38., když jsou jen dvě strany rovné; *nerovnostranné,* když jsou všechny strany nerovné (obr. 39.).

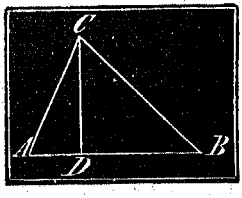
Strany trojúhelníka pravoúhelného mají zvláštní jména. Strana naproti pravému úhlu nazývá se *podpona* čili *přepona,* ramena úhlu toho jmenují se *strany odvěsné* neb *odvěsny.*

Čára základná a výška trojúhelníka. Strana, o kteréž myslíme, že na ní trojúhelník spočívá, nazývá se *čára základná*, *čára spodní*, *základnice*, *podstava*.

Vrchol toho úhlu, jenž naproti základné čáře leží, jmenuje se *vrchol trojúhelníka*. Kolmá z vrcholu k základnici nazývá se *výška*.

Je-li v trojúhelníku ABC (obr. 40.) AB čára základná, jest C vrchol trojúhelníka a kolmice CD jest výška.

Obr. 40.



Základnou může býti kterákoli strana; ku každé straně náleží jistá výška.

V trojúhelníku rovnoramenném brává se obyčejně třetí nerovná strana za čáru základnou.

V ostroúhelném trojúhelníku vpadne výška vždy uvnitř obrazce. Je-li ale trojúhelník tupoúhelný, nemůže se výška uvnitř vésti, pak-li se rameno tupého úhlu za základnici vezme; neboť by vznikl trojúhelník, jenž by měl zároveň pravý a tupý úhel, což býti nemůže.

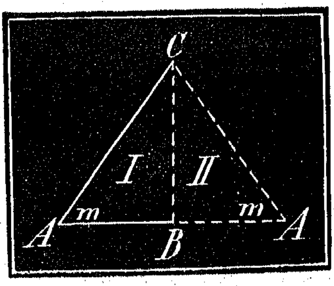
Vezme-li se v pravoúhelném trojúhelníku jedna z odvěsen za základnici, jest druhá odvěsna výškou.

4. Vzájemnost stran a úhlů.

Trojúhelník ABC (obr. 41., I) budiž pravoúhelný. Jestiť patrno, že se na trojúhelníku tom nic nezmění, jestliže se o stranu BC převrátí do polohy II.

Složíme-li obě ony polohy I. a II. v jednu tak, aby byla strana BC oběma společná, budou odvěsny AB a BA činiti přímku ABA; (neboť stojí BC na obou kolmo, což by býti nemohlo, kdyby činily čáru lomenou). Vynecháme-li pak odvěsnu BC, vznikne nový, větší trojúhelník ACA. Trojúhelník tento má *dvě rovné* strany, jest *rovnoramenný*, neboť jest AC = CA, jsouť to předešlé sobě rovné podpony. Zároveň jsou pak ony úhly sobě rovny, ježto naproti oněm rovným stranám leží; nebo jinak ježto jsou na základnici totiž na přímce ABA, jestiť m = m. Pravíme tedy:

Obr. 41.



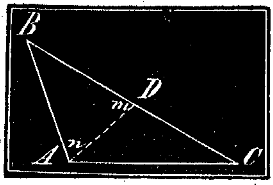
1. V trojúhelníku rovnoramenném jsou úhly naproti ramenům ležící sobě rovny; nebo jinak *v trojúhelníku rovnoramenném jsou úhly na základnici sobě rovny.*

2. Jsou-li v trojúhelníku dva úhly sobě rovny, jsou i protější strany rovny, nebo jinak *jest týž trojúhelník rovnoramenný.*

3. *V trojúhelníku rovnostranném jsou všechny úhly sobě rovny.* Poněvadž činí v každém trojúhelníku všechny úhly dohromady 180^0, obnáší tedy v trojúhelníku rovnostranném každý úhel $\frac{180^0}{3} = 60^0$.

V trojúhelníku nerovnostranném jsou samé nerovné úhly; neboť kdyby úhly ty byly sobě rovny, musily by i strany protilehlé býti rovné. Jsou-li v trojúhelníku úhly nerovné, jsou i strany nerovné.

Obr. 42. a)



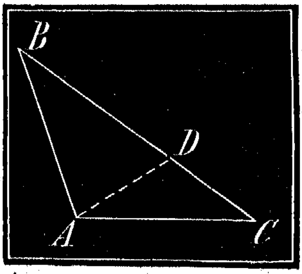
Mnoho-li obnášejí v trojúhelníku rovnoramenném úhly na základnici, když obnáší úhel ve vrcholu: 80^0, 100^0, 120^0?

Mnoho-li obnáší úhel vrcholní, když činí úhly na základnici: 70^0, 82^0, 90^0, 100^0?

Mnoho-li obnáší úhel vrcholní, když činí při základnici úhel jeden: 25^0, 40^0, 43^0, 56^0?

Mohou-li se v trojúhelníku nerovnostranném oba druhé úhly o sobě určiti, když v trojúhelníku tom toliko jeden úhel známe?

Obr. 42. b)



Trojúhelník ABC budiž nerovnostranný, strana $BC > AB$ (obr. 42. a).

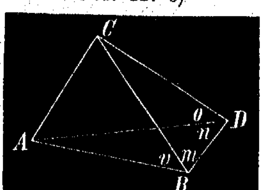
Učiní-li BD = AB, jest úhel $n = m$. Úhel A jest větší než úhel n a tedy zároveň větší než úhel m. Poněvadž jest úhel m (úhel zevnitřní trojúhelníka ACD) větší než C, jest tedy i úhel A > C, t. j.:

V trojúhelníku nerovnostranném leží naproti větší straně větší úhel.

Je-li v trojúhelníku ABC (obr. 42. b) úhel A > C, učiňme úhel CAD rovným úhlu C a veďme přímku AD. Protože jsou úhly ty sobě rovny, jest strana AD = CD.

V trojúhelníku ABD jest strana AB < BD + DA, a dáme-li místo délky AD stranu CD, jenž jest oné délce rovna, bude:

Obr. 42. c)



AB < BD + DC anebo:

AB < BC, protož pravíme:

V každém trojúhelníku stojí naproti většímu úhlu větší strana.

V trojúhelníku tupoúhelném leží tedy naproti tupému, v pravoúhelném naproti pravému úhlu největší strana.

Poznam. Rovnostranný trojúhelník nazývá se trojúhelník *pravidelný* nebo *trojec.*

Vedeme-li v trojúhelníku ABC (obr. 42. c) z vrcholu C přímku CD rovnou přímce BC a spojíme-li bod D s body A a B, bude trojúhelník BCD rovnoramenný a proto bude úhel $m = n + o$. Úhel m jest tedy větší než úhel n a jestliže k úhlu m přidáme ještě úhel v, bude $m + v$ ještě větší než jest úhel n. Jelikož stojí v každém trojúhelníku naproti většímu úhlu větší strana, jest tedy v trojúhelníku ABD strana AD > AB. Strany AB a AD náležejí též k trojúhelníkům ABC a ACD, kteréžto trojúhelníky mají na vzájem rovné strany AC = AC, strana BC = CD. Úhly na vrcholech stranami těmito sevřené jsou nerovné — úhel ACD > ACB — a strany proti těmto nerovným úhlům ležící jsou též nerovné — AD > AB; pročež díme:

1. *Jsou-li ve dvou trojúhelnících dvě strany na vzájem sobě rovny, úhly ale jima sevřené nerovny; jsou též třetí strany těchto trojúhelníků nerovné a sice jest z nerovných těchto stran ona větší, naproti níž leží větší úhel.*

2. *Jsou-li ve dvou trojúhelnících dvě strany střídavě rovny, třetí strany ale nerovny, jsou též úhly proti třetím stranám ležící nerovny a sice jest onen větší, jenž leží proti větší straně.*

Pochopitelno jest, že se tato vlastnosť oněch trojúhelníků nezmění, kdyby se každý o sobě zvlášť položil.

5. Rovnosť, podobnost a shodnosť.

Rovina, kteráž mezi stranami trojúhelníka obsažena jest, nazývá se jeho *velkosť* neb *obsah* anebo *plocha* téhož trojúhelníka.

Když mají dva trojúhelníky stejnou velkosť, pravíme o nich, že jsou *rovné*, že jsou sobě *rovny*.

Trojúhelníky mohou býti rovné i když se podobou od sebe liší. Trojúhelník tupoúhlý může tak velkou plochu obsahovati, jako trojúhelník ostro- aneb pravoúhelný.

Trojúhelníky, kteréž mají stejnou podobu, jmenují se *podobné*.

Všechny rovnostranné trojúhelníky jsou si podobny.

Mají-li dva trojúhelníky stejnou podobu a stejnou velkosť, nazývají se *shodné*; pravíme o nich, že se shodují.

Položí-li se shodné trojúhelníky částkami svými náležitě na sebe pokryjí se úplně.

U shodných trojúhelníků jsou tedy částky jednoho trojúhelníka rovné stejnolehlým částkám druhého trojúhelníka.

Jsou-li naopak u dvou trojúhelníků stejnolehlé částky vzájemně sobě rovny, pravíme, že se trojúhelníky ty shodují.

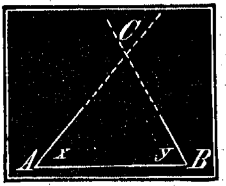
Známka rovnosti jest $=$, známka podobnosti $\sim$; známka shodnosti jest složena z obou a jest buď $\cong$ anebo $\backsimeq$.

6. O sestrojení a shodnosti trojúhelníků.

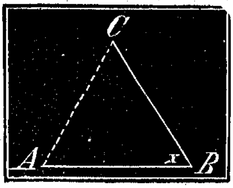
Má-li se trojúhelník sestrojiti, není třeba, aby se všech šest částek dalo, z nichž trojúhelník sestává.

Sestrojíme-li ku př. jednu stranu AB (obr. 43.), a k ní přilehlé úhly x a y, nedostávají se ještě dvě strany a jeden úhel, tedy ještě tři částky. Tyto částky se však sestrojením stanoví; neboť, jestliže prodloužíme neurčitá ramena obou úhlů, protnou se tyto v bodu C a trojúhelník se doplní stranama AC a BC a úhlem ACB.

Obr. 43.



Obr. 44.

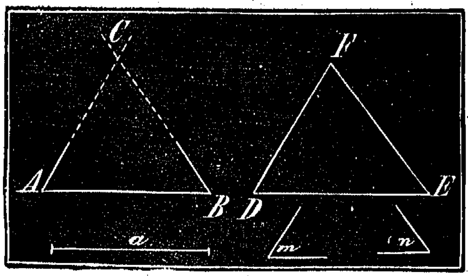


Sestrojíme-li dvě strany AB a BC (obr. 44.) tak, aby určitý úhel x svíraly, nedostává se ještě jedna strana a dva úhly k celému obrazci, celkem tedy tři částky. Spojíme-li však body A a B, doplní se obrazec a ty tři částky, které ještě scházely, stanoví se spojením bodů A a B.

K sestrojení trojúhelníka dostačí tedy s jistou výminkou toliko známosť tří částek.

Jednou stranou, jedním úhlem, dvěma stranama nebo dvěma úhly nedá se trojúhelník sestaviti. Taktéž se třemi úhly nemůže trojúhelník určitě sestrojiti.

Obr. 45.



Z tří částek dá se ve čtyřech případech trojúhelník určitě sestaviti a sice:

Když se dá:

1. *Jedna strana a úhly k ní přilehlé.*
2. *Dvě strany s úhlem sevřeným.*
3. *Dvě strany a úhel k jedné protilehlý.*
4. *Tři strany.*

1. Má se trojúhelník sestrojiti danou stranou a přilehlýma úhly.

Vede se strana AB $=$ a (obr. 45.), nad stranou tou u bodu A a B se sestrojí úhly A $= m$, B $= n$. Ramena úhlů těchto se prodlouží až k průseku C.

P o z n a m. V tomto případu musí býti součet úhlu A a B vždy menší než 180°, proč?

Sestrojíme-li z částek těchto stejným způsobem jiný trojúhelník DEF aneb tři, čtyry neb více trojúhelníků, jestiť patrno, že budou míti všecky takovéto trojúhelníky, ze stejných částek a stejným způsobem sestaveny jsouce, tentýž tvar a tutéž velkosť, t. j. že budou shodné.

O shodnosti jejich můžeme se však i takto přesvědčiti:

Položíme-li (v myšlénkách) trojúhelník DEF na trojúhelník ABC tak, aby stejné přilehlo k stejnému, zakryje se rovné rovným. Strana AB stranou DE, úhel A úhlem D, úhlem B úhlem E. Strana DE padne do směru strany AC, strana EF do směru strany BC. Bod F leží tedy ve směru strany AC a BC tak jako bod C a, jelikož mohou přímky ty jen jeden bod společný míti, padnou body C a F na sebe. Trojúhelníky ABC a DEF se pokryjí a jsou tedy shodné. Pročež pravíme:

Trojúhelníky se shodují, když mají jednu stranu s přilehlýma úhly vzájemně rovnou.

Shodují se dva rovnoramenné trojúhelníky, když jsou základnice s jedním přilehlým úhlem vzájemně rovny?

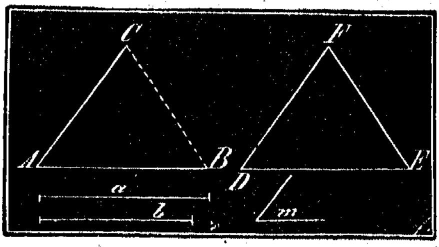
Shodují se dva rovnoramenné trojúhelníky, když jsou základnice a úhly ve vrcholech na vzájem rovny?

Shodují se dva pravoúhelné trojúhelníky, když jsou vzájemně rovny podpona a jeden ostrý úhel? odvěsna a jeden ostrý úhel?

Má se sestrojiti trojúhelník danou stranou, přilehlé úhly buďtež 70^0 a 80^0.

Je dána základnice s úhlem přilehlým, má se sestrojiti trojúhelník rovnoramenný.

Obr. 46.



2. *Má se sestrojiti trojúhelník dvěma stranama tak, aby strany ty určitý úhel svíraly.*

Vede se strana $AB = a$ (obr. 46.), při ní sestrojí se daný úhel $m = A$, z ramene druhého se odměří strana $AC = b$ a konečné body B a C se přímkou spojí.

Sestrojíme-li i v tomto případu týmž způsobem a stejnými částkami jiný trojúhelník DEF aneb více trojúhelníků, budou všecky takto sestrojené trojúhelníky stejnou velkosť a stejnou podobu míti, t. j. budou vesměs *shodné.*

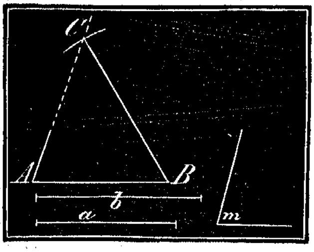
Avšak se můžeme o shodnosti trojúhelníků ABC a DEF i takto přesvědčiti:

Položíme-li (v myšlénkách) trojúhelník DEF na trojúhelník ABC stejným k stejnému, zakryje se rovné rovným; totiž úhel A úhlem D, strana AB stranou DE, strana AB stranou DF. Bod E padne na bod B, bod F na bod C, přímka EF na přímku BC. Trojúhelníky ABC a DEF se pokryjí a jsou tedy shodné.

Pročež pravíme:

Trojúhelníky se shodují, když mají dvě strany vzájemně rovné a když jsou úhly těmato stranama sevřené sobě rovny.

Obr. 47.



Shodují se dva pravoúhlé trojúhelníky, když jsou odvěsny jejich vzájemně rovny?

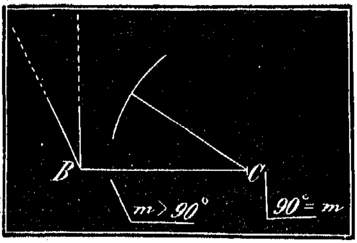
Shodují se dva rovnoramenné trojúhelníky, když jsou ramena s úhlem na vrcholu vzájemně rovny?

Shodují se dva rovnoramenné trojúhelníky, když jsou ramena a úhly na základnicích na vzájem sobě rovny?

3. Má se sestaviti trojúhelník dvěma stranama a úhlem tak, aby úhel ten ležel naproti jedné oněch stran.

Sestrojí se menší strana AB $=$ *a* (obr. 47.), při ní daný úhel A $=$ *m*. Kolem druhého bodu B se opíše větší stranou BC $=$ *b* oblouk až k průseku neurčitého ramene úhlu A.

Obr. 48.

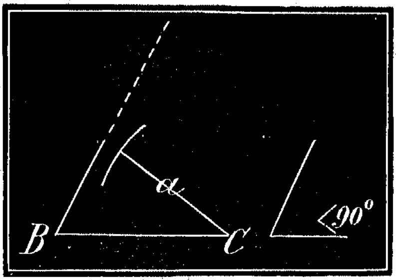


Poznam. Výkon úlohy této vyžaduje, aby se daný úhel vždy při menší straně sestrojil a naproti větší straně ležel.

Vedla-li by se větší strana BC $=$ *b* (obr. 48.) a sestrojil-li by se při ní úhel *m*, měl by se menší stranou vésti průsečný oblouk. Je-li úhel *m* $=$ aneb $>$ 90°, nedá menší strana žádného průseku a trojúhelník jest tedy nemožný.

Je-li úhel *m* $<$ 90°, jsou dle velkosti strany *a* tři případy možné; buď nezasáhne oblouk touto stranou opsaný úhlové rameno (obr. 49.) nebo protne rameno to a sice ve dvou bodech (obr. 50.) anebo se toho ramene jen dotkne. V prvním případu není trojúhelník možný; v druhém mohou se těmitéž částkami dva rozličné trojúhelníky sestaviti BCA a ACD. V třetím případu vznikl by jen jeden trojúhelník, jehož vrcholem byl by dotýčný bod oblouku vedeného.

Obr. 49.



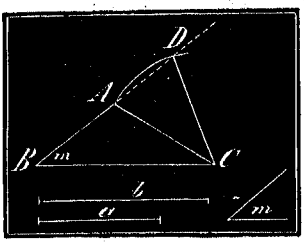
Vytknutá úloha vyžaduje tedy následného dodatku:

Má se sestrojiti trojúhelník dvěma stranama a úhlem tak, aby daný úhel naproti větší straně ležel.

Sestrojte týmž způsobem a stejnými částkami dva trojúhelníky ABC a DEF, obr. 51., 52., 53. AC budiž rovná DF, AB = DE úhel C = F.

Trojúhelníky ABC a DEF (v obr. 51., 52. a 53.) liší se od sebe toliko polohou a názvem, podobou a velikostí jsou si úplně rovny; neboť se nad délkou AC = DF z bodů A a D stejnou délkou AB=DE od neurčitého ramene rovných úhlů C a F vždy jen opět stejná část useči a tím stejná část roviny omeziti dá, jak to ze strojby oněch trojúhelníků vysvítá. Trojúhelníky ty jsou tedy shodné.

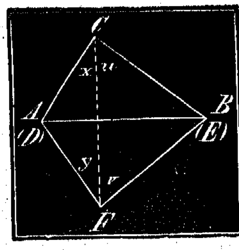
Obr. 50.



Že takovéto trojúhelníky povždy shodné jsou, o tom se můžeme ubezpečiti takto:

Kdyby se vědělo, že jsou u trojúhelníků ABC a DEF i třetí strany, totiž BC a EF sobě rovny, shodovaly by se trojúhelníky tyto, protože by měly na vzájem dvě rovné strany a zároveň rovné úhly stranama těmato sevřené.

Obr. 51.



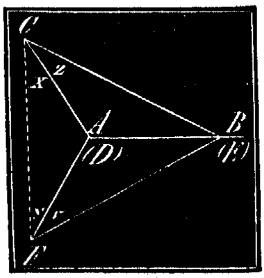
Že strany ty rovné jsou, dozvíme se z úvahy následující:

Položme trojúhelník DEF k trojúhelníku ABC tak, aby rovné větší strany AB a DE k sobě přilehaly; strany ty se pokryjí, neboť jsou sobě rovny.

Když se takto dva trojúhelníky k sobě položí, může dle velkosti úhlu CAF trojí obrazec vzniknouti; neboť jest úhel DAF buď menší než 180° (obr. 51.), nebo větší než 180° (obr. 52.) anebo jest = 180° (obr. 53.).

1. Je-li úhel CAF < 180° (obr. 51.) a spojíme-li bod C s bodem F, jest trojúhelník CAF rovnoramenný; (jestiť AC = AF neb DF) protož jest $x = y$ a jelikož jest úhel C = F, jest též $u = v$ (proč?)

Obr. 52



V trojúhelníku BCF jsou tedy úhly na základnici CF sobě rovny, totiž $u = v$, pročež jest CB = BF neb FE.

Z toho vidíme, že jsou u trojúhelníků ABC a DEF i třetí strany BC a EF sobě rovny, pročež se trojúhelníky tyto shodují.

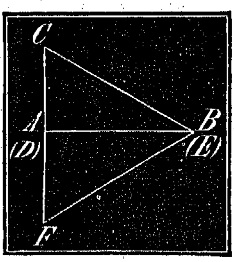
2. Je-li úhel CAF > 180° (obr. 52.), jest taktéž spojením bodů C a F trojúhelník ACF rovnoramenný, pročež jest $x = y$.

Jelikož jest úhel z nebo $C = v$ nebo F, jest součet, totiž $x + z = y + v$.

V trojúhelníku BCF jsou úhly na základnici CF sobě rovny, trojúhelník ten jest rovnoramenný, strana BC jest = BF neb EF.

U trojúhelníků ABC a DEF jsou tedy i třetí strany sobě rovny a protož jsou trojúhelníky ty shodné.

Obr. 53.



3. Je-li konečně úhel CAF = 180° (obr. 53.), jest trojúhelník BCF rovnoramenný, neboť jest úhel C = F, pročež jsou strany BC a EF sobě rovny.

U trojúhelníků ABC a DEF jsou tedy i v tomto případu třetí strany BC a EF sobě rovny a trojúhelníky ty se shodují.

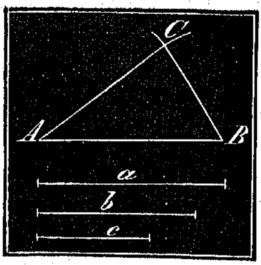
Pravíme tedy:

Trojúhelníky se shodují, mají-li dvě strany vzájemně rovné a jsou-li úhly, které naproti větším stranám leží, sobě rovny.

Shodují se dva pravoúhelné trojúhelníky, když jsou podpony a jedna odvěsna vzájemně sobě rovny?

4. Má se trojúhelník sestrojiti třemi stranami.

Obr. 54.



Vede se strana AB = a (obr. 54.), kolem bodu A a B se opíší průsečné oblouky stranama b a c; průsečník C dá s body A a B stranu AC a BC.

Sestrojíme-li těmitéž stranami jiný trojúhelník DEF (viz obr. 51., 52., 53.), má tento trojúhelník s trojúhelníkem ABC vzájemně tři rovné strany.

Trojúhelníky tímto způsobem sestavené mají stejný tvar a stejný obsah; neboť se nad stejnou délkou AB = a = DE stejnými stranami vždy jen opět stejná část roviny omeziti může. Ony trojúhelníky se tedy shodují.

O shodnosti jejich můžeme se však na tento způsob přesvědčiti:

Kdyby měly trojúhelníky tyto ještě některý úhel vzájemně rovný, shodovaly by se dle předešlého učení. Že u trojúhelníků těch úhly stejnoležné vzájemně sobě rovny jsou, poznáme z úvahy této:

Položme trojúhelník DEF k trojúhelníku ABC tak, aby se rovné strany AB a DE kryly.

Dle velkosti úhlu CAF jsou opět tři případy možné. Buď jest úhel CAF < 180° (obr. 51.), nebo jest > 180° (obr. 52.) aneb jest = 180° (obr. 53.).

1. Vedeme-li přímku CF (obr. 51.), jest v trojúhelníku CAF strana $AC = AF$ nebo DF: trojúhelník CAF jest tedy rovnoramenný, pročež úhel $x = y$.

Trojúhelník BCF jest taktéž rovnoramenný, neboť jest $BC = BF$ neb EF, jest tedy $u = v$.

Jest tedy i: $x + u = y + v$ nebo $C = F$. U trojúhelníků ABC a DEF jsou úhly tedy C a F sobě rovny. Trojúhelníky ty se tedy shodují.

2. Spojíme-li bod C s bodem F (obr. 52.), jest trojúhelník ACF rovnoramenný, neboť jest strana $AC = AF$ neb DF, pročež jest úhel $x = y$.

Taktéž jest rovnoramenným velký trojúhelník BCF (jestiť $BC = BF$ neb EF); jest tedy $x + z = y + v$.

Odečtou-li se od toho součtu rovné úhly x a y, bude:

$z = v$ nebo úhel C v trojúhelníku ABC roven úhlu F v trojúhelníku DEF, pročež se trojúhelníky ty shodují.

3. Poněvadž jest strana $BC = BF$ neb EF (obr. 53.), jest úhel $C = F$ a trojúhelník $ABC \cong DEF$.

Pročež pravíme:

Trojúhelníky se shodují, když mají vzájemně stejné strany.

Kdy se shodují trojúhelníky rovnoramenné?

5. *Má se k určitému trojúhelníku sestrojiti shodný.*

K výkonu tomuto jest zapotřebí tří částek, jimiž se trojúhelník určitě sestrojiti dá.

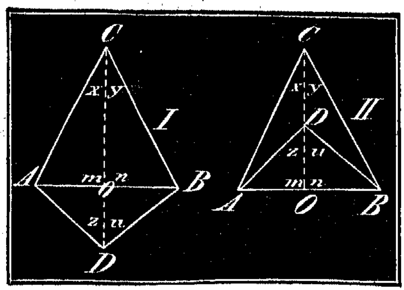
Úloha tato provede se tedy jedním ze čtyr zprvu uvedených způsobů.

7. Vlastnosti trojúhelníků rovnoramenných.

Sestrojme při též straně AB (obr. 55. I.) dva rovnoramenné trojúhelníky ABC a ABD.

Vedeme-li vrcholem C a D přímku CD, rozdělí se přímkou tou úhly v obou vrcholech a základnice AB v bodu O. Přímkou tou vzniknou trojúhelníky ACD a BCD. Trojúhelníky tyto jsou shodné, poněvadž mají vzájemně rovné strany $AC = BC$, $AD = BD$ a strana CD jest sama sobě rovna. Jsou tedy stejnolehlé úhly x a y, z a u sobě rovny.

Obr. 55.



Položíme-li trojúhelník BCD na trojúhelník ACD tak, aby se rovné rovným krylo, padne bod B na bod A, přímka BO na přímku AO, úhel n na úhel m. Z tohoto vysvítá, že jest AO = BO, úhel $m = n$ a poněvadž jsou úhly tyto úhly vedlejší, jest tedy $m = n = 90^0$.

Když se tedy vrcholy dvou na též základnici stojících rovnoramenných trojúhelníků přímkou spojí, rozpoluje přímka ta: *1. úhly v obou vrcholech, 2. základnici a stojí, 3. na základnici kolmo.*

Obrazec předešlý může se sestaviti i tak, aby vrchol D nad základnicí AB ležel (obr. 55. II.). Z obrazce II. jestiť patrno, že jest výsledek tentýž.

V rovnoramenném trojúhelníku ABC (obr. 55. I.) a ABD (obr. 55. II.) jest kolmá CO a DO výškou a jelikož jest AO = BO = $\frac{1}{2}$ AB, pravíme:

V trojúhelníku rovnoramenném rozpoluje se základnice výškou.

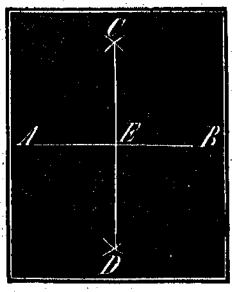
Taktéž vysvítá z obrazců těchto dále: *1. Když se v rovnoramenném trojúhelníku spustí z vrcholu na základnici kolmá, rozpůlí se základnice a úhel ve vrcholu.*

2. Přímka, která v rovnoramenném trojúhelníku úhel ve vrcholu rozpoluje, stojí na základnici kolmo a rozpoluje ji.

3. Přímka, kteráž v rovnoramenném trojúhelníku střed základnice s vrcholem spojuje, rozpoluje úhel ve vrcholu a stojí na základnici kolmo.

4. Když se v rovnoramenném trojúhelníku v středu přímky základné vytýčí kolmá, jde kolmá ta vrcholem trojúhelníka a úhel ve vrcholu se kolmicí tou rozpoluje.

Obr. 56.



V obrazci 55. II. jest z úhel zevnitřní trojúhelníka ACD větší, než úhel x; taktéž jest úhel $u > y$. Jest tedy úhel ADB > ACB. Zároveň vysvítá, že jest rameno AC > AD; protož pravíme:

Když stojí dva rovnoramenné trojúhelníky na též základnici, jest ve vrcholu úhel menší v onom trojúhelníku, jenž má delší ramena.

Těchto vlastností trojúhelníků rovnoramenných užívá se k výkonu mnohých důležitých úloh.

1. Má se rozpůliti daná přímka AB, obr. 56.

Poněvadž víme, že se přímkou, kteráž spojuje vrcholy dvou na též základnici stojících rovnoramenných trojúhelníků, základnice rozpoluje, sestrojíme nad přímkou danou dva rovnoramenné trojúhelníky a spojíme vrcholy jejich. Výkon úlohy té provede se tedy takto:

Opíší se libovolnými, avšak rovnými poloměry dvojí průsečné oblouky, obojí buď nad neb pod ní, anebo se vyhledá jeden průsečník nad přímkou a druhý pod ní. (Poloměry tyto vždy větší býti musí než půle přímky, proč?) Průsečnými body C a E vede se přímka CD, anaž přímku danou v bodu D protíná a rozpoluje.

Rozdělte danou přímku na 2, 4, 8 rovných dílů.

Jsou dány dvě nerovné přímky, vyhledejte poloviční součet jejich; vyhledejte poloviční rozdíl jejich.

Dány jsou tři nerovné přímky, vyhledejte poloviční součet přímky první a druhé, druhé a třetí, první a třetí.

Dán jest *součet* a *rozdíl* dvou nerovných přímek; mají se vyhledati délky oněch přímek.

Řešení úlohy této provede se dle následné úvahy. *Součet* přímek obnáší obě délky dohromady; *rozdílem* se udává, oč jest kratší přímka menší než přímka větší. Dáme-li tedy k součtu rozdíl, vznikne délka, kteráž obsahuje větší přímku, přímku menší a ještě to, co k menší přímce schází, aby byla tak dlouhá, jak jest přímka větší. Z toho vidíme, že obsahuje *součet* a *rozdíl* dohromady větší přímku dvakrát a že polovice délky součtu a rozdílu dá přímku větší.

Jestli že se ale od *součtu* odejme *rozdíl*, zkrátíme-li totiž délku tu o to, oč jest delší přímka větší než přímka kratší, vznikne délka, kteráž obsahuje menší přímku dvakrát. Polovice délky této dá přímku menší.

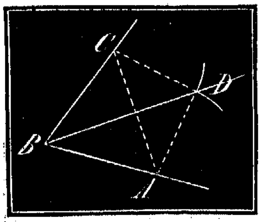
Z toho jde toto pravidlo:

Když se dá součet a rozdíl dvou nerovných přímek, vyhledá se větší přímka, když se součet a rozdíl v jednu délku sestaví a délka ta rozpůlí; menší přímka se vyhledá, když se od součtu rozdíl odejme a zbylá délka rozpůlí.

Udělejte několik příkladů; veďte dvě nerovné délky, považujte větší za *součet*, menší za *rozdíl*, vyhledejte délku přímek, z nichž onen součet a rozdíl vznikl.

2. *Má se daný úhel rozpůliti.*

Obr. 57.



Učiní se rameno AB = BC (obr. 57.); kolem bodů A a C opíší se průsečné oblouky. Průsek D se spojí s vrcholem B a vede se rozpolovací přímka BD.

Vedeme-li AC, AD a CD, jsou trojúhelníky ABC a ACD rovnoramenné a přímka BD rozpoluje úhly ve vrcholech jejich.

Sestrojte libovolně úhel a rozdělte jej na 2, 4, 8 rovných dílů.

Sestrojte úhloměrem součet těchto úhlů: 68° a 42°, 30° a 40°, 65° a 85°, rozpůlte součty jejich.

Sestrojte součet dvou daných úhlů *m* a *n* a úhel, jenž se součtu tomu rovná, rozpůlte.

Jsou dány součty a rozdíly dvou nerovných úhlů, vyhledejte úhly ty. Součty jsou: 74°, 85°, 100°, 110°.

Rozdíly: 16°, 25°, 35°, 40°.

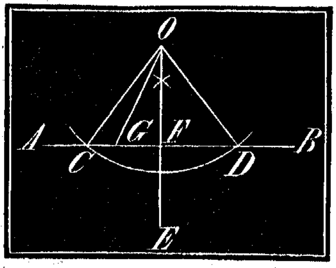
Součet dvou nerovných úhlů jest úhel A a rozdíl úhlů těch jest úhel *a*. Sestrojte a vyhledejte větší i menší úhel.

Sestrojte úhly vedlejší, rozpůlte oba a veďte přímky rozpolovací; hleďte jak přímky ty na sobě stojí.

3. Má se z daného bodu O na určitou přímku AB spustiti kolmá.

Když spojíme přímkou vrcholy dvou rovnoramenných na též základnici stojících trojúhelníků, víme, že stojí přímka tato na základnici kolmo; pročež se daná úloha rozřeší takto: Libovolným poloměrem se opíše kolem daného bodu O (obr. 58.) oblouk tak, aby přímku AB ve dvou bodech C a D protal, pak se nad anebo pod přímkou CD vedou průsečné oblouky. Průsek E spojí se s bodem O a přímka OE stojí kolmo na dané přímce AB.

Obr. 58.



Vedeme-li z bodu O k přímce AB přímku OG, vznikne pravoúhelný trojúhelník OGE, v němž jest podpona OG větší než odvěsna OF. Taktéž by byly všeliké jiné přímky, kteréž by se z bodu O k přímce AB vedly, větší než kolmice OF, protož pravíme:

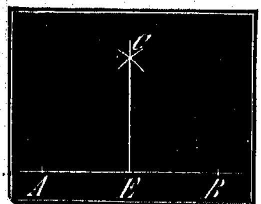
1. Mezi daným bodem a určitou přímkou jest kolmice délkou nejkratší.

2. Vede-li se z daného bodu k určité přímce přímka nejkratší, stojí přímky ty na sobě kolmo.

Z toho zároveň vysvítá, že se z daného bodu na určitou přímku jen *jedna* kolmá vésti může.

Vedeme-li z bodu O k přímce AB vícero šikmých OC, OD, jest šikmá OC > OG, neboť jest v trojúhelníku COG úhel CGO úhlem vedlejším k ostrému úhlu OGF a jest tedy tupý; protož jest protilehlá strana OC větší než strana OG t. j.: *ze dvou šikmých jest ta větší, kteráž jest vzdálenější od přímky kolmé.*

Obr. 59.



Je-li délka CF = DF, jest trojúhelník COF shodný s trojúhelníkem DOF a protož je OC = OD t. j.

Šikmé, kteréž mají od přímky kolmé rovnou vzdálenost, jsou si rovny.

4. Má se na přímku danou postaviti kolmá v bodu určitém.

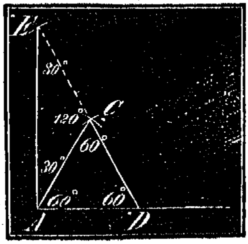
Když spojíme v trojúhelníku rovnoramenném střed základnice s vrcholem, víme, že stojí přímka tato na základnici kolmo; pročež se daná úloha rozřeší takto: Z daného bodu E (obr. 59.) utnou se libovolné ale rovné délky, EA = EB; kolem bodu A a B opíše se libovolným poloměrem průsečné oblouky, průsek C se spojí s daným bodem E. Přímka CE stojí na přímce kolmo.

Zdali by se mohla v bodu E na přímku AB ještě jiná přímka kolmo postaviti?

5. V konečném bodu A na přímku postaviti kolmici.

V tomto případu utne se z bodu A obr. 60. z dané přímky libovolná délka a délkou touto sestrojí se rovnostranný trojúhelník ku př. ACD: prodlouží se strana CD o svou délku tak, že jest EC = CD a bod E se spojí s bodem A.

Obr. 60.

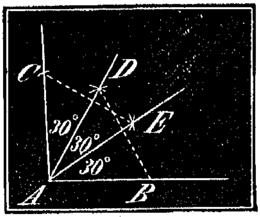


Přímka EA stojí kolmo na přímce AD; neboť jest v trojúhelníku rovnostranném úhel DAC jakož i ACD = 60°, tedy úhel ACE = 120°; v rovnoramenném trojúhelníku ACE jest úhel CAE = AEC = 30°; protož úhel DAE = 90°, přímka EA tedy kolmá na přímce AD.

6. Má se pravý úhel rozděliti na tři rovné díly.

Libovolným poloměrem odměří se z vrcholu A (obr. 61.) délka AB = AC a při těchto stranách sestrojí se rovnostranné trojúhelníky ABD a ACE. Úhel BAD jest = 60°, protož úhel CAD = 30°; taktéž jest úhel CAE = 60°, pročež BAE = 30° a tedy i DAE = 30°.

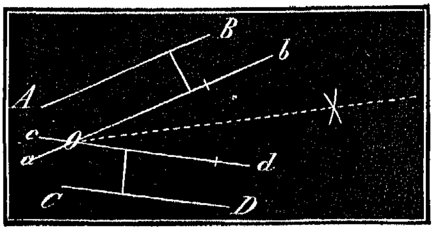
Obr. 61.



Tato úloha může se i takto řešiti: Nad stranou AB se vyhledá vrchol rovnostranného trojúhelníka totiž bod D a vede se AD. Tím vznikne úhel BAD = 60° a úhel CAD = 30°; úhel BAD se pak rozpůlí.

Poznam. Jak z obrazce vidno, dostačí k řešení tomu nález bodu D a E. Tyto body se vyhledají, když se poloměrem AB = AC opíší průsečné oblouky kolem bodů A a B, A a C. Přímky BD a CE se vésti nemusí.

Obr. 62.



7. *Má se mezi dvěma šikmýma vésti přímka, kteráž by prodloužena, rozpůlila úhel, kdyby se zároveň obě šikmé až k průsečníku prodloužily.*

Jelikož se přímky AB a CD (obr. 62.) neprotínají, vyhledá se úhel, jenž se úhlu mezi šikmýma vyrovná. Vedou se totiž v rovné vzdálenosti od obou šikmých přímky a sice *ab* rovnoběžně s AB, *cd* rovnoběžně s CD. Přímky *ab* a *cd* se protnou ku př. v bodu O. Úhel bOd se rozpůlí a vede se přímka rozpolovací, kteráž by, prodloužena jsouc, rozpůlila i úhel mezi šikmýma AB a CD, kdyby se tyto až k průsečníku prodloužily.

Úlohy.

Sestrojte 1. danou stranou trojúhelník rovnostranný.

2. trojúhelník rovnoramenný: *a*) základnou a ramenem *b*) základnou a výškou *c*) základnou a úhlem přilehlým *d*) ramenem a úhlem k základnici přilehlým *e*) ramenem a výškou.

3. Trojúhelník pravoúhelný: *a*) oběma odvěsnama *b*) odvěsnou a podponou *c*) odvěsnou a přilehlým úhlem ostrým.

Poznam. Úlohy pod číslem 2. provedou se lehko dle vlastnosti trojúhelníka rovnoramenného, jakž o tom pojednáno.

4. Sestavte danou stranou trojúhelník rovnostranný. Prodlužte některým vrcholem jednu stranu; jak velký bude vzniklý zevnitřní úhel? Rozpůlte úhel ten a veďte přímku rozpolovací. Půjde rozpolovací přímka ta rovnoběžně s některou stranou v onom trojúhelníku a s kterou?

5. Sestrojte danou základnicí a úhlem k ní přilehlým, ku př. 50^0, trojúhelník rovnoramenný; prodlužte vrcholem jedno z obou ramen a veďte vrcholem k základnici rovnoběžku. Rovnoběžkou tou rozdělí se vzniklý zevnitřní úhel ve dva úhly. Hleďte, zdali jsou úhly ty sobě rovny; vypočítejte všechny úhly.

6. Sestrojte danou stranou a přilehlýma úhly, ku př. 60^0 a 70^0, trojúhelník. Bude trojúhelník ten nerovnostranný a proč?

Prodlužte některým vrcholem jednu stranu a veďte týmž vrcholem k straně protilehlé rovnoběžku. Kolik se utvoří úhlů v onom vrcholu? Pojmenujte je a udejte, které z nich jsou rovny úhlům v trojúhelníku sestrojeném; vypočítejte všechny.

7. Sestrojte úhel ostrý; ve vrcholu vytyčte k oběma ramenům přímky kolmé. Bude úhel, jejž kolmice svírají, roven úhlu sestrojenému? Zkuste to i s úhlem tupým. Hleďte, mnoho-li dá úhel kolmicemi sevřený s úhlem tupým dohromady.

8. Sestavte danou stranou trojúhelník rovnostranný; rozpůlte dva úhly, veďte přímky rozpolovací až k průseku a spojte průsek ten s vrcholem třetího úhlu. Hleďte, zdali jsou vzniklé trojúhelníky shodné; vypočítejte úhly, ježto v onom průseku vznikly. Prodlužte přímky z vrcholu vycházející až k stranám protilehlým? Jak budou státi ony přímky na stranách těch? Budou vzniklé trojúhelníky shodné? Rozpůlí se oněmi přímkami každá strana?

9. Sestrojte danou základnicí a daným k ní přilehajícím úhlem trojúhelník rovnoramenný. Rozpůlte oba úhly na základnici a veďte přímky rozpolovací až k průseku; průsekem a vrcholem veďte přímku a prodlužte ji až protne základnici v trojúhelníku daném. Vypočítejte všechny úhly a udejte, které ze vzniklých trojúhelníků by se kryly jeden druhým. Jak stojí ona přímka, jižto jste vrcholem a průsekem vedli k přímce základné, a na jaké díly rozděluje ji a úhel ve vrcholu v trojúhelníku sestrojeném? Stojí i v tomto trojúhelníku ony přímky, jimiž jste úhly rozpůlili, na stranách protilehlých kolmo?

10. Sestavte danou stranou a dvěma nerovnýma úhly trojúhelník. Rozpůlte všechny tři úhly a veďte přímky rozpolovací až k průseku. Přímky ty protnou se v témž bodu. Vypočítejte úhly, kteréžto v průseku oněch přímek vzniknou; přímky rozpolovací prodlužte až k stranám protilehlým. Jak budou na stranách těchto státi. Vypočítejte úhly, kteréž se stranami těmi vzniknou.

11. Sestrojte při straně určité $^2/_3$ pravého úhlu v obou koncích, prodlužte neurčitá ramena až k průseku. Jaký trojúhelník se utvoří? Spusťte kolmice v trojúhelníku tom z vrcholů na strany protilehlé. Kolmice tyto protnou se v témž bodu. Vypočítejte všechny úhly a určte, jaké to trojúhelníky jsou, jimž jest průsek kolmic společným vrcholem. Rozpolují se oněmi kolmicemi v trojúhelníku sestrojeném strany a úhly ve vrcholech?

12. Veďte určitou přímku, v obou koncích sestrojte $^1/_2$ pravého úhlu, prodlužte neurčitá ramena až k průseku. Jaký to bude trojúhelník? Jaký úhel bude ve vrcholu? Rozpůlte úhel ve vrcholu a veďte rozpolovací přímku. Jak bude přímka ta státi na základnici? Budou vzniklé trojúhelníky shodné? Spojte některý bod oné rozpolovací přímky s oběma druhýma vrcholy, a hleďte, které z trojúhelníků vzniklých se shodují.

13. Veďte určitou přímku, v koncích sestrojte nerovné úhly, ku př. 50^0 a 70^0; neurčitá ramena prodlužte až k průseku; jaký trojúhelník vznikne?

Z vrcholu spusťte na každou protilehlou stranu kolmici; vypočtěte úhly ve vzniklých pravoúhelných trojúhelnících a udejte též úhly, ježto při společném průseku oněch kolmic vzniknou. Rozdělují se strany oněmi kolmými též tak, jako v trojúhelníku rovnostranném?

14. Sestavte libovolně trojúhelník rovnostranný; utněte od dvou stran rovné částky a spojte rozdělovací body přímkou. Jaký bude trojúhelník vzniklý? Jde spojovací přímka s třetí stranou v trojúhelníku sestrojeném rovnoběžně a proč?

Vznikl by taktéž rovnostranný trojúhelník, kdybyste jen od jedné strany určitou délku uťali a bodem rozdělovacím k třetí straně rovnoběžku vedli?

Rozpůlte v onom rovnostranném trojúhelníku všechny tři strany a spojte body rozpolovací. Budou všechny vzniklé trojúhelníky rovnostranné a shodné? Půjdou spojovací přímky rovnoběžné s třetími stranami?

15. Sestavte libovolně trojúhelník rovnoramenný, utněte z vrcholu od obou ramen rovné částky a spojte přímkou body rozdělovací. Jaký bude vzniklý menší trojúhelník? Půjde spojovací přímka rovnoběžně se základnou a proč? Vznikl by tentýž trojúhelník, kdyby se jen z jednoho ramene ona částka uťala a pak rozdělovacím bodem k základné rovnoběžka vedla až k průseku druhého ramene?

IV. O čtyrúhelníku.

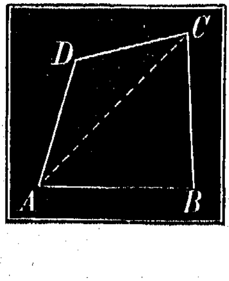
1. Částky čtyrúhelníka.

Obrazec čtyrmi přímkami omezený nazývá se *čtyrúhelník*.

Čtyrúhelník má čtyry strany a čtyry úhly.

Z úhlů v čtyrúhelníku nazývají se ty, kteréž stranami obrazce přímo spojeny nejsou, úhly *příčné*, ku př. úhly A a C, B a D.

Obr. 63.



Spojíme-li vrcholy dvou příčných úhlů A a C přímkou (obr. 63.), jmenuje se tato přímka *úhlopříčná, úhlopříčna*, ku př. úhlopříčna AC.

Úhlopříčnou rozdělí se čtyrúhelník ve dva trojúhelníky, ku př. ABC a ACD.

V každém trojúhelníku obnáší součet úhlů

180°; v čtyrúhelníku obnáší tedy součet všech úhlů $2 . 180° = 360°$. Protož pravíme:

V čtyrúhelníku obnáší součet všech úhlů 360° neb čtyry pravé.

Jest tedy: $A + B + C + D = 360°$.

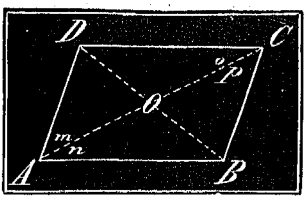
Sečteme-li v čtyrúhelníku všechny strany, nazývá se součet tento *obměr*.

Obměr čtyrúhelníka ABCD jest tedy:

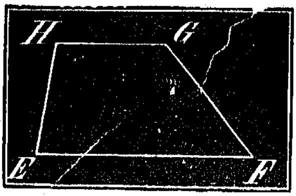
$AB + BC + CD + DA$.

2. Tvary čtyrúhelníků.

Obr. 64.



Obr. 65.



Dle vzájemné polohy stran jsou čtyrúhelníky trojího druhu:

1. Jsou-li v čtyrúhelníku dvě a dvě protější strany rovnoběžné, nazývá se čtyrúhelník takový *rovnoběžník* neb *rovnoběžec*. Rovnoběžník má dvé rovnoběžných stran, ku př. rovnoběžník ABCD (obr. 64.) má rovnoběžné strany AB a CD, BC a AD.

2. Jsou-li v čtyrúhelníku jen dvě protější strany rovnoběžné, druhé pak různoběžné, nazývá se *lichoběžník* neb *lichoběžec* (Trapez) ku př. EFGH (obr. 65.).

3. Má-li v čtyrúhelníku každá strana jiný směr, jmenuje se čtyrúhelník *různoběžník* neb *různoběžec* (Trapezoid) ku př. ABCD (obr. 63.).

3. Rovnoběžník a vlastnosti jeho.

Vedeme-li v rovnoběžníku ABCD (obr. 64.) úhlopříčnu AC, rozdělí se úhlopříčnou tou rovnoběžník ABCD na dva trojúhelníky ABC a ACD.

Trojúhelníky tyto mají společnou stranu AC; úhly m a p, n a o jsou střídné mezi rovnoběžkami a jsou sobě rovny. Jest tedy trojúhelník $ABC \cong ACD$.

Ze shodnosti trojúhelníků těchto vysvítá, že jest strana $AB = CD$, $AD = BC$; úhel $ADC = ABC$ a úhel $BAD = BCD$. Pročež pravíme:

1. *Každý rovnoběžník rozděluje se úhlopříčnou na dva rovné díly* nebo jinak *úhlopříčnou se každý rovnoběžec rozpoluje.*

2. *V rovnoběžníku jsou protilehlé strany sobě rovny.*

3. *V rovnoběžci jsou příčné úhly sobě rovny.*

Druhá z vět těch zní jinak i takto: *Rovnoběžky mezi rovnoběžkami jsou si rovny.*

Jak by se musely trojúhelníky ABC a ACD na sebe položiti, aby se jeden druhým pokryl?

Vedeme-li v rovnoběžníku ABCD obě úhlopříčny AC a BD, protínají se přímky ty v bodu O. Trojúhelník DOC jest $\cong$ AOB; neboť jest $CD = AB$ a rovny jsou úhly vrcholové a střídné. Jest tedy $OC = OA$, $DO = BO$ t. j.

V rovnoběžníku se úhlopříčny na pospol půlí. Bod, v němž se úhlopříčny rozpolují, nazývá se *střed* rovnoběžníka.

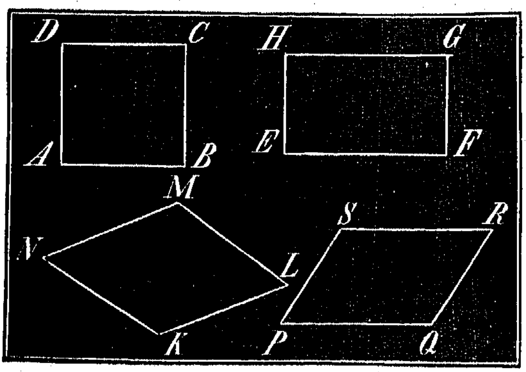
Poněvadž jsou v rovnoběžníku úhly příčné sobě rovny, vypočtou se lehko všechny úhly v rovnoběžníku, je-li jeden z nich znám, ku př. Je-li $A = 70^0$, jest $C = 70^0$, úhel $D = 110^0 = B$.

Je-li v rovnoběžníku jeden úhel pravý, jsou všechny úhly pravé, (proč?)

Když obnáší jeden úhel v rovnoběžci 134^0; jak velké jsou ostatní úhly?

Rovnoběžníky dle stran a úhlů (obr. 66.). Dle stran jsou rovnoběžníky buď *rovnostranné* aneb *nerovnostranné;* dle úhlů jsou buď *pravoúhelné* aneb *kosoúhelné.*

Obr. 66.



Dle stran a úhlů rozeznáváme čtvero rovnoběžníků:

1. Rovnoběžník rovnostranný pravoúhelný neb *čtverec* obrazec ABCD.

2. Rovnoběžník nerovnostranný pravoúhelný neb *obdélník* (pravoúhelník). Obrazec EFGH.

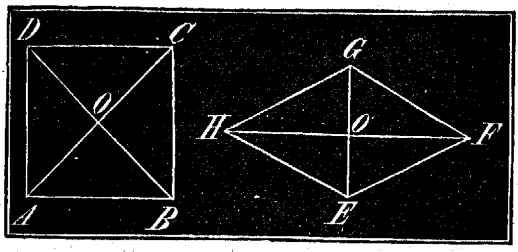
3. Rovnoběžník rovnostranný kosoúhelný neb *kosočtverec*, obrazec KLMN.

4. Rovnoběžník nerovnostranný kosoúhelný neb *kosodélník*, obrazec PQRS.

V kosodélníku nejsou ani strany, ani úhly rovny; v kosočtverci jsou jen strany rovny, úhly nerovny; v obdélníku jsou úhly sobě rovny, strany nerovny; ve čtverci jsou strany i úhly rovny.

Úhlopříčny ve čtverci a kosočtverci, v obdélníku a kosodélníku, Vedeme-li ve čtverci a kosočtverci (obr. 67.) obě úhlopříčny, protínají se tyto přímky v středu oněch rovnoběžníků a stojí k sobě kolmo; neboť jsou trojúhelníky ACD a ABC, trojúhelníky FCH a FHE rovnoramenné.

Obr. 67.



Úhlopříčna BD spojuje vrcholy trojúhelníků ACD a ABC; úhlopříčna EG spojuje vrcholy trojúhelníků FGH a FHE.

Spojíme-li vrcholy dvou rovnoramenných trojúhelníků, kteréž mají společnou základnici, stojí spojovací přímka ta na základnici kolmo a rozpoluje ji.

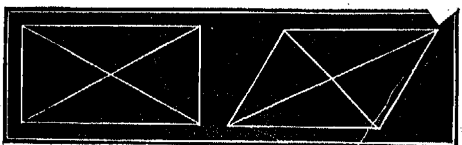
Protož pravíme:

Vedeme-li ve čtverci aneb v kosočtverci obě úhlopříčny, stojí přímky tyto na sobě kolmo.

Jelikož jest trojúhelník BCD $\cong$ ACD, jest AC $=$ BD, t. j.:

Ve čtverci jsou úhlopříčny sobě rovny.

Obr. 68.



Trojúhelníky EFG a FGH se neshodují; *v kosočtverci jsou tedy úhlopříčny nerovny.*

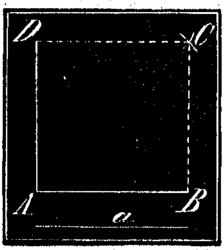
V rovnoběžcích nerovnostranných, obdélníku a kosodélníku (obr. 68.) stojí úhlopříčny na sobě šikmo, a jsou v obdélníku rovné, v kosodélníku nerovné.

V jaké trojúhelníky (dle úhlů a stran) rozděluje se jednou úhlopříčnou čtverec, kosočtverec, obdélník a kosodélník?

Poznam. V rovnoběžníku se kterákoli strana za základnou vzíti může; kolmá od druhé rovnoběžky k přímce základné udává výšku rovnoběžníka.

4. Sestrojování rovnoběžníků.

Obr. 69.



Má se danou stranou sestrojiti čtverec (obr. 69.).

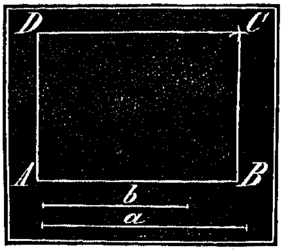
Jelikož jest čtverec čtyrúhelník rovnostranný pravoúhelný, sestrojí se určitá strana AB $= a$, při ní pravý úhel; z neurčitého ramene úhlu toto učiní se AD $=$ AB $= a$. Kolem bodů B a D se délkou a opíší průsečné oblouky. Průsečný bod C se spojí s bodem B a D.

Kolik částek potřebujeme tedy k sestrojení čtverce?

Má se dvěma stranama sestrojiti obdélník (obr. 70.).

Vede se AB $= a$, při ní sestrojí se pravý úhel a z neurčitého ramene se odměří druhá strana, AD $= b$; kolem bodů konečných B a D opíší se poloměrem b a a oblouky až k průseku C; průsečný bod se pak spojí s body B a D.

Obr. 70.



Kolik částek jest zapotřebí k sestrojení obdélníka?

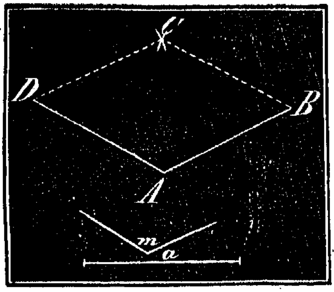
Určitým úhlem m a danou stranou a má se sestaviti kosočtverec. (Obr. 71.)

Vede se strana AB $= a$, při ní sestrojí se daný úhel m a z druhého ramene se odměří AD $=$ AB $= a$; kolem konečných bodů B a D se touž délkou opíší průsečné oblouky; průsečný bod C se pak spojí s bodem B a D.

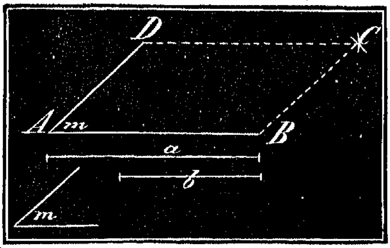
Kolik a jakých částek jest zapotřebí k sestrojení kosočtverce?

Má se sestrojiti kosodélník — rovnoběžec — dvěma stranama a úhlem, jejž strany ty svírati mají (obr. 72.).

Obr. 71.



Obr. 72.



Vede se strana AB $= a$, při ní sestrojí se daný úhel m, z neurčitého ramene se odměří strana AD $= b$, kolem bodů B a D opíší se poloměrem b a a průsečné oblouky, průsek C spojí se s bodem B a D.

Kolik a jakých částek vyžaduje se k sestrojení určitého kosodélníka — rovnoběžce?

5. Lichoběžník a vlastnosti jeho.

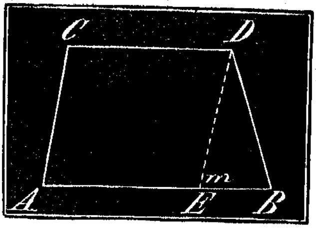
Když jsou v lichoběžníku různoběžné strany sobě rovny, sluje lichoběžník *rovnoramenný;* jsou-li strany ty nerovny, *nerovnoramenný*.

Vedeme-li v lichoběžníku ABCD (obr. 73.) k některé z obou různoběžek přímku rovnoběžnou, rozdělí se lichoběžník na dva díly: rovnoběžník BCDE a trojúhelník BDE.

Z obrazce toho vysvítá, že jest CD = AE, BE = AB — CD, že jsou v lichoběžníku strany rovnoběžné vždy nerovné.

Trojúhelník BDE sestává se stran různoběžných (neboť jest DE = AC) a z nadbytku větší rovnoběžky nebo jinak rozdílu stran rovnoběžných.

Obr. 73.



Je-li lichoběžník rovnoramenný, jest DE = BD; trojúhelník BDE jest tedy rovnoramenný, pročež jest úhel $m = B = A$. Úhel $B + D = 180^0$, úhel $A + C = 180^0$ a jelikož jest $A = B$, jest úhel $C = D$, jelikož se oba stejným úhlem $(A = B)$ na 180^0 doplňují. Pročež díme:

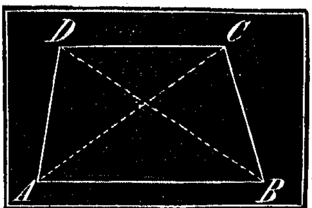
V lichoběžníku rovnoramenném jsou úhly, které k též rovnoběžce přiléhají sobě rovny.

Je-li DE > aneb < BD, t. j.: je-li lichoběžník nerovnoramenný, jest úhel m < neb > B a jelikož jest $m = A$, tedy úhel A < aneb > B. Protož jsou i ty úhly, jimiž se nerovné úhly A a B na 180^0 doplňují, nerovné, totiž C > aneb < D t. j.:

V lichoběžníku nerovnoramenném nejsou úhly, které k též rovnoběžce přiléhají sobě rovny.

Je-li v lichoběžníku rovnoramenném jeden úhel znám, mohou se všechny ostatní úhly vypočítati. Je-li ku př. $A = 70^0$, jest $B = 70^0$; $C = D = 110^0$. Mohou se v lichoběžníku nerovnoramenném ostatní úhly vypočítati, když se jeden úhel udá?

Obr. 74.



Vedeme-li v rovnoramenném lichoběžci (obr. 74.) úhlopříčny AC a BD, shodují se trojúhelníky ACD a BCD; neboť jest AD = BC, strana CD oběma trojúhelníkům společná, úhel ADC = BCD, jest tedy AC = BD, t. j.

V rovnoramenném lichoběžníku jsou úhlopříčny sobě rovny.

Jsou-li ale strany různoběžné, nerovné; je-li lichoběžec nerovnoramenný, neshodují se trojúhelníky. *V lichoběžci nerovnoramenném nejsou úhlopříčny sobě rovny.*

Sestrojení lichoběžce.

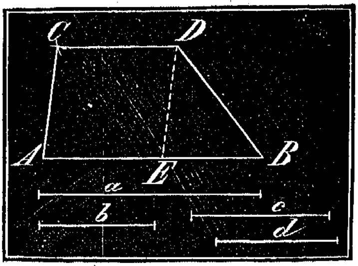
1. *Má se čtyrmi stranami lichoběžník sestrojiti* (obr. 75.).

Vede se větší rovnoběžka AB = a, od ní utne se AE = d a nad zbytkem EB sestrojí se zbývajícíma stranama b a c trojúhelník

BED; kolem bodu D opíše se délkou d, kolem bodu A délkou DE $= b$ oblouk až k průseku C. Průsečný bod C se spojí s bodem A a D.

Jak vidno, sestrojí se v tomto případu lichoběžník dle obr. 73.

Obr. 75.



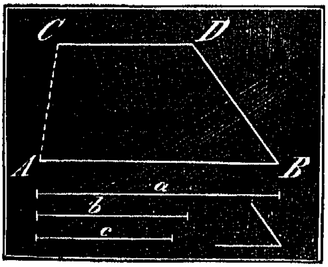
2. *Má se lichoběžník sestrojiti třemi stranami a úhlem, jenžto má k větší rovnoběžce příléhati* (obr. 76.).

Vede se větší rovnoběžka AB $= a$, při bodu B sestrojí se daný úhel a s neurčitého ramene se utne BD $= b$. S bodu D se vede k straně AB rovnoběžka DC $= c$ a bod C spojí se s bodem A.

Sestrojte lichoběžník nerovnoramenný rovnoběžnýma stranama a dvěma úhly tak, aby úhly ty k větší straně přilehaly (dle obr. 73.).

Sestrojte lichoběžníky rovnoramenné: 1. Jedním ramenem a stranama rovnoběžnýma. 2. Rovnoběžkama a úhlem k větší rovnoběžné přilehajícím. 3. Jedním ramenem, větší rovnoběžkou a úhlem k ní přilehlým. 4. Jedním ramenem, menší rovnoběžkou a úhlem k ní přilehlým. 5. Sestavte lichoběžník rovnoramenný, když se dá úhlopříčna, větší rovnoběžka a jedno rameno. 6. Sestrojte lichoběžník nerovnoramenný, když se dají obě úhlopříčny, větší rovnoběžka a jedno rameno.

Obr. 76.



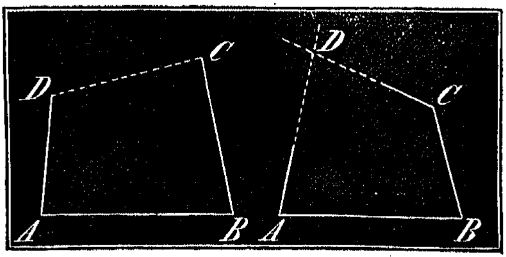
6. Různoběžník (různoběžec, trapezoid).

Různoběžník sestává ze čtyr nerovných, různoběžných stran a čtyr úhlů; má tedý úhrnem 8 částek.

Sestrojí-li se různoběžník třemi stranami a dvěma úhly až k bodům konečným C a D (obr. 77.), má se ještě vyhledati strana CD a dva úhly. Tyto částky se však sestrojením stanoví, když se totiž body C a D spojí přímkou CD.

Jestliže se dvěma

Obr. 77.



stranama a třemi úhly obrazec sestrojuje (obr. 77.), scházejí ještě dvě strany a jeden úhel k doplnění celého obrazce. Avšak i v tomto pádu se částky, kteréž se nedostávají, sestrojením stanoví, totiž prodloužením ramen úhlů A a C.

Z toho vysvítá, že k sestrojení určitého různoběžníka *pět* částek dostačí, o tři totiž méně, než částek těch různoběžník dohromady má.

Dá se tedy různoběžník sestaviti:

1. čtyrmi stranami a jedním úhlem.
2. třemi stranami a dvěma úhly.
3. dvěma stranama a třemi úhly.

Jednou stranou a čtyrmi úhly se různoběžník určitě sestrojiti nemůže. Úloha tato jest neurčitá, jelikož by se délka stran ku př. délka té strany, kteráž mezi druhým a třetím úhlem ležeti má, určitě ustanoviti nedala.

Z toho zároveň vidíme, že počet stran počtem úhlů nikdy o dvě neb více jednotek převýšen býti nesmí, nebo jinak, že počet daných stran jen o jednu jednotku může býti menší, než počet daných úhlů.

Mají se ony tři úlohy řešiti.

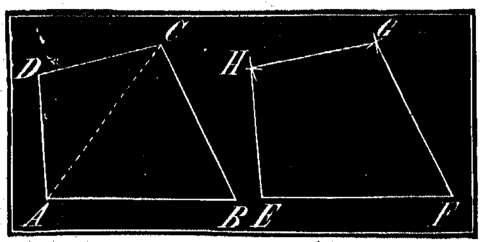
Sestavte různoběžník čtyrmi stranami a úhlopříčnou.

7. O shodnosti čtyrúhelníků.

Čtyrúhelníky *se shodují*, jestliže se jeden druhým *úplně pokrýti* může. Shodné čtyrúhelníky mají *vzájemně rovné* částky.

Jsou-li na opak u dvou čtyrúhelníků částky jednoho rovny stejnolehlým částkám druhého, pravíme, že se čtyrúhelníky tyto shodují.

Obr. 78.



Kdy se shodují čtverec, kosočtverce, obdélníky, kosodélníky?

Má se k danému čtyrúhelníku sestrojiti shodný (obr. 78.).

Je-li ABCD daný čtyrúhelník, vede se strana EF =AB; ostatní body G a H se vyhledají průsečnými oblouky, ježto se vedou stranami BC, CD, AD a úhlopříčnou AC.

Poznam. Úhlopříčna se v obrazci daném vésti nemusí; délka její se kružidlem vyměří a k sestrojení oblouků náležitě upotřebí.

Sestrojte čtyrúhelníky libovolně a sestavte k nim zároveň čtyrúhelníky shodné.

V. Úhelníky vůbec.

1. Částky úhelníka.

Obrazec mnohými přímkami omezený nazývá se *mnohoúhelník* (polygon), neb krátce *úhelník.*

Každý úhelník má tolik stran, co má úhlů.

Dle počtu úhlů jmenují se úhelníky: trojúhelník, čtyrúhelník, pěti, šestiúhelník atd.

Strany v úhelníku mohou býti buď *rovny* aneb *nerovny.* Jsou-li v úhelníku všechny strany rovny, nazývá se *úhelník rovnostranný;* jsou-li nerovny, *nerovnostranný.*

Taktéž mohou býti úhly v úhelníku buď *rovny* aneb *nerovny,* jsou pak úhelníky *rovnoúhelné* a *nerovnoúhelné.*

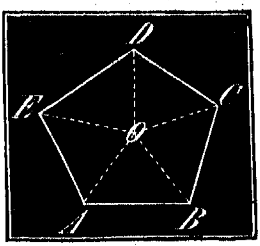
Úhelníky *rovnostranné, rovnoúhelné* nazývají se *pravidelné;* jsou-li úhly a strany nerovné, slují *nepravidelné.*

2. Úhly v úhelníku.

Úhly vnitřní. Úhly k úhelníku náležející jmenují se *vnitřní.*

Spojíme-li uvnitř úhelníka ABCDE (obr. 79.) některý bod ku př. O se všemi vrcholy, rozdělí se úhelník ten na tolik trojúhelníků, kolik stran má. Pětiúhelník tedy na pět trojúhelníků.

Obr. 79.



V každém trojúhelníku obnášejí všechny tři úhly dohromady dva pravé či 180°. Pět trojúhelníků činí tedy 5. 2 R.*)

Úhly kolem bodu O nenáležejí k pětiúhelníku; má tedy pětiúhelník o to méně, než pět trojúhelníků, kolik tyto úhly kolem bodu O dohromady obnášejí. Úhly kolem jednoho bodu činí 4 R.

V pětiúhelníku obnáší tedy součet vnitřních úhlů $5 . 2R - 4R = 10R - 4R = 6R = 540^\circ$.

Jestiť patrno, že se týmž spůsobem každý úhelník na tolik trojúhelníků rozděliti dá, kolik má stran. A protož pravíme:

V každém úhelníku obnáší součet — vnitřních — úhlů tolikkrát 2R, kolik má úhelník stran méně 4R.

Má-li tedy úhelník 6 stran, obnáší součet vnitřních úhlů jeho: $6 . 2R - 4R = 8R = 720^\circ$; má-li 7 stran, $7 . 2R - 4R = 10R = 900^\circ$.

---

*) Pravé úhly značí se písmenou R.

Osmiúhelník má: $8.\ 2R - 4R = 12R = 1080^0$.

Je-li vůbec počet stran n, má n-úhelník: $n.\ 2R - 4R$.

Je-li úhelník rovnoúhelný, obnáší jeden úhel tolikátý díl celého součtu, kolik jest úhlů v úhelníku.

Jeden úhel obnáší tedy v rovnoúhelném

trojúhelníku: $\frac{3.\ 2R - 4R}{3} = \frac{2R}{3} = \frac{180^0}{3} = 60^0$,

čtyrúhelníku: $\frac{4.\ 2R - 4R}{4} = \frac{4R}{4} = 90^0$,

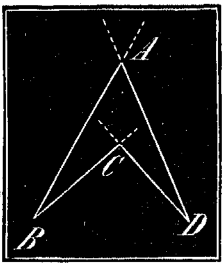
pětiúhelníku: $\frac{5.\ 2R - 4R}{5} = \frac{6R}{5} = \frac{540^0}{5} = 108^0$,

šestiúhelníku: $\frac{5.\ 2R - 4R}{6} = \frac{8R}{5} = \frac{720^0}{6} = 120^0$.

V rovnoúhelném n-úhelníku jest tedy jeden úhel: $\frac{n.\ 2R - 4R}{n}$.

V úhelníku nerovnoúhelném mohou býti úhly: *ostré, pravé, tupé* ano i *vypuklé*; tyto nazývají se pak *vběžné* (obr. 80.).

Obr. 80.



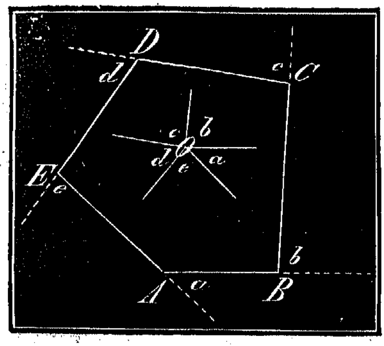
Zda-li jest v úhelníku ten neb onen úhel vypuklý aneb dutý, pozná se, když ramena úhlu toho vrcholem prodloužíme. Vpadnou-li prodlužky do vnitř úhelníka, jest úhel vypuklý, vpadnou-li vně, jest úhel dutý. V obrazci 80. jest úhel C vypuklý, úhel A ale dutý.

Úhly vypuklé jsou větší než 180^0. V trojúhelníku nemůže žádný úhel býti vypuklý; v čtyrúhelníku (obr. 80.) může býti toliko jeden, v pětiúhelníku mohou býti dva, v šestiúhelníku tři a t. d.

V úhelníku jest počet úhlů vypuklých vždy o tři jednotky menší, než počet vrcholů neb stran.

Má-li úhelník jen samé duté úhly, nazývá se *dutoúhelný*. Pětiúhelník ABCDE (obr. 79.) jest dutoúhelný.

Obr. 81.



Sestrojte pěti-, šesti-, sedmi-, osmiúhelníky s úhly vypuklými. Kolik vypuklých úhlů může býti v sedmi-, osmiúhelníku?

Úhly zevnitřní. Prodloužíme-li v úhelníku dutoúhelném ku př. v pětiúhelníku ABCDE (obr. 81.) každou stranu jedním vrcholem, vzniknou úhly a, b, c, d, e, ježto se nazývají úhly *zevnitřními* neb *vnějšími.*

Vedeme-li z libovolného bodu uvnitř pětiúhelníka rovnoběžky ke všem stranám, jsou úhly kolem bodu toho rovny úhlům zevnitřním; majíť s nimi ramena na vzájem rovnoběžná.

Součet úhlů $a+b+c+d+e$ kolem jednoho bodu obnáší 360^0 neb 4R; protož pravíme:

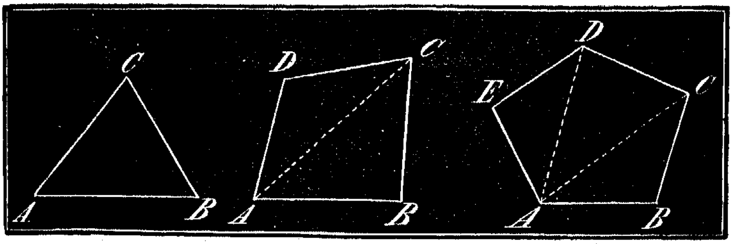
Zevnitřní úhly úhelníka dutoúhelného obnášejí součtem 360⁰ neb 4R.

3. Úhlopříčny v úhelníku.

Úhlopříčna jest přímka, ježto vrcholy spojuje, kteréž v úhelníku stranami přímo spojeny nejsou.

V trojúhelníku ABC (obr. 82.) se tedy úhlopříčna vésti nemůže, poněvadž každý vrchol s oběma druhýma přímo spojen jest.

Obr. 82.



V čtyrúhelníku ABCD (obr. 82.) není bod A přímo spojen s bodem C; má tedy čtyrúhelník ABCD z bodu A jednu úhlopříčnu AC.

Pětiúhelník ABCDE (obr. 82.) má z bodu A dvě úhlopříčny AC a AD.

Jak vidíme, může se v úhelníku z určitého bodu vždy o jeden bod v pravo i v levo úhlopříčna vésti; z bodu A v pravo k bodu C a v levo k bodu D.

V úhelníku ABCDE (obr. 82.) nemůže se z bodu A ani k bodu E, ani k bodu B úhlopříčna vésti. *Počet úhlopříčen z určitého bodu bude tedy o tři jednotky menší, než počet vrcholů neb stran.* Jest tedy úhlopříčen z jednoho bodu:

v čtyrúhelníku $4-3=1$
v pětiúhelníku $5-3=2$
v šestiúhelníku $6-3=3$.

Kolik bude úhlopříčen z jednoho bodu v sedmi-, osmi-, devítiúhelníku?

Úhlopříčnami rozděluje se úhelník na trojúhelníky.

Čtyrúhelník dělí se úhlopříčnou na dva trojúhelníky (obr. 82.); v čtyrúhelníku jest tedy počet trojúhelníků o 2 jednotky menší než počet stran.

Přibude-li k čtyrúhelníku jedna strana, nebo jinak, sestrojí-li se pětiúhelník, přibude jedna úhlopříčna a jeden trojúhelník. V pětiúhelníku bude tedy počet trojúhelníků opět o 2 jednotky menší než počet stran; jestiť $5 - 2 = 3$.

A tak bude dále v každém úhelníku, protož pravíme:

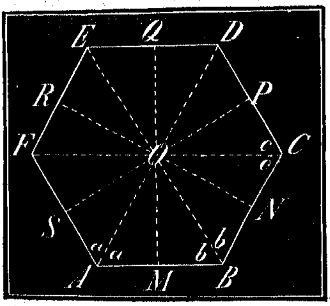
Počet trojúhelníků, kteréž v úhelníku úhlopříčnami vzniknou, jest vždy o dvě jednotky menší než počet stran úhelníka toho.

Na kolik trojúhelníků rozdělí se úhlopříčnami šesti-, sedmi-, osmiúhelník?

4. Úhelníky pravidelné.

Rozpůlíme-li v pravidelném úhelníku (obr. 83.) dva k téže straně přiléhající úhly a prodloužíme-li přímky rozpolovací až k průseku O, nazývá se bod tento *střed úhelníka*. Spojíme-li totiž všechny vrcholy s bodem tímto a spustíme-li zároveň z bodu toho kolmice na všechny strany, utvoří se shodné trojúhelníky $AOB \cong BOC \cong COD$ atd.; neboť jest $AB = BB = CD \ldots$. úhel $a = b = c \ldots$, jest tedy $AO = BO = CO \ldots$, $OM = ON = OP \ldots$

Obr. 83.



Od bodu O mají tedy jak vrcholy tak i strany rovnou vzdálenosť.

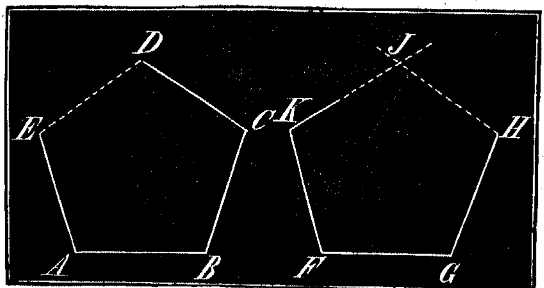
Z toho jestiť patrno, že mnohoúhelníky nepravidelné středu nemají.

5. Sestrojování trojúhelníků.

1. Každý úhelník má tolik úhlů co stran, úhrnem má tedy úhelník dvakrát tolik částek jako stran neb úhlů.

K sestrojení úhelníka není zapotřebí, aby se všechny částky jeho daly. Sestaví-li se na př. pětiúhelník (obr. 84.) až k bodům D a E, schází ještě jedna strana DE a dva úhly D a E. Tyto částky se však sestrojením naleznou, totiž spojením bodů D a E přímkou DE.

Obr. 84.



Sestrojíme-li pětiúhelník (obr. 84.) až k bodům K a H a v těchto bodech úhly K a H, scházejí ještě dvě strany a jeden úhel. Tyto částky ale opět sestrojením nalezneme, neboť prodloužíme-li ramena úhlů K a H, protnou se ramena tato v bodu J a obrazec se doplní.

Ač tedy sestává pětiúhelník z desíti částek, potřebujeme k sestrojení jeho o tři částky méně, totiž $10 - 3 = 7$ částek.

Z úvahy této jestiť patrno, že pravidlo to o každém úhelníku platnosť míti bude, protož pravíme:

K sestrojení úhelníka potřebuje se vždy o tři částky méně, než má úhelník stran a úhlů dohromady.

K sestrojení pětiúhelníka potřebujeme tedy 7 částek a sice:

1. *Pět* stran a *dva* úhly,
2. *čtyry* strany a *tři* úhly,
3. *tři* strany a *čtyry* úhly.

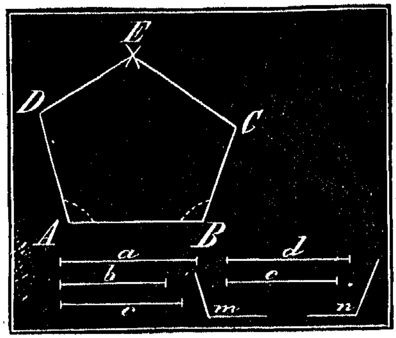
Poznam. Z daných částek nesmí počet úhlů nikdy o dvě neb více jednotek převyšovati počet daných stran. Dvěma stranama a pěti úhly nemůže se pětiúhelník určitě sestaviti; neboť při dvou stranách mohou ležeti jen tři úhly. Kdyby se čtvrtý a pátý úhel dále sestrojil, byly by neurčité ty strany, které ještě scházejí a mezi těmito úhly ležeti mají.

Kolik částek a jakých bude zapotřebí, má-li se šestiúhelník sestaviti?

Má-li se úhelník pravidelný sestaviti, potřebujeme k tomu, co se stran týče, jen jednu, poněvadž jsou všechny strany rovny.

Úhly jsou též rovny a vypočte se jeden úhel, když se součet všech úhlů na tolik rovných dílů rozdělí, kolik stran úhelník má. Má-li úhelník šest stran, obnáší jeden úhel šestý díl celého součtu, totiž: $\frac{6.\,2R - 4R}{6} = \frac{8R}{6} = \frac{720^0}{6} = 120^0$.

Obr. 85.



K sestrojení pravidelného úhelníka dostačí tedy toliko jedna strana.

2. *Má se nepravidelný pětiúhelník sestaviti pěti stranami a dvěma úhly* (obr. 85.).

Vede se strana $AB = a$, při ní se oba dané úhly sestrojí, úhel $A = m$, $B = n$, od neurčitých ramen úhlů těchto utne se $BC = b$, $AD = c$; kolem bodů C a D opíší se stranami d a e průsečné oblouky. Průsečný bod E spojí se s bodem D a C.

Sestavte pětiúhelníky čtyrmi stranami a třemi úhly; třemi stranami a čtyrmi úhly.

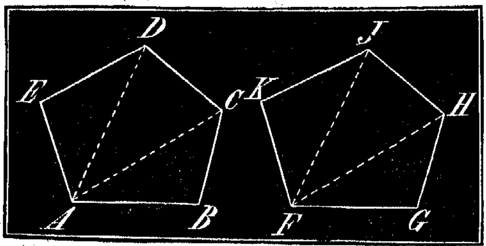
Sestavte pětiúhelník pěti stranami a úhlopříčnama (jež vycházejí z téhož bodu).

Sestavte danou stranou pětiúhelník pravidelný.

3. *Má se k danému úhelníku sestaviti shodný* (obr. 86.).

Úhlopříčnami rozdělují se úhelníky na trojúhelníky. Jsou-li úhelníky ABCDE a FGHIK shodné, shodují se i trojúhelníky ABC a FGH, ACD a FHI, ADE a FIK; neboť by se vzájemně pokryly, kdybychom úhelníky ty jeden na druhý náležitě položili.

Obr. 86.



Má-li se tedy k danému úhelníku sestrojiti shodný, provede se sestrojení toto stranami a úhlopříčnami, totiž tak, že se k trojúhelníkům ABC, ACD, ADE sestrojí shodné trojúhelníky FGH, FHJ, FJK. Rozumí se, že se tyto trojúhelníky, týmž pořádkem k sobě sestavovati musí, v jakémž jsou v úhelníku daném.

P o z n a m. Když se k danému obrazci shodný obrazec sestavuje, mohou se stranami a délkami úhlopříčen nejprve vyhledati průšečné body H, J, K, ježto se pak přímkami spojí.

V obrazci daném se úhlopříčny ani vésti nemusí, délky jejich se kružidlem vyměří a k sestrojení náležitě použijí.

Z řešení toho vyvodí se tato věta:

Úhelníky nepravidelné se shodují, když sestávají z trojúhelníků vzájemně shodných.

Kdy shodují se dva pravidelné úhelníky?

Sestrojte šesti-, sedmi-, osmiúhelník a ku každému sestavte úhelník shodný.

VI. Vypočítání velkosti obrazcův přímočárných.

1. Obměr obrazců.

Když se v obrazci všechny strany sečtou, nazývá se součet jejich *obměr obrazce* (Perimeter).

Obměr trojúhelníka jest tedy roven součtu všech tří stran. Jsou-li strany tyto $4cm$, $5cm$, $3cm$, bude obměr O:

$O = 4 + 5 + 3 = 12cm.$

Jsou-li strany a, b, c, jest obměr:

$O = a + b + c.$

Jsou-li strany nepravidelného čtyrúhelníka a, b, c, d, jest obměr jeho O:

$O = a + b + c + d.$

Je-li $a = 4cm$, $b = 5cm$, $c = 6cm$, $d = 7cm$, bude:

$O = 4 + 5 + 6 + 7 = 22cm.$

Je-li obrazec pravidelný, jsou všechny strany sobě rovny. Obměr obrazce pravidelného se tedy vypočte, když se jedna strana tolikrát vezme, kolik stran obrazec má, nebo jinak, když se jedna strana znásobí počtem všech stran.

Je-li jedna strana *s* a počet všech stran *n*, bude obměr O:

$O = n. s.$

Jak se vypočítá obměr trojúhelníka rovnoramenného, obměr rovnoběžníka?

Jak se vypočítá obměr pravidelného troj-, čtyr-, pětiúhelníka?

Když jest znám obměr úhelníka pravidelného, může se na opak vypočísti strana úhelníka toho, když se totiž obměr rozdělí počtem stran, ku př.: Obměr trojce obnáší 18*cm*, mnoho-li obnáší jedna strana *s*?

$$s = \frac{18}{3} = 6\,cm.$$

Obměr čtverce obnáší 22*cm*; mnoho-li obnáší jedna strana?

2. Obsah obrazcův.

1. Velkost obrazce v rozsáhlosti plošné jmenuje se obsah neb plocha obrazce.

K výměru plochy potřebujeme určité měřídko — *jedničku plošnou.*

Jedničkou plošnou jest čtverec.

Tento výměrový čtverec pojmenuje se dle délky stran svých a sice: sluje čterec, jehož strana obnáší:

1 *m*, čtverečný metr $1m^2$,

1 *dm*, „ decimetr $1dm^2$,

1 *cm*, „ centimetr $1cm^2$.

Čtverec pak, jehož strany mají délku jednoho dekametru (*dkm*), nazývá se *ar (a)* a jest jedničkou pro plochy větší. Deset arů sluje *dekar dka*, sto arů *hektar ha* a tisíc *kiliar ka*, sto tisíc arů sluje *myriar Ma.*

Veliké plochy role, louky a p. měří se na hektary.

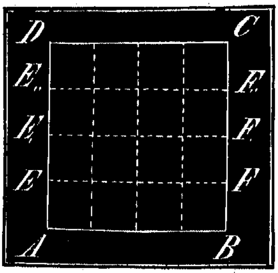
Poznámka: Dříve se měřilo na sáhy čtverečné neb čtvercové $\square^0$; čtverečné stopy neb střevíce $\square'$ a čtverečné palce $\square''$.

Veliké plochy měřili se čtverečnou mílí.

Obsah obrazce měl by se vždy bezprostředně vyměřiti; mělo by se totiž vyšetřiti, kolikrát jednička míry obsažena jest v té ploše, kteráž se vyměřiti má.

Tímto způsobem plochy vyměřovati, t. j. obsahu jejich vyhledávati, bylo by častokráte obtížné, ano někdy nemožné. Jsou však jistá pravidla, dle nichž se plochy se vší přesností vyměřiti, vlastně vypočítati mohou.

Obr. 87.



Když se obsah určité plochy dle jistých pravidel vyhledá, jmenuje se výměr takovýto výměr *prostředečný*; vyhledá-li se ale obsah vyměřováním, sluje výměr *bezprostředný*.

2. *Obsah čtverce* (obr. 87.). Obnáší-li v čtverci jedna strana $4cm$, může se měřídko $1cm^2$, při té straně 4krát do čtverce toho položiti. Plošná část AEFB obsahuje $4cm^2$.

Vedeme-li v čtverci tom rozměry rovnoběžné, vznikne křížkovaný obrazec, rozdělený na čtverečné centimetry. Část $EE_,F_,F$ obsahuje též $4cm^2$, taktéž i část $E_{,,}DCF_{,,}$. Celkem obsahuje čtverec BACD čtyry při straně AB položené čtverečné cm. tolikkrát, kolik má jednotek šířka AD, tedy $4 . 4 = 16cm^2$.

Byla-li strana $AB = 5cm$, byla by plocha $= 5 . 5 = 25cm^2$, pročež se toto pravidlo stanoví:

Obsah čtverce se vypočítá, když se délka jedné strany sama sebou znásobí nebo krátce, *když se jedna strana sama sebou znásobí.*

Obnáší-li strana metry, decimetry a centimetry uvedou se nestejnojmenná čísla nejprve na jméno stejné, ku př.: Má se vypočítati plocha čtverce, jehož strana obnáší $3m$ $8dm$ $9cm$.

Jestiť $3m$ $8m$ $9cm = 389cm$.

Plocha pak jest $389 \times 389 = 156721cm^2$.

Můžeme však počítati i takto:

$3m$ $8dm$ $9cm = 3{\cdot}98m$, můžeme totiž nestejnojmenná čísla uvésti na jméno mezi nimi nejvyšší.

Plocha bude pak $3{\cdot}89 \times 3{\cdot}89 = 15{\cdot}6721m^2$.

Jelikož jest *ar (a)* roven čtverci, jehož strany obnášejí 10 metrů (1 dekametr), jest tedy $a = 10 \times 10 = 100m^2$. A poněvadž jest $1m = 10dm$ (decimetrům), bude tedy $1m^2 = 10 \times 10 = 100dm^2$. Taktéž jest $1dm^2 = 100cm^2$, jelikož $1dm$ obnáší $10cm$.

Z toho jde, že se čtverečný výměr převede na jméno nejblíže nižší, když se znásobí 100; na jméno pak vyšší, když se 100 rozdělí.

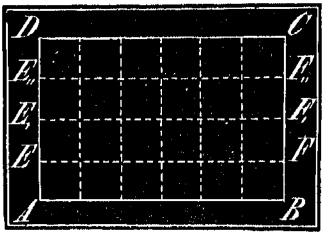
Jest tedy $23m^2 = 2300dm^2 = 230000cm^2$;

$156721cm^2 = 1567{\cdot}21dm^2 = 15{\cdot}6821m^2$.

Pozn. Dříve se počítalo takto: $1\square^0$ činil $6 \times 6 = 36\square'$, $1\square' = 12 \times 12 = 144\square''$. Uváděly se tedy čtverečné sáhy na čtverečné stopy násobením jich číslem 36 a tyto na čtverečné palce násobením čísla 144. Měly-li se čtverečné palce uváděti na čtverečné stopy, dělil se jich počet 144 a tyto pak číslem 36, když se na čtvercové sáhy uvésti měly.

3. Obsah obdélníka (obr. 88.) V obdélníku ABCD jsou strany AB a AD nerovné; delší AB nazývá se *délka*, menší AD sluje *šířka* nebo *výška*.

Obr. 88.



Má-li délka $6cm$ a šířka $4cm$, můžeme měřídko $1cm^2$ na délku AB 6krát položiti. Část AEFB obnáší $6cm^2$, taktéž část $EE_,F_,F$, $E_,E_{,,}F_{,,}F$, a $E_{,,}DCF_{,,}$. Celá plocha obélníka ABCD obnáší tolikkrát $6cm^2$, kolik má jednotek šířka AD; jest tedy $= 6 . 4 = 24cm^2$.

Plocha obdélníka se tedy vypočte, když se výměr délky znásobí výměrem šířky anebo krátce, *když se délka šířkou znásobí.*

Strany obdélníka jsou $3m\ 5dm$, $2m\ 3dm$, mnoho-li obnáší plocha?

Pozn. Obsah obdélníka rovná se tedy součinu z výšky a délky aneb jinak z výšky a základnice. Poznačme plochu písmenou p, výška budiž v, základnice z; jest tedy: $p = z v$.

Když jest plocha p známa a známe-li zároveň základnici, vypočítá se výška, když se obsah plochy p základnicí rozdělí. Je-li ku př. $p = 168cm^2$, $z = 28cm,^2$ bude

$$v = \frac{p}{z} = \frac{168}{28} = 6cm.$$

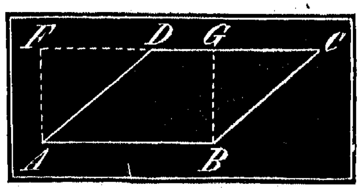
Když jest plocha a výška známa, vypočítá se základnice, když se plocha výškou dělí, ku př.: $p = 196cm^2$, $v = 7cm = ?$

$$z = \frac{p}{v} = \frac{169}{7} = 28cm.$$

Plocha p obnáší $2m^2\ 30dm^2$, $z = 1m\ 5dm$; v?

4. Obsah rovnoběžníka kosoúhelného (obr. 89.). Měl-li by se rovnoběžník kosoúhelný měřídkem čtverečným vyměřiti, nemohlo by se vyměření toto provésti; neboť se pravý úhel měřídka nemůže vměstnati na úhel kosý. Abychom jisté pravidlo nalezli, dle něhož se plocha kosoúhelného rovnoběžníka ABCD vypočítá, sestrojíme v bodech A a B kolmé.

Obr. 89.



Tím vznikne pravoúhelný rovnoběžník ABGF, jenžto se plochou svou rovná rovnoběžci kosoúhelnému ABCD; neboť jsou trojúhelníky

ADF a BCG shodné. Jsou totiž přímky AF = BG, AD = BC, rovné jsou též stejnolehlé úhly. Jestli se tedy v bodu B z obrazce ABCD trojúhelník BCG odejme a v bodu A shodný trojúhelník ADF přidá, neubyde ničehož na plošném obsahu obrazce ABCD. Trojúhelníkem ADF stane se z kosoúhelného rovnoběžníka ABCD pravoúhelný rovnoběžec ABGF.

Plocha ABGF jest = AB × AF.

Jelikož jest plocha ABGF = ABCD, jest tedy též ABCD = AB × AF.

Délka neb základnice AB náleží k oběma obrazcům, taktéž i šířka neb výška AF; vidíme tedy, že jest rovnoběžník kosoúhelný roven rovnoběžci pravoúhelnému, když mají stejnou základnici a stejnou vyšku.

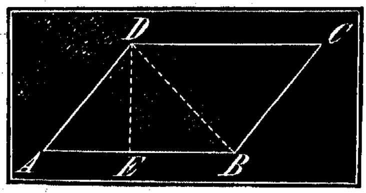
Z toho jde toto pravidlo:

Plocha rovnoběžníka kosoúhelného se vypočítá, když se výměr délky neb základnice výměrem šířky neb výšky znásobí, anebo krátce, *když se základnice výškou znásobí.*

Obnáší-li AB $8cm$, výška AG $3cm$, bude plocha ABCD $= 3 \times 8 = 24cm^2$.

V rovnoběžníku kosoúhelném vyměří se tedy základnice, pak se vede k základnici od protější rovnoběžky kolmá a výměr této kolmé — výšky rovnoběžníka — se znásobí výměrem základnice.

Obr. 90.



5. *Obsah trojúhelníka.* Vedeme-li v rovnoběžníku ABCD (obr. 90.) úhlopříčnu BD, utvoří se dva rovné trojúhelníky ABD a BCD. Jeden z nich obnáší tedy polovici plochy rovnoběžníka ABCD.

Je-li AB základná, DE výška rovnoběžníka ABCD, jest obsah jeho $= AB \times DE$; pročež bude obsah trojúhelníka ABD $= \frac{AB \times DE}{2}$.

Každý trojúhelník může se tedy považovati za polovici rovnoběžce aneb obdélníka, jenž má s trojúhelníkem tím společnou základnici a výšku. Protož se stanoví toto pravidlo:

Plocha trojúhelníka rovná se polovičnému součinu z výměru základnice a výšky.

V součinu tom může se dělitel psáti buď pod základnicí anebo pod výškou. Pravidlo zní pak takto:

Obsah trojúhelníka se vypočítá, když se polovičná základnice znásobí výškou, anebo *když se polovičná výška znásobí základnicí.*

Ku př.: $z = 8cm$, $v = 5cm$,

plocha p jest: $p = \frac{8}{2} \times 5 = 20cm^2$.

V trojúhelníku pravoúhelném béře se obyčejně jedna z odvěsen za základnici, druhá jest pak výškou; ku př. jedna odvěsna budiž $3m$, druhá $4m$, obsah trojúhelníka toho bude:

$$p = \frac{4}{2} \times 3 = 6m^2.$$

Když se tedy dá výška v a základnice z, může se dle uvedeného pravidla vypočítati plocha p. Jestiť:

$$p = \frac{z}{2} v \text{ aneb } p = z. \times \frac{v}{2} = \frac{zv}{2}.$$

Známe-li na opak plochu a základnici trojúhelníka, můžeme vypočítati jeho výšku, když obsah plochy polovičnou základnicí rozdělíme; ku př. $p = 20m^2$, $z = 8m$, v?

$$20 : \frac{8}{2} = 20 : 4 = 5.$$
$$v = 5m.$$

Když jest známa plocha a výška, vyhledá se základnice, když se totiž obsah plochy polovičnou výškou rozdělí, ku př.:

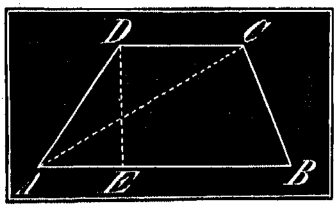
$$p = 12m^2,\ v = 3m,\ z?$$
$$12 : \frac{3}{2} = 12 \times \frac{2}{3} = 8m.$$

Jest tedy $z = 8m$.

Plocha pravoúhelného trojúhelníka obnáší $3m^2$, $32dm^2$, jedna odvěsna $2m$, $2dm$, jak velká jest odvěsna druhá?

6. Obsah lichoběžníka. Veďme v lichoběžníku ABCD (obr. 91.) úhlopříčnu AC. Úhlopříčnou tou rozdělí se lichoběžník na dva trojúhelníky ABC a ACD. Vedeme-li od jedné rovnoběžky k druhé přímku kolmou DE, nazývá se kolmice tato *výškou* lichoběžníka. Výška DE jest zároveň výškou obou trojúhelníků ABC a ACD; trojúhelník ABC má základnici AB, trojúhelník ACD má pak základnici CD.

Obr. 91.



Obsah trojúhelníka ABC jest $= \frac{AB}{2} \times DE$

a obsah trojúhelníka ACD $= \frac{CD}{2} \times DE$.

Součet obou trojúhelníků dá plochu lichoběžníka ABCD; bude tedy: $ABCD = \frac{AB}{2} \times DE + \frac{CD}{2} \times DE$, což se takto píše:

$$ABCD = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) DE.$$

$\frac{AB + CD}{2}$ jest polovičný součet obou rovnoběžek, pročež pravíme:

Plocha lichoběžníka se vypočítá, když se polovičný součet obou rovnoběžek výškou znásobí.

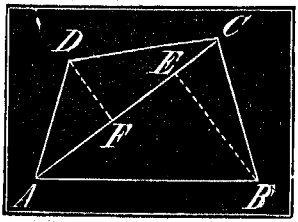
Kupř.: $AB = 6 cm$, $CD = 4 cm$, $DE = 5 cm$, $ABCD = \frac{6+4}{2} \times 5 = 25 cm^2$.

Sestrojte čtyrmi stranami lichoběžník, vyměřte rovnoběžky, výšku a vypočítejte obsah.

7. *Obsah čtyrúhelníka nepravidelného* (*různoběžníka*) (obr. 92.). Veďme v různoběžníku ABCD úhlopříčnu AC a z vrcholů B a D kolmice BF, a DF.

Úhlopříčnou tou dělí se různoběžník ve dva nerovné trojúhelníky; a obsah jeho rovná se součtu obou těchto trojúhelníků.

Obr. 92.



Trojúhelník ABC jest $= \frac{AC \times BE}{2} = AC \times \frac{BE}{2}$

trojúhelník ACD $= \frac{AC \times DF}{2} = AC \times \frac{DF}{2}$

Jest tedy plocha $ABCD = AC \times \frac{BE}{2} + AC \times \frac{DF}{2}$

což se takto píše: $ABCD = AC \left(\frac{BE + DF}{2}\right)$

to jest:

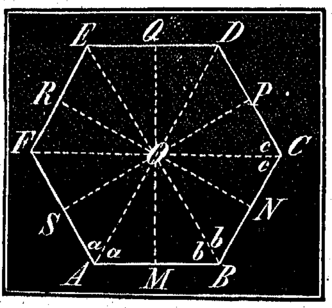
Obsah čtyrúhelníka nepravidelného se vypočte, když se znásobí úhlopříčna polovicí oněch kolmic, kteréž se k ní z protějších vrcholů vedly.

Je-li $AC = 8 cm$, $BE = 5 cm$, $DF = 3 cm$, bude:

$$ABCD = 8 \times \frac{5+3}{2} = 8 \times 4 = 32 cm^2.$$

8. *Obsah úhelníka pravidelného* (obr. 83.). Úhelník pravidelný může se rozděliti na trojúhelníky rovné. Spojí-li se totiž střed se všemi vrcholy, utvoří se tolik trojúhelníků, kolik stran úhelník má.

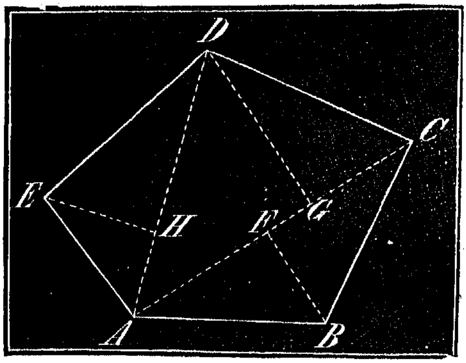
Obr. 83.



V trojúhelníku AOB stojí OM k straně AB kolmo. Kolmice tato udává vzdálenosť strany této od středu O a jest v trojúhelníku AOB výškou. Obsah trojúhelníka AOB jest $= AB \times \frac{v}{2}$.

Vezme-li se obsah tohoto trojúhelníka tolikkrát, kolik stran úhelník má, obdržíme plochu celého úhelníka.

Obr. 93.



Má-li úhelník 6 stran, bude tedy plocha jeho P:

$$P=6\times AB\times\frac{v}{2}.$$

Součin 6AB udává celý obměr O a protož bude plocha:

$$P=\times O\frac{v}{2} \text{ t. j.:}$$

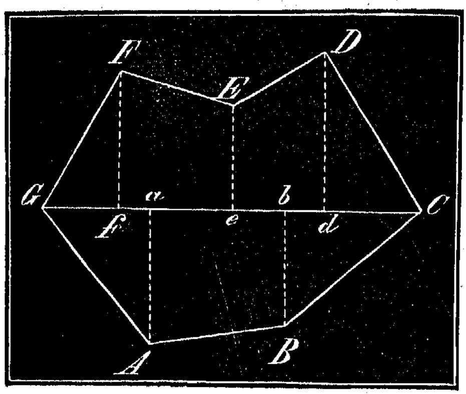
Obsah pravidelného úhelníka se vypočítá, když se obměr znásobí polovičnou vzdáleností jedné strany od středu úhelníka toho.

Ku př.: Strana pravidelného šestiúhelníka obnáší $3m$, $v=2{\cdot}59m$, jak velký jest plošný obsah?

$$P=6\times 3\times\frac{2{\cdot}59}{2}=9\times 2{\cdot}59=23{\cdot}31m^2.$$

9. Plocha úhelníka nepravidelného. Plocha obrazcův nepravidelných dá se vypočítati takto: Rozdělí se úhlopříčnami obrazec v trojúhelníky a tyto se vypočítají. Součet trojúhelníků těchto dá plochu celého úhelníka.

Obr. 94.



Tak jest (obr. 93.) plocha úhelníka ABCDE rovna součtu trojúhelníků a sice:

ABCDE=ABC+ACD+ADE.

Budiž AC=1*dm* 2*cm*, BF=3*cm*, DG=6*cm*, AD=1*dm*, EH=4*cm*.

$$\text{Jestiť } ABC=\frac{AC}{2}\times BF=\frac{12}{2}\times 3=18cm^2.$$

$$ACD=\frac{AC}{2}\times DG=\frac{12}{2}\times 6=36cm^2.$$

$$ADE=\frac{AD}{2}\times HE=\frac{10}{2}\times 4=20cm^2.$$

Jest tedy $ABCDE=18cm^2+36m^2+20cm^2=74cm^2$.

Obsah nepravidelných úhelníků dá se též následným způsobem vypočítati.

Vede se dvěma nejodlehlejšíma vrcholy přímka a na tuto přímku se spustí kolmé ze všech ostatních vrcholů. Tím rozdělí se úhelník v trojúhelníky pravoúhelné a lichoběžníky.

Součet všech trojúhelníků a lichoběžců dá obsah celého úhelníka.

Budiž úhelník ABCDEFG (obr. 94.). Veďme GC a kolmice: Aa, Bb, Dd, Ee a Ff.

Celá plocha P jest rovna součtu vzniklých obrazců.

Jest tedy:

$P = AaG + ABba + BCb + CDd + DEed + EFfe + FGf.$

Budiž $GA = 4cm$, $Aa = 6cm$, $ab = 7cm$, $Bb = 5cm$, $bB = 6cm$, $Dd = 8cm$, $Cd = 4cm$, $de = 4cm$, $Ee = 5cm$, $Ff = 6cm$, $fe = 5cm$, $Gf = 3cm$.

Je pak:

$$AaG = \frac{aG}{2} \times Aa = \frac{4}{2} \times 6 = 12cm^2$$

$$ABba = \frac{Aa + Bb}{2} \times ab = \frac{6+5}{2} \times 7 = 38 \cdot 5cm^2$$

$$BCb = \frac{Cb}{2} \times Bb = \frac{6}{2} \times 5 = 15cm^2$$

$$CDd = \frac{Cd}{2} \times Dd = \frac{4}{2} \times 8 = 16cm^2$$

$$DEed = \frac{Dd + Ee}{2} \times de = \frac{8+5}{2} \times 4 = 26cm^2$$

$$EFfe = \frac{Ee + Ff}{2} \times fe = \frac{5+6}{2} \times 5 = 27 \cdot 5cm^2$$

$$FGf = \frac{Gf}{2} \times Ff = \frac{3}{2} \times 6 = 9cm^2$$

Součet neb plocha $P = 144cm^2$.

Úlohy.

k vypočítání obměru a obsahu obrazcův přímočárných.

1. Mnoho-li obnáší plocha čtverce, jehož strana: $3m$, $3m$ $4dm$, $3m$ $4dm$ $8cm$ obsahuje?

2. Mnoho-li obnáší plocha obdélníka, jehož základnice $4m$ a výška $3m$, základnice $3m$, $5dm$ a výška $2dm$, $4dm$ obsahuje?

3. Čtverec má v obměru $13m$, jak velká jest plocha jeho?

4. Obdélník $1m$, $6dm$ široký má v obměru $9m$, $6dm$, jak dlouhý jest a mnoho-li obnáší plocha jeho?

5. Obdélník, jenž má $392cm^2$, jest $28cm$ dlouhý; mnoho-li obnáší jeho šířka?

6. Mnoho-li obnáší plocha trojúhelníka, jehož základnice má $5m$, $5dm$, $8cm$ a výška $4m$ $3dm$ $8cm$?

7. Plocha trojúhelníka obnáší $5m^2$ a výška $1m$, $3dm$, jak veliká jest základnice?

8. V lichoběžci obnášejí rovnoběžky a sice
menší a = 2*m*, 2*m* 4*dm*, 3*m* 4*dm* 8*cm*, 3*m* 5*dm* 9*cm*
větší A = 3*m*, 4*m* 5*dm*, 5*m* 8*dm* 2*cm*, 6*m* 8*lm* 7*cm*
výška v = 4*m*, 4*m* 2*dm*, 3*m* 5*dm* 4*cm*, 4*m* 5*dm* 8*cm*.
Jak velký jest obsah plošný v případech těchto?

9. V různoběžci obnáší úhlopříčna 5*m*, 4*dm* odlehlost její od vrcholu úhlů protilehlých 3·64*m* a 2·74*m*. Mnoho-li obnáší plocha různoběžce toho?

10. V pravidelném šestiúhelníku má strana 3·464*m* a vzdálenost její od středu úhelníka obnáší 3*m*, mnoho-li činí plošný obsah?

11. Kamenná deska je 9*dm* dlouhá, 5*dm* široká; jak velký jest obměr její a jak velká jest plocha?

12. Mnoho-li má v obměru deska u stolu, když jest 5*dm*, 8*cm*, dlouhá, 3*dm*, 4*cm* široká a mnoho-li obnáší plocha její?

13. Jak široké jest okno, když jest 8*dm* vysoké a má v obměru 26*dm*? Jakou zaujímá plochu?

14. Má se zahrada, kteráž tvoří obdélník, ohraditi prkny. Mnoho-li bude zapotřebí prken, když jest zahrada ta 32*m*, 4*dm* dlouhá a 24*m*, 5*dm* široká a když jest každé prkno 3½*dm* široké?

15. Mnoho-li čtvercových cm dalo by se vystříhat z archu papíru, jenž jest jest 20*cm* dlouhý a 16*cm* široký?

16. Kus sukna je 8*m* dlouhý a 75*cm* široký; mnoho-li čtverečn. dm. obnáší?

17. Pole má podobu obdélníka, mnoho-li obnáší plocha jeho, když jest 48*m*, 5*dm* dlouhé a 16*m*, 4*dm* široké?

18. Mnoho-li obnáší louka, mající podobu lichoběžce, když obnáší větší rovnoběžka 68*m*, 4*dm*, menší 54*m*, 2*dm* a vzdálenost jejich 28*m*, 5*dm*?

19. Místo pro budovu má podobu kosodélníka. Jedna strana obnáší 46·75*m* a jest od strany protilehlé 13·64*m* vzdálena; mnoho-li obnáší plocha místa toho?

20. Jizba jest 4*m*, 2*dm* dlouhá, 3*m*, 1*dm* široká, mnoho-li obnáší podlaha jizby té?

21. Střecha na domě má podobu lichoběžce. Střecha ta má se pokrýti plechem; mnoho-li čtverečných m. plechu toho bude zapotřebí, když má větší rovnoběžka 18*m*, 2*dm*, menší 10*m*, 4*dm* a když vzdálenost jejich obnáší 3*m*, 2*dm*?

22. Pole má tvar pravoúhelného trojúhelníka, jehož odvěsny obnášejí 54*m* a 38*m*, 5*dm*. Jakou cenu má toto pole, když se za hektar 864 zl. platí?

23. Dvůr, jenž má tvar čtverce, má se vydlážditi; mnoho-li bude stát dlažba, když obnáší jedna strana dvoru 5*m*, 5*dm* a když se za čtverečný *m* platí 72 kr.?

24. Mnoho-li se vyseje na pole, jenž má tvar obdélníka a je dlouhé 64*m* a široké 16*m*, 4*dm*, když se na hektar 3½ *hl* výsevu počítá?

25. Prodala se obdélná zahrada za 267 zl. 64 kr., mnoho-li stál ar, když byla 34*m*, 5*dm* dlouhá a 16*m*, 2*dm* široká?

26. U zrcadla jest rám 5*cm* široký; zrcadlo jest 9*dm* vysoké a 6*dm*, 8*cm* široké. Mnoho-li obnáší sklenná plocha u zrcadla toho?

27. Má se dát ve dvou jizbách nová podlaha. První jizba tvoří čtverec, jenž má v obměru 25*m*, 2*dm*, druhá má tvar obdélníka a je 5*m*, 2*dm* dlouhá, 3*m*, 5*dm* široká. Mnoho-li bude stát práce tato, když se má za čtverečný m. platit 2·64 zl.

28. Má se v domě chodba, jenž jest 6*m*, 5*dm* dlouhá a 1*m*, 4*dm* široká nově vydlážditi. Mnoho-li bude dlažba tato stát, když se má za čtverečný m. 1·16 zl. platiti?

29. V sále, jenž jest 10*m*, 5*dm*, dlouhý, 8*m*, 4*dm* široký, má se dát nová podlaha. Kolik prken bude zapotřebí, když jsou prkna tato 8*dm* dlouhá a 3*dm*, 8*cm* široká?

30. Pole, ježto má tvar různoběžce a jehož úhlopříčna obnáší 48*m*, výšky pak obou trojúhelníků 10*m*, 4*dm* a 19*m*, 2*dm*, má se zaměniti za jiné, které se lichoběžci podobá. Větší strana rovnoběžná lichoběžce toho obnáší 88*m* menší 8*m*, 4*dm* a šířka obnáší 19*m*, 5*dm*. Mnoho-li se musí doplatiti po 50 kr. za čtverečný metr?

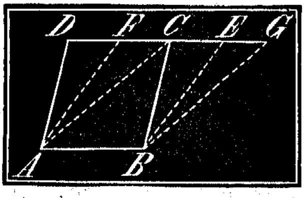
VII. O rovnosti a proměně obrazcův.

Obrazce nazývají se *rovné*, když obsahují mezi stranami svými *rovnou* velkosť plochy, když mají *rovný* obsah; tvar mohou míti buď *stejný* aneb *nestejný*. Ku př.: trojúhelník rovnostranný může býti obsahem svým rovný trojúhelníku rovnoramennému aneb nerovnostrannému, může býti roven čtyr-, pěti-, šestiúhelníku.

I. O rovnosti rovnoběžníků.

Už z předešlého učení víme, že jest rovnoběžník kosoúhelný obsahem roven obdélníku, když mají stejnou základnici a stejnou výšku. Sestrojme mezi rovnoběžkama (obr. 95.) při též základnici AB kosoúhelné rovnoběžníky ABCD, ABEF, ABGC.

Obr. 95.



Porovnejme nejprve rovnoběžce ABCD a ABEF. Rovnoběžník ABCD jest = ABCF + ADF ABEF, = ABCF + BCE.

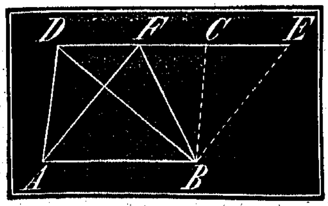
Trojúhelníky ADF a BCE se shodují; jestiť AD = BC, AF = BE a rovné jsou též úhly stejnolehlé. Z toho jest patrno, že sestávají rovnoběžníky ABCD a ABEF z rovných částek a že jsou si rovny.

Taktéž jsou si rovny rovnoběžníky ABCD a ABGC; neboť jsou trojúhelníky ACD a BCG shodné (proč?). Dáme-li k oběma těmto rovným trojúhelníkům trojúhelník ABC, obdržíme plochy ABCD, ABGC a plochy ty budou též rovné; pročež pravíme:

Rovnoběžníky jsou si rovny, když stojí na stejné základnici mezi stejnýma rovnoběžkama nebo jinak, *když mají stejnou základnici a stejnou výšku.*

Sestrojte mezi rovnoběžkama na též základnici dva rovnoběžníky tak, aby se dvě strany jejich protínaly; hledejte, zdali i ty rovnoběžníky sobě rovny jsou.

Obr. 96.



II. O rovnosti trojúhelníků.

Sestrojme při též základnici mezi rovnoběžkama trojúhelníky ABD a ABF (obr. 96.).

Vedeme-li z bodu B k straně AD rovnoběžku BC a k straně AF rovnoběžku BE, jest rovnoběžník ABCD=ABEF. Stranami BD a BF rozpolují se rovnoběžce, neboť jsou strany ty úhlopříčnami. Jelikož jsou rovnoběžníky ty sobě rovny, jsou rovny i půle jejich, nebo jinak trojúhelníky ABD a ABF; pročež díme:

Trojúhelníky jsou si rovny, když stojí na stejné základnici mezi stejnýma rovnoběžkama, a poněvadž mají takové trojúhelníky stejnou výšku, praví se též: *trojúhelníky jsou si rovny, když mají stejnou základnici a stejnou výšku.*

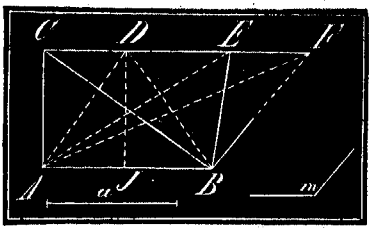
III. Úlohy.

Daný trojúhelník proměniti v jiný, obsahem rovný. Na základě předešlé věty může se daný trojúhelník proměniti v jiný, obsahem rovný.

1. Má se pravoúhelný trojúhelník ABC proměniti v rovnoramenný (obr. 97.).

Vede se vrcholem C trojúhelníka daného se základnou AB neurčitá rovnoběžka; rozpůlí se základna v bodu J a v bodu tom se vytýčí kolmice, až protne neurčitou rovnoběžku v průseku D.

Obr. 97.



Vede-li se AD a BD, jest trojúhelník ABD rovnoramenný a rovný danému trojúhelníku ABC.

Z výkonu toho vysvítá, že by se týmž způsobem trojúhelník nerovnostranný dal proměniti v rovnoramenný.

2. Má se daný trojúhelník ABC proměniti v jiný s danou stranou a (obr. 97.).

Vrcholem C daného trojúhelníka ABC vede se rovnoběžka k základnici AB; kolem bodu B se opíše danou stranou *a* průsečný oblouk, až protne neurčitou rovnoběžku v bodu E a vede se AE.

Trojúhelník ABE obsahuje danou stranu a jest roven trojúhelníku ABC.

3. Má se daný trojúhelník ABC proměniti v jiný s daným úhlem m (obr. 97.).

Vede se taktéž vrcholem C k základnici AB rovnoběžka, u bodu B sestrojí se daný úhel *m* a prodlouží se rameno jeho až k průseku s neurčitou rovnoběžkou; průsek budiž F.

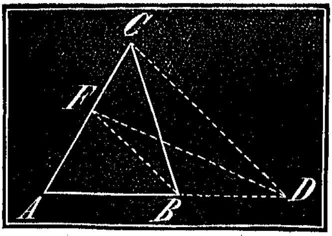
Vede-li se AF, jest trojúhelník ABF rovný danému trojúhelníku ABC a obsahuje daný úhel.

Z řešení toho vysvítá zároveň, že se týmž způsobem trojúhelník kosoúhelný dá proměniti v pravoúhelný.

Sestrojte libovolně trojúhelník tupoúhelný a proměňte jej v pravoúhelný; sestrojte taktéž nerovnostranný a proměňte jej v rovnoramenný.

4. V uvedených příkladech měly sestrojené trojúhelníky stejnou základnici a výšku. Dá se však daný trojúhelník též proměniti v jiný, rovný s jinou základnicí a s jinou výškou.

Obr. 98.

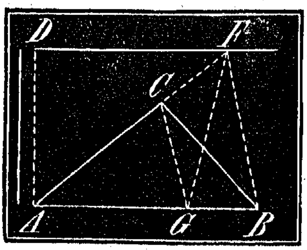


Příklad první: Má se daný trojúhelník ABC (obr. 98.) *proměniti v jiný s větší základnicí.*

Prodlouží se základnice daného trojúhelníka a učiní se rovna základnici větší; tato budiž AD. Bod D se spojí bodem C a vede se bodem B s přímkou BD rovnoběžná BF. Vedeme-li DF, vznikne trojúhelník ADF, jenž jest roven danému trojúhelníku ABC.

O rovnosti trojúhelníka ABC a ADF přesvědčíme se takto: Jestiť trojúhelník ABC = ABF + BFC
ADF = ABF + BFD.

Obr. 99.



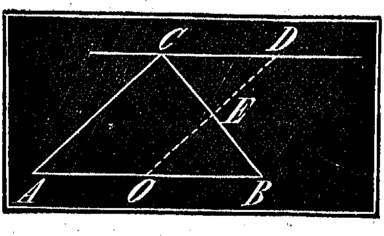
Trojúhelníky BFC a BFD jsou si rovny, neboť mají stejnou základnici BF a mezi rovnoběžkama BF a CD stejnou výšku. Jest tedy trojúhelník BFC = BFD a pročež i ABC = ADF.

Příklad druhý: Má se daný trojúhelník ABC proměniti v jiný s větší výškou (obr. 99.).

Vytýčí se v bodu A kolmice a učiní se rovna dané výšce; konečným bodem D vede se k základnici AB rovnoběžka neurčitě; strana AC se prodlouží, až porotne onu rovnoběžku v bodu F; vede se BF a s touto rovnoběžná CG. Spojíme-li body F a G, vznikne trojúhelník AFG, jenž jest obsahem trojúhelníku ABC roven.

O tom přesvědčíme se takto: Jestiť trojúhelník
ABC = ACG + CGB
AFG = ACG + CGF.

Obr. 100.



Trojúhelníky CGB a CGF mají stejnou základnici CG a stejnou výšku mezi rovnoběžkama CG a BF, pročež jsou si rovny. Jest tedy i ABC=AFG.

5. *Má se daný trojúhelník ABC* (obr. 100.) *proměniti v rovnoběžník.*

Vrcholem C vede se k základnici AB rovnoběžka neurčitě; rozpůlí se základnice a rozpolovacím bodem O se vede rovnoběžná se stranou AC. Rovnoběžec ACDO jest roven trojúhelníku ABC; neboť jest:

$$ABC = AOEC + BOE$$
$$ACDO = AOEC + CDE.$$

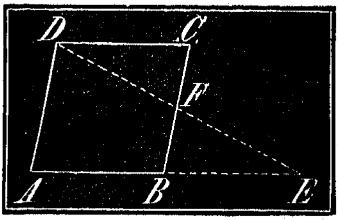
Trojúhelníky CDE a BOE jsou shodné; neboť jest strana CD = AO = BO a úhly k stranám těmto přilehlé jsou střídné; pročež jest:

$$ABC = ACDO.$$

Sestrojte libovolně více trojúhelníků a proměňte je v kosodélníky a obdélníky.

6. *Má se daný rovnoběžec ABCD* (obr. 101.) *proměniti v trojúhelník.* Prodlouží se základnice AB o svou délku BE = AB a bod E spojí se s bodem D.

Obr. 101.



Jestiť patrno, že jsou trojúhelníky BEF a CDF shodné. Utne-li se z rovnoběžníka daného trojúhelník CDF a dá-li se do polohy BEF, neubude obsahu; trojúhelník AED bude tedy roven rovnoběžci ABCD.

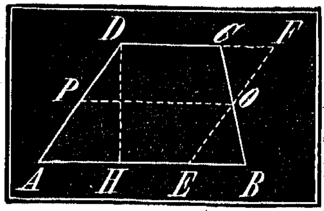
Sestrojte libovolně několik rovnoběžníků, proměňte je v trojúhelníky: pravo-, tupo-úhelné, rovnoramenné.

7. *Má se daný rovnoběžec proměniti v jiný, a sice v jiný s danou stranou, v jiný s daným úhlem.*

Obě úlohy se dle předešlého lehko rozřeší.

8. *Má se daný lichoběžec ABCD proměniti v rovnoběžník* (obr. 102.).

Obr. 102.



Rozpůlí se různoběžka BC a rozpolovacím bodem O se vede k protější různoběžce AD rovnoběžka EF.

Rovnoběžník AEFD jest roven lichoběžci ABCD, neboť jsou trojúhelníky BOE a COF shodné (proč?)

Jest tedy: AEOCD+COF neb AEFD=AEOCD+BOE neb ABCD.

Pozn. Vedeme-li rozpolovacím bodem O k rovnoběžkám AB a CD rovnoběžku OP, jest přímka ta rovna přímce AE i DF.

Vede-li se výška lichoběžce DH, jest obsah lichoběžce ABCD roven $\frac{AB + CD}{2} \times DH$.

Obsah rovnoběžce AEFD jest:

$$AEFD = AE \times DH$$

aneb, dáme-li místo AE rovnou OP

$$AEFD = OP \times DH.$$

Jelikož jsou plochy AEFD a ABCD sobě rovny, bude tedy:
$\frac{AB+CD}{2} \times DH = OP \times DH$, z čehož vysvítá, že jest
$\frac{AB+CD}{2} = OP$, t. j.:

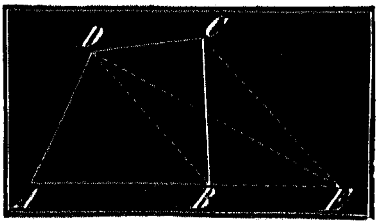
Když se vede v lichoběžci středem některé různoběžky k rovnoběžným stranám rovnoběžka, jest rovnoběžka ta rovna polovičnému součtu obou oněch rovnoběžek.

Plocha lichoběžce se vypočítá, když se přímka, kteráž jde středem stran různoběžných, výškou znásobí.

Ku př.: Je-li OP $= 1m\ 4dm$, DH $= 5dm$, jest lichoběžec ABCD $= 14 \times 5 = 70dm^2$.

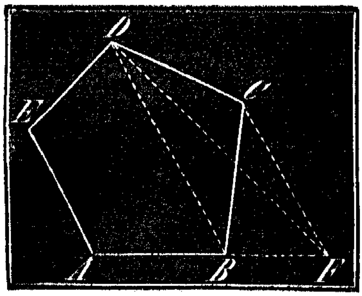
9. Má se daný různoběžník ABCD proměniti v trojúhelník (obr. 103.). Vede se úhlopříčna BD. Úhlopříčnou tou rozdělí se čtyrúhelník na dva trojúhelníky ABD a BCD. Prodlužme AB neurčitě a veďme bodem C k úhlopříčně BD rovnoběžku CE. Vede-li se DE, jest trojúhelník AED roven různoběžci ABCD. Jestiť:

Obr. 103.



ABCD = ABD + BDC
AED = ABD + BDE.
Jelikož jsou trojúhelníky BDC a BDE sobě rovny, tedy jest: ABCD = AED.

Obr. 104.



Sestrojte různoběžníky třemi stranami a dvěma úhly, dvěma stranama a třemi úhly a proměňte je v trojúhelníky.

10. Má se nepravidelný pětiúhelník proměniti v trojúhelník (obr. 104.). Proměna tato vykoná se postupně. Nejprve se totiž promění pětiúhelník v čtyrúhelník a tento se dále přetvoří v trojúhelník.

Vede se úhlopříčna BD, základnice AB se prodlouží neurčitě a bodem C se vede k úhlopříčně BD rovnoběžka CF.

Vedeme-li DF, jest čtyrúhelník AFDE roven pětiúhelníku ABCDE, neboť jsou trojúhelníky BDC a BDF sobě rovny.

Čtyrúhelník AFDE promění se pak v trojúhelník.

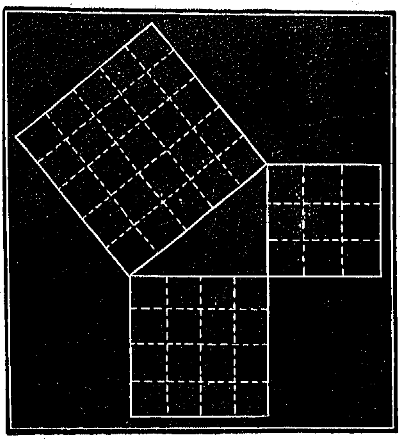
Z řešení tohoto vysvítá zároveň, že se každý přímočárný úhelník může proměniti v trojúhelník, a jelikož se může tento proměniti v rovnoběžník, může se tedy každý úhelník proměniti v rovnoběžník.

Sestrojte nepravidelný šesti-, sedmiúhelník a proměňte úhelníky ty v trojúhelník, v obdélník.

IV. Poučka Pythagorova.

Sestrojí-li se dvěma stranama, z nichž jedna 3, druhá 4 rovné dílky obnáší ku př. cm. pravoúhelný trojúhelník (obr. 105.), obnáší podpona trojúhelníka toho 5 takových dílků.

Obr. 105.

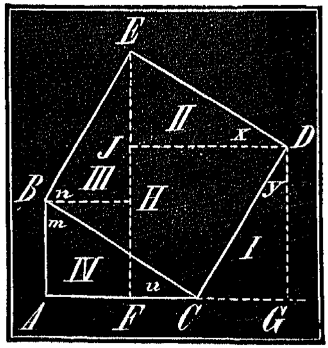


Sestrojíme-li při všech třech stranách čtverce, obnáší čtverec z menší odvěsny 9 a čtverec z větší 16 malých čtverců; čtverec z podpony obnáší 25 takových čtverců a rovná se součtu $9+16=25$ t. j. *Sestrojíme-li při stranách pravoúhelného trojúhelníka čtverce, jest čtverec z podpony roven součtu čtverců stran odvěsných.*

Poučka tato nazývá se dle vynálezce svého Pythagorova, a může se pro každý pravoúhelný trojúhelník znázorniti takto:

Je-li ABC (obr. 106.) pravoúhelný trojúhelník, sestrojme nad podponou BC čtverec BCDE, prodlužme neurčitě odvěsnu AC a spusťme na ni z bodů E a D kolmice EF a DG; z bodů B a D veďme na přímku EF kolmice BH a DJ.

Obr. 106.



Poznačme vzniklé trojúhelníky čísly I, II, III a IV.

Trojúhelník I jest $\cong$ II; jestiť $ED = CD$, $x = y$ (neboť stojí ramena jejich na sobě kolmo), pročež jest $DJ = DG$.

Trojúhelník I $\cong$ IV; jestiť $BC = CD$; $u = y$ (neboť jsou ramena jejich na sobě kolmá), pročež jest $AC = DG$.

Jelikož jest $AC = DG = DJ = FG = FJ$, jest obrazec DJFG čtverec a sice z odvěsny AC.

Dále jest III $\cong$ IV; jestiť BE = BC, $m = n$ (ramena jejich stojí na sobě kolmo), pročež jest BH = AB = AF = FH.

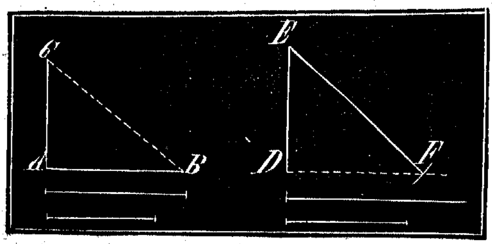
Obrazec ABHF jest čtverec odvěsny AB.

Trojúhelníky I, II, III a IV jsou vesměs shodné. Přidáme-li tedy, jak z obrazce vidno, k ploše BHJDC trojúhelníky II a III, obdržíme čtverec z podpony BC.

Vezmou-li se tyto trojúhelníky II a III, a přidáme-li je k ploše BHJDC do polohy I a IV, obdržíme čtverce obou odvěsen AB a AC.

Z toho jestiť patrno, že má čtverec z podpony o sobě právě tak velkou plochu, jako čtverce z obou odvěsen dohromady.

Obr. 107.



Když se plocha BHJDC jakož i trojúhelníky I, II, III a IV z tužšího papíru, z lepenky, vystřihnou, dá se věta tato dle naznačeného způsobu znázorniti.

Dány jsou strany dvou čtverců, má se vyhledati strana čtverce, jenž by se rovnal součtu obou oněch čtverců.

Sestrojí se pravoúhelný trojúhelník ABC (obr. 107.) tak, aby dané strany byly odvěsnama jeho.

Dle předešlé poučky jest BC strana čtverce, jenž se rovná oběma oněm čtvercům dohromady.

Jak by se vyhledala strana čtverce, jenž by se obsahem třem daným čtvercům vyrovnal?

2. *Jsou dány strany dvou čtverců, má se vyhledati strana čtverce, jenž se vyrovná rozdílu oněch čtverců* (obr. 107.). Sestrojí se pravý úhel, jedno rameno DE učiní se rovným straně menšího čtverce, kolem konečného bodu E ramene toho opíše se stranou většího čtverce oblouk, až protne druhé rameno v bodu F. Délka DF jest strana čtverce, jenž se rovná rozdílu oněch daných čtverců.

P o z n a m. Jestiť patrno, že se čtverce úplně sestrojovati nemusí a že tedy nález stran k řešení úlohy dostačí.

VIII. Dělení obrazcův přímočárných.

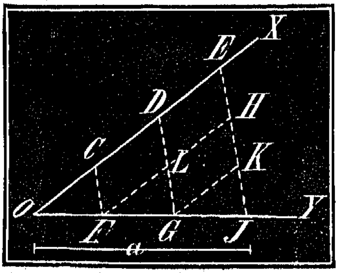
I. D ě l e n í p ř í m e k.

Jak se daná přímka rozpoluje, jest známo z učení o vlastnosti trojúhelníka rovnoramenného. Když se vzniklá půle opět rozpůlí, obdržíme 4tý díl dané přímky, a tak by se mohla daná přímka rozděliti dále na 8, 16 . . . rovných dílů.

Na rovné díly může se daná přímka i rovnoběžkami rozděliti a sice takto:

Je-li a daná přímka (obr. 108.), sestrojme libovolný úhel XOY, učiňme OJ $=a$ a vnesme na rameno OX rovné délky OC $=$ CD $=$ DE. Vedeme-li EJ a k této z bodů C, D rovnoběžky, CF, DG, rozdělí se těmito rovnoběžkami délka OJ taktéž na tři rovné díly. Vede-li se totiž FH, GK rovnoběžně k přímce OX, jest trojúhelník COF $\cong$ FLG $\cong$ GKJ; majíť trojúhelníkové tito rovné úhly (proč?) a rovné strany, neboť jest OC $=$ CD a délka CD $=$ FL; OC $=$ DE a DE $=$ GK; jest tedy OC $=$ FL $=$ GK; pročež též OF $=$ FG $=$ GJ $= \frac{1}{3}$ a.

Obr. 108.



Jestiť zároveň patrno, že se rovnoběžkami FH, GK i třetí strana trojúhelníka OEJ na rovné díly rozdělila, neboť jest EH $=$ CF $=$ LG $=$ HK $=$ KJ.

Tato věta o dělbě přímek vyjádří se těmito slovy:

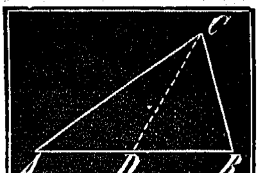
Když se v trojúhelníku jedna strana na rovné díly rozdělí, a když se z rozdělovacích bodů vedou k druhé straně rovnoběžky; rozdělí se i třetí strana na tolikéž rovných dílů.

Rozdělte dle téhož způsobu danou přímku na 5, 6, 7 rovných dílů.

II. Dělení troj- a čtyrúhelníků.

1. Daný trojúhelník rozděliti na dva, tři, čtyry rovné díly.

Obr. 109.

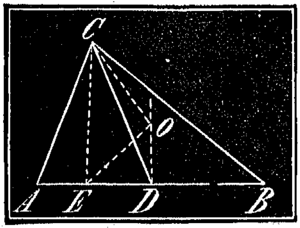


Má-li se trojúhelník na rovné díly rozděliti, rozdělí se základnice na tolik rovných dílů, na kolik dílů se trojúhelník rozděliti má. Body rozdělovací se spojí s vrcholem daného trojúhelníka.

Ku př.: Rozděliti trojúhelník na dva rovné díly neb rozpůliti trojúhelník.

Rozpůlí se základnice a bod rozpolovací se spojí s vrcholem (obr. 109.).

Obr. 110.



2. Požaduje-li se, aby se *daný trojúhelník ABC* (obr. 110.) *z udaného bodu uvnitř plochy své rozpůlil*, vykoná se rozpůlení takto: Daný bod O spojí se s bodem, jímž se základnice rozpoluje na př. D; z vrcholu C se vede k přímce OD rovno-

běžka, ježto základnou v bodu E protíná. Tento bod jakož i vrchol se spojí s daným bodem.

Vede-li se CD, jest BCD $= \frac{1}{2}$ABC; taktéž bude BCOE $= \frac{1}{2}$ ABC, neboť jest:

BCD $=$ BCOD $+$ DOC

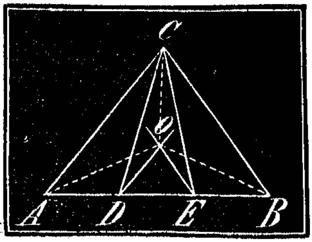
BCOE $=$ BCOD $+$ DOE

DOC $=$ DOE (proč?),

pročež: BCOE $=$ BCD $= \frac{1}{2}$ABC.

3. *Má se daný trojúhelník ABC na tři rovné díly tak rozděliti, aby rozdělovací přímky z vrcholů vycházely a uvnitř trojúhelníka v společném bodu se protínaly.*

Obr. 111.



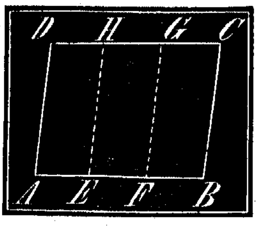
Rozdělí se základnice na tři rovné díly, z bodů rozdělovacích se vede k bližší straně rovnoběžka, tedy (obr. 111.) z bodu D ke straně AC, z bodu E k straně BC. Průsečný bod O jest bod rozdělovací; bod ten se spojí s vrcholy.

Vede-li se CD, jest trojúhelník ACD $= \frac{1}{3}$ABC.

Trojúhelníku tomuto jest roven trojúhelník ACO (proč?); tedy jest i: ACO $= \frac{1}{3}$ABC.

Týmž způsobem se dokáže, že jest trojúhelník BOC $= \frac{1}{3}$ABC, (vede-li se CE), a protož obnáší i trojúhelník AOB třetinu trojúhelníka ABC.

Obr. 112.



4. *Daný rovnoběžník ABCD na rovné díly rozděliti* (obr. 112.).

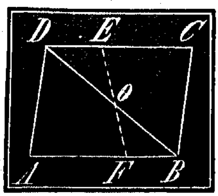
Má-li se rovnoběžník na rovné díly rozděliti, rozdělí se základna na tolik rovných dílů, na kolik dílů se obrazec rozděliti má; rozdělovacími body se vedou rovnoběžky k stranám pobočným.

Má se rovnoběžník ABCD rozděliti na tři rovné díly.

Rozdělí se základnice AB na tři rovné dílky AE $=$ EF $=$ FB a bodem E a F se vedou přímky EH, FG rovnoběžně k straně BC.

Má-li se rovnoběžník rozpůliti, stane se to úhlopříčnou. Taktéž se rovnoběžník rozpůlí, když se vede středem jeho přímka až k průseku stran protilehlých.

Obr. 113.



Je-li ku př. (obr. 113.) bod O středem rovnoběžníka ABCD, a vedeme li EF bodem O, utvoří se dva lichoběžce ADEF a BCEF.

Jak z obrazce vidno, utvoří se z trojúhelníka ABD, jenž jest roven $\frac{1}{2}$ ABCD, lichoběžec

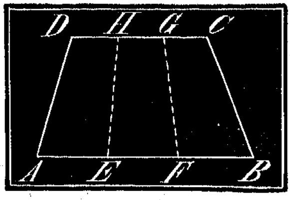
ADEF, když se od trojúhelníka toho odejme trojúhelník BOF a přidá se k němu trojúhelník DOE. Trojúhelníky BOF a DOE jsou shodné (proč?).

Jest tedy lichoběžník ADEF roven trojúhelníku ABD a tudíž roven $^1/_2$ ABCD.

Rozdělí se čtverec oběma úhlopříčnama na čtyry rovné díly?

5. *Daný lichoběžník (trapez) ABCD* (obr 114.) *na rovné díly rozděliti.*

Obr. 114.



U lichoběžníků rozdělí se obě rovnoběžky na tolik rovných dílů, na kolik rovných dílů se obrazec rozděliti má. Body rozdělovací se pak náležitě spojí.

Má se lichoběžník ABCD (obr. 114.) na tři rovné díly rozděliti:

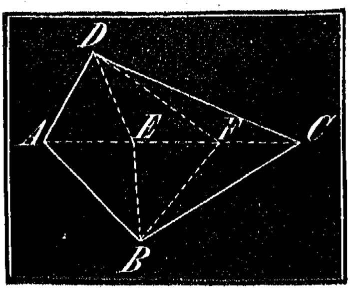
Rozdělí se přímka AB jakož i CD na tři rovné díly a vedou se přímky EH a FG; bude pak:

AEHD = EFGH = FBCG = $^1/_3$ABCD. Udejte příčinu, proč díly ty sobě rovny jsou.

Sestavte lichoběžníky čtyrmi stranami, třemi stranami a úhlem k větší rovnoběžce přilehlým a rozdělte lichoběžníky ty na 2, 3, 4 rovné díly.

Rozdělte daný lichoběžník na dva rovné díly tak, aby rozdělovací přímka z některého vrcholu lichoběžníka toho vycházela.

Obr. 115.



6. *Různoběžník (trapezoid) ABCD* (obr. 115.) *na rovné díly rozděliti.*

Vede se úhlopříčna a rozdělí se na určitý počet rovných dílů; body rozdělovací se spojí s oběma protilehlýma vrcholy.

Má se trapezoid ABCD na tři rovné části rozděliti:

Rozdělí se úhlopříčna AC na tři rovné díly AE = EF = FC; body E a F se spojí s vrcholem B a D.

Trojúhelníky ABE, BEF a BCF jsou vesměs rovny (proč?); taktéž jest trojúhelník AED = DEF = DCF. Protož bude část:

ADEB = DEBF = DFBC.

Sestavte různoběžníky úhlopříčnou a čtyrmi stranami a úhlem; rozdělte je na 2, 3, 4 rovné částky.

Rozdělte libovolně:

1. Daný trojúhelník,

a) jednou přímkou:

1. na dva trojúhelníky, 2. na jeden trojúhelník a trapezoid, 3. na trojúhelník a trapez.

b) dvěma přímkama:

1. na tři trojúhelníky, 2. na dva trojúhelníky a trapezoid, 3. na dva trojúhelníky a lichoběžník, 4. na dva trojúhelníky a pětiúhelník, 5. na jeden trojúhelník a dva různoběžníky, 6. na jeden trojúhelník a dva lichoběžníky, 7. na tři trojúhelníky a různoběžník, 8. na dva trojúhelníky a dva trapezoidy, 9. na dva trojúhelníky a dva lichoběžníky, 10. na dva trojúhelníky, jeden trapezoid a jeden pětiúhelník, 11. na jeden trojúhelník, dva trapezoidy a jeden pětiúhelník.

Rozdělte libovolně:

II. Daný rovnoběžník,

a) jednou přímkou:

1. na dva trojúhelníky, 2. na dva lichoběžníky, 3. jeden trojúhelník a lichoběžník, 4. jeden trojúhelník a pětiúhelník.

b) dvěma přímkama a sice ve dva obrazce:

1. na trojúhelník a pětiúhelník s úhlem vypuklým, 2. trojúhelník a šestiúhelník úhlem vypuklým, 3. trojúhelník a sedmiúhelník, 4. čtyrúhelník a pětiúhelník, 5. dva pětiúhelníky.

c) dvěma přímkama na tři obrazce:

1. na tři trojúhelníky, 2. na dva trojúhelníky a lichoběžník, 3. na jeden trojúhelník, rovnoběžník a lichoběžník, 4. na dva trojúhelníky a jeden pětiúhelník.

d) dvěma přímkama na čtyry obrazce:

1. na čtyry trojúhelníky, 2. na tři trojúhelníky a různoběžník, 3. na tři trojúhelníky a pětiúhelník, 4. na dva trojúhelníky a dva lichoběžníky, 5. na dva trojúhelníky a dva pětiúhelníky.

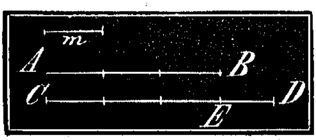
Vyhledejte ještě více podobných rozdělení, jak by se dvěma přímkama rozdělovacíma utvořily jenom tři obrazce, čtyry obrazce.

IX. Podobnosť obrazcův přímočárných.

1. Poměry a srovnalosti.

Sestrojme délkou *m* (obr. 116.) dvě přímky: první AB budiž 3krát, druhá CD 4krát tak dlouhá jako *m*.

Obr 116.



Porovnáme-li přímky AB a CD dle velkosti jejich, jestiť patrno, že se přímky tyto tak k sobě mají, jako čísla 3 a 4. Pravíme o nich, že jsou v *poměru* jako 3:4 aneb že mají *poměr* 3:4.

Z toho zároveň vidíme, jak by se

mohly sestrojiti dvě přímky, kteréž by se tak k sobě měly, jako dvě daná čísla ku př. 2:5. Vedly by se totiž dvě délky, jedna 2krát, druhá 5krát tak dlouhá, jako *m*.

Sestrojte přímky, kteréž by se k sobě měly jako čísla: 2 : 3, 3:5, 4:5, 5:7.

Sestrojte trojúhelník, aby se strany k sobě měly, jako se mají k sobě čísla 3, 4, 5.

Poznam. Dá-li se číselný poměr v zlomcích, uvede se nejprve na poměr celočíselný a pak se délky vyhledají, ku př. sestrojiti přímky, ježto by se k sobě měly jako $^1/_2 : ^3/_5$.

Poměr $^1/_2 : ^3/_5 = 5:6$, pročež se dle poměru (5:6) délky sestrojí.

Přímka CD (obr. 116.) jest 4krát tak velká, jako délka *m*. Délka *m* dala by se na přímku CD čtyrykrát vnésti a sice bez zbytku.

Když se přímka na jinou přímku několikkráte bez zbytku vnésti dá, pravíme, že jest měrou přímky té. Tak jest *m* (obr. 116.) měrou přímky CD.

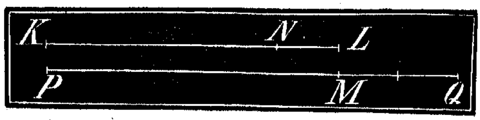
Když se na dvě neb více přímek táž míra bez zbytku vnésti může, pravíme o přímkách těch, že mají *míru společnou*. Přímky AB a CD (obr. 116.) mají společnou míru *m*.

Přímky AB a CD sestrojili jsme dle poměru čísel 3 a 4 aneb vyjádřili jsme číselný poměr 3 : 4 délkami oněch přímek. Naopak může se poměr dvou daných přímek vyjádřiti čísly.

Poměr dvou daných přímek vyjádří se čísly, když se vyhledá společná míra oněch přímek a to stane se takto:

Vnáší se menší přímka na větší tolikkrát, kolikkrát se vnésti může. Je-li v přímce větší bez zbytku na př. 4krát obsažena, jest 1:4 onen číselný poměr t. j. menší přímka má se k větší jako čísla 1:4.

Obr. 117.



Když ale menší přímka v přímce větší bez zbytku obsažena není, hledá se, zdali jest zbytek ten obsažen v přímce menší.

Vneseme-li ku př. přímku AB (obr. 116.) na přímku CD, bude přímka AB v přímce CD jednou obsažena a zbytek bude délka DE. Vnese-li se délka DE na přímku AB, bude v ní obsažena třikrát.

Je tedy: AB = 3DE.

CD = AB + DE = 3DE + DE = 4DE.

Délka DE jest společnou měrou přímek AB a CD a přímky ty mají se k sobě, jako čísla 3 : 4.

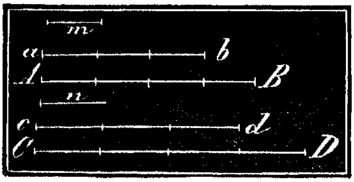
Kdyby ale první zbytek v přímce menší bez zbytku obsažen nebyl, vnáší se druhý zbytek na zbytek první, ku př.: Má se vyhledati číselný poměr přímek KL a FQ (obr. 117.).

Menší přímka KL se vnese na větší PQ, a budiž v ní obsažena jednou a zbytek budiž délka MQ. Délka MQ vnáší se na přímku menší; budiž v ní obsažena dvakrát a zbytek buď délka NL. Druhý tento zbytek NL vnáší se na zbytek první, totiž délku MQ. V délce té budiž NL obsažena dvakrát. Jest tedy:

$$MQ = 2NL$$
$$KL = 2MQ + NL = 4NL + NL = 5NL$$
$$PQ = KL + MQ = 5NL + 2NL = 7NL.$$

Délka NL jest společnou měrou přímek KL a PQ a přímky ty mají se tak k sobě jako čísla 5 : 7.

Obr. 118.



Tímto způsobem může se tedy k dvěma daným přímkám společná míra vyhledati nebo jinak, může se vyjádřiti číselný poměr jejich.

Sestrojme délkou *m* přímky AB a *ab* (obr. 118.) tak, aby se k sobě měly jako 4 : 3; délkou *n* sestrojme taktéž dvě přímky CD a *cd*, CD budiž rovna $4n$, cd $= 3n$.

Jestiť patrno, že se mají k sobě přímky CD a cd taktéž, jako čísla 4 : 3.

Poměry AB : ab a CD : cd jsou si *rovny*. Spojíme-li je známkou rovnosti, sluje srovnání to *srovnalosť* neb *úměra*.

AB : ab = CD : cd,

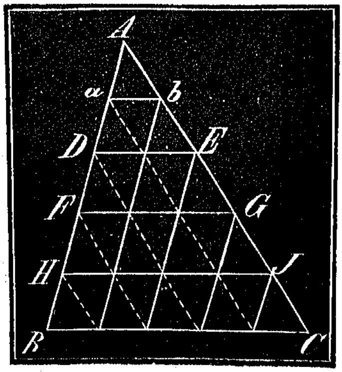
což se takto čte: AB má se k *ab,* jako se má CD : cd.

O přímkách v srovnalosti té pravíme, že jsou *srovnalé* neb *úměrné*.

Sestrojte srovnalé přímky a sice dle poměru 2:3, 3:5.

2. Podobnosť trojúhelníků.

Obr. 119.



Rozdělme v trojúhelníku ABC (obr. 119.) stranu AB na rovné díly, ku př. na pět dílů a veďme některým rozdělovacím bodem na př. od vrcholu A druhým bodem D k straně BC rovnoběžku DE. Rovnoběžkou tou utvoří se trojúhelník ADE, jenž má rovné úhly s trojúhelníkem ABC; neboť jest úhel A oběma společný a úhly ADE a AED jsou rovny úhlům ABC a ACB.

Hleďme dále, v jakém jsou asi poměru strany těchže trojúhelníků. Strany

AD a AB mají se k sobě jako 2 : 5, neboť obsahuje AD dva, AB pět rovných dílků. Jest tedy:

AD : AB = 2 : 5.

Vedeme-li rozdělovacími body rovnoběžky k straně BC, rozdělí se i AC na pět rovných dílů, jako jest dílek Ab. Mají se tedy strany:

AE : AC = 2 : 5.

Jestiť patrno, že se i třetí strana BC na pět rovných dílů rozdělí, když se rozdělovacími body a, D, F, H ku straně AC rovnoběžky vedou. Strana BC obsahuje pět takových dílků jako jest ab; strana DE obsahuje dva takové dílky. Má se tedy:

DE : BC = 2 : 5.

Poměry stran trojúhelníků ADE a ABC jsou rovny a mohou se tedy do srovnalosti položiti:

AD : AB = AE : AC = DE : BC.

Pravíme o stranách trojúhelníků ADE a ABC, že jsou *srovnalé* a sice, že jsou ty strany srovnalé, jenž naproti rovným úhlům stojí. Strany tyto nazývají se *stejnolehlé.*

Když se tedy v trojúhelníku vede k některé straně rovnoběžka, vznikne nový trojúhelník, jenž má s trojúhelníkem daným rovné úhly a srovnalé strany.

Jestiť dále patrno, že tutéž vlastnosť mají i trojúhelníky AFG a AHJ. Trojúhelníky tyto liší se od sebe jen velikostí, podobu mají vesměs stejnou. Trojúhelníky, kteréž mají stejnou podobu, nazývají se *podobné.* V obr. 119. jsou všecky trojúhelníky sobě podobny.

Jak z výkladu vysvítá, jsou tedy u trojúhelníků podobných stejnolehlé úhly rovné a strany stejnolehlé jsou srovnalé.

Jaký jest rozdíl mezi trojúhelníky podobnými a trojúhelníky shodnými?

Obr. 120.

K podobnosti dvou trojúhelníků vyžaduje se celkem šest podmínek, totiž aby byly všechny tři úhly vzájemně rovny, a všechny tři strany aby měly tentýž poměr nebo jinak, aby byly poměry všech tří stran sobě rovny, aby strany byly srovnalé.

Když by tedy dva dané trojúhelníky sobě podobny býti měly, zdálo by se dle předešlého výkladu, že by se všech oněch šest podmínek vždy udati musilo.

Avšak dostačí k podobnosti dvou trojúhelníků jen několik oněch podmínek, jak se tomu z následujících případů vyrozumí.

1. Trojúhelníky ABC a abc (obr. 120.) mějtež rovné úhly, totiž A = a, B = b, C = c.

U trojúhelníků těchto jsou tedy jen tři podmínky známy. Z další úvahy uvidíme, že jsou u trojúhelníků takových poměry stran sobě rovny aneb jinak, že jsou strany jejich srovnalé a trojúhelníky ty sobě podobny.

Utněme na straně AB délku AD = ab a veďme bodem D k straně BC rovnoběžku DE. Z učení předešlého víme, že jest trojúhelník ADE $\sim$ ABC.

Kdyby byl trojúhelník *abc* shodný s trojúhelníkem ADE, byl by též podoben trojúhelníku ABC.

Trojúhelníky ADE a *abc* jsou shodné, neboť jest AD = ab, úhel A = a, D = B = b, E = C = c.

Jest tedy: abc $\sim$ ABC; pročež pravíme:

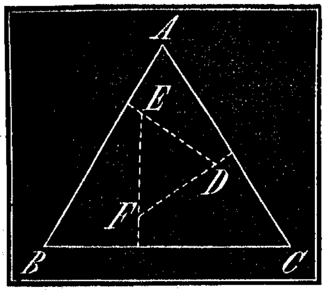
Když mají dva trojúhelníky vzájemně rovné úhly, jsou stejnolehlé strany jejich srovnalé a trojúhelníky ty jsou si podobny.

Jak z výkladu tohoto vysvítá, dostačí k podobnosti dvou trojúhelníků toliko rovnosť úhlů; protož se může předešlá věta kratčeji i takto vyjádřiti:

Dva trojúhelníky jsou si podobny, když mají vzájemně rovné úhly.

Podobají se sobě dva trojúhelníky, když mají jen dva úhly vzájemně rovné? Jsou dva rovnoramenné trojúhelníky podobny, když jsou úhly ve vrcholech jejich sobě rovny? Jsou dva pravoúhelné trojúhelníky podobny, když jest z ostrých úhlů jejich jeden vzájemně rovný? Jsou rovnostranné trojúhelníky vždy sobě podobny?

Obr. 121.



Sestrojte více podobných trojúhelníků s úhly 70° a 80°; volte při tom strany základné v tomto poměru 2 : 3, 3 : 4, 3 : 5, 4 : 5.

Sestrojte dva rovnoramenné podobné trojúhelníky, jejichž úhly na základnici mají dohromady 130°; voltež základnice v poměru 3 : 5, 4 : 7, 5 : 7.

Sestrojte podobné pravoúhelné trojúhelníky; ostrý úhel na základnici měj 40°, poměr základnic buď 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5.

Dán jest trojúhelník a přímka; má se při té přímce sestaviti trojúhelník tak, aby se podobal trojúhelníku danému.

Sestrojte dva trojúhelníky tak, aby šly strany jejich na vzájem rovnoběžně. Budou trojúhelníky ty sobě podobny? Jak se vyjádří věta o podobnosti jejich?

Sestrojme dva trojúhelníky ABC a DEF tak, aby strany jejich stály na sobě vzájemně kolmo (obr. 121.). Jelikož stojí strany obou trojúhelníků na sobě kolmo, jest úhel A = D, B = E, C = F. Trojúhelníky ty jsou si tedy podobny; pročež pravíme:

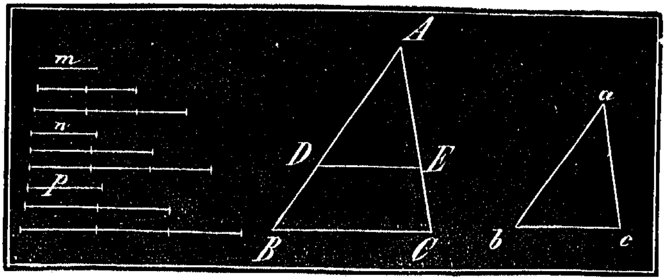
Dva trojúhelníky jsou si podobny, když stojí strany jejich k sobě na vzájem kolmo.

Dán jest trojúhelník, sestrojte jiný, aby strany jejich stály na sobě kolmo; vyhledejte rovné úhly, strany stejnolehlé.

Sestrojte danými třemi stranami trojúhelník; sestrojte k tomu trojúhelníku jiný, aby strany obou stály na sobě kolmo; vyhledejte strany stejnolehlé.

Sestrojte základnicí a ramenem trojúhelník rovnoramenný; odvěsnou a přilehlým ostrým úhlem trojúhelník pravoúhelný. Sestrojte v každém tom trojúhelníku jiný, aby stály strany na sobě na vzájem kolmo.

Obr. 122.



2. Sestrojme trojí měrou neb jedničkou m, n, p (obr. 122.) délky v poměru 2 : 3; délkami, které totéž násobné obsahují, sestrojme trojúhelníky abc a ABC.

U trojúhelníků těchto jsou poměry stran vesměs rovny neb jinak, strany trojúhelníků ABC a abc jsou srovnalé, totiž:

AB : ab = BC : bc = AC : ac = 3 : 2.

Jest totiž AB = 3p, AC = 3n, BC = 3m a u trojúhelníku abc jest ab = 2p, ac = 2n a bc = 2m.

V tomto případu jedná se o to, zdali jsou též v oněch trojúhelnících stejnolehlé úhly vzájemně rovny.

Utněmež z vrcholu A od AB délku AD = ab a veďme DE rovnoběžně se stranou BC.

Poměry stran trojúhelníků ABC a ADE jsou vesměs sobě rovny, jest totiž:

AB : AD = AC : AE = BC : DE.

Poněvadž jsme učinili AD = ab = 2p, má se:

AB : AD = AB : ab = 3 : 2;

pročež jsou i poměry:

AC : AE = BC : DE = 3 : 2 t. j.

Délky AE a DE obsahují v sobě tutéž jednotku dvakrát, anaž jest v délkách AC a BC obsažena třikrát. Jest tedy:

AE = 2n = ac a délka

DE = 2m = bc.

Trojúhelníky ADE a abc mají vzájemně rovné strany a jsou tedy shodné; pročež jest úhel A = a, D = B = c, E = C = c. Majíť tedy: Trojúhelníky ABC a abc srovnalé strany a vzájemně rovné úhly — jsou si podobny.

Když jsou tedy u dvou trojúhelníků poměry stran sobě rovny, jsou i stejnolehlé úhly vzájemně rovné a trojúhelníky ty jsou si podobny: pročež pravíme:

Dva trojúhelníky jsou si podobny, když jsou poměry stran jejich sobě rovny, aneb jinak, *když jsou strany jejich srovnalé.*

3. Budiž u trojúhelníků abc a ABC obr. 112. úhel a = A a poměry stran rovné tyto úhly svírajících buďtež sobě rovny, totiž:

ab : AB = ac : AC.

Jestliže učiníme v trojúhelníku ABC délku AD = ab a vedeme-li DE rovnoběžně s BC, jest trojúhelník ADE∾ABC; majíť rovné úhly. Pročež jest:

AD : AB = AE : AC,

a jelikož jest AD = ab, bude též:

ab : AB = AE : AC.

Poměr ab: AB jest ale roven poměru ac : AC a proto jest:

ac : AC = AE : AC, z kteréžto úměry jde, že jest AE = ac, proto že jsou druhý a čtvrtý člen sobě rovny. Z toho jde dále, že jsou trojúhelníky abc a ADE shodné a že jest trojúhelník abc ∾ ABC. Pravíme tedy:

Trojúhelníky jsou si podobny, když jsou poměry dvou stran a úhly stranama těma sevřené sobě rovny.

4. Budiž u trojúhelníků abc a ABC strana ab > ac, strana AB > AC, úhel c = C a zároveň ab : AB = ac : AC.

Učiníme-li v trojúhelníku ABC délku AD = ab a vedeme-li DE rovnoběžně s BC, jest trojúhelník ADE∾ABC a proto jest:

AD : AB = AE : AC

a jelikož jest AD = ab, bude:

ab : AB = AE : AC.

Protože jest ale poměr ab : AB = ac: AC, bude též:

AE : AC = ac : AC, z čehož jde, že jest AE = ac.

Jelikož jest úhel E = C = c, jsou trojúhelníky ADE a abc shodné a protože jest ADE ∾ ABC, jest i abc ∾ ABC. Pročež díme:

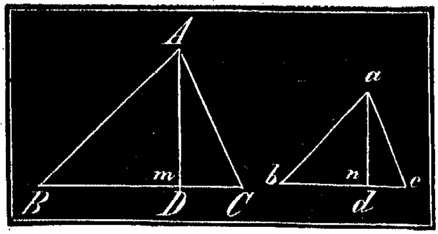
Trojúhelníky jsou si podobny, když jsou poměry dvou stran a úhly proti větším stranám ležící zároveň sobě rovny.

3. Vlastnosti trojúhelníků podobných.

Trojúhelníky ABC a abc (obr. 123.) buďtež sobě podobny. Veďme v obou trojúhelnících výšky AD a ad.

Jelikož jsou si oba trojúhelníky ABC a abc podobny, jsou podobny

Obr. 123.



též trojúhelníky ABD a abd; neboť jest úhel B = b, úhel $m = n = 90^0$. Má se tedy:

AB : ab = AD : ad

a poněvadž jest ABC ∾ abc, má se též:

AB : ab = BC : bc,

pročež bude i:

AD : ad = BC : bc t. j:

U trojúhelníků podobných jest poměr základnic roven poměru výšek aneb jinak, *u trojúhelníků podobných mají se základnice k sobě, jako výšky.*

V obrazci 119. jsou trojúhelníky Aab, ADE, AFG, AHJ, ABC vesměs podobny a jestiť patrno, že jsou strany trojúhelníka ADE dvakrát, strany trojúhelníka AFG třikrát, strany trojúhelníka AHJ čtyrykrát a strany trojúhelníka ABC pětkrát tak velké, jako jsou strany trojúhelníka Aab.

Hledá-li se obměr trojúhelníka Aab a ADE, bude obměr trojúhelníka ADE dvakrát tak velký, jako jest obměr trojúhelníka Aab, a budou se obměry ty k sobě míti, jako 1 : 2, tedy zrovna tak, jako se k sobě mají strany stejnolehlé.

Obměr trojúhelníka AFG bude třikrát, obměr trojúhelníka AHJ čtyrykrát a obměr trojúhelníka ABC pětkrát tak velký, jako jest obměr trojúhelníka Aab.

Z úvahy této vidíme, že se obměry oněch trojúhelníků tak k sobě míti budou, jako stejnolehlé strany; pročež pravíme:

Obměry trojúhelníků podobných mají se k sobě jako stejnolehlé strany.

Rozdělíme-li strany trojúhelníka ABC rovnoběžkami na rovné díly (obr. 119.), rozdělí se rovnoběžkami těmito trojúhelník ten na malé shodné trojúhelníky.

Trojúhelník ADE, jehož strany jsou dvakrát tak velké jako strany trojúhelníka Aab, obsahuje čtyry takové trojúhelníky; trojúhelník AFG obsahuje jich devět, trojúhelník AHJ šestnáct a ABC konečně pětadvacet.

Mají se tedy obsahy ADE, AFG, AHJ a ABC:

ADE : AFG = 4 : 9

AFG : AHJ = 9 : 16
AHJ : ABC = 16 : 25 ;

kdežto se strany jejich k sobě mají, jako 2 : 3, 3 : 4. 4 : 5.

Čísla 4, 9, 16, 25 slují *čísla čtvercová* nebo jinak, *druhé mocniny* čísel 2, 3, 4, 5.

Pravíme tedy:

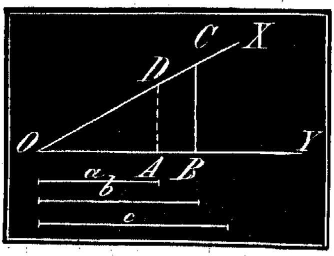
Obsahy podobných trojúhelníků mají se k sobě, jako druhé mocniny stran stejnolehlých.

4. Sestrojení, kteráž se na podobnosti trojúhelníků zakládají.

Má se k třem daným přímkám vyhledati čtvrtá srovnalá (obr. 124.).

Sestrojí se libovolný úhel XOY, z vrcholu O se z ramene OY utne OA = a, OB = b; z ramene OX utne se OC = c. Spojíme-li bod B s bodem C a vedeme-li k přímce BC z bodu A rovnoběžku AD, bude trojúhelník AOD $\sim$ BOC; má se tedy:

Obr. 124.



AO : BO = DO : CO

a jelikož jest AO = a, BO = b, CO = c, má se:

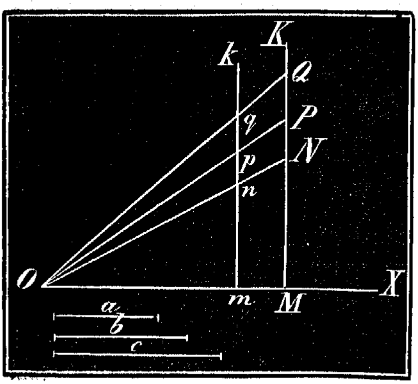
$a : b$ = DO : c.

Přímka DO jest tedy čtvrtá srovnalá.

Mají se dané přímky daným poměrem buď zvětšiti aneb zmenšiti (obr. 125.).

Vede se přímka OX libovolně a mají-li se dané přímky a, b, c zvětšiti v poměru 4 : 5, vnesou se z bodu O na přímce OX 4 rovné dílky a pak opět z bodu O 5 rovných dílů; v bodech m a M vytýčí se kolmice mk a MK. Na kolmice mk se vnesou z bodu m všecky dané přímky tak, že jest $mn = a$, $mp = b$, $mq = c$. Body m, p, q se spojí s bodem O a přímky On, Op, Oq se prodlouží až k průseku s kolmicí MK, jižto v bodech N, P, Q protínají.

Obr. 125.



Přímky MN, MP, MQ jsou zvětšené délky přímek a, b, c a sice dle poměru daného; neboť se má:

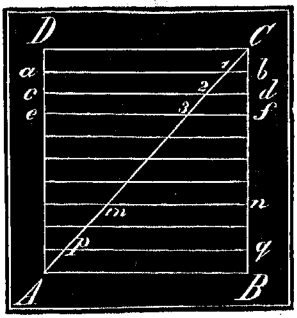
mn : MN = 4 : 5, $mn = a$
mp : MP = 4 : 5, $mp = b$
mq : MQ = 4 : 5, $mq = c$.

Měly-li by se tyto dané přímky týmž poměrem zmenšiti, vnesly by se na kolmici MK; na kolmé mk byly by pak délky zmenšené.

Sestrojte třemi danými stranami trojúhelník, zmenšte délky stran těch v poměru 2:3, 3:4, 4:5; sestrojte zmenšenými stranami opět trojúhelníky. Budou trojúhelníky ty sobě podobny?

3. *Má se daná přímka na více rovných dílů rozděliti.*

Obr. 126.



Má-li se určitá přímka AB (obr. 126.) na *mnoho malých* dílků rozděliti, může se rozdělení provésti následným způsobem:

V konečných bodech A a B sestrojí se kolmice AD a BC; na kolmých těchto se odměří tolik rovných dílků, na kolik dílů se přímka rozděliti má, ku př. 10.

Když se hořejší body kolmých přímek AD a BC spojí, utvoří se obdélníkový obrazec ABCD.

Vedeme-li rozdělovacími body kolmic AD a BC přímky *ab, cd, ef*... a v obdélníku ABCD úhlopříčnu AC, má se

$$b1 : AB = 1 : 10$$
$$d2 : AB = 2 : 10$$
$$f3 : AB = 3 : 10,$$

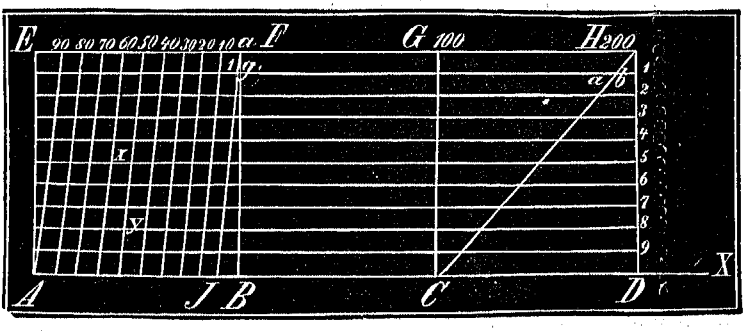
z čehož jde, že jest

$$b1 = \frac{AB}{10},\ d2 = \frac{2AB}{10},\ f3 = \frac{3AB}{10}.$$

Lehko se vyrozumí, že jest délka $mn = {}^7/_{10}AB$, délka $pq = {}^9/_{10}AB$.

4. *Měřídko popříčné* (obr. 127.).

Obr. 127.



Na předešlém rozdělovacím způsobu se zakládá sestrojení *zmenšovacího, popříčného měřídka.*

Sestrojíme měřídko to pro *míru desetinnou.*

Vede se přímka AX a na přímce této se učiní AB = BC = CD. Jeden z dílů těchto se rozdělí na 10 rovných dílků dle způsobu předešlého.

Aby se však měřídkem tím ještě menší délky měřiti mohly, vnese se dílek $ab = \frac{CD}{10}$ na délky AB a EF a sice desetkrát a vedou se pak *příčné*, jak z obrázce vidno.

Jestiť patrno, že se má dílek:

$gl : BJ = 1 : 10$, pročež jest:

$$gl = \frac{BJ}{10}.$$

Délka BJ jest rovna $ab = \frac{AB}{10}$, protož bude:

$$gl = \frac{1}{10} \times \frac{AB}{10} = \frac{AB}{100}.$$

Dílek gl obsahuje tedy stý díl přímky AB; délka BJ obnáší 10 takových dílků; pročež se na hořejší přímce EF rozdělovací body poznačí čísly 10, 20, 30, 40 . . . .

Délka F10 jest rovna BJ a obnáší 10 takových dílků, jako jest dílek jich gl; délka F20 obnáší 20 takových dílků; F30 obsahuje jich 30 . . . .

Udává-li AB zmenšenou délku metrovou, bude BJ $= ab = 0{\cdot}1$, dílek gl $= 0{\cdot}01$ zmenšené délky metrové.

Úlohy, kteréžto se měřídkem popříčným řešiti mohou.

1. Má se daná přímka změřiti. Má-li se měřídkem popříčným určitá délka vyměřiti, vezme se do kružidla; kružidlo se zasadí jedním ramenem v hořejším konečném bodu některé kolmice a hledí se pak, do kterého rozdělovacího bodu mezi E a F druhé rameno kružidla zapadá. Ku př.: Postavíme jedno rameno v bodu G a druhé zasahuj do bodíku 70. V tomto pádu obnášela by délka ta 170 takových dílků, jako jest dílek *gl*.

Pak-li ale druhé rameno do žádného hořejšího bodu mezi E a F nezapadá, posmyká se kružidlo jedním ramenem po kolmých přímkách dolů, tak daleko, až se druhé rameno s některou příčnou setká, ku př.: Jedno rameno stůj v bodu 5. kolmice DH a druhé v bodu *x;* v tomto případu měla by délka 265 takových dílků, jako jest dílek *gl*.

Jak z příkladu toho vidíme, udávají se *na měřídku popříčném* kolmicemi sta, příčnými desítky a rovnoběžkami jednotky.

Sestavte libovolně troj-, čtyr-, pěti-, šestiúhelník a vyhledejte měřídkem popříčným obměr úhelníků těch.

2. Má se určitá délka sestrojiti. Dle daného počtu vyšetří se kružidlem délka na měřídku a vnese se na přímku neurčitou.

Ku př.: Má se sestrojiti délka 200. Zasadí se kružidlo jedním koncem v bodu F a druhým v bodu H. Má-li se délka 240 sestrojiti, postaví se kružidlo jedním koncem v bodu H a druhým v bodíku 40.

Délka 258 vyhledá se takto: Jedno rameno kružidla zasadí se na kolmé 200 a sice na rovnoběžce 8; druhým se vyhledá příčná 50 a posmyká se po příčné té dolů až k bodu y na rovnoběžku 8.

Sestrojte délky 220, 280, 268, a sestavte z nich trojúhelník.

Sestrojte délky 214 a 167; větší sestrojte čtverec, z obou pak sestavte obdélník.

3. Má se vyhledati poměr délky dvou daných přímek. Vyhledá se dle úlohy 1. délka obou přímek. Vyhledaná čísla dají poměr přímek.

4. Má se daná přímka na rovné díly rozděliti. Vyhledá se na měřídku nejprve délka přímky té dle úlohy 1. Vyhledaný počet rozdělí se na tolik dílů, na kolik dílů se ona přímka rozděliti má. Podíl se pak vyhledá dle úlohy 2, ku př.: Měla se daná přímka rozděliti na 12 dílů. Délka její obnášej 156.

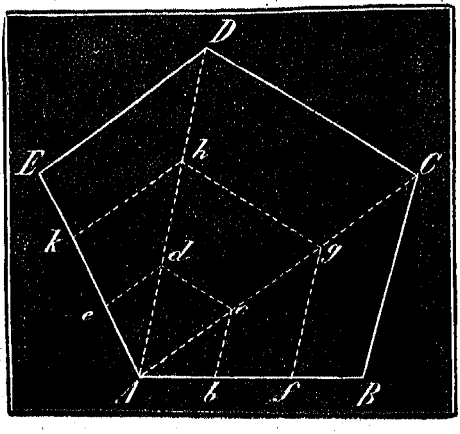
Dělí se tedy $156:12 = 13$.

Jeden dílek jest tedy 13; dílek tento se dle úlohy 2. na měřídku vyhledá a může se na přímku danou 12krát vnésti.

5. O podobnosti úhelníků.

1. Veďme v pětiúhelníku ABCDE (obr. 128.) úhlopříčny AC a AD; rozdělme stranu AB na tři rovné díly $Ab = bf = fB$, z bodu b a f veďme k straně BC rovnoběžky bc, fg, z bodu C a G k straně CD rovnoběžky cd a gh, z bodů d a h k straně DE rovnoběžky de, hk. Tímto způsobem vzniknou v pětiúhelníku ABCDE dva menší pětiúhelníky Abcde, Afghk. Všechny tyto pětiúhelníky mají společný úhel A a jelikož jdou strany bc, cd, de rovnoběžně se stranami fg, gh, hk a BC, CD, DE, jsou i ostatní stejnolehlé úhly sobě rovny.

Obr. 128.



Dáleť jestiť patrno, že se má $Ab : Af = 1 : 2$ a jelikož jde bc rovnoběžně se stranou fg, má se též

$$bc : fg = 1 : 2$$

taktéž se má

$$cd : gh = 1 : 2$$
$$de : hk = 1 : 2.$$

Z toho vysvítá, že jsou poměry stejnolehlých stran pětiúhelníků Abcde a Afghk sobě rovny.

Strany ty jsou tedy *srovnalé.*

Taktéž jest patrno, že se má:

Af : AB = 2 : 3, a poněvadž jde *fg* rovnoběžně se stranou BC, má se též:

fg : BC = 2 : 3
gh : CD = 2 : 3
hk : DE = 2 : 3 t. j.

Stejnolehlé strany pětiúhelníků Afghk a ABCDE jsou *srovnalé.*

Z toho vidíme, že mají pětiúhelníky ty stejný tvar a že se liší jen velkostí.

Úhelníky, kteréž mají stejný tvar, jmenují se *úhelníky podobné.*

Z předešlé úvahy vysvítá tedy tato věta:

U podobných úhelníků jsou stejnolehlé úhly rovné a strany stejnolehlé jsou srovnalé.

Všechny pravidelné úhelníky, jenž mají stejný počet stran, jsou si podobny (proč?).

Jak v obrazci 130. vidíme, jsou si trojúhelníky Abc, Afg, ABC podobny, pročež pravíme:

Úhelníky podobné rozdělují se stejnolehlými úhlopříčnami v podobné trojúhelníky.

Jelikož se má Ac: Ag = Ab : Af, praví se:

U podobných úhelníků mají se stejnolehlé úhlopříčny k sobě, jako stejnolehlé strany.

2. Pětiúhelníky Abcde, Afghk a ABCD jsou si podobny. Strany úhelníka Afghk jsou 2krát, strany úhelníka ABCDE jsou 3krát tak velké, jako jsou strany úhelníka Abcde; bude tedy i obměr úhelníka Afghk dvakrát, obměr úhelníka ABCDE třikrát tak velký, jako jest obměr úhelníka Abcde. Obměry ty budou se k sobě míti, jako čísla 1 : 2 : 3. V témž poměru jsou strany oněch úhelníků; pročež pravíme:

Obměry úhelníků podobných mají se k sobě jako stejnolehlé strany.

Jak už známo, mají se obsahy podobných trojúhelníků k sobě, jako druhé mocniny stran stejnolehlých. V pětiúhelníku Afghk jsou strany 2krát, v pětiúhelníku ABCDE 3krát tak velké, jako jsou strany pětiúhelníka Abcde. V pětiúhelníku Afghk jest každý trojúhelník 4krát, a v úhelníku ABCDE 9krát tak velký, jako jest stejnolehlý trojúhelník v úhelníku Abcde. Bude tedy i součet všech trojúhelníků v obrazci Afghk neb plocha úhelníka toho 4krát, plocha úhelníka ABCDE ale 9krát tak velká, jako jest plocha pětiúhelníka Abcde. Obsahy ty budou se k sobě míti jako čísla 4 : 9; tentýž poměr mají druhé mocniny stran stejnolehlých, protož pravíme:

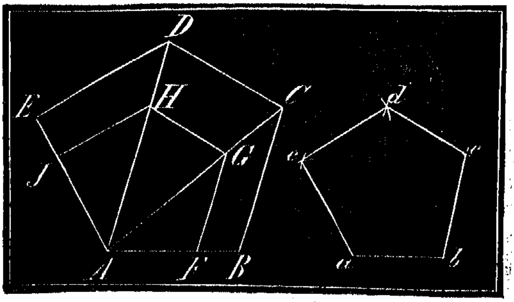
Obsahy úhelníků podobných mají se k sobě, jako druhé mocniny stejnolehlých stran.

3. Má se při straně *ab* sestrojiti úhelník tak, aby byl podobný úhelníku ABCDE (obr. 129.).

V daném úhelníku se vedou úhlopříčny AC, AD, od strany AB utne se z bodu A délka AF = ab, vedou se pak FG ∥ BC, GH ∥ CD, HJ ∥ DE. K úhelníku AFGHJ sestrojí se shodný abcde; úhelník tento podobá se úhelníku ABCDE.

Sestrojte libovolně čtyr-, pěti-, šestiúhelník. K úhelníkům těm sestrojte podobné a strany voltež v poměru 4 : 5, 5 : 7, 7 : 10.

Obr. 129.



Dodatek.

1. Když se v pravidelném úhelníku z přímek vrcholy se středem spojujících rovné částky buď ze středu aneb z vrcholů utnou a body rozdělovací spojí, vznikne tolikéžstranný podobný úhelník.

2. Když vedeme v úhelníku pravidelném z každého vrcholu úhlopříčny k dvěma nejbližším vrcholům, protnou se tyto úhlopříčny uvnitř obrazce a úseky jejich tvoří nový tolikéžstranný podobný úhelník.

3. Když v úhelníku pravidelném všechny strany, každou oběma konci prodloužíme až k průsekům, dají průseky ty, spojeny jsouce, nový podobný úhelník.

Proveďte úlohy tyto a sice v pravidelném šestiúhelníku, v pětiúhelníku.

Rozvrh obsahu.

Planimetrie.

I. přímkách.

II. O úhlu.

III. O trojúhelníku.