# GEOMETRIE

## PRO ÚSTAVY UČITELSKÉ.

SEPSAL

**KAREL DOMIN,**
ŘEDITEL C. K. ÚSTAVU KU VZDĚLÁNÍ UČITELŮ V PŘÍBRAMI

DRUHÉ, PŘEPRACOVANÉ VYDÁNÍ.

S 208 OBRAZY V TEXTU.

Cena 1 zl. 20 kr., vázaná v plátně 1 zl. 40 kr.



V HOŘE KUTNÉ.
TISKEM A NÁKLADEM KARLA ŠOLCE.
1894.

# OBSAH.

Strana



## Planimetrie.

### Část první.

#### O bodu, přímce kružnici a úhlu.



#### Dodatek k části prvé.



### Část druhá.

#### O mnohoúhelnících.

Strana

## Část třetí.

### O shodnosti mnohoúhelníků.



### Použití pouček o shodnosti.



## Část čtvrtá.

### O mnohoúhelnících obsahem rovných.



## Část pátá.

### O útvarech podobných.



## Část šestá.

### O kruhu.

## Část sedmá.

### O ellipse, hyperbole a parabole.



# Stereometrie.

## Část osmá.

### Přímky a plochy v prostoru.



## Část devátá.

### O tělesech.



### O mnohostěnech.



### Tělesa oblá.

Strana

### Tělesa kulatá.



### Dodatek.



## Část desátá.

### Úkoly k opakování.

# Úvod.

§. 1. **Část prostoru se všech stran omezená slove těleso.** Hledí-li se při omezené části prostoru též k látce, kterou tato část vyplněna jest (ke hmotě), jest to těleso fysické; nehledí-li se však k této prostor vyplňující hmotě a vlastnostem na ní závislým, nýbrž pozorují-li se pouze rozměry a podoba omezené části prostoru, jest to těleso měřické.

Velikost meze tělesa činí **povrch** jeho, a každá část povrchu slove **plocha.** Velikost meze plochy nazývá se **obvodem** a každá část obvodu jmenuje se **linie.** Meze linie jsou **body.**

Body, linie, plochy a tělesa jsou útvary prostorové, z nichž však pouze tělesa sama o sobě jako útvary samobytné se objevují. Plochy, linie a body nalézáme pouze na tělesech, nikde o sobě. — Mluví-li se v měřictví přece o bodu, linii a ploše o sobě, tu si je od těles odloučené představujeme.

Každé těleso má tři hlavní rozměry: délku, šířku a výšku (hloubku a tloušťku); plocha má toliko dva hlavní rozměry: délku a šířku a linie pouze jeden: délku.

Tělesa, plochy a linie dají se zvětšiti i zmenšiti a jsou proto veličiny prostorové. Bod jest útvar měřický bez rozměru a velikosti, není tedy veličinou.

§. 2. Veličiny prostorové mohou se utvořiti pohybem a nazývají se útvary měřické. Pohybem bodu vznikne linie, pohybem linie vzniknouti může plocha, pohybem plochy těleso. — Útvar měřický, jehož pohybem jiný útvar měřický vznikne, sluje útvar tvořící a zákon, dle něhož se útvar tvořící podle jiného daného útvaru pohyb řídícího (útvar řídící) pohybuje, sluje zákon výtvarný.

Pohybuje-li se bod (jako samobytný předpokládaný) v určitém stálém běhu, vytvoří linii přímou čili přímku. Může-li se bod z kteréhokoliv místa na ploše v této ploše kamkoli pohybovati, by běh pohybu jeho stanovil přímku, sluje tato plocha rovinou.

§. 3. Každá veličina prostorová dá se měřiti veličinou prostorovou s ní stejnorodou; linie linií, plocha plochou a těleso tělesem.

Číslo udávající, kolikkráte za jednotku považovaná veličina v dané veličině obsažena jest, jmenuje se číslo míry čili měrné číslo té veličiny.

§. 4. Při každé veličině prostorové rozeznáváme velikost, tvar či podobu a polohu její.

Útvary měřické téhož tvaru a téže velikosti lišiti se mohou pouze polohou a slují útvary shodné. Znaménko k označení shodnosti jest $\cong$.

Útvary téhož tvaru lišiti se mohou velikostí a polohou a jmenují se útvary podobné. Znaménko podobnosti jest $\sim$.

Útvary rozličného tvaru a nestejné polohy mohou se velikostí shodovati a slují útvary vzájemně rovné. K označení rovnosti útvarův užívá se znaménka rovnosti $=$. Shodné tvary jsou vzájemně rovny i podobny.

§. 5. **Nauka jednající o útvarech geometrických sluje měřictví či geometrie.**

Měřické útvary dělíme na rovinné a prostorné. Rovinným útvarem jest měřický útvar, jenž se do jediné roviny vměstnati dá, jako bod, přímá linie, některé křivé linie a rovina sama. — Prostorové útvary jsou měřické útvary, jež, byvše na rovinu položeny, s ní úplně se nesjednotí jako některé křivé linie (šroubovice), křivé plochy a všecka tělesa.

Jedná-li se v měřictví o útvarech rovinných anebo prostorových, rozděluje se měřictví na dvě větve: měřictví v rovině (planimetrie) a měřictví v prostoru (stereometrie).

# Planimetrie.

## Část první.

## O bodu, přímce, kružnici a úhlu.

### O bodu.

§. 6. Nejjednodušší útvar měřický jest bod. Body objevují se jako společné části dvou nebo několika linií, a jmenují se průsečíky, aneb na tělesech jako průsečíky hran a slují vrcholy.

O poloze bodu lze jen tehdy mluviti, když jsou alespoň dva na zřeteli, při čemž přihlížíme, jak jeden vzhledem k druhému umístěn jest.

Body, o jichž vzájemné poloze mluviti chceme, představujeme si jako vrcholy těles, anebo jako útvary samobytné, t. j. myslíme si v prostoru dvě určitá místa beze vší velikosti a beze všeho tvaru. Abychom o těchto bodech krátce mluviti mohli, pojmenujeme je různými písmeny malé abecedy (buď bez přípony nebo s příponou) anebo číslicemi.

O vzájemné poloze dvou bodů $a$ a $b$ pravíme, že jest bod $b$ v pravo nebo v levo vedle bodu $a$, nebo že jest bod $b$ nad nebo pod bodem $a$, a konečně, že jest bod $b$ v pravo či v levo nad anebo pod bodem $a$.

Vrcholy čtverce na stranu položeného označujeme dvěma přívlastky. Vrcholy ty jsou: hořejší pravý nebo levý, dolejší pravý nebo levý.

K označení vrcholů krychle slouží 3 přívlastky, jimiž vyznačeno jest, které stěně řečený vrchol náleží; na př. hořejší, přední, levý vrchol nebo dolejší, zadní, pravý vrchol atd.

§. 7. Zobrazení bodu děje se dotknutím tabule křídou, nebo papíru tužkou či pérem. Obraz bodu sluje tečka. Aby tečka bodu jí zobrazenému nejvíce se přibližovala, měj nejméně hmoty; aby však jemně kreslené tečky přece viditelny byly, dělá se kolem nich kroužek. K tečkám připisujeme táž písmena, která přísluší bodům, jichž obrazy jsou.

Při vyměřování pozemků vyznačují se důležitější body dřevěnými kolíky; často též tyčemi tracovacími aneb praporečky.

## O přímce.

§. 8. Bod roviny může se v této rovině nesčíslným množstvím stálých běhů pohybovati. Každý takovýto běh pohybu, jenž se nesmí měniti, stanoví běh přímky, jež se tímto pohybem vytvořila.

Soujem všech přímek, které týmž bodem procházejí, sluje rovinný **svazek paprsků**; každá přímka tohoto svazku jest **paprsek** a bod všem paprskům společný sluje střed svazku paprskového.

Poněvadž jakýkoli bod za střed svazku paprskového považovati můžeme, není (jedním) bodem přímka stanovena.

Je-li běh přímky, jakož i poloha pouze jednoho jejího bodu známa, jest tím i poloha přímky stanovena.

Zastaví-li se bod, přímku tvořící, ve svém pohybu ve vzdálenosti konečné, vytvořil přímku omezenou. Jen omezené přímky jeví se ve skutečnosti jako hrany těles.

Přímka omezená má dva krajní body, z nich jest jeden počáteční, druhý koncový bod.

Pohybem bodu s určitého místa v témže běhu až do nekonečna, vytvoří se přímá linie na jedné straně neomezená, která se paprskem nazývá. — Přímá linie, na obou stranách neomezená, sluje přímkou neomezenou. Nekonečně vzdálený bod přímky neomezené sluje její bod úběžný. Na dvou místech omezená část přímky neomezené sluje úsečka, či délka.

§. 9. Z ponětí o přímce plynou věty:

1. Jedním bodem není přímka stanovena.

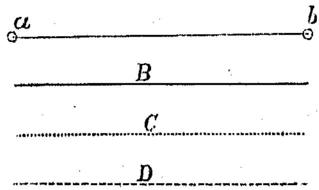
2. Dvěma body, nebo bodem a během svým jest přímka stanovena.

3. Přímka jest nejkratší vzdálenost dvou bodů (přímá cesta nejkratší).

4. Přímky, mající dva body společné, sjednocují se po celé své rozsáhlosti.

5. Dvě přímky mohou míti jediný bod společný. Tento dvěma přímým liniím společný bod jest jejich průsečík.

§. 10. Obraz přímky, totiž čára přímá, vznikne pohybem hrotu, péra či tužky po papíru, nebo křídy po tabuli v témže běhu. Aby při rýsování čára nejvíce přímce jí zobrazené odpovídala, musí se jemně rýsovati. Omezené přímé linii odpovídá též omezená čára; krajním jejím bodům krajní tečky, které se buď kroužky nebo kratičkými příčkami označují. Neomezené linie dá se na omezenou nákresnu toliko část zobraziti. Krajní body délky označují se písmeny, na př. *a* a *b*; potom se mluví o přímce *ab*. Neomezená přímka označuje se obyčejně jediným písmenem velké abecedy latinské.




Obr. 1.

Přímé čáry rýsují se rozličně, dle toho, jaký význam mají. Čáry dané aneb obrazy viditelných hran tělesa rýsují se tence a plně (přímka *ab*); výslednice rýsují se plně a rázně (přímka *B*). Obrazy neviditelných hran tělesa se tečkují (př. *C*). Čáry pomocné rýsují se tence a přetržitě.

Poznámka. Na poli označují se přímky provazem, řetězem anebo pásmem měřickým mezi dvěma kolíky napjatým, anebo stružkou dle napjatého řetězu nebo provazu udělanou; nejčastěji se však přímka pouze mezi dvěma kolíky nebo praporečky vytčenými body myslí. — Tesaři rýsují přímky pomocí šňůry rudkou zbarvené.

§. 11. Při délce *ab* (obr. 1.) můžeme buď bod *a* buď *b* za tvořící považovati. Bod *a* vytvoří přímku *ab* když běží přímo k bodu *b*; podobně ji vytvoří bod *b*, pohybuje-li se týmž během jako prve *a*, ale protivným směrem, t. j. od *b* k *a*. Jest viděti, že má každá přímka *jediný běh*, ale *dva směry*, z nichž jeden sluje *kladný*, druhý *záporný*. Oba směry jsou vzájemně *protivny*.

Jde-li kladný směr vzhůru, jde druhý dolů; jde-li jeden do předu, jde druhý do zadu, a jde-li prvý na pravo, jde druhý na levo.

§. 12. Při každé omezené přímce (úsečce, hraně, délce) přihlížíme nejen k její poloze, jejímu běhu a směru, nýbrž též k její *délce*.

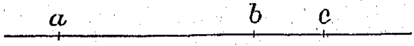
Délka přímky udává vzdálenosť jejích krajních bodů. Aby se dvě přímky co do délky srovnaly, klade se jedna na druhou, by se počátkové body kryly; kryjí-li se i koncové body, mají přímky *stejnou délku*, jinak jsou *nestejně dlouhé*.

Určujeme-li délku omezené přímky, říkáme, že ji měříme. Při tom bereme některou přímku známé velikosti za *jednotku* a zkoumáme, kolikkrát jest ve přímce, kterou měřiti máme, obsažena. Číslo, udávající poměr tento, slove *číslem míry* čili *měrným číslem* délky.

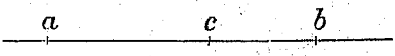
*Jednotkou míry délkové* jest *metr* (m). Metr dělí se na 10 *decimetrů* (dm), decimetr na 10 *centimetrů* (cm) a centimetr na 10 *millimetrů* (mm); 10 metrů jest *dekametr* (dkm), 100 metrů jest *hektometr* (hm), 1000 metrů jest *kilometr* (km) a 10000 metrů jest *miriametr* ($\mu$m).

Délky měřívají se *měřítky*, v přírodě (na poli) často *pásmem měřickým* a *řetězem měřickým*.

§. 13. Přímky, jako veličiny, lze podrobiti výkonům početním. Naměříme-li na omezené přímce od bodu $a$ (obr. 2.) až do bodu $b$ délku $ab$, od bodu $b$ až do bodu $c$ délku $bc$, odpovídá úsečka $ac$ součtu úseček $ab$ a $ac$. Koncový bod úsečky prvé jest počátečným bodem úsečky druhé.




Obr. 2.




Obr. 3.

$$ac = ab + bc \text{ (obr. 2.).}$$

Má-li se od délky $ab$ délka $bc$ odečísti, naměří se na neomezenou přímku napřed úsečka $ab$ (obr. 3.) a od jejího bodu koncového úsečka $bc$ ve směru opačném; potom jest:

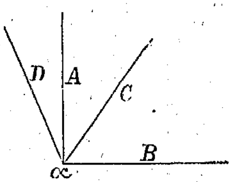
$$ac = ab - bc \text{ (obr. 3).}$$

Cvičení v sečítání odčítání, násobení a dělení (zkusmo) daných délek. —

§. 14. *Dle běhu* jsou přímky **svislé, vodorovné** nebo **šikmé**.

*Svislá* (vertikalní) přímka má běh niti, na níž volně visí závaží (olovnice). Čáry svislé kreslí se obyčejně ve stejném běhu s pravým anebo levým okrajem nákresny.

Čára $A$ (obr. 4.) jest obrazem přímky svislé. Volně padající těleso pohybuje se během svislým.



Obr. 4.

Přímka, mající běh hůlky na klidné vodě plovoucí, jmenuje se vodorovná. Přímka vodorovná značí se na papíře neb na tabuli čarou, která má týž běh jako horní a dolní okraj nákresny (čára $B$ obr. 4.).

Přímka, která není ani svislá ani vodorovná, jest šikmá. Přímka šikmá jest buď na pravo nebo na levo nakloněna.

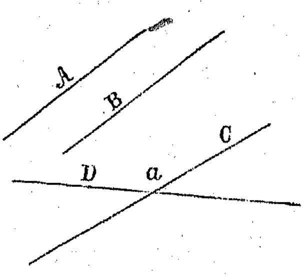
Otáčí-li se svislá přímka $A$ (obr. 4.) kolem svého spodního bodu krajního $\alpha$, zove se v každé poloze v pravo od polohy původní se nalézající, přímkou šikmou v pravo nakloněnou a v každé poloze od polohy $A$ v levo se nalézající, přímkou šikmou v levo nakloněnou. V obr. 4. jest tedy čára $C$ obrazem přímky šikmé v pravo a čára $D$ obrazem přímky šikmé v levo nakloněné.

Běh svislý určuje se ve skutečnosti šňůrou, na které závaží visí (olovnicí), a běh vodorovný krokvicí nebo libellou.

Poznámka. Při obyčejné poloze našeho papíru není ovšem obraz svislé linie svislý a šikmé linie šikmý, nazývá se tudíž chybně přímkou svislou neb šikmou. Aby obraz odpovídal skutečnému běhu přímé linie, musela by se nákresna postaviti do polohy příslušné.

§. 15. Dvě přímky, ležící v téže rovině, protínají se, byvše náležitě prodlouženy, vždy v jediném bodu, který jich průsečíkem se zove. Průsečík jest buď ve vzdálenosti konečné, buď nekonečné. Přímky, mající týž běh, protínají se vždy ve vzdálenosti nekonečné, jich průsečík slove bod úběžný. Přímky téhož běhu zovou se rovnoběžky. Rovnoběžky (jako $A$ a $B$ obr. 5.) jsou od sebe všude stejně vzdáleny. Znaménko rovnoběžnosti jest $||$, a značíme $A || B$.

Dvě přímky různého běhu protínají se v bodu konečném, a slují různoběžky ($C$ a $D$ obr. 5.). Hledíme-li ku směru různoběžek, pozorujeme, že směřují buď obě ku společnému bodu (k průsečíku $a$ obr. 5.), a slovou sbíhavými (convergent); anebo směřuje každá jinam z bodu tohoto, a pak slovou rozbíhavými (divergent).

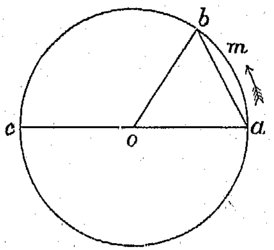


Obr. 5.

Z pojmu o rovnoběžkách a různoběžkách plyne:

1. Přímky svislé jsou vždy rovnoběžny.
2. Přímky vodorovné, v téže svislé nebo šikmé rovině ležící, jsou rovnoběžny.
3. Je-li jedna ze dvou rovnoběžek svislá neb vodorovná, jest druhá též svislá neb vodorovná.
4. Daným bodem lze k dané přímce pouze jedinou rovnoběžku rýsovati.
5. Je-li každá ze dvou rovnoběžek rovnoběžna k téže linii třetí, jsou všecky tři vespolek rovnoběžny.

## O kružnici.



Obr. 6.

§. 16. Otáčí-li se délka *oa* v rovině kolem svého krajního bodu *o*, až přijde opět v původní svou polohu, opisuje bod *a* křivku, kterou nazýváme kružnicí (obr. 6.). Všecky body kružnice mají tudíž tutéž vzdálenost od uvnitř ležícího bodu *o*. Tento bod slove střed (centrum).

Každá poloha pohyblivé délky ku př. *oa*, *ob*, *oc* jmenuje se poloměr (radius) kružnice.

Délka *ab*, spojující dva body kružnice, slove tětiva (chorda). Tětiva, procházející středem, sluje průměr (diametr) kružnice. Každá část kružnice, jako *amb*, slove oblouk (arcus). Kružnicí omezená část roviny sluje kruh, délka celé kružnice obvod obměr či peripherie kruhu. Polovice kružnice zove se polokružnicí, čtvrtina kružnice čtverníkem (kvadrantem).

Z toho, co posud o kružnici řečeno bylo, plyne:

1. Kružnice jest rovinná křivka, jejíž veškeří bodové od určitého, v též rovině se nalézajícího bodu jsou rovně vzdáleny.
2. Všecky poloměry téže kružnice jsou si rovny.
3. Každý průměr jest roven dvojnásobnému poloměru.
4. Všecky průměry téže kružnice jsou si rovny.

§. 17. Rozdělí-li se kružnice na 360 rovných dílů, zove se každý díl stupněm obloukovým (°). Stupeň obloukový jest jednotkou míry obloukové. Stupeň obloukový má **60 minut** obloukových (′) a každá minuta oblouková má **60 sekund** (″) obloukových.

Stupně, minuty a sekundy obloukové nejsou u všech kružnic stejny; kružnice (nebo oblouk), s větším poloměrem má stupně, minuty i sekundy delší.

**Úkoly.** 1. Kružnice má 270 cm; jak dlouhý jest její oblouk, jenž má *a*) $24^\circ$, *b*) $14^\circ\,15'$, *c*) $128^\circ\,36'\,45''$?

2. Oblouk $12^\circ\,50'$ má 281 cm; jak dlouhá jest kružnice?

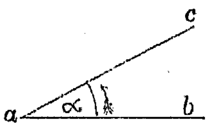
3. Rovník má 40070 km; jak dlouhý jest oblouk $1^\circ$?

4. $64^\circ$ oblouk jest o 6 cm delší než oblouk $48^\circ$; vypočítati délku kružnice.

5. $\frac{1}{8}$ kružnice jest o 15 m kratší než její $\frac{1}{5}$ jak dlouhý jest oblouk $54^\circ$.

## O úhlu.

§. 18. **Úhel jest část roviny, omezená dvěma paprsky v společném počátku.**




Obr. 7.

Počátek *a* jest **vrcholem**, paprsky *ac* a *ab* **rameny** úhlu.

V písmě znamená se úhel několika způsoby a to:

1. Označí a vysloví se pouze písmeno při vrcholu a před ně napíše se znaménko $\sphericalangle$. Úhel v obr. 7. jest tedy úhel $\sphericalangle a$.

2. Označí se úhel jediným písmenem (obyčejně malé abecedy řecké, jako $\alpha$ obr 7.), které se mezi ramena úhlu blíže vrcholu píše.

3. Označí se třemi písmeny, z nichž jest jedno u vrcholu a ostatní při ramenech. Písmeno u vrcholu píše a vyslovuje se vždy uprostřed; v obr. 7. tedy buď $\sphericalangle bac$ neb $\sphericalangle cab$.

§. 19. **Úhel nezávisí na délce svých ramen,** nýbrž pouze na rozdílu jejich běhu.

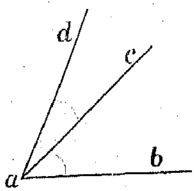
Otočí-li se (obr. 7.) paprsek *ab* kolem vrcholu *a* do polohy *ac* směrem šípem naznačeným, vznikne $\sphericalangle \alpha$.

Úhel $\alpha$ udává rozdíl běhu svých ramen. Proto praví se, že jest úhel odchylkou běhu dvou různoběžek.

Úhly, které lze sjednotiti, jsou rovny.

Otočí-li se rameno *ac* úhlu *cab* (obr. 8.) o úhel *dac*, takže přijde do polohy *ad*, jest

$$\sphericalangle dab = dac + cab.$$



Obr. 8.

Otočíme-li však v úhlu *dab* rameno *ad* kolem vrcholu *a* do polohy *ac*, jest

$$\sphericalangle\ cab = dab - dac.$$

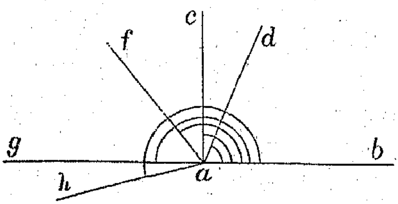
Úhly jako veličiny dají se podrobiti výkonům početním.

Jak se sečítají, odčítají, násobí a dělí (zkusmo) úhly? —

§. 20. Roztřídění úhlů. Točí-li se paprsek kolem svého krajního bodu, přijde po řadě do všech běhů, které v rovině z tohoto bodu možny jsou, a tvoří s původním během svým veškeré, kolem daného bodu možné úhly. Vykoná-li točící se paprsek čtvrtinu úplného otočení, vznikne úhel **pravý**.

Všecky úhly pravé jsou sobě rovny. Pravý úhel značí se obyčejně písmenem $R$.

Úhel, k jehož vytvoření méně než čtvrt úplného otočení třeba jest, jmenuje se úhel **ostrý**; úhel pak, k jehož vytvoření více nežli čtvrt, ale méně než půl úplného otočení třeba jest, jmenuje se úhel **tupý**. Ostrý úhel jest tedy menší a tupý větší než úhel pravý, oba slovou úhly **kosé**. V obr. 9. jest $\sphericalangle\ cab$ pravý, $\sphericalangle\ dab$ ostrý, a $\sphericalangle\ fab$ tupý.



Obr. 9.

Vykoná-li pohyblivý paprsek polovici celého otočení, přijde ve směr protivný původnímu směru svému. Takto vzniklý úhel jmenuje se **přímý**. Ramena úhlu přímého mají týž běh, ale protivné směry. Úhel přímý rovná se dvěma pravým.

$$\sphericalangle\ bag = 2R \text{ (obr. 9.)}.$$

**Všecky úhly přímé jsou sobě rovny.**

Úhel menší nežli přímý jmenuje se **dutý**, úhel větší nežli přímý slove **vypuklý**. V obr. 9. jest $\sphericalangle\ baf$ dutý, $\sphericalangle\ bah$ vypuklý.

Úplným otočením dostane se paprsek do prvotné polohy své. Úhel tímto otočením vzniklý jmenuje se **úhel plný**. Jeho ramena padají v jedno. Plný úhel $= 4R$.

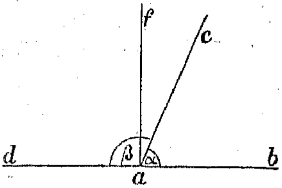
Dva úhly, jichž součet se rovná úhlu pravému, slovou doplňkové (complementarní), a dva úhly, jichž součet se rovná úhlu přímému, slují výplňkové (supplementarní).

§. 21. **Úhly stýkavé a vedlejší.** Úhly, které mají společný vrchol i společné jedno rameno a leží ostatně jeden mimo druhý, slovou úhly stýkavé. V obr. 8. jsou $\sphericalangle$ *cab* i $\sphericalangle$ *dac* úhly stýkavé.

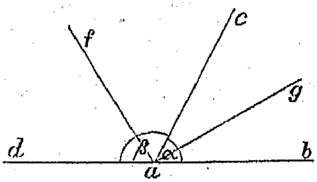
Dva úhly stýkavé, které jsou zároveň úhly výplňkovými, slovou úhly vedlejší. V obr. 10. jsou $\sphericalangle \alpha$ i $\sphericalangle \beta$, jakož $\sphericalangle$ *fab* a $\sphericalangle$ *fad* úhly vedlejší. Vedlejší úhly mají tudíž společný vrchol, společné jedno rameno a jich druhá ramena mají týž běh, ale protivné směry.

**Součet dvou úhlů vedlejších rovná se úhlu přímému nebo dvěma pravým.**

$$\sphericalangle \alpha + \beta = 2R; \ \sphericalangle fad + fab = 2R \text{ (obr. 10).}$$




Obr. 10.




Obr. 11.

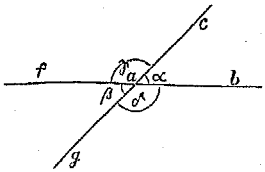
V obr. 11. zobrazeny jsou 4 úhly stýkavé, jejichž součet $= 2R$.

§. 22. **Kolmice.** Přímka *af* (obr. 10.) od přímky *ab* o pravý úhel odchýlená, slove na ní kolmou nebo krátce kolmicí.

Znaménko kolmosti jest $\perp$. Přímka $af \perp ab$ (obr. 10.), je-li úhel $fab = R$. Co do správné mluvy pamatovati sobě sluší tyto dva způsoby proslovení: V bodě přímky vztyčujeme kolmici na tuto přímku a s bodu mimo přímku ležícího spouštíme na přímku kolmici. V obr. 10. jest tedy v bodě *a* na přímku *bd* vztyčena kolmice *af*.

Jsou-li dva úhly vedlejší vzájemně rovny, jest každý z nich polovicí úhlu přímého, tedy $\sphericalangle$ pravý. V tomto případu jest společné rameno kolmé na ramenech ostatních. **Uzavírá-li tedy přímka s jinou přímkou dva rovné úhly vedlejší, jest na ní kolmá.**

**Má-li přímka jinou odchylku od druhé přímky než úhel pravý, je k ní nakloněna.**




Obr. 12.

§. 23. **Úhly vrcholové.** Prodloužíme-li obě ramena úhlu *cab* (obr. 12.) za vrchol, vznikne úhel *fag*, jenž slove jeho úhlem vrcholovým. Vrcholové úhly mají společný vrchol a ramena jejich sjednocují se ve dvou přímkách, majíce při tom směr protivný. $\sphericalangle \alpha$ a $\beta$, $\gamma$ a $\delta$ jsou úhly vrcholové.

**Úhly vrcholové jsou si rovny.**

Důkaz: $\sphericalangle \alpha + \gamma = 2R.$ proto: $\sphericalangle \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ aneb
$\sphericalangle \beta + \gamma = 2R.$ $\sphericalangle \alpha = \beta.$

Týmž způsobem se dokáže, že $\sphericalangle \gamma = \delta$.

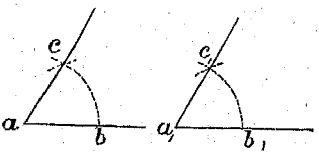
§. 24. **Měření úhlu.** Jednotkou míry úhlové jest stupeň ($^\circ$), t. j. 360tina úhlu plného. Stupeň dělí se na 60 minut ($'$), minuta na 60 sekund ($''$).

Kolik stupňů má úhel přímý, pravý, tupý a ostrý?

Otáčí-li se délka *oa* (obr. 6.) kolem svého krajního bodu *o*, opíše bod *a* kružnici; kterákoliv poloha otáčecí přímky svírá s původní polohou *oa* úhel. Úhel ten sevřen jest dvěma poloměry a jeho vrchol jest ve středu. Dvěma poloměry sevřený úhel slove **úhel středový.**

Rozdělí-li se plný úhel středový na 360 rovných dílů (stupňů úhlových), dělí ramena těchto úhlů i obvod kruhu (tedy kružnici) na 360 rovných oblouků, z nichž jest každý stupněm obloukovým. Stupni úhlovému odpovídá tedy stupeň obloukový; podobně odpovídá minuta úhlová minutě obloukové a sekunda úhlová sekundě obloukové. Vyjadřuje proto počet stupňů, minut a sekund obloukových také počet stupňů, minut a sekund úhlu středového. V tom smyslu říká se, že oblouk kružnice jest mírou příslušného úhlu středového. Na měření úhlu obloukem kružnice zakládá se zařízení úhloměru (transporteru, přenášeče).

Zařízení úhloměru, přenášení a měření úhlů úhloměrem.




Obr. 13.

Kterak rýsuje se úhel, jenž rovná se danému úhlu, jest patrno na obr. 13. Kdyby byl daný úhel tupý, přenesl by se svým ostrým úhlem výplňkovým.

**Úkoly.** 1. Kolik stupňů má úhel sevřený rafiemi hodin, ukazují-li tyto *a*) $5\frac{1}{4}$ hod. *b*) 7 hod. 20 min. *c*) 9 hod. 40 min.?

2. $\frac{2}{3}\alpha = 27^\circ\, 26'\, 16''$, $\frac{3}{5}\beta = 30^\circ\, 43'\, 12''$; vypočítati jest $a)$ $\sphericalangle\, \alpha + \beta$, $b)$ $\sphericalangle\, 3\alpha - 2\beta$, $c)$ $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}$.?

3. $\frac{\alpha}{2} = 52^\circ\, 18'\, 43''$; $\frac{3}{7}\beta = 32^\circ\, 24'\, 48''$; čemu rovná se $a)$ $\alpha - \beta$, $b)$ $\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta$, $c)$ $2\alpha + \frac{\beta}{4}$.?

4. $^3/_4$ úhlu jsou o $5^\circ\, 23'$ větší než jeho $^2/_3$; který jest to úhel?

5. Kterého úhlu $^7/_8$ jsou o $3^\circ$ větší než jeho $^5/_6$?

6. Zmenší-li se daný úhel o svou třetinu, má jeho vedlejší úhel $131^\circ\, 40'$. Jak jest velký?

7. Ze dvou úhlů vedlejších jest druhý $a)$ o $37^\circ$ $b)$ o $40^\circ\, 30'$ větší než první. Jak jsou velké?

8. Ze 2 úhlů vedlejších rovná se druhý $a)$ $\frac{5}{7}$ $b)$ $\frac{11}{9}$ prvého; kolik stupňů má každý?

9. Ze 4 úhlů, které vzniknou kolem průsečíku 2 přímek jest $\sphericalangle\, \alpha = 32^\circ\, 54'\, 28''$; vypočítati ostatní.

10. Ze 3 stýkavých úhlů $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ jest $\alpha = 23^\circ\, 15'\, 28''$; $\beta$ jest o $9^\circ\, 13'\, 42''$ větší než $\alpha$ a $\gamma$ rovná se arithmetickému průměru ostatních 2 úhlů $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$. Jak velký jest každý z nich a jak velký úhel $\delta$, jenž doplňuje řečené 3 úhly na přímý úhel?

11. Ze 4 stýkavých úhlů, jež tvoří dohromady úhel přímý, jest každý následný o $a)$ $12^\circ$ $b)$ $20^\circ$ $c)$ $15^\circ$ větší než předcházející. Jak velký jest každý?

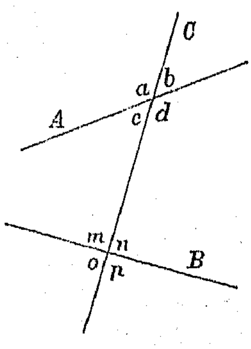
12. Z 5 stýkavých úhlů, jež činí dohromady úhel plný, jest každý následný úhel o $8^\circ$ větší než úhel předcházející. Jak velký jest každý?

§. 25. **Úhly na příčce.** Protíná-li přímka jiné dvě přímky téže roviny, vznikne kolem obou průsečíků 8 úhlů.

Tyto úhly dělíme vzhledem k přímce protínající, jež sluje příčka, ($C$ obr. 14.) na

$\alpha)$ úhly přilehlé, které na téže straně příčky $C$ položeny jsou; na př. $\sphericalangle\, b$ a $p$, $\sphericalangle\, a$ i $m$, $\sphericalangle\, c$ a $o$,

$\beta)$ úhly střídavé, které na protivných stranách příčky $C$ leží; na př. $\sphericalangle\, a$ a $n$, $\sphericalangle\, m$ a $b$, $\sphericalangle\, c$ a $p$, $\sphericalangle\, d$ i $o$.



Obr. 14.

Vzhledem ku přímkám proťatým $A$ a $B$ rozvrhujeme úhly ty na:

*a*) úhly souhlasné, ležící na souhlasných, t. j. buď hořejších neb dolejších stranách přímek proťatých; na př. $\sphericalangle a$ a $m$, $\sphericalangle c$ a $o$, $\sphericalangle n$ a $b$, $\sphericalangle b$ a $m$, $\sphericalangle c$ a $p$.

*b*) úhly vnitřní, které na vnitřních stranách přímek proťatých leží; na př. $\sphericalangle c$ a $n$, $\sphericalangle d$ a $m$, $\sphericalangle c$ a $m$, $\sphericalangle n$ a $c$, $\sphericalangle n$ a $d$.

*c*) úhly vnější, ležící na vnějších stranách přímek proťatých; na př. $\sphericalangle b$ a $o$, $\sphericalangle a$ a $o$, $\sphericalangle b$ a $p$, $\sphericalangle a$ a $p$.

Vzhledem ku všem třem přímkám $A$, $B$, $C$ (obr. 14.) rozeznáváme:

*a*) úhly přilehlé:
- souhlasné $\sphericalangle b$ a $n$, $\sphericalangle d$ a $p$, $\sphericalangle a$ a $m$, $\sphericalangle c$ a $o$
- vnitřní $\sphericalangle d$ a $n$, $\sphericalangle c$ a $m$
- vnější $\sphericalangle b$ a $p$, $\sphericalangle a$ a o

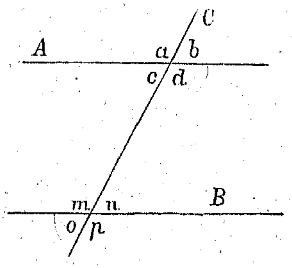
*b*) úhly střídavé:
- souhlasné $\sphericalangle a$ a $n$, $\sphericalangle b$ a $m$, $\sphericalangle c$ a $p$, $\sphericalangle d$ a $o$
- vnitřní $\sphericalangle c$ a $n$, $\sphericalangle d$ a $m$
- vnější $\sphericalangle a$ a $p$, $\sphericalangle b$ a $o$.

Předpokládejme, že jsou přímky proťaté ($A$ a $B$ v obr. 15.) rovnoběžny; potom jsou:

1. **souhlasné úhly přilehlé** a
2. **vnější i vnitřní úhly střídavé mezi sebou rovny. Mimo to doplňují se**
3. **vnitřní i vnější úhly přilehlé** a
4. **souhlasné úhly střídavé na dva pravé.**

Důkaz: Přímky $A$ a $B$ mají týž běh. Poněvadž u souhlasných úhlů přilehlých i směry ramen jsou stejny, neliší se tyto úhly než polohou a jsou proto sobě rovny.

$$1.\ \sphericalangle a = m, \qquad \sphericalangle c = o,$$
$$\sphericalangle b = n, \qquad \sphericalangle d = p.$$



Obr. 15.

Rovností souhlasných úhlů přilehlých dokáže se rovnost střídavých úhlů vnějších i vnitřních takto:

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle m = p \\ \sphericalangle n = o\end{array}\right\}$$ jakožto úhly vrcholové.

Tudíž jest:

$$2.\ \sphericalangle a = p, \qquad \sphericalangle c = n,$$
$$\sphericalangle b = o, \qquad \sphericalangle d = m.$$

$\sphericalangle a + c = 2R$, protože jsou úhly vedlejšími, a poněvadž úhly $c$ a $o$, jakožto souhlasné úhly přilehlé, sobě rovny jsou, jest i:

$$\sphericalangle a + o = 2R,\quad b + p = 2R,\quad c + m = 2R,\quad d + n = 2R.$$

Podobně se dokáže, že

$$\sphericalangle a + n = 2R,\quad \sphericalangle b + m = 2R,\quad \sphericalangle c + p = 2R,\quad \sphericalangle d + o = 2R.$$

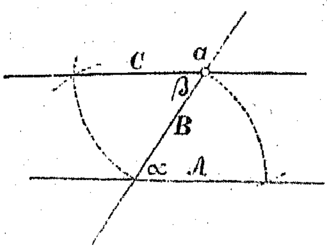
Z poučky této vychází:

**Kdykoli protíná přímka jiné dvě přímky tak, že jsou buď dva souhlasné úhly přilehlé, neb dva vnitřní či vnější úhly střídavé sobě rovny, aneb že se doplňují buď dva vnější či vnitřní úhly přilehlé anebo dva souhlasné úhly střídavé na dva pravé: jest i všem ostatním dříve uvedeným podmínkám vyhověno a přímky proťaté jsou rovnoběžny.**

Na těchto větách zakládá se rýsování rovnoběžek trojúhelníkem na jiném pravítku pošinutelném; podobně i rýsování rovnoběžek přiložným pravítkem.

**Úkoly:** 1. K dané přímce $A$ rýsovati tečkou $a$, mimo přímku položenou, rovnoběžku.

Úkol tento řešiti se může rozličnými způsoby. Třeba pouze narýsovati buď dva úhly souhlasné přilehlé, buď dva vnitřní neb vnější úhly střídavé, aby byly sobě rovny.



Obr. 16.

2. Z úhlů v obr. 15. jest

$$\sphericalangle a = 126^\circ\, 15'\, 37'',$$

vypočítati úhly ostatní.

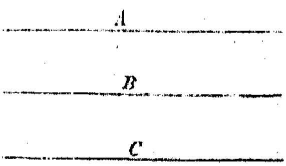
3. V obr. 15. rovnej se

$$\sphericalangle o = \frac{7}{13}\, d;$$

vypočítati úhly ostatní.

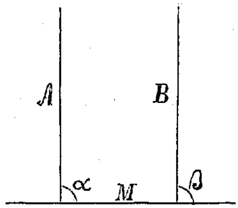
§. 26. **Věta základná. Bodem lze pouze jedinou rovnoběžku k dané přímce rýsovati.**

**Následek: Je-li každá ze dvou přímek rovnoběžna k téže přímce třetí, jsou též spolu rovnoběžny.**



Obr. 17.

Důkaz: Je-li v obr. 17. $A \| C$ a $B \| C$, musí i $A \| B$. Kdyby nebyla $A \| B$ protínaly by se, náležitě jsouce prodlouženy, v určitém bodu. Tímto bodem by však potom byly ku $C$ dvě rovnoběžky možny, což dle hořejší věty není možno.


Obr. 18.

**Kolmice, na téže přímce vztýčené jsou spolu rovnoběžny.**

Předpokl. $A \perp M$ a $B \perp M$ (obr. 18.)

Tvrzení. $A \| B$.

Důkaz: Poněvadž $A \perp M$, jest $\sphericalangle \alpha = R$; a poněvadž $B \perp M$, jest $\sphericalangle \beta = R$; tudíž úhel $\alpha = \beta$, proto musí dle §. 25. $A \| B$.

**Je-li jedna ze dvou rovnoběžek na přímce kolmá, jest i druhá rovnoběžka na této přímce kolmá.** (Obrácení poučky předešlé.) —

Předpokládání. $A \perp M$ a $A \| B$.

Tvrzení. $B \perp M$.

Důkaz: Poněvadž $A \| B$, jest $\sphericalangle \alpha = \beta$; jelikož $A \perp M$, jest $\sphericalangle \alpha = R$; tudíž i

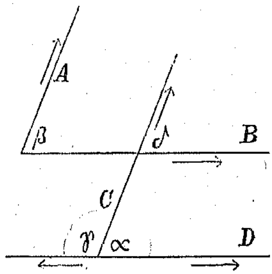
$$\sphericalangle \beta = R, \text{ t. j. } B \perp M.$$

**S bodu mimo přímku ležícího, možno toliko jedinou kolmici na tuto přímku spustiti.**

Důkaz nepřímý. Kdyby bylo lze s bodu mimo přímku ležícího, na tuto přímku, více než jednu kolmici spustiti, byly by tyto kolmice rovnoběžny, což není možno, poněvadž mají společný bod.

**V bodu přímky lze jedinou toliko kolmici vztyčiti.**

Důkaz jako při poučce předešlé.


Obr. 19.

§. 27. Budiž v obr. 19. $A \| C$ a $B \| D$, potom jsou $\sphericalangle \alpha$ i $\beta$ úhly, jichž ramena mají týž běh i směr. Každý z nich jest roven $\sphericalangle \delta$, proto i $\sphericalangle \alpha = \beta$.

Budiž v obr. 20. $M \| O$ a $N \| P$, potom jsou $\alpha$ i $\beta$ úhly, jichž rovnoběžná ramena mají týž běh ale protivné směry; každý jest roven $\sphericalangle \delta$, proto jest i zde $\sphericalangle \alpha = \beta$.

Z toho plyne:

**Úhly, jichž ramena mají týž běh a směry buď protivné anebo tytéž, jsou si rovny.**

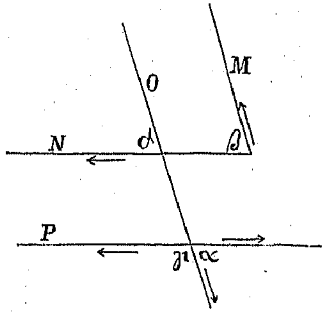
(Úhly, jichž ramena jsou vzájemně rovnoběžná, jsou si rovny, jsou-li oba tupé neb ostré.)

V obr. 19. i 20. jest

$$\sphericalangle \alpha + \gamma = 2R$$

proto i $\sphericalangle \beta + \gamma = 2R$ t. j.:

**Úhly, jichž oboje ramena mají týž běh, ale jedna z nich směr souhlasný a druhá směr protivný, doplňují se na $2R$.**




Obr. 20.

§. 28. Buď v obr. 21. $C \perp A$ a $D \perp B$. Předpokládejme, že jsou ramena úhlu $\beta$ nehybně spojena, a že se otočí $\sphericalangle \beta$ o $90^0$ ve směru šípem naznačeném okolo svého vrcholu $b$.

Potom jest

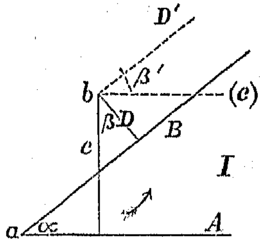
$$\sphericalangle \beta + \sphericalangle [D(C)] = \sphericalangle [D(C)] + \beta^1 = R,$$

tudíž

$$\sphericalangle \beta = \beta'.$$

Ramena úhlu $\beta^1$ jsou $||$ s rameny úhlu $\alpha$, tudíž

$$\sphericalangle \alpha = \beta' \text{ a též}$$
$$\sphericalangle \beta = \alpha.$$




Obr. 21.

Podobně dokázati lze rovnost dvou úhlů tupých s rameny vzájemně kolmými.

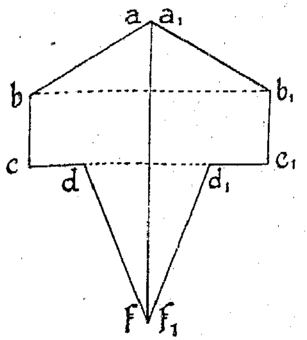
**Dva úhly se vzájemně kolmými rameny jsou si rovny, jsou-li oba buď ostré neb oba tupé.**

---

# Dodatek k části prvé.

## O souměrnosti.

§. 29. Oklopíme-li čáru $abcdf$ kolem $af$ do polohy $a_1 b_1 c_1 d_1 f_1$ (obr. 22.), slovou body $a$ a $a_1$, $b$ a $b_1$ $c$ a $c_1$ . . . . souměrně sdruženými body dle osy $af$.; podobně jsou přímky $ab$ a $a_1 b_1$, $bc$ a $b_1 c_1$ . . . . a též těmito přímkami sevřené úhly a jimi omezené plochy souměrně sdružené čili prostě souměrné.




Obr. 22.

Souměrné útvary obdržeti lze otisknutím tvaru, inkoustem na list papíru nakresleného, na druhou polovici tohoto listu.

Z názoru na obrazec plyne:

1. Přímka, jež spojuje dva souměrné body, jest na ose souměrnosti kolmá a jest jí půlena.

(Souměrné body jsou od osy rovně vzdáleny.)

2. Bod osy jest samodružným t. j. sjednocuje se se svým bodem souměrným.

3. Je-li přímka k ose nakloněna, jest i její souměrně sdružená přímka k ose nakloněna.

4. S kolmicí k ose jest opět kolmice souměrně sdružena.

5. S rovnoběžkou k ose sdružena jest od osy rovně vzdálená rovnoběžka.

6. souměrné útvary (úsečky, úhly, plochy) jsou shodné; jeden od druhého liší se pouze polohou.

Cvičení v zobrazování tvarů souměrných.

## Část druhá.

# O mnohoúhelnících.

### O trojúhelníku.

§. 30. Třemi úsečkami dokonale omezená část roviny slove **trojúhelník.** Úsečky tyto jsou **strany**, jejich krajní body **vrcholy** a stranami sevřené úhly jsou **vnitřní úhly** trojúhelníku (obr. 23.).

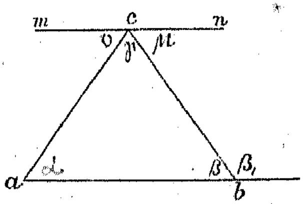
V trojúhelníku leží naproti každé straně úhel a naproti úhlu strana. Ku každé straně přiléhají dva úhly (**úhly přilehlé**); třetí úhel jest **protilehlý**.

Prodlouží-li se strana trojúhelníku za vrchol, vznikne u každého vnitřního úhlu ještě jeden úhel, který sluje **úhel vnější**. Vnější úhel sevřen jest stranou trojúhelníku a prodlouženou její stranou sousední ($\sphericalangle\ \beta_1$ obr. 23.).

U každého vrcholu mohou býti 2 vnější úhly rovně velké. Obyčejně přihlíží se však pouze k jednomu vnějšímu úhlu při každém vrcholu. Trojúhelník má tedy 3 vnější úhly, jež vzniknou, prodlouží-li se jeho strany všecky v témže směru.

§. 31. **O úhlech v trojúhelníku.**

1. **Součet vnitřních úhlů každého trojúhelníku** $= 2R$.



Obr. 23.

učiň . . . $mn \parallel ab$; potom

jest $\sphericalangle\ \mu = \beta$ (proč?)

$\sphericalangle\ \nu = \alpha$

poněvadž $\sphericalangle\ \nu + \gamma + \mu = 2R$,

jest též $\sphericalangle\ \alpha + \gamma + \beta = 2R$.

Následky: *a) V trojúhelníku může býti jen jeden úhel pravý nebo tupý.*

*b) Je-li v trojúhelníku jeden úhel pravý, jest součet ostatních též pravému roven.*

*c) Mají-li dva trojúhelníky po dvou úhlech střídavě sobě rovných, jsou si i třetí jejich úhly střídavě rovny.*

*d) Jsou-li dva úhly v trojúhelníku známy, dá se třetí vypočítati.*

Dle velikosti úhlů rozeznáváme trojúhelník:

1. pravoúhlý, v němž jeden úhel jest pravý;
2. tupoúhlý, v němž jest jeden úhel tupý;
3. ostroúhlý, v němž všecky tři úhly jsou ostré.

Trojúhelníky ostro- a tupoúhlé slovou též kosoúhlými.

V trojúhelníku pravoúhlém slují strany, pravý úhel svírající, odvěsny, a strana, proti pravému ležící, přepona.

2. **V každém trojúhelníku rovná se úhel vnější součtu obou mu protilehlých úhlů vnitřních** (obr. 23.).

$\sphericalangle \beta + \beta_1 = 2R$ — jako vedlejší úhly.
$\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma = 2R$ — jako úhly v trojúhelníku, tedy i
$\sphericalangle \beta + \beta' = \alpha + \beta + \gamma$, z čehož plyne, že
$\sphericalangle \beta' = \alpha + \gamma$.

3. **V každém trojúhelníku jest součet vnějších úhlů** $= 4R$.

Každý vnitřní úhel se sousedným úhlem vnějším $= 2R$. Součet všech vnitřních i vnějších úhlů $= 6R$. Poněvadž součet vnitřních úhlů $= 2R$, zbývají na součet všech vnějších úhlů $4R$.

**Úkoly.** V následujících úkolech jsou $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ úhly vnitřní a $\alpha_1$, $\beta_1$ $\gamma_1$ příslušné úhly vnější. Vypočítati všecky úhly (vnitřní i vnější), je-li

1. $\alpha = 57^0\ 14'\ 29''$, $\beta = 65^0\ 43'\ 52''$,
2. $\alpha = 127^0\ 52'\ 16''$, $\beta = 26^0\ 19'\ 4''$,
3. $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$; 4. $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$;
5. $\alpha : \beta : \gamma = 8 : 9 : 10$; 6. $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 7 : 8 : 9$; 7. $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 4 : 7 : 9$.
8. $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 8 : 9 : 13$.
9. $\sphericalangle \beta$ jest o $16^0$ větší než $\alpha$ a $\sphericalangle \gamma$ o $4^0$ větší než $\beta$;
10. $\sphericalangle \beta$ jest o $15^0$ větší než $\alpha$ a $\sphericalangle \gamma$ o $18^0$ větší než $\beta$;
11. $\sphericalangle \beta_1$ jest o $27^0$ větší než $\alpha_1$ a $\sphericalangle \gamma_1$ o $27^0$ větší než $\beta_1$;
12. $\sphericalangle \alpha_1$ jest o $58^0$ větší než $\alpha$ a $\sphericalangle \beta_1$ o $94^0$ větší než $\beta$;
13. $\sphericalangle \beta_1 = 117^0\ 13'$, $\gamma = 46^0\ 27'$;
14. $\sphericalangle \beta_1 = 128^0$, $\sphericalangle \gamma$ jest o $22^0$ větší než $\alpha$;
15. $\sphericalangle \beta_1 = 2\beta + 12^0$; $\sphericalangle \alpha_1 = \frac{3}{2}\alpha$;
16. v pravoúhlém trojúhelníku $\beta_1 = 4\beta$;

17. v pravoúhlém trojúhelníku $\frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha_1}{11}$.

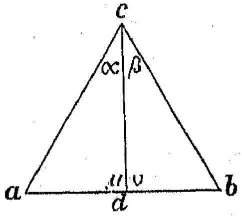
§. 32. **Strany trojúhelníku.** Strana, na níž trojúhelníku dáme spočívati, sluje základna nebo půdice; může jí býti strana kterákoliv. Půdici protilehlý vrchol jmenuje se temeno neb obzvláště vrchol. Kolmice, s vrcholu trojúhelníku na protější stranu (třeba-li prodlouženou) spuštěná, sluje výška trojúhelníku. Každý trojúhelník má tři výšky. Přímka, jež spojuje dva body obvodu slove příčka.

Srovnávajíce délku stran trojúhelníku, rozeznáváme trojúhelník:

1. rovnostranný, jehož všecky tři strany jsou si rovny;
2. rovnoramenný, jenž má toliko dvě strany sobě rovné a třetí lichou;
3. nerovnostranný, v němž má každá strana jinou délku. —

Při rovnoramenném trojúhelníku béřeme obyčejně za základnu stranu lichou; ostatní dvě sobě rovné strany slovou ramena.

§. 33. **Trojúhelník rovnoramenný.** Oklopením pravoúhlého trojúhelníku *adc* (obr. 24.) kolem odvěsny *cd* vznikne trojúhelník rovnoramenný *abc*. Trojúhelník ten jest souměrný ku své výšce. Z názoru na rovnoramenný (souměrný) trojúhelník jest patrno:



Obr. 24.

1. **v rovnoramenném trojúhelníku jsou úhly při půdici sobě rovny.**

2. **Výška rovnoramenného trojúhelníku půlí jeho půdici i úhel při temeni.**

Z těchto pouček vychází: *a*) Jedním úhlem rovnoramenného trojúhelníku jsou ostatní úhly určeny.

*b*) Vnější úhel při temeni rovnorammenného trojúhelníku jest dvakráte tak velký jako vnitřní úhel při půdici.

*c*) Rovnostranný trojúhelník možno pokládati za rovnoramenný trojúhelník, jehož půdice = rameni. Poněvadž lze kteroukoliv stranu jeho mysleti si základnou rovnoramenného trojúhelníku, platí poučka: V rovnostranném trojúhelníku jsou si všecky úhly vzájemně rovny; každý má 60°.

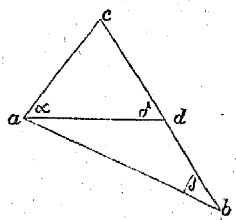
*d*) Rovnostranný trojúhelník jest ku všem svým výškám souměrný.

*e*) Naproti rovným stranám trojúhelníku leží rovné úhly a naproti rovným úhlům rovné strany.

**Úkoly.** Vypočítati úhly rovnoramenného trojúhelníku, je-li

1. úhel při temeni *a*) 2kráte, *b*) 3kráte tak velký jako úhel při půdici;
2. úhel při temeni *a*) o $33^{0}$, *b*) $57^{0}$, *c*) $24^{0}$ menší než úhel při základně;
3. úhel při temeni roven *a*) $^{6}/_{7}$, *b*) $^{2}/_{5}$, *c*) $^{8}/_{11}$ úhlu při půdici.
4. vnější úhel $= 124^{1}/_{2}{}^{0}$ a je-li to: *a*) vnější úhel při temeni, *b*) vnější úhel při základně.

§. 34. **Vztahy stran a protilehlých úhlů trojúhelníku: V trojúhelníku leží proti větší straně též větší úhel.**



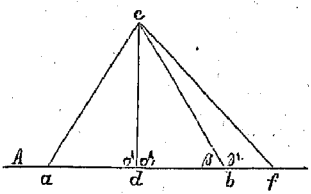
Obr. 25.

Podmínka $bc > ca$.

Důkaz: Učiň $cd = ac$ a narýsuj $ad$; jest pak v rovnoramenném trojúhelníku $acd$ . . . $\sphericalangle \alpha = \delta$; $\sphericalangle cab > \delta$. Jako vnější úhel trojúhelníku $adb$ jest však $\sphericalangle \delta > \beta$; tím spíše musí tedy býti $\sphericalangle cab > \beta$.

Dodatky: 1. Naproti většímu úhlu trojúhelníku leží větší strana.

2. V pravoúhlém trojúhelníku jest přepona stranou nejdelší.



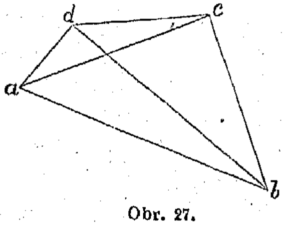
Obr. 26.

3. V tupoúhlém trojúhelníku leží naproti tupému úhlu nejdelší strana.

4. Ze všech úseček, které z bodu ku přímce rýsujeme, jest kolmice nejkratší. (Proč?)

Vzdálenost bodu od přímky měří se délkou kolmice z tohoto bodu na přímku spuštěné. V obr. 26. udává $dc$ vzdálenost bodu $c$ od přímky $A$.

## O čtyřúhelníku.



Obr. 27.

§. 35. Čtyřúhelník omezen jest čtyřmi stranami; má 4 vrcholy, 4 vnitřní úhly a 4 úhly vnější.

Strany, mající společný vrchol, jsou strany sousedné; rovněž slovou vrcholy, které jsou stranou spojeny, vrcholy sousedné. Každá strana má 2 sousedné strany a každý vrchol má dva sousedné vrcholy.

Strany a vrcholy nesousedné slují protější. Každá strana má 2 přilehlé a 2 protilehlé úhly.

Přímka spojující 2 protější vrcholy, sluje úhlopříčka. Čtyřúhelník má 2 úhlopříčky (*ac* a *bd* v obr. 27.).

Ve čtyřúhelníku jsou dvoje strany protější (jedny jsou *ab* a *cd*, druhé jsou *ad* a *bc*).

Přímka, jež spojuje 2 body obvodu, nejsouc úhlopříčkou, slove příčka.

§. 36. **Úhly ve čtyřúhelníku.** Úhlopříčka (na př. *bd* v obr. 27.) rozděluje čtyřúhelník na 2 trojúhelníky, jichžto úhly se doplňují na úhly čtyřúhelníku.

**Součet všech vnitřních úhlů čtyřúhelníka** $= 4R$.

Vedlejší úhel některého z vnitřních úhlů slove úhlem vnějším. Součet všech úhlů vnitřních i vnějších $= 8R$ a tudíž **součet vnějších úhlů čtyřúhelníka** $= 4R$.

**Úkoly.** 1. V čtyřúhelníku jest $\sphericalangle \alpha = 68^0\ 26'\ 34''$, $\sphericalangle \beta$ jest o $25^0\ 13'\ 48''$ menší než $2\alpha$ a $\sphericalangle \gamma$ jest o $12^0\ 16'\ 26''$ menší než $\sphericalangle \alpha + \beta$. Vypočítati úhly čtyřúhelníku.

2. V čtyřúhelníku jest $\sphericalangle \alpha = 123^0\ 54'\ 48''$, $\sphericalangle \beta$ jest o $35^0\ 12'\ 14''$ větší než $\frac{\alpha}{3}$ a úhel $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Jak velké jsou úhly jeho?

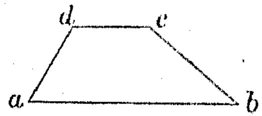
3. V čtyřúhelníku jest každý následující úhel o *a*) $12^0$, *b*) $20^0$, *c*) $8^0$ větší než úhel předcházející. Jak velké jsou úhly ty?

4. Úhly čtyřúhelníku jsou v poměru čísel *a*) $3:4:5:6$, *b*) $6:7:8:9$, *c*) $2:3:4:6$; jak jsou velké?

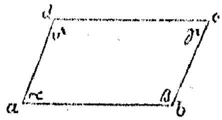
§. 37. **Roztřídění čtyřúhelníků.** Dle běhů protějších stran dělíme čtyřúhelníky na

1. různoběžníky, v nichž jsou oboje strany protější různoběžné (obr. 27.);

2. lichoběžníky, jichž jedny strany protější jsou rovnoběžné a druhé různoběžné (obr. 28.);



Obr. 28.



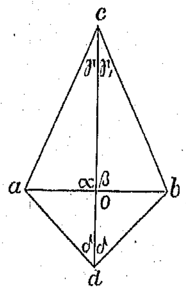
Obr. 29.

3. rovnoběžníky, jichž oboje strany protější jsou rovnoběžné (obr. 29.). Různoběžné strany lichoběžníku slují jeho

ramena, strany rovnoběžné slovou půdice, a to půdice dolejší nebo hořejší.

Lichoběžník, jehož ramena mají touže délku, sluje rovnoramenný. Jsou-li v lichoběžníku dva úhly pravé, jest pravoúhlý. Vzdálenost půdic (základen) jest výška lichoběžníku.

§. 38. **Různoběžník souměrný.** Oklopí-li se nerovnostranný trojúhelník *acd* (obr. 30.) kolem jedné strany, na př. kolem strany *cd*, vznikne souměrný různoběžník *cadb*. Souměrný různoběžník slove deltoid. Úhlopříčka *cd*, jež jest osou souměrnosti, jest úhlopříčka hlavní, úhlopříčka *ab* jest vedlejší.

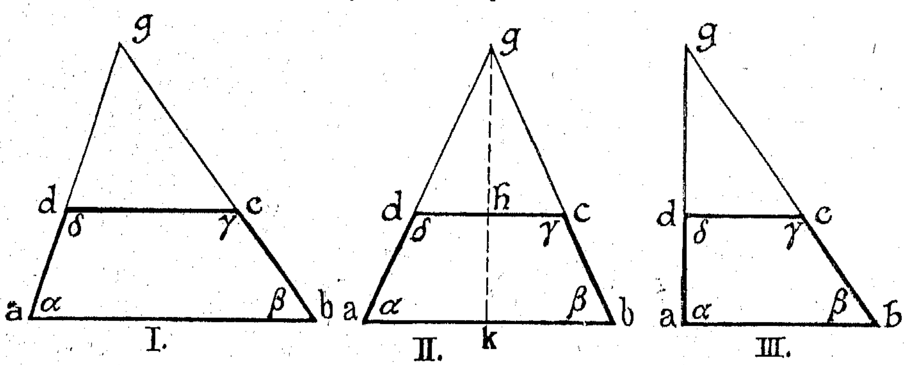


Obr. 30.

O deltoidu platí poučky:

1. *Hlavní úhlopříčka deltoid rozpoluje.*
2. *Úhly, proti hlavní úhlopříčce položené, jsou si rovny.*
3. *Hlavní úhlopříčka rozpoluje úhly při vrcholech.*
4. *Vedlejší úhlopříčka jest hlavní úhlopříčkou rozpolena.*
5. *Vedlejší úhlopříčka dělí deltoid na dva rovnoramenné trojúhelníky o společné půdici.*
6. *Přímka, jež spojuje temena rovnoramenných trojúhelníků o společné půdici, jest na této půdici kolmá, rozpoluje ji, a rozpoluje též úhly při temenech.*

§. 39. **Lichoběžník.** Příčkou *cd* ku půdici *ab* (obr. 31.) rovnoběžnou rozdělí se trojúhelník *abg* na lichoběžník *abcd* a na



Obr. 31.

trojúhelník *cdg*, jenž slove vzhledem k lichoběžníku trojúhelníkem doplňovacím.

Byl-li daný trojúhelník nerovnostranný, rovnoramenný nebo pravoúhlý, vznikne lichoběžník vůbec, lichoběžník rovnoramenný nebo lichoběžník pravoúhlý.

V příčině úhlů lichoběžníku jest patrno:

1. Úhly, které přiléhají k témuž rameni lichoběžníku, doplňují se na $2R$.

2. V rovnoramenném lichoběžníku jsou úhly při půdicích sobě rovny.

3. V pravoúhlém lichoběžníku jsou dva úhly pravé. Rameno, jež svírá s půdicemi pravé úhly, slove rameno kolmé, druhé rameno jest kosé.

Mimo to jest patrno, že jest lichoběžník rovnoramenný souměrný k ose, jež spojuje středy půdic.

§. 40. **Rovnoběžník.**

1. **V rovnoběžníku** (obr. 29.) **jest součet dvou úhlů k téže straně přilehlých roven** $2R$; na př. $\sphericalangle \alpha + \beta = 2R$, $\sphericalangle \beta + \gamma = 2R$. Proč? —

2. **Protilehlé úhly v rovnoběžníku jsou si rovny,** neboť ramena jejich mají týž běh a oba úhly jsou buď ostré, buď tupé.

3. **Je-li v rovnoběžníku jeden úhel pravý, jsou i ostatní úhly pravé, je-li jeden úhel kosý, jsou i ostatní kosé.**

Tato třetí poučka plyne z předchozích dvou pouček.

**Úkoly.** 1. V deltoidu má jeden z rovných úhlů $115^0\ 30'$; ostatní úhly liší se o $29^0$; jak jsou velké?

2. Rovné úhly deltoidu jsou pravé; z nerovných úhlů jest prvý o $6^0$ menší než 3násobný úhel druhý; jak jsou velké?

3. Jak velké jsou úhly lichoběžníku, rovná-li se $^1/_7$ jednoho z nich $^1/_{13}$ k témuž rameni přilehlého úhlu.

4. Vnější úhel při dolejší půdici rovnoramenného lichoběžníku jest o $74^0\ 36'\ 45''$ větší než příslušný úhel vnitřní; vypočítati úhly jeho.

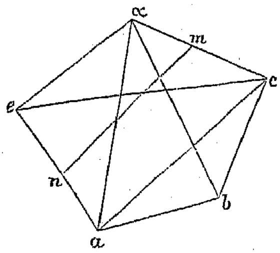
5. Z kosých úhlů pravoúhlého lichoběžníku rovná se $^1/_3$ prvého $^5/_9$ druhého; jak jsou velké?

6. V rovnoběžníku má jeden úhel *a)* $143^0\ 15'\ 38''$, *b)* $72^0\ 18'\ 34''$, *c)* $49^0\ 53'\ 16''$; vypočítati ostatní úhly.

## O mnohoúhelníku.

§. 41. Přímkami všestranně omezená část roviny slove mnohoúhelník Přímky mnohoúhelník omezující zovou se strany; jich průsečíky vrcholy, a úhly, při vrcholích uvnitř mnohoúhelníku ležící, úhly vnitřní mnohoúhelníku (obr. 32.).

Strany, mající společný vrchol, jsou strany sousedné (*ab* a *ae*, *ab* i *bc* atd.); rovněž slovou i vrcholy, které jsou touže stranou spojeny, vrcholy sousedné.



Obr. 32.

Strany a vrcholy nesousedné slují protější.

Každá strana má dva úhly přilehlé, ostatní jsou protilehlé.

Mnohoúhelník má tolik stran, kolik vrcholů nebo kolik úhlů.

Mnohoúhelníky dělí se dle počtu stran, (tedy i vrcholů neb úhlů) na troj-, čtyř-, pěti-, šesti- nebo vůbec mnohoúhelníky (*n*-úhelníky, je-li *n* stran).

Vzhledem ku vzájemné délce stran rozeznáváme mnohoúhelníky rovnostranné a nerovnostranné; vzhledem ku vzájemné velikosti úhlů rovno- a nerovnoúhelné.

Rovnostranný, rovnoúhelný mnohoúhelník sluje pravidelný.

Součet všech mnohoúhelník omezujících stran sluje obvod mnohoúhelníku.

Kolmice, spuštěná s vrcholu mnohoúhelníku na protější stranu, sluje výška.

§. 42. **Příčky a úhlopříčky.**

Přímka, spojující dva body obvodu mnohoúhelníku, sluje příčka (*mn* obr. 24.); jde-li příčka protějšími vrcholy, slove úhlopříčka (*ac*, *ce ac* atd.). Z každého vrcholu *n*-úhelníku dá se rýsovati ku každému protějšímu vrcholu jedna úhlopříčka. Však takových protějších vrcholů má každý vrchol *n*-úhelníku $(n-3)$; v *n*-úhelníku bylo by tedy možno rýsovati $n\ (n-3)$ úhlopříčen; ale v tomto počtu jest každá úhlopříčka počítána dvakráte, jest tudíž počet všech rozličných úhlopříček v *n*-úhelníku stanoven vzorcem:

$$ú = \frac{n\ (n-3)}{2}.$$

V pětiúhelníku jest $ú_5 = \frac{5\ (5-3)}{2} = 5.$

Kolik úhlopříček má *a*) 7úhelník, *b*) 9úhelník, *c*) 17úhelník?

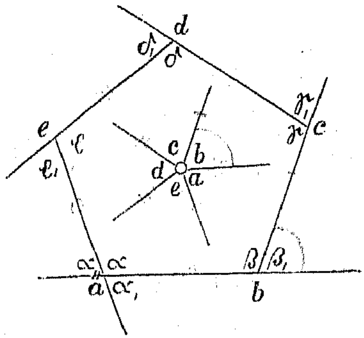
§. 43. **Úhly mnohoúhelníku.**

Prodlouží-li se veškeré strany mnohoúhelníku týmže směrem za vrchol, vznikne u každého úhlu vnitřního ještě jeden úhel, který sluje úhel vnější.

Úhel vnější mnohoúhelníku jest uzavřen stranou mnohoúhelníku a prodlouženou její stranou sousední

(obr. 33. $\sphericalangle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varphi_1$).

Kdyby se strany (na př. $ab$) prodloužily ve směru protivném, vznikly by ještě jiné úhly vnější (na př. $\sphericalangle \alpha_{11}$), které se však velikostí od dříve uvedených úhlů vnějších neliší; proto se říká, že má $n$-úhelník též $n$ úhlů vnějších.



Obr. 33.

Poučky: 1. **Každý úhel vnější doplňuje se příslušným úhlem vnitřním na $2R$.**

$$\sphericalangle \alpha_1 + \alpha = 2R$$
$$\sphericalangle \beta_1 + \beta = 2R$$
$$\sphericalangle \gamma_1 + \gamma = 2R$$
$$\sphericalangle \delta_1 + \delta = 2R$$
$$\sphericalangle \varphi_1 + \varphi = 2R.$$

(Důkaz plyne bezprostředně z obrazce 33.).

2. Zvolme vnitř mnohoúhelníku libovolně bod (obr. 33.) a rýsujme tímto bodem rovnoběžky ke stranám mnohoúhelníku. Kolem řečeného bodu vzniklé úhly rovnají se střídavě vnějším úhlům mnohoúhelníku ($\sphericalangle a = \alpha_1$, $\sphericalangle b = \beta_1$ atd.); jich součet rovná se $4R$, tedy i **součet všech vnějších úhlů jakéhokoli mnohoúhelníku** $= 4R$.

3. V $n$-úhelníku jest součet všech úhlů vnějších a vnitřních dohromady $= n . 2R$, a proto součet všech úhlů vnitřních roven jest $n . 2R - 4R$.

**Součet vnitřních úhlů jakéhokoli mnohoúhelníku rovná se tolikráte $2R$, kolik má mnohoúhelník stran méně $4R$.**

Jest tedy součet všech vnitřních úhlů v devítiúhelníku

$$9 \cdot 2R - 4R = 14R;$$

kdyby to byl devítiúhelník pravidelný, rovnal by se vnitřní úhel,

$$\frac{14\ R}{9} = 1\tfrac{5}{9}\ R = 140^\circ.$$

Přímo vypočítá se úhel ten takto: Každý z 9 vnějších úhlů má $360^\circ : 9 = 40^\circ$; vnitřní úhel doplňuje vnější úhel na $2R$, má tedy $140^\circ$.

**Úkoly.** 1. Kolik stran a kolik úhlopříček má pravidelný mnohoúhelník, jehož vnější úhel má *a*) $45^\circ$, *b*) $24^\circ$, *c*) $60^\circ$?

(Pravidelný mnohoúhelník má tolik vrcholů a tudíž i tolik stran, kolikráte jest počet jeho stupňů ve $360^\circ$ obsažen.)

2. Kolik stran a kolik úhlopříček má mnohoúhelník, v němž rovná se součet vnitřních úhlů *a*) $12R$, *b*) $36R$, *c*) $900^\circ$, *d*) $1440^\circ$?

3. Kolik stran a úhlopříček má pravidelný mnohoúhelník, jehož vnitřní úhel jest *a*) 5kráte, *b*) 8kráte, *c*) 4kráte tak velký jako úhel vnější? —

4. Ve kterém pravidelném mnohoúhelníku jest vnitřní úhel *a*) o $36^\circ$, *b*) o $156^\circ$, *c*) o $140^\circ$ větší než úhel vnější?

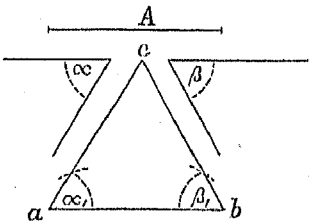
## Část třetí.

# O shodnosti mnohoúhelníků.

## O shodnosti trojúhelníků.

§. 44. **Rýsovati trojúhelník, jehož jedna strana by měla délku $A$ a k této straně přilehlé úhly velikosti** $\alpha$ a $\beta$ (obr. 34.).

Učiňme $ab = A$; tím jest poloha vrcholů $a$ i $b$ stanovena. K dokonalému určení trojúhelníku třeba ještě znáti polohu vrcholu $c$. Stranu $ab$ považujeme za společné rameno úhlů $\alpha$ a $\beta$; úhly ty rýsujme. Vrchol $c$ jest na každém z druhých ramen, jest proto jejich průsečíkem. Přímky $ac$ a $bc$ slovou g e o m e t r i c k á  m í s t a vrcholu $c$.



Obr. 34.

**Geometrické místo** jest čára, jejíž body určitému předpokládání dosti činí. Čáry ty (geom. místa) jsou nejdůležitější pomůckou při řešení konstrukčních úkolů. Známe-li 2 geometrická místa některého bodu a umíme-li je rýsovati (jako na př. přímky $ac$ a $bc$ v obr. 34.), jest hledaný bod průsečíkem svých geom. míst určen.

By se stanovilo geometrické místo hledaného bodu, vyšetřuje se, kterak tento bod s danými částmi souvisí. Tato souvislost určuje se **rozborem.** K rozboru rýsuje se na pomocném obrazci útvar se žádaným útvarem stejnorodý; v něm vytknou se všecky dané části (v obr. 34. strana $ab = A$ a úhly $\alpha_1$ a $\beta_1$). Neobjeví-li se některá daná část v obrazci, dlužno ji zobraziti, na př. daný obvod jako přímku. Stanovíce rozborem pro hledané body místa geometrická, postupujeme takto:

Předem zkoumáme, může-li býti geometrickým místem přímka. Přirozeno jest, pozorovati přímky pomocného obrazce, které procházejí hledaným bodem. Přímky ty jsou geometrickými místy, je-li možno je rýsovati. V obr. 34. možno $ac$ i $bc$ rýsovati, poněvadž známe bod $a$ ($b$) a odchylku od dané přímky $ab$.

*Má-li hledaný bod od dané přímky známou vzdálenost, jest jeho geometrickým místem rovnoběžka v této vzdálenosti od dané přímky rýsovaná. Je-li hledaný vrchol temenem rovnoramenného trojúhelníku, jest jeho geometr. místem kolmice uprostřed půdice vztýčená. Má-li hledaný bod od daného bodu známou vzdálenost, jest jeho geometr. místem kružnice rýsovaná danou vzdáleností kolem daného bodu.*

Současně s rozborem postupuje se v **sestrojování.** Po té jest dokázati, že sestrojený tvar vyhovuje daným podmínkám (**důkaz**). Z rozboru a z konstrukce zároveň bývá patrno, za kterých podmínek jest řešení možné, nebo připouští-li úkol řešení jediné či několikeré. Toto vyšetřování sluje **omezení** (determinace). Konstrukce a důkaz úkolu v obr. 34. vyznačeného jsou snadny. V příčině determinace jest patrno, že obě geometr. místa bodu $c$, jsouce přímkami, se vůbec v jediném bodě protínají. Možno tedy pouze jediný bod $c$ a tudíž i jediný $\triangle$ obdržeti. Řešení bylo by nemožným, kdyby byly přímky $ac$ a $bc$ spolu rovnoběžny, což stalo by se, kdyby doplňovaly se dané úhly $\alpha$ a $\beta$ na $2R$.

Poněvadž možno z dané strany a k ní přilehlých úhlů pouze jediný trojúhelník sestrojiti, různiti se bude každý jiný, z týchž určovacích částí sestrojený trojúhelník od dříve sestrojeného trojúhelníku pouze polohou; budou tedy oba trojúhelníky shodny.

I. **Trojúhelníky, mající střídavě jednu stranu a k ní přilehlé úhly sobě rovny, jsou shodny.**

Shodné trojúhelníky, jsouce na sebe náležitě položeny, musí se na vzájem dokonale krýti, t. j. meze jednoho padnou na meze druhého. Strany a úhly shodných trojúhelníků, které na sebe připadnouce se kryjí, slovou souhlasné a pokud touže polohu buď mají neb ji nabýti mohou, též stejnolehlé.

**Ve shodných trojúhelnících jsou stejnolehlé strany i úhly střídavě sobě rovny a naopak: trojúhelníky, jichžto stejnolehlé strany i úhly střídavě sobě rovny jsou, musí býti shodnými.**

Máme-li rozhodnouti o shodnosti dvou trojúhelníků, není třeba, abychom napřed věděli, že všecky jejich stejnolehlé strany i úhly střídavě jsou si rovny; nýbrž postačí věděti, že jsou pouze ony části sobě rovny, jimiž trojúhelník jest dokonale určen. — Z úhlů trojúhelníku jest vždy jeden závislý na ostatních; známe-li 2 úhly, známe i úhel třetí. První poučka o shodnosti trojúhelníků dá se též vysloviti: **Trojúhelníky, mající střídavě stranu a dva úhly sobě rovny, jsou shodny.**

Které poučky plynou z této věty pro shodnost trojúhelníků pravoúhlých, rovnoramenných a rovnostranných?

§. 45. **Sestrojiti trojúhelník, dány-li jsou jeho dvě strany a a jimi sevřený úhel.**

Napřed se rýsuje úhel téže velikosti jako úhel daný a na jeho ramena naměří se délky daných stran, potom spojí se koncové body těchto délek přímkou. Jest vidno, že lze sestrojiti jediný trojúhelník, který hoví daným podmínkám, poněvadž dvěma body pouze jediná přímka rýsovati se dá.

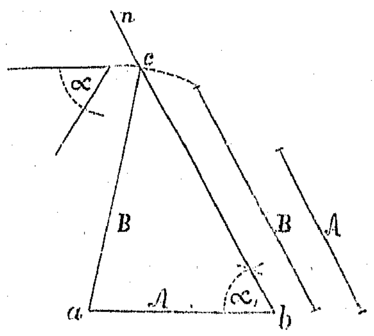
**Dvěma stranami a jimi sevřeným úhlem jest trojúhelník dokona určen.**

II. **Trojúhelníky, mající střídavě dvě strany a jimi sevřený úhel rovny, jsou shodny.**

Která jest příslušná poučka pro pravoúhlé trojúhelníky?

§. 46. **Sestrojiti trojúhelník ze dvou stran a úhlu proti delší z nich položeném.**

V obr. 35. buď $B > A$. Délkou $ab = A$ jest poloha vrcholů $a$ i $b$ stanovena. Rameno $bn$ jest jedním geometrickým místem pro vrchol $c$. Druhým geometrickým místem pro vrchol $c$ jest kružnice poloměrem $= B$ $(ac)$ kolem bodu $a$ opsaná. Za vrchol $b$ prodloužená přímka $bn$ protínala by sice kružnici ještě v bodě $c_1$; trojúhelník $abc_1$ nevyhovoval by však daným podmínkám, neboť úhel proti $B$ byl by tupý. Poněvadž jen jediný, oběma geom. místům společný bod $c$ daným podmínkám dosti činí, lze z daných částí jediný trojúhelník sestrojiti.



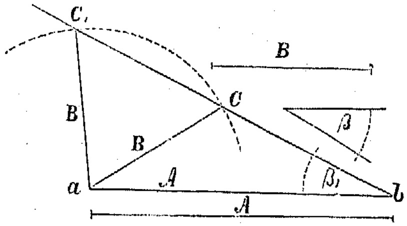
Obr. 35.

**Dvěma stranami a úhlem proti delší z nich ležícím jest tedy trojúhelník dokona určen.**

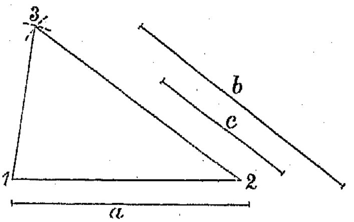
III. **Trojúhelníky, jejichž dvě strany a úhel, proti delší straně ležící, jsou si střídavě rovny, jsou shodny.**

Která příslušná poučka platí pro pravoúhlé trojúhelníky?

Dokázati: **Dvěma stranami a úhlem naproti kratší z nich ležícím není trojúhelník určen** (viz obr. 36.).



Obr. 36.



Obr. 37.

§. 47. **Sestrojiti trojúhelník ze tří stran.**

V obr. **37.** jsou geometrickými místy pro bod *c* dvě kružnice. Kružnice ty protínaly by se také na druhé (spodní) straně přímky *12*; mohlo by se tedy zdáti, že z daných stran lze mimo trojúhelník *123* ještě jiný sestrojiti. Kdybychom však tento druhý trojúhelník sestrojili, tvořily by oba trojúhelníky dle osy *12* souměrný čtyřúhelník; oba jsou tedy shodny.

*Třemi stranami jest tedy trojúhelník dokonale určen.*

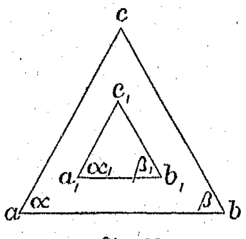
IV. **Dva trojúhelníky, jejichž všecky strany jsou si střídavě rovny, jsou shodny.**

Kdy jsou rovnoramenné trojúhelníky shodny?
Proč jsou trojúhelníky souměrně sdružené shodny?

Řešení tohoto úkolu je možné, protnou-li se řečené kružnice, což stane se vždy, bude-li součet stran *13* a *23* větší než strana třetí.

**V trojúhelníku jest součet dvou jeho stran větší nežli strana třetí.**

§. 48. Že dvěma (tedy ani všemi třemi) úhly trojúhelník dokonale určen není, vidno hned z pohledu na obr. 38., kde $\sphericalangle\ \alpha_1 = \alpha$, a $\sphericalangle\ \beta_1 = \beta$, aniž by $\triangle\ a_1b_1c_1$ jest shodný s $\triangle\ abc$.



Obr. 38.

Ohlédneme-li se na předcházející úvahy, shledáme, že mezi oněmi třemi částmi, jež musí býti dány, má-li trojúhelník dokonale určen býti, objevuje se nejméně jedna strana.

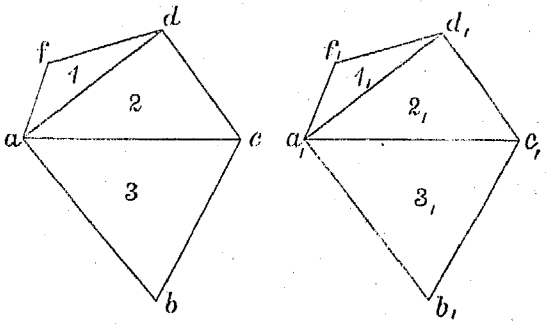
Všecky souhlasné části shodných trojúhelníků se shodují. Pročež kdykoliv shodnost trojúhelníků jest dokázána, lze souditi na rovnost souhlasných částí jejich, o níž před tím známost nebyla.

Pravíme proto: **Ve shodných trojúhelnících leží naproti rovným stranám rovné úhly a naopak naproti rovným úhlům rovné strany.**

## O shodnosti mnohoúhelníků.

§. 49. Které mnohoúhelníky slovou shodnými? Čím liší se shodné mnohoúhelníky? Které vlastnosti mají stejnolehlé strany a úhly shodných mnohoúhelníků?

**Shodné mnohoúhelníky rozložiti se dají úhlopříčkami stejnolehlými na střídavě shodné trojúhelníky.**




Obr. 39.

Položíme-li totiž shodné mnohoúhelníky tak, aby vrcholy jednoho pokrývaly stejnolehlé vrcholy druhého, pokrývají se i stejnolehlé úhlopříčky, tudíž i trojúhelníky jimi tvořené.

**Mnohoúhelníky, kteréžto z téhož počtu střídavě shodných trojúhelníků složeny jsou, jsou shodny.**

V obr. 39. buď $\triangle 1 \cong \triangle 1_1$; $\triangle 2 \cong \triangle 2_1$ a $\triangle 3 \cong \triangle 3_1$. Myslíme-li si mnohoúhelník $a_1b_1c_1d_1f_1$ položený na mnohoúhelník $abcdf$, aby $\triangle 1_1$ pokrýval $\triangle 1$, musí též $\triangle 2_1$ pokrývati $\triangle 2$ a i $\triangle 3_1$ $\triangle 3$; pročež se pokryjí i oba mnohoúhelníky.

**Mnohoúhelníky souměrně sdružené jsou shodny.** (Proč?)

Mnohoúhelník jest dokonale určen, když jest dáno částí (totiž stran a úhlů) tolik a takových, kolik jich třeba, by se z nich mohl sestrojiti mnohoúhelník pouze jeden, aby každý jiný, jenž by těm podmínkám dosti činil, s prvým byl shodný.

---

# Použití pouček o shodnosti.

## Poučky o trojúhelnících.

§. 50. 1. Shodností trojúhelníků dokázati jest poučky:

1. Přímka, jež spojuje temena dvou rovnoramenných trojúhelníků o společné půdici, rozpoluje tuto půdici, jest na ní kolmá a rozpoluje i úhly při temenech.

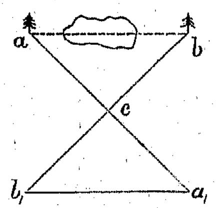
2. Přímka, jež spojuje temeno rovnoramenného trojúhelníku se středem jeho půdice, jest na této půdici kolmá a půlí úhel při temeni.

3. Výška rovnoramenného trojúhelníku rozpoluje půdici a též úhel při temeni.

4. Přímka půlící úhel při temeni rovnoramenného trojúhelníku rozpoluje půdici a jest na ní kolmá.

5. Vztýčí-li se uprostřed dané délky kolmice a spojí-li se kterýkoliv bod této kolmice s krajními body dané délky, vznikne trojúhelník rovnoramenný.

2. S t a n o v i t i  j e s t  v z d á l e n o s t  2  b o d ů  n a  p o l i, k t e r á  s e  p ř í m o  m ě ř i t i  n e d á, je-li však možno vzdálenost bodu třetího od daných bodů měřiti.



Obr. 40.

Buďtež (obr. 40.) $a$ a $b$ body, jichž vzdálenost se stanoviti má a mezi nimiž na př. rybník se nacházející přímého měření nedopouští.

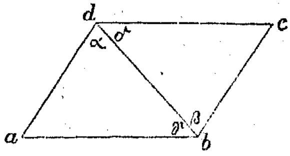
Zvolme stanovisko $c$ tak, aby se od něho i ku $a$ i ku $b$ měřiti mohlo a změřme přímou vzdálenost $ac$ i $bc$ buď řetězem anebo pásmem měřickým; na prodloužené délky $ac$ a $bc$ naměřme $b_1c = bc$ a $a_1c = ac$. $a_1b_1$ udává vzdálenost $ab$, jelikož $\triangle\ abc \cong a_1cb_1$.

## Poučky o rovnoběžnících.

§. 51. **Úhlopříčkou rozděluje se rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky.**

Poněvadž ... $ab \parallel cd \ldots \sphericalangle \gamma = \delta$
$ad \parallel bc \ldots \sphericalangle \alpha = \beta$
$bd = bd$

$\triangle\, abd \cong bdc.$




Obr. 41.

Následky:
$ad = bc$
$ab = cd$, t. j.

1. **V rovnoběžníku jsou protější strany sobě rovny.**

Tato věta vyslovuje se často takto:

**Rovnoběžky mezi rovnoběžkami jsou sobě rovny.**

2. **Jsou-li dvě přímky rovnoběžny, mají všecky body jedné z nich ode druhé rovné vzdálenosti**; neboť kolmice, které vzdálenost těchto rovnoběžek stanoví, jsou rovnoběžny. Stálá vzdálenost každého bodu jedné ze dvou rovnoběžek ode druhé, jmenuje se vzdálenost obou rovnoběžek.

§. 52. **Roztřídění rovnoběžníků.**

Jsou-li v rovnoběžníku dvě sousedné strany sobě rovny, jest rovnoběžník rovnostranný; nemají-li však v rovnoběžníku dvě strany sousedné tutéž délku, jest rovnoběžník nerovnostranný.

Vzhledem ku poměru i úhlů i stran rozeznáváme:

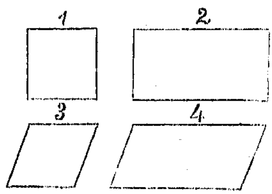
| | | | |
|---|---|---|---|
| rovnoběžník | pravoúhlý | rovnostranný | 1. čtverec |
| | | nerovnostranný | 2. obdélník |
| | kosoúhlý | rovnostranný | 3. kosočtverec |
| | | nerovnostranný | 4. kosodélník. |

*Čtverec jest rovnostranný, pravoúhlý rovnoběžník;*

*kosočtverec jest rovnostranný, kosoúhlý rovnoběžník;*

*obdélník jest nerovnostranný, pravoúhlý rovnoběžník;*

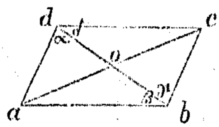
*kosodélník jest nerovnostranný kosoúhlý rovnoběžník.*




Obr. 42.

§. 53. **Poučky o úhlopříčkách v rovnoběžnících.**

1. **V rovnoběžníku se úhlopříčky navzájem rozpolují.**

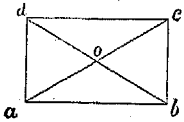



Obr. 43.

Budiž $abcd$ rovnoběžník, tedy $ab \parallel cd$, $ad \parallel bc$ a tu $\triangle aob \cong cod$ (proč?); z čehož plyne, že

$$ao = oc$$
$$bo = do.$$

2. **V pravoúhlém rovnoběžníku (tedy ve čtverci a obdélníku) jsou úhlopříčky sobě rovny.**



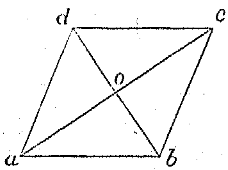
Obr. 44.

Poněvadž $\triangle abd \cong abc$, jest

$$ac = bd.$$

3. **V rovnostranném rovnoběžníku (tedy ve čtverci a kosočtverci) jest úhlopříčka na úhlopříčce kolmá.**

Je-li $abcd$ rovnostranný rovnoběžník, jsou $abd$ a $bcd$ rovnoramenné trojúhelníky o společné půdici $bd$; tedy $ac \perp bd$.



Obr. 45.

Sestavíme-li tyto poučky, vidno, že:

*a*) **Úhlopříčky rovnoběžníku se vzájemně půlí.**

*b*) **Úhlopříčky v obdélníku jsou sobě rovny.**

*c*) **Úhlopříčky v kosočtverci svírají úhel pravý.**

*d*) **Úhlopříčky ve čtverci jsou sobě rovny a jedna jest na druhé kolmá.**

Podle obrácených těchto pouček, které též pravdivy jsou, rozhoduje se často o druhu rovnoběžníků.

Příčka jdoucí průsečíkem úhlopříček rovnoběžníku, je-li ku straně rovnoběžna, slove střední příčka.

Čtverec jest souměren k oběma úhlopříčkám i k oběma středním příčkám; jest tedy čtyřosý.

Kosočtverec jest souměren k oběma úhlopříčkám, jest dvouosý.

Obdélník jest k oběma středním příčkám souměren.

## Poučky o lichoběžnících.

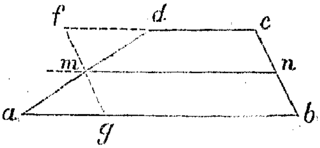
§. 54. **Příčka, rýsovaná středem jednoho ramena rovnoběžně s půdicemi půlí druhé rameno.**

Budiž v obr. 46. $dc \parallel ab$,

$am = md$, a

$mn \parallel ab \parallel cd$; rýsuje-li se $fg \parallel bc$, jest $\triangle mfd \cong amg$ (proč?) pročež $fm = mg$.

Ale $fm = cn$, a $mg = nb$, tedy $cn = nb$.



Obr. 46.

Přímka $mn$ sluje **příčkou střední** lichoběžníku.

2. **Příčka střední v lichoběžníku rovná se polovici součtu jeho půdic.**

Ze shodnosti $\triangle amg$ a $\triangle mfd$ (obr. 46.) plyne, že

$$ag = fd; \text{ dále jest } mn = bg = ab - ag, \text{ a}$$
$$mn = cf = cd + df$$
$$2mn = ab + cd$$
$$mn = \frac{ab + cd}{2}.$$

## Další poučky o trojúhelníku.

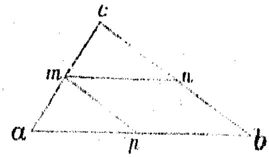
§. 55. 1. **Příčka, rýsovaná v trojúhelníku ze středu jedné strany rovnoběžně s druhou, půlí stranu třetí.**

Předpokl.: $am = mc = \frac{ac}{2}$ (obr. 47.)

$mn \parallel ab$

Tvrzení: $bn = cn$.

Důkaz: Učiňme $mp \parallel bc$, tu bude $\triangle amp \cong mcn$ (proč?), tudíž $mp = cn$; ale $mp = bn$, pročež jest $bn = cn$

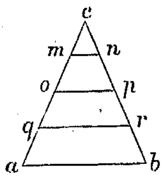


Obr. 47.

2. **Příčka, spojující středy dvou stran trojúhelníku, jest rovnoběžna ku straně třetí.**

$m$ a $n$ buďtež středy stran $ac$ a $bc$ trojúhelníku $abc$ (obr. 47.). Přímka z $m$ rovnoběžně k $ab$ rýsovaná protíná $bc$ v bodě $n_1$; poněvadž dle 1. musí $cn_1 = n_1b$, jest $n_1$ totožný s $n$, t. j. $mn \parallel ab$.

3. **Soustava příček rovnoběžných ku jedné straně trojúhelníku, která dělí druhou stranu na díly mezi sebou rovné, dělí i třetí stranu na týž počet mezi sebou rovných dílů.**




Obr. 48.

Předpokládání:

$cm = mo = oq = qa$

$mn \parallel op \parallel qr \parallel ab$

Tvrzení:

$cn = np = pr = rb.$

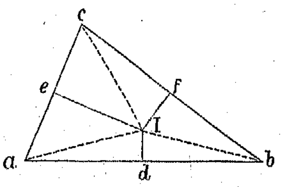
Důkaz:

$cn = np$ (v $\triangle$ $ocp$ dle 1.)

$np = pr = rb$ (v lichoběžníku $mnqr$ dle §. 54. atd.).

## §. 56. O čtyřech zvláštních bodech v trojúhelníku.

1. **Kolmice, vztýčené uprostřed stran trojúhelníku, protínají se v jediném bodu, který má ode všech vrcholů trojúhelníku tutéž vzdálenost.**




Obr. 49.

Učiňme: $ad = db$, $ae = ec$, $cf = fb$
$dI \perp ab$, $fI \perp bc$ $eI \perp ac$.

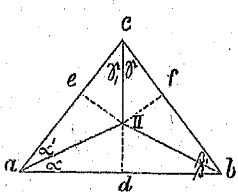
Kolmice $dI$ a $eI$ budou se vůbec v jednom bodu ($I$) protínati. Rýsujeme-li $aI$, $bI$ a $cI$, musí býti $\triangle$ $acI$ i $\triangle$ $aIb$ rovnoramenný, proto jest $aI = Ic$, a $aI = bI$, tedy i

$$aI = Ib = Ic;$$

tudíž jsou vzdálenosti bodu $I$ ode všech vrcholů trojúhelníku sobě rovny. Bod $I$ jest středem kružnice trojúhelníku opsané. Každému trojúhelníku dá se kružnice opsati. Geometrická místa pro její střed jsou kolmice, uprostřed stran na tyto strany vztýčené.

Poněvadž $\triangle$ $bIc$ jest rovnoramenný, musí přímka spojující $f$ s $I$, býti výškou tohoto trojúhelníku; tedy $fI \perp bc$. Bod $I$ jest tedy průsečík kolmic $dI$, $eI$ a $fI$.

2. **Příčky půlící vnitřní úhly v trojúhelníku, protínají se v jediném bodu, který má od stran trojúhelníku rovné vzdálenosti.** Bod ten jest středem vepsaného kruhu.




Obr. 50.

Učiňme: $\sphericalangle \alpha = \alpha'$, $\sphericalangle \beta = \beta'$, $\sphericalangle \gamma = \gamma'$. $aII$ a $bII$ jsou příčky, jež rozpolují úhly $a$ i $b$, a bod $II$ jich průsečíkem. Spustíme-li s $II$ kolmice $IId$, $IIe$ a $IIf$, jest $\triangle$ $adII \cong aeII$, pročež $dII = eII$; poněvadž jest $\triangle$ $IIdb \cong IIbf$, proto jest též $dII = fII$, tedy i $eII = dII = fII$; t. j. bod $II$ má ode všech stran trojúhelníku *abc* tutéž vzdálenost. Rýsujeme-li nyní *IIc*, jest trojúhelník

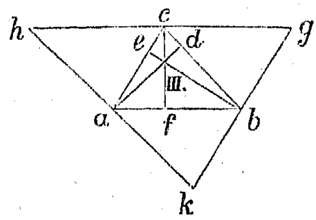
$$eIIc \cong IIcf,$$

tedy i $\sphericalangle \gamma' = \gamma$, a přímka *IIc* půlí $\sphericalangle$ *c*.

Bod *II* jest tudíž společný průsečík příček, úhly trojúhelníku *abc* půlících.

3. **Všecky tři výšky trojúhelníku protínají se v jediném bodu.**

Budiž v obr. 51. $ad \perp bc$, $be \perp ac$ a $cf \perp ab$; vrcholy *a*, *b*, *c* rýsujme přímky *hg*, *gk*, *hk* rovnoběžně ku stranám trojúhelníku *abc*, čímž obdržíme $\triangle$ *hgk*, v němž jsou *a*, *b*, *c* středy stran; kolmice *ad*, *be* a *cf*, vztýčené ve středech stran $\triangle$ *ghk*, protínají se dle 1. v jediném bodu *III*.



Obr. 51.

4. **Příčky, spojující vrcholy trojúhelníku se středy protějších stran, protínají se v jediném bodu.**

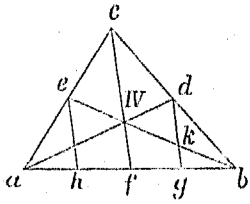
Bod tento sluje těžiště trojúhelníku; leží v koncovém bodu první třetiny té které příčky, od stopy její počínaje.

Předp.: V trojúhelníku *abc* budiž $cd = db$, $ce = ea$, $af = fb$. Bod *IV* budiž průsečíkem příček *cf* a *be*. Příčkami *dg he* rovnoběžně ku *cf* rýsovanými, rozpoluje se *bf* i *af*, pročež

$$bg = gf = hf$$

a také $bk = kIV = IVe$; jest tedy

$$eIV = \frac{eb}{3}.$$



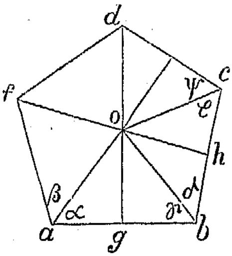
Obr. 52.

Příčka *cf* dělí tudíž *be* v bodě *IV* v poměru *1* : *2*.

Rýsujeme-li příčku *ad*, rozdělí tato *be* na tytéž dvě části; pročež prochází také bodem *IV*.

## Poučky o pravidelných mnohoúhelnících.

§. 57. K rovnoramennému trojúhelníku *abo* (obr. 53.), v němž rovná se úhel při temeni $\frac{4R}{n}$ přiřaďme s ním shodný trojúhelník *boc*, aby měly oba $\triangle$ společné rameno *bo*. K druhému △ přiřaďme podobným způsobem třetí △. Přiřaděním $n$ shodných trojúhelníků obdržíme pravidelný *n*-**úhelník** (**mnohoúhelník**). Společné temeno přiřaděných trojúhelníků jest **středem** pravidelného mnohoúhelníku.




Obr. 53.

Jest patrno:

1. Přímky, jež spojují střed pravidelného mnohoúhelníku s jeho vrcholy, rozpolují vnitřní úhly tohoto mnohoúhelníku a dělí jej na rovnoramenné, shodné trojúhelníky.

2. Střed pravidelného mnohoúhelníku má od vrcholů i od stran rovné vzdálenosti, jest tedy středem opsaného i vepsaného kruhu.

3. Každá přímka, která buď rozpoluje vnitřní úhly pravidelného mnohoúhelníku, nebo která jest uprostřed stran na tyto strany kolmá, jest **osou souměrnosti**.

4. Všecky osy souměrnosti jdou středem a svírají spolu po řadě rovné úhly.

5. V pravidelném mnohoúhelníku o lichém počtu stran jde osa souměrnosti středem strany a protějším vrcholem; proto je os tolik, kolik má mnohoúhelník vrcholů.

6. Má-li mnohoúhelník sudý počet stran, sjednocuje se osa půlící stranu s osou, jež půlí stranu protější, a osa půlící úhel s osou půlící úhel protilehlý. Mnohoúhelník ten má tolik os, kolik má stran.

## Měřické konstrukce ku předešlé části.

§. 58. **Rozpolování délek a úhlů, rýsování kolmic, dělení úhlu pravého na 3 rovné díly, rýsování úhlů určité velikosti a dělení přímky na několik rovných dílů.**

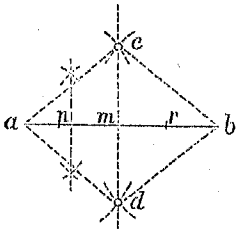
1. **Daná délka má se rozpůliti.**

Kolem krajních bodů $a$ a $b$ dané délky (obr. 54.) opíši se libovolným poloměrem, který však buď větší než polovice dané délky, po obou stranách přímky $ab$ dva (v celku tedy čtyry) oblouky, jež se protnou ve dvou bodech $c$ a $d$.

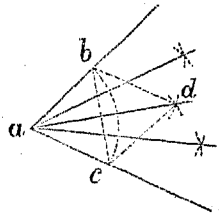
Přímkou *cd* jest délka *ab* v bodu *m* rozpůlena. Rýsujeme-li *ac*, *bc*, *ad*, *bd*, jest důkaz patrný.

Kdyby se měla daná délka *ab* rozděliti na čtyři rovné díly, rozpůlila by se týmže způsobem polovice *am* v bodu *p*, a přenesením $mr = mp$, byl by úkol řešen.

2. **Daný úhel rozpůliti** (obr. 55.).




Obr. 54.

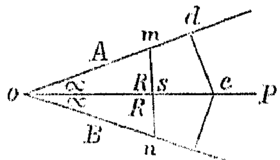



Obr. 55.

Kolem vrcholu *a* daného úhlu opíše se libovolným poloměrem oblouk, jenž protne ramena jeho v bodech *c* a *b*.

Z těchto bodů *b* a *c* opíší se opět poloměrem kterýmkoliv (avšak dosti dlouhým) nové oblouky, jež se protnou v bodě *d*; přímka *ad* rozpoluje daný úhel.

Důkaz: Rýsujeme-li *bc*, *bd* a *cd*, obdržíme dva rovnoramenné trojúhelníky o společné půdici. Rozpůlíme-li podobně $\sphericalangle$ *c* a *d* a $\sphericalangle$ *b* a *d*, bude daný úhel na čtyři rovné díly rozdělen.




Obr. 56.

Přímka, jež rozpoluje úhel, jest jeho osou souměrnosti.

1. Kolmice v bodě osy souměrnosti úhlu vztyčená, jest osou půlena.

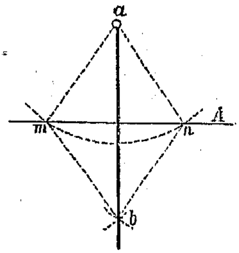
2. Každý bod osy souměrnosti jest od obou ramen úhlu rovně vzdálen.

Dokázati poučky ty na základě shodnosti $\triangle$.

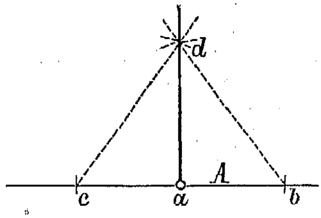
Dodatek: Osa souměrnosti úhlu jest geometrickým místem středů kruhů mezi ramena úhlu vepsaných.

3. **S bodu mimo přímku ležícího spustiti na přímku kolmici.**

Kolem daného bodu *a* (obr. 57.) opíše se poloměrem dosti dlouhým oblouk, jenž danou přímku *A* protne v bodech *m* a *n*;



Obr. 57.



Obr. 58.

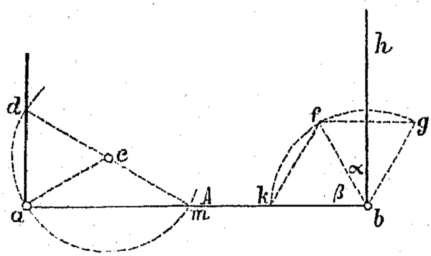
kolem bodu *m* a *n* opíší se libovolným, ale stejným poloměrem oblouky, které se protnou v bodě *b*.

Přímka $ab \perp A$. (Proč?)

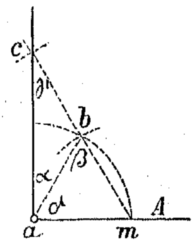
4. **V daném bodu přímky vztýčiti kolmici** (obr. 58.).

Má-li se v bodu *a* přímky *A* na tuto přímku vztýčiti kolmice, učiní se $ac = ba$, a opíší se kolem *c* a *b* libovolným poloměrem oblouky, jež se v bodě *d* protnou; $ad \perp A$. (Proč?)

5. **V krajním bodu přímky vztýčiti kolmici, aniž by se tato přímka prodloužila.**



Obr. 59.



Obr. 60.

První způsob. Kolem libovolně zvoleného mimo danou přímku *A* ležícího bodu *c* (obr. 59.) opíše se poloměrem *ac* oblouk, který danou přímku *A* v bodu *m* protíná. Rýsuje-li se průměr *dcm* a tětiva *ad*, jest *ad* žádanou kolmicí.

V rovnoramenném $\triangle$ *acm* jest $\sphericalangle cam = cma$, v rovnoramenném $\triangle$ *acd* jest $\sphericalangle dac = cda$, v trojúhelníku *dam* rovná se tudíž úhel při *a* součtu úhlů při *m* a při *d*; proto jest $\sphericalangle dam = R$.

Druhý způsob. Kolem bodu *b* (obr. 59.), ve kterém jest kolmici vztýčiti, opíše se libovolným poloměrem oblouk, jenž v bodu *k* protíná danou přímku. Od tohoto bodu *k* počínaje, protne se prvý oblouk týmž rozevřením kružidla dvakráte po sobě novými oblouky v bodech *f* a *g*. Potom rozpolí se úhel *fbg* přímkou *hb*, jež jest žádanou kolmicí.

Důkaz. Rýsuje-li se *kf* a *fb*, jest $\triangle\ kfb$ rovnostranný, tedy $\sphericalangle\ \beta = 60^0$; z téhož důvodu jest i, rýsuje-li se *fg* a *bg*, $\sphericalangle\ fbg = 60^0$, polovice jeho pak $\sphericalangle\ \alpha = 30^0$, tudíž

$$\sphericalangle\ \beta + \alpha = R, \text{ t. j.}$$
$$bh \perp A.$$

Třetí způsob. Kolem bodu *a* (obr. 60.) opíše se oblouk libovolně velkým poloměrem, který v bodu *m* přímku *A* protíná. Z bodu *m* protne se oblouk tento obloukem jiným, týmž poloměrem opsaným, v bodu *b*. Po té rýsuje se *bm*, učiní $bc = bm$ a spojí *c* s *a*. $ca \perp A$.

Důkaz. V rovnostranném trojúhelníku *abm* jest

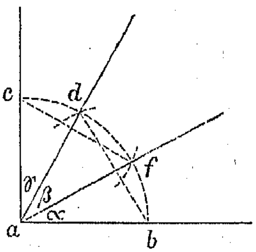
$$\sphericalangle\ \beta = 60^0;$$

$\sphericalangle\ \beta$ jest vnějším úhlem rovnoramenného $\triangle\ abc$, tedy

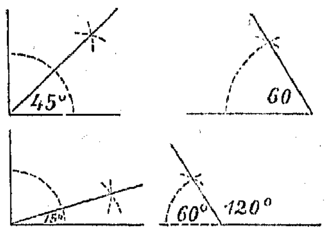
$$\sphericalangle\ \beta = \alpha + \gamma \text{ t. j.}$$
$$\sphericalangle\ \alpha = 30^0$$
$$\sphericalangle\ \alpha + \delta = 30 + 60 = 90^0, \text{ tudíž}$$
$$ac \perp A.$$

6. **Rozděliti úhel pravý na tři rovné díly** (obr. 61.).

Kolem vrcholu opíše se libovolným poloměrem čtvrtina kružnice, jež protne ramena v *b* a *c*; kolem těchto bodů týmže



Obr. 61.



Obr. 62.

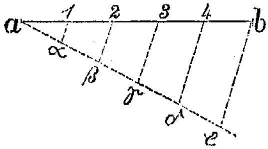
poloměrem $ab = ac$ opíší se kružnicové oblouky, jež protnou oblouk *bc* v bodech *d* a *f*.

Rýsuje-li se $ad$ a $af$, tedy jest daný úhel těmito přímkami na tři rovné díly rozdělen. (Proč?)

7. **Sestrojiti úhel** $90^\circ$, $45^\circ$, $60^\circ$, $15^\circ$, $120^\circ$, $135^\circ$.

Konstrukce tyto jsou snadny na základě úkolů předchozích.

8. **Danou délku na části sobě rovné rozděliti.**



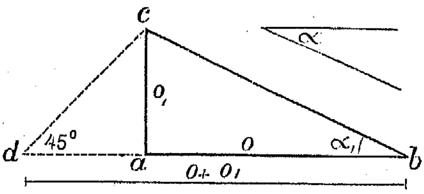

Obr. 63.

Budiž $ab$ (obr. 63.) danou délkou. Krajním bodem této délky na př. bodem $a$ rýsuje se přímka běhu libovolného, který však není příliš málo od běhu $ab$ odchýlen. Na tuto přímku naměří se tolik mezi sebou rovných, jinak ale libovolně velkých dílů, na kolik částí se má $ab$ rozděliti. Koncový bod posledního dílu spojí se s druhým krajním bodem $b$. K této přímce rýsují se ostatními body dělícími rovnoběžky, jimiž jest délka $ab$ na žádaný počet sobě rovných dílů rozdělena.

Důkaz plyne bezprostředně z věty 3. §. 56.

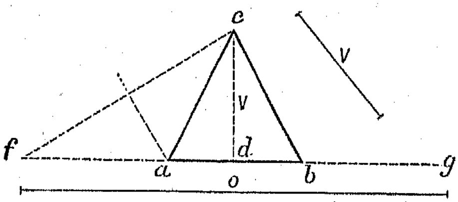
§. 59. **Rýsování trojúhelníků z daných částí určovacích.**

1. **Rýsovati pravoúhlý trojúhelník, dán-li jest součet odvěsen a úhel ostrý.**




Obr. 64.

Rozbor: V pomocném obrazci (obr. 64.) buď $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$ a $db$ součtem odvěsen. Rýsujme přímku $cd$, již stanoví se souvislost daného bodu $d$ s hledaným bodem $c$. Rameno $bc$ jest jedním a přímka $dc$ (o $45^\circ$ od $db$ odchýlená) druhým geometrickým místem vrcholu $c$. Která jsou geometrická místa vrcholu $a$?




Obr. 65.

2. **Rýsovati rovnoramenný trojúhelník, dán-li jest obvod jeho a výška.**

Rozbor: V obrazci (obr. 65.) vytkněme v trojúhelníku $abc$ danou výšku $cd$ a daný obvod $fg$ tím, že učiníme $af = ac$, $bg = bc$. Poněvadž jest

$\triangle$ *fcg* rovnoramenný, jest *d* uprostřed délky *fg*. Geometrická místa pro vrchol *c* jsou: 1. kolmice *dc*, 2. kružnice poloměrem v bodu *d* rýsovaná. — $\triangle$ *fac* jest rovnoramenný; místem geometrickým pro jeho temeno *a* jest kolmice uprostřed půdice *fc* vztýčená. Ku stanovení vrcholu *b* stačí podmínka $ob = oa$.

**Rýsovati trojúhelník, jsou-li dány dva úhly a obvod jeho.**

Rozbor. V $\triangle$ *abc* (obr. 66.) vytkněme

$\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$,

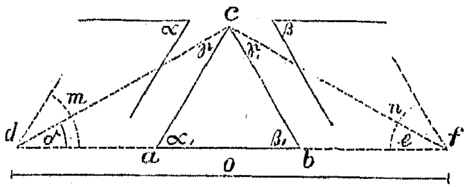
$\sphericalangle \beta_1 = \beta$

a učiňme

$ad = ac$,

$bf = bc$;

potom jest $df = o$ daným obvodem.



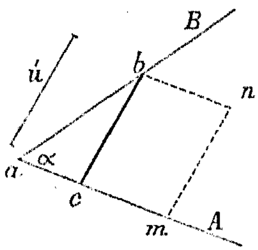
Obr. 66.

V rovnoramenném $\triangle$ *dca* jest $\sphericalangle \delta = \gamma = \frac{\alpha_1}{2}$.

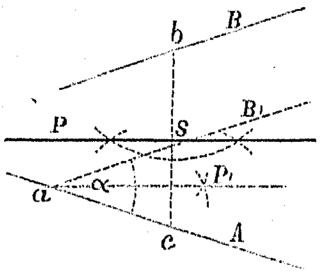
Z téhož důvodu $\sphericalangle \varepsilon = \frac{\beta_1}{2}$. Geometrická místa pro vrchol *c* jsou přímky *df* a *cf*. (Proč?)

## §. 60. Některé jiné konstrukce.

1. **Mezi rameny daného úhlu rýsovati úsečku rovnoběžnou a stejně dlouhou s danou délkou.**



Obr. 67.



Obr. 68.

Daný úhel budiž $\alpha$ a daná délka *ú* v obr. 67.

Libovolným bodem *m* jednoho ramena (*A*) daného úhlu rýsuje se $mn \| ú$, a učiní se $mn = ú$. Bodem *n* rýsuje se potom

$nb = A$. Průsečíkem $b$ této rovnoběžky s druhým ramenem $B$ úhlu daného rýsuje se úsečka žádaná $bc \| ú$. Proč jest $bc = ú$?

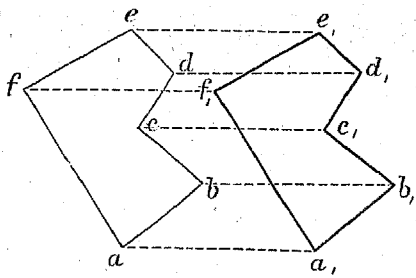
2. **Stanoviti přímku, úhel dvou různoběžek půlící, neprotínají-li se tyto různoběžky na nákresně. (Sestrojiti osu souměrnosti dvou různoběžek.)**

Buďtež dány různoběžky $A$ a $B$ v obr. 68. Kterýmkoliv bodem jedné z daných různoběžek na př. bodem $a$ přímky $A$ rýsuje se rovnoběžka ku druhé dané přímce, tedy $B' \| B$. $\sphericalangle \alpha$ se rozpůlí a na přímku $P'$ vztýčí se kdekoliv kolmice na př. $bc$; tato se rozpůlí, a v bodu $s$ se rýsuje $P \| P'$. ($P$ jest v bodu $s$ kolmo na $bc$.)

Důkaz vysvítá z úkolu 2. §. 58.

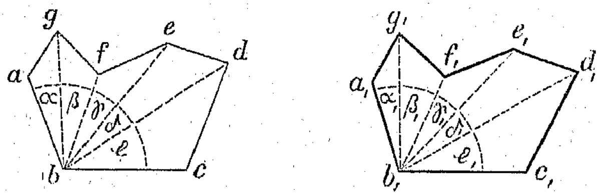
§. 61. **Rýsování shodných mnohoúhelníků.**

1. Vrcholy daného mnohoúhelníku (obr. 69.) rýsují se přímky rovnoběžné, běhu libovolného, a na nich stanoví se, od vrcholu daného mnohoúhelníku počínaje, rovné úsečky. Spojením koncových bodů těchto úseček v náležitém postupu obdrží se mnohoúhelník, který jest s daným mnohoúhelníkem shodný. (Proč?)



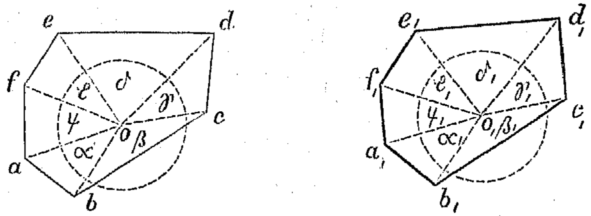
Obr. 69.

2. Daný mnohoúhelník rozloží se na trojúhelníky (buď úhlopříčnami, z jednoho vrcholu vycházejícími, anebo přímkami, které spojují vrcholy daného mno-



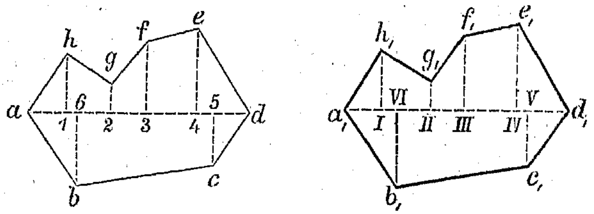
Obr. 70.

hoúhelníku s libovolně voleným bodem vnitř tohoto mnohoúhelníku), a mnohoúhelník nový, který s daným shodný býti má, složí se z trojúhelníků, které se stejnolehlými trojúhelníky daného mnohoúhelníku shodny jsou. (Obr. 70. a 71.)



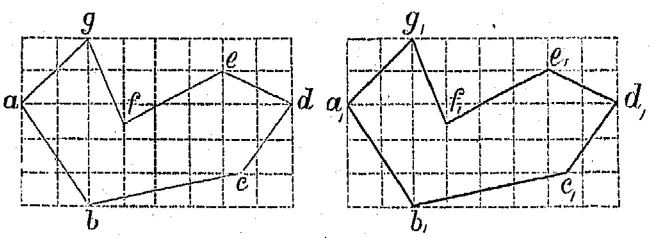

Obr. 71.

3. Jiný způsob rýsování shodných mnohoúhelníků naznačen jest obr. 72. Vnitř daného mnohoúhelníka rýsuje se nejdelší




Obr. 72.

úhlopříčka, na ni spustí se ze všech vrcholů kolmice. Poloha každého vrcholu stanoví se vzdáleností bodů 1, 2, 3, 4 atd. od bodu $a$ a délkou příslušné kolmice.




Obr. 73.

4. Upotřebení sítě čtvercové k rýsování shodných mnohoúhelníků vysvítá z obr. 73.

## §. 62. Úkoly k rýsování.

1. Danou délku rozděliti na $\alpha$) 8, $\beta$) 3, $\gamma$) 5, $\delta$) 6 rovných dílů;
2. Daný úhel rozděliti na $\alpha$) 4, $\beta$) 8 rovných dílů;
3. Pravý úhel rozděliti na 6 rovných dílů.

Rýsovati trojúhelník, dány-li jsou:

4. půdice a oba přilehlé úhly, jež mají $45^0$ a $75^0$;

5. dvě strany a jimi sevřený úhel $120^0$. Stanoviti 4 zvláštní body rýsovaného trojúhelníku;

6. všecky 3 strany; 7. dvě strany a $\sphericalangle$ $135^0$ proti delší z nich položený.

Rýsovati pravoúhlý trojúhelník dány-li jsou:

8.*a* přepona a odvěsna; 8.*b* obě odvěsny; 9. přepona a úhel $= 75^0$;
10. odvěsna a úhel $22^1/_2{}^0$;
11. výška příslušná ku přeponě a odvěsna;
12. výška kolmá na přeponu a jedna jí tvořená úsečka přepony;
13. přepona rovnoramenného trojúhelníku;
14. obvod a úhel ostrý;
15. odvěsna a součet přepony a druhé odvěsny;
16. přepona a součet obou odvěsen;
17. součet odvěsen a úhel ostrý.

Rýsovati trojúhelník rovnoramenný, dány-li jsou:

18. půdice a úhel při vrcholu ($45^0$); 19. rameno a výška;
20. výška a úhel při půdici ($30^0$);
21. rameno a úhel při půdici ($67^1/_2{}^0$);
22. obvod a výška; 23. obvod a úhel při půdici.

Rýsovati trojúhelník rovnoramenný, dány-li jsou:

24. obvod; 25. výška.

Rýsovati trojúhelník, dány-li jsou:

26. dvě strany a výška k jedné z nich příslušná;
27. výška a oba úhly při půdici;
28. půdice, jeden přilehlý úhel a součet ostatních stran;
29. obvod a úhly při půdici ($45^0$ a $75^0$).

Rýsovati čtverec, dány-li jsou:

30. obvod; 31. úhlopříčka; 32. součet strany a úhlopříčky.

Rýsovati kosočtverec, jsou-li dány:

33. obě úhlopříčky; 34. strana a jedna úhlopříčka;
35. strana a výška; 36. výška a úhel; 37. výška a úhlopříčka.

Rýsovati obdélník, jsou-li dány:

38. strana a úhlopříčka;
39. strana a součet sousedné strany a úhlopříčky;
40. úhlopříčka a součet dvou sousedných stran;
41. půdice a podmínka, že rovná se výška polovici úhlopříčky; (všimni si $\triangle$, jehož půdicí jest výška obdélníku a temeno jest průsečíkem úhlopříček);
42. strana a jí protilehlý, úhlopříčkami sevřený úhel.

Rýsovati rovnoběžník, jsou-li dány:

43. dvě sousedné strany a jimi sevřený úhel ($67^1/_2{}^0$);

44. dvě sousedné strany a jedna úhlopříčka;

45. dvě sousedné strany a jedna výška;

46. strana a úhly, které úhlopříčky s ní svírají ($15^\circ$, $60^\circ$);

47. půdice a obě úhlopříčky. (V rovnoběžníku *abcd* prodluž *ab* za *a*, rýsuj bodem *d* rovnoběžku k úhlopříčce *ac*. Rovnoběžka ta protíná prodlouženou *ab* v *f*; potom sestroj $\triangle fbd$.

48. strana, k ní příslušná výška a úhlopříčka.

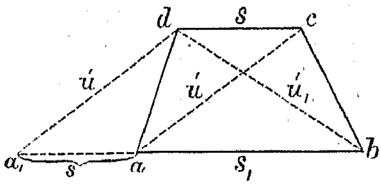
49. úhlopříčka, jí protilehlý úhel a úhel sevřený touto úhlopříčkou a stranou.

Rýsovati lichoběžník, dány-li jsou:

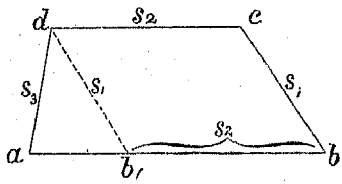
50. tři strany a výška;

51.*a* tři strany a úhel dvěma z nich sevřený;

51.*b* tři strany a úhlopříčka; 52. všecky 4 strany (obr. 74.);




Obr 74.




Obr. 75.

53. obě půdice a obě úhlopříčky (obr. 75.).

Rýsovati pravoúhlý lichoběžník, jsou-li dány:

54. obě půdice a kosé rameno:

55. obě ramena a kratší půdice;

56. obě ramena a delší půdice.

Rýsovati rovnoramenný lichoběžník, jsou-li dány:

57. obě půdice a úhel; 58. obě půdice a rameno;

59. půdice, výška a rameno.

Rýsovati čtyřúhelník, dány-li jsou:

60. 3 strany a oba jimi sevřené úhly ($75^\circ$, $120^\circ$);

61. 3 strany a obě úhlopříčky;

62. 4 strany a úhel; 63. 4 strany a úhlopříčka;

64. 2 strany a všechny (3) k nim přilehlé úhly.

Rýsovati deltoid, jsou-li dány:

65. nerovné strany a $\alpha$) úhel jimi sevřený ($135^\circ$) $\beta$) úhel rovnými stranami sevřený ($67^1/_2{}^\circ$);

66. obě úhlopříčky a strana;

67. obě úhlopříčky a úhel proti vedlejší úhlopříčce ležící.

## Část čtvrtá.

# O mnohoúhelnících obsahem rovných.

§. 63. **Obsahem plochy, či krátce obsahem mnohoúhelníku rozumíme velikost jím zaujaté roviny.**

Mnohoúhelníky, které mají stejné obsahy, jsou si rovny.

Ku měření obsahu mnohoúhelníku béře se jiný mnohoúhelník známé velikosti za jednotku plošné míry a zkoumá se, kolikkráte jest v onom mnohoúhelníku obsažen. Číslo, udávající, kolikkráte jednotka plochomíry v daném mnohoúhelníku jest obsažena, jmenuje se číslo míry čili měrné číslo jeho obsahu.

Jednotkou pro měření ploch jest čtverec, jehož strana jest jednotkou míry délkové. Míra ku měření ploch slove míra čtverečná.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 $m^2$ = | čtverečný | metr, | 1 $dkm^2$ = | čtverečný | dekametr, |
| 1 $dm^2$ = | „ | decimetr, | 1 $hm^2$ = | „ | hektometr, |
| 1 $cm^2$ = | „ | centimetr, | 1 $km^2$ = | „ | kilometr, |
| 1 $mm^2$ = | „ | millimetr, | 1 $\mu m^2$ = | „ | myriametr. |

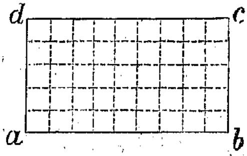
Čtverečný dekametr slove též ar (a).

100 a = 1 ha (hektar).

Stanovení plošného obsahu bezprostředným kladením jednotky plochomíry bylo by obtížno a není mimo to vždy možné. Proto určujeme plošné obsahy obyčejně prostředečně, měříce ony délky, na kterých velikost jejich závisí, a vypočítávajíce potom z těchto měrných čísel délek počtem hledaný obsah.

§. 64. **Obsah obdélníku a čtverce.**

V obdélníku *abcd* (obr. 76.) změří se délka půdice *ab* a výšky *ad* toutéž jednotkou délkovou. Je-li tato jednotka v půdici *a*-kráte a ve výšce *b*-kráte obsažena, dá se jednotka plochomíry v obdélníku po půdici *a*-kráte položiti. Takový pás, *a* jednotek plošných obsahující, dá se po výšce *b*-kráte položiti. Obdélník tedy má $a \times b$ plošných jednotek. Je-li $p$ měrné číslo obsahu obdélníka jest tedy $p = ab$, t. j.



Obr. 76.

**Měrné číslo obsahu obdélníku rovná se součinu z měrných čísel půdice (délky) a výšky (šířky).**

Pravidlo toto vyjadřuje se obyčejně takto:

*Obsah obdélníku rovná se součinu z jeho půdice a výšky, aneb plošný obsah obdélníku rovná se součinu ze dvou jeho sousedných stran.*

Kdekoli se tohoto stručného proslovení užívá, jest součinem délek vždy součin měrných jich čísel míněn.

Ze vzorce $p = a \cdot b$ plyne

$$a = \frac{p}{b};\ b = \frac{p}{a}.$$

Poněvadž každý čtverec může se považovati za obdélník, jehož půdice a výška mají tutéž délku, následuje ze předešlého, je-li $s$ délka strany a $p$ plocha čtverce, že

$$p = s \cdot s = s^2, \text{ t. j.}$$

**Obsah čtverce rovná se dvojmoci měrného čísla jeho strany.**

**Úkoly.** 1. Kolik $dm^2$ má $m^2$; kolika $dkm^2$ rovná se $km^2$?

2. Kolik $m^2$ mají 8 a; kolik $cm^2$ má 1 $m^2$?

3. Vypočítati obsah obdélníku, mají-li jeho rozměry *a*) 12·478 m a 7·524 m (na 3 des. místa), *b*) $29\frac{7}{8}$ dm a 12·914 dm (2 deset. místa), *c*) $14\frac{2}{7}$ m a 6·3 m, *d*) $21\frac{2}{3}$ m a $10\frac{2}{13}$ m, *e*) 8.46 a $8\frac{3}{4}$ cm?

4. Rolník zamění 2 pole za pole jediné rovně velké s polemi zaměněnými. Prvé z jeho polí bylo 36·4 m dlouhé a 30 m široké, druhé bylo 58·8 m dlouhé a 46·4 m široké. Nové pole jest 72 m dlouhé, jak jest široké?

5. Obdélník jest 8·4 m dlouhý a 3·8 m široký. Rovně velký obdélník jest 7·6 m dlouhý, jak jest široký?

6. Kolik prken 4 m dlouhých a $\frac{1}{2}$ m širokých je třeba na obdélnou podlahu 12 m dlouhou a 8 m širokou?

7. Dvůr 27 m dlouhý a 21 m široký jest vydlážditi krychlovými dlaždicemi o hraně 3 dm; kolik dlaždic bude třeba?

8. Dvě stejně velké zahrady obehnány jsou plotem; první jest čtvercová o straně 48 m; druhá obdélná zahrada jest 36 m široká. Oč jest plot kolem obdélné zahrady delší?

9. Zrcadlo s rámcem jest 8·2 dm dlouhé a 5·8 dm široké; rámec jest 6 cm široký. Jak velká jest zrcadlová plocha?

10. Ze dvou rovně velkých obdélníků má každý 945 m²; první jest 45 m a druhý 35 m dlouhý. Oč jest obvod prvého větší než obvod druhého?

11. Obdélná zahrada jest 40 m dlouhá a 30 m široká. Uprostřed protínají se 2 ku stranám rovnoběžné cesty $1\frac{4}{5}$ m široké; kolem zahrady jdou cesty $\frac{4}{5}$ m široké. Kterou plochu zaujímají cesty?

12. Obvod obdélníku = 120 dm délka jest o 14 m větší než šířka; obsah =? (Je-li délka $x$, jest šířka $60 - x$.)

13. Obvod obdélníku = 56 dm; šířka = $\frac{3}{4}$ délky; vypočítati obsah jeho.

14. Obvod obdélníku = 70 cm, šířka = $\frac{2}{3}$ délky; obsah =?

15. Dva obdélníky mají týž obvod = 200 m; strany prvého jsou v poměru jako $2:3$ a strany druhého jsou v poměru jako $3:7$. Oč jest obsah prvého větší než obsah druhého?

16. Vypočítati obsah obdélníku, jehož

*a*) obvod = 46 m; $\frac{1}{5}$ délky $+ \frac{1}{4}$ šířky = 5 m;

*b*) obvod = 92 m; $\frac{2}{3}$ délky $- \frac{1}{2}$ šířky = 12 m;

*c*) obvod = 102 m; $\frac{1}{9}$ délky $+ \frac{2}{5}$ šířky = 10 m;

*d*) obvod = 72 m; $\frac{2}{3}$ šířky $+ \frac{3}{7}$ délky = 19 m;

17. Délka obdélníku = 2násobné šířce. Zvětší-li se každá strana o 1 m, zvětší se obsah o 22 m². Které rozměry má daný obdélník?

18. Délka obdélníku = 3násobné šířce. Zmenší-li se každá jeho strana o 2 m, zmenší se obsah o 68² m. Vypočítati rozměry daného obdélníku.

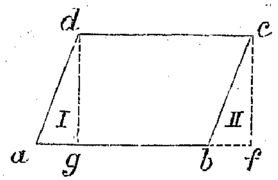
19. Vypočítati obsah čtverce, jehož v cm udaná strana $x$ hoví podmínce:

$$a)\quad \frac{\frac{x}{2}-2}{3} - \frac{\frac{x}{3}+1}{5} = \frac{5}{6};$$

$$b)\quad \frac{\frac{2x}{7}-\frac{3}{5}}{9} = \frac{x}{35}.$$

## §. 65. Obsah kosoúhlého rovnoběžníku.

Je-li v obr. 77. *abcd* kosoúhlý rovnoběžník a spustí-li se s jeho vrcholů *c* a *d* kolmice na půdici *ab*, vznikne obdélník *dgcf*, který má s daným rovnoběžníkem stejnou půdici i výšku. Pravoúhlé trojúhelníky $I$ a $II$ jsou shodny (proč?) Přidáním trojúhelníku $I$ neb $II$ k lichoběžníku $dcgb$, obdrží se buď rovnoběžník $abcd$, buď obdélník $dgcf$, proto jest rovnoběžník $abcd$ = obdélníku $dgcf$, tudíž:



Obr. 77.

**Obsah každého kosoúhlého rovnoběžníku rovná se obsahu obdélníku, který s ním má stejnou půdici i výšku.**

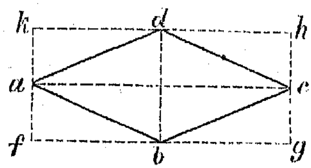
**Následky: 1. Obsah každého rovnoběžníku rovná se součinu z jeho půdice a výšky.**

**2. Obsahy rovnoběžníků, které mají rovné půdice i rovné výšky, jsou sobě rovny.**

**3. Obsahy dvou rovnoběžníků jsou v poměru součinů z půdic a výšek.**

§. 66. **Obsah kosočtverce, čtverce a deltoidu.**

Obsah kosočtverce určuje se týmž způsobem, jako obsah kosoúhlého rovnoběžníku vůbec; může se však též vypočísti z obou úhlopříček, které svírají v kosočtverci pravý úhel.



Obr. 78.

Rýsuje-li se totiž v kosočtverci $abcd$ (obr. 78.) úhlopříčky a mimo to vrcholy jeho přímky s úhlopříčkami rovnoběžné; obdrží se obdélník $fghk$, jehož půdice a výška rovny jsou úhlopříčkám kosočtverce. Kosočtverec jest složen ze čtyř trojúhelníků, jakých na obdélník osm připadá; rovná se tedy polovici obdélníku toho. Je-li $p$ obsah a $ú$ a $ú_1$ délka úhlopříček v kosočtverci, jest

$$p = \frac{ú \cdot ú_1}{2} = \frac{ú}{2} \cdot ú_1 = ú \frac{ú_1}{2}, \text{ t. j.}$$

**Obsah kosočtverce rovná se polovičnému součinu z měrných čísel obou jeho úhlopříček.**

Toto pravidlo prospívá mnohdy ve příkladech praktických, poněvadž se vzdálenost protějších vrcholů (úhlopříčky) pohodlněji měří, než vzdálenost strany od protějšího vrcholu (výška).

**Důsledek: Obsah čtverce rovná se polovičnému součinu z obou úhlopříček.**

Protože však ve čtverci úhlopříčky rovnou mají délku, **rovná se obsah čtverce polovici dvojmoci měrného čísla úhlopříčky.** (Čtverec nad úhlopříčkou jest dvakráte tak velký jako daný čtverec.)

Řečená pravidla platí též pro počítání obsahu deltoidu. (Proč?)

§. 67. **Obsah trojúhelníku.**

Rýsuje-li se v rovnoběžníku úhlopříčka, dělí tato rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky, z nichž každý má tutéž půdici i výšku jako daný rovnoběžník.

**Trojúhelník jest tedy polovicí rovnoběžníku, který s ním má rovnou půdici i výšku.**

**Následky: 1. Obsah trojúhelníku rovná se polovici součinu z jeho půdice a výšky (aneb součinu z půdice a polovice výšky).**

Je-li $p$ obsah trojúhelníku, $z$ měrné číslo jeho půdice a $v$ měrné číslo výšky, jest

$$p = \frac{z \,.\, v}{2} = z \,.\, \frac{v}{2} = \frac{z}{2} \,.\, v;$$

$$v = \frac{2p}{z}; \quad z = \frac{2p}{v}.$$

**2. Obsah trojúhelníku pravoúhlého rovná se polovičnému součinu z měrných čísel jeho odvěsen.**

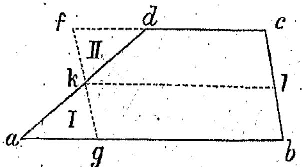
**3. Trojúhelníky o rovných půdicích a výškách mají rovné obsahy.**

**4. Trojúhelníky o společné půdici, jichž vrcholy jsou na přímce k půdici rovnoběžné, jsou si rovny.**

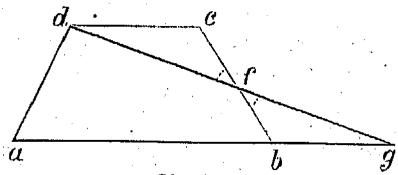
**5. Obsahy trojúhelníků jsou v témž poměru jako součiny z měrných čísel půdic a výšek.**

§. 68. **Obsah lichoběžníku.**

Rýsuje-li se v lichoběžníku $abcd$ (obr. 79.) středem $k$



Obr. 79.



Obr. 80.

jednoho ramena přímka $kl$ rovnoběžně k půdicím tohoto lichoběžníku a mimo to přímka $fg$ rovnoběžně k druhému ramenu, jest $\triangle fkd \cong akg$. Přidáním trojúhelníku $I$ neb $II$ ku pětiúhelníku $gbcdk$, shledá se, že lichoběžník $abcd$ = rovnoběžníku $bcfg$.

Výška tohoto rovnoběžníku jest táž jako výška lichoběžníku a půdice jeho

$$bg = kl = \frac{ab + cd}{2} \text{ t. j.:}$$

**Lichoběžník má týž obsah jako rovnoběžník o téže výšce, jehož půdice rovná se střední příčce (t. j. polovici součtu obou půdic tohoto lichoběžníku.**

**Následek: Obsah lichoběžníku rovná se součinu z polovičného součtu měrných čísel obou rovnoběžných stran a měrného čísla výšky.**

Je-li $p$ obsah, $z$ a $z_1$ délky rovnoběžných stran a $v$ výška lichoběžníku, jest

$$p = \frac{z + z_1}{2} \cdot v = \frac{v\,(z + z_1)}{2} = \frac{v}{2}\,(z + z_1).$$

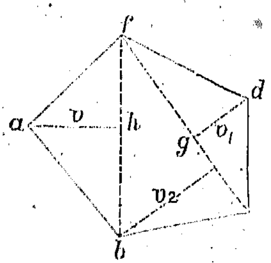
Pravidlo, kterak počítá se obsah lichoběžníku, vyvoditi lze též takto:

V obr. 80. rozpol $cb$ v $f$; rýsuj $df$ až do $g$. Potom jest $\triangle bfg \cong cdf$, tudíž $bg = cd$ a

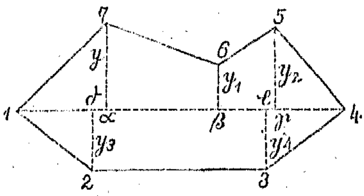
trojúhelník $agd$ = lichoběžníku $abcd$.

§. 69. **Obsah mnohoúhelníku.**

Aby se obsah mnohoúhelníku n e p r a v i d e l n é h o s t a n o v i l, rozloží se tento mnohoúhelník buď úhlopříčkami na samé trojúhelníky (obr. 81.) aneb na trojúhelníky pravoúhlé a




Obr. 81.




Obr. 82.

lichoběžníky (obr. 82.), že se rýsuje nejdelší úhlopříčka a na tuto spustí se s jednotlivých vrcholů kolmice. Obsahy jednotlivých těchto trojúhelníků aneb trojúhelníků pravoúhlých a lichoběžníků se jednotlivě vypočtou a sečtou.

**Úkoly.** 1. Součet půdice a výšky kosodélníku $=$ 17 m; $^1/_4$ půdice a $^1/_5$ výšky $=$ 4 m. Vypočítati jeho obsah.

2. V cm udaná půdice $x$ kosodélníku hoví podmínce:

$$\frac{x+2}{6} - \frac{\frac{2}{7}x - 5}{3} = 4;$$

jeho obsah rovná se obsahu čtverce o straně 21 cm; jak jest vysoký?

3. Kosočtverečné pole má $4^1/_2$ a; vzdálenost 2 protějších mezí $=$ 18 m; vypočítati jeho obvod.

4. Kosočtverec má 35 m$^2$, jedna úhlopříčka $=$ $9^1/_3$ m; jak dlouhá jest druhá úhlopříčka?

5. Kosočtverec má 165 m$^2$ a jest $7^1/_2$ m vysoký; vypočítati jeho obvod.

6. Úhlopříčka kosočtverce má $13^1/_3$ m; druhá úhlopříčka jest o $1^1/_2$ m delší než $^3/_8$ první úhlopříčky. Vypočítati jeho obsah.

7. Součet úhlopříček kosočtverce $=$ 41 m; $^1/_5$ delší úhlopříčky jest o 3 m větší než $^1/_8$ kratší úhlopříčky. Vypočítati jeho obsah.

8. Půdice trojúhelníku má 45 cm, jeho obsah rovná se obsahu obdélníku, jenž má 106 cm obvodu a jehož délka jest o 17 cm větší než šířka. Jak vysoký jest trojúhelník?

9. Výška trojúhelníku má se k jeho půdici jako $\frac{1}{4} : \frac{2}{5}$, součet obou $=$ $45^1/_2$ m; vypočítati jeho obsah.

10. V pravoúhlém trojúhelníku jest $^1/_6$ odvěsny o 1 m delší než její $^2/_9$; druhá odvěsna $=$ $2^2/_9$ násobné první odvěsně. Vypočítati jeho obsah.

11. Součet půdice a výšky trojúhelníku $=$ $7^5/_6$ m; $^1/_3$ půdice a $^1/_5$ výšky $=$ $2^1/_6$ m. Vypočítati jeho obsah.

12. Součet úhlopříček deltoidu $=$ 55 m; $^3/_8$ hlavní úhlopříčky $-$ $^2/_5$ vedlejší úhlopříčky $=$ 9 m. Vypočítati jeho obsah.

13. Přičtou-li se k $^1/_6$ hlavní úhlopříčky deltoidu její $^2/_5$ obdrží se 17 m; $^1/_8$ vedlejší úhlopříčky $=$ $^1/_{15}$ hlavní úhlopříčky. Vypočítati jeho obsah.

14. Lichoběžník má 272 m$^2$ a jest $8^8/_{11}$ m vysoký; dolejší jeho půdice má $18^2/_3$ m; vypočítati hořejší půdici.

15. Dolejší půdice lichoběžníku má $32^1/_2$ m; hořejší půdice rovná se $^3/_5$ půdice dolejší a výška $=$ střední příčce. Vypočítati jeho obsah.

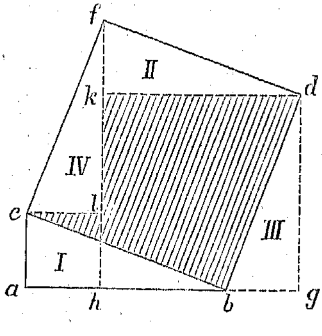
16. Dolejší půdice lichoběžníku $=$ $17^1/_2$ m; hořejší půdice jest o $^3/_4$ kratší než $^5/_7$ dolejší půdice; výška $=$ $^4/_9$ součtu půdic. Vypočítati jeho obsah.

17. Měrná čísla půdic lichoběžníku jsou: $3^1/_2$ $b$ a $2^1/_3$ $b$; obsah $=$ 15 $b^2$. Jak jest vysoký?

## §. 70. Věta Pythagorova.

Budiž v obr. 83. trojúhelník $abc$ pravoúhlý a $bcdf$ čtverec nad přeponou jeho sestrojený. Spustí-li se s $d$ a $f$ kolmice $dg$

a $fh$ na $ab$ a s $d$ a $c$ kolmice $kd$ a $cl$ na $hf$, vzniknou čtyři shodné trojúhelníky $I$ $II$ $III$ a $IV$. (Proč jsou shodny?)



Obr. 83.

Čtverec $cbdf$ jest složen z pětiúhelníku $bdklc$ a trojúhelníků $II$ a $IV$; oba čtyřúhelníky $ahlc$ a $hgdk$ složeny jsou z téhož pětiúhelníku $bdklc$ a ze shodných trojúhelníků $I$ a $III$, pročež jest

$$bdfc = ahlc + hgdk.$$

Ve čtyřúhelníku $ahlc$ jest

$$ac \parallel hl \text{ a } cl \parallel ah,$$

proto jest rovnoběžník, a protože jest úhel při $a = R$, jest rovnoběžník pravoúhlý. Jako stejnolehlé strany ve shodných trojúhelnících $I$ a $IV$ jest $ac = cl$, tudíž jest tento pravoúhlý rovnoběžník též rovnostranný a jest tedy čtverec nad odvěsnou $ac$. Podobně dokáže se, že jest $hgdk$ čtvercem nad odvěsnou $ab$ a platí tedy věta:

**V každém pravoúhlém trojúhelníku rovná se čtverec nad přeponou součtu čtverců nad oběma odvěsnama.**

Tato věta jmenuje se věta Pythagorova po svém vynálezci Pythagorovi.

**Úkoly:** 1. V pravoúhlém trojúhelníku má odvěsna 7 m; přepona jest o 1 m delší než druhá odvěsna. Vypočítati jeho obvod. (Je-li neznámá odvěsna $x$, jest přepona $= x + 1$. Dle poučky Pythagorovy jest: $(x + 1)^2 = x^2 + 7^2$.

2. Vypočítati obvod a obsah pravoúhlého trojúhelníku, má-li
*a*) odvěsna 12 m a přepona jest o 2 m delší než druhá odvěsna;
*b*) „ 39 cm „ „ „ „ 9 cm „ „ „ „
*c*) „ 48 dm „ „ „ „ 6 „ „ „ „ „ .

3. V obdélníku 56 m dlouhém jest úhlopříčka o 32 m větší než šířka; vypočítati jeho obvod.

4. V obdélníku 15 cm širokém jest úhlopříčka o 5 cm větší než délka; vypočítati jeho obsah.

5. Vypočítati obvod a obsah rovnoramenného trojúhelníku, má-li:
*a*) půdice 24 m a rameno jest o 2 m delší než výška;
*b*) „ 40 cm „ „ „ „ 8 cm „ „ „
*c*) „ 66 dm „ „ „ „ 9 dm „ „ „ .

6. Půdice trojúhelníku rozdělena jest výškou na 2 úseky, z nichž má kratší 5 m; ke kratšímu úseku přiléhá strana o 1 m delší než výška. K delšímu úseku přilehlá strana jest o 6 m delší než tento úsek. Vypočítati obvod a obsah trojúhelníku.

7. V rovnoramenném lichoběžníku mají půdice 30 m a 14 m; rameno jest o 2 m delší než výška. Vypočítati obvod a obsah jeho. (Je-li výška $x$, je rameno $x + 2$. Spustí-li se z krajního bodu hořejší půdice výška, jest rameno přeponou pravoúhl. trojúhelníku, jehož odvěsny jsou $x$ a $8$).

8. V rovnoramenném lichoběžníku mají půdice 43 a 25 m; rameno jest o 3 m delší než výška. Vypočítati obvod a obsah.

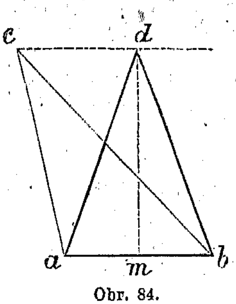
9. Vypočítati obvod pravoúhlého lichoběžníku, jehož půdice mají 60 m a 46 m a kosé rameno jest o 2 m delší než kolmé.

10. Řešiti úkol předešlý, mají-li půdice 80 cm a 44 cm a rozdíl ramen jest 8 cm.

## O proměňování a dělení mnohoúhelníků.

§. 71. Mnohoúhelník na jiný proměniti znamená, rýsovati mnohoúhelník, jenž by s mnohoúhelníkem daným měl rovnou plochu.

1. **Proměniti trojúhelník různostranný na jiný rovnoramenný v téže půdici.**

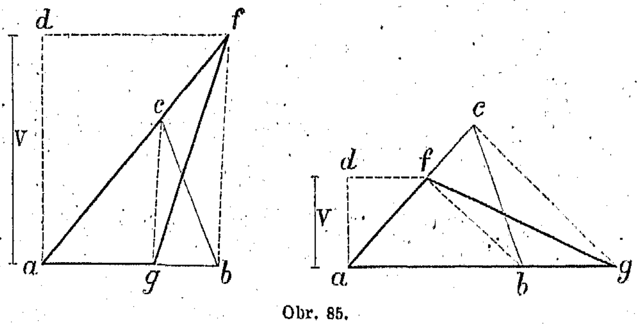



Obr. 84.

Je-li v obr. 84. daný trojúhelník $abc$, jest geometrickým místem vrcholu $d$ trojúhelníku žádaného $\alpha$) kolmice $md$ v středu základny $ab$ na tuto vztýčená, $\beta$) přímka $cd$ vrcholem $c$ ku $ab \parallel$ rýsovaná.

2. **Proměniti trojúhelník na jiný, jenž by měl jinou (buď větší neb menší) výšku.**

Budiž v obr. 85. $abc$ daný trojúhelník a $v$ výška trojúhelníku žádaného. Ve vrcholu $a$ vztýčí se kolmice na půdici $ab$ a učiní se $ad = v$. Bodem $d$ rýsuje se přímka k $ab$ rovno-




Obr. 85.

běžná, která stranu $ac$ (neb její prodloužení) v $f$ protíná. Rýsuje se $fb$ a potom $cg \parallel fb$; $\triangle\ afg$ jest trojúhelník žádaný.

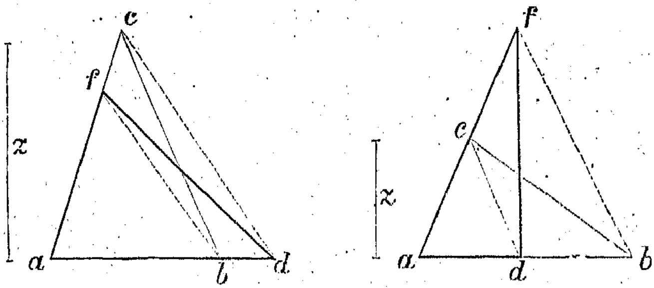
Důkaz: $\triangle\ acg = \triangle\ acg$

$\triangle\ fcg = \triangle\ bcg$

$\triangle\ acg + \triangle\ fcg = \triangle\ acg + \triangle\ bcg$

$\triangle\ agf = \triangle\ abc.$

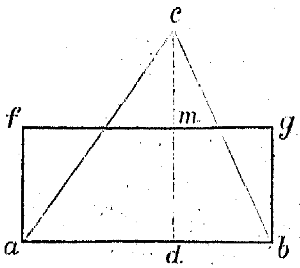
3. **Proměniti trojúhelník na jiný, jehož půdice má danou (buď větší neb menší) délku.**



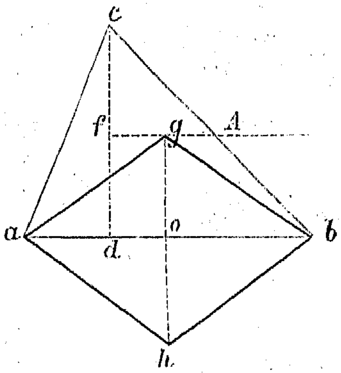

Obr. 86.

Sestrojení jest z obr. 86. patrno; důkaz podobný předešlému.

4. **Proměniti trojúhelník na obdélník.** Je-li v $\triangle\ abc$ (obr. 87.) $cd$ výška, rozpůlí se tato v $m$ a rýsuje se tímto bodem přímka




Obr. 87.




Obr. 88.

$||$ ku $ab$. Kolmice v $a$ i $b$ na $ab$ vztýčené stanoví na této rovnoběžce ostatní dva vrcholy $f$ a $g$ obdélníku.

Důkaz: pl. $abfg = ab\ .. md$;

pl. $\triangle\ abc = ab\ .\ \frac{cd}{2} = ab\ .\ md$, tedy

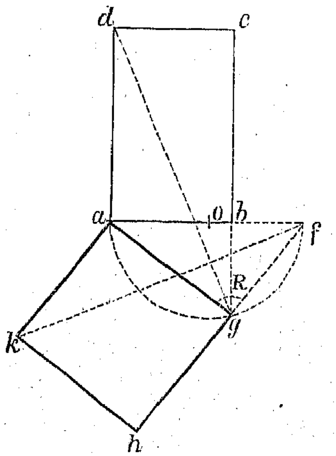
pl. $abfg = \triangle\ abc$.

5. **Proměniti trojúhelník na kosočtverec.**

Konstrukce jest z obr. 88. patrna. Proč rovná se kosočtverec *ahbg* trojúhelníku *abcd*.

6. **Proměniti lichoběžník na trojúhelník.**

V obr. 80. třeba učiniti $bg = cd$; potom jest $\triangle bgf \cong dcf$ (proč?) a $abcd = agd$?




Obr. 89.

7. **Proměniti obdélník na čtverec.**

Kratší strana *ab* daného obdélníku *abcd* (obr. 89.) prodlouží se za vrchol a učiní se $af = ad$; nad *af* jako průměrem rýsuje se polokružnice, kterou prodloužená strana *bc* v bodu *g* protíná. Tětiva *ag* jest stranou žádaného čtverce, který se snadno rýsuje.

D ů k a z : Rýsujme přímky *dg* a *fk*.

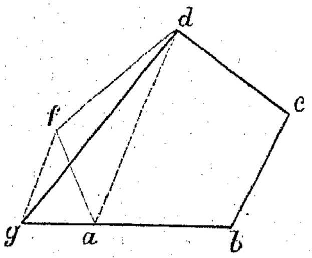
$\triangle akf = \triangle akg = {}^1/_2$ čtverce *aghk*; mimo to jest

$\triangle adg = \triangle abd = {}^1/_2$ obdélníku *abcd*.

Poněvadž $\triangle akf \cong adg$ (proč?) jest čtverec $aghk =$ obdélníku *abcd*.

8. **Proměniti mnohoúhelník na jiný, který má o jednu stranu méně.**

Je-li pětiúhelník *abcdf* (obr. 90.) proměniti na čtyřúhelník tím, že se má určitý jeho vrchol (na př. *f*) odstraniti, rýsuje se úhlopříčka (*da*), spojující sousedné vrcholy onoho, jenž odstraněn býti má, a k ní rýsuje se rovnoběžka oným vrcholem. Bod (*g*), v němž tato rovnoběžka prodlouženou stranu (*ab* neb *dc*) protíná, jest novým vrcholem žádaného čtyřúhelníku *gbcd*.




Obr. 90.

D ů k a z. Pětiúhelník *abcdf* a čtyřúhelník *bcdg* skládají se z části oběma společné *abcd* a ze sobě rovných trojúhelníků *adg* a *afd*.

Opakováním této konstrukce dá se každý mnohoúhelník proměniti na trojúhelník, tento na obdélník a obdélník na čtverec; tudíž možno kterýkoli mnohoúhelník na čtverec proměniti.

9. **Sestrojiti čtverec, jenž by byl roven součtu neb rozdílu dvou čtverců daných.**

Řešení tohoto úkolu jest na základě věty Pythagorovy snadné. Má-li se žádaný čtverec rovnati součtu daných dvou čtverců, jest přepona pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají délku stran daných čtverců, stranou jeho; má-li se však čtverec nový rovnati rozdílu čtverců daných, jest ve pravoúhlém trojúhelníku, jehož jedna odvěsna rovná se straně menšího a přepona straně většího z daných čtverců, odvěsna druhá stranou čtverce žádaného.

Opětováním konstrukce první lze sestrojiti čtverec, který jest součtem několika čtverců.

**Úkoly.** Proměniti jest:

1. trojúhelník tupoúhlý na pravoúhlý.
2. trojúhelník pravoúhlý na rovnoramenný.
3. trojúhelník, v němž má jeden úhel $135^\circ$ na jiný, jenž má úhel $75^\circ$.
4. trojúhelník na jiný rovnoramenný, jehož půdice dána (buď větší neb menší než půdice původního).
5. trojúhelník na jiný rovnoramenný, jehož výška jest dána (buď větší neb menší výšky původního).
6. obdélník na kosočtverec.
7. kosodélník na pravoúhlý trojúhelník.
8. lichoběžník na obdélník.
9. pětiúhelník na trojúhelník.
10. trojúhelník na čtverec.
11. šestiúhelník na čtverec.
12. rýsovati čtverec, jenž by se rovnal součtu dvou, tří daných čtverců.
13. rýsovati čtverec rovný rozdílu dvou daných čtverců.
14. rýsovati čtverec 2krát tak velký jako daný čtverec.

## §. 72. Dělení mnohoúhelníků.

1. **Rozděliti trojúhelník přímkami, z téhož vrcholu vybíhajícími, na několik sobě rovných částí.**

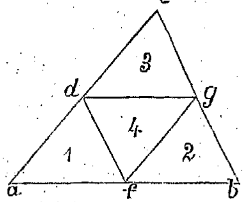
Strana naproti vrcholu, z něhož přímky dělící vycházeti mají, rozdělí se na tolik rovných dílů, na kolik rovných částí daný trojúhelník rozdělen býti má, a body dělící spojí se s protějším vrcholem.

Důkaz. Takto vzniklé trojúhelníky mají společnou výšku a rovné základny.

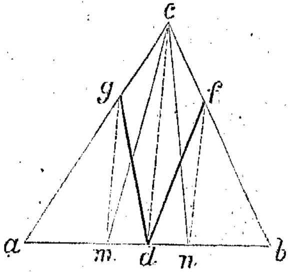
2. **Rozděliti trojúhelník daný příčkami, k jeho stranám rovnoběžnými, na 4 shodné trojúhelníky.**

Strany daného trojúhelníku *abc* (obr. 91.) se v bodech *d,f,g* rozpůlí a tyto body se spojí.

Důkaz. Dokáže se, že každý z trojúhelníků 1., 2., 3. je shodný s trojúhelníkem 4.



Obr. 91.



Obr. 92.

3. **Daný trojúhelník rozděliti příčkami, které daným bodem jedné z jeho stran procházejí, na několik sobě rovných dílů.**

Má-li se $\triangle$ *abc* (obr. 92.) na tři rovné části rozděliti tak, aby příčky dělící bodem *d* procházely, rozdělí se strana *ab*, na níž daný bod *d* leží, na tři rovné díly a body *m* a *n*, jimiž jest strana *ab* na tři rovné díly rozdělena, rýsují se přímky ku *dc* rovnoběžné.

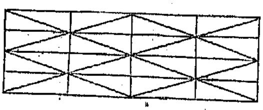
Body *f* a *g*, v nichž tyto rovnoběžky strany trojúhelníku *abc* protínají, spojí se bodem s *d*.

Důkaz. Rýsujme *cm* a *cn*; pak jest

$$\triangle\, agd = \triangle\, amc = {}^1/_3\, \triangle\, abc$$
$$\triangle\, bdf = \triangle\, bcn = {}^1/_3\, \triangle\, abc$$

čtyřúhelník $gdfc = {}^1/_3\, \triangle\, abc$.

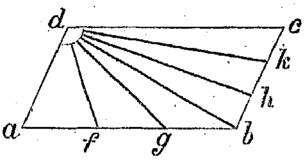
4. **Rozděliti obdélník na 4, 8, 16, 32 shodných částí** (obr. 93.).


Obr. 93.

5. **Rovnoběžník rozděliti příčkami, z jednoho vrcholu vycházejícími, na několik rovných částí.**

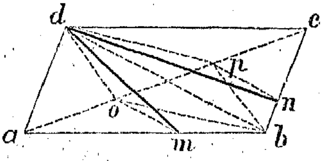
Zde nutno rozeznávati dva případy:

α) Je-li počet dílů sudý (obr. 94.), rozdělí se napřed rovnoběžník úhlopříčkou, daným vrcholem procházející, na dvě sobě rovné části a každý takový trojúhelník se rozdělí známým způsobem na polovici částí, na něž má rovnoběžník rozdělen býti.




Obr. 94.

β) Je-li počet dílů lichý (má-li se na př. rovnoběžník *abcd* [obr. 95.] rozděliti příčkami, vrcholem *d* procházejícími, na 3 rovné díly), rýsují se obě úhlopříčky, a ta, která vrcholem *d* neprochází, rozdělí se na tři rovné díly a body dělícími rýsují se rovnoběžky k úhlopříčce druhé; průsečíky těchto rovnoběžek s protějšími stranami vrcholu *d* se spojí s *d*, *dm* a *dn* jsou žádané příčky dělící.




Obr. 95.

Důkaz. Rýsuje-li se *od* a *ob*, jest

$\triangle\ bmd = \triangle\ bod = {}^1/_6$ rovnoběžníku *abcd*, též

$\triangle\ bnd = \triangle\ dbp = {}^1/_6$ rovnoběžníku *abcd*, tedy i

pl. $dmbn = {}^2/_6$ pl. $abcd = {}^1/_3$ pl. $abcd$

pl. $amd = ({}^1/_2 - {}^1/_6)$ pl. $abcd = {}^1/_3$ pl. $abcd$ a podobně

pl. $dcn = ({}^1/_2 - {}^1/_6)$ pl. $abcd = {}^1/_3$ pl. $abcd$.

Úkol tento možno řešiti též tak, že se rozdělí *ab* i *bc* každá na daný počet dílů a z bodů dělících spojí se každý druhý s vrcholem *d*.

**Úkoly.** 1. Rozděliti trojúhelník příčkami z některého vrcholu vybíhajícími *a*) na 5 *b*) na 7 rovných dílů.

2. Rozděliti trojúhelník příčkami, z některého bodu jeho obvodu vybíhajícími na 3, 4, 5, rovných dílů.

3. Rozděliti obdélník příčkami z téhož vrcholu vybíhajícími na 3, 5 rovných dílů.

4. Rozděliti lichoběžník na 6 rovných dílů. (Každou půdici rozděl na 6 rovných dílů. Spojením bodů dělících jest úkol řešen.)

# Část pátá.

# O útvarech podobných.

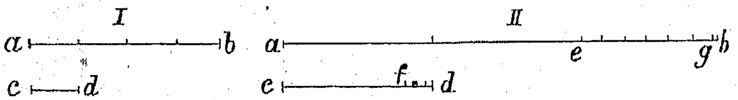
## I. Srovnalost délek.

§. 73. Veličina prostorová, která v jiné s ní stejnorodé veličině prostorové několikráte beze zbytku obsažena jest, sluje její míra.

Je-li prostorová veličina $m$ měrou veličiny $A$ i $B$, sluje společnou měrou jejich.

V měřictví vyhledává se největší společná míra dvou délek tak jako stanoví se v arithmetice největší společná míra dvou čísel.

Aby se společná míra dvou délek ustanovila, naměřuje se kratší z nich na delší tolikráte, kolikráte se naměřiti dá.




Obr. 96.

1. Je-li kratší délka $cd$ v delší několikráte (na př. 4kráte) beze zbytku obsažena (obr. 96., $I$), tedy jest $cd$ největší společnou měrou délek $ab$ a $cd$.

2. Není-li délka kratší $cd$ ve větší $ab$ beze zbytku obsažena, je-li na př. $cd$ v $ab$ (obr. 96., $II$) dvakrát obsažena, a zbude-li ještě $eb$ tedy naměřuje se zbytek tento na $cd$ tolikráte,

kolikráte se naměřiti dá, zde na př. jen jednou a zbytek $fd$ naměřuje se na dřívější zbytek $eb$, v němž jest obsažen 6kráte; zbytek $gb$ jest v $fd$ 3kráte beze zbytku obsažen.

Jest
$$\begin{aligned} fd &= 3bg \\ eb &= 6fd + gb = 19bg \\ cd &= cf + fd = eb + fd = 22bg \\ ab &= 2cd + eb = 44bg + 19bg = 63bg. \end{aligned}$$

Délky $ab$ a $cd$ mají tedy společnou míru $bg$; tato míra jest v $ab$ 63kráte, a v $cd$ 22kráte obsažena.

Poněvadž při tomto vyhledávání největší společné míry každý zbytek musí býti (sice) menší předcházejícího, jest možno, že odnímání zbytků se opakuje až do nekonečna, aniž se objeví zbytek, jenž by byl měrou zbytku předcházejícího. V tom případě nemají dané dvě veličiny společné míry a jmenují se **nesměřitelné**. Dvě veličiny mající společnou míru slovou **směřitelné**.

§. 74. **Srovnání dvou délek** za tím účelem, aby se stanovilo, kolikráte jest jedna z nich větší než druhá, děje se poměrem měřickým. Poměr délek vyjadřuje se poměrem měrných jich čísel. Dány-li jsou na př. dvě délky $ab$ a $cd$, a je-li jejich společná míra $m$ v délce $ab$ .... $r$kráte, a v $cd$ $s$kráte obsažena, jest $\frac{r}{s}$ aneb $r : s$ poměr těchto délek $ab$ a $cd$, tudíž píše se:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{r}{s} \text{ aneb } ab : cd = r : s.$$

Podobně jest pro délky $ab$ a $cd$ v obr. 96. *II.*

$$ab : cd = 63 : 22.$$

V praktickém životě určuje se poměr dvou délek, že se změří obě touže měrou (týmž měřítkem), a takto stanovená čísla měrná v poměr se dají. Má-li se na př. stanoviti poměr délek dvou cest $A$ a $B$, tu změří se délka cesty $A$ i $B$; je-li cesta $A = 18{\cdot}4$ m a $B = 24{\cdot}8$ m dlouhá, jest poměr délek těchto cest $\frac{18{\cdot}4}{24{\cdot}8} = \frac{23}{31}$.

Stanoviti poměr délek $ab$ a $cd$, shledalo-li se měřením, že

| | | |
|---|---|---|
| 1. $ab = 2cd + eb$ | 2. $ab = 4cd + eb$ | 3. $ab = 5cd + eb$ |
| $cd = 2eb + fd$ | $cd = 2eb + fd$ | $cd = 4eb + fd$ |
| $eb = 4fd + gb$ | $eb = 3fd$ | $eb = 2fb + gb$ |
| $fd = 3gb$ | | $fd = 2gb.$ |

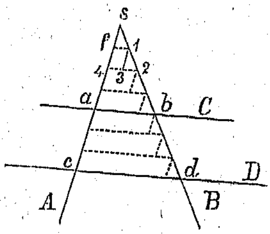
Je-li poměr dvou veličin roven poměru dvou jiných veličin, vznikne spojením obou poměrů **srovnalost měřická**.

Mají-li tedy poměry $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ téhož udavatele, tedy jest $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ aneb $a : b = c : d$ srovnalost měřická.

Členy srovnalosti měřické jsou měrná čísla; proto podléhá měřická srovnalost týmže proměnám jako srovnalost číselná. Pro měřické srovnalosti platí tudíž veškeré v arithmetice uvedené poučky. Ze srovnalosti $a : b = c : d$ plyne $ad = bc$ t. j. obsah obdélníku o rozměrech $a$ a $d$ rovná se obsahu obdélníku o rozměrech $b$ a $c$.

Srovnalost, v níž vnitřní členy sobě rovny jsou, slove **srovnalost spojitá**, na př. $a : b = b : d$ aneb $b^2 = ad$; vnitřní člen $b$ sluje **střední měřicky srovnalostná** mezi oběma členy vnějšími, a čtvrtý člen $d$ této spojité srovnalosti sluje **třetí spojitě srovnalostná**. Každá rovnice tvaru $x^2 = ab$ má dle toho ten význam geometrický, že jest $x$ střední měřicky (geometricky) srovnalostná mezi $a$ i $b$ nebo že čtverec o straně $x$ rovná se obdélníku o stranách $a$ a $b$.

## §. 75. Srovnalostné dělení paprsků příčkami rovnoběžnými.



Obr. 97.

V obr. 97. proťaty jsou paprsky $A$ a $B$, téhož svazku rovnoběžkami $C$ a $D$. Úsečky na paprsku $A$ považujme za veličiny prvého, na paprsku $B$ za veličiny druhého a úsečky na příčkách $C$ a $D$ za veličiny rodu třetího.

$sf = m$ buď společnou měrou úseček $sa$ a $ac$; je-li $m$ v $sa$ .. $\alpha$kráte a v $ac$ .. $\beta$kráte obsaženo, jest

$$1. \quad sa : ac = \alpha : \beta.$$

Rozdělí-li se $sa$ na $\alpha$ a $ac$ na $\beta$ rovných dílů, a rýsují-li se body dělícími rovnoběžky $C$ a $D$, bude jimi $sb$ na $\alpha$ a $bd$ na $\beta$ sobě rovných dílů rozdělena (proč?). Jest tedy

$$2. \quad sb : bd = \alpha : \beta.$$

Ze srovnalosti 1. a 2. plyne

$$3. \quad sa : ac = sb : bd.$$

Z této srovnalosti vychází:

$$(sa + ac) : sa = (sb + bd) : sb \text{ nebo}$$
$$4. \quad sc : sa = sd : sb.$$

Rýsují-li se jednotlivými dělícími body paprsku $B$ rovnoběžky k $A$, vzniknou při paprsku $B$ shodné trojúhelníky; proto jest $f1 = 32$. V rovnoběžníku $f134$ jest $43 = f1$. Označí-li se $f1 = p$, jest $42 = 2p$. Podobně ukáže se, že jest $ab = \alpha p$ a $cd = (\alpha + \beta)\, p$. Dá se tudíž napsati srovnalost

5. $cd : ab = (\alpha + \beta) : \alpha$. Ze srovnalosti 4. plyne: $sc : sa = (\alpha + \beta) : \alpha$; tudíž jest

6. $sc : sa = cd : ab$.

Ze srovnalostí uvedených jest patrno, že jsou příslušné veličiny kterýchkoli dvou z řečených tří rodů úseček v témže poměru, nebo že jsou přímo srovnalostny. Poučku tu vysloviti lze takto:

**Dvě příčky rovnoběžné stanoví na dvou paprscích téhož svazku úsečky mezi sebou i k úsečkám na těchto rovnoběžkách srovnalostné.**

**Následek:** 1. **Příčka v trojúhelníku k jedné straně rovnoběžná, dělí ostatní dvě strany na díly srovnalostné.**

2. **Příčky, které dělí dva paprsky na úsečky srovnalostné, jsou rovnoběžny** (obrácení poučky předchozí) (obr. 98.).

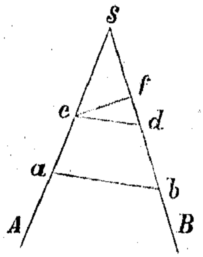
Budiž platna srovnalost

1. $sa : sc = sb : sd$.

Kdyby příčka bodem $c$ k $ab$ rovnoběžně rýsovaná neprocházela bodem $d$, nýbrž některým jiným bodem, na př. $f$ paprsku $B$, pak by bylo dle předchozí věty

2. $sa : sc = sb : sf$.

Srovnáním srovnalosti 1. a 2. shledá se, že jsou tři členy těchto srovnalostí střídavě sobě rovny, pročež i čtvrté členy sobě rovny býti musí, totiž $sf = sd$, t. j. bod $f$ musí se s bodem $d$ sjednotiti, t. j. $cd \parallel ab$.



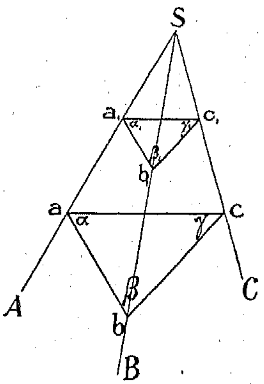
Obr. 98.

**Následek. Příčka, která rozděluje dvě strany trojúhelníku na díly srovnalostné, jest rovnoběžna ku straně třetí.**

## II. Podobnost trojúhelníků.

§. 76. Na paprscích $A$, $B$, $C$ (obr. 99.) buďte k bodům $a$, $b$, $c$ zvoleny body $a_1 b_1 c_1$, by platila srovnalost

$$sa : sa_1 = sb : sb_1 = sc : sc_1.$$




Obr. 99.

Trojúhelníky $abc$ a $a_1b_1c_1$ slovou **stejnolehlé.**

Stejnolehlé jsou též:

$a)$ vrcholy $a$ a $a_1$, $b$ a $b_1$, $c$ a $c_1$ na témž paprsku položené;

$b)$ strany $ab$ a $a_1b_1$, $bc$ a $b_1c_1$, $ac$ a $a_1c_1$ spojující stejnolehlé vrcholy;

$c)$ úhly $\alpha$ a $\alpha_1$, $\beta$ a $\beta_1$, $\gamma$ a $\gamma_1$ při stejnolehlých vrcholech ležící.

Pozorujíce dané trojúhelníky seznáme, že jsou

1. stejnolehlé jejich strany spolu rovnoběžny,
2. stejnolehlé jejich úhly jsou vzájemně rovny.

Trojúhelníky tyto mají stejnou podobu a liší se jeden od druhého pouze velikostí a polohou; slovou proto **trojúhelníky podobné.**

Dle §. 75. jest:

$$sb : sb_1 = ab : a_1b_1$$
$$sb : sb_1 = bc : b_1c_1 \text{ tudíž i}$$
$$1.\ ab : a_1b_1 = bc : b_1c_1$$

Podobně dokáže se: $2.\ bc : b_1c_1 = ac : a_1c_1.$

Ze srovnalosti 1. a 2. plyne

$$ab : a_1b_1 = bc : b_1c_1 = ac : a_1c_1 \text{ t. j.}$$

**Stejnolehlé strany podobných trojúhelníků jsou v témž poměru t. j. jsou srovnalostné.**

Bod $s$, v němž protínají se paprsky, jež spojují stejnolehlé vrcholy podobných a zároveň stejnolehlých trojúhelníků, slove **střed podobnosti.**

Přemístí-li se trojúhelník $a_1b_1c_1$ do jiné polohy, nezmění se ni strany, ni úhly jeho, zůstává tedy podoben trojúhelníku $abc$. Nejsou-li strany podobných trojúhelníků střídavě spolu rovnoběžny, nejsou trojúhelníky ty v poloze stejnolehlé. Kterékoli podobné trojúhelníky uvésti možno do polohy stejnolehlé.

Podobnost trojúhelníků označuje se: $\triangle\, a_1b_1c_1 \backsim abc.$

§. 77. **Dva trojúhelníky jsou si tedy podobny, mají-li stejnolehlé strany srovnalostné a stejnolehlé úhly sobě rovné.**

Je-li $\triangle\, abc \backsim a_1b_1c_1$, tu

$$ab : a_1b_1 = ac : a_1c_1 = bc : b_1c_1 \text{ a}$$
$$\sphericalangle \alpha = \alpha_1,\ \sphericalangle \beta = \beta_1,\ \sphericalangle \gamma = \gamma_1.$$

Z těchto podmínek plyne:

**V trojúhelnících podobných leží naproti rovným úhlům srovnalostné strany a naproti srovnalostným stranám rovné úhly.**

Jako k dokonalému určení trojúhelníku (totiž jeho tvaru a velikosti) není třeba napřed znáti všecky jeho strany a úhly, nýbrž postačují pouze 3 z těchto částí, tak i k dokonalému určení pouhého tvaru (podobnosti) požadují se obyčejně pouze 2 podmínky, totiž o jednu méně než při shodnosti, poněvadž zde nezáleží na velikosti trojúhelníku. Tedy neudává se prostá délka stran, nýbrž pouze poměr jejich.

§. 78. **Znaky podobnosti trojúhelníků.**

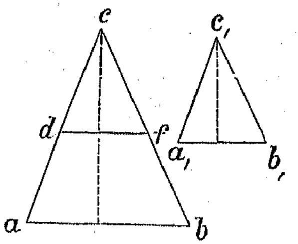
1. Rýsuje-li se v trojúhelníku $abc$ příčka $df \parallel ab$, jest

$$\triangle\, cdf \sim abc,$$

neboť jsou stejnolehlé strany těchto trojúhelníků přímo srovnalostny a stejnolehlé úhly sobě rovny. Věta tato pronésti se dá takto:

**Příčka trojúhelníku k jedné straně rovnoběžná odděluje trojúhelník, který jest danému trojúhelníku podobný.**

(Dva trojúhelníky o společném vrcholu a rovnoběžných půdicích jsou si podobny).



Obr. 100.

2. Přemístí-li se trojúhelník $cdf$ (obr. 100.) pomocí délek svých stran do polohy $a_1b_1c_1$, tak že jest $\triangle\, a_1b_1c_1 \cong dcf$, tu bude, jelikož jest $\triangle\, cdf \sim abc$, též $\triangle\, a_1b_1c_1 \sim abc$.

Poněvadž se při přemístění trojúhelníku $cdf$, poměr stran trojúhelníků $abc$ a $cdf$ nezměnil, jest patrno, že již ze srovnalosti stejnolehlých stran dvou trojúhelníků o jejich podobnosti rozhodovati se dá, a tudíž **jsou si dva trojúhelníky podobny, mají-li střídavě všecky tři strany srovnalostné.** (I.)

3. Přenese-li se $\triangle\, cdf$ (obr. 100.) na základě délky dvou svých stran ($cd$ a $cf$) a těmito stranami sevřeného úhlu při $c$ do polohy $a_1b_1c_1$, tedy jest, poněvadž

$$\triangle\, a_1b_1c_1 \cong cdf, \quad \triangle\, a_1b_1c_1 \sim abc.$$

Poněvadž se při přemístění $\triangle\, cdf$ nezměnil úhel při $c$ a poměr stran $cd$ a $cf$ tento úhel svírajících ku stejnolehlým stranám $ac$ a $ab$ trojúhelníku $abc$, jest patrno, že již vlastnosti těchto částí ve jmenovaných trojúhelnících o jejich podobnosti rozhodovati mohou, a jest tedy další znak pro podobné trojúhelníky:

**Dva trojúhelníky jsou si podobny, mají-li střídavě dvě strany srovnalostné a těmito stranami sevřený úhel rovný.** (II.)

4. přenese-li se $\triangle\, cdf$ (obr. 100.) pomocí dvou svých stran $cd$ a $cf$ a úhlu při $d$ naproti delší z nich ležícího do polohy $a_1b_1c_1$, tu bude $\triangle\, a_1b_1c_1 \backsim abc$.

Poněvadž se při přemístění $\triangle\, cdf$ do polohy $a_1b_1c_1$ jeho úhel při $d$ jakož i poměr stran $cd$ a $cf$ ku stejnolehlým stranám $ac$ a $cb$ trojúhelníku $abc$ nezměnil, jest patrno, že se již z vlastnosti těchto částí na podobnost trojúhelníku souditi může, a proto jest další znak podobnosti trojúhelníku tento:

**Dva trojúhelníky jsou si podobny, mají-li dvě strany srovnalostné a úhly proti delším stranám ležící sobě rovné.** (III.)

5. Přemístí-li se trojúhelník $cdf$ do polohy $a_1b_1c_1$ pomocí jedné strany ($cd$ a obou k této straně přilehlých úhlů do $c$, tedy jest i v této nové poloze trojúhelníku $abc$ podobný. Poněvadž strany $cd$ a $ac$ tvoří jediný toliko poměr, má $\triangle\, cdf$ v nové své poloze $a_1b_1c_1$ s trojúhelníkem $abc$ pouze dva úhly stejné. Z toho následuje:

*Dva trojúhelníky jsou si podobny, mají-li střídavě dva a dva úhly sobě rovny.*

*Následky:* a) *Trojúhelníky pravoúhlé, mají-li střídavě jeden úhel ostrý rovný, jsou si podobny.*

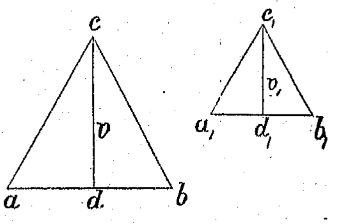
b) *Trojúhelníky rovnoramenné jsou si podobny, mají-li střídavě jeden úhel rovný.*

c) *Veškeré rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky jsou si podobny.*

d) *Veškeré trojúhelníky rovnostranné jsou si podobny.*

e) *Dva trojúhelníky, jejichž veškeré strany jsou střídavě buď rovnoběžné, buď na sobě kolmé, jsou si podobny.*

## §. 79. Upotřebení pouček o podobnosti trojúhelníků.



Obr. 101.

**I. V trojúhelnících podobných jsou stejnolehlé výšky ku stejnolehlým půdicím přímo srovnalostny.**

Předp. $\triangle\, abc \backsim a_1b_1c_1$. Rýsují-li se v obr. 101. výšky $cd$ a $c_1d_1$, tedy jsou pravoúhlé $\triangle\, acd$ a $a_1c_1d_1$ sobě podobny, poněvadž jest $\sphericalangle\, a = a_1$; jest tudíž $ac : a_1c_1 = v : v_1$; a poněvadž jest $\triangle\, abc \sim a_1b_1c_1$ jest

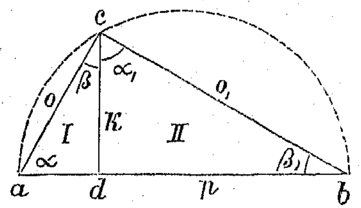
$$\frac{ac : a_1c_1 = ab : a_1b_1;\ \text{proto jest}}{ab : a_1b_1 = v : v_1.}$$

II. **Spustí-li se v pravoúhlém trojúhelníku s vrcholu úhlu pravého na přeponu kolmice, tedy**

1. **se rozděluje touto kolmicí daný trojúhelník na dva jemu i sobě podobné trojúhelníky;**

2. **jest tato kolmice střední měřicky srovnalostnou mezi úsečkami přepony;**

3. **jest každá odvěsna daného trojúhelníku střední měřickou srovnalostnou mezi přilehlou úsečkou a celou přeponou.**




Obr. 102.

Důkaz. Budiž v obr. 102. $\sphericalangle\, c = R$ a $cd \perp ab$, pak jest

$$\frac{1.\ \triangle\, abc \sim I \sim II.}{\sphericalangle\, \alpha = \alpha_1.}$$

Z podobnosti $\triangle\, I \sim II$ plyne 2. $ad : k = k : bd$ aneb $k^2 = ad\,.\,bd.$

Z podobnosti $\triangle\, abc \sim I$ jde $\quad 3. \begin{cases} p : o = o : ad \text{ aneb } o^2 = p\,.\,ad. \\ p : o_1 = o_1 : bd \text{ aneb } o^2 = p\,.\,bd. \end{cases}$

Z podobnosti $\triangle\, abc \sim II$

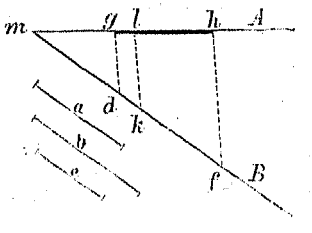
## §. 80. Úkoly konstrukční, které se na srovnalosti délek nebo podobnosti trojúhelníků zakládají.

1. **K třem daným délkám sestrojiti čtvrtou srovnalostnou.**

Narýsuje se úhel libovolně velký (ne příliš ostrý) ($AB$) (obr. 103.) a učiní se $md = a$, $df = b$, $mg = c$; rýsuje se $dg$ a bodem $f$ $fh \| gd$; $gh$ jest žádaná délka $x$, neboť jest

$md : df = mg : gh$, aneb

$a : b = c : x.$




Obr. 103

Při řešení tohoto úkolu může se též postupovati, že se učiní (obr. 103.) $md = a$, $mk = b$, $mg = c$, a že se k $dg$ rýsuje rovnoběžka $kl$ bodem $k$; pak plyne z podobnosti $\triangle\, mgd$ a $mkl$

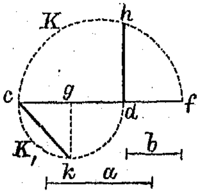
$md : mk = mg : ml$ aneb

$a : b = c : ml$, a jest tudíž

$ml = x.$

2. **Ku dvěma daným délkám sestrojiti střední měřicky srovnalostnou.**

Dány-li jsou délky $a$ i $b$ (obr. 104.) a má-li se sestrojiti délka $x$ tak, aby srovnalosti $a : x = x : b$ dosti učinila; tu naměří se na libovolně zvolenou přímku délka $cd = a$, a $df = b$. Nad $cf$ rýsuje se polokružnice $K$ a v $d$ vztýčí se kolmice $cf$, která polokružnici $K$ v bodu $h$ protíná; $dh$ jest žádanou délkou $x$.



Obr. 104.

D ů k a z plyne bezprostředně z věty 2., II. §. 79., rýsuje-li se $ch$ a $hf$.

Jiný způsob řešení tohoto úkolu jest, že se učiní $cd = a$ a $cg = b$; nad $cd$ rýsuje se polokružnice $K_1$. Bod $k$, ve kterém kolmice v bodu $g$ na $cd$ vztýčená tuto polokružnici protíná, spojí se s $c$; délka $ck$ jest žádanou délkou $x$; neboť rýsuje-li se $kd$, tedy jest dle §. 79 II., 3.:

$$cd : ck = ck : cg \text{ aneb}$$
$$a : ck = ck : b, \text{ tedy}$$
$$ck = x.$$

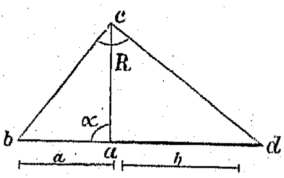
3. **Ku dvěma daným délkám sestrojiti třetí spojitě srovnalostnou.**

Úkol tento řešiti se dá rozmanitými způsoby.

*a*) Má-li se sestrojiti délka $x$ aby hověla vzhledem k daným délkám $a$ i $b$ srovnalosti $a : b = b : x$, třeba pouze v úkolu 1. tohoto §. učiniti $c = b$.

*b*) Je-li v dané srovnalosti $a > b$, sestrojí se trojúhelník pravoúhlý, jehož přepona má délku $a$ a jedna odvěsna délku $b$; s vrcholu úhlu pravého na přeponu spuštěná kolmice stanoví na přeponě dvě úsečky, z nichž jest k odvěsně $b$ přiléhající žádanou délkou $x$. (Proč?)

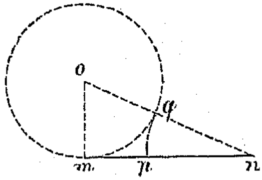
*c*) Je-li $a < b$ rýsuje se pravý úhel $\alpha$, jehož jedno rameno za vrchol se prodlouží, a učiní se $ab = a$ (obr. 105.), a $ac = b$; rýsuje-li se $bc$ a vztýčí-li se v bodu $c$ kolmice $cd$ na $bc$, tedy jest $ad$ délkou žádanou.



Obr. 105.

4. **Danou délku rozděliti v poměru vnějším i vnitřním t. j., tak na 2 části, aby větší z nich byla střední měřicky**

**srovnalostnou mezi částí menší a celou délkou** (zlatý řez).



Obr. 106.

Je-li (obr. 106.) daná délka $mn = a$ v bodu $p$ rozdělena v poměru žádaném, a označí-li se její větší úsečka $np = x$, jest

$$a : x = x : (a - x), \text{ aneb}$$
$$x^2 = a\,(a - x).$$

Konstrukce. V $m$ vztýčí se na $mn$ kolmice, a učiní se $mo = \frac{a}{2}$. Kolem $o$ opíše se poloměrem $mo = \frac{a}{2}$ kružnice, která přímku $on$ v bodu $q$ protíná. Délka $qn$ jest délkou žádanou $x$; třeba pouze učiniti $np = nq$.

Důkaz. V pravoúhlém $\triangle\, mno \ldots no^2 = mn^2 + mo^2$

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$x^2 = a^2 - ax = a\,(a - x) \text{ aneb}$$
$$(a - x) : x = x : a.$$

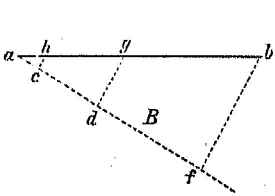
5. **Danou délku rozděliti na několik částí v daném poměru.**

Budiž dána délka $ab$ (obr. 107.), kterou rozděliti jest na části, jež jsou v poměru

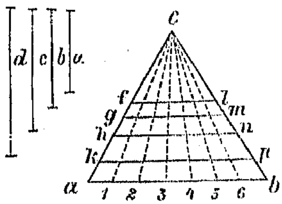
$$m : n : p. \ (1 : 3 : 5).$$

Bodem $a$ rýsuje se přímka $B$ běhu libovolného, (avšak tak, aby nebyla její odchylka od $ab$ příliš malá) a naměří se na ni z bodu $a$ do bodu $c$ $m$, z $c$ do $d$ $n$, z $d$ do $f$ $p$ rovných částí. Rýsují-li se $bf$ a body $d$ a $c$ ku $bf$ rovnoběžky, tedy jest

$$ah : hg : gb = m : n : p.$$



Obr. 107.



Obr. 108.

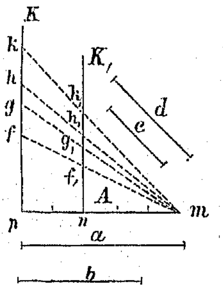
6. **Několik daných délek na stejný počet rovných dílů rozděliti.**

Mají-li se dané délky $a$, $b$, $c$, $d$ na $m$ (na př. 7) rovných dílů rozděliti, rýsuje se (obr. 108.) přímka, na niž se naměří

$m$ (7) stejných dílů od $a$ do $b$, avšak tak, aby byla $ab$ delší než nejdelší z daných délek. Nad $ab$ jako základnou sestrojí se rovnostranný trojúhelník $abc$, jehož vrchol $c$ se spojí s body, v nichž jest $ab$ rozdělena. Konečně učiní se $cf = a$, $cg = b$, $ch = c$, $ck = d$, a rýsuje se $fl \| gm \| hn \| kp$. Základny rovnostranných trojúhelníků $cfl$, $cgm$, $chn$, $ckp$ rozděleny jsou příčkami $c1$, $c2$, $c3$ ... na $m$ (7) rovných dílů.

**7. Několik daných délek zvětšiti nebo zmenšiti poměrem daným.**

Aby se dané délky $a$, $b$, $c$, $d$ (obr. 109.) na př. v poměru $5:3$ zmenšily, rýsuje se přímka $A$, na niž se naměří od $m$ do $n$ 3 rovné, ale libovolně dlouhé a podobně od $m$ do $p$ 5 dílů téže velikosti. V bodech $n$ a $p$ vztyčí se na $A$ kolmice. Na kolmici $K$ naměřují se, od $p$ počínaje, dané délky, že jest $pf = a$, $pg = b$, $ph = c$, $pk = d$. Spojí-li se body $f$, $g$, $h$, $k$ s bodem $m$, tedy stanoví průsečíky těchto přímek s kolmicí $K_1$ koncové body délek v žádaném poměru zmenšených. Délky zmenšené jsou $nf_1$, $ng_1$, $nh_1$, $nk_1$.

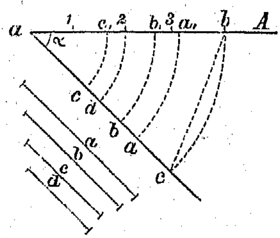



Obr. 109.

Kdyby se dané délky měly v poměru $3:5$ zvětšiti, tu by se naměřovaly na $K_1$ a na $K$, by se objevily délky zvětšené.

Jiný způsob dané délky určitým poměrem zmenšiti nebo zvětšiti, jest tento:

Mají-li se dané délky $a$, $b$, $c$, $d$ (obr. 110.) v poměru $4:3$ zmenšiti, tu sestrojí se úhel redukční $\alpha$, že se na rameno $A$ od libovolného bodu $a$ naměří 4 sobě rovné díly až do bodu $b$. Poloměrem $ab$ opíše se oblouk. Tento oblouk protne se obloukem jiným kolem bodu $b$ opsaným, jehož poloměr jest $bc = a3 = \frac{3}{4} ab$. Průsečík $c$ spojen s bodem $a$ stanoví druhé rameno $ac$ úhlu redukčního $\alpha$. Aby se úhlem redukčním stanovily délky v daném poměru zmenšené, opíše se délkou danou kolem vrcholu oblouk. Vzdáleností průsečíku tohoto oblouku s ra-




Obr. 110.

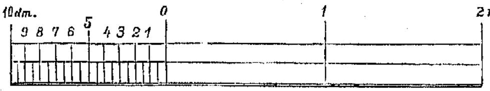
meny úhlu redukčního (tedy tětivy $a_1a_2$, $b_1b_2$, $c_1c_2$, $d_1d_2$) stanoví se délky žádané. Úhlu redukčního velmi často se užívá k zmenšování nebo zvětšování obrazů předmětu daným poměrem.

8. **Rýsování měřítek.**

Obrazy rozmanitých předmětů rýsují se obyčejně v míře zmenšené, tak aby délky na nich měřené byly v určitém poměru k délkám na skutečném předmětu. Obraz jest předmětu podoben.

Odpovídá-li délce 1 m na předmětu délka 1 cm na obraze, tedy jsou jednotlivé délky obrazu 100krát, jednotlivé plochy však 10000krát menší, než příslušné délky či plochy předmětu skutečného.

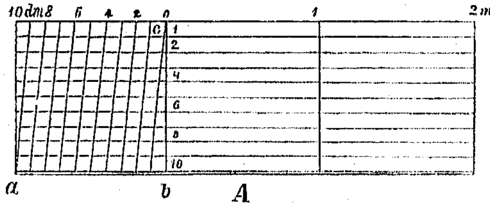
Při rýsování obrazů hotoví se měřítko, že se stanoví napřed poměr, v němž mají býti jednotlivé rozměry zmenšeny (tedy velikost délky odpovídající jednotce délkové na předmětu.)




Obr. 111.

Další zařízení takového měřítka jest z obr. 111. patrno. — Užívání takového měřítka k měření délek v obrazu a rýsování obrazu předmětu, jehož rozměry byly měřeny.

Měřítka, na nichž lze přesně mimo decimetry též centimetry a přibližně i millimetry odměřiti, slují **měřítka popříčná** (transversalní, tisícinná).




Obr. 112.

Měřítko takové rýsuje se takto; na přímku $A$ (obr. 112.) se naměří několikráte délka $ab$, která odpovídati má 1 m ve skutečnosti. V $a$ vztyčí se kolmice a na ni se naměří 10 stejných (jinak ale libovolně dlouhých) dílů až do bodu *10*. Body, v nichž jest tato kolmice rozdělena, rýsují se rovnoběžky k $A$

a v bodech dříve na $A$ stanovených vztyčí se kolmice. Délka $010$ rozdělí se na 10 rovných dílů, z nichž délka každého odpovídá délce 1 dm ve skutečnosti. Bod $9$ spojí se s bodem $a$, a ostatními body na $0\,10$ rýsují se k $a9$ rovnoběžky. Délka $c1$ jest $\frac{1}{10}\,b1$, tedy $c1$ odpovídá délce 1 cm ve skutečnosti.

Důkaz spočívá na podobnosti trojúhelníků.

Jak se výhodně takového měřítka užije ku měření délek v daném obrazu a k rýsování přímek určité délky?

9. **Proměniti obdélník ve čtverec.**

Je-li délka obdélníku $d$ a šířka $š$ a neznámá strana čtverce $x$, tedy jest

$$x^2 = d \,.\, š \text{ aneb } d : x = x : š, \text{ t. j.}$$

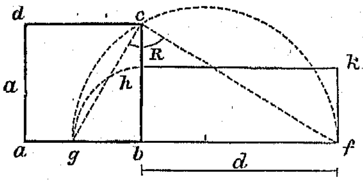
strana čtverce jest střední měřicky srovnalostnou mezi délkou a šířkou obdélníku jemu rovného.

10. **Proměniti čtverec v obdélník, jehož jeden rozměr jest dán.**

Je-li strana daného čtverce $a$, a je-li mimo to dána délka obdélníku $d$, a označí-li se neznámá šířka $x$, tedy jest

$$a^2 = dx \text{ t. j. } d : a = a : x$$

$$bf = d; \; bg = x.$$




Obr. 113.

Sestrojení jest z obr. 113. patrno.

**Úkoly k rýsování.** 1. Uvnitř daného trojúhelníku rýsovati trojúhelník jemu podobný, by strany jeho byly 3kráte menší než strany trojúh. daného a byly kolmé na stejnolehlých stranách daného trojúhelníku.

2. Danou délku rozděliti na 4 díly v poměru $a)$ $1 : 3 : 4 : 5$ $b)$ $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : 1$.

3. Každou z pěti daných délek rozděliti na 9 rovných dílů.

4. Obraz daného předmětu (na př. pomníku) zvětšiti v poměru $2 : 3$ (poměr linearní).

5. Rýsovati obrazy předmětů (na př. skříně) užitím měřítka popříčného.

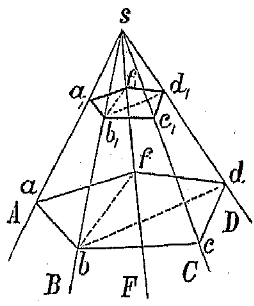
6. Nepravidelný sedmiúhelník proměniti na čtverec.

7. Rýsovati pravoúhlý trojúhelník, dána-li jest odvěsna a druhá odvěsna jest větším úsekem dle zlatého řezu rozdělené odvěsny dané.

8. Daný čtverec proměniti na obdélník, jehož délka rovná se $^{14}/_{9}$ strany čtverce.

## III. Podobnost mnohoúhelníků.

§. 81. Způsobem podobným onomu, kterým rýsovány byly v obr. 99. (§.76.) dva stejnolehlé trojúhelníky, zobrazeny jsou v obr. 114. dva stejnolehlé mnohoúhelníky. Mnohoúhelníky ty mají stejnolehlé vrcholy, stejnolehlé strany a úhlopříčky a stejnolehlé úhly. Jest patrno, že jsou:



Obr. 114.

1. **stejnolehlé strany a úhlopříčky spolu rovnoběžny.**

2. **stejnolehlé úhly jsou si rovny.**

3. **stejnolehlé strany jsou v témž** (stálém) **poměru**, t. j. jsou srovnalostny.

4. **stejnolehlé mnohoúhelníky jsou si podobny**; shodujíce se poměrem stran a velikostí úhlů, mají touže podobu.

5. **střed podobnosti** jest na přímce, jež spojuje stejnolehlé vrcholy.

6. **stejnolehlými úhlopříčkami rozdělují se podobné mnohoúhelníky na střídavě podobné trojúhelníky.**

7. přemístěním jednoho ze 2 stejnolehlých mnohoúhelníků mění se pouze jeho poloha, nemění se však jeho podoba.

8. **podobné mnohoúhelníky** dají se náležitým pošinováním vždy do polohy stejnolehlé přivésti.

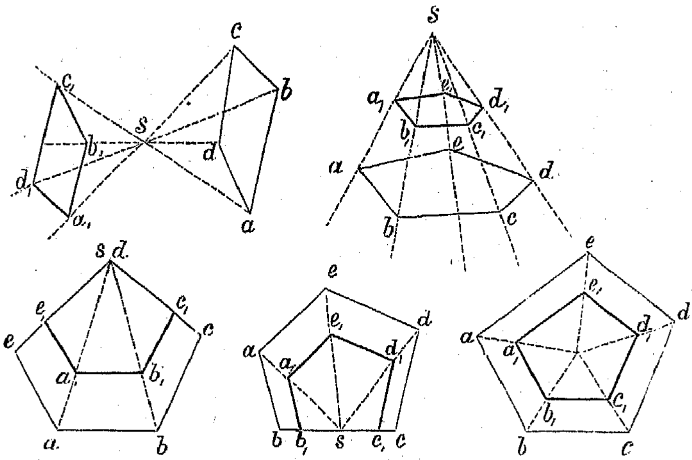
9. **střed podobnosti může míti vzhledem k oběma mnohoúhelníkům rozličnou polohu** (obr. 115.).

§. 82. **Poměr obvodů podobných mnohoúhelníků.**

Jsou-li $a, b, c, d \ldots$ po sobě jdoucí strany jednoho a $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ s nimi stejnolehlé strany druhého ze dvou sobě podobných mnohoúhelníků; $o$ a $o_1$ obvody jejich, jest

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = d : d_1 = \ldots \text{ tudíž i}$$
$$(a + b + c + d + \ldots) : (a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \ldots) = a : a_1,$$
$$o : o_1 = a : a_1 \text{ t. j.}$$

**Obvody mnohoúhelníků podobných jsou přímo srovnalostny k dvěma stejnolehlým stranám.**



Obr. 115.

§. 83. **Rýsování mnohoúhelníků sobě podobných** zakládá se na poučce, že jsou stejnolehlé mnohoúhelníky sobě podobny. Je-li k danému mnohoúhelníku (obr. 115.) rýsovati mnohoúhelník podobný, stanoví se předem střed podobnosti a poloha jednoho vrcholu nového mnohoúhelníku; potom rýsují se strany žádaného mnohoúhelníku rovnoběžně k stejnolehlým stranám mnohoúhelníku daného. Má-li býti nový mnohoúhelník daným poměrem (linearně) zvětšen nebo zmenšen, určí se vzhledem k tomuto zvětšení nebo zmenšení poloha středu podobnosti. Má-li býti na př. poměr stejnolehlých stran $9:7$, rýsuje se vrcholem $a$ daného mnohoúhelníku paprsek, naměří se od $a$ 9 rovných dílů, a koncový bod 9. dílu jest středem podobnosti. Vrchol $a_1$ nového mnohoúhelníku je koncem 7. dílu (od bodu podobnosti) řečeného paprsku.

§. 84. **Některé případy praktického užití nauky o podobnosti.**

1. *Stanoviti vzdálenost dvou předmětů, která se přímo měřiti nedá.*

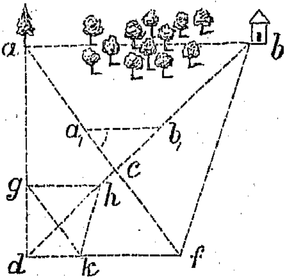
Při nauce o shodnosti byl již jeden způsob označen, kterým se úkol tento řeší. Způsobu toho nelze užiti, když se délky $ac$ a $bc$ za bod $c$ nedají prodloužiti.

V tomto případě změří se (obr. 116.) $ac$ i $bc$ a učiní se $a_1c$ = určitému dílu $ac$; podobně učiní se $b_1c$ = téže části $bc$, jako bylo učiněno $a_1c$ od $ac$.

Je-li

$$a_1c = \frac{ac}{3} \text{ a } b_1c = \frac{bc}{3},$$

tedy jest $a_1b_1$, která se změří, rovna $\frac{ab}{3}$.



Obr. 116.

2. *Kdyby bod b byl nepřístupen*, tak že by nebylo lze $bc$ změřiti, tu změří se pouze $ac$ a učiní se potom $a_1c$ rovnou určité části $ac$, na př. $a_1c = \frac{ac}{3}$. Při $a_1$ učiní se úhel $b_1a_1c_1 = bac$, v jehož ramenu $a_1b_1$ se zaměřením z $c$ do $b$ stanoví bod $b_1$. Změřená délka $a_1b_1$ jest tolikátou částí délky $ab$, kolikátou jest $a_1c$ délky $ac$.

3. *Kdyby byly oba krajní body délky ab nepřístupny*, tu zvolí se dvě stanoviska $d$ a $f$, z nichž lze k oběma bodům $a$ i $b$ viděti, a jichž vzdálenost možno přímo měřiti. Délka $df$ se změří a naměří se na ni od $d$ počínaje na př. třetina její délky do bodu $k$. Při $k$ učiní se úhel $dkg = dfa$. V ramenu tohoto úhlu určí se bod $g$ ležící na $ad$. Podobně vytyčí se při $k$ úhel $dkh = dfb$, a v jeho rameně se stanoví bod $h$, ležící ve směru $db$. Potom jest $gh$ tolikátá část délky $ab$, kolikátá jest $dk$ od $df$.

§. 85. **Úkoly** *a*) k rýsování: 1. Nad danou délkou rýsovati mnohoúhelník danému mnohoúhelníku podobný.

2. Rýsovati danému mnohoúhelníku podobný mnohoúhelník, jehož strany by byly ku stranám daného v poměru *a*) $9 : 5$, *b*) $3 : 7$.

3. Rýsovati danému sedmiúhelníku podobný sedmiúhelník, jehož strany = $^3/_8$ stran daného sedmiúhelníku.

*b*) početní: 1. Stín svislé tyče 2 m dlouhé jest 1·6 m dlouhý; jak vysoká jest věž, jejíž stín má v touže dobu 63·2 m?

2. Strany trojúhelníku mají 16·8 m, 22·8 m a 33·6 m; nejmenší strana jemu podobného trojúhelníku má 11·2 m; jak dlouhé jsou ostatní strany?

3. Jak velké jsou strany trojúhelníku jehož obvod má 99·4 cm, je-li tento trojúhelník podoben jinému o stranách 12·4 cm, 18·8 cm a 25·6 cm?

4. V trojúhelníku o stranách 30·4 cm, 39·2 cm. 48·8 cm rýsována jest příčka 19 cm dlouhá rovnoběžně k nejkratší straně. Vypočítati vzdálenost jejich krajních bodů od protějšího vrcholu.

## IV. Poměry obsahů.

§. 86. 1. Jsou-li $p$ a $p_1$ obsahy dvou čtverců o stranách $s$ a $s_1$, jest

$$p = s^2 \text{ a } p_1 = s_1^2, \text{ tudíž}$$
$$p : p_1 = s^2 : s_1^2 \text{ t. j.}$$

**Obsahy dvou čtverců jsou v poměru dvojmoci svých stran.**

2. Jsou-li $z$ a $z_1$ půdice, $v$ a $v_1$ výšky dvou rovnoběžníků jest $p : p_1 = zv : z_1v_1$.

**Obsahy dvou rovnoběžníků jsou v poměru součinů z půdic a výšek.**

Proč platí týž poměr pro obsahy dvou trojúhelníků?

Který jest poměr obsahů rovnoběžníků o rovných půdicích a který při rovných výškách?

3. **Poměr obsahů podobných trojúhelníků.**

Jsou-li $a$, $b$, $c$ a $a_1$, $b_1$, $c_1$ strany dvou podobných trojúhelníků, $v$ a $v_1$ k půdicím $a$ a $a_1$ příslušné výšky a $p$ a $p_1$ obsahy, jest

$$v : v_1 = a : a_1$$
$$\frac{a}{2} : \frac{a_1}{2} = a : a_1.$$ Znásobením obou srovnalostí obdržíme
$$\frac{va}{2} : \frac{v_1a_1}{2} = a^2 : a_1^2$$
$$p : p_1 = a^2 : a_1^2 \text{ t. j.}$$

**Obsahy dvou podobných trojúhelníků jsou v poměru dvojmocí stejnolehlých stran.**

4. **Poměr obsahů podobných mnohoúhelníků.**

Rozloží-li se sobě podobné mnohoúhelníky stejnolehlými úhlopříčkami na sobě podobné trojúhelníky, jsou obsahy dvou a dvou stejnolehlých trojúhelníků v poměru dvojmocí stejnolehlých stran a tudíž i součty těchto obsahů; tedy **obsahy mnohoúhelníků podobných jsou v poměru dvojmocí stejnolehlých stran.**

§. 87. **Úkoly k rýsování.** 1. Rozděliti trojúhelník příčkami k půdici rovnoběžnými na 3 rovné díly.

Předpokládejme, že jsou $hl$ a $km$ žádané příčky; potom jest

$\triangle\, abc : \triangle\, chl = (ac)^2 : (ch)^2$

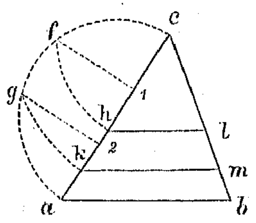
$3 \;:\; 1 = (ac)^2 : (ch)^2$

$(ch)^2 = \frac{(ac)^2}{3} = ac \,.\, \frac{ac}{3}$, nebo

$ac : ch = ch : \frac{ac}{3}.$

Podobně se dokáže, že

$ac : ck = ck : \frac{2}{3} ac.$



Obr. 117.

Stanovení bodů $h$ a $k$ jest z obr. 117. patrno.

2. Daný trojúhelník příčkou k půdici rovnoběžnou rozpůliti.

3. Daný trojúhelník rozděliti příčkou k půdici rovnoběžnou ve 2 části v poměru $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$.

4. Rýsovati čtverec, jehož obsah rovná se $^3/_5$ obsahu daného čtverce.

5. Rýsovati trojúhelník rovnostranný 5krát tak velký jako daný trojúhelník rovnostranný.

**Úkoly početní.** 1. Půdice dvou podobných trojúhelníků mají $12^1/_2$ m a $7^1/_2$ m; (18 cm a 24 cm); první trojúhelník má 125 m² (248 cm²); jak velký jest druhý?

2. Půdice trojúhelníku má $6^3/_4$ m, výška $5^1/_3$ m; jemu podobný trojúhelník má $12^1/_2$ m²; vypočítati jeho půdici a výšku.

3. Půdice dvou podobných trojúhelníků mají 18 m a 15 m; obsah prvého jest o 33 m² větší než obsah druhého. Vypočítati obsahy a výšky těchto trojúhelníků.

4. Stejnolehlé strany 2 podobných trojúhelníků jsou v poměru $4\frac{2}{3} : 5\frac{1}{4}$; obsah prvého = 38·4 m²; jak velký jest obsah druhého?

5. Půdice dvou podobných trojúhelníků mají 12 m a 15 m, součet jejich obsahů = 246 m²; vypočítati obsah a výšku jejich.

6. Stejnolehlé strany 2 podobných mnohoúhelníků mají 12·3 m a 20·1 m; obsah prvého = 100·86 m²; jak velký jest obsah druhého?

7. Obsahy dvou podobných trojúhelníků mají 75 m² a 108 m², součet obou půdic = 22 m; vypočítati půdice a výšky.

## V. Věta Pythagorova s různými úkoly.

§. 88. Jsou-li $p$, $o$ a $o_1$ měrná čísla stran pravoúhlého trojúhelníku (obr. 102.), vychází z poučky II. §. 79.

$$o^2 = p \,.\, ad$$

$$o_1^2 = p \,.\, bd;$$ sečtením obou rovnic

obdrží se $$o^2 + o_1^2 = p\,(ad + bd) = p^2 \text{ t. j.}$$

**V každém pravoúhlém trojúhelníku jest dvojmoc měrného čísla přepony rovna součtu měrných čísel obou odvěsen.**

Toť jest výrazem pro větu Pythagorovu, jejíž správnost ve smyslu geometrickém již dříve odůvodněna byla. Touto větou lze ze dvou známých stran trojúhelníku pravoúhlého vypočítati stranu třetí; jest totiž

$$p^2 = o^2 + o_1^2 \qquad o^2 = p^2 - o_1^2 \qquad o_1^2 = p^2 - o^2$$

$$p = \sqrt{o^2 + o_1^2} \qquad o = \sqrt{p^2 - o_1^2} \qquad o_1 = \sqrt{p^2 - o^2}.$$

Příklady. *a*) Je-li $o = 33$ m, $o_1 = 56$ m, jest

$$p = \sqrt{33^2 + 56^2} = 65 \text{ m};$$

*b*) je-li $p = 53$ m, $o = 45$ m, jest

$$o_1 = \sqrt{53^2 - 45^2} = 28 \text{ m}.$$

Při skutečném počítání jest prospěšno rozložiti rozdíl dvojmocí pod odmocnítkem na dva činitele, tedy

$$o_1 = \sqrt{(53+45)(53-45)} = \sqrt{98 \times 8} = \sqrt{49 \times 16} = 7 \times 4 = 28 \text{ m}.$$

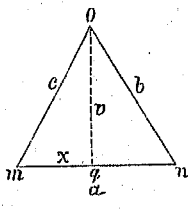
§. 89. **Některé úkoly početní.** 1. *Vypočítati výšku a obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož strana jest a.*

Je-li výška $v$ a obsah $p$, jest $v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2$;

$$v = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$p = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

2. *Vypočítati obsah trojúhelníku, jehož strany jsou a, b, c (Heronovo pravidlo).*




Obr. 118.

Strany $\triangle\, mno$ (obr. 118.) buďte $a, b, c$, jeho výška $v$, obsah $p$ a úseky $mq = x$,

$$qn = a - x.$$

V $\triangle\, mqo$ jest $v^2 = c^2 - x^2$;

v $\triangle\, nqo$ jest

$$v^2 = b^2 - (a-x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2; \text{ tudíž}$$

$$b^2 - a^2 + 2ax - x^2 = c^2 - x^2$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Vloží-li se tato hodnota za $x$ do rovnice

$$v^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x), \text{ jest}$$

$$v^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$v^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$v^2 = \frac{\{(a + c)^2 - b^2\}\{b^2 - (a - c)^2\}}{4a^2}$$

$$v^2 = \frac{(a + b + c)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4a^2}$$

$$v = \frac{1}{2a}\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}.$$

Označí-li se $\frac{a + b + c}{2} = s$, jest $s - a = \frac{b + c - a}{2}$,
$s - b = \frac{a + c - b}{2}$ a $s - c = \frac{a + b - c}{2}$. Potom jest

$$v = \frac{1}{2a}\sqrt{2s \, . \, 2 \, . \, (s - a) \, . \, 2\,(s - b) \, . \, 2 \, . \, (s - c)}$$

$$v = \frac{2}{a}\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}.$$

Je-li $p$ obsah trojúhelníku, jest

$$\mathbf{p = \frac{av}{2} = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}.}$$

## Úkoly ku cvičení.

1. Měrná čísla odvěsen pravoúhlého trojúhelníku jsou

| | | |
|---|---|---|
| *a*) 18, 24; | *f*) 13, 84; | *k*) $5^1/_7$, 11; |
| *b*) 16, 30; | *g*) 85, 132; | *l*) 2·8, 1·95; |
| *c*) 36, 77; | *h*) 13·3, 15·6; | *m*) $2^2/_3$, $10^1/_2$; |
| *d*) 80, 39; | *i*) 5, $5^1/_4$; | *p*) 14, 17·1; |

vypočítati jeho přeponu.

2. Měrná čísla přepony a jedné odvěsny pravoúhlého trojúhelníku jsou:

| | | |
|---|---|---|
| *a*) 39, 36; | *d*) 7·3, 5·5; | *g*) 185, 57; |
| *b*) 65, 16; | *e*) 1·85, 1·76; | *h*) $4^1/_2$, $3^3/_5$; |
| *c*) 16·9 11·9; | *f*) 109, 91; | *i*) $14^4/_7$, $13^1/_5$; |

vypočítati druhou odvěsnu.

3.*) 32 stopy vysoký bambus zlomen byl větrem v určité výši; vrchol zlomené části dotekl se země ve vzdálenosti 16 stop od kmene. Ve které výši nad zemí byl bambus zlomen?

4. Poupě lotosu vyniklo $1/_2$ stopy nad hladinu jezera. Lotos skloněn byl větrem, čímž zmizelo jeho poupě ve vzdálenosti 2 stop od původní polohy rostliny, která byla hloubka vody?

6. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku jsou v poměru $5 : 12$ $\left(1\frac{1}{11} : 2\frac{1}{3}\right)$, přepona má 91 m (170 cm); vypočítati odvěsny.

6. Vypočítati obvod a obsah pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku, jehož přepona jest $a$; vypočítati též úhlopříčku a obsah čtverce, jehož strana rovná se obvodu daného trojúhelníku.

7. Přepona pravoúhlého trojúhelníku, v němž má jeden úhel $60^\circ$, jest $a$; vypočítati odvěsny. (Trojúhelník takový možno považovati za polovici trojúhelníku rovnostranného o straně $a$; odvěsna, k níž přiléhá úhel $60^\circ$, jest $\frac{a}{2}$.)

8. Úhly trojúhelníku jsou v poměru $1 : 2 : 3$. Vypočítati jeho obvod a obsah, je-li 1. nejdelší strana $a$ 2. nejkratší strana $a$.

9. Obvod pravoúhlého trojúhelníku $=$ 60 m; odvěsny jsou v poměru $5 : 12$; vypočítati jeho strany. (Jsou-li odvěsny $5x$ a $12x$, jest přepona $\sqrt{(5x)^2 + (12x)^2}$ a t. d.)

10. Odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku jsou v poměru $1 : 5\frac{5}{11}$; obsah $=$ 330 m². Vypočítati jeho strany.

11. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku mají 30 m a 40 m; vypočítati přeponu, k ní příslušnou výšku a jí tvořené úseky přepony. (Výšku počítej rovnicí: součin odvěsen $=$ součinu přepony a výšky).**)

12. Odvěsna pravoúhlého, 11970 m² velikého trojúhelníku má 140 m; vypočítati jeho obvod, výšku a úseky přepony.

13. V pravoúhlém trojúhelníku mají úseky a přepony 9 m a 16 m ($4^1/_2$ cm a 8 cm). Vypočítati jeho obvod.

14. Odvěsna pravoúhlého trojúhelníku $=$ 136 m, výška $=$ 120 m jak dlouhá jest přepona a druhá odvěsna?

15. Výška pravoúhlého trojúhelníku $=$ 36 m; jeden úsek přepony $=$ 27 m. Vypočítati jeho strany.

16. Výška pravoúhlého trojúhelníku má 30 m (12·6 dm); úseky přepony jsou v poměru $25 : 144$ $(9 : 16)$. Vypočítati strany.

17. Úseky přepony pravoúhlého trojúhelníku mají 64 m a 225 m; vypočítati odvěsny.

18. V pravoúhlém trojúhelníku má odvěsna 65 m (175 cm), k ní přilehlý úsek přepony 25 m (49 cm); vypočítati přeponu a druhou odvěsnu.

---

*) Úkoly 3. a 4. vzaty jsou ze staré čínské arithmetiky.

**) Výškou pravoúhlého trojúhelníku míněna jest všude délka kolmice, s vrcholu pravého úhlu na přeponu spuštěné.

19. Výška pravoúhlého trojúhelníku má 360 cm; jeden úsek přepony 81 cm; vypočítati jeho obvod.

20. V pravoúhlém trojúhelníku jest jeden úsek přepony o 56 cm kratší, druhý však o 105 cm delší než výška. Vypočítati jeho strany. (Výška buď $x$.)

21. Vypočítati stranu a úhlopříčku čtverce, *a*) 5476 m$^2$, *b*) 524·41 dm$^2$, *c*) 3422$^1/_4$ cm$^2$ velikého.

22. Jak velká jest strana čtverce, jenž rovná se obdélníku o rozměrech 24 m a 54 m (3 cm a 6$^3/_4$ cm; 20 dm a 80 dm).

23. Úhlopříčka čtverce jest o *a*) 10·35 cm, *b*) 3·726 dm, *c*) 4·968 m větší než strana. Vypočítati jeho stranu a úhlopříčku ($\sqrt{2} = 1{\cdot}414$.)

24. Dány jsou dva čtverce o stranách 14 cm a 17·1 cm; vypočítati stranu čtverce, jenž rovná se součtu daných čtverců.

25. Strany 3 čtverců mají 12 m, 16 m, 21 m (15 cm, 36 cm, 80 cm); vypočítati stranu čtverce, jehož obsah rovná se součtu obsahů daných čtverců.

26. Ve čtverci má příčka, jež spojuje vrchol se středem protější strany, délku $a$; vypočítati stranu, úhlopříčku a obsah jeho.

27. Kolem čtverce o straně 13 cm opsán jest čtverec, jehož strana má 17 cm, tak že vrcholy menšího čtverce jsou na stranách většího. Vypočítati úseky stran většího čtverce.

28. Dvě v pravém úhlu působící síly jsou 12 kg a 18·2 kg; jak velká jest jejich výslednice?

29. Výslednice dvou sil, jichž běhy svírají pravý úhel, jest 22·1 kg, jedna z nich jest 17·1 kg; jak velká jest druhá?

30. Obvod obdélníku má 178 m; kdyby byla délka o 4 m a šířka o 7 m delší, byla by délka k šířce v poměru $3 : 2$. Vypočítati jeho rozměry a úhlopříčku.

31. Obvod rovnoramenného trojúhelníku má 126 cm; $\frac{1}{8}$ půdice rovná se $\frac{1}{5}$ ramena; vypočítati jeho obsah. (Poněvadž $\frac{1}{8}p = \frac{1}{5}r$, jest $r = \frac{5}{8}p$.)

32. Obvod rovnoramenného trojúhelníku má 242 cm, $^1/_2$ půdice a $^1/_{16}$ ramena rovná se 53 cm; vypočítati obsah.

33. Vypočítati obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož obvod má 72 m (162 cm), a rameno jest o 6 m (1 cm) delší než půdice (než dvojnásobná půdice).

34. V rovnoramenném, 24 cm vysokém trojúhelníku jest půdice k ramenu v poměru $6 : 5$; vypočítati jeho obvod.

35. Obvod rovnoramenného trojúhelníku má 98 m; kdyby byla každá jeho strana o 15 m delší byla by půdice k ramenu v poměru $3 : 4$. Vypočítati jeho strany a obsah.

36. Půdice rovnoramenného trojúhelníku má 32 cm; součet výšky a ramena = 128 cm. Jak velký jest jeho obvod?

37. Obsah rovnoramenného trojúhelníku = 660 m$^2$, výška = $2^8/_{11}$ půdice; vypočítati jeho obvod.

38. Obsah rovnoramenného trojúhelníku = 108 m$^2$, výška = $^2/_3$ půdice; vypočítati jeho obvod.

39. Vypočítati obvod a obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož výška jest $a$ a rameno rovná se dvojnásobné půdici.

40. V rovnoramenném trojúhelníku o půdici $a$ rovná se součet půdice a výšky součtu obou ramen. Vypočítati výšku i rameno.

41. Výška rovnostranného trojúhelníku má *a*) 34·64 m, *b*) 12·124 m, *c*) $a$; vypočítati jeho stranu a obsah. ($\sqrt{3} = 1{\cdot}732$.)

42. Obsah rovnostranného trojúhelníku má *a*) 15·588 m$^2$, *b*) 173·2 cm$^2$; vypočítati jeho stranu ($\sqrt{3} = 1{\cdot}732$).

43. Zvětší-li se strana rovnostranného trojúhelníku o 4 m, zvětší se jeho obsah o 62·352 m$^2$; vypočítati jeho stranu. ($\sqrt{3} = 1{\cdot}732$.)

44. Vypočítati stranu rovnostranného trojúhelníku, jenž rovná se svým obsahem součtu dvou rovnostranných trojúhelníků o stranách 5 m a 12 m.

45. Dán jest čtverec o straně $a$, nad každou jeho stranou sestrojen jest rovnostranný trojúhelník. Vypočítati jest obsah vzniklé hvězdice.

46. Vypočítati jest obvod čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou temena trojúhelníku úkolu 45.

47. Rovnostranný trojúhelník má týž obvod jako kosočtverec o straně $a$. Vypočítati poměr obsahů obou ploch, rovná-li se výška kosočtverce $^1/_2$ výšky trojúhelníku.

48. Výška rovnostranného trojúhelníku rovná se úhlopříčce čtverce o straně $a$; vypočítati jeho stranu i obsah.

49. Strana rovnostranného trojúhelníku rovná se úhlopříčce obdélníku o stranách $a$ a $3^3/_7 a$; vypočítati jeho výšku a obsah.

50. Středem rovnostranného trojúhelníku o straně $a$ rýsovány jsou příčky ku stranám rovnoběžné. Řečenými příčkami rozdělen jest daný trojúhelník na 3 kosočtverce a 3 trojúhelníky; vypočítati obsah těchto částí.

51. Dán jest rovnostranný trojúhelník o straně $a$, nad jeho výškou sestrojen jest druhý rovnostranný trojúhelník a nad výškou druhého třetí. Vypočítati obsah každého z nich a též poměr obsahů těch.

52. Vypočítati stranu rovnostranného trojúhelníku, jenž rovná se svým obsahem součtu trojúhelníků úkolu předcházejícího.

53. Vypočítati obsah trojúhelníku, jsou-li měrná čísla jeho stran

| | | |
|---|---|---|
| *a*) 41, 58, 51; | *f*) 15, 41, 52; | *l*) $6^2/_3$, $12^1/_3$, 17; |
| *b*) 20, 37, 51; | *g*) 9, 10, 17; | *m*) 26, 28, 36. |
| *c*) 37, 13, 30; | *h*) 8, 26, 30; | |
| *d*) 82, 21, 89; | *k*) 37, 72, 91; | |

54. Dvě města $A$ a $B$ spojena jsou železnicí přímého směru, 21 km dlouhou. Vesnice $C$ jest od $A$ 10 km a od $B$ 17 km vzdálena. Z ves-

nice té vystavěti jest nejkratší silnici ke dráze. Jak dlouhá jest tato silnice a ve které vzdálenosti od $B$ protíná železnici.

55. V trojúhelníku, jehož obvod má 84 m, jest půdice o 11 m delší než levá a o 11 m kratší než pravá strana. Vypočítati jeho strany. obsah, výšku a jí tvořené úseky půdice.

56. Strany trojúhelníku mají 17 m 39 m a 44 m; jak velké jsou strany jemu podobného trojúhelníku, jehož obsah má $82^1/_2$ m²?

57. Dvě strany trojúhelníku mají 40 m a 74 m; výška ku třetí straně příslušná má 24 m. Vypočítati stranu třetí a obsah.

58. Obsahy dvou podobných trojúhelníků jsou 23·04 m² a 56·25 m²; půdice druhého jest o $4^1/_2$ m větší než půdice prvého. Jak dlouhé jsou tyto strany?

59. V trojúhelníku 2100 m² velikém mají 2 výšky 60 m a 56m; vypočítati jeho strany.

60. Strany trojúhelníku 2100 m² velikého jsou v poměru $10 : 17 : 21$; jak jsou dlouhé?

61. Úhlopříčky kosočtverce mají *a*) 51 cm a 140 cm, *b*) 20 cm a 48 cm, *c*) 57 dm a 176 dm, *d*) 90 m a 48 m; vypočítati jeho obvod.

62. Obvod kosočtverce = 400 m; jedna úhlopříčka má 56 m; jak velký jest jeho obsah?

63. Obvod kosočtverce má 180 cm (148 dm, 26 m), jedna úhlopříčka má 72 cm (70 dm, 3·6 m); jak velký jest jeho obsah?

64. V kosočtverci 24 cm vysokém má kratší úhlopříčka 30 m; jak dlouhá jest strana a delší úhlopříčka?

65. Úhlopříčky kosočtverce jsou v poměru $3 : 4$ ($8 : 15$, $7 : 24$, $5 : 12$), obvod má 160 m (272 cm, 1000 cm, 208 dm); vypočítati jeho obsah.

66. V kosočtverci o straně $a$ rovná se výška $^4/_5 a$; vypočítati jeho úhlopříčky.

67. V kosočtverci o straně $a$ má jeden úhel $60^\circ$; vypočítati jeho úhlopříčky a obsah.

68. Obvod kosodélníku má 56 m, rozdíl dvou sousedných stran 2 m a úhlopříčka 14 m; vypočítati jeho obsah.

69. Půdice kosodélníku má 44 m (20 cm), úhlopříčky 34 m a 78 m (30 cm. a 14 cm); vypočítati jeho obsah a výšku. (Pozoruj trojúhelník, jehož půdicí jest půdice trojúhelníku a vrcholem jest průsečík úhlopříček.)

70. Dvě sousedné strany kosodélníku jsou $a$ a $b$; jimi sevřený úhel má *a*) $45^\circ$, *b*) $60^\circ$, *c*) $30^\circ$. Vypočítati jeho obsah.

71. Obvod kosodélníku má 112 m, obě výšky mají 12 m a 10 m; vypočítati jeho obsah.

72. Obvod kosodélníku má 60 m; rozdíl dvou sousedných stran 6 m. Delší strana jemu podobného kosodélníku rovná se kratší straně daného. Vypočítati jeho obsah.

73. V pravoúhlém lichoběžníku má dolejší půdice 51 m, hořejší půdice 42 m, kosé rameno 41 m; vypočítati jeho obvod a kratší úhlopříčku.

74. V pravoúhlém lichoběžníku má dolejší půdice 40 m, ramena mají 24 m a 25 m. Vypočítati jeho obvod.

75. V pravoúhlém lichoběžníku má kratší půdice 48 m, kolmé rameno 36 m a úhlopříčka jest kolmá na kosém rameni. Vypočítati delší půdici a kosé rameno.

76. Pravoúhlý lichoběžník má 135 m² a jest $7^1/_2$ m vysoký. Dolejší jeho půdice jest o 4 m delší než půdice hořejší. Jak velký jest jeho obvod?

77. Kosé rameno pravoúhlého lichoběžníku svírá s dolejší půdicí úhel $60^\circ$; kosé jeho rameno má délku $a$ a hořejší půdice $^7/_4\,a$. Vypočítati jeho obsah.

78. Obvod pravoúhlého lichoběžníku rovná se 100 m; rozdíl ramen rovná se 2 m, rozdíl půdic 12 m. Jak velký jest jeho obsah?

79. Dán jest rovnoramenný 200 m² velký lichoběžník; dolejší jeho půdice jest 5krát tak dlouhá jako výška a hořejší půdice rovná se $^1/_4$ dolejší. Vypočítati jeho obvod.

80. Vypočítati obvod, úhlopříčku a obsah rovnoramenného lichoběžníku, jenž složen jest ze tří rovnostranných trojúhelníků o straně $a$.

81. V rovnoramenném lichoběžníku má dolejší půdice 30 m (100 cm, 8·8 dm), hořejší půdice 12 m (60 cm, 4·6 dm) a rameno 15 m (101 cm, 7·5 dm); vypočítati jeho obsah.

82. Obdélník o rozměrech, jež jsou v poměru $3:4$, rovná se svým obsahem rovnoramennému lichoběžníku, jehož půdice mají 34 m a 16 m a rameno 15 m. Vypočítati rozměry obdélníku.

83. Ramena lichoběžníku jsou v poměru $9:16$; hořejší půdice jest střední měřicky srovnalostnou mezi rameny a dolejší půdice rovná se dvojnásobné hořejší půdici. Vypočítati jeho obvod.

84. Dán jest čtverec o straně $a$ nad jeho stranami rýsovány jsou rovnoramenné lichoběžníky. Rameno lichoběžníku rovná se polovici úhlopříčky a hořejší jeho půdice polovici strany čtverce. Vypočítati úhlopříčku lichoběžníku a obsah plochy složené z daného čtverce a řečených lichoběžníků.

85. Půdice pravoúhlého lichoběžníku jsou $2a$ a $a$, jeho obsah rovná se šesteronásobnému obsahu rovnostranného trojúhelníku o straně $a$. Vypočítati délku ramena.

86. V lichoběžníku 10 cm vysokém mají půdice 27 m a 12 m. Vypočítati výšku trojúhelníku, jenž vznikne prodloužením ramen.

87. V lichoběžníku 15 m vysokém rovná se hořejší půdice výšce, úhlopříčky mají 25 m a 39 m. Vypočítati dolejší půdici a obsah.

88. Dolejší půdice lichoběžníku jest $a$, k ní přilehlé úhly mají $60^\circ$ a $45^\circ$; hořejší půdice rovná se výšce. Vypočítati jeho výšku a obsah.

89. Od obdélníku 45 m širokého oddělen jest příčkou, jež vychází z hořejšího pravého vrcholu, trojúhelník 540 m² veliký. Zbylý lichoběžník má dvakrát tak velký obvod jako oddělený trojúhelník. Jak dlouhý jest daný obdélník?

90. Dolejší půdice lichoběžníku jest $a$, výška $\frac{a}{2}$ a úhly při dolejší půdici mají $60^{\circ}$ a $45^{\circ}$. Vypočítati jeho obsah.

91. Půdice lichoběžníku mají 60 cm a 16 cm (50 m a 22 m; 70 cm a 19 cm) ramena 39 cm a 17 cm (26 m a 30 m; 41 cm a 58 cm); vypočítati jeho výšku a obsah. (Rýsuj vrcholem hořejší půdice rovnoběžku k ramenu, počítej obsah a z něho výšku vzniklého trojúhelníku).

92. Strany deltoidu mají 136 cm a 255 cm; úhly proti hlavní úhlopříčce položené jsou pravé. Vypočítati jeho úhlopříčky.

93. Úhlopříčky deltoidu 80 $m^2$ velikého jsou v poměru $1^3/_4 : 2^4/_5$; jak jsou dlouhé?

94. Strany deltoidu mají 10 cm a 17 cm (26 dm a 74 dm), vedlejší úhlopříčka má 16 cm (48 dm); vypočítati jeho obsah.

95. Vedlejší úhlopříčka deltoidu, jež má 40 m, dělí deltoid na dva rovnoramenné trojúhelníky; v jednom z nich jest rameno o 2 m a ve druhém o 8 m delší než jeho výška. Vypočítati obvod a obsah deltoidu.

96. Deltoid složen jest z rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsna jest $a$ a z trojúhelníku rovnostranného. Vypočítati obvod a obsah deltoidu.

97. Deltoid složen jest z rovnostranného trojúhelníku o straně $a$ a z trojúhelníku rovnoramenného, jenž jest čtyřikrát tak vysoký, jako trojúhelník rovnostranný. Vypočítati obvod a obsah deltoidu.

98. Dán jest obdélník 21 cm. dlouhý a 16 cm. široký. Střední příčka rovnoběžná k délce jest hlavní úhlopříčkou vepsaného deltoidu. Vedlejší úhopříčka rozděluje hlavní v poměru 2 : 5. Vypočítati obvod deltoidu.

99. Strany deltoidu mají 1·7 m a 3·9 m; hlavní úhlopříčka má 4·4 m. Vypočítati obsah a vedlejší úhlopříčku.

100. Hlavní úhlopříčka deltoidu má 51 cm, jeho obvod 114 cm a jedna strana 37 cm. Vypočítati obsah a vedlejší úhlopříčku.

101. Vedlejší úhlopříčka deltoidu jest $a$, hlavní úhlopříčka $1{\cdot}7\ a$. Vypočítati jeho obvod, je-li úhel proti hlavní úhlopříčce položený pravý.

102. V různoběžníku $abcd$ jsou úhly při $a$ a při $c$ pravé; $ab = 52$ cm, $bc = 56$ cm, $cd = 33$ cm; vypočítati jeho obvod.

103. V různoběžníku $abcd$ jest úhel při $a$ pravý, $ab = 15$ m, $bc = 44$ m, $cd = 39$ m, $da = 8$ m; vypočítati jeho obsah.

104. Dán jest pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona má 40 cm a odvěsna 24 cm. Nad jeho přeponou sestrojen jest rovnoramenný 21 cm. vysoký trojúhelník. Vypočítati obvod vzniklého různoběžníku.

105. V různoběžníku $abcd$ jest $ab = 13$ cm (58 m, 20 cm), $bc = 41$ cm (77 m, 40 cm), $cd = 52$ cm (40 m, 13 cm), $ad = 4$ cm (41 m, 19 cm), $db = 15$ cm (51 m, 37 cm). Vypočítati jeho obsah.

106. Různoběžník má 3 rovné strany o délce $a$; druhá z nich jest na prvé kolmá a třetí svírá s druhou úhel 135°. Vypočítati stranu čtvrtou a obsah.

107. V různoběžníku $abcd$ jest $ad = 17$ m, $dc = 25$ m; vzdálenost vrcholu $d$ od úhlopříčky $ac$ má 15 m; vrchol $b$ jest od $ac$ 24 m vzdálen. Kolmice poslední (z $b$ a $ac$ spuštěná) protíná $ac$ v $g$, že jest $ag : gc = 9 : 5$. Vypočítati obsah různoběžníku.

# Část šestá.

# O kruhu.

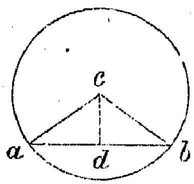
## I. Tětivy.

§. 90. Spojí-li se krajní body tětivy $ab$ (obr. 119.) se středem, vznikne rovnoramenný trojúhelník $abc$. Je-li $cd$ výškou jeho, jest patrno:

1. Přímka, spojující střed kruhu se středem tětivy, jest kolmá na tětivě a půlí úhel středový. $cd$ udává vzdálenost tětivy od středu.

2. Kolmice, spuštěná ze středu kruhu na tětivu, rozpoluje úhel středový, tětivu a tudíž i příslušný oblouk.

3. Kolmice vztyčená uprostřed tětivy, prochází středem kruhu a půlí úhel středový.




Obr. 119.

Z této poučky následuje: *Geometrickým místem pro střed kružnice, která dva dané body obsahuje, jest kolmice, vztyčená v prostředku přímky tyto body spojující.*

Na větách těchto zakládá se řešení úkolů:

α) **Stanoviti střed dané kružnice nebo daného oblouku kružnicového.**

Má-li se stanoviti střed kružnice, rýsují se dvě tětivy. Kolmice v středech těchto tětiv vztyčené, jsou dvě geometrická místa pro střed. Dána-li jest celá kružnice, postačí jedna tětiva a uprostřed ní vztyčená kolmice; prodlouží-li se tato kolmice až kružnici na obou stranách protne, obdrží se průměr. Střed průměru jest středem kružnice.

β) **Rýsovati kružnici, která tři dané body** *abc* **obsahuje.** Spojením daných tří bodů povstane trojúhelník *abc*; kolmice, uprostřed stran tohoto trojúhelníku vztýčené, protínají se v jediném bodu, který jest středem vepsaného kruhu. Jest tedy třeba pouze dvě z řečených kolmic rýsovati; jejich průsečík jest středem a vzdálenost středu od kteréhokoli z daných bodů poloměrem žádané kružnice.

Omezení. Aby se tyto dvě kolmice, jako místa geometrická pro střed, protínaly, nesmí dané tři body *abc* v jediné přímce ležeti. — Průsečík těchto tří kolmic jest jeden ze zvláštních bodů trojúhelníků. Tedy jest pouze jediný bod možný, který od daných tří bodů stejnou má vzdálenosť. Platí tudíž věta: **Třemi danými body (trojúhelníkem) jest kružnice dokonale určena;** mimo to plyne z toho věta:

**Dvě kružnice mohou se pouze ve dvou bodech protínati.** Kdyby měly tři body společné, sjednotily by se v celé své rozsáhlosti.

## § 91. Souvislost délky tětivy se vzdáleností její od středu.

1. *V témže kruhu nebo ve shodných kruzích příslušejí rovným tětivám rovné vzdálenosti od středu.*

Dokaž poučku tu shodností troújhelníků.

2. Rýsuje-li se v kruhu soustava rovnoběžných tětiv, a na ně kolmý průměr, jest patrno:

*Delším tětivám odpovídají v témž kruhu kratší vzdálenosti od středu a větším vzdálenostem kratší tětivy.*

Následek: **Průměr jest nejdelší tětivou kruhu, neboť jeho vzdálenost od středu jest nejkratší** ($= o$).

**Úkoly ke cvičení.** 1. V kruhu o poloměru 37 cm (85 m, 185 cm) rýsována jest ve vzdálenosti 12 cm (77 m, 57 cm) od středu tětiva. Jak jest dlouhá?

2. Tětiva, jež má 18 cm (10·4 dm, 78 cm), jest od středu 40 cm (16·5 dm, 80 cm) vzdálena vypočítati poloměr.

3. 10 m dlouhý průměr kruhu rozdělen jest na 3 části v poměru $2:7:1$; jak dlouhé jsou tětivy v bodech dělících kolmé na průměr.

4. Jak vzdálena jest tětiva od středu, jež rovná se poloměru $r$.

5. V kruhu o poloměru 25 cm rýsovány jsou na různých stranách středu dvě rovnoběžné tětivy; jedna z nich jest od středu 24 cm vzdálena, druhá jest 14 cm dlouhá. Vypočítati obsah lichoběžníku, jehož půdicemi jsou ony tětivy.

6. V kruhu rýsována jest tětiva 90 cm (60 m) dlouhá; jak vzdálena jest od středu, je-li tato vzdálenost o 25 cm (18 m) kratší než poloměr?

## II. O úhlech v kruhu.

§. 92. Kromě úhlu středového, jehož vrchol jest ve středu kruhu a jehož ramena jsou poloměry, pozorovati budeme **úhel obvodový**, jehož vrchol jest na obvodu kruhu (na kružnici) a ramena jeho jsou tětivy.

V obr. 120. jsou $\sphericalangle \alpha$ a $\sphericalangle \beta$ úhly obvodové a $\sphericalangle \gamma$ úhel středový.

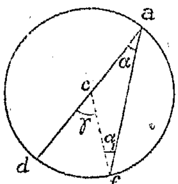
Ke každému středovému i obvodovému úhlu náleží oblouk, který rameny jeho jest omezen, a praví se, že onen úhel na tomto oblouku stojí; $\sphericalangle \gamma$ stojí tedy na témž oblouku *df*, na němž stojí $\sphericalangle \alpha$.

1. **Měrou středového úhlu jest oblouk, na němž stojí.**

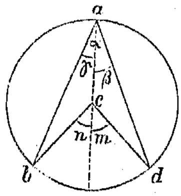
2. **Úhel obvodový rovná se polovici úhlu středového, s kterým stojí na témž oblouku.**

Při důkazu této věty rozeznávají se tři případy:

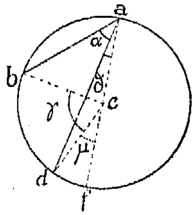
$\alpha$) Jedno rameno obvodového úhlu $\alpha$ (obr. 120.) obsahuje střed. Středový úhel $\gamma$ stojí s obvodovým úhlem $\alpha$




Obr. 120.




Obr. 121.




Obr. 122.

na témž oblouku *df*. Jako vnější úhel rovnoramenného trojúhelníku *acf* jest $\sphericalangle \gamma = 2\alpha$, tudíž $\sphericalangle \alpha = {}^1/_2\gamma$.

$\beta$) Je-li střed kruhu (obr. 121.) mezi rameny úhlu obvodového $\alpha$, a rýsuje-li se vrcholem *a* průměr, jest

$$\sphericalangle \gamma = \frac{1}{2}\, n$$

$$\sphericalangle \beta = \frac{1}{2}\, m$$

$$\sphericalangle \gamma + \beta = \frac{m + n}{2}$$

$$\sphericalangle \alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle bcd.$$

γ) Je-li střed kruhu mimo ramena úhlu obvodového $\alpha$ (obr. 122.), jest

$$\sphericalangle baf = \sphericalangle \alpha + \delta = \frac{1}{2} \sphericalangle bcd = \frac{\gamma + \mu}{2};$$

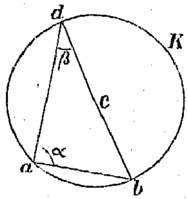
$$\sphericalangle \delta = \frac{1}{2} \mu;$$

$$\overline{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

$$\sphericalangle \alpha = \frac{1}{2} \gamma.$$

Následky: 1. **Měrou úhlu obvodového jest polovička oblouku, na němž stojí.**

**2. Úhly obvodové, jež v témže kruhu stojí na společném oblouku nebo na obloucích rovných jsou sobě rovny.**




Obr. 123.

**3. Obvodový úhel, stojící na polokružnici (obvodový úhel v polokruhu) jest pravý.**
V obr. 123. jest $\sphericalangle \alpha = R$; $\triangle abd$ jest pravoúhlý, jeho přeponou jest průměr. Jest patrno, že jest **geometrickým místem pro vrchol pravého úhlu trojúhelníku, jehož přepona jest dána, kružnice nad touto přeponou jako průměrem rýsovaná.**

**Úkoly.** 1. Jak velký jest obvodový úhel stojící na oblouku, jenž rovná se *a*) $^2/_3$, *b*) $^4/_5$, *c*) $^5/_6$, *d*) $^5/_{12}$ kružnice.

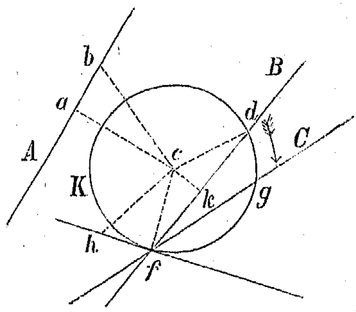
2. Obvod kruhu rozdělen jest na 3 díly, jež jsou v poměru $2 : 3 : 4$. Jak velké jsou vnitřní úhly trojúhelníku, jenž vznikne spojením bodů dělících?

3. Obvod kruhu rozdělen jest na 4 díly v poměru $1 : 2 : 3 : 4$; vypočítati úhly čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou ony body dělící.

4. Obvod kružnice rozdělen jest na 15 rovných dílů a dělicí tečky označeny jsou po řadě číslicemi 1 až 15. Tečky 1 se 3, 3 se 6, 6 se 12 a 12 s 1 spojeny jsou přímkami. Vypočítati vnitřní úhly vzniklého čtyřúhelníku.

## III. Kružnice ve spojení s přímkou. Tečny.

§. 93. Nalézá-li se přímka v rovině kružnice, má s kružnicí body společné jako přímka $B$ (obr. 124.) nebo s ní společných bodů nemá jako přímka *A*. Přímka *B*, jež protíná kružnici ve dvou bodech, sluje **sečna.** Tětiva *df* jest omezenou částí sečny. Tětiva napíná oblouk kružnice a to vždy menší, kdykoliv jinak podotknuto není, zde tedy oblouk *fgd*.



Obr. 124.

Z rovnoramenného trojúhelníku *fcd* jest patrno: Vzdálenost sečny od středu jest vždy menší než poloměr.

Předpokládá-li se, že se sečna *B* kolem jednoho svého průsečíku s kružnicí, na př. kolem bodu *f*, otáčí směrem naznačeným šípem, mění druhý její průsečík *d* s kružnicí svou polohu, přibližuje se totiž pevnému průsečíku *f*. Také délka tětivy stále se zmenšuje. Přiblíží-li se konečně hybný průsečík průsečíku *f* nekonečně blízko, stane se délka tětivy nekonečně malou a tudíž sečna tečnou kružnice *K* v bodu *a* jakožto bodu dotyčném. Tečna má s kružnicí dva body společné, jež jsou však nekonečně sobě blízky. Nekonečně malá část kružnice sluje prvek kružnice. **Tečna jest tedy přímka, která má s kružnicí prvek společný.** Prvek kružnici a tečně společný slove bod dotyčný. Prvek ten považuje se při geometrických vyšetřováních za jediný bod, proto tedy bod dotyčný. Poněvadž kterýkoli bod tečny (na př. *h*) vyjma bod dotyčný mimo kružnici ležeti musí, jest vzdálenost bodu dotyčného od středu nejkratší vzdáleností středu *c* od tečny *T*; tudíž jest $cf \perp T$, t. j.:

1. **Vzdálenost tečny od středu rovná se poloměru.**

2. **Poloměr k bodu dotyčnému příslušný jest na tečně kolmý.**

Jelikož jest však bod dotyčný jako prvek částí kružnice i tečny, může se též říci:

3. **Každý poloměr jest na kružnici kolmý.**

Naopak platí věta:

4. **Každá přímka, jejíž vzdálenost od středu rovna jest poloměru, jest tečna.**

5. **V bodu kružnice lze k této pouze jedinou tečnu rýsovati.** (Následek věty 2.)

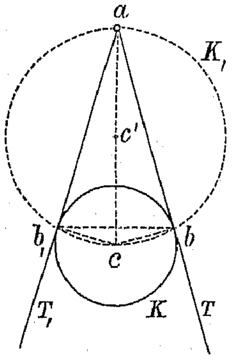
Z těchto vět pochodí:

a) *Místo geometrické pro středy kružnic, které určitým poloměrem opsány jsouce, mají se dotýkati přímky dané, jest přímka ve vzdálenosti poloměru daného k dané přímce rovnoběžně rýsovaná.*

b) *Geometrické místo pro středy všech kružnic, které se dané přímky v daném bodě dotýkají, jest kolmice v tomto bodě na danou přímku vztyčená.*

§. 94. **Z bodu vně kružnice položeného rýsovati ke kružnici tečny.**

Rozbor. Budiž $c$ (obr. 125.) středem dané kružnice, k níž se z bodu $a$ tečna rýsovati má. Je-li přímka $T$ žádanou tečnou a $b$ bod dotyčný, bude celé sestrojení záležeti na stanovení polohy bodu $b$. Jedním místem geometrickým pro tento bod jest daná kružnice $K$. Rýsuje-li se poloměr $cb$, jest tento na tečně $T$ v bodu $b$ kolmý, tedy $\sphericalangle\, abc = R$. Poněvadž ramena tohoto úhlu pravého krajními body délky $ac$ procházejí, jest kružnice $K_1$ nad $ac$ jako průměrem rýsovaná druhým místem geometrickým pro bod $b$.



Obr. 125.

Sestrojení. Rýsuje se přímka $ac$ a nad ní jako průměrem kružnice; společné body $b$ a $b_1$ této kružnice a kružnice dané jsou body dotyčné: spojením bodů dotyčných s bodem daným obdrží se žádané tečny.

Determinace. Poněvadž kružnice $K_1$ a $K$ dva body společné mají, obdrží se dva body dotyčné, tedy i dvě tečny. Kdyby ležel bod $a$ vnitř kružnice $K$, neprotínaly by se kružnice $K$ a $K_1$ a neobdrželo by se tudíž žádných tečen. — Kdyby bod $a$ ležel na obvodě kružnice, byl by jen jediný bod oběma kružnicím společný, tudíž jen jeden bod dotyčný a jedna tečna.

**Dvě tečny z téhož bodu mimo kružnici ležícího ke kružnici rýsované jsou si rovny.**

V obr. 125. jsou pravoúhlé trojúhelníky $abc$ a $ab_1c$ shodny, proto též $ab_1 = ab$.

Rýsuje-li se tětiva $bb_1$ (obr. 125), plyne z rovnoramenných trojúhelníků $b_1ab$ a $b_1cb$, které mají společnou půdici:

*a)* **Přímka, která spojuje průsečík dvou tečen se středem, půlí *α)* úhel těmito tečnami sevřený, β) oblouk a tětivu $bb_1$ a jest mimo to na této tětivě kolmá.**

Následek. *Geometrické místo pro středy všech kružnic, které se dotýkají dvou daných přímek, jest přímka jich úhel půlící.*

**Úkoly.** 1. Ke kružnici o poloměru 16 cm (21 cm) rýsována jest z bodu 65 cm (29 cm) od středu vzdáleného tečna; jak jest dlouhá?

2. Ke kružnici, jejíž poloměr má 39 cm (36 cm), rýsována jest z bodu vně kruhu položeného tečna, jež jest o 9 cm kratší než vzdálenost onoho bodu od středu; jak dlouhá jest tečna?

3. Z bodu ke kružnici o poloměru $r$ rýsované tečny svírají *a)* úhel pravý, *b)* úhel $60^{\circ}$, *c)* úhel $120^{\circ}$; vypočítati vzdálenost jeho od středu a délku tečny.

4. Obvod kruhu o poloměru $r$ rozdělen jest body dotyčnými dvou tečen na díly v poměru $1:2$ ($1:5$). Vypočítati jest 1. vzdálenost průsečíku tečen od středu, 2. délku tečen. (Přihlížej k velikosti úhlu tečnami sevřeného.)

5. Tečna z bodu $a$ ke kruhu o poloměru $r$ rýsovaná rovná se průměru; jak vzdálen jest bod $a$ od středu?

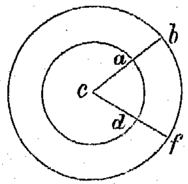
**Úkoly k rýsování.**

1. Kol daného trojúhelníku tupoúhlého rýsovati kružnici.
2. Rýsovati kružnici, která dva dané body obsahuje a jejíž střed jest na dané přímce.
3. Daný oblouk kružnice rozděliti na 4 rovné díly.
4. Daným poloměrem rýsovati kružnici, která 2 body dané obsahuje.
5. Daným poloměrem rýsovati kružnici, která se ramen daného úhlu dotýká.
6. V daném kruhu rýsovati tětivu rovnou poloměru a v krajních její bodech rýsovati tečny.
7. Rýsovati kružnici, která se 3 daných přímek dotýká. (Trojúhelníku vepsati kružnici.)
8. K dané kružnici rýsovati tečny *a)* k dané přímce rovnoběžné *b)* na dané přímce kolmé.
9. Z bodu, jehož vzdálenost od středu rovná se *a)* $^5/_6$ průměru, *b)* 3násobnému poloměru, rýsovati k dané kružnici tečny.

## IV. Dvě kružnice.

§. 95. **Kružnice soustředné.** Dvě nestejné kružnice v téže rovině slovou, mají-li společný střed, **soustřednými** (concentrickými). (Obr. 126.)

Úsečka $ab$, rovnající se rozdílu poloměrů obou kružnic, určuje vzdálenost těchto kružnic. Protože jest tato vzdálenost všude stejna, praví se, že **kružnice soustředné jsou rovnoběžny**.




Obr. 126.

Část roviny, dvěma soustřednými kružnicemi omezená, slove **mezikruží**. Vzdálenost kružnic mezikruží omezujících, udává šířku mezikruží.

Oblouky *ad* a *bf*, které k témuž úhlu středovému příslušejí, jsou stejnolehlé.

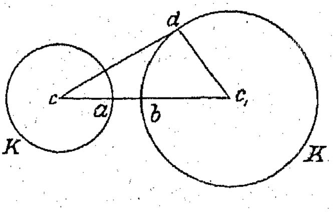
Velikostí rovná se mezikruží rozdílu dvou kruhů.

Část kruhu, omezená dvěma poloměry a obloukem, slove **výseč kruhová** (na př. *bcf* nebo *acd* v obr. 126.); část kruhu obloukem a příslušnou tětivou omezená slove **úseč kruhová** (na př. *fgd* v obr. 124).

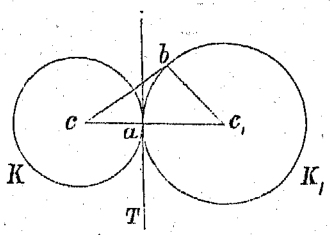
Část mezikruží (na př. *abdf*) omezená dvěma stejnolehlými oblouky a příslušnými šířkami, slove **výseč mezikružná.**

§. 96. **Kružnice výstředné.** Mají-li kružnice různé středy, slovou **výstřednými** (excentrickými); přímka jejich středy spojující jmenuje se **středná** (centrala).

Vzájemná poloha dvou výstředných kružnic jest závislá na poměrné velikosti centraly a poloměrů. Rozeznávati lze tyto případy:




Obr. 127.

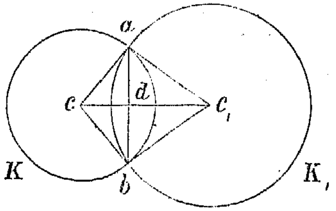



Obr. 128.

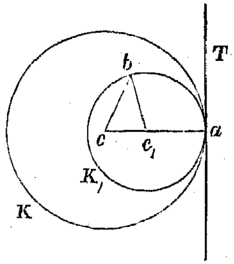
1. Je-li centrala dvou kružnic delší než součet poloměrů (obr. 127.), **leží jedna mimo druhou.**

2. Rovná-li se centrala dvou kružnic součtu poloměrů, **dotýkají se kružnice vně** (obr. 128.). Dotyčný jejich bod jest na centrale. Tečna *T*, oběma kružnicím společná, jest na centrale kolmá.

3. V obr. 129. zobrazené kružnice $K$ a $K_1$ **protínají se** ve dvou bodech $a$ a $b$; jejich centrala jest menší než součet poloměrů, ale větší než jejich rozdíl. V deltoidu $c\ a\ b\ c_1$ jest spo-




Obr. 129.




Obr. 130.

lečná tětiva $ab$ (chordala) kolmá na středné. Část oběma kruhům společná slove **čočka**; zbývající část každého kruhu jmenuje se **měsíček.**

4. Rovná-li se centrala rozdílu poloměrů, **dotýkají se obě kružnice vnitř** (obr. 130.). Všecky body kružnice $K_1$ kromě dotyčného bodu $a$ leží uvnitř kružnice $K$. Společná tečna jest na prodloužené centrale kolmá.

5. Konečně může jedna ze dvou kružnic úplně vnitř druhé ležeti.

Z obr. 128. a 130. jest patrno: *Geometrickým místem pro středy kružnic, jež dotýkati se mají dané kružnice v daném bodě, jest přímka spojující bod dotyčný se středem dané kružnice.*

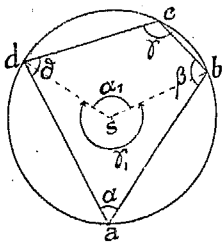
## V. Kruh a mnohoúhelník.

§. 97. Mnohoúhelník, jehož vrcholy jsou v obvodu kruhu, sluje **kruhu vepsaný.** Kruh jest mnohoúhelníku tomu opsán. Mnohoúhelník kruhu vepsaný sluje též **mnohoúhelníkem z tětiv,** protože jsou strany jeho tětivami kruhu.

Mnohoúhelník, jehož strany se dotýkají téhož kruhu, sluje **mnohoúhelníkem z tečen** nebo **mnohoúhelníkem kruhu opsaným.** Kruh jest mnohoúhelníku tomu vepsán.

Z učiva dřívějšího jest známo, že se dá každému trojúhelníku a každému pravidelnému mnohoúhelníku kruh opsati; každému z nich dá se též kruh vepsati.

### §. 98. Čtyřúhelník z tětiv a čtyřúhelník z tečen.




Obr. 131.

V obr. 131. jest

$$\sphericalangle \alpha = \frac{1}{2} \alpha_1$$

$$\sphericalangle \gamma = \frac{1}{2} \gamma_1$$

$$\sphericalangle \alpha + \gamma = \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} = 2R.$$

Podobně se dokáže že jest

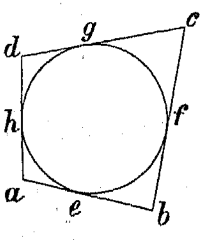
$$\sphericalangle \beta + \delta = 2R,$$ t. j.

**Součet protilehlých úhlů čtyřúhelníků z tětiv rovná se $2R$.**

Z poučky té plyne též: Čtyřúhelníku, v němž doplňují se protilehlé úhly na $2R$, možno opsati kruh.

Kruh lze opsati čtverci, obdélníku, rovnoramennému lichoběžníku.

**Ve čtyřúhelníku z tečen jsou součty protějších stran sobě rovny.** (Obr. 132.)




Obr. 132.

Z pouček o tečnách plyne:

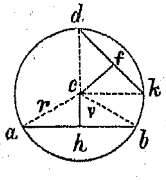
$$ae = ah$$
$$be = bf$$
$$cg = cf$$
$$dg = dh, \text{ tudíž}$$
$$ab + dc = bc + da.$$

Naopak možno říci:

**Čtyřúhelník, v němž jsou součty protějších stran sobě rovny, jest čtyřúhelník z tečen.**

Čtverci a kosočtverci dá se vepsati kruh.

### §. 99. Kruhu vepsaný pravidelný mnohoúhelník.




Obr. 133.

1. Rýsují-li se v kruhu dva na sobě kolmé průměry, jsou jejich krajní body vrcholy **čtverce vepsaného.**

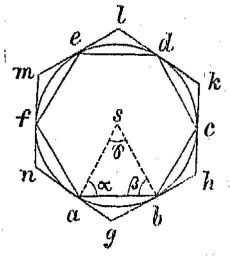
Označí-li se v obr. 133. strana vepsaného čtverce $kd = s_4$, a je-li poloměr kruhu $r$, plyne z pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku $cdk$

$$s_4 = r\sqrt{2}.$$

2. **V pravidelném** do kruhu **vepsaném šestiúhelníku** *abcdef* (obr. 134. jest $\triangle abs$ rovnostranný (proč?), tudíž rovná se strana vepsaného šestiúhelníku **poloměru kruhu.**

$$s_6 = r.$$

Aby se rýsoval pravidelný do kruhu vepsaný šestiúhelník, naměří se od libovolného bodu kružnice počínaje, poloměr jako tětiva šestkráte; potom třeba pouze tyto tětivy rýsovati.




Obr. 134.

3. Spojí-li se vrcholy vepsaného pravidelného šestiúhelníku ob jeden, obdrží se **pravidelný trojúhelník.**

V obr. 133. buď *ab* stranou pravidelného trojúhelníku do kruhu vepsaného; v trojúhelníku *abc* má úhel při *c* $120^0$; trojúhelník *ach* možno považovati za polovici trojúhelníku rovnostranného tudíž jest

$$ch = \frac{r}{2} \text{ a proto}$$

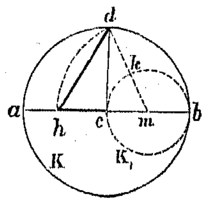
$$s_3 = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3}.$$

4. Rýsovati stranu pravidelného do kruhu vepsaného **desetiúhelníku** a **pětiúhelníku.**

Rozdělí-li se poloměr kruhu dle zlatého seku, rovná se větší jeho úsek straně pravidelného desetiúhelníku.

V obr. 135. jest $dk = s_{10}$. Aby se při skutečném rýsování kružnice $K_1$ rýsovati nemusela, rýsuje se poloměrem *md* oblouk *dh*; potom jest $ch = dk = s_{10}$.

Mimo to rovná se délka *hd* straně pravidelného pětiúhelníku, tedy $dh = s_5$.




Obr. 135.

5. Rozpůlí-li se úhel středový, odpovídající straně pravidelného kruhu vepsaného mnohoúhelníku, odpovídá polovici tohoto úhlu středového tětiva rovná straně pravidelného témuž kruhu vepsaného mnohoúhelníku o dvojnásobném počtu stran. Užitím této poučky rýsuje se v základě vepsaného čtverce pravidelný osmiúhelník a t. d.

**Úkoly k rýsování.** Do daného kruhu rýsovati jest pravidelný trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, osmiúhelník, desetiúhelník a dvanáctiúhelník.

§. 100. Aby vypočítal se z daného poloměru $r$ **obsah kruhu vepsaného mnohoúhelníku pravidelného,** rozloží se mnohoúhelník na trojúhelníky tím, že spojí se jeho vrcholy se středem kruhu, potom počítá se výška vzniklých trojúhelníků a jejím měrným číslem násobí se polovička měrného čísla obvodu.

Poznámky: 1. Aby vypočítal se obsah pravidelného kruhu vepsaného osmiúhelníku, rozložíme osmiúhelník na 4 deltoidy, omezené dvěma sousednými stranami a dvěma poloměry. Úhlopříčkami deltoidu jsou 1. strana vepsaného čtverce, 2. poloměr kruhu. Obsah osmiúhelníku rovná se 4násobnému obsahu deltoidu.

Podobně vypočítá se obsah pravidelného vepsaného dvanáctiúhelníku.

2. Je-li rýsovati pravidelný mnohoúhelník, jehož strana jest dána, rýsujeme do libovolného kruhu pravidelný mnohoúhelník o témž počtu stran, rozložíme jej spojením jeho vrcholů se středem na trojúhelníky a mezi ramena jednoho z nich rýsujeme rovnoběžku k jeho půdici, rovnou dané straně. Kružnice kolem středu opsaná, jež prochází krajními body řečené rovnoběžky, stanoví na rýsovaných poloměrech vrcholy žádaného mnohoúhelníku.

**Úkoly početní.** 1. Vypočítati stranu a obsah pravidelného $a$) trojúhelníku, $b$) čtyřúhelníku, $c$) šestiúhelníku, jenž vepsán jest kruhu o poloměru 2 dm.

2. Kolem rovnostranného trojúhelníku 129·9 cm$^2$ velikého opsán jest kruh; jak dlouhý jest jeho poloměr $(\sqrt{3} = 1{\cdot}732)$?

3. Vypočítati úhlopříčku a obsah čtverce, jehož strana rovná se straně pravid. trojúhelníku, vepsaného kruhu o poloměru $r$.

4. Kolem čtverce 207·36 m velikého opsán jest kruh a do kruhu vepsán pravid. trojúhelník; vypočítati poloměr kruhu a stranu i obsah trojúhelníku.

5. Obsah pravidelného šestiúhelníku rovná se 259·8 m$^2$; vypočítati jeho stranu $(\sqrt{3} = 1{\cdot}732)$.

6. Body, jimiž rozdělena jest kružnice o poloměru $r$ na 6 rovných dílů spojeny jsou ob jeden; vypočítati obsah vzniklé šesticípové hvězdice.

7. Vrcholy pravid. šestiúhelníku o straně $a$ spojeny jsou ob jeden, čímž vzniknou 2 rovnostranné trojúhelníky, jež se částečně pokrývají. Vypočítati velikost plochy oběma trojúhelníkům společné a srovnati ji s plochou daného šestiúhelníku.

8. Vypočítati délku úhlopříček pravid. šestiúhelníku o straně $a$.

9. Vypočítati poměr obsahů rovnostranného trojúhelníku a pravidelného šestiúhelníku, mají-li týž obvod, rovný $a$.

10. Kruhu o poloměru $r$ vepsán jest pravidelný trojúhelník a pravid. šestiúhelník. Jak dlouhá jest strana rovnostranného trojúhelníku rovného součtu obsahů obou vepsaných mnohoúhelníků?

11. Vypočítati obsah pravidelného osmiúhelníku vepsaného kruhu o poloměru $r$.

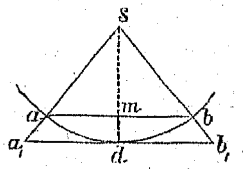
12. Dán jest pravidelný osmiúhelník o straně $a$, jenž spočívá na vodorovné půdici; prodloužením jeho vodorovných a svislých stran vznikne čtverec; vypočítati jeho stranu a obsah.

13. Vypočítati plochu pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného kruhu o poloměru $r$.

14. Vypočítati stranu čtverce, jenž rovná se obsahem svým pravidelnému dvanáctiúhelníku vepsanému kruhu o poloměru $r$.

§. 101. **Kruhu opsaný pravidelný mnohoúhelník.** Rozdělí-li se obvod kruhu na několik rovných částí, tvoří tečny, v jednotlivých bodech dělících ke kružnici rýsované kruhu opsaný pravidelný mnohoúhelník (obr. 134.).

Ze známého poloměru kruhu vypočítá se snadno strana pravidelného kruhu opsaného trojúhelníku, čtyřúhelníku a šestiúhelníku.



Obr. 136.

Je-li na př. (obr. 136.) $ab$ stranou vepsaného pravid. mnohoúhelníku ($ab = s$), jest $hk = S$ stranou opsaného mnohoúhelníku o témž počtu stran. Z podobnosti $\triangle hkc \sim abc$ plyne $S : s = r : cd$; vypočítá-li se předem $cd$ vypočítá se potom snadno $S$.

V pravidelném opsaném trojúhelníku, čtverci a šestiúhelníku možno však z $\triangle a_1 b_1 s$ přímo vypočítati $S$.

Spojí-li se vrcholy pravidelného mnohoúhelníku o straně $S$, jenž opsán jest kruhu o poloměru $r$, se středem tohoto kruhu vznikne $n$ shodných rovnoramenných trojúhelníků, z nichž má každý obsah $= S \cdot \frac{r}{2}$; proto jest obsah mnohoúhelníku

$$p = n \cdot S \cdot \frac{r}{2} = o \cdot \frac{r}{2} \text{ t. j.}$$

**Obsah pravidelného mnohoúhelníku rovná se součinu z měrného čísla jeho obvodu a polovice poloměru kruhu jemu vepsaného.**

**Úkoly.** 1. Vypočítati stranu a obsah pravidelného kruhu o poloměru $r$ opsaného $a$) trojúhelníku $b$) čtverce, $c$) šestiúhelníku.

2. Vypočítati obsah plochy omezené obvodem vepsaného a opsaného pravidelného trojúhelníku kruhu o poloměru $r$.

3. Úkol předešlý řešiti jest vzhledem ku čtverci a též vzhledem k pravidelnému šestiúhelníku.

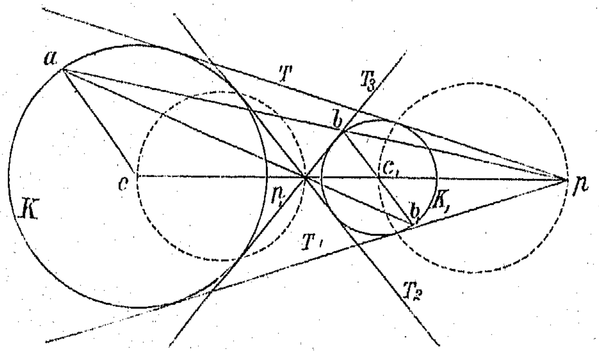
4. Vypočítati poměr obsahů dvou pravidelných šestiúhelníků a též trojúhelníků, z nichž jest jeden kruhu o poloměru $r$ vepsán a druhý jest témuž kruhu opsán.

§. 102. **Podobnost kruhů.** Vepisujeme-li do kruhu pravidelné mnohoúhelníky, pozorujeme, že při velkém počtu stran neliší se valně obvod mnohoúhelníků od kružnice. Rozdíl ten byl by nepatrným, kdyby měl mnohoúhelník nekonečně mnoho stran. **Kruh možno považovati za pravidelný mnohoúhelník o nekonečném počtu stran.** Poněvadž jsou pravidelné mnohoúhelníky o témž počtu stran sobě podobny, **jsou si kterékoli dva kruhy podobny** a mohou se ve kterékoli vzájemné své poloze za stejnolehlé považovati.

Jako k dvěma podobným mnohoúhelníkům, náleží též ku dvěma kruhům zvláštní bod podobnosti.

K stanovení bodu podobnosti dvou kruhů třeba rýsovati pouze dva paprsky stejnolehlé, t. j. takové, které stejnolehlé body v obou kruzích obsahují. Jedním takovýmto paprskem jest centrala (nebo centrala prodloužená). Protože jsou ve mnohoúhelnících, které se v poloze stejnolehlé nalézají, přímky, stejnolehlými body procházející, rovnoběžny, budou též rovnoběžné poloměry běhu libovolného v obou kruzích stejnolehlými. Na paprsku krajními jich body stanoveném jest bod podobnosti.

Jsou-li (obr. 137.) $c$ a $c_1$ středy dvou kruhů $K$ a $K_1$, leží bod jich podobnosti




Obr. 137.

*a*) na prodloužené centrale $cc_1$;

*b*) na paprsku *ab*, jenž krajní body dvou poloměrů rovnoběžných *ca* a $c_1b$ běhu libovolného spojuje. Bod *p* jest jedním bodem podobnosti obou kruhů.

Jsou-li *ca* a $c_1b_1$ dva poloměry téhož běhu, ale opačného směru, jest též $ab_1$ geometrickým místem pro bod podobnosti, a tudíž $p_1$ druhý bod podobnosti obou kruhů. *p* sluje vnějším a $p_1$ vnitřním bodem podobnosti. Přímky procházející bodem podobnosti obsahují na obou kruzích body stejnolehlé; má-li totiž přímka, některým bodem podobnosti rýsovaná, s kruhem jedním dva body společné, protíná i druhý kruh ve dvou bodech, je-li však tečnou k jednomu kruhu, jest i k druhému tečnou. Společné oběma kruhům tečny procházejí bodem podobnosti. Poněvadž každým mimo kružnici ležícím bodem ke kružnici dvě tečny rýsovati lze, procházejí každým bodem podobnosti dvě k oběma kruhům společné tečny. Dva kruhy mají celkem čtyři tečny společné.

**Ku dvěma kruhům rýsovati tečny společné.**

Stanoví se oba body podobnosti kruhů daných a každým bodem podobnosti rýsují se tečny k jednomu z daných kruhů (na př. ke kruhu $K_1$, obr. 137.) tyto tečny jsou žádané tečny společné.

**Úkoly.** 1. Dva kruhy o poloměrech *a*) $r$ a $\frac{r}{2}$, *b*) $r$ a $\frac{r}{3}$ dotýkají se vzájemně vně; jak dlouhá jest oběma společná tečna?

2. Středná 2 kruhů o poloměrech *a*) 10 cm a 8 cm, *b*) 4 m a 12 m *c*) 11 cm a 20 cm má *a*) 25 cm, *b*) 17 m, *c*) 41 cm. Jak dlouhá jest společná tečna vnější?

## §. 103. Poměr obvodů a obsahů pravidelných mnohoúhelníků.

Poněvadž jsou obvody podobných mnohoúhelníků v poměru stejnolehlých stran a tyto zase v poměru stejnolehlých příček, jest patrno, že jsou **obvody pravidelných mnohoúhelníků, o témž počtu stran v poměru poloměrů kruhů buď opsaných, buď vepsaných.**

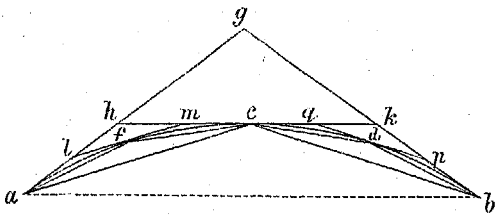
Poněvadž jsou obsahy podobných mnohoúhelníků v poměru dvojmocí stejnolehlých stran (tudíž i příček), jsou **obsahy pravidelných mnohoúhelníků o témž počtu stran v poměru druhých mocnin poloměrů kruhů buď opsaných, buď vepsaných.**

Důsledky: 1. *Obvody dvou kruhů jsou v poměru svých poloměrů nebo průměrů.*

2. *Obsahy dvou kruhů jsou v poměru dvojmocí svých poloměrů nebo průměrů.*

## VI. Obvod a obsah kruhu.

§. 104. 1. Poněvadž jest přímka nejkratší vzdáleností dvou bodů, jest každá tětiva v kruhu (na př. $ac$ v obr. 138.) menší než příslušný oblouk ($afc$) a **kružnice jest větší než obvod vepsaného mnohoúhelníku.**




Obr. 138.

2. Oblouk $ab$ (obr. 138.) rozdělen jest body $f$, $c$, $d$, na čtyři rovné díly; jsou-li díly ty malé, možno přibližně oblouky $af$, $fc$, $cd$, $db$ považovati za přímky. V $\triangle\, afl$ jest $(al + lf) > af$; podobně jest $(fm + mc) > fc \ldots$; tudíž jest obvod $almqpb$ větší než oblouk $afcdb$.

**Kružnice jest menší než obvod opsaného mnohoúhelníku.**

Obvody kruhu vepsaných a opsaných mnohoúhelníků pravidelných mohou se opětným zdvojnásobováním počtu stran přiblížiti k obvodu kruhu tak, že se stanou rozdíly menší než kteréholi sebe menší číslo stanovitelné; t. j. obvod kruhu lze považovati za mezi, ku které vepsaný neb opsaný mnohoúhelník při stálém zvětšování počtu stran nekonečně se přibližuje.

§. 105. Jsou-li $o$ a $o_1$ obvody dvou kruhů o poloměrech $r$ a $r_1$ a průměrech $d$ a $d_1$, jest dle důsledku 1. §. 103.:

$$o : o_1 = r : r_1 = d : d_1, \text{ z čehož plyne}$$
$$o : d = o_1 : d_1, \text{ t. j.}$$

**Poměr obvodu k průměru jest ve všech kruzích týž.**

Udavatel tohoto poměru značí se (od časů Eulerových (1707—1783) písmenem $\pi$ ($\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\acute{\iota}\alpha$ = obvod) a nazývá se **číslem Ludolfovým,** jest tudíž

$$\frac{o}{d} = \frac{o}{2r} = \pi;$$

$$o = \pi d = 2\pi r, \text{ t. j.}$$

**Obvod kruhu rovná se průměru (nebo dvojnásobnému poloměru) znásobenému číslem Ludolfovým.**

Pro $d = 1$ jest $o = \pi$.

**Číslo $\pi$ lze tudíž za měrné číslo obvodu kruhu považovati, jehož průměr má délkovou jednotku.**

§. 106. **Stanoviti hodnotu čísla Ludolfova.**

Do kruhu o průměru $d = 1$ vepíší se po sobě pravidelný šestiúhelník, dvanáctiúhelník, čtyřiadvacetiúhelník atd. Potom vypočítá se měrné číslo obvodu každého z nich.

Každé z těchto měrných čísel jest však menší než měrné číslo obvodu kruhu, tudíž i menší než hodnota čísla $\pi$. Čím více má vepsaný mnohoúhelník stran, tím více přibližuje se měrné číslo obvodu číslu $\pi$.

Potom vypočítají se měrná čísla obvodů pravidelných mnohoúhelníků, o témž počtu stran tomuto kruhu opsaných. Každé z těchto měrných čísel jest větší než číslo $\pi$.

Hodnota čísla $\pi$ leží tedy vždy mezi měrnými čísly obvodu pravidelného mnohoúhelníku o průměru $d = 1$ vepsaného a témuž kruhu opsaného při témž počtu stran. Čím větší jest počet stran, tím méně liší se od sebe měrná čísla obvodu vepsaného a opsaného mnohoúhelníku a tím více přibližuje se každé z nich měrnému číslu obvodu kruhu, t. j. hodnotě čísla $\pi$.

Podobnými výpočty seznalo se na př., že jest měrné číslo obvodu vepsaného 3072úhelníku 3·141592; měrné číslo obvodu opsaného 3072úhelníku 3·141594.

Měrná čísla obvodu vepsaného a opsaného 3072úhelníku liší se teprve v 6. místě desetinném. Poněvadž hodnota $\pi$ mezi oběma leží, vyznačuje společná část obou hodnot též hodnotu $\pi$. Jest tudíž $\pi = 3{\cdot}14159 \ldots\ldots$

Archimedes († 212 po Kr.) stanovil pro $\pi$ hodnotu $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$. Holandský mathematik Ludolf van Ceulen († 1610) vypočítal způsobem výše naznačeným hodnotu $\pi$ na 35 desetinných míst. Dle něho obdrželo toto číslo své jméno.

Pro obyčejný výpočet stačí hodnota 3·14 aneb $\frac{22}{7}$; pro poněkud přesnější výpočty 3·1416.

§. 107. **Vypočítati délku $d$ oblouku kružnice o poloměru $r$, jemuž přísluší středový úhel $\alpha^0$.**

Délka $1^o$ obloukového rovná se $^1/_{360}$ celé kružnice, tedy $\frac{2\pi r}{360}$; tudíž $\mathbf{d} = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha . = \frac{\pi r}{180} \cdot \alpha.$

Z dané délky $d$ oblouku a poloměru $r$ vypočítá se středový úhel $\alpha = \frac{360d}{2\pi r}$.

§. 108. **Stanoviti obsah kruhu.** Považuje-li se kruh za pravidelný mnohoúhelník o nesčíslném počtu stran, **stanoví se obsah jeho, násobí-li se obvod jeho polovicí poloměru.**

Je-li $p$ obsah a $r$ poloměr kruhu, jest

$$p = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

§. 109. **Stanoviti obsah výseče kruhové.**

Je-li $p$ obsah výseče, jíž při poloměru $r$ středový úhel $\alpha$ odpovídá, jest výseč $1^o$ mající

$$\frac{\pi r_2}{360}, \text{ tudíž}$$

$$p = \frac{\pi \alpha r^2}{360} = \frac{\pi \alpha r}{180} \cdot \frac{r}{2}.$$

$\frac{\pi \alpha r}{180}$ značí však ku středovému úhlu $\alpha$ příslušnou délku oblouku $a$, tudíž jest

$$p = a \cdot \frac{r}{2}, \text{ t. j.}$$

**Měrné číslo obsahu výseče kruhové rovná se součinu z měrných čísel délky oblouku a polovice poloměru.**

Dodatek: **Kruhová úseč, která jest menší nebo větší polokruhu, rovná se podle toho rozdílu nebo součtu příslušné výseče a trojúhelníku omezeného tětivou a oběma poloměry.**

§. 110. **Stanoviti obsah mezikruží.**

Značí-li $p$ obsah mezikruží, $r$ poloměr menšího a $R$ poloměr většího z obou soustředných kruhů, $š = R - r$ šířku mezikruží, jest

$$p = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r_2) = \pi(R - r)(R + r)$$
$$p = \pi š(R + r).$$

§. 111. **Úkoly početní.**

1. Vypočítati obvod a obsah kruhu, má-li jeho poloměr *a*) 3·2 cm; *b*) $4^2/_3$ dm; *c*) 7·26 m.

2. Průměr předních kol kočáru má 60 cm, průměr zadních kol kočáru 84 cm. Jak dlouhá jest cesta, na níž otočí se zadní kolo 50 krát; kolikrát otočí se při tom přední kolo? ($\pi = 3\,^1/_7$.)

3. Jak velký jest průměr kola, které se na délce 19635 m otočí 3125 krát? ($\pi = 3{\cdot}1416$.)

4. Průměr země = 12750 km. Za kterou dobu objel by vlak, jenž urazí za hodinu 45 km, rovník? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

5. Jak dlouhý jest v kruhu o poloměru 54 cm oblouk, jenž má *a*) $35^0$, *b*) $87^0\ 30'$, *c*) $93'\ 20''$? ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

6. Kolik stupňů má oblouk 4·71 m dlouhý v kruhu, jehož poloměr = 8 m? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

7. Jak dlouhý jest oblouk, na němž stojí v kruhu 1256 cm$^2$ velikém obvodový úhel *a*) $24^0$, *b*) $45^0$? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

8. Obvod kruhu = 50·24 cm (251·2 cm); vypočítati jeho poloměr. ($\pi = 3{\cdot}14$.)

9. Rovník = 40070 km; jak dlouhá jest osa zemská.

10. Obvod kruhu = 132 m (35·2 cm); vypočítati jeho obsah. ($\pi = 3\,^1/_7$.)

11. Jak velký jest obsah kruhu, jenž má týž obvod jako čtverec, jehož úhlopříčka jest *a* (2·2 m)? ($\pi = 3\,^1/_7$.)

12. Jak velký jest poloměr a obvod kruhu, jenž rovná se obsahem svým *a*) součtu dvou kruhů o poloměrech 21 cm a 28 cm, *b*) rozdílu 2 kruhů o poloměrech 29 cm a 20 cm? ($\pi = 3\,^1/_7$.)

13. Do čtverce 31·36 m$^2$ velikého vepsán jest kruh; jak jest velký? ($\pi = 3\,^1/_7$.)

14. Vypočítati obvod kruhu *a*) 38·5 cm$^2$, *b*) 616 cm$^2$, *c*) 346·5 cm$^2$ velikého. ($\pi = 3\,^1/_7$.)

15. Kolem okrouhlého rybníku (kruhového), jenž má 132 m obvodu, zříditi jest $^7/_8$ m širokou cestu, jejíž vnitřní okraj jest $3\,^1/_2$ m od břehu vzdálen. Vypočítati poloměr rybníku a obsah cesty. ($\pi = 3\,^1/_7$.)

16. Vypočítati obvod a obsah kruhu, v němž má tětiva 2·8 cm od středu vzdálená 4·2 cm. ($\pi = 3\,^1/_7$.)

17. Součet obsahů dvou kruhu = 106·76 m$_2$; jeden z nich jest o 50·24 m$^2$ větší než druhý. Jak velké jsou jejich poloměry? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

18. Poloměry 2 kruhů jsou v poměru $2\frac{1}{7} : 3\frac{3}{4}$, menší z nich má 50·24 m obvodu; jak velký jest obsah většího? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

19. Poloměry 2 kruhů jsou v poměru $1\frac{1}{3} : 2\frac{2}{5}$, obsah většího = 14·13 m$^2$; jak velký obvod má menší? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

20. Dán jest čtverec o straně *a*; nad každou jeho stranou sestrojen s ním shodný čtverec. Vypočítati obvod a obsah kruhu opsaného řečené skupině pěti čtverců.

21. Průměr 2 *r* daného polokruhu rozdělen jest na 3 rovné díly; nad prostředním dílem opsán jest polokruh vně a nad krajními díly

opsány jsou polokruhy vnitř daného polokruhu. Vypočítati obvod a obsah plochy danými 4 polokružnicemi omezené.

22. Průměr $2r$ polokruhu rozdělen jest na 2 díly v poměru $1:2$; nad oběma díly sestrojeny jsou vnitř daného polokruhu polokruhy. Vypočítati obsah plochy těmito polokružnicemi omezené a srovnati jej s obsahem kruhu, jehož průměrem jest kolmice v dělícím bodu průměru až k obvodu vztyčená. (Srp Archimedův.)

23. Do kruhu o poloměru 26 cm vepsán jest obdélník, jehož rozměry jsou v poměru $5:12$; jak dlouhý jest jeho obvod?

24. V kruhu o poloměru $r$ rozdělen jest průměr na tři rovné díly; v bodech dělících vztyčeny jsou kolmice v opačném směru. Spojením krajních bodů kolmic a průměru vznikne obdélník. Vypočítati jeho obsah a poměr jeho rozměrů. (Trám největší únosnosti.)

25. Dán jest čtverník kruhový o poloměru $r$; nad jeho tětivou (spojující krajní body oblouku) rýsována jest polokružnice. Vypočítati obvod a obsah vzniklého měsíčku.

26. Dán jest pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají 15 cm a 20 cm. Nad přeponou rýsován polokruh, jenž objímá daný trojúhelník. Podobně rýsovány jsou nad odvěsnami polokruhy, jež leží však vně daného trojúhelníku. Srovnati jest součet měsíčku nad odvěsnami s obsahem trojúhelníku. (Hippokratovy měsíčky.)

27. Kolem krajního bodu poloměru $r$ kruhu opsán jest oblouk, jenž jde středem kruhu. Vypočítati obvod a obsah obou částí daného kruhu.

28. V kruhu o poloměru $r$ rýsovány jsou dva na sobě kolmé průměry; kolem krajního bodu jednoho z nich opsán jest oblouk, jenž jde krajními body druhého. Vypočítati obvod a obsah obou částí daného kruhu.

29. Tři rovně velké kruhy o poloměru $r$ dotýkající se vzájemně vně; k nim rýsovány jsou společné tečny vnější. Vypočítati jest: $a$) obsah křivočarého trojúhelníku mezi danými kruhy obsaženého; $b$) obsah trojúhelníku řečenými tečnami omezeného.

30. Dán jest čtverec o straně $a$; kolem středů jeho stran vepsány mu jsou 4 polokruhy o poloměru $\frac{a}{2}$. Vypočítati obvod a obsah vzniklé 4cípové růžice.

31. Jak velký jest obsah mezikruží, mají-li obvody kruhů je tvořící 37·68 cm a 12·56 cm. ($\pi = 3{\cdot}14$.)

32. Vypočítati obvod a obsah mezikruží omezeného obvodem vepsaného a opsaného kruhu $a$) čtverci; $b$) rovnostrannému trojúhelníku; $c$) pravidelnému šestiúhelníku o straně $a$.

33. V mezikruží 4 cm širokém má tětiva většího kruhu, jež jest zároveň tečnou menšího kruhu, 24 cm. Vypočítati oba poloměry.

34. Kruh o poloměru $r$ rozpolen jest soustřední kružnicí; který jest její poloměr a jak dlouhá jest tětiva většího kruhu, jež jest tečnou menšímu kruhu?

35. Kruh o poloměru $r$ rozdělen jest soustřední kružnicí na 2 části, že jest obsah vzniklého mezikruží 2krát tak velký, jako obsah vnitřního kruhu. Vypočítati poloměr oné kružnice.

36. Obsah mezikruží $= 2198$ cm$^2$, poloměr většího kruhu $= 40$ cm; jak široké jest mezikruží? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

37. Daný kruh o poloměru $r$ rozdělen jest dvěma soustřednými kružnicemi na 3 rovné díly; jak dlouhé jsou jejich poloměry?

38. Vypočítati poloměr a obsah kruhu, jehož obvod rovná se oblouku výseče $135^0$ v kruhu o poloměru $r$.

39. Jak dlouhý oblouk napíná v kruhu o poloměru 7 cm strana pravidelného vepsaného *a*) trojúhelníku; *b*) čtyřúhelníku; *c*) šestiúhelníku; *d*) osmiúhelníku? Vypočítati též úseče kruhu těmito stranami oddělené. ($\pi = 3\,{}^1/_7$.)

40. Jak velká jest výseč, jež má *a*) $36^0$, *b*) $64^0$ v kruhu o poloměru 12 cm.

41. Obsah kruhové výseče, jejíž oblouk $= 14^0\ 24'$ jest 154 cm$^2$. Jak dlouhý jest její poloměr? ($\pi = 3\,{}^1/_7$.)

42. Obsah výseče $72^0$ má $128 \cdot 2$ cm$^2$; vypočítati poloměr a délku oblouku. ($\pi = 3\,{}^1/_7$.)

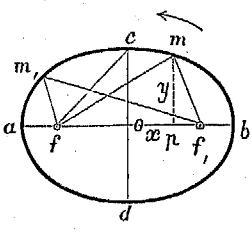
43. Výseč kruhu o poloměru $r$ má $57 \cdot 75$ cm$^2$ obsahu; jak velký jest její středový úhel? ($\pi = 3\,{}^1/_7$.)

Část sedmá.

# O ellipse, hyperbole a parabole.

## I. O ellipse.

§. 112. Dány-li jsou tři body, $f$, $f_1$ a $m$ (obr. 139.), z nichž jsou $f$ a $f_1$ pevny, tedy jest součet vzdáleností 3tího bodu hybného $m$ od obou bodů pevných $mf + mf_1$. Součet těchto vzdáleností má určitou délku. Pohybuje-li se bod $m$ v téže rovině, aby **v každé jeho poloze součet jeho vzdáleností od pevných bodů $f$ a $f_1$ byl týž jako v poloze původní,** vytvoří pohybem tím uzavřenou křivku, jež sluje ellipsou. Je-li $m_1$ určitou polohou bodu $m$, musí dle udaného zákona výtvarného býti $mf + mf_1 = m_1f + m_1f_1$.



Obr. 139.

**Ellipsa jest tudíž geometrické místo bodů, jichž vzdálenosti od dvou daných bodů mají stálý součet.**

Poznámka: Bod $m$ musí ležeti mimo přímku $ff_1$ a tudíž musí býti $(mf + mf_1) > ff_1$.

Body $f$ a $f_1$ slovou ohniska (focus) ellipsy.

Při svém pohybu přijde hybný bod dvakráte do přímky $ff_1$ v bodu $a$ a $b$, z nichž prvý má patrně takovou vzdálenost od bodu $f$ jako druhý od $f_1$, t. j. $af = bf_1$.

Dle zákona výtvarného jest

$af + af_1 = mf + mf_1$; ale jelikož
$af_1 = af + ff_1$, a mimo to $af = bf$, jest též
$af + bf_1 + ff_1 = mf + mf_1$, tudíž
$ab = mf + mf_1$, t. j. délka $ab$ rovná se součtu vzdáleností jakéhokoli bodu ellipsy od obou ohnisek.

Přímka $ab$ jdoucí ohnisky a dělící ellipsu na dvě stejné části nazývá se větší její osou.

Vzdálenost kteréhokoli bodu ellipsy od ohniska sluje průvodičem tohoto bodu. Každý bod má dva průvodiče. Hledíce k tomu, co posud o ellipse řečeno bylo, můžeme říci: **Ellipsa jest křivka, při níž součet průvodičů každého bodu rovná se větší její ose.**

Délka $cd$, která prostřed ($o$) větší osy na tuto kolmá jest, zove se menší osou ellipsy.

I menší osa ellipsu rozpoluje.

Krajní body $a$, $b$, $c$, $d$ obou os slovou vrcholy, průsečík os, tedy bod $o$, střed ellipsy.

Úsečka, spojující dva body ellipsy, jmenuje se její tětivou. Jde-li tětiva středem, slove průměr.

**Středobod rozpoluje všecky průměry.**

Vzdálenost ohniska od středu ellipsy sluje výstřednosti (excentrikou) ellipsy a znamená se písmenem $e$; v obr. 139. jest $of = of_1 = e$. Velká poloosa znamená se písmenem $a$, a poloosa malá písmenem $b$; jest tudíž $ab = 2a$, $cd = 2b$.

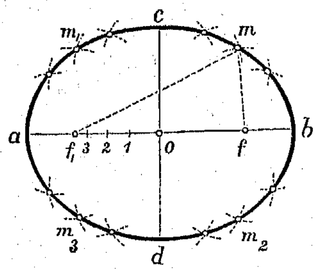
1. V pravoúhlém $\triangle\ ofc$ jest $fc^2 = e^2 + b^2$, ale poněvadž jest $cf + cf_1 = 2cf = 2a$, jest též $a^2 = e^2 + b^2$ a tudíž $fc = a$, t. j. **vzdálenost krajních bodů malé osy ellipsy od ohnisek rovná se polovici osy velké.**

Čím menší jest výstřednost, tím více blíží se ellipsa kružnici; pro $e = 0$ jest $a = b$ a ellipsa stane se kružnicí.

Je-li ellipsa na př. dána velkou osou a oběma ohnisky, sestrojí se krajní body osy malé, protne-li se její běh z ohniska obloukem, jehož poloměr se rovná polovici osy velké. Je-li však ellipsa dána oběma osami, stanoví se poloha ohnisek jejich, protne-li se velká osa z některého krajního bodu osy malé polovicí svou ($a$).

Poznámka. Dráhy, ve kterých naše země a ostatní oběžnice okolo slunce se pohybují, jsou ellipsy, v jejichž jednom ohnisku slunce se nachází. Ellipsa v praktickém životě často se vyskytuje; některé záhony v zahradách, dna van ke koupání, některá klenutí, rámce kolem fotografií atd. mívají podobu elliptickou.

§. 113. **Sestrojení ellipsy.** 1. **Stanovena-li jest ellipsa, která se sestrojiti má, větší osou a oběma ohnisky,** tu určí se napřed její střed, který leží prostřed vzdáleností ohnisek; potom běh a krajní body osy malé. K stanovení libovolného počtu bodů ellipsy užiti lze jejího zákonu výtvarného.



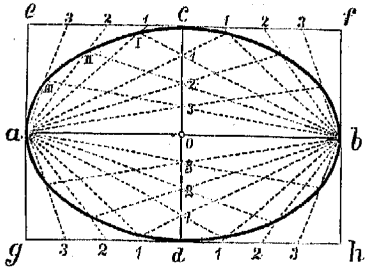
Obr. 140.

Zvolí se bod 1. mezi $o$ a $f_1$ (obr. 140.) a poloměrem rovným délce $1a$ opíší se kolem bodů $f$ a $f_1$ oblouky; poloměrem rovným délce $b1$ protnou se oblouky ty oblouky jinými kolem $f_1$ a $f$ opsanými. Průsečíky $m$, $m_1$, $m_2$ a $m_3$ jsou body ellipsy žádané; neboť pro bod $m$ jest $mf + mf_1 = 1b + 1a = 2a$ Podobným způsobem dá každý jiný bod zvolený na $of_1$, na př. bod 2, 3 atd. nové čtyři body ellipsy, jež se tímto způsobem sestrojí.

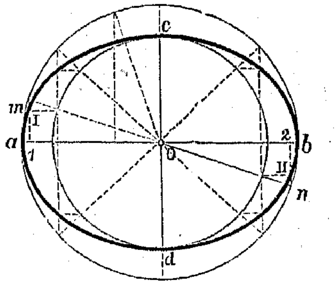
2. **Dány-li jsou obě osy ellipsy,** stanoví se napřed ohniska její, a potom jiné body ellipsy tak, jak bylo v případě předešlém ukázáno.

3. **Je-li dána ellipsa oběma osami,** lze dostatečný počet bodů též takto stanoviti: V krajních bodech os vztyčí se kolmice (obr. 141.), čímž se obdrží obdélník $efgh$ ellipse žádané opsaný. Kterékoli dvě protější strany obdélníku tohoto na př. $ef$ a $gh$ rozdělí se na rovný (sudý) počet dílů; podobně rozdělí se i osa, prostředky těchto stran spojující, na týž počet rovných dílů. Koncové body těchto dílů označí se od bodu $c$ a $d$ počínaje ve všech směrech číslicemi 1, 2, 3 atd. Každý bod dělící strany $ef$ a $gh$ spojí se s bližším krajním bodem ($a$ nebo $b$) velké osy přímkami; mimo to spojí se vrcholy $a$ i $b$ se všemi body dělícími osu $cd$, kteréžto poslední přímky se prodlouží. Průsečíky paprsků procházejících stejně označenými body dělícími náležejí ellipse. — Podobně mohly se rozděliti $eg$ a $fh$ a osa $ab$; paprsky pak, jež by se v bodech ellipsy protínaly, musely by se rýsovati vrcholy $c$ a $d$.

Tím způsobem může se rýsovati třeba jen čtvrtina ellipsy; body ostatních tří čtvrtin mohly by se stanoviti souměrným položením k bodům první čtvrti vzhledem k oběma osám.



Obr. 141.



Obr. 142

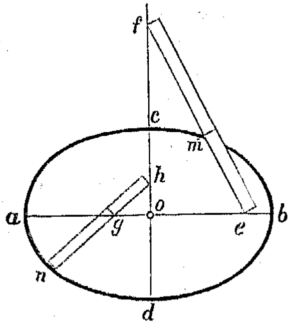
4. **Jiný způsob sestrojiti dostatečný počet bodů ellipsy stanovené oběma osami** záleží v tom, že se kolem jejího středu nad každou osou jako průměrem opíše kružnice. Rýsuje-li se ve větší z těchto kružnic (obr. 142.) kterýkoliv průměr *mn* a spustí-li se s krajních bodů tohoto průměru na větší osu kolmice *m1* a *n2* a rýsuje-li se mimo to průsečíkem tohoto průměru a menší kružnice k velké ose rovnoběžka, tedy jsou společné body těchto rovnoběžek a dříve spuštěných kolmic body ellipsy. —

Tak lze též náležitý počet bodů ellipsy sestrojiti.

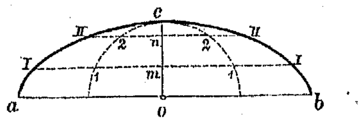
5. Chce-li se dostatečný počet bodů ellipsy, jejíž osy dány jsou, rychle zobraziti, a nezáleží-li příliš na přesnosti, možno obdržeti jednotlivé body takto: Na přímočarně seříznutý proužek papíru naměří se od konce *e* (obr. 143.) délka *b* (polovice osy malé) tedy $em = b = co$, a od *m* až ku *f* polovice osy velké, tedy $mf = ao = a$. Délka proužku $ef = a + b$. Položí-li se proužek ten směrem libovolným na obrazec tak, aby konec jeho *e* v ose velké (*ab*), konec *f* v prodloužené ose malé (*cd*) se nacházel, bude dělící bod *m* obou poloos krýti určitý bod ellipsy. Poznamená-li se tento bod ellipsy, a pošine-li se proužek do polohy jiné, při čemž ovšem dbáti toho, by bod **e** v ose velké a bod **f** v ose malé se nacházel, obdrží se jiné body ellipsy. Tento způsob sestrojování ellipsy sluje sestrojení ellipsy ze součtu poloos.

6. Podobně možno sestrojiti ellipsu z rozdílu poloos. Dá-li se proužku papíru (obr. 143.) délka velké osy $nh = a$, a naměří-li se naň od *n* polovice osy malé $ng = b$ jest $gh = a - b$ rozdílem obou poloos. Položí-li se potom proužek

*nh* tak, aby bod **h** byl v malé ose, bod **g** v ose velké, bude v každé takové poloze bod *n* bodem ellipsy. Tento způsob stává se tím nejspolehlivějším, čímž menší jest rozdíl poloos; součet poloos dává v každém případě ellipsu přesnější.




Obr. 143.



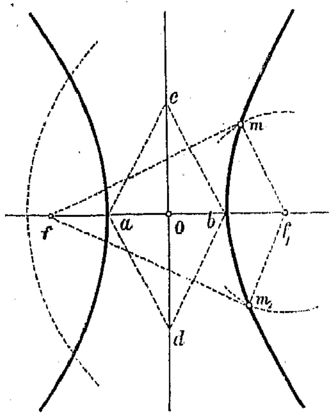

Obr. 144.

7. Jedná-li se o zobrazení nějaké ellipsy vůbec, a může-li poměr os libovolným býti, učiní se velká poloosa $a = 2b$. Kolem středu $o$ opíše se (obr. 144.) kružnice poloměrem $= b$, a rýsuje se několik sečen v této kružnici ku velké ose $ab$ rovnoběžných. V každé takové sečné obsažená tětiva ellipsy rovná se dvojnásobné tětivě kružnice; učiní-li se tedy $1I = m1$, $2II = n2$ atd., jsou $I$, $II$ . . . body ellipsy.

8. **Sestrojení ellipsy způsobem mechanickým pomocí šňůry.** Tento způsob zakládá se na výtvarném zákonu ellipsy, a užívá se ho zvláště tam, kde má míti ellipsa rozměry velké, jako na př. v zahradách k omezení záhonů nebo na sbitých prknech k rozličným potřebám řemeslnickým. Za tím účelem vezme se šňůra o něco málo delší než větší osa; na koncích jejích udělají se oka tak, aby, když se sdrhnou, rovnala se délka šňůry délce větší osy. Tato oka navleknou se potom na kolíky v ohniskách zaražené, načež se šňůra dřevěným nebo železným rydlem nebo tužkou napne. Točí-li se rydlem kolem středu ellipsy tak, aby byla šňůra pořád stejně napjata, vytvoří se ellipsa, neboť jest stále součet průvodičů roven velké ose.

## II. O hyperbole.

§. 114. Dány jsou 3 body $f$, $f_1$ a $m$ (obr. 145.), a to dva ($f$ a $f_1$) pevné a třetí ($m$) hybný. Pohybuje-li se bod $m$




Obr. 145.

v rovině tak, aby v každé jeho poloze rozdíl jeho vzdáleností od obou bodů pevných $f$ a $f_1$ ($mf - mf_1$) byl tentýž jako v poloze původní, vytvoří pohybem tím křivku, jež sluje hyperbolou. Je-li $m_1$ poloha bodu hybného $m$, jest

$$mf - mf_1 = m_1f - m_1f_1.$$

**Hyperbola jest tudíž geometrické místo všech bodů, jichž vzdálenosti ode dvou daných bodů mají stálý rozdíl.**

Pevné body $f$ a $f_1$ slovou ohniska hyperboly a vzdálenosti $mf$ a $mf_1$ průvodiči bodu $m$.

Při svém pohybu přijde bod $m$ dvakráte do přímky $ff_1$ v bodu $a$ i $b$. Body tyto slovou vrcholy a délka $ab$ hlavní osou hyperboly. Poněvadž jsou $a$ i $b$ body hyperboly, jest

$$fb - bf_1 = af_1 - af \text{ anebo}$$
$$fa + ab - bf_1 = f_1b + ab - af \text{ a tedy}$$
$$2af + ab = 2bf_1 + ab, \text{ pročež též}$$
$$af = bf_1, \text{ tedy}$$

**vzdálenost vrcholu hyperboly od ohniska rovná se vzdálenosti druhého vrcholu od ohniska druhého.**

Poněvadž střed osy $ab$ jest středem hyperboly, jest i tento od obou ohnisek stejně vzdálen.

Vzdálenost ohniska ode středu sluje výstřednost a označuje se jako při ellipse písmenem $e$.

Poněvadž jest

$$fm - fm_1 = af_1 - af \text{ a } af = bf,$$

jest též $fm - fm_1 = af_1 - bf_1 = ab$, t. j.

**Rozdíl průvodičů každého bodu hyperboly rovná se hlavní ose její.**

Proto lze říci: **Hyperbola jest křivka, při níž rozdíl průvodičů každého jejího bodu roven jest hlavní její ose.**

Hyperbola není křivkou v sobě uzavřenou, nýbrž skládá se ze dvou shodných, do nekonečna jdoucích větví, jež se prodlouženou osou hlavní rozpolují.

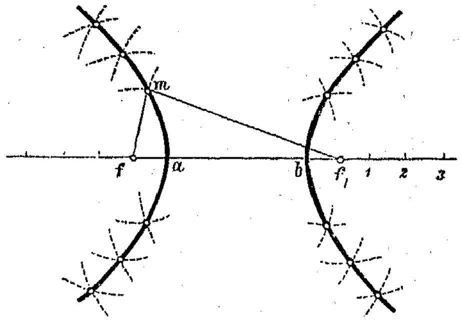
Opíší-li se kolem vrcholů hyperboly kružnice poloměrem, rovným výstřednosti, stanoví přímka *cd*, průsečíky těchto kružnic spojující, vedlejší osu hyperboly a jest ve středu na hlavní ose kolmá (neb jsou △ *abc* a *abd* rovnoramenné).

Vedlejší osa nemá s hyperbolou bodů společných a sluje proto též osou imaginarní (pomyslnou) na rozdíl od osy hlavní čili realní (skutečné.)

I při hyperbole označuje se poloosa realní písmenem **a**, poloosa imaginární písmenem **b**.

§. 115. **Sestrojiti dostatečný počet bodů hyperboly dané osou hlavní a oběma ohnisky.**

Jsou-li v obr. 146. $a$ a $b$ vrcholy a $f$ a $f_1$ ohniska, tedy jest $ab$ osou hlavní. Zvolí-li se na ose hlavní bod *1*, a opíší-li se z obou ohnisek oblouky jednak poloměrem $a1$, jednak poloměrem $b1$, tedy jsou průsečíky těchto oblouků body hyperboly, neboť jest na př. pro bod $m$... $f_1m = a1$ a $fm = b1$, tudíž $f_1m - fm = a1 - b1 = ab$.




Obr. 146.

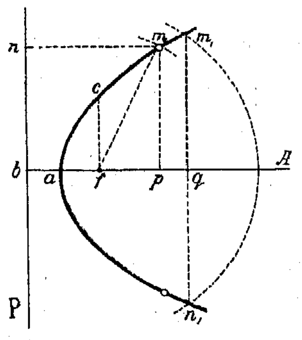
Podobně dá každý jiný bod, na př. *2*., *3*. . . . zvolený na ose hlavní nové 4 body hyperboly, jež se tímto způsobem sestrojí.

## III. O parabole.

§. 116. Dány-li jsou přímka a mimo ni ležící bod jako útvary nehybné, a pohybuje-li se bod tak, aby v každé poloze své měl touže vzdálenost i od dané přímky i od daného bodu, tedy vytvoří křivku, která se nazývá parabolou.

**Parabola jest dle toho geometrické místo bodů, které mají od dané přímky i od daného bodu rovné vzdálenosti.**

Daná přímka sluje přímkou řídící a daný nehybný bod ohniskem paraboly.



Obr. 147.

Je-li v obr. 147. $P$ přímkou řídící a $f$ ohniskem paraboly, a spustí-li se s $f$ na $P$ kolmice $A$, jest tato kolmice $A$ osou paraboly. Bod uprostřed vzdálenosti ohniska od přímky řídící ležící jest dle zákona výtvarného bodem paraboly a sluje vrchol. Je-li $a$ vrcholem paraboly; tedy jest

$$ab = af.$$

Pro bod paraboly $m$ musí býti $mn = mf$.

Spustí-li se s bodu $m$ na osu $A$ kolmice $mp$, jest $bp = mn = mf$. Na základě toho lze body paraboly na kolmicích k ose $A$ snadno obdržeti, protnou-li se totiž tyto kolmice z ohniska (jako středu) kruhovými oblouky, jichž poloměry rovnají se vzdálenostem kolmic těch od přímky řídící. Protne-li se na př. kolmice v $q$ na $A$ vztyčená obloukem opsaným kolem ohniska poloměrem rovným $bq$, budou takto stanovené průsečíky $m_1$ a $n_1$ body paraboly; neb jest $fm_1 = fn_1 = bq$. Takto lze na každé na osu vztyčené kolmici, která jest vzdálenější od přímky řídící než vrchol paraboly, dva k ose souměrně položené body stanoviti; pročež jest osa paraboly též osou souměrnosti. Jelikož by i na kolmici od přímky řídící nekonečně vzdálené stanoviti se daly dva body paraboly od ohniska nekonečně vzdálené, jest parabola křivkou nekonečnou.

Kolmice $fc$ v ohnisku na osu paraboly vztyčená sluje parameter a označuje se obyčejně písmenem $p$. Jelikož jest $fc = fb$, **udává parametr vzdálenost ohniska od přímky řídící.**

Poznámka. Parabola se v životě praktickém často vyskytuje. Těleso vodorovně nebo šikmě vržené opisuje parabolu, z roury vytékající paprsek vody opisuje oblouk parabolický; mnohá zrcadla, naslouchátka atd. mají podobu parabolickou.

# Stereometrie.

## Část osmá.

## Přímky a plochy v prostoru.

§. 117. **Prvky útvarů prostorových** jsou: bod, přímka a rovina. Kromě jejich vlastností z planimetrie známých nutno uvésti ještě tyto:

1. Z bodu v prostoru může vycházeti nekonečně mnoho přímek; souhrn jich jest prostorový svazek paprsků a bod společný jeho středem.

2. Přímkou v prostoru možno položiti nekonečně mnoho rovin; souhrn jich jest svazek rovin a přímka společná jeho osa.

3. Dvě přímky mohou ležeti v téže rovině a jsou buď rovnoběžné nebo různoběžné. Dvě přímky, jimiž nelze položiti rovinu, jsou mimoběžné. Dvě různoběžky mají společný průsečík; dvě rovnoběžky mají společný úběžník. Dvě mimoběžky nemají společného bodu ani v konečnu ani v nekonečnu.

### I. O rovině.

§. 118. **Čím jest rovina dokonale určena?** Dány-li jsou 3 body $a$, $b$, $c$ neležící v jedné přímce, možno dvěma z nich (na př. $a$, $b$) položiti přímku $A$ a jí rovinu a otočiti ji kolem přímky $A$, by procházela též bodem $c$. Body $a$, $b$, $c$ lze tedy vždy položiti rovinu. Místo obou bodů $a$ a $b$ mohla býti přímo dána přímka $A$. Možno proto říci: **Rovina jest dokonale určena:**

1. *třemi body, které neleží v jedné přímce;*
2. *přímkou a bodem mimo ni ležícím;*
3. *dvěma různoběžkami;*
4. *dvěma rovnoběžkami.*

Případ 3. a 4. plyne z prvního; neboť položíme li body $a$ a $b$, $a$ a $c$ přímky $A$ a $B$, obdržíme dvě různoběžky; položíme-li však body $a$ a $b$ přímku $A$, bodem $c$ přímku $C \parallel A$, obdržíme dvě rovnoběžky. V posledním případě leží celá přímka $C$ v rovině body $a$, $b$, $c$ určené, neboť rovina ta obsahuje bod $c$ a mimo to úběžník přímky $C$, jenž jest zároveň úběžníkem přímky $A$; obsahuje tedy 2 body přímky $C$, tudíž i přímku samu.

§. 119. **Vytvoření roviny.** Rovina se vytvoří:

*a*) otáčí-li se přímka kolem pevného bodu, protínajíc zároveň stále pevnou přímku bodem tím neprocházející;

*b*) pohybuje-li se přímka tak, že protíná stále pevnou přímku, zůstávajíc rovnoběžna k původní své poloze.

*c*) pohybuje li se přímka tak, že protíná stále dvě různoběžky, nebo rovnoběžky.

§. 120. **Základní vlastnost roviny** jest: **Každá přímka, kterýmikoli dvěma body roviny položená, leží celá v rovině.**

Kterak zkouší se pravítkem, zda-li je povrch předmětů (na př. rýsovací desky) rovný?

Důsledky: 1. Jsou-li 2 body přímky v rovině, jest celá přímka v rovině;

2. Přímka mimo rovinu ležící, může rovinu pouze v jediném bodě protínati.

§. 121. **Běh rovin.** Dle běhu rozeznáváme: 1. rovinu vodorovnou, která má týž běh jako hladina klidně stojící vody.

2. rovinu svislou, v níž lze rýsovati přímku svislou (k ní přiložiti se dá olovnice);

3. rovinu šikmou, jež není ani vodorovná, ani svislá.

Dodatky: 1. Každá ve vodorovné rovině ležící přímka jest vodorovná.

2. Každá v rovině svislé ležící přímka není svislou.

3. Všecky vodorovné roviny mají týž běh, jsou spolu rovnoběžny.

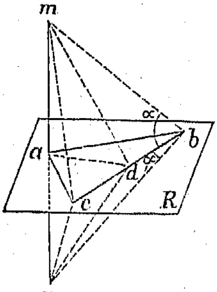
4. Roviny svislé nebo šikmé jsou buď rovnoběžny, buď různoběžny.

## II. Rovina a přímka.

§. 122. Přímka různoběžná s rovinou protíná ji v bodě jediném, který slove průsečík přímky s rovinou či stopa přímky na rovině. Přímka ta jest na rovině kolmá nebo jest k ní nakloněna.

Točíme-li pravý úhel okolo jednoho ramena, vytvoří druhé rameno tímto točením rovinu, na kterémž prvé rameno jest kolmé. Druhé rameno představuje při tom postupně všecky přímky, které v rovině stopou kolmice jíti mohou. **Je-li tedy přímka na rovině kolmá, jest kolmá na všech přímkách, které v rovině té stopou její jdou.**

§. 123. 1. **Přímka, jež jest kolmá na dvou, její stopou v dané rovině jdoucích přímkách, jest na rovině kolmá.**




Obr. 148.

Důkaz. Buďtež (v obr. 148.) $ab$ a $ac$ dvě přímky v rovině $R$, a

$$ma \perp ab, \; ma \perp ac;$$

mimo to buď $ad$ třetí v této rovině bodem $a$ jakkoli rýsovaná přímka. Prodlouží-li se $ma$ za $a$, a učiní-li se $an = ma$ a rýsuje-li se $bc$, která $ad$ v $d$ protíná, jest

$$\triangle\, mab \cong nab, \text{ tudíž}$$
$$mb = nb.$$

Rýsuje-li se $mc$ a $nc$, jest

$$\triangle\, mac \cong nac, \text{ tudíž}$$
$$mc = nc, \text{ potom}$$

jest $\triangle\, mbc \cong nbc$, tudíž

$$\sphericalangle\, \alpha = \alpha_{,};$$

rýsuje-li se konečně $md$ a $nd$, jest též

$$\triangle\, mbd \cong nbd, \text{ tudíž}$$
$$md = nd.$$

$\triangle\, mdn$ jest tedy rovnoramenný, tudíž $da \perp mn$, anebo $ma \perp ad$. Podobně dokázati se dá, že jest $ma \perp$ na kterékoli stopou $a$ v rovině $R$ jdoucí přímce, tedy i $ma \perp R$.

*Přímka kolmá na rovině vodorovné jest svislá, a naopak je-li rovina kolmá na přímce svislé, jest vodorovná. Je-li přímka kolmá na jakékoli rovině svislé, jest vodorovná a naopak: je-li rovina kolmá na přímce vodorovné, jest svislá.*

2. **S bodu mimo rovinu ležícího na rovinu možno jen jednu kolmici spustiti.**

Důkaz. Byla-li by ještě druhá kolmice možna, vznikl by spojením stop obou těchto kolmic trojúhelník, v němž by byly dva úhly pravé, což jest nemožno.

Tato kolmice jest nejkratší ze všech délek, jež lze z tohoto bodu rovině rýsovati, a stanoví proto vzdálenost bodu od roviny.

3. **V bodě roviny může se na ni jen jediná kolmice vztyčiti.**

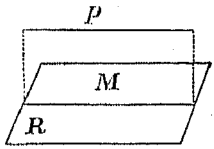
Důkaz. Kdyby byla v tomto bodě ještě druhá kolmice možná, mohla by se mysleti oběma položená rovina. Tato rovina protínala by danou rovinu v přímce, na níž by byly v jednom bodě 2 v téže rovině ležící přímky kolmo, což jest nemožno.

§. 124. **Přímka s rovinou rovnoběžná** jest ta, která v rovině neleží ani jí neprotíná.

Je-li mimo rovinu ležící přímka rovnoběžná s přímkou v rovině, jest s rovinou rovnoběžná.

Budiž $P \| M$ (obr. 149.). Přímkami $M$ a $P$ dá se položiti rovina $R$. Kdyby $P$ nebyla $\|$ s $R$, musela by ji v určitém bodu přímky $M$ protínati; jelikož jest však $P \| M$, nemohou se tyto přímky protínati, a tudíž musí býti

$$P \| R.$$



Obr. 149.

Následky: **Je-li jedna ze dvou rovnoběžek s rovinou rovnoběžna, jest i druhá s touže rovinou rovnoběžná.**

## III. Dvé rovin.

§. 125. **Dvě roviny, jsou-li náležitě prodlouženy, protínají se vždy v přímce, jež slove jejich průsečnicí.**

Kdyby měly tyto roviny mimo průsečnici ještě jeden bod společný, kryly by se.

Nalézá-li se tato průsečnice buď ve vzdálenosti konečné nebo ve vzdálenosti nekonečné, jsou dané roviny buď různoběžné, buď rovnoběžné.

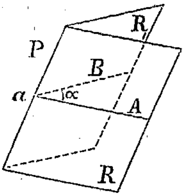
**Průsečnice rovin těleso omezujících slove hrana.**

Dodatky: 1. **Vodorovné roviny jsou vždy rovnoběžné, svislé roviny rovnoběžné býti nemusí.**

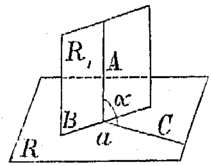
2. **Průsečnice dvou svislých rovin jest přímka svislá a průsečnice jakékoli roviny s rovinou vodorovnou jest přímka vodorovná.**

§. 126. **Odchylka dvou rovin** měří se úhlem, jejž svírají dvě přímky na průsečnici v kterémkoli jejím bodě kolmo vztyčené a v řečených rovinách položené.

Je-li v obr. 150. $P$ průsečnicí rovin $R$ a $R_1$, a $a$ libovolně zvolený její bod, v němž jsou vztyčeny $A \perp P$ a $B \perp P$ tak, aby $A$ byla v rovině $R$ a $B$ v rovině $R_1$, tedy jest $\alpha$ odchylkou roviny $R_1$ od roviny $R$.




Obr. 150.




Obr. 151.

**Odchylka dvou rovin jest úhel, jehož vrchol leží na průsečnici těchto rovin a jehož na tuto průsečnici kolmá ramena leží jedno v jedné, druhé v druhé rovině.**

*Je-li odchylka dvou rovin úhel pravý, jsou roviny na sobě kolmé, je-li kosý, jsou roviny k sobě nakloněny.*

Svislá a vodorovná rovina jsou na sobě vždy kolmé.

§. 127. **Rovina položená přímkou na jiné rovině kolmou, jest na této rovině kolmá.**

Budiž v obr. 151. $A \perp R$; $R_1$ rovina přímkou $A$ položená a $B$ průsečnicí rovin $R$ a $R_1$; vztýčí-li se v bodu $a$ přímky $B$ kolmice $C$ ležící v rovině $R$, jest úhel $\alpha$ odchylkou roviny $R_1$ od roviny $R$. Poněvadž jest $A \perp R$, jest $\sphericalangle \alpha = 90^0$, a tudíž $R_1 \perp R$.

§. 128. 1. **Průsečnice dvou rovnoběžných rovin s rovinou třetí jsou spolu rovnoběžné.**

Důkaz nepřímý. Mimoběžnými býti nemohou, jelikož leží v jedné rovině, ale i různoběžnými býti nemohou, poněvadž by se musily protínati v bodu, který by v každé z daných rovin, tedy na jich průsečnici ležeti musel, což jest nemožno, poněvadž jsou tyto roviny spolu rovnoběžné.

2. **Rovnoběžné úsečky mezi rovnoběžnými rovinami jsou sobě rovny.**

Důkaz. Danými úsečkami lze položiti rovinu, která seče dané roviny v přímkách spolu rovnoběžných. Tyto průsečnice a dané úsečky stanoví rovnoběžník, v němž jsou protější strany sobě rovny.

Následek: *Kolmice mezi rovinami rovnoběžnými jsou si rovny.*

*Stálá délka také kolmice stanoví vzdálenost obou rovin a tudíž lze říci:*

*Jsou-li dvě roviny rovnoběžny, mají všechny body jedné roviny touž vzdálenost od roviny druhé.*

## IV. O mnohohranech.

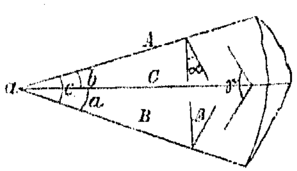
§. 129. Buďtež z libovolného bodu $a$ v prostoru (obr. 152.) rýsovány tři přímky $A$, $B$, $C$ tak, aby nebyly v rovině jediné. Vždy dvěma sousedními z těchto přímek budiž položena rovina; jedna z těchto rovin bude stanovena přímkami $A$ a $B$, druhá přímkami $B$ a $C$ a třetí přímkami $A$ a $C$.

Tyto tři roviny omezujíce prostor po straně bodu $a$ úplně, nechávají jej na druhé straně neomezený a tvoří **trojhran tělesný** nebo pouze trojhran.

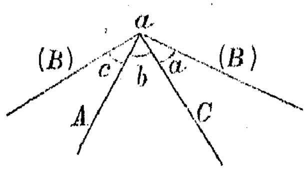
Bod $a$ jest **vrchol**, přímky $A$, $B$, $C$ **hrany**, roviny stanovené přímkami $A$ a $B$, $A$ a $C$, $B$ a $C$ **stěny**, úhly ($\sphericalangle a, b, c$) sevřené dvěma sousedními hranami **úhly hranové** a odchylky sousedných stěn tedy $\sphericalangle \alpha, \beta, \gamma$ **úhly stěnové** trojhranu.

Kdyby se z bodu $a$ místo přímek $A$, $B$, a $C$ rýsovalo $4, 5 \ldots$ $n$-přímek a dvěma sousedními položeny byly roviny, vznikl by čtyř-, pěti- . . . $n$-hran, vůbec **mnohohran**.

Počet stěn, hran a úhlů hranových mnohohranu jest týž.




Obr. 152.




Obr. 153.

Mnohohran, v němž jsou všecky úhly hranové jakož i úhly stěnové vespolek stejné, slove **pravidelný**.

§. 130. *Všecky stěny trojhranu lze v jediné rovině vedle sebe zobraziti.*

Myslíme-li si totiž dvě sousední stěny trojhranu dle jedné hrany rozříznuty a každou z nich dle hrany druhé do roviny stěny třetí otočenou, objeví se všecky tři úhly hranové $a$, $b$, $c$ vedle sebe.

Je-li uprostřed úhel hranový ($b$) největší, musí, má-li při zpátečním otáčení stěn kolem hran $A$ a $C$ vytvořiti se trojhran, $(\sphericalangle a + c) > b$. Z toho plyne:

**V každém trojhranu jest součet dvou úhlů hranových větší, než úhel hranový třetí.**

§. 131. **V každém mnohohranu jest součet všech úhlů hranových menší než** $4R$.

Důkaz. Protnou-li se všecky hrany $n$-hranu rovinou, jest průsek $n$-úhelník. Považují-li se strany tohoto $n$-úhelníku za půdice trojúhelníků, jichž společným vrcholem jest vrchol daného $n$-hranu, tedy jest součet všech úhlů v těchto trojúhelnících $= 2nR$. Označí-li se součet všech úhlů hranových daného mnohohranu $S$ a součet všech úhlů při půdicích uvedených $n$-úhelníků $S_1$, jest $S + S_1 = 2nR$.

Každý vrchol $n$-úhelníku jest vrcholem trojhranu; 2 úhly hranové každého trojhranu jsou úhly při půdicích řečených trojúhelníků a součet těchto dvou jest dle věty poslední větší než třetí úhel hranový trojhranu, který jest vnitřním úhlem $n$-úhelníku. Součet vnitřních úhlů v $n$-úhelníku jest $(2nR - 4R)$ a tudíž $S_1 > (2nR - 4R)$; odečte-li se tato hodnota $S_1$ od dřívější rovnice pro $S + S_1$, zbude

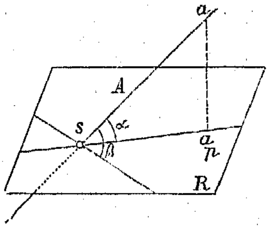
$$S < 4R.$$

Kdyby se rovnal součet úhlů hranových $4R$, přešel by mnohohran v rovinu.

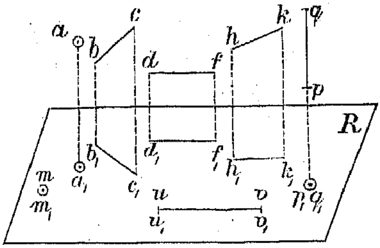
## V. O průmětech.

§. 132. 1. **Průmět bodu.** Spustí-li se s bodu $a$ (obr. 154.) na rovinu $R$ kolmice, slove stopa $a_p$ této kolmice průmětem bodu $a$ na rovinu $R$. Rovina $R$, do níž promítáme, jest průmětna; kolmice $a_p$ promítací přímka bodu $a$. Průmět bodu jest průsečík příslušné promítací přímky s průmětnou.

Bod $m$ (obr. 155.) v průmětně ležící sjednocuje se se svým průmětem $m_1$.




Obr. 154.




Obr. 155.

2. **Průmět přímky** na rovinu jest souhrn průmětů všech bodů této přímky na rovinu. V obr. 155. jest $b_1c_1$ průmětem délky $bc$ na rovinu $R$.

Dodatky: $a$) Přímka $pq$ kolmá k průmětně promítá se v bodu, jenž sjednocuje se s její stopou.

$b$) Není-li přímka $bc$ (obr. 155.) kolmá k průmětně, náležejí jejím bodům $b$ a $c$ promítací přímky $bb_1 \| cc_1$, tvořící rovinu $P \perp R$. Průsečice této promítací roviny $P$ s průmětnou jest průmětem přímky.

$c$) průmět délky k rovině nakloněné jest vždy kratší než daná délka. (Viz lichoběžník $bcb_1c_1$ v obr. 155., v němž jsou úhly při $b_1$ a $c_1$ pravé.)

$d$) Přímka ($df$) rovnoběžná s průmětnou jest též rovnoběžná se svým průmětem; každá její úsečka rovná se svému průmětu.

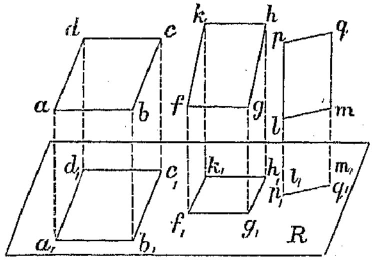
$f$) Přímka $hk$ ležící v průmětně, sjednocuje se se svým průmětem.

V obr. 154. svírá svírá přímka $A$ se svým průmětem $\sphericalangle \alpha$. Ostrý úhel, který svírá přímka se svým průmětem na rovině, slove **odchylka přímky od roviny.**

3. **Průmětem mnohoúhelníku** na rovinu jest mnohoúhelník, jehož vrcholy jsou průměty všech vrcholů daného mnohoúhelníku.

V obr. 156. zobrazeny jsou průměty tří čtverců.

Rovina čtverce $abcd$ jest rovnoběžná s rovinou průmětnou a průmět $a_1b_1c_1d_1$ jest stejný se čtvercem $abcd$.




Obr. 156.

Rovina čtverce $fghk$ jest k průmětně nakloněna. Průmět $f_1g_1h_1k_1$, jest rovnoběžník plošně menší než daný čtverec.

Průmět čtverce $lmpq$, jehož rovina jest na průmětně kolmá, jest jedinou délkou.

Průmětem, křivkou omezené části roviny jest obecně část průmětny, křivkou omezená. Jen v případech, kdy nalézá se útvar ten v rovině na průmětně kolmé, jest jeho průmět délkou.

Průmět kruhu rovnoběžného s průmětnou jest kruh stejně velký s kruhem daným; průmět kruhu k průmětně nakloněného jest omezen ellipsou, a průmětem kruhu na průmětnou kolmého jest délka.

§. 133. **O dvou průmětnách vzájemně kolmých.** Poněvadž průmět délky na průmětnu kolmé průměty všech jejích bodů obsahuje, není průmětem bodu na jedinou rovinu jeho poloha v prostoru stanovena.

Průmětem přímky stanovena jest pouze její promítací rovina; všecky přímky této roviny mají týž průmět. I průměty všech mnohoúhelníků, jichž souhlasné vrcholy leží na týchž promítacích přímkách, se sjednocují.

Jediným průmětem není tudíž ni poloha ni velikost prostorového útvaru určena.

Proto zvolíme dvě průmětny vzájemně kolmé, jednu vodorovnou druhou svislou.

Průmětna vodorovná jmenuje se průmětnou první a průmětna svislá průmětnou druhou.

Dvěma průměty (na tyto průmětny) jest poloha útvaru v prostoru přesně stanovena. První průmět, ležící v průmětně první, slove často půdorys; průmět druhý nárys.

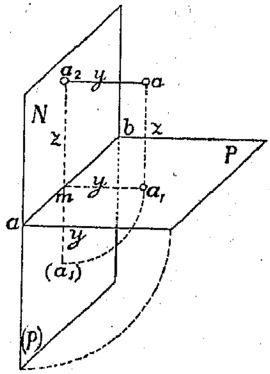
Průměty označují se týmže způsobem jako daný útvar, jenom že se připojí k jednotlivým značkám přípony *1* nebo *2*, dle toho, je-li to průmět první nebo druhý. Průměty bodu $a$ jsou $a_1$ a $a_2$; průměty přímky $A$ jsou $A_1$ a $A_2$.

Průsečnice obou průměten slove osou průmětnou nebo pouze osou. Osa sjednocuje se s oběma svými průměty; proto označuje se $x_{1,2}$.

Osou dělí se každá průmětna na 2 části. Stanovíce průměty útvarů prostorových, přihlížíme pouze k části $P$ první průmětny, jež jest před průmětnou druhou, a k části $N$ druhé průmětny, jež jest nad průmětnou první (obr. 157.).

§. 134. **Zobrazování bodů.**

V obr. 157. jsou $a_1$ a $a_2$ průměty bodu $a$ na průmětny $P$ a $N$. Oběma průměty stanovena jest poloha bodu $a$ v prostoru. Poněvadž se mají průměty $a_1$ a $a_2$ ve dvou různých průmětnách se nalézající na jediné nákresně (rovině) zobraziti, musí se nutně povrch nákresny považovati za obraz průměten obou.



Obr. 157.

Sklopíme-li v mysli průmětnu $P$ kolem osy $ab$ o $90^0$ do polohy $(P)$, tvoří po sklopení obě průmětny jedinou rovinu, osou uprostřed dělenou.

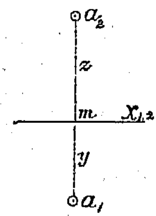
Je-li v obr. 158. $x_{1,2}$ obrazem osy, jest část nákresny nad $x_{1,2}$ obrazem druhé a část pod $x_{1,2}$ obrazem první průmětny.

Z obr. 157. jest patrno, že jsou (po zklopení) oba průměty na téže kolmici k ose.

Aby se průměty bodu $a$ zobrazily, vztyčíme v bodě osy $m$ kolmici a naměříme

$$ma_2 = a_1 a = z$$

$$\text{a } ma_1 = aa_2 = y \text{ (obr. 157.).}$$

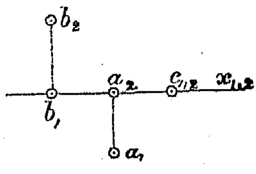


Obr. 158.

Délka $z$ udává vzdálenost bodu v prostoru od první a $y$ od druhé průmětny.

Z toho vychází: **Vzdálenost prvního nebo druhého průmětu od osy rovná se vzdálenosti bodu v prostoru od druhé nebo první průmětny.**

Dodatky. 1. Každý bod, jenž v průmětně první leží, sjednocuje se se svým průmětem prvním ($z = 0$), druhý průmět svůj má v ose $x$. Jest patrno, že jest osa $x$ druhým průmětem celé průmětny první; obsahuje tedy osa druhé průměty všech útvarů, jež v průmětně první leží.



Obr. 159.

2. Každý bod průmětny druhé sjednocuje se s druhým svým průmětem

a má první průmět svůj v ose $x$. Osa $x$ považovati se může též za první průmět celé průmětny druhé a obsahuje proto první průměty všech útvarů, jež v druhé průmětně leží.

3. Každý bod osy sjednocuje se s oběma průměty svými. V obr. 159. zobrazeny jsou oba průměty bodů, z nichž leží $a$ v průmětně první, bod $b$ v druhé a $c$ v ose $x$.

§. 135. **Zobrazování přímky a mnohoúhelníku.**

Oběma průměty svými jest poloha přímky v prostoru úplně stanovena, neboť průměty jsou dány zároveň obě roviny promítací, jichž průsečnice jest danou přímkou. Polohu přímky v prostoru k průmětně jedné posuzovati možno z polohy průmětu druhého k ose.

1. Je-li délka $ab$ rovnoběžna s průmětnou první, musí promítací rovina, kolmá na průmětně první, tuto průmětnu v délce $a_1b_1 \| ab$ protínati. Druhá rovina promítací jest s průmětnou první rovnoběžná. Průsečnice této roviny promítací s průmětnou druhou jest rovnoběžná k ose, tudíž

$$a_2b_2 \| x.$$

2. Je-li délka $cd \|$ s průmětnou druhou, jest

$$c_2d_2 \| cd \text{ a } c_1d_1 \| x.$$

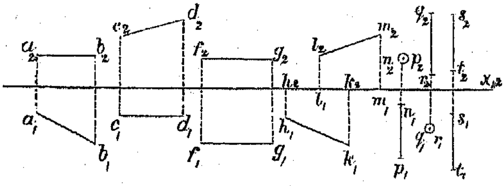
3. Je-li délka $fg \|$ s osou, jest rovnoběžna i s první i druhou průmětnou, a tudíž jest

$$f_2g_2 \| x \text{ a } f_1g_1 \| x.$$

4. První (druhý) průmět délky kolmé k první (druhé) průmětně jest bod a druhý (první) průmět její jest kolmý k ose.

5. Délka ležící v první (druhé) průmětně sjednocuje se se svým prvním (druhým) průmětem a druhý (první) průmět sjednocuje se s osou $x$.

6. Oba průměty délky kolmé k ose jsou též k ose $x$ kolmy.



Obr. 160.

Zde vytčené zvláštní polohy průmětů délky k ose mají příslušné obrazy průmětu k obrazu osy.

V obrazci 160. jsou zobrazeny průměty délek, z nichž jest $ab \parallel$ k rovině průmětné první, $cd \parallel$ k rovině průmětné druhé, $fg \parallel$ k ose $x$ $hk$ leží v první a $lm$ v druhé průmětně, $np \perp$ na průmětně druhé $rq \perp$ na průmětně první a $st \perp$ na ose $x$.

Průměty mnohoúhelníku jsou stanoveny příslušnými průměty jeho stran.

1. Mnohoúhelník v některé průmětně položený sjednocuje se s tím kterým průmětem; druhým průmětem jest určitá délka osy.

2. Mnohoúhelník, jehož rovina jest rovnoběžná s průmětnou první (druhou), jest se svým prvním (druhým) průmětem shodný. Druhý (první) jeho průmět jest délkou rovnoběžnou k ose.

3. Je-li rovina mnohoúhelníku kolmá k první i k druhé průmětně (tedy k ose), jsou oba jeho průměty délkami na osu kolmými.

Část devátá.

# O tělesech.

§. 136. **Roztřídění těles.** Dle omezení jest těleso **hranaté,** je-li naskrze rovinami; **oblé,** je-li částečně rovinami, částečně křivými plochami; nebo **kulaté,** je-li naskrze křivými plochami omezeno.

1. Teleso hranaté omezeno jest rovinami, jež slovou **stěny**; průsečice stěn jsou **hrany** a průsečíky hran **vrcholy** jeho.

Dle počtu stěn jmenuje se těleso **čtyř-, pěti-,** vůbec **mnohostěn.** Stěna, na níž tělesu spočívati dáme, slove **základna** (půdice); leží-li proti ní jiná, s ní obyčejně rovnoběžná stěna, nazývá se i tato základna (spodní, vrchní základna). Ostatní stěny zovou se **stěny pobočné** (boky).

Souhrn všech stěn tvoří **povrch,** souhrn všech pobočných stěn **pobočný povrch** (plášť).

Nejdůležitější druhy mnohostěnů jsou: *a*) hranoly, *b*) jehlany, *c*) pravidelné mnohostěny.

2. Rovné stěny **těles oblých** slovou základny, souhrn křivých stěn sluje **oblina** (plášť). Nejdůležitější oblá těla jsou: 1. válce, 2. kůžele.

**Kulaté** těleso jest pouze křivými plochami (oblinami) omezeno. K omezení jeho postačí jediná plocha.

§. 137. **Povrch a obsah těles.** V stereometrii jedná se často o vypočítávání povrchu a obsahu těles.

**Vypočítati povrch tělesa** znamená, ustanoviti součet obsahů všech jeho stěn. Povrch udán jest proto měrou plošnou a zobrazuje se sítí. Zobrazíme-li totiž veškeré stěny tělesa v pravé jejich velikosti a v náležitém pořádku, obdržíme jeho **síť**.

Rýsujíce síť dbejme, by jednotlivé její k sobě co nejtěsněji přiléhající plochy ni částečně se nekryly. V síti mnohostěnu připojuj se stěna k stěně sousední podél společné hrany.

Vyřízneme-li na lepenku rýsovanou síť po krajích a nařízneme-li ji dle čar uvnitř zůstalých, dá se potom složiti v úplný model tělesa.

**Obsah tělesa** jest velikost části prostoru jím zaujatého. Dvě tělesa zaujímající stejně velké části prostoru jsou stejná či obsahem sobě rovná.

Obsahy těles jakožto veličiny lze měřiti. Měřiti těleso znamená vyšetřiti, kolikráte v něm obsaženo jest těleso, které jsme za míru přijali.

Měrou těles jest krychle, jejíž hrana rovna jest míře délkové; na př. 1 m$^3$ (krychlový metr).

K míře krychlové náleží také míra dutá, sloužící ku měření hmot sypkých a tekutin. Jednotkou míry duté jest litr (1 l).

1 l = 1 dm$^3$; 100 l = 1 hl (hektolitr.)

Obsah tělesa vyjadřuje se měrným číslem, které někdy též prostě obsahem tělesa jmenujeme. Číslo to zřídka stanovíme přímo, nýbrž vypočítáváme je obyčejně z daných rozměrů.

# I. O mnohostěnech.

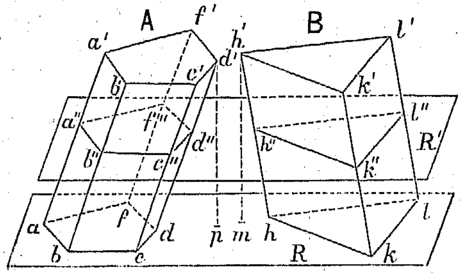
## 1. Hranoly.

§. 138. **Hranol jest těleso omezené dvěma shodnými rovnoběžnými mnohoúhelníky a tolika rovnoběžníky, kolik má každý z obou mnohoúhelníků stran.**

Řečené mnohoúhelníky jsou základny a rovnoběžníky stěny poboční hranolu.

Dle počtu boků slove hranol troj-, čtyř-, pěti- $n$-boký Vzdálenost základen jest výška hranolu. **Hrany** hranolu jsou dvoje: při základnách a poboční. Poboční hrany jsou spolu rovnoběžné a sobě rovné.

§. 139. **Druhy hranolů.** Dle odchylky hran pobočných od základny rozeznáváme **hranol kolmý** (přímý na př. $R_1$ v obr.

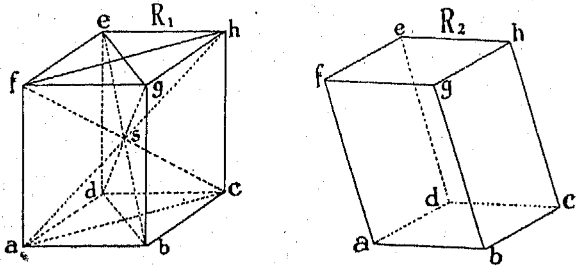



Obr. 161.

162.) a **šikmý** (kosý, nakloněný jako na př. hranoly $A$, $B$. v obr. 161.)

Hranol, jehož výška jest proti ostatním rozměrům malá, slove hranolová **deska.**

Hranol, jehož základnou jest rovnoběžník, slove **rovnoběžnostěn** ($R_1$ a $R_2$ v obr. 162.)




Obr. 162.

Rovnoběžnostěn omezen jest 6 rovnoběžníky, z nichž dva a dva jsou spolu rovnoběžné a shodné; má 12 hran, z nichž 4 a 4 jsou spolu rovnoběžné a stejně dlouhé; má 8 vrcholů, z nichž jsou 2 a 2 protější (v obr. 162. $e$ a $b$, $g$ a $d$, $h$ a $a$, $f$ a $c$.)

Spojnice dvou protějších vrcholů slove **úhlopříčka** rovnoběžnostěnu. Průsečík úhlopříček rovnoběžnostěnu (bod $s$ v obr. 162.) jest **středem** jeho.

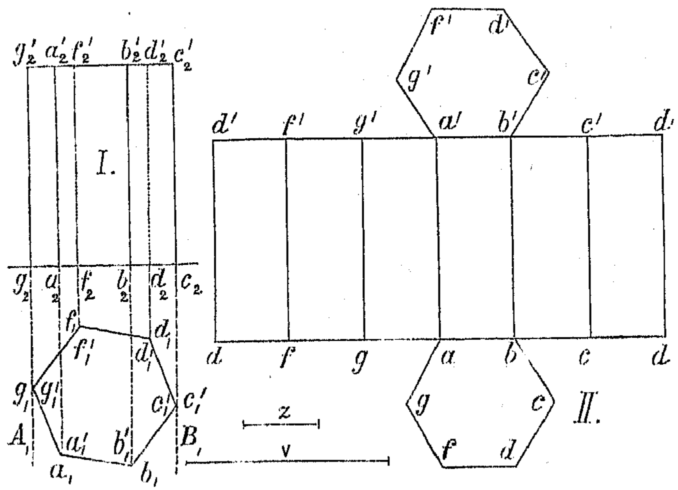
Kolmý rovnoběžnostěn s pravoúhlou základnou slove **pravoúhlý** ($R_1$, obr. 162); každý jiný jest **kosoúhlý** ($R_2$, obr. 162.). Pravoúhlý rovnoběžnostěn omezen jest 6 pravoúhlými rovnoběžníky (obdélníky nebo čtverci). Jsou-li veškeré jeho hrany sobě rovny, jest omezen 6 čtverci a slove **kostka** nebo **krychle**.

Rovnoběžnostěn omezený 6 kosočtverci jmenuje se **klenec**.

§. 140. **Řezy hranolu.** *a*) Rovina položená dvěma nesousednými hranami pobočnými protíná hranol v **řezu úhlopříčném. Úhlopříčné řezy hranolu jsou rovnoběžníky** (obr. 162.). — Úhlopříčnými řezy dá se každý mnohoboký hranol rozložiti na hranoly trojboké tak vysoké jako hranol daný.

*b*) Řez hranolu rovnoběžný se základnou jest s ní shodný (obr. 161.)

§. 141. **Zobrazování hranolů.** 1. Má-li se zobraziti hranol kolmý, stojící na průmětně první, sjednotí se první průměty základen se základnou spodní. Druhý průmět základny spodní jest v ose, a onen základny vrchní přímkou k ose rovnoběžnou. První průměty hran pobočných jsou body, druhé průměty kolmice k ose. Tyto druhé průměty mají touže délku jako příslušné hrany samy. V obr. 163. zobrazen jest hranol šestiboký, jehož hrana u základny jest *z* a výška *v*.

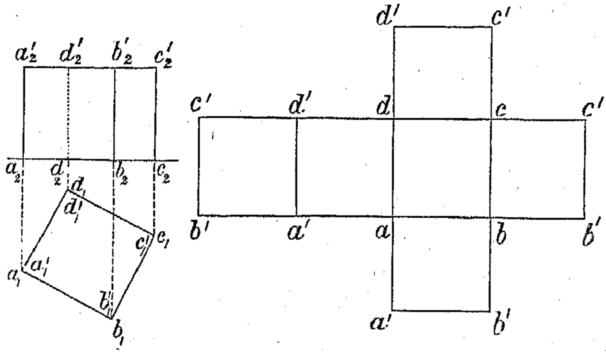



Obr. 163.

Abychom vyšetřili, které hrany jsou viditelné, myslíme si těleso v poloze mezi příslušnou průmětnou a okem. Potom představme si svislé roviny k oběma průmětnám kolmé, které se daného tělesa dotýkají. V průmětu prvním (druhém) jest viděti těmito rovinami omezenou část tělesa, která jest blíže oku, (tedy od druhé [první] průmětny

vzdálenější). Průměty řečených rovin jsou přímky k ose kolmé. D
průměty těchto rovin sjednotí se s průměty hran $gg_1$ a $cc_1$; první ]
měty jejich jsou $A_1$ a $B_1$. Podle přímek $A_1$ a $B_1$ pozná se, k
hrany v druhém průmětu jsou viditelny.

Sítí (obr. 163. II.) znázorněna jest velikost povrchu.



Obr. 164.

2. V obr. 164. rýsovány jsou průměty a síť kost]
3. Pro zobrazení šikmého hranolu buďte dány ve
rozměrů základny a délky pobočných hran buď výška n
odchylka hran od základny.

Připomenutí. Při rýsování šikmého hranolu předpoklá
jest určitou jeho polohu, na př. tu, ve které jsou pobočné hrany rov
běžné ke druhé průmětně; první jejich průměty jsou potom rov
běžné k ose.

**Úkoly.** 1. Zobraziti kolmý hranol, dána-li jest výška a str
pravidelné základny, je-li tato *a*) trojúhelníkem, *b*) pětiúhelník
*c*) osmiúhelníkem. Rýsovati též síť zobrazeného hranolu.

2) Zobraziti kostku a její síť, dána-li jest úhlopříčka *a*) stě
*b*) těla.

3. Zobraziti šikmý rovnoběžnostěn s obdélnou základnou, dán
jsou rozměry základny, hrana pobočná a její odchylka od spodní
kladny $= 60^\circ$ $(45^\circ)$. Pobočné hrany buďte rovnoběžné ke dr
průmětně.

§. 142. **Povrch hranolu** rovná se součtu obou základen
povrchu pobočného.

$$P = 2Z + p.$$

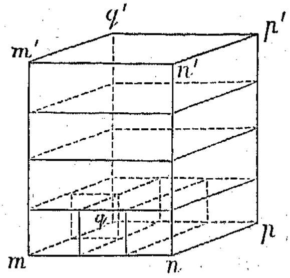
Pobočný povrch kolmého hranolu tvoří obdél
(II. v obr. 163.), jehož jedním rozměrem jest obvod základ
druhým výška hranolu.

Povrch kostky o hraně $a$ jest $= 6a^2$.

## §. 143. Obsah hranolů.

1. Vypočítati **obsah pravoúhlého rovnoběžnostěnu.**

Rozměry pravoúhlého rovnoběžnostěnu v obr. 165. buďtež: $mn = a$, $mq = b$, $mn_1 = c$, t. j. v $mn$ jest délková jednotka $a$kráte, v $mq$ $b$kráte a v $mm_1$ $c$kráte obsažena. Základna $mnpq$ obsahuje čtvercovou jednotku $ab$kráte, tudíž lze na ni krychli, jejíž hrana má délkovou jednotku (a stěna proto jednotku plošnou), $ab$kráte vedle sebe položiti. Krychlových jednotek dá se tedy na základnu $a \cdot b$ položiti, jež všechny dohromady tvoří vrstvu zvýši jednotky délkové. Podél výšky rovnoběžnostěnu lze takových vrstev položiti $c$, z nichž každá $a \cdot b$ krychlových jednotek, všecky dohromady tedy $c$kráte $a \cdot b$ krychlových jednotek obsahují. Označí-li se počet krychlových jednotek v pravoúhlém rovnoběžnostěnu obsažených $R$, bude




Obr. 165.

$$R = a \cdot b \cdot c.$$

Rozměry $a$, $b$, $c$ musí býti vždy stejnojmenné; obsah pak bude vyjádřen krychlovými měrami téhož jména.

Pro $a = 4\ dm$, $b = 3\ dm$, $c = 5\ dm$, jest pak

$$R = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60\ dm^3.$$

**Obsah pravoúhlého rovnoběžnostěnu rovná se součinu jeho tří rozměrů.**

Poznámka. Mluví-li se o součinu útvarů geometrických, máme vždy na zřeteli součin měrných čísel těchto útvarů.

Označí-li se obsah základny tohoto rovnoběžnostěnu $Z$, výška $c = v$, tudíž $Z = a \cdot b$, jest

$$R = Z \cdot v \text{ t. j.}$$

**Měrné číslo obsahu pravoúhlého rovnoběžnostěnu rovná se součinu z měrného čísla základny a výšky.**

Krychle jest pravoúhlý rovnoběžnostěn, jehož rozměry jsou si rovny, a proto rovná se **měrné číslo obsahu krychle trojmoci měrného čísla hrany.**

$1\ m^3 = 1000\ dm^3$; $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$; $1\ cm^3 = 1000\ mm^3$.

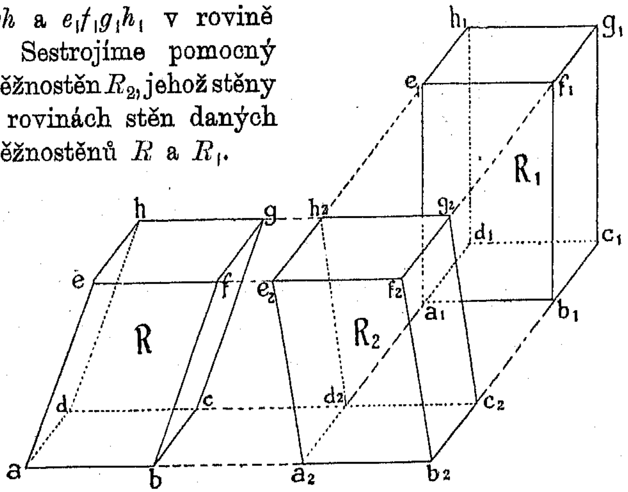
Jsou-li obsahy dvou krychlí $o$ a $o_1$, a jejich hrany $a$ a $a_1$, jest $o = a^3$, $o_1 = a_1^3$, tudíž

$$o : o_1 = a^3 : a_1^3 \text{ t. j.:}$$

**měrná čísla obsahů krychlí jsou přímo srovnalostna s trojmocmi měrných čísel jejich hran.**

2. **Rovnoběžnostěny, které se shodují v základnách a výškách jsou obsahem sobě rovny.**

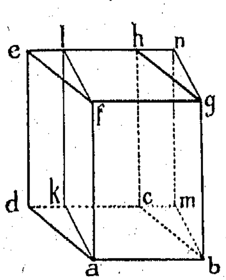
Oba rovnoběžnostěny $R$ a $R_1$ (obr. 166.), jejichž rovnost jest dokázati, spočívejte na rovině $P$ tak, aby stejné strany shodných základen $abcd$ a $a_1b_1c_1d_1$ byly spolu rovnoběžny. Potom ležeti budou i svrchní základny $efgh$ a $e_1f_1g_1h_1$ v rovině $M \| P$. Sestrojíme pomocný rovnoběžnostěn $R_2$, jehož stěny jsou v rovinách stěn daných rovnoběžnostěnů $R$ a $R_1$.




Obr. 166.

Myslíme-li si těleso $aa_2d_2dee_2h_2h$ posunuto o délku $ab$, přijde do polohy $bb_2c_2cgg_2f_2f$. Jest patrno, že jsou obě tato tělesa spolu shodna. Odečteme-li od každého z nich jim společnou část $ba_2d_2cfe_2h_2g$, obdržíme stejné zbytky $R = R_2$. Týmž způsobem dokážeme, že též $R_1 = R_2$ a tudíž $R = R_1$.

3. **Rovnoběžnostěn kosoúhlý rovná se obsahem pravoúhlému, s nímž má rovně velkou základnu a výšku.**




Obr. 167.

V obr. 167. buď $abcdefgh$ kolmý rovnoběžnostěn, jehož základnou jest kosodélník $abcd$. Hranami $af$ a $bg$ položme roviny kolmé na rovinu stěny $cdeh$; potom jest $abmklfgn$ pravoúhlý rovnoběžnostěn, jenž shoduje se s daným kosoúhlým velikostí základny a výšky; neboť považujeme-li *abgf* za společnou základnu obou rovnoběžnostěnů, jsou vrchní jejich základny *cdeh* a *mkln* v téže rovině, pročež mají oba stejné výšky. Jsou tedy obsahem sobě rovny.

Důsledek: **Obsah rovnoběžnostěnu rovná se součinu ze základny a výšky.**

4. **Rovnoběžnostěn rozpoluje se řezem úhlopříčným.**

Řezem úhlopříčným dělí se rovnoběžnostěn ve dva hranoly trojboké. V kolmém rovnoběžnostěnu jsou oba tyto hranoly shodné a tedy obsahem sobě rovné.

Je-li to však rovnoběžnostěn šikmý, jsou oba hranoly souměrné ale ne shodné. Sestrojíme-li nad základnou každého z nich kolmý hranol s ním stejně vysoký, rovná se tento kolmý hranol obsahem příslušnému hranolu šikmému. Kolmý onen hranol jest však polovicí rovnoběžnostěnu, jenž srovnává se s daným rovnoběžnostěnem v základně i výšce; proto jest úhlopříčným řezem šikmý rovnoběžnostěn rozpolen.

5. **Obsah hranolu rovná se součinu ze základny a výšky.**

*a*) Je-li základnou $Z$ hranolu $H$ trojúhelník, doplňme jej na rovnoběžník $= 2Z$ a nad tímto sestrojme rovnoběžnostěn $R$, mající s daným hranolem společnou výšku. Potom jest

$$H = \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} . 2 Z . v = Z . v.$$

*b*) Je-li základnou $Z$ hranolu mnohoúhelník, rozdělme jej na trojboké a to řezy úhlopříčnými, položenými touže pobočnou hranou. Hranoly ty mají s daným hranolem společnou výšku $v$ a základnami jejich jsou trojúhelníky $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ . . ., skládající základnu $Z$. Jest tudíž obsah hranolu

$$H = Z_1 v + Z_2 v + Z_3 v \ldots = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots) v,$$
$$H = Z . v.$$

Důsledky: a) *Hranoly o stejných základnách a výškách jsou obsahem sobě rovny.*

b) *Hranoly o stejné základně* (*výšce*) *jsou v poměru výšek* (*základen*).

**Úkoly.** 1. Pravoúhlý rovnoběžnostěn má rozměry *a*) 8 cm, 6 cm, 24 cm; *b*) 16 cm, 12 cm, 21 cm; *c*) 9·6 cm, 2·8 cm, 10·5 cm; *d*) 8·6 cm, 1·5 cm, 8 cm; vypočítati jeho úhlopříčku, povrch a obsah.

2. V pravoúhlém rovnoběžnostěnu jest šířka k délce v poměru $3 : 4$; výška = úhlopříčce základny = 10 m. Vypočítati jeho povrch a obsah.

3. Kolik $m^3$ hlíny jest vykopati při kopání příkopu 80 m dlouhého, jehož příčný průřez jest lichoběžníkem? Půdice průřezu mají 22 dm a 8 dm, ramena 18 dm a 15 dm.

4. V pravoúhlém rovnoběžnostěnu, jehož úhlopříčný řez jest čtverec, mají rozměry základny *a*) 8 cm a 15 cm, *b*) 12 dm a 35 dm; *c*) 4·8 cm a 5·5 cm; *d*) 1·6 dm a 3 dm; vypočítati jeho povrch i obsah.

5. Vypočítati výšku, povrch a obsah pravoúhlého rovnoběžnostěnu, mají-li rozměry základny a úhlopříčný řez *a*) 3 cm, 4 cm, 35 $cm^2$; *b*) 5 cm, 12 cm, 195 $cm^2$; *c*) 2·8 cm, 4·5 cm, 53 $cm^2$.

6. Obsah pravoúhlého rovnoběžnostěnu se čtvercovou základnou má 160 $m^3$ (2873 $dm^3$); výška 10 m (17 dm); vypočítati jeho povrch.

7. Povrch krychle = *a*) 2166 $cm^2$, *b*) 636·45 $dm^2$, *c*) 194·94 $dm^2$; jak dlouhá jest její hrana a jak velký obsah?

8. Vypočítati povrch mramorové krychle, jež váží 43·75 kg, je-li měrná váha mramoru 2·8.

9. Dubová krychle váží 5 kg 24 dkg 8·8 g. Kolik váží stejně velká krychle pískovcová, je-li měrná váha dubového dřeva 0·9, pískovce 2·5? Jak hluboko ponoří se řečená dubová krychle do vody, byvši jednou stěnou ponořena?

10. Z dané hrany $a$ krychle vypočítati její úhlopříčku.

11. Je-li úhlopříčka krychle $a$, jak velká jest její hrana a jak velký povrch i obsah?

12. Hrany 2 krychlí jsou v poměru $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$; povrch menší z nich = 1350 $m^2$; vypočítati obsah větší krychle.

13. Dány jsou 3 krychle o hranách 15 m, 20 m, 25 m (12 cm, 16 cm, 20 cm; $^3/_4$ dm, 1 dm, $^1/_4$ dm); vypočítati hranu krychle, jež rovná se obsahem součtu daných krychlí.

14. Na hořejší základně krychle o hraně $a$ spočívá druhá krychle, jejíž spodní základna má vrcholy ve středech stran vrchní základny dané krychle. Vypočítati povrch a obsah skupiny obou krychlí.

15. Jak velký jest povrch i obsah skupiny 3 krychlí, jež vznikne, položí-li se na skupinu úkolu předcházejícího třetí krychle?

16. Rozdíl povrchů 2 krychlí = 240 $cm^2$ (576 $dm^2$), součet jejich 2 hran = 10 cm (16 dm); vypočítati jejich obsahy.

17. Rozdíl povrchů 2 krychlí = 390 $dm^2$ (1740 $cm^2$) rozdíl jejich hran 5 dm (2 cm); vypočítati jejich obsah.

18. Povrch kolmé hranolové desky se čtvercovými základnami o straně $a$ rovná se $2^1/_2$násobné základně; jak jest vysoká?

19. Rozměry pravoúhlého rovnoběžnostěnu jsou v poměru $2 : 3 : 5$, jeho povrch = 992 $m^2$; vypočítati jeho obsah.

20. Kolmý hranol se čtvercovou základnou o straně 36 cm jest provrtán, čímž vznikne hranolová roura všude stejně tlustá. Vypočítati tloušťku stěn, je-li obsah roury k obsahu dutiny v poměru $9 : 16$.

21. Povrch pravoúhlého rovnoběžnostěnu se čtvercovými základnami má 1166 $cm^2$, základna = 121 $cm^2$. Jak velký jest jeho obsah?

22. Čtvercová základna pravoúhlého rovnoběžnostěnu má 400 $cm^2$, úhlopříčka boku jest o 8 cm větší než výška. Vypočítati jeho povrch i obsah.

23. Povrch pravoúhlého rovnoběžnostěnu se čtvercovými základnami má 290 $m^2$; výška $= 2^2/_5$ strany základny. Vypočítati jeho obsah.

24. Součet délek všech hran pravoúhlého rovnoběžnostěnu rovná se 168 m; jak velké jsou tyto hrany, jsou-li v poměru $2 : 5 : 7$.

25. Šířka pravoúhlého rovnoběžnostěnu jest k délce v poměru $5 : 12$, výška $=$ 10 m a úhlopříčný řez má 260 $dm^2$. Jak velký jest jeho obsah?

26. Obvody tří nerovně velkých stěn pravoúhlého rovnoběžnostěnu mají *a*) 20 cm, 38 cm, 30 cm; *b*) 28 cm, 38 cm a 46 cm; *c*) 52 cm, 64 cm a 80 cm; *d*) 60 cm, 82 cm a 98 cm; *e*) $39^1/_6$ dm, $75^2/_3$ dm $65^1/_2$ dm. Vypočítati jeho povrch a obsah.

27. V pravoúhlém rovnoběžnostěnu jest délka o 2 m kratší než dvojnásobná šířka, $^1/_4$ délky jest o $3^1/_2$ m větší než $^1/_4$ šířky, výška rovná se úhlopříčce základny. Vypočítati jeho povrch i obsah.

28. Obvod základny pravoúhlého rovnoběžnostěnu $=$ 62 cm; $^1/_7$ šířky a $^1/_6$ délky $=$ 5 cm; výška úhlopříčce základny. Vypočítati jeho rozměry a obsah.

29. V cm udané rozměry $x, y, z$ pravoúhlého rovnoběžnostěnu hoví podmínce:

$$1.\quad z - x - y = 10, \qquad 2.\quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5,$$

$$2x + 3y - z = 10, \qquad x + \frac{z}{5} = 7,$$

$$3x - 2y + 2z = 12; \qquad y + \frac{z}{3} = 14;$$

vypočítati jeho povrch i obsah.

30. Vypočítati povrch klence, jehož hrana má 17 cm a jedna úhlopříčka stěny 30 cm.

31. Každá stěna klence má 75 cm obvodu, její úhlopříčky jsou v poměru $7 : 24$; jak velký jest jeho povrch?

32. Vypočítati povrch a obsah kolmého hranolu s naskrze rovně dlouhými hranami o délce $a$, je-li to hranol *a*) trojboký, *b*) šestiboký, *c*) osmiboký.

33. Vypočítati obsah kolmého trojbokého hranolu s pravidelnou základnou o straně $a$, rovná-li se úhlopříčka boku $2{\cdot}6a$.

34. Strany základny kolmého trojbokého hranolu mají $6^1/_2$ cm 7 cm a $7^1/_2$ cm; výška $=$ 12 cm. Vypočítati jeho povrch a obsah.

35. Základnou kolmého trojbokého hranolu jest rovnoramenný trojúhelník, jehož půdice má 4 cm a rameno $8^1/_8$ cm; výška hranolu jest o $2^1/_8$ cm delší než výška základny. Jak velký jest jeho povrch i obsah?

36. Jak vysoký jest kolmý hranol, jehož základnou jest trojúhelník o stranách 10 cm, 21 cm a 17 cm, je-li jeho pobočný povrch 8krát tak velký jako základna?

37. Vypočítati povrch i obsah 6boké kolmé hranolové desky s pravidelnou základnou o straně $a$, rovná-li se její výška $a$) $^1/_3$ strany základny, $b$) $^1/_4$ poloměru kruhu základně vepsaného.

38. Výška kolmého šestibokého hranolu s pravidelnou základnou rovná se výšce základny (vzdálenosti 2 spolu rovnoběžných stran). Vypočítati jeho povrch.

## 2. Jehlany.

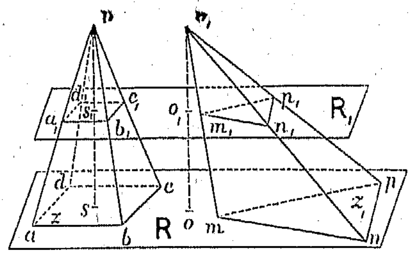
§. 144. Spojí-li se všecky vrcholy mnohoúhelníku s bodem mimo jeho rovinu položeným, jsou řečené spojnice spolu se stranami mnohoúhelníku hrany jehlanu. **Jehlan jest tělo omezené mnohoúhelníkem a tolika trojúhelníky o společném temeni, kolik má daný mnohoúhelník stran.**

Mnohoúhelník ten jest základnou, trojúhelníky stěnami pobočnými jehlanu.

Pobočné hrany sbíhají se ve společném vrcholu, který slove témě jehlanu; jeho vzdálenost od základny jest výškou jehlanu.

Dle počtu pobočných stěn jsou jehlany troj-, čtyř- . . . $n$-boké. Jehlan trojboký slove **čtyřstěn.**

Má-li základna střed (jako všecky pravidelné mnohoúhelníky a i některé nepravidelné, na př. obdélník) a spojuje-li výška tento střed základny s temenem jehlanu, sluje **jehlan kolmý,** jinak **šikmý** (obr. 168.).




Obr. 168.

Pobočné hrany kolmého jehlanu jsou vesměs stejně dlouhé; pobočné jeho stěny jsou rovnoramenné trojúhelníky. Je-li základna kolmého jehlanu pravidelná, jsou pobočné stěny vespolek shodny. Pobočnou výškou takového jehlanu sluje výška kterékoli jeho pobočné stěny spuštěná s temene jehlanu.

§. 145. **Řezy jehlanu.**

*a*) Každý řez jehlanu, jehož rovina jde temenem, jest trojúhelník. Takovým jest zvláště každý řez úhlopříčný, položený dvěma nesousedními hranami pobočnými.

Řezy úhlopříčnými dá se každý jehlan rozložiti na trojboké jehlany s ním stejně vysoké.

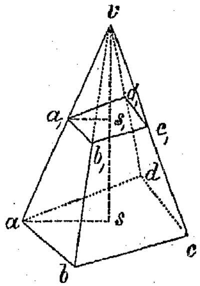
*b*) Řez jehlanu se základnou rovnoběžný jest této podoben; obsah jeho má se k obsahu základny jako čtverce vzdálenosti jejich rovin od temene.

Jehlan (obr. 169.), jehož základna $abcd$ jest v rovině $R$, protněme rovinou $R_1 \| R$ v mnohoúhelníku $a_1b_1c_1d_1 \ldots$; potom jest: $a_1b_1 \| ab$, $b_1c_1 \| bc$, $c_1d_1 \| cd \ldots$, též

$$\sphericalangle a_1 = a, \sphericalangle b_1 = b, \sphericalangle c_1 = c \ldots.$$

Je-li $Z$ obsah základny, $Z_1$ obsah řezu $a_1b_1c_1d_1 \ldots$, vzdálenost $vs_1 = v_1$, výška $vs = v$, jest

$$Z : Z_1 = (ab)^2 : (a_1b_1)^2 = (av)^2 : (a_1v)^2$$
$$Z : Z_1 = (vs)^2 : (vs_1)^2 = v^2 : v_1^2.$$



Obr. 169.

Důsledek: *Mají li dva jehlany rovně velké základny a výšky, jsou každé dva se základnami rovnoběžné a od nich stejně vzdálené řezy obsahem sobě rovny.*

§. 146. **Jehlan komolý.** Část jehlanu, obsažená mezi základnou a řezem s ní rovnoběžným, jmenuje se jehlan komolý. Odříznutá část daného jehlanu slove vzhledem ke komolému jehlanem doplňovacím.

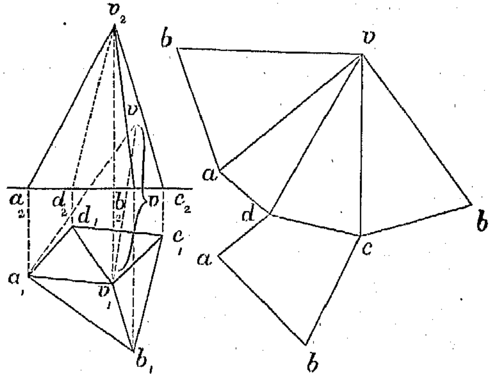
Je-li daný jehlan kolmý, slove i vzniklý komolý jehlan kolmý. Pobočné hrany jsou stejně dlouhé a pobočné jeho stěny jsou rovnoramenné lichoběžníky. Jsou-li jeho základny pravidelny, jsou pobočné stěny shodny.

§. 147. **Zobrazování jehlanů.**

Vzdálenost obou základen jest výškou jehlanu komolého.

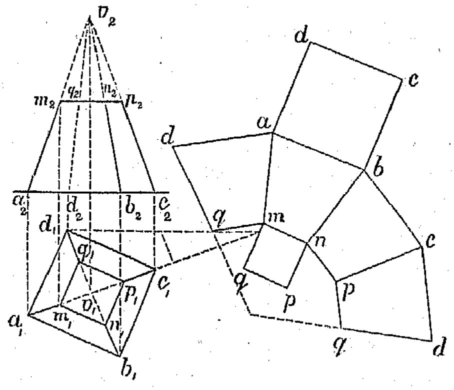
1. Zobraziti kolmý jehlan, dány-li jsou rozměry základny a výška. Spočívá-li jehlan na první průmětně sjednotí se první průmět základny se základnou samou. Druhý průmět základny jest v ose.

K sestrojení síti musí býti stanovena pravá délka pobočných hran. Každou hranu pobočnou lze považovati za přeponu pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou: 1. první její průmět, 2. výška jehlanu. Je-li $a_1v_1$ průmětem hrany $av$, $v_1v$ výškou jehlanu, jest $a_1v$ délkou hrany.



Obr. 170.

2. V obr. 171. rýsovány jsou **průměty a síť kolmého jehlanu komolého**. Síť povrchu pobočného zobrazena jest tím, že rýsována předem síť celého jehlanu od níž odečtla se síť povrchu pobočného jehlanu doplňovacího. V síti té jsou body $d, a, b, c, d$ na kružnici kolem temene opsané délkou



Obr. 171.

hrany celého jehlanu; body $q, m, n, p, q$ jsou na kružnici délkou hrany doplňovacího jehlanu kolem temene opsané.

**Úkoly.** 1. Zobraziti průměty a síť kolmého jehlanu s pravidelnou základnou, dána-li jest strana základny a výška jehlanu, jenž jest *a*) čtyřboký, *b*) pětiboký, *c*) šestiboký.

2. Zobraziti krychli, na níž spočívá kolmý jehlan, jehož vrcholy základny jsou ve středech stran vrchní základny krychle a jehož výška rovná se $^1/_2$ úhlopříčky krychle. Hrana krychle jest dána.

3. Rýsovati průměty a síť kolmého jehlanu komolého se čtvercovými základnami. Komolý tento jehlan povstal z jehlanu, jehož strana základny a výška jsou dány, řezem uprostřed výšky vedeným.

4. Rýsovati průměty a síť kolmého jehlanu komolého, jehož základny jsou rovnostranné trojúhelníky, dány-li jsou strany základen a výška komolého jehlanu.

§. 148. 1. **Povrch jehlanu** rovná se součtu základny a povrchu pobočného (pláště).

$$P = Z + p.$$

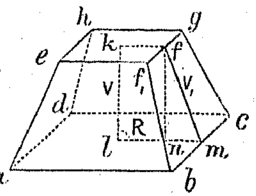
Je-li základnou kolmého jehlanu pravidelný mnohoúhelník, jest pobočný povrch složen ze samých shodných trojúhelníků, jichžto základny tvoří obvod základny jehlanu a jichžto společnou výškou jest pobočná výška jehlanu. Pobočný povrch kolmého jehlanu s pravidelnou základnou rovná se tedy polovici obvodu základny násobené výškou boku. —

Aby se snadno vypočítala výška boku kolmého jehlanu, přihlíží se k řezu jehlanu, jenž stanoven jest výškou boku a výškou těla. Z pravoúhlého △, jehož jednou odvěsnou jest výška jehlanu, druhou odvěsnou však průmět výšky boku, vypočítá se snadno přepona (výška boku).

2. **Povrch kolmého jehlanu komolého** rovná se součtu obou základen a povrchu pobočného. Povrch pobočný skládá se ze samých lichoběžníků. Jsou-li základny kolmého jehlanu komolého $Z$ a $Z_1$, jeho výška $v$, jeho pobočny povrch $p$, jest

$$P = Z + Z_1 + p.$$

Příklad. Vypočítati povrch kolmého jehlanu komolého, mají-li strany čtvercových jeho základen $ab = 16$ cm, $ef_1 = 6$ cm a výška $v = 12$ cm.



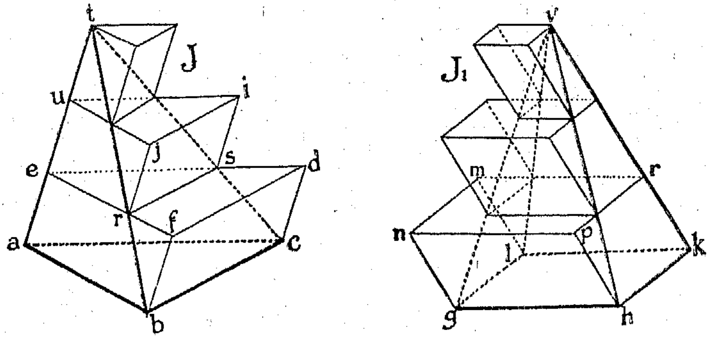
Obr. 172.

Prořízne-li se tento komolý jehlan rovinou jdoucí body $k$, $l$, $f$, $m$, jest pravoúhlý lichoběžník $klfm$ polovicí příslušného řezu. Spustí-li se v lichoběžníku tom $fn \perp lm$, jest v pravoúhlém △ $fnm$ . . $fn = 12$ cm, $nm = lm - ln = 8$ cm $- 3$ cm $= 5$ cm; jest tudíž $v_1 = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

$$P = 16^2 + 6^2 + 4 \times \frac{16 + 6}{2} \times 13 = 864\ cm^2.$$

§. 149. **Obsah jehlanu.**

1. **Jehlany o stejných základnách a výškách jsou obsahem sobě rovny.**




Obr. 173.

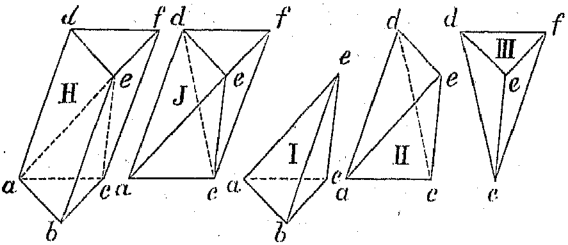
Jehlany $J$ a $J_1$ (obr. 173.) mějte stejné základny i výšky. Výšky jejich rozdělme obě na týž počet sobě rovných dílů a veďme body dělícími ku základnám rovnoběžné řezy. Souhlasné řezy obou jehlanů jsou stejně velké. (Důsledek poučky $b$ §. 145.) Řezy těmito rozdělí se dané jehlany na stejně vysoké vrstvy. Každou z nich doplňme v hranol; z první vrstvy u jehlanu $J$ obdržíme hranol *abcdef* a u jehlanu $J_1$ hranol *ghklmnpr*. Hranoly ty, majíce stejné základny i výšky, jsou si obsahem rovny. Totéž platí také o souhlasných hranolech ostatních vrstev.

Značí-li $H$ součet hranolů jehlanu $J$, $H_1$ součet hranolů jehlanu $J_1$, jest $H = H_1$.

Roste-li počet vrstev do nekonečna, přibližuje se neustále obsahem $H$ jehlanu $J$ a $H_1$ jehlanu $J_1$. Z rovnosti $H = H_1$ plyne též rovnost $J = J_1$.

2. **Každý trojboký jehlan dá se rozložiti na tři obsahem sobě rovné jehlany.**

Důkaz. Řezem *ace* (obr. 174.) rozloží se hranol $H$ na trojboký jehlan $I$ a čtyřboký jehlan $J$. Řezem *edc* rozloží se jehlan $J$ na dva trojboké jehlany $II$ a $III$. Jehlany $II$ a $III$ mají stejné základny ($adc \cong dfc$) a výšky (výška každého stanovena jest vzdáleností vrcholu $e$ od stěny *acdf*) a jsou tedy obsahem sobě rovny. Považuje-li se v jehlanu $III$ *def* za základnu, jest jeho výška táž jako výška daného hranolu $H$; také má jehlan $I$ touže základnu a výšku jako hranol $H$, tedy i jako jehlan $III$.




Obr. 174.

Jehlan $III$ rovná se tedy jehlanu $I$; jest však roven také jehlanu $II$, tudíž jsou jehlany $I$, $II$, $III$ obsahem sobě rovny.

Z toho plyne: **Trojboký jehlan rovná se třetině hranolu o stejné základně a výšce.**

3. Má-li jehlan více než 3 boky, rozložíme jej úhlopříčnými řezy na jehlany trojboké. Každý z nich rovná se $^1/_3$ hranolu o rovné základně a výšce. Sečtením těchto obsahů obdržíme daný jehlan, jenž rovnati se bude obsahem $^1/_3$ hranolu o stejné s ním základně i výšce. Jest tedy

$$J = \frac{1}{3} Z. v.$$

**Obsah jehlanu rovná se $^1/_3$ součinu ze základny a výšky.**

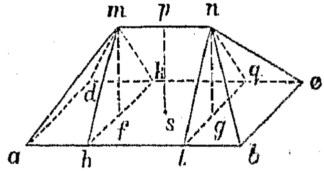
Důsledky. 1. *Jehlany o stejných základnách a výškách jsou obsahem sobě rovny.*

2. *Jehlany o stejné základně (výšce) jsou v poměru výšek (základen).*

Příklad. **Vypočítati obsah štěrkové hromádky.**

Štěrková hromádka jest hranol šikmo seříznutý. Obdélník $abcd$ jest její základnou a $sp$ její výškou. Hřeben $mn$ jest rovnoběžný se základnou. Stěny $abmn$ a $cdmn$ (obr. 175.) jsou rovnoramenné a spolu shodné lichoběžníky. Stěny $adm$ a $bcn$ jsou rovnoramenné a shodné trojúhelníky.

Spustí-li se na základnu kolmice $mf$ a $ng$ a rýsuje-li se $hk \parallel lq \parallel bc \parallel ad$, rozdělí se hromádka řezy $mhk$ a $lnq$ na tři tělesa a to: na trojboký hranol uprostřed a na dva čtyřboké jehlany po stranách. Oba tyto jehlany jsou obsahem sobě rovny, jelikož mají rovné základny a výšky.




Obr. 175.

Označí-li se obsah hromádky $H$, délka základny $ba = a$, její šířka

$bc = b$, výška hromádky $ps = v$, a délka hřebenu $mn = h$, jest

$$H = \frac{b\,.\,h}{2}\,.\,v + 2\,\frac{b\,(a - h)\,v}{2\,.\,3}\text{; z toho plyne}$$

$$H = \frac{b\,.\,v}{6}\,(2a + h).$$

Pro $a = 2{\cdot}2\,m$, $b = 1\,m$, $h = 1{\cdot}4\,m$, $v = 0{\cdot}7\,m$ jest

$$o = \frac{0{\cdot}7}{6}\,(4{\cdot}4 + 1{\cdot}4) = 0{\cdot}676\,m^3 = 676\,dm^3.$$

§. 150. **Obsah kolmého jehlanu komolého.**

Obsah komolého jehlanu rovná se rozdílu mezi obsahem původního jehlanu a jehlanu doplňovacího.

Značí-li $Z$ a $Z_1$ obsahy základen, $v$ výšku, $O$ obsah komolého jehlanu, $O_1$ obsah úplného jehlanu, $x$ výšku jehlanu doplňovacího a $O_2$ jeho obsah, jest

$$O = O_1 - O_2 = \frac{Z\,(v + x) - Z_1\,.\,x}{3}$$

$$O = \frac{Zv}{3} + \frac{x}{3}\,(Z - Z_1).$$

Ku vypočítání hodnoty $x$ jest dle §. 145. $b$:

$$Z : Z_1 = (v + x)^2 : x^2\text{, aneb odmocněním}$$

$$\sqrt{Z} : \sqrt{Z_1} = (v + x) : x\text{; z čehož plyne}$$

$$x\sqrt{Z} = v\sqrt{Z_1} + x\sqrt{Z_1}\text{ a tudíž}$$

$$x = \frac{v\sqrt{Z_1}}{\sqrt{Z} - \sqrt{Z_1}}.$$

Dosadí-li se tato hodnota do rovnice pro $O$, jest

$$O = \frac{Z\,.\,v}{3} + \frac{v\sqrt{Z_1}}{3\,(\sqrt{Z} - \sqrt{Z_1})}\,.\,(Z - Z_1.)$$

Jelikož možno $(Z - Z_1)$ považovati za rozdíl dvojmocí, tudíž $Z - Z_1 = (\sqrt{Z} + \sqrt{Z_1})\,.\,(\sqrt{Z} - \sqrt{Z_1})$, jest

$$O = \frac{Z\,.\,v}{3} + \frac{v\sqrt{Z_1}}{3}\,(\sqrt{Z} + \sqrt{Z_1})\text{, anebo}$$

$$O = \frac{Z\,.\,v}{3} + \frac{v\sqrt{Z\,.\,Z_1}}{3} + \frac{v\,.\,Z_1}{3}\text{; z čehož}$$

vychází $$O = \frac{v}{3}\,(Z + \sqrt{Z\,.\,Z_1} + Z_1).$$

**Obsah komolého jehlanu rovná se součtu obsahů tří jehlanů úplných, které mají s ním stejnou výšku a jichž základny jsou: spodní základna jehlanu komolého, svrchní základna téhož a střední měřická úměrná obou.**

**Úkoly.** 1. Vypočítati povrch a obsah kolmého jehlanu se čtvercovou základnou, má-li strana základny a výška *a*) 14 cm a 24 cm, *b*) 10 dm, a 24 dm, *c*) 18 cm a 40 cm, *d*) 4·8 dm a 7 dm.

2. Vypočítati obsah a povrch kolmého jehlanu se čtvercovou základnou o straně 22 cm (78 cm, 56 cm), jehož výška boku jest o 1 cm (9 cm, 8 cm) větší než výška těla.

3. Čtvercová základna kolmého jehlanu má 25 dm$^2$ (576 cm$^2$), výška boku jest o $^1/_2$ dm (2 cm) větší než výška těla. Vypočítati jeho obsah.

4. Vypočítati povrch a obsah kolmého jehlanu se čtvercovou základnou o straně $a$ rovná-li se 1. jeho výška 2. jeho pobočná hrana úhlopříčce základny.

5. Vypočítati výšku, povrch a obsah přímého jehlanu se čtvercovou základnou, jehož každá hrana má délku $a$.

6. Výška kolmého jehlanu jest 1·2krát tak velká jako strana čtvercové jeho základny; jeho obsah = 10·8 cm$^3$. Vypočítati jeho povrch.

7. Povrch kolmého jehlanu se čtvercovou základnou o straně $a$ jest $^8/_3\, a^2$; jak velký jest jeho obsah?

8. Kolmý jehlan se čtvercovou základnou má 96·8 cm$^2$; stěna pobočná jest o 4·2 cm$^2$ větší než základna. Vypočítati jeho obsah.

9. V kolmém jehlanu se čtvercovou základnou o straně $a$ jest výška ku výšce boku v poměru $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Vypočítati výšky ty, pobočnou hranu, povrch a obsah jehlanu.

10. V cm udaná strana $s$ čtvercové základny a výška $v$ kolmého jehlanu hoví podmínkám:

1. $$\frac{1}{8}s + \frac{3}{5}v = s$$

$$\frac{v - \frac{5}{6}s}{5} - \frac{\frac{2}{7}v - \frac{1}{2}s}{2} = 1.$$

2. $$\frac{2}{9}v - \frac{3}{8}s = 2$$

$$\frac{5}{7}v - \frac{3}{4}s = 21,$$

3. $$\frac{2v - 68}{25} + \frac{s - 6}{10} = 6$$

$$\frac{90 - 3s}{12} + \frac{v - 24}{15} = 5;$$

vypočítati jeho povrch a obsah.

11. Jak vysoký jest trojboký 200 $cm^3$ veliký jehlan, mají-li strany jeho základny $4\frac{1}{3}$ cm, 10 cm a $12\frac{1}{3}$ cm?

12. Vypočítati povrch a obsah čtyřstěnu s pravidelnou základnou o straně $a$, jehož výška rovná se 1. $^2/_3$ obvodu základny, 2. průměru kruhu základně opsaného.

13. Povrch kolmého jehlanu se čtvercovou základnou má 736 $m^2$; strana základny jest ku hraně pobočné v poměru $16 : 17$. Jak dlouhé jsou jeho hrany?

14. Povrch kolmého jehlanu se čtvercovou základnou má 800 $m^2$; základna jest k povrchu pobočnému v poměru $8 : 17$; jak vysoký jest a jak velký jest jeho obsah?

15. Jak vysoký jest šestiboký kolmý jehlan s pravidelnou základnou o straně $a$, rovná-li se jeho pobočná stěna 4násobné základně?

16. Vypočítati povrch a obsah kolmého trojbokého jehlann s pravidelnou základnou o straně $a$, jehož výška rovná se $^4/_3$ poloměru kruhu základně vepsaného.

17. Dána jest kolmá hranolová deska se čtvercovými základnami o straně $a$ a výšce $\frac{a}{4}$. Nad základnami desky jsou shodné kolmé jehlany. Obsah této skupiny rovná se $^1/_2$ obsahu krychle o hraně $a$; vypočítati její povrch.

18. Nad stěnami krychle o hraně $a$ sestrojeny jsou kolmé 4boké jehlany. Vypočítati povrch a obsah vzniklého těla, jsou-li 1. veškeré jeho hrany stejně dlouhé, 2. rovná-li se výška pobočné stěny jehlanu hraně krychle, 3. leží-li všecky vrcholy těla na povrchu koule.

19. Do kruhu o poloměru $r$ vepsán jest pravid. šestiúhelník a pravid. trojúhelník; každý z nich jest základnou kolmého jehlanu, jehož výška rovná se straně základny. Vypočítati poměr obsahů obou jehlanů.

20. Krychle o hraně $a$ otupena jest při vrcholech řezy stanovenými středy hran, jež vycházejí z vrcholu otupeného trojhranu. Vypočítati obsah a povrch vzniklého těla.

(U každého vrcholu krychle odříznut jest trojboký jehlan, za jehož základnu možno považovati v stěně krychle položený rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník.)

21. Řešiti úkol předešlý, odříznuto-li bylo příslušnými řezy u vrcholu po $^1/_3$ hrany.

22. Na hranolové desce se čtvercovou základnou o straně $a$ spočívá přímý čtyřboký jehlan. Vrcholy základny jehlanu jsou ve středech stran vrchní základní desky. Výška jehlanu rovná se dvojnásobné výšce desky, jeho obsah $= {}^2/_3 a^3$. Vypočítati povrch této skupiny.

23. Nad každou stěnou krychle 216 $cm^3$ veliké sestrojeny jsou kolmé jehlany. Povrch vzniklého těla má 360 $cm^2$; jak velký jest jeho obsah?

24. Dána jest kostka o hraně $a$; do ní vepsán jest kolmý jehlan, jehož temeno jest ve svrchní základně krychle a jehož základnou jest

1. spodní základna krychle, 2. čtverec, jehož vrcholy jsou středy stran spodní základny krychle. Vypočítati povrch a obsah jehlanu.

25. Strany čtvercových základen a výška kolmého jehlanu komolého mají 1. 10 cm, 4 cm, a 4 cm; 2. 14 cm, 4 cm a 12 cm; 3. 10 cm, 6 cm a $3^3/_4$ cm; 4. 6 dm, 3 dm a 2 dm; 5. 12 cm, 4 cm a 3 cm; vypočítati jeho povrch i obsah.

26. V kolmém komolém jehlanu se čtvercovými základnami mají strany základen 18 cm a 8 cm, výška boku jest o 1 cm delší než výška těla. Jak velký jest jeho povrch i obsah?

27. Kolmý 24 cm vysoký jehlan se čtvercovou základnou o straně 20 cm proříznut jest rovinou ku základně rovnoběžnou uprostřed výšky. Vypočítati povrch a obsah vzniklého komolého jehlanu.

28. Vypočítati povrch a obsah komolého jehlanu vzniklého proříznutím kolmého jehlanu jehož všecky sobě rovné hrany mají délku $a$, uprostřed výšky.

29. Dána jest kostka o hraně $a$. Střed každé základny jest temenem jehlanu, jehož základnou jest protější základna krychle. Vypočítati jest povrch a obsah 1. oběma jehlanům společné části (dvojitého jehlanu), 2. ze dvou komolých jehlanů (u základen krychle umístěných) složeného těla.

30. Kolmý 36 cm vysoký jehlan se čtvercovou základnou o straně 30 cm proříznut jest rovnoběžně k základně, že jest vzniklý komolý jehlan 24 cm vysoký. Vypočítati povrch a obsah vzniklého komolého jehlanu.

31. Pobočný povrch kolmého jehlanu komolého se čtvercovými základnami o stranách $a$ a $\frac{a}{2}$ (6 cm a 3 cm) rovná se součtu základen; vypočítati jeho obsah.

32. Vypočítati povrch a obsah kolmého jehlanu komolého se čtvercovými základnami, z nichž má hořejší 324 cm$^2$ a strana dolejší 36 cm, je-li výška pobočné stěny = 41 cm.

33. Hromada obilí tvoří při podlaze pravoúhlý rovnoběžnostěn 14 m dlouhý, 9 m široký a 5 m vysoký; nad ním jest tělo podoby hromady štěrkové 5 m vysoké, jehož hřeben má 10 m. Kolik hl obilí obsahuje?

34. Na vrchní základně krychle o hraně 24 cm spočívá 40 cm vysoký kolmý jehlan komolý, jehož vrchní základna má 36 cm$^2$; na této základně jest krychle a nad ní kolmý 4 cm vysoký jehlan. Vypočítati jest povrch této skupiny.

## 3. Pravidelné mnohostěny.

§. 151. **Pravidelným mnohostěnem slove mnohostěn, jenž jest omezen shodnými pravidelnými mnohoúhelníky, jsou-li zároveň mnohohrany na něm se jevící vesměs shodny.**

Z toho plyne, že při pravidelném mnohostěnu nejen všecky hrany, ale i úhly jak hranové, tak i stěnové jsou si rovny.

Počet pravidelných mnohostěnů omezen jest poučkou, že součet úhlů hranových v každém mnohohranu menší jest než $4R$.

Pravidelné trojhrany lze tvořiti:

*a*) z pravidelných trojúhelníků proto, že $3.60^\circ = 180^\circ < 4R$ (čtyřstěn).

*b*) z pravidelných čtyřúhelníků, $3.90^\circ = 270^\circ < 4R$ (šestistěn);

*c*) z pravidelných pětiúhelníků, $3.108^\circ = 324^\circ < 4R$ (dvanáctistěn);

Pravidelné čtyřhrany lze utvořiti

z pravidelných trojúhelníků, $5.60^\circ = 300^\circ < 4R$ (dvacetistěn).

Jiným způsobem nelze mnohohran ve vrcholu pravidelného mnohostěnu se jevící sestaviti; tudíž **jest pouze patero pravidelných mnohostěnů.**

§. 152. **Počet hran a vrcholů pravidelného mnohostěnu.**

Ze známého druhu a počtu ($s$) stěn vypočítáme, kolik mají všecky stěny dohromady stran. Vždy dvě strany tvoří hranu; proto dělíme, chtíce vypočítati počet ($h$) hran součet stran všech stěn dvěma.

Všecky stěny pravid. osmistěnu mají $8 \times 3 = 24$ strany; počet hran $h = 12$.

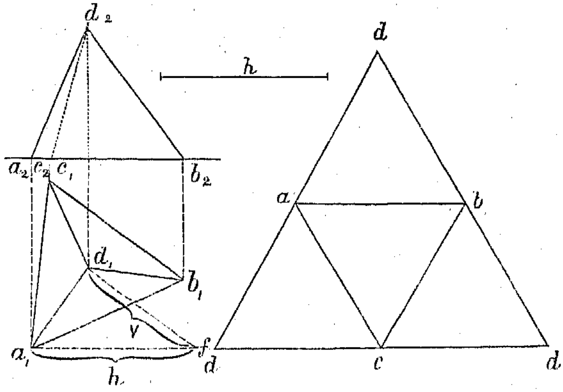
Pro stanovení počtu ($v$) vrcholů pozorujeme jednotlivé mnohohrany. V každém mnohohranu sbíhá se tolik hran, kolik má mnohohran stěn. Majíce na mysli, že každá hrana spojujíc dva vrcholy, ke hranám dvou mnohohranů náleží, poznáme, že součet hran všech mnohohranů rovná se 2násobnému počtu hran těla. Vrcholů jest tolik, kolik jest mnohohranů. Má-li mnohohran $n$ hran, jest

$$v = \frac{2h}{n}.$$

Pravidelný osmistěn má $\frac{2 \times 12}{4} = 6$ vrcholů. Kolik hran a vrcholů mají ostatní pravid. mnohostěny?

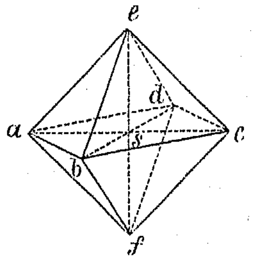
§. 153. **Zobrazování pravidelných mnohostěnů a jich sítí.** Kterak zobrazí se prav. **šestistěn** (kostka, krychle) a jeho síť, ukázáno bylo při zobrazování hranolů.

Pravidelný **čtyřstěn** jest trojboký hranol kolmý, jehož všecky hrany jsou stejně dlouhé.

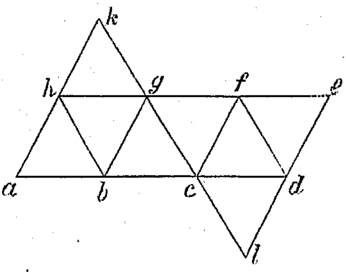



Obr. 176.

V obr. 176. zobrazen jest pravid. čtyřstěn a jeho síť z dané hrany. První průmět temene jest ve středu prvního průmětu základny. Výška stanovena z pravoúhlého $\triangle\ a_1 d_1 f_1$ jehož odvěsna a přepona jsou dány.

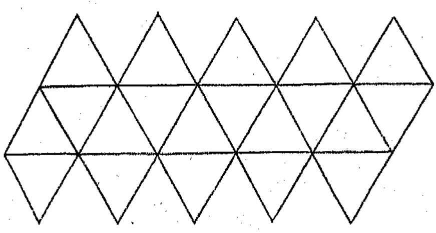



Obr. 177.



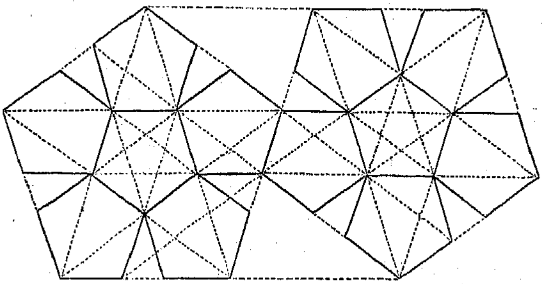

Obr. 178.

Pravidelný **osmistěn** jest vlastně tělo složené ze dvou čtyřbokých kolmých jehlanů o společné základně. Společnou



Obr. 179.

základnou těchto jehlanů jest čtverec (*abcd* v obr. 177.), jehož strana rovná se hraně osmistěnu. Přímka spojující dva protější vrcholy slove **osa** osmistěnu. Osmistěn má 3 stejné, na sobě vzájemně kolmé osy; každá rovná se úhlopříčce čtverce *abcd*. Je-li hrana $a$ a osa $o$, jest $o = a\sqrt{2}$.



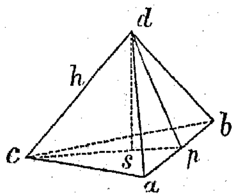
Obr. 180.

V obr. 178. rýsována jest síť pravid. osmistěnu v obr. 179. síť pravid. dvacetistěnu a v obr. 180. síť pravid. dvanáctistěnu.

§. 154. **Obsah některých pravidelných mnohostěnů.**

1. Vypočítati obsah pravid. čtyřstěnů, jehož hrana má délku $h$.

V obr. 181. buď $s$ středem základny $abc = Z_1$, $sd = v$, $cp = dp = v_1$.





Obr. 181.

$$ps = \frac{1}{3} v_1 = \frac{h}{6}\sqrt{3};$$

$$dp = v_1 = \frac{h}{2}\sqrt{3}.$$

V $\triangle\, sdp$ jest

$$v = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{h}{6}\sqrt{3}\right)^2}$$

$$v = \frac{h}{3}\sqrt{6}.$$

$$Č = \frac{h^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{h}{9}\sqrt{6} = \frac{h^3}{12}\sqrt{2}.$$

2. Vypočítati obsah pravidelného osmistěnu, jehož hrana má délku $h$.

$$O = 2 \cdot J = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{a}{6}\sqrt{2} = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}.$$

**Úkoly.** 1. Vypočítati povrch pravidelného *a*) čtyřstěnu, *b*) osmistěnu, *c*) dvacetistěnu, jehož hrana má délku $a$.

2. Osa pravidelného osmistěnu jest $a$; vypočítati jeho povrch a obsah.

3. Pravidelný osmistěn má stejně velký povrch jako pravidelný čtyřstěn o hraně $a$; vypočítati jeho hranu, osu a obsah.

4. Do krychle o hraně $a$ vepsán jest pravid. osmistěn, jehož vrcholy jsou ve středech stěn krychle; vypočítati jeho povrch i obsah.

5. Mnohohrany pravidelného osmistěnu otupeny byly do polovice (třetiny) hran; vypočítati povrch a obsah vzniklého těla.

6. Vypočítati povrch pravid. čtyřstěnu, jehož hrana rovná se úhlopříčce krychle o hraně $a$.

7. Vypočítati hranu a osu pravidelného osmistěnu, jenž rovná se obsahem svým pravid. čtyřstěnu o hraně $a$.

8. Vypočítati hranu a povrch krychle, jež rovná se svým obsahem *a*) pravidelnému osmistěnu, *b*) pravidelnému čtyřstěnu o hraně $a$.

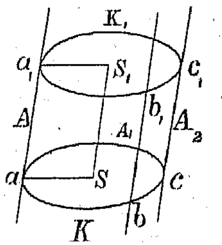
9. Jak dlouhá jest hrana a jak velký obsah kostky, jež rovná se povrchem svým pravid. 1. čtyřstěnu, 2. osmistěnu o hraně $a$.

---

# II. Tělesa oblá.

## Válec kruhový.

§. 155. **Plocha válcová.** Buď dána kružnice $K$ (útvar řídící) a mimo její rovinu položena přímka $A$ (útvar tvořící, jež danou křivku protíná). Pohybuje-li se přímka tvořící tak, aby za pohybu svého procházela všemi body křivky řídící, zůstávajíc při tom rovnoběžnou se svou polohou $A$, vytvoří plochu válcovou.



Obr. 182.

**Plocha válcová jest geometrické místo přímek, které vespolek jsou rovnoběžné a danou křivku protínají.**

Je-li křivka $K$ uzavřena, omezuje plocha válcová s dvěma rovinami rovnoběžnými, které všecky polohy přímky tvořící protínají, určitou část prostoru, jež slove válec.

§. 156. **Válec jest těleso omezené plochou válcovou a dvěma rovnoběžnými rovinami.** Povrch válce skládá se ze dvou shodných základen a obliny (pláště).

Vzdálenost obou základen jest **výška** válce. Úsečky jednotlivých poloh tvořící přímky, pokud obsaženy jsou v oblině válce, jsou jeho povrchové přímky nebo **hrany** pobočné. Tyto jsou vespolek rovnoběžné, stejně dlouhé a od základen stejně odchýleny. Jsou-li povrchové přímky kolmé k základně, jest **válec kolmý,** jinak jest **šikmý.**

Válec, jehož základnami jsou kruhy, slove **válec kruhový.** V dalším pojednání všímati si budeme pouze tohoto válce.

Válec kruhový má dvě shodné základny kruhové. Spojnice jich středů jest **osa** válce, která jest rovnoběžná a stejná s přímkami povrchovými.

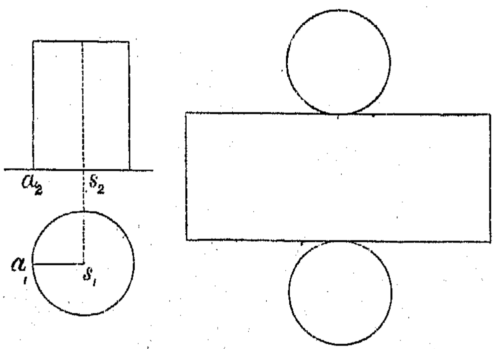
§. 157. **Řezy válce kruhového.** Rovina položená osou válce působí osový řez. Osový řez jest rovnoběžník, jehož dvě strany jsou průměry základen a dvě povrchovými přímkami. Také řez rovnoběžný s osou jest rovnoběžník; dvě jeho strany jsou tětivy základen, dvě jsou přímky povrchové.

Řez rovnoběžný se základnami jest s nimi shodný; řez k přímkám povrchovým nakloněný jest omezen ellipsou.

§. 158. **Kolmý válec kruhový** vytvoří se, otočí-li se pravoúhlý rovnoběžník kolem své strany. Osa jest zároveň jeho výškou. Osové řezy jsou pravoúhlé rovnoběžníky. Je-li osový řez rovnostranný (čtverec), slove **válec rovnostranný.** Výška rovnostranného válce rovná se průměru základny.

Kolmý kruhový válec, jehož výška jest poměrně malá, slove **kotouč.** Válec uvnitř dutý slove **válcová roura.**

§. 159. **Zobrazování válce a jeho síti.**




Obr. 183.

V obr. 183. zobrazeny jsou průměty a síť kolmého válce kruhového.

Při rýsování síti mysleme si oblinu podél jedné pobočné hrany rozříznutou a do roviny rozprostřenou. Tak obdržíme obdélník, jehož jeden rozměr rovná se délce hrany a druhý obvodu základny. Obvod základny kruhové na půdici obdélníku síti naměřme nejpohodlněji takto. Na obvod základny naměřujeme kružidlem sobě rovné malé díly (by jednotlivé obloučky nelišily se valně od tětiv) a týž počet dílů naměříme též na půdici rozvinuté obliny. Objeví-li se při naměřování řečeného dílu na kružnici zbytek, změří se také tento a jemu rovná část přidá se k půdici obdélníku.

§. 160. **Povrch kolmého válce kruhového** rovná se součtu obou základen a obliny.

$$P = 2Z + p.$$

Je-li poloměr základny $r$ a výška $v$, jest

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r \,.\, v = \mathbf{2\pi r\,(r + v)}.$$

Povrch $P_1$ rovnostranného válce o poloměru $r$ jest

$$\mathbf{P_1} = 2\pi r^2 + 2\pi r \,.\, 2r = \mathbf{6\pi r^2}.$$

§ 161. **Obsah válce kruhového.** Považujeme-li kruhovou základnu válce za mnohoúhelník o nekonečně velikém počtu stran, možno považovati válec za hranol o nekonečně velkém počtu hran. Platí tudíž pravidlo: **Obsah válce rovná se součinu ze základny a výšky.**

$$V = Z \,.\, v = \pi r^2 \,.\, v.$$

**Úkoly.***) 1. Vypočítati povrch a obsah válce, jenž vznikne otáčením obdélníků 7 cm (13 cm, 28 cm) širokého, jehož úhlopříčka má 25 cm (85 cm, 53 cm), kolem délky.

2. Vypočítati povrch válce 55·44 dm³ velikého a 1 m vysokého.

3. Povrch rovnostranného válce má *a*) 169·56 cm², *b*) 471 dm², *c*) 678·24 cm²; vypočítati jeho obsah ($\pi = 3·14$).

4. Válcová míra litrová má 8·6 cm v průměru; jak jest vysoká? ($\pi = 3·1416$.)

5. Jak velký průměr má nádoba, do níž vejde se 1 hl, je-li 30 cm vysoká? ($\pi = 3·1416$.)

6. Válcová káď o průměru 2·1 m a hloubce 1·6 m má býti naplněna nádobou, kteráž drží 28 l; kolikrát dlužno tuto do kádě vyprázdniti?

---

*) Za $\pi$ voliti jest v příkladech, kde není hodnota $\pi$ zvlášť udána, $3\frac{1}{7}$.

7. Vypočítati povrch a obsah válce vzniklého otáčením obdélníku 14 cm (20 cm) širokého, jehož úhlopříčka jest o 2 cm (8 cm) větší než délka, kolem délky.

8. Na rovnostranném válci o poloměru $r$ spočívá válec o poloměru $\frac{r}{2}$ a výšce $4r$; na něm jest třetí válec o poloměru $\frac{r}{4}$ a výšce $8r$; vypočítati povrch a obsah této skupiny.

9. Oblina válce rovnající se dvojnásobnému součtu základen má $113\cdot0976$ cm$^2$; vypočítati jeho rozměry ($\pi = 3\cdot1416$).

10. Do válcové nádoby, jejíž výška rovná se $2^1/_3$ poloměru, vejde se $15\cdot84$ hl; vypočítati její rozměry.

11. Obdélník o rozměrech $a$ a $b$ otáčí se 1. kolem rozměru $a$, 2. kolem rozměru $b$. Vypočítati povrch a obsah vzniklých těl a též poměr povrchů i obsahů.

12. Vypočítati povrch a obsah rovnostranného válce, jehož poloměr rovná se $a$) výšce rovnostranného trojúhelníku o straně $a$, $b$) straně čtverce vepsaného kruhu o poloměru $r$.

13. Válec má $100\cdot48$ cm$^2$ povrchu, jeho oblina = 6násobné základně; vypočítati obsah jeho ($\pi = 3\cdot14$).

14. Oblina válce o poloměru $r$ rovná se $a$) pateronásobné $b$) trojnásobné, $c$) $n$-násobné základně; vypočítati obsah jeho.

15. Do roviny rozvinutá oblina válce jest čtverec, jenž má 88 cm obvodu. Vypočítati obsah válce.

16. Vypočítati povrch válce, jehož v cm udané rozměry (poloměr $r$ a výška $v$) hoví podmínce:

$a$) $\dfrac{r+3}{4} + \dfrac{v+3}{6} = 4$ $\quad$ $b$) $\dfrac{r}{5} + \dfrac{v}{4} = 5$

$\dfrac{3r-1}{7} - \dfrac{v-4}{5} = 1;$ $\quad$ $\dfrac{3r+1}{4} + \dfrac{v-1}{5} = 7;$

$c$) $\dfrac{2r+7}{5} + \dfrac{v-1}{4} = 7$ $\quad$ $d$) $\sqrt{2v+3r} + \sqrt{v+2r} = 14$

$\dfrac{3r-2}{5} + \dfrac{v+1}{9} = 4;$ $\quad$ $\sqrt{2v+3r} - \sqrt{v+2r} = 2.$

17. Osový řez válce 11 cm$^3$ velikého má 7 cm$^2$; vypočítati povrch válce.

18. Z válcové nádoby o poloměru $3^1/_2$ dm vyčerpány byly 154 l tekutiny; oč klesla její hladina?

19. Základna válce má 22 cm obvodu, výška rovná se tětivě základny $2\cdot1$ cm od středu vzdálené; vypočítati povrch a obsah válce.

20. Obdélník 90 cm$^2$ veliký, jehož šířka jest k délce v poměru $2:5$, otáčí se kolem délky; vypočítati povrch vzniklého válce.

21. Vypočítati povrch a obsah válcové roury, omezené vepsanou a opsanou oblinou krychli o hraně $a$.

22. Kolmému trojbokému hranolu s naskrze stejně dlouhými hranami o délce $a$ opsán jest válec; vypočítati jeho povrch i obsah.

23. Poloměr válce 7850 $cm^3$ velikého má se k jeho výšce jako $2:5$; jak velký jest jeho povrch? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

24. Rovnostrannému válci o poloměru $r$ vepsán jest kolmý hranol se čtvercovou základnou. Kolika $^0/_0$ obsahu válce rovná se obsah hranolu?

25. Jak vysoká jest válcová roura, jejíž vnější poloměr jest $r$, vnitřní poloměr $r_1$, rovná-li se vnější oblina součtu z obou mezikružných základen vnitřní obliny?

26. Z válce o poloměru $r$ (10 cm) a výšce $v$ (17 cm) vyvrtán jest souosý válec tak, že rovná se oblina daného válce polovici celého povrchu vzniklé roury. Jak velký jest poloměr dutiny?

27. Povrch válce rovná se kruhu o poloměru 9 cm, jeho oblina kruhu o poloměru 7 cm jak velký jest jeho obsah?

28. Oblina válce má 226·08 $dm^2$, jeho obsah 452·16 $dm^3$; vypočítati jeho poloměr a výšku ($\pi = 3{\cdot}14$).

29. Vypočítati povrch a obsah válcové roury, jejíž základnou jest mezikruží omezené opsanou a vepsanou kružnicí čtverci (rovnostrannému trojúhelníku) o straně $a$, a výška rovná se trojnásobnému průměru menšího kruhu.

30. Vypočítati poloměry základny válcové roury 9 dm vysoké, má-li povrch roury 440 $dm^2$ a je-li její stěna 1 dm tlustá.

31. 20 m dlouhá roura z litiny (měrná váha 7·2) váží 142·56 kg; větší poloměr = 3·4 cm; jak velký jest vnitřní poloměr?

32. Vypočítati obsah vinného sudu 9 dm dlouhého, jehož dno má v průměru 4·8 dm a hloubka čepová 5·7 dm.

(Dosti zevrubně vypočítá se obsah sudu, pokládá-li se tento za válec, jehož výška rovná se délce sudu, a jehož průměr roven jest třetině součtu dvojnásobného průměru pod čepem a průměru jednoho dna. Při tomto výpočtu hledí se vždy ku vnitřním rozměrům sudu.)

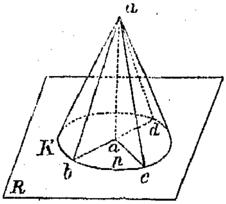
33. Kolik litrů vejde se do sudu 1·26 m dlouhého, jehož čepová hloubka 84 cm, šířka dna 72 cm měří?

34. Sud o 7 dm čepové hloubky a 4·5 dm šířky u dna má držeti 2 hektolitry; jakou vnitřní délku třeba mu dáti?

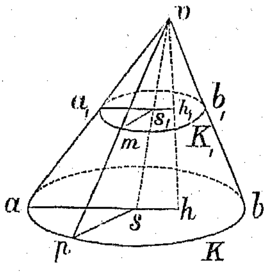
## Kužel kruhový.

§. 162. Dána-li křivka $K$ v rovině $R$ (obr. 184.) a bod $a$ mimo tuto rovinu položený a pohybuje-li se libovolná přímka tak, že procházejíc stále bodem $a$ protíná křivku $K$, vytvoří plochu kuželovou.

**Plocha kuželová jest geometrické místo přímek, které daným bodem procházejí a danou křivku protínají.**




Obr. 184.




Obr. 185.

Je-li řídící křivka uzavřena, omezuje plocha kuželová s rovinou, která všechny polohy přímky tvořící seče, určitou část prostoru.

**Kužel jest těleso omezené úplně plochou kuželovou a rovinou.** Povrch kužele skládá se ze základny a obliny, či pláště. Ve vrcholu či temeni sbíhají se všecky přímky povrchové. Přímky povrchové jmenují se též hrany kužele, poněvadž nahrazují hrany jehlanu, jehož zvláštním druhem kužel jest.

Vzdálenost temene od základny jest výška kužele.

**Kužel kruhový** má základnou kruh. Spojnice středu základny (*sv* obr. 185.) jest jeho přímkou středovou. Je-li tato kolmá na základně, jest **kužel kolmý,** jinak **šikmý.**

§. 163. **Řezy kužele.** *a*) Řez kužele jdoucí temenem jest trojúhelník (*bda* v obr. 184.), neboť jeho rovina seče základnu v tětivě (průměru) a oblinu ve dvou přímkách povrchových.

*b*) Hlavní řez kužele jde přímkou středovou kolmo k základně. Hlavní řez kolmého kužele kruhového jest rovnoramenný trojúhelník, poněvadž jsou všecky přímky povrchové stejně dlouhé; jeho půdicí jest průměr základny. — Je-li tento řez rovnostranným trojúhelníkem, slove **kužel rovnostranný.** Hrana rovnostranného kužele rovná se průměru základny.

Pro výpočty rýsují se místo perspektivných obrazů kuželů pouze hlavní jejich řezy, ve kterých jsou potřebné rozměry patrny.

*c*) **Řez kruhového kužele rovnoběžný se základnou jest kruh, jehož střed jest na přímce středové.** Důkaz této poučky plyne z příslušné poučky o jehlanu, v němž jest řez k základně rovnoběžný této podoben.

Tímto řezem dělí se kužel na dvě části. Část mezi základnou a řezem slove **kužel komolý**; druhá část jmenuje se vzhledem ke komolému kuželi kužel doplňovací.

Je-li proříznutý kužel kolmý nebo šikmý, jest i komolý kužel buď kolmý nebo šikmý. Základny jeho jsou kruhy, jedna jest spodní, druhá (obyčejně ta menší) vrchní. Vzdálenost základen jest jeho výška. Hrany (přímky povrchové) komolého kužele doplňují se s hranami doplňovacího kužele na hrany daného kužele.

§. 164. **Kolmý kužel kruhový** vytvoří se, otočí-li se pravoúhlý trojúhelník kolem své odvěsny. Tato odvěsna jest výškou, druhá odvěsna poloměrem základny vytvořeného kužele. Všecky povrchové přímky rovnají se délkou přeponě daného trojúhelníku, jež udává tudíž délku hrany.

Otáčením pravoúhlého trojúhelníku kolem přepony nebo kosoúhlého trojúhelníku kolem strany vznikne dvojitý kužel složený ze dvou kuželů o společné základně.

Kolmý kruhový válec a kužel vznikajíce otáčením obdélníku nebo pravoúhlého trojúhelníku, jsou **tělesa rotační.**

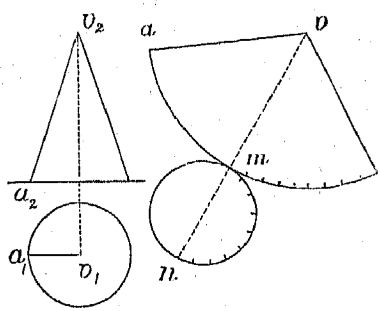
§. 165. **Zobrazování kužele a jeho síti.**

V obr. 186. rýsovány jsou průměty kolmého kužele a jeho síť. V druhém průmětu jeví se hrana $av$ v pravé velikosti, poněvadž jest s druhou průmětnou rovnoběžná; jest tedy

$a_2v_2 = av.$

Síť skládá se ze základny a rozestřené obliny.

Protože všecky pobočné hrany jsou stejně dlouhé, jest oblina, byvši podle jedné hrany rozříznuta, kruhovou výsečí.



Obr. 186.

Oblouk této výseče jest tak dlouhý jako kružnice, jež základnu kužele omezuje.

Při rýsování této síti narýsuje se napřed půdice a kterýkoli její průměr na př. $mn$ prodlouží se za bod $m$ a učiní se $vm = a_2v_2 = av$.

Kolem $v$ opíše se délkou $vm$ kružnice; v pravo i v levo od $m$ naměří se na ni délka polokružnice základnu omezující, což se výhodně státi může takto: od $m$ naměřují se kružidlem na obvod základny malé (mezi sebou) stejné díly (tak aby mezi dvěma body dělícími obsažená tětiva nelišila se mnoho od oblouku) a týž počet dílů naměří se na oblouk obliny od $m$ buď na pravo nebo na levo; kdyby se na polokružnici $mn$ objevil zbytek, změří se také a přidá se jemu rovná část k oblouku výseče. Tak se učinil arc. $bm =$ arc. $mn$, načež se učiní kružidlem arc. $am =$ arc. $mb$.

Rozvinutá oblina komolého kužele kolmého jest výsečí mezikružnou, jež obdrží se jako rozdíl obliny kužele celého a doplňovacího.

**Úkoly:** Rýsovati rovnostranný kužel a jeho síť, dán-li jest poloměr základny.

2. Rýsovati kolmý kužel komolý vzniklý z kužele o daném poloměru a výšce řezem ve $^2/_3$ výšky vedeným. Zobraziti též jeho síť.

3. Zobraziti krychli o dané hraně, na jejíž vrchní půdici spočívá rovnostranný kužel, jehož základna jest základně krychle vepsána.

§. 166. I. **Povrch kužele kolmého** rovná se součtu ze základny a obliny.

$$P = Z + p.$$

Oblina kruhového kužele kolmého rovná se polovici součinu z obvodu základny a hrany kužele.

1. Je-li hrana kužele $h$, jeho poloměr $r$, jest

$$P = \pi r^2 + \pi r \,.\, h = \pi r\,(r + h).$$

Pro rovnostranný kužel obdrží se

$$P = \pi r^2 + \pi r \,.\, 2r = 3\pi r^2.$$

2. Je-li kužel stanoven poloměrem $r$ základny a středovým úhlem $\alpha$ rozvinuté obliny, stanoví se hrana $h$ z rovnice, jejíž stranami jsou výrazy pro obvod základny a oblouk rozvinuté obliny.

$$2\pi r = \frac{2\pi h}{360}\,.\,\alpha, \text{ z toho plyne:}$$

$$h = \frac{360 r}{\alpha}.$$

II. **Povrch kužele komolého** rovná se součtu obou základen a obliny.

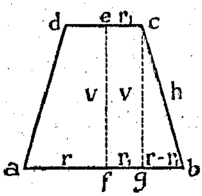
Jelikož možno komolý kužel (kruhový kolmý) považovati za kolmý komolý jehlan, jehož základny jsou pravidelné mnohoúhelníky o nekonečně velkém počtu stran, tedy kruhy, jest patrno, že rovná se oblina kolmého kruhového kužele součinu z obvodu středního řezu a hrany.

Jsou-li $r$ a $r_1$ poloměry základen, $v$ výška komolého kužele, vypočítá se předem jeho hrana $h$, podobně jako počítala se hrana komolého jehlanu.

Z hlavního řezu (obr 187.) jest patrno, že

$$h = \sqrt{v^2 + (r - r_1)^2}.$$

$$P = \pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi (r + r_1) h.$$



Obr. 187.

§. 167. I. **Obsah kolmého kruhového kužele.**

Považuje-li se kužel za jehlan, jehož základnou jest kruh, platí poučka:

**Obsah kužele rovná se třetině součinu ze základny a výšky.**

$$K = \frac{1}{3} Z \,.\, v\text{; obsah kruhového kužele}$$

$$K = \frac{1}{3} \pi r^2 \,.\, v.$$

Je-li poloměr rovnostranného kužele $r$, jest jeho výška $v = r\sqrt{3}$ a tudíž

$$K = \frac{1}{3} \pi r^2 \,.\, r\sqrt{3} = \frac{1}{3} \pi r^3 \sqrt{3}.$$

Důsledek: *Kužel rovná se obsahem třetině válce, s nímž má stejnou základnu a výšku.*

II. **Obsah komolého kužele.** Považuje-li se komolý kužel za komolý jehlan s kruhovými základnami, jest patrná poučka:

*Komolý kužel rovná se obsahem součtu tří kuželů úplných, které mají s ním stejnou výšku a jichž základny jsou: spodní základna kužele komolého, vrchní základna téhož a střední měřicky srovnalostná obou.*

Jsou-li $r$ a $r_1$ poloměry základen, $v$ výška, jest:

$$K = \frac{1}{3} v \left(\pi r^2 + \pi r_1^2 + \sqrt{\pi r^2 \,.\, \pi r_1^2}\right) = \frac{1}{3} \pi v \left(r^2 + r_1^2 + r r_1\right).$$

**Úkoly:** *) 1. Vypočítati povrch kužele, jehož poloměr a výška mají hodnoty *a*) 7 cm a 24 cm, *b*) 16 cm a 63 cm, *c*) 2·1 cm a 2·8 cm.

2. Vypočítati povrch kužele o poloměru 6 cm, jehož hrana jest o 2 cm delší než výška.

3. Vypočítati povrch kužele, jehož základna má 28·26 dm² a výška 4 dm. ($\pi = 3{\cdot}14$).

*) Kužele všech úkolů jsou kolmé kruhové. Pro $\pi$ voliti jest — není-li jiná hodnota pro $\pi$ naznačená — hodnotu $3^1/_7$.

4. Jak velký jest obsah kužele, jehož základna má 37·68 cm obvodu a hrana 10 cm. ($\pi = 3{\cdot}14.$)

5. Spodní základně krychle o hraně $a$ vepsaný kruh jest základnou kužele, jehož temeno jest ve středu vrchní základny krychle. Jak velký jest jeho povrch i obsah?

6. Obvod základny kužele $= 94{\cdot}2$ cm$^2$, hrana jeho jest o 5 cm větší než výška; vypočítati jeho povrch i obsah. ($\pi = 3{\cdot}14.$)

7. Vypočítati povrch kužele, jehož v cm udaný poloměr a hrana hoví podmínce:

$a)$ $$\frac{r}{3} + \frac{h}{5} = 5$$
$$\frac{r}{2} + \frac{h}{3} = 82$$

$b)$ $$3r - h = 2$$
$$2r + 3h = 38$$

$c)$ $$2r + 3h = 37$$
$$\frac{h}{3} - \frac{r}{5} = 2$$

$d)$ $$\frac{4r - h}{2} = \frac{4r + h}{9} - 2$$
$$\frac{5h - 4r}{12} = \frac{h + r}{3} - 2.$$

8. Oblina kužele o daném poloměru $r$ jest $a)$ 4kráte, $b$ 6kráte, $c)$ $n$kráte tak velká jako základna; vypočítati jeho hranu a obsah.

9. Kolik kg. váží dřevěný kužel (měrná váha 0·5), jenž jest 6·3 dm vysoký a hrana má 6·5 dm?

10. Vypočítati povrch a obsah těla vzniklého otáčením pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají $a)$ 15 cm a 20 cm, $b)$ $4^1/_2$ cm a 6 cm, kolem přepony. ($\pi = 3{\cdot}14.$)

11. Pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou $a$ a $b$ a přepona $c$, otáčí se 1. kolem odvěsny $a$, 2. kolem odvěsny $b$, 3. kolem přepony. Vypočítati povrch a obsah vzniklých těl a též poměr jejich povrchů i obsahů.

12. Na základnách rovnostranného válce o poloměru $r$ spočívají rovnostranné kužele. Vypočítati povrch i obsah této skupiny a též obsah rovnostranného válce, jenž má s ní stejný povrch.

13. Vypočítati povrch i obsah kužele o poloměru $r$, jehož hrana rovná se a) trojnásobnému, b) sedmeronásobnému poloměru.

14. Základna kužele má 78·5 cm$^2$, oblina 204·1 cm$^2$; jak velký jest jeho obsah? ($\pi = 3{\cdot}14$).

15. Kovový rovnostranný kužel (měr. v. $= 7{\cdot}5$) váží 4667·74 g, jak velký jest jeho poloměr? ($\sqrt{3} = 1{\cdot}732.$)

16. Základna kužele, jehož hrana jest 5kráte tak dlouhá jako poloměr, rovná se $^1/_2$ základny rovnostranného kužele o poloměru $r$. Vypočítati jest povrch i obsah jeho a srovnati vypočítané hodnoty s povrchem a obsahem řečeného rovnostranného kužele.

17. Dány jsou 3 rovnostranné kužele; poloměr prvého jest $r$, základna druhého rovná se oblině a základna třetího povrchu prvého. Vypočítati jejich povrchy i obsahy; též poměr povrchů i obsahů.

18. Povrch rovnostranného kužele rovná se povrchu rovnostranného válce o poloměru $r$. Vypočítati jeho poloměr a obsah.

19. Vypočítati rozměry, povrch a obsah kužele o daném poloměru $r$, tvoří-li jeho rozvinutá oblina výseč $a$) $120^\circ$, $b$) $135^\circ$, $c$) $240^\circ$, $d$) $90^\circ$.

20. Řešiti úkol předcházející, dána-li jest místo poloměru $r$ hrana kužele.

21. Hlavní řez kužele má $12 \cdot 6$ dm$^2$ ($672$ cm$^2$), výška $4 \cdot 5$ dm ($48$ cm); vypočítati jeho povrch i obsah.

22. Vypočítati povrch a obsah kužele, jehož základna vepsána jest pravid. trojúhelníku (šestiúhelníku) o straně $a$ a výška rovná se $^6/_5$ průměru kruhu základně opsaného.

23. Jak velký středový úhel má rozvinutá oblina rovnostranného kužele?

24. Dán jest kužel o poloměru $r$; poloměr má se ke hraně jako $7 : 25$ ($20 : 29$). Vypočítati jeho povrch i obsah.

25. V kuželi o poloměru $r$ odchýleny jsou hrany od roviny základny o $45^\circ$; vypočítati jeho povrch i obsah.

26. Poloměr kužele jest k jeho výšce v poměru $8 : 15$, hlavní jeho řez má $30$ dm$^2$; vypočítati jeho poloměr, výšku a hranu.

27. Měděný kužel (měrná váha $= 8 \cdot 8$) jest $1\,^1/_2$ dm vysoký a váží $6 \cdot 776$ kg; jak velký jest jeho poloměr?

28. Vypočítati povrch a obsah těla, jež vznikne otáčením rovnostranného trojúhelníku o straně $a$ kolem strany.

29. Vypočítati povrch a obsah těla vzniklého otáčením rovnoramenného trojúhelníku, jehož půdice má $24$ cm ($32$ cm, $26$ cm) a rameno $37$ cm ($65$ cm, $85$ cm), kolem půdice.

30. Pravidelný šestiúhelník o straně $a$ otáčí se kolem úhlopříčky, jež prochází jeho středem. Vypočítati povrch i obsah vzniklého těla.

31. Trojúhelník o stranách $a = 15$ cm ($17$ cm, $10$ cm), $b = 13$ cm ($39$ cm, $17$ cm), $c = 14$ cm ($28$ cm, $21$ cm) otáčí se kolem strany $c$. Vypočítati povrch a obsah vzniklého těla.

32. $1372$ cm$^2$ veliký rovnoramenný lichoběžník otáčí se kolem delší půdice. Z jeho půdic rovná se jedna výšce, druhá $2^1/_2$ násobné výšce. Vypočítati povrch a obsah vzniklého těla.

33. Jak hluboko ponoří se dřevěný kužel (měrná váha $= 0 \cdot 512$) vrcholem do vody vložený, je-li $4$ dm vysoký a má-li poloměr základny $3$ dm?

34. Vypočítati povrch a obsah komolého kužele o poloměrech $r = 35$ cm ($8$ cm, $49$ cm), $r_1 = 14$ cm ($2$ cm, $28$ cm) a výšce $v = 20$ cm ($8$ cm, $28$ cm).

35. Vypočítati povrch komolého kužele o poloměrech $r$ a $\dfrac{r}{2}$ a výšce $\dfrac{2}{3}r$.

36. Jak vysoký jest komolý kužel o poloměrech 15 cm a 10 cm $\left(r \text{ a } \frac{3}{5} r,\right)$ rovná-li se jeho oblina součtu základen?

37. Kužel o poloměru 14 cm a hraně 50 cm proříznut jest rovinou k základně rovnoběžnou uprostřed výšky. Vypočítati povrch a obsah vzniklého komolého kužele.

38. Komolý kužel jest 7krát tak velký jako kolmý válec s ním stejně vysoký, jehož základna rovná se menší základně komolého kužele. Vypočítati poloměr větší základny, je-li poloměr menší základny *r*.

39. Do krychle o hraně *a* vepsány jsou 2 kužele tak, že jest základnou každého základna krychle a temeno jest ve středu protější základny. Vypočítati jest povrch a obsah *a*) oběma kuželům společné části (dvojitý kužel), *b*) tělesa z obou komolých kuželů složeného, jež má podobu přesýpacích hodin.

40. Dolejší základně krychle o hraně *a* opsán jest kruh a hořejší základně jest kruh vepsán. Kruhy ty jsou základny komolého kužele; jak velký jest jeho obsah?

41. Káď podoby komolého kužele jest 12 dm vysoká; dno její má 16 $m^2$ a hořejší otvor 9 $dm^2$? Oč jest tlak vody v nádobě obsažené na dno větší než váha její?

42. Bronzový podstavec (měr. v. 8·4) má podobu komolého kužele; poloměr vrchní základny rovná se $^2/_3$ poloměru spodní základny a výška rovná se $^5/_3$ průměru spodní základny. Jak velké jsou rozměry tohoto podstavce, váží-li 209 kg?

43. Vypočítati obsah následujících kmenů, při nichž má:

*a*) dolní průměr 40 cm, horní průměr 27 cm, délka 12·6 m,
*b*) „ „ 36 „ „ „ 28 „ „ 11·5 „
*c*) „ „ 43 „ „ „ 25 „ „ 8·9 „.

Poznámka. V praktickém životě počítá se obsah kmene (komolého kužele) dosti přesně, že se poloviční součet obou základen násobí výškou.

# III. Tělesa kulatá.

## Koule.

§. 168. Otočí-li se polokružnice (obr. 188.) kolem svého průměru *ab*, vytvoří **plochu kulovou**, jejíž všechny body — a mimo ně žádné jiné — mají od bodu *s* vzdálenost rovnou poloměru *r* polokružnice.

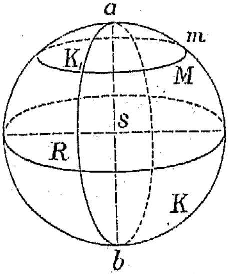
**Plocha kulová jest geometrické místo bodů v prostoru, které mají od daného bodu danou vzdálenost.**

Plocha kulová, kuželová a válcová jsou plochy křivé, neboť žádný jejich byť sebe menší díl není rovný.

Plocha kulová jest uzavřená a omezuje úplně určitou část prostoru.

**Koule jest těleso omezené plochou kulovou.**

Bod $s$ jest střed plochy kulové i koule, $r = sa$ jich poloměr, $ab = 2r$ jich průměr.



Obr. 188.

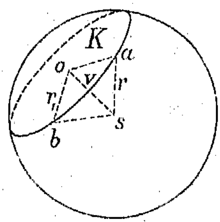
Vlastnosti koule i plochy kulové, které plynou z výměru jsou:

1. Všechny poloměry i všechny průměry jsou stejné.
2. Koule určena jest dokonale středem a poloměrem. Koule téhož poloměru jsou shodny.
3. Body uvnitř (vně) koule mají od středu menší (větší) vzdálenost než poloměr.

§. 169. **Řezy koule. Každý rovinný řez koule jest kruh.**

1. Jde-li řez středem koule, jsou všecky body jeho obvodu stejně vzdáleny od středu, leží proto na kružnici. Řez ten slove hlavní řez.

2. Rovinný řez $K$ (obr. 189.) má od středu koule vzdálenost $os = v$. Spojíme-li kterékoli dva body obvodu tohoto řezu, na př. $a$ a $b$, se středem koule a též s patou $o$ kolmice $so$ obdržíme dva shodné trojúhelníky.



Obr. 189.

$$\triangle\, aos \cong osb, \text{ tudíž}$$
$$oa = ob.$$

Body $a$ a $b$ jsou stejně vzdáleny od bodu $o$. Totéž platí o všech bodech obvodu řezu $K$. Proto jest $K$ kruh. Je-li $r_1$ poloměr kruhu $K$, jest

$$r_1^2 = r^2 - v^2; \text{ z čehož plyne:}$$

*a*) **Rovinné řezy koule stejně od jejího středu vzdálené jsou sobě rovny.**

*b*) **Ze dvou rovinných řezů koule jest ten větší, který jest středu blíže.**

*c*) **Mezi všemi rovinnými řezy koule jest hlavní řez největší. Hlavní řez koule nazývá se největším kruhem koule.** Poloměr jeho rovná se poloměru koule.

§. 170. Kouli si můžeme mysliti též vytvořenou otáčením polokruhu kolem průměru jeho. Veškeré polohy otáčené kružnice (na př. obr. 188. kruh $K$ a $K_1$) slovou **poledníky** čili **meridiany.** Průměr $ab$, kol něhož se daný kruh otáčel, jmenuje se **osa** a krajní jeho body $a$ a $b$ **poly** či **točny.**

Každý bod na obvodě kruhu $K$ opíše při otáčení na povrchu koule kružnici; bod $m$ na př. kružnici $M$. Taková kružnice jmenuje se **kružnice rovnoběžná nebo rovnoběžka.**

Největší rovnoběžka $R$, jež jest od obou polů stejně vzdálena, slove **rovník** čili **aequator.**

Dodatky: a) *Všecky meridiany jsou shodny.*

b) *Rovník jest shodný s meridianem.*

c) *Rovnoběžka jest menší než kterýkoli meridian.*

d) *Meridiany jsou na rovnoběžkách kolmé.*

§. 171. **Části koule.** Každý rovinný řez dělí kouli ve dvě tělesa, která se jmenují **úseče kulové.** Jde-li protínající rovina středem koule, jest každá úseč polokoulí. Křivá část povrchu úseče kulové jmenuje se **vrchlík.** Úseč kulová jest omezena vrchlíkem (jako oblinou) a kruhem. Mezi základnou a vrchlíkem obsažená část průměru celé koule jmenuje se výškou úseče kulové.

Mezi dvěma rovnoběžnými rovinami obsažená část koule jmenuje se **vrstva kulová**; křivá část jejího povrchu slove **pás.**

Vrstva kulová omezena jest tedy pásem a dvěma základnami, které jsou kruhy spolu rovnoběžné. Vzdálenost obou základen vrstvy kulové udává její výšku.

Část koule omezená vrchlíkem a oblinou kužele kolmého, který má touže základnu jako vrchlík a jehož temenem jest střed koule, slove **výseč kulová.** Výseč kulová jest tedy součet kulové úseče s kolmým kuželem.

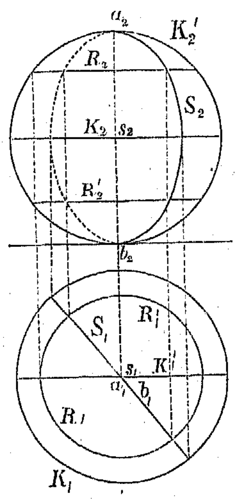
Úseč (výseč) kulová vznikne, otáčí-li se úseč (výseč) kruhová, kolem své osy souměrnosti.

§. 172. **Zobrazování koule.**

Předpokládejme, že osa koule jest kolmá na průmětně první; její první průmět jest bod a druhý přímka k ose $x$

kolmá. Obrysy koule v průmětech jsou kružnice největší, které leží v rovinách k té které průmětně rovnoběžných, středem koule vedených. Obrys nárysu $K'$ jest poledníkem; půdorys jeho jest průměr rovnoběžný s osou. Meze kruhů rovnoběžných jeví se v průmětu druhém jako přímky s osou rovnoběžné a v průmětu prvním jako kružnice, s prvním průmětem obrysu koule soustředné.

První průmět libovolného poledníku jest přímka, druhý pak ellipsa. Jednotlivé body jeho druhého průmětu stanoví se průsečíky s kruhy rovnoběžnými. V obr. 190. rýsovány jsou průměty koule; mimo to vytčeny jsou průměty několika kružnic rovnoběžných a jednoho libovolně zvoleného poledníku.



Obr. 190.

Plochu kulovou nelze na rovinu rozestříti a není proto možno síť koule s úplnou přesností stanoviti.

§. 173. **Povrch koule a jejích částí.** 1. Otáčí-li se (obr. 191.) polokružnice $afb$ i s tečnou $cd$ (jež jest v bodě $f$ rozpolena) kolem průměru $ab$, vytvoří polokružnice plochu kulovou, tečna oblinu komolého kužele, jež dotýká se plochy kulové.

Je-li tečna nekonečně krátká, lze ji pokládati za oblouk kružnice a oblinu komolého kužele za pás kulový, jehož obsah $P$ vypočítá se jako obsah obliny komolého kužele, t. j. násobí se obvod středního řezu hranou.

Jsou-li poloměry základen komolého kužele $a$ a $b$, poloměr středního řezu $c$, výška $v$ a hrana $h$, jest

1. $P = 2\pi c \cdot h.$

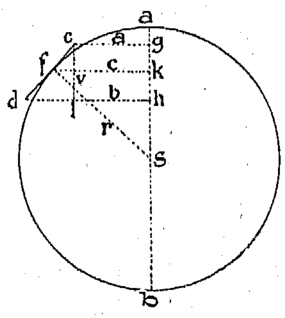
Rýsuje-li se poloměr koule $sf = r$ a spustí-li se $cl \perp dh$, jest

$\triangle\, cdl \sim fks$ (strany jednoho jsou kolmé na stranách druhého.)

Proto jest $cd : cl = fs : fk$, nebo

$h : v = r : c$; z čehož

plyne $c \cdot h = r \cdot v.$



Obr. 191.

Dosadíme-li do rovnice 1. za $ch$ hodnotu $rv$, obdržíme

$$P = 2\pi r \,.\, v.$$

**Obsah kulového pásu rovná se součinu z obvodu hlavního kruhu a výšky pásu.**

2. Stane-li se poloměr $cg$ neskonale malým, přejde pás kulový ve vrchlík. Poněvadž možno vrchlík považovati za druh pásu, platí pro obsah vrchlíku totéž pravidlo jako pro obsah pásu.

**Obsah kulového vrchlíku rovná se součinu z obvodu hlavního kruhu a výšky vrchlíku.**

3. Rovná-li se výška pásu kulového poloměru koule, přejde v polovici plochy kulové, jejíž obsah

$$P_1 = 2\pi r \,.\, r = 2\pi r^2.$$

Obsah celé plochy kulové, tedy povrch koule

$$P = 4\pi r^2, \text{ t. j.}$$

**Povrch koule rovná se čtyřnásobnému obsahu hlavního kruhu.**

Jsou-li $P$ a $P_1$ povrchy 2 koulí o poloměrech $r$ a $r_1$, jest

$$P : P_1 = 4\pi r^2 : 4\pi r_1^2 = r^2 : r_1^2, \text{ t. j.}$$

**Povrchy dvou koulí jsou v poměru dvojmocí svých poloměrů.**

§. 174. **Obsah koule.**

1. Mysleme si kouli nesčíslným množstvím rovin, jež středem jejím procházejí, rozloženou na nesčíslné množství jehlanových těles, jichž temena ve středu a základny na ploše kulové se nalézají. Taková tělesa se tím více jehlanům přibližují, čím menší jsou jejich základny.

Pro takový jehlan, jehož základna jest nekonečně malá, lze za výšku poloměr koule pokládati.

Součet všech těchto jehlanů dá kouli, součet všech jejich základen povrch koule. Označí-li se obsah koule $K$, její poloměr $r$, a povrch její $P$, stanoví se obsah všech těchto jehlanů a tudíž i obsah koule, když se součet jejich základen třetinou výšky násobí; jest tudíž

$$K = \frac{1}{3} P \,.\, r, \text{ to jest:}$$

**Obsah koule rovná se třetině součinu z jejího povrchu a poloměru.**

$$K = \frac{1}{3} \,.\, 4\pi r^2 \,.\, r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

**Obsah koule vypočítá se, znásobí-li se $\frac{4}{3}$ $\pi$ trojmocí poloměru.**

Jsou-li $K$ a $K_1$ obsahy dvou koulí, $r$ a $r_1$ jejich poloměry, jest

$$K = \frac{4}{3} \pi r^3; \quad K_1 = \frac{4}{3} \pi r_1^3, \text{ tudíž}$$

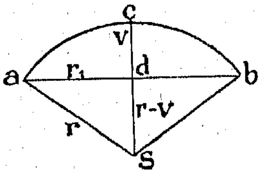
$$K : K_1 = r^3 : r_1^3, \text{ to jest:}$$

**Obsahy dvou koulí jsou v poměru trojmocí jejich poloměrů.**

2. Chtíce vyvoditi pravidlo pro vypočítání obsahu kulového výseče, mysleme si ji rozloženou na jehlany, jako mysleli jsme si celou kouli na jehlany rozloženou. Poznáme, že **vypočítá se obsah kulové výseče, násobí-li se její základna (vrchlík) třetinou poloměru koule.**

$$V = 2\pi r v \,.\, \frac{r}{3} = \frac{2}{3} \pi r^2 v.$$

3. **Obsah kulové úseče.** Kulová úseč (obr. 192.) rovná se svým obsahem rozdílu kulové výseče a kužele. Je-li obsah kulové úseče $\acute{U}$, její výška $v$ a poloměr koule $r$, jest



Obr. 192.

$$\acute{U} = \frac{2}{3} \pi r^2 v - \frac{1}{3} \pi r_1^2 (r - v).$$

V $\triangle$ $asd$ jest

$$r_1^2 = r^2 - (r - v)^2 = 2rv - v^2 = v\,(2r - v).$$

Dosadíme-li za $r_1^2$ tuto hodnotu do rovnice pro $\acute{U}$, obdržíme

$$\acute{U} = \frac{2}{3} \pi r^2 v - \frac{1}{3} \pi v\,(2r - v)\,(r - v),$$

$$\acute{U} = \frac{2}{3} \pi r^2 v - \frac{2}{3} \pi r^2 v + \frac{1}{3} \pi v^2 r + \frac{2}{3} \pi r v^2 - \frac{1}{3} \pi v^3$$

$$\acute{U} = \pi v^2 r - \frac{1}{3} \pi v^3.$$

*Kulová úseč rovná se obsahem svým rozdílu obsahu válce, jehož poloměrem jest výška úseče a výškou poloměr koule a $^1/_4$ obsahu koule, jejíž poloměrem jest výška úseče.*

Vzorec $\acute{U} = \pi v^2 r - \frac{1}{3} \pi v^3$ možno vyjádřiti též

$$Ú = \frac{1}{3} \pi v^2 (3r - v),$$ ve kteréžto podobě se ho nejčastěji užívá.

*Obsah kulové úseče rovná se obsahu kužele o poloměru rovném výšce úseče a výšce rovné rozdílu z trojnásobného poloměru koule a výšky úseče.*

4. **Obsah kulové vrstvy** stanoví se rozdílem obsahů dvou kulových úsečí. Při tom slušno hleděti k tomu, jsou-li obě základny vrstvy na téže straně středu koule, nebo leží-li střed mezi oběma základnami.

**Úkoly:***) 1. Jak velký jest poloměr a obsah koule, jejíž povrch má *a)* 452·16 m², *b)* 28·26 cm² ($\pi = 3{\cdot}14$)?

2. Vypočítati poloměr, povrch a obsah koule, jejíž 4·2 m od středu vzdálený řez má 35·2 m obvodu.

3. Vypočítati poloměr, povrch a obsah koule, jejíž 8 cm od středu vzdálený řez má 113.04 cm² obsahu ($\pi = 3{\cdot}14$).

4. Jak velký jest poloměr a povrch koule, jež má *a)* 4851 cm³, *b)* 310.464 dm³ obsahu?

5. Vypočítati poloměr koule, jejíž 5 cm od středu vzdálený řez má se k hlavnímu řezu jako *144 : 169*.

6. Jak velký jest povrch i obsah koule, v níž jest obvod hlavního řezu o 60 cm větší než průměr?

7. Vypočítati povrch i obsah koule, jejíž v cm udaný poloměr hoví podmínce:

$$a) \quad \frac{6r - 5}{4} - \frac{2r - 1}{3} = 2;$$

$$b) \quad r - \sqrt{r^2 - 13} = 1.$$

8. Řez koule o poloměru 25 cm má 154 cm²; jak vzdálen jest od středu?

9. Dřevěná koule ponoří se ve vodě do hloubky $^4/_5$ průměru; vypočítati hutnost dřeva.

10. Válcový kotel složen jest z kolmého válce, 3 m dlouhého a dvou válec ten ukončujícími polokoulemi. Jak velký jest jeho povrch; i obsah, je-li 1 m vysoký?

11. Vypočítati povrch i obsah koule opsané krychli o hraně *a*.

12. Vypočítati povrch i obsah koule opsané pravidelnému osmistěnu o hraně *a*.

13. Dutá koule omezena jest povrchem koule opsané i vepsané krychli o hraně *a*. Jak velký jest její obsah.

---

*) V úkolech, kde není zvláštní hodnota pro $\pi$ udána, voliti jest $\pi = 3\,^1/_7$.

14. Součet povrchů dvou koulí $= 3850 \text{ cm}^2$, jejich poloměry jsou v poměru $3:4$; vypočítati obsahy řečených koulí.

15. Do rovnostranného válce o poloměru $r$ vepsána jest koule a kolmý kužel o výšce $2r$, jehož základnou jest spodní základna válce. Vypočítati poměr povrchů těchto těl.

16. Rozdíl povrchů 2 koulí $= 138{\cdot}2304 \text{ cm}^2$, součet jejich poloměrů $= 11$ cm. Vypočítati jejich poloměry ($\pi = 3{\cdot}1416$).

17. Poloměry dvou koulí liší se o 1 m, jejich povrchy o $62{\cdot}8 \text{ m}^2$ vypočítati jejich poloměry i obsahy ($\pi = 3{\cdot}14$).

18. Polokoule, kolmý válec a kolmý kužel mají stejné základny o poloměru $r$ a stejné výšky. Vypočítati poměr jejich povrchů i obsahů.

19. Kouli o poloměru $r$ vepsán jest rovnostranný válec a rovnostranný kužel. Vypočítati poměr povrchů i obsahů těchto těl.

20. Kouli o poloměru $r$ opsán jest rovnostranný válec a rovnostranný kužel. Který jest poměr povrchů i obsahů řečených těl?

21. Kouli o poloměru $r$ vepsán jest rovnostranný kužel a jí opsán jest rovnostranný válec. Vypočítati poměr povrchů i obsahů řečených těl.

22. Kouli o poloměru $r$ vepsán i opsán jest rovnostranný kužel. Vypočítati poměr povrchů i obsahů těchto 3 těl.

23. Vypočítati poměr obsahů koule a rovnostranného kužele, jsou-li jejich povrchy v poměru $1:3$.

24. Kruh o poloměru $r$ jest společnou základnou rovnostranného válce a kolmého kužele, jež mají stejný povrch; vypočítati obsah kužele.

25. Kolmý válec, jehož základna rovná se hlavnímu řezu koule o poloměru $r$, má s koulí tou stejný obsah. Vypočítati poměr povrchů válce a koule.

26. Vypočítati výšku a povrch úseče koule o poloměru $r$, je-li obsah její 2kráte tak velký jako obsah koule do ní vepsané.

27. Koule o poloměru $r$ rozdělena jest řezem, jenž půlí kolmý poloměr na 2 úseče. Do každé úseče vepsána jest největší koule. Který jest poměr součtu obsahů obou vepsaných koulí a obsahů těla omezeného všemi třemi plochami kulovými?

28. Řezem, jehož vzdálenost od středu jest $a)\ \frac{r}{2}$, $b)\ \frac{r}{3}$, $c)\ \frac{2}{3}r$, $d)\ \frac{3}{4}r$, rozdělena jest koule na dvě úseče. Vypočítati jejich (úplný) povrch, obsah a poměr povrchů i obsahů.

29. Obsah výseče kulové má $19625 \text{ cm}^3$. Poloměr koule má se k výšce vrchlíku jako $5:3$. Vypočítati poloměr, povrch i obsah koule ($\pi = 3{\cdot}14$).

30. Vypočítati povrch výseče kulové, má-li poloměr koule 15 cm a výška příslušného vrchlíku 6 cm.

31. Rovinný řez koule, jenž rovná se $0{\cdot}64$ hlavního řezu, jest základnou kužele $137{\cdot}984 \text{ cm}^3$ velikého, jehož temeno jest ve středu koule. Jak velký jest poloměr koule?

32. Ve které vzdálenosti od středu proříznuta jest polokoule o poloměru $r$ rovinou ku základně rovnoběžnou, rovná-li se vrchlík oddělené úseče součtu pásu a větší základny vrstvy. Vypočítati též obsah úseče i vrstvy.

33. Koule o poloměru $r$ rozříznuta jest dvěma vzájemně na sobě kolmými hlavními řezy. Vypočítati (úplný) povrch vzniklých čtvrtin kulových.

34. Jak velká jest výška a jak velký povrch výseče kulové, jež rovná se obsahem $^1/_8$ celé koule o poloměru $r$.

35. Úseč kulová jest 2 cm vysoká; poloměr její základny má 8 cm. Vypočítati poloměr koule, jejíž částí jest řečená úseč. (Je-li poloměr koule $x$, jest vzdálenost základny úseče od středu koule . . . . $x - 2$).

36. Plocha kulová rozdělena jest rovinným řezem na 2 vrchlíky, z nichž jest jeden 7krát (9krát) větší jako druhý. Jak jsou vysoké?

37. Jak velká jest 7 cm vysoká úseč kulová, jejíž poloměr základny má 21 cm?

38. 942 cm$^2$ veliký vrchlík jest 10 cm vysoký. Vypočítati poloměr koule a obsah úseče tomuto vrchlíku příslušné.

39. Koule o poloměru $r$ rozdělena jest dvěma spolu rovnoběžnými řezy na 2 úseče a jednu vrstvu. Vypočítati povrch a obsah těchto částí koule.

40. Polokoule o poloměru $r$ proříznuta jest rovinou ku základně rovnoběžnou uprostřed výšky. Základna úseče jest základnou kolmého kužele jí vepsaného a též základnou kolmého válce vzniklé vrstvě vepsaného. Vypočítati poměr oblin a poměr obsahů kužele a válce.

41. Jak vysoká jest úseč koule o poloměru $r$, jejíž obsah rovná se obsahu koule o poloměru rovném výšce úseče?

42. Jak vysoká jest úseč koule o poloměru $r$, rovná-li se její povrch (i se základnou) povrchu koule o poloměru rovném její výšce?

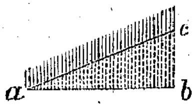
# Dodatek.

## O vyměřování pozemků prostředky nejjednoduššími a o kreslení jednoduchých plánů situačních.

§. 175. Pozemky, které se vyměřují, jsou na povrchu zemském a nejsou tudíž rovinné.

Má-li se nákres pozemku zhotoviti, zobrazí se vždy průmět jeho na vodorovnou rovinu.

Při stanovení průmětu pozemku stanoví se průměty důležitých bodů jeho obvodu. Při tom myslíme si každou i křivou mez pozemku složenou z přímek. Obraz průmětu pozemku v zmenšeném měřítku rýsovaný slove jeho **situační plán.**



Obr. 193.

Pozemky promítáme na vodorovnou průmětnu i proto, že výnosnost pozemku nezávisí na skutečné velikosti jeho povrchu, nýbrž na velikosti vodorovného průmětu; neboť rostliny rostou směrem svislým a nemůže jich na šikmé rovině, (jejíž průřezem buď *ac* obr. 193.), více růsti než na vodorovném jejím průmětě, jehož průřezem jest *ab*.

§. 176. **Vytyčování délek na poli.** Skutečné měření délky na poli předchází označení důležitých jejích bodů, což se buď kolíky, buď tyčemi tragovacími nebo praporečky stává.

K důležitým bodům délky počítají se její krajní body, a jsou-li tyto na poli od sebe tak vzdáleny, že od jednoho ke druhému zřetelně viděti nelze, i některé body mezilehlé; mimo to náležejí sem též průsečíky přijatých přímek pomocných. Určování takových bodů mezilehlých nazýváme **vytyčování délek.** Vytyčí-li se délka, musí ležeti značky všech její bodů (kolíky, praporečky, tyče tragovací) v téže svislé rovině.

**Stanoviti mezi krajními body délky, které označeny jsou tyčemi** *A* **a** *B*, **mezilehlý bod, který se má označiti tyčí** *C*.

Měřič postaví se několik kroků za jednu z krajních tyčí (na př. za tyč *B*), a pomocník (figurant) drží tyč *C* volně mezi dvěma prsty asi v tom místě, kde se mezilehlý bod určiti má; potom dává měřič pomocníkovi rukou znamení, aby tyč v pravo nebo v levo pošinoval, což tento činí tak dlouho, až ji měřič vidí ve směru tyčí *A* a *B*, při čemž hledí (vysíruje) vždy na téže straně tyčí *A* a *B*. Je-li tyč *C* v téže rovině vertikalní jako *A* a *B*, spustí ji pomocník volně na zem, načež ji svisle v zemi upevní. Visirování děje se vždy jedním okem.

Podobně vytyčují se též body, které leží v prodloužení dané délky.

§. 177. **Skutečné měření délek na poli** závisí na žádané přesnosti, na druhu přístrojů, jichž se má užiti, a na běhu daných délek.

**K stanovení vodorovného běhu** užívá se buď **krokvice** buď **vodovážky (libelly).** Zařízení a upotřebení krokvice i libelly známo jest z fysiky.

2. **K stanovení běhu svislého** užívá se **olovnice,** někdy též jednoduché **holi (těžnice)** asi 1·5 m dlouhé, z lehkého dřeva zhotovené, která dole těžkým, v ostrý hrot končícím kováním opatřena jest. Toto kování stanoví svislý běh holi, drží-li ji měřič nahoře volně mezi dvěma prsty. Olovnicí nebo těžnicí stanoví se průměty bodů na rovinu vodorovnou.

§. 178. **Je-li délka, která se měřiti má, vodorovná,** užívá se nejvíce těchto způsobů:

1. Při měření pouze přibližném postačí často **měření kroky** (×), při čemž se počítá $5 \times = 4$ m. Měřič, který dělá pravidelně stejně dlouhé kroky, docílí po jakémsi cviku též tímto způsobem dosti správných výsledků.

Toto měření slove **croquirování,** a na základě jeho kreslený náčrtek croquis.

2. Délky kratší, jako na př. rozměry pokojů, chodeb, menších dvorů a p. měří se **měřítkem metrickým,** které jest na dm a po případě na cm rozděleno.

3. Délky větší měří se buď **latí metrickou**, která bývá 2 m až 5 m dlouhá a **pásmem nebo řetězem měřickým.** Délka řetězu jakož i pásma měřického bývá 20 m. Často poslouží tu též tyče tragovací 2 m dlouhé, které dvojím nátěrem (bílým a červeným) opatřeny jsou tak, že tyto nátěry pravidelně se střídají a každý z nich 1 dm vysoký jest.

4. Ku měření délek vodorovných užívá se často **kružidla měřického** (obr. 194.) Toto skládá se z tyče $A$ a dvou do ní při $a$ a $b$ zadělaných hrotů.

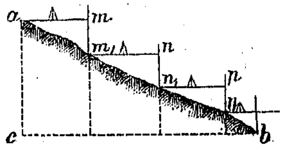

Obr. 194.

K pohodlnějšímu měření jest toto kružidlo rukovětí $R$ opatřeno. Vzdálenost hrotů $a$ a $b$ obnáší buď 2 m anebo 3 m. Rolníci hotoví si často kružidlo měřické ještě jednodušším způsobem v podobě kružidla, jehož se při rýsování užívá. Dolejší okované hroty jeho jsou 1 m od sebe vzdáleny a délka ramen (dvě pevně nahoře spojené tyče) jest asi 1 m.

Jak se užívá těchto přístrojů při měření?

Má-li se docíliti výsledků spolehlivých jest dobře touže délku několikráte měřiti a stanoviti číslo průměrné ze všech měření.

§. 179. **Při měření délek na půdě nakloněné** neměří se délka šikmá, nýbrž její vodorovný průměr. Měření děje se **stupňovitě** těmito přístroji: 1. latí metrickou rozdělením opatřenou; 2. krokvicí nebo libellou; 3. olovnicí nebo těžnicí. Měření počne se obyčejně od místa nejvyššího; způsob měření jest z obr. 195. patrný. Lať měřická musí býti vždy v poloze vodorovné, čehož se docílí krokvicí; koncový bod každé polohy její na př. $m$, $n$, $p$, promítne se buď těžnicí neb olovnicí do bodů $m_1$, $n_1$, $p_1$. Místo $ab$ měří se $bc$. Body $a$, $m$, $m_1$, $n$, $n_1$, $p$, $p_1$, $b$ musí ležeti v téže rovině svislé, za kteroužto příčinou buď délka $ab$ před měřením náležitě vytyčena.

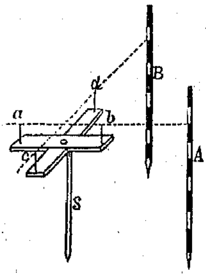



Obr. 195.

Jak se délky na jednom neb i na obou koncích nepřístupné měří, bylo v planimetrii ukázáno.

### §. 180. Měření úhlů na poli.

*a*) **Pravý úhel vytyčuje se křížem úhloměrným** (obr. 196.), jenž se skládá ze dvou asi 0·5 m dlouhých a 0·5 dm širokých, v pravém úhlu spojených prkének, z nichž jest každé na obou koncích svisle zaraženými hroty opatřeno. Při užití připevní se kříž úhloměrný šroubem na stojan *S*.




Obr. 196.

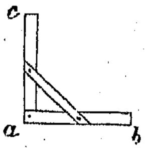
*b*) **Vztyčování kolmic křížem úhloměrným.**

Má-li se v daném bodu vytyčené přímky vztyčiti kolmice, postaví se stojan s křížem úhloměrným svisle nad tento bod, a otáčí se úhloměrný kříž tak dlouho, až přijdou dva hroty, na př. *a* a *b* do směru dané přímky, ve které se zarazila dříve tyč *A*. Potom visíruje se ve směru druhých dvou hrotů *c* a *d*, a zarazí se v tomto směru tyč *B*, která udává bod kolmice žádané. Kolmice tato stanovena jest dvěma body a může se vytyčiti.

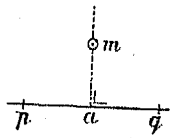
*c*) **Spouštění kolmic křížem úhloměrným.**

Aby se na poli stanovil průsečík přímky *ab* s kolmicí s bodu *c* na ni spuštěnou, stanoví se poloha tohoto průsečíku *p* napřed přibližně od oka; pak postaví se na toto místo úhloměrný kříž tak, aby hroty jednoho jeho prkénka byly ve směru délky *ab*, načež visíruje se přes hroty prkénka druhého.

Jde-li tato visúra (zaměření) bodem *c*, jest místo, do něhož byl stojan úhloměrného kříže zaražen, žádaným průsečíkem *p*; leží-li však bod *c* buď na pravo nebo na levo od řečené visúry, pošinuje se kříž úhloměrný na levo nebo na pravo, až přijde bod *c* do oné visúry. Při tom musí však hroty druhého prkénka ve směru přímky *ab* zůstati.




Obr. 197.

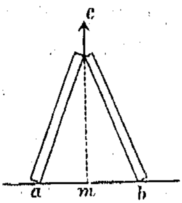



Obr. 198.

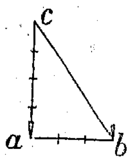
*d*) **Ku vztyčování a spouštění kolmic na půdě vodorovné** postačí často jednoduché **dvouramenné pravídko** (obr. 197.), jehož ramena jsou v pravém úhlu od sebe odchýlena a dostatečně (asi 1·5 m dlouhá).

Má-li se tímto pravídkem s bodu $m$ na $pq$ (obr. 198.) spustiti kolmice, napne se ve směru vytyčené délky $pq$ měřický řetěz (nebo silná šňůra). Pomocník šine pravídko po tomto řetězu, by rameno $ab$ zůstalo stále ve směru $pq$ a hledí při tom přes horní hranu $ac$ druhého ramena směrem k $c$. Vidí-li, zíraje přes hranu $ac$, bod $m$, jest $am$ žádanou kolmicí, jejíž délka se snadno může měřiti.

*e*) **Kolmici** (pravý úhel) možno vytyčiti dvěma stejně dlouhými měřickými latěmi (obr. 199). Tu naměří se od bodu $m$, v němž vztyčiti jest kolmici $am = bm$; k $a$ a $b$ přiloží se dvě stejně dlouhé latě, by hořejší jejich kraje k sobě přiléhaly. Potom jest $cm \perp ab$.



Obr. 199.

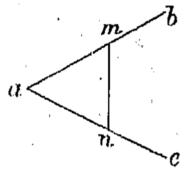


Obr. 200.

Místo latí možno užiti měřického řetěze, jehož kraje se v $a$ a $b$ kolíky připevní. Řetěz napne se právě ve středu a tím stanoví se bod $c$ kolmice.

Řetězem měřickým může se v $a$ vztyčiti kolmice (obr. 200.), že se kolem tohoto bodu $a$ napne řetěz, aby přišly na $ab$ 3 délkové jednotky, na $ac$ 4 a na $bc$ 5. V pravoúhlém $\triangle\, abc$ jest $ac \perp ab$.

*f*) Ku stanovení velikosti úhlu $bac$ (obr. 201.) naměříme na jeho ramena od vrcholu stejné délky na př. $am = an = 20\ m$, potom změříme $mn$. Na obrazu trojúhelníku $amn$ změříme úhel při $a$ úhloměrem nebo vypočítáme trigonometrií ze známých 3 stran trojúhelníku hledaný úhel.



Obr. 201.

§. 181. **Měření pozemků.** Dříve než rýsuje se plán pozemku zhotoví se příruční jeho skizza (náčrtek) takto: V každém vrcholu a záhybu obvodu pozemku zarazí se kolíky číslicemi nebo písmeny označené. Do náčrtku zkusmo zhotoveného napíší se k jednotlivým vrcholům tytéž značky, kterými byly příslušné kolíky označeny. Když byly jednotlivé délky měřeny a jejich rozměry do náčrtku zapsány, rýsuje se situační plán a počítá se obsah.

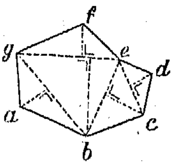
Meze pozemků bývají často křivočaré; při měření nahradí se vždy křivka čarou lomenou. Dle velikosti zakřivení lze větší nebo menší část křivky za přímku považovati.

Skutečné měření pozemku děje se rozmanitě.

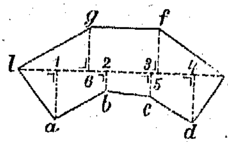
**Je-li pozemek v celé rozsáhlosti své přístupen** rozloží se, jak bylo v planimetrii ukázáno, buď na samé trojúhelníky, neb na lichoběžníky a trojúhelníky pravoúhlé.

*a*) Má-li se pozemek *abcdefg* (obr. 202.) **rozkladem na trojúhelníky** změřiti, zarazí se napřed do všech jeho vrcholů kolíky; po té udělá se jeho náčrtek a změří se strany každého trojúhelníku, kteréžto výměry se do náčrtku vepíší. Plán pozemků rýsuje se v měřítku zmenšeném, že se do něho rýsují jednotlivé trojúhelníky. Obsah pozemku se rovná součtu obsahů všech trojúhelníků.

Pro kontrolu, zdali se správně měřilo, jest dobře, vztyčí-li a změří-li se výšky těch trojúhelníků. Stopa výšky na půdici trojúhelníku stanoví se, je-li malá, pouze zkusmo, je-li však velká, dříve jmenovaným dvouramenným pravídkem pravoúhlým.



Obr. 202.



Obr. 203.

*b*) Má-li se pozemek *abcdefgh* (obr. 203.) **rozkladem na lichoběžníky a trojúhelníky pravoúhlé** změřiti, vytyčí se napřed délka mezi nejvzdálenějšími vrcholy *l* a *e* obsažená, a na ni stanoví se stopy kolmic s vrcholů daného pozemku spuštěných; potom změří se i vzdálenost těchto stop i délky kolmic a rýsuje se plán situační. Obsah počítá se způsobem známým.

K měření většího pozemku tímto způsobem odporučuje se tento postup: Měřič si zjedná 3 pomocníky a vezme ku měření tyto přístroje: řetěz měřický, pásmo měřické, dvouramenné pravoúhlé pravídko, dostatečný počet kolíků a několik tyčí tragovacích. Postup práce jest následující: Pomocníci vykolíkují daný pozemek a měřič udělá si jeho náčrtek. Po té upevní se jeden konec řetězu kolíky při $l$ a druhý konec pevně napjatého řetězu ve směru $lc$. Jeden pomocník pošinuje po napjatém řetězu dvouramenné pravídko, při čemž zaměřuje přes hranu jeho ramena, které k řetězu nepřiléhá, na body obvodu pozemku; sjednotí-li se bod obvodu pozemku s touto visurou, jest vrchol dvouramenného pravídka stopou té které kolmice; délku její změří druzí dva pomocníci pásmem měřickým a vzdálenost její stopy od bodu $l$ odečte měřič na napjatém řetězu. I změřenou délku kolmice i délku vzdálenosti její stopy napíše měřič do své skizzy.

Tímto způsobem pokračuje se, až se stanoví délka každé kolmice jakož i vzdálenost její stopy od bodu $l$.

*c*) **Má-li se měřiti pozemek částečně křivkou omezený** (obrazec 204.), napne se ve směru $ab$ řetez měřický a ve stejných od sebe vzdálenostech měří se výšky $y$, $y_1$, $y_2$, .... $y_{n-1}$.

Těmito výškami rozdělí se celý pozemek na 2 trojúhelníky a ostatní lichoběžníky. — Vzdálenost $m$ výšek $y_1$, $y_2$ .... volí se dle zakřivení meze $ab$; je-li poloměr zakřivení jen poněkud větší, volí se $m$ rovno buď 5 neb 10 m. Označí-li se obsah toho pozemku $p$ a počet dílů, na něž byl rozdělen $n$, takže jest délka $ab = n \,.\, m$ a obsahy jednotlivých těchto dílů $p_1$, $p_2$ ..... $p_n$, jest

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots . p_n$$

$$p = \frac{my_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} m + \frac{y_2 + y_3}{2} m + \ldots$$

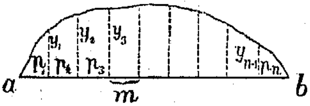
$$+ \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{y} m + \frac{y_{n-1}}{2} m$$

$$p = \frac{m}{2} (y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + \ldots . + y_{n-1} + y_{n-1});$$

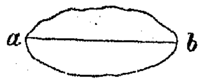
značí-li $\Sigma\,(y)$ součet všech $y$, jest

$$p = m\,\Sigma\,(y).$$

*d*) má-li se počítati obsah **pozemku všestranně křivkou omezeného,** může se daný pozemek rozložiti délkou $ab$ (obr. 205.) na dva pozemky tvaru v obr. 204. naznačeného a měří se

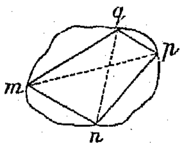



Obr. 204.

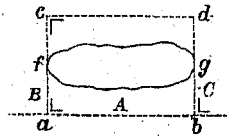



Obr. 205.

způsobem tam udaným; nebo stanoví se čtyři hlavní body (po případě třeba 3) *mnpq* (obr. 206.), které náležitě spojeny čtyřúhelník stanoví. Plocha pozemku skládá se z tohoto čtyřúhelníku, k jehož vypočítání délka jeho stran a jedna úhlopříčka měřiti se musí, a ze čtyř částečně křivkami omezených ploch, které se způsobem dříve uvedeným změří.




Obr. 206.




Obr. 207.

*e*) Ku **měření pozemku, který jest uprostřed nepřístupný,** odporučuje se tento způsob:

Napřed traguje se (obr. 207.) přímka *A* vně daného pozemku ležící ; na ni vztyčí se dvě kolmice *B* a *C* tak, aby se dotýkaly meze pozemku. V libovolném bodu jedné z nich, na př. v bodě *c* vztyčí se kolmice *cd*. Tím obdrží se obdélník *abcd*. Má-li se počítati obsah tohoto pozemku, vypočítá se dříve obsah obdélníku a od tohoto odečtou se obsahy oněch jeho dvou částí, které mimo daný pozemek leží. Obsahy těchto částí stanoví se způsobem známým.

## §. 182. Základní pravidla při kreslení situačním.

**Plán situační jest zobrazení vodorovného průmětu ne příliš velké části povrchu zemského se všemi na ní se nalézajícími pozemky, budovami atd. v měřítku zmenšeném.**

Měřítko se zmenšuje dle účelu, k jakému se plán zhotovuje. Má-li plán situační poskytnouti pouze všeobecného přehledu krajiny, t. j. mají-li na něm býti udány pouze nejdůležitější body: pahorky, cesty, potoky atd., jest měřítko značně zmenšené.

Při kreslení plánů jednotlivých statků, pozemků atd., z nichž se i obsah těchto pozemků vypočítává, béře se měřítko poněkud větší; při plánech katastralních odpovídá 1 cm ve výkresu 30 m ve skutečnosti.

Aby byl plán situační každému srozumitelný, přijaty byly k označování rozličných v přírodě se vyskytujících předmětů zvláštní značky a barvy, jimiž se přirozená barvitost předmětů těchto napodobuje.

Způsoby, kterými se nejčastěji v přírodě se vyskytující předměty označují, jsou v následujícím udány.

1. **Cesty.** Cesty zobrazují se čarami: **Silnice říšské** označují se čtyřmi plnými rovnoběžkami, z nichž jsou vnitřní dvě od sebe vzdálenější a pokládají se karmínem; **silnice okresní** dvěma plnými rovnoběžkami a pokládají se sepií; **cesty vozové** dvěma rovnoběžkami málo od sebe vzdálenými, z nichž se jedna tečkuje, a pokládají se sepií; **pěšiny** čarami tečkovanými a pokládají se gummiguttou.

2. **Stromy, keře a lesy.** Tyto předměty zobrazují se způsobem německým v průmětu svislém (nikoli jako ostatní předměty v průmětu vodorovném) i s patřičnými stíny. Při označování stromů beře se zvláštní zřetel na stromy listnaté a jehličnaté. Půda lesu položí se napřed rozředěnou tuší a tento šedý podklad po uschnutí rozředěnou měděnkou; jednotlivé na půdě lesní naznačené stromy položí se mimo to ještě mitisovou zelení. Způsobem francouzským zobrazují se vodorovné průměty těchto předmětů s vrženými jejich stíny. Obraz jedle na př. vypadá takto: Několika krátkými paprsky o společném středu naznačen jest její půdorys; vržený stín jest přímka, jejíž část jest po obou stranách šikmými příčkami (jako při zobrazování šípu) opatřena.

3. **Plodná půda.** Obrazy polí pokládají se nejvýhodněji barvou tabákovou (která se vařením tabáku ve vodě obdrží), do níž se něco karmínu přimíchá, anebo barvou, kterou smíšením karmínu s gummiguttou obdržíme.

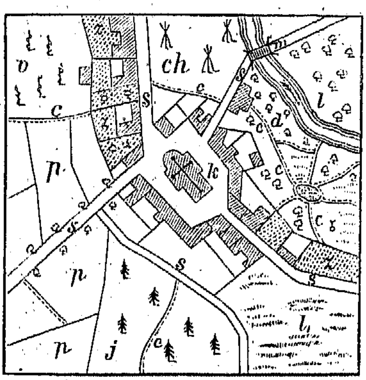
Meze jednotlivých pozemků (polí) vytahují se plnými čarami. Obrazy **vinic a chmelnic** pokládají se týmže způsobem jako pole a mimo to označují se v obrazech vinic jednotlivé keře vína svislými přímkami (tyčemi), přes které se kreslí vlnité čáry; v obrazech chmelnic naznačují se hromádky tyčí chmelových třemi se protínajícími přímkami. Obrazy **zahrad** se označují buď tečkovanými rovnoběžkami v plánech nekolorovaných anebo se pokládají šťávnou zelení; v obrazech **zahrad ovocných** vyznačí se též stromy ovocné způsobem dříve naznačeným. **Louky** pokládají se rozředěnou měděnkou, jíž se něco gummigutty přimísí, a mimo to naznačuje se tráva skupinami z jemných krátkých čárek.

4. **Vody.** Plochy, jimiž se vody zobrazují, pokládají se berlínskou modří (dosti rozředěnou) a mimo to naznačí se šípem směr toku.

5. **Stavby.** Obrazy zdí, tedy i obrazy budov kamenných pokládají se karmínem a obrazy dřeva (budov dřevěných) barvou žlutou.

V plánech nekolorovaných se budovy kamenné čárkují, kdežto budovy dřevěné se nečárkují.

**Veřejné budovy,** jako kostely, školy atd. pokládají se barvou ráznější (položí se dvakráte); u kostelů dělá se mimo to uprostřed černý kříž.




Obr 208.

V obr. 208. značí *S* silnice okresní, *c* cesty, *m* most, *p* pole, *v* vinice, *ch* chmelnice, *j* jehličnatý les, *l* listnatý les, $l_{,}$ louku, *d* sady, *z* zahrady, *k* kostel.

## Část desátá.

# Úkoly k opakování.

### (Pro IV. ročník.)

1. Jak velký jest obsah 39 cm vysokého obdélníku, jehož úhlopříčka jest o 9 cm delší než půdice?

2. V obdélníku jsou $^2/_5$ úhlopříčky o 9 m delší než její $^5/_{17}$; $^3/_4$ šířky jsou o 11 m delší než její $^4/_9$. Jak velký jest jeho obvod?

3. Jak dlouhá jest úhlopříčka obdélníku 39 m širokého, je-li obdélník ten o 16 m$^2$ menší než čtverec, jehož obvod má 224?

4. V cm udaná šířka *š* a délka *d* obdélníku hoví podmínce:

$$\frac{2}{3}š - \frac{1}{10}d = 8; \quad \frac{š + 9}{15} + \frac{d - (2š - 10)}{7} = 17;$$

vypočítati jeho úhlopříčku a též stranu čtverce, jehož obsah jest o 92 cm$^2$ menší, než obsah daného obdélníku.

5. Oč jest obdélník 24 m dlouhý a 10 m široký menší než čtverec, nad jeho úhlopříčkou sestrojený?

6. Zvětší-li se každá strana obdélníku o 8 m, jsou jeho rozměry v poměru $2 : 3$; zmenší-li se však každá strana o 8 m, jest poměr jeho rozměrů $1 : 2$. Vypočítati jeho rozměry a též obvod rovně velkého rovnoramenného trojúhelníku, jehož půdice jest ku výšce v poměru $5 : 6$.

7. Obvod obdélníku má 248 m; jeho délka jest ku šířce v poměru $24 : 7$. Vypočítati obvod a obsah kruhu jemu opsaného. ($\pi = 3·14$.)

8. Rozdíl obsahů 2 čtverců = 13·35 m$^2$, součet 2 jejich stran rovná se 8·9 m; vypočítati jejich obvody.

9. Obsahy 2 čtverců liší se o 4·8 m$^2$, jejich strany liší se o 1 m; jak dlouhé jsou tyto strany?

10. Kdyby byla každá strana čtvercové podlohy o 1·5 m delší, byl by její obsah o 17·25 m$^2$ větší; jak jest dlouhá?

11. Přepona pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku má délku $a$. Vypočítati jest obsah a úhlopříčku čtverce, jenž má s řečeným trojúhelníkem stejný obvod.

12. Jak velký jest obvod pravoúhlého 1970 m² velikého trojúhelníku, jehož odvěsna má 140 m?

13. V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsna má délku $a$, spojen jest střed odvěsny s protějším vrcholem. Vypočítati obsah a úhlopříčku čtverce nad touto spojnicí sestrojeného a srovnati obsah ten s obsahem trojúhelníku.

14. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku 330 m² velikého jsou v poměru $1 : 5\frac{5}{11}$; vypočítati jeho obvod.

15. Přepona pravoúhlého trojúhelníku má 170 m; jeho odvěsny jsou v poměru $1\frac{1}{11} : 2\frac{1}{3}$; jak dlouhé jsou tyto odvěsny?

16. V pravoúhlém trojúhelníku, jehož přepona má 30 m, jest čtverec nad prvou odvěsnou sestrojený o 252 m² větší než čtverec sestrojený na druhou odvěsnou. Vypočítati jeho obvod.

17. Kolmice s pravého úhlu na přeponu spuštěná jest o 56 cm delší než jeden a o 105 cm kratší než druhý úsek přepony. Vypočítati délku této kolmice a strany trojúhelníku.

18. Výškou způsobené úseky přepony pravoúhlého trojúhelníku mají $4\frac{1}{2}$ m a 8 m; jak velký jest jeho obvod i obsah?

19. Poměr úseků přepony pravoúhlého trojúhelníku výškou způsobených jest 16 : 9; výška sama má 12.6 m. Vypočítati strany trojúhelníku.

20. Výška pravoúhlého trojúhelníku má délku $a$, jeden jí tvořený úsek přepony délku $\frac{3}{4}a$; vypočítati obvod trojúhelníku.

21. Výška pravoúhlého trojúhelníku má 360 m, jeden úsek přepony 81 m; jak velký jest obvod trojúhelníku?

22. Odvěsna pravoúhlého trojúhelníku má 136 m, výška 120 m; vypočítati délku jeho stran.

23. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku jsou v poměru $3 : 4$, výška jeho má 48 m; jak dlouhé jsou jeho strany. (Jsou-li odvěsny $3x$ a $4x$, vypočítej hodnotu pro přeponu; ze 2 sobě rovných hodnot pro obsah stanov $x$.)

24. Dva rovně vysoké kosodélníky mají 104 m² a 72 m² obsahu, součet jejich půdic $= 22$ m; vypočítati tyto půdice a výšku.

25. 2 rovnoběžníky o stejných půdicích mají 216 m² a 270 m² obsahu, druhý jest o 3 m vyšší než první; vypočítati délku půdice a výšek.

26. Kosodélník má 56 m obvodu; ze 2 sousedných stran jest jedna o 2 m delší než druhá, úhlopříčka má 14 m; jak velký jest jeho obsah?

27. Jak velký jest obvod kosočtverečné desky, v níž mají obě úhlopříčky dohromady 94 m; $^1/_8$ prvé se $^1/_{14}$ druhé úhlopříčky mají 8 m?

28. Vypočítati obvod kosočtverce 2016 $m^2$ velikého, jehož úhlopříčka má 32 m.

29. Úhlopříčka kosočtverce má 56 m; polovička druhé úhlopříčky jest o 8 m kratší než strana. Jak velký jest jeho obvod i obsah. (Druhá úhlopříčka buď $2x$.)

30. Nad každou stranou čtverce, jenž má obsah $a^2$, sestrojen jest rovnostranný trojúhelník. Vypočítati obvod a obsah čtverce, jehož vrcholy jsou temena řečených trojúhelníků.

31. Dán jest pravid. šestiúhelník o straně $a$; nad jeho stranami sestrojeny jsou pravid. trojúhelníky. Vypočítati obsah a obvod vzniklé hvězdice a kruhu jí opsaného.

32. Výška rovnostranného trojúhelníku rovná se úhlopříčce čtverce o straně $a$; vypočítati jeho obsah a srovnati jej s obsahem pravid. trojúhelníku o straně $a$.

33. Jak dlouhá jest strana pravid. trojúhelníku, jenž rovná se obsahem svým součtu 2 rovnostranných trojúhelníků, z nichž má prvý stranu $a$, strana druhého rovná se průměru kruhu prvému trojúhelníku opsaného?

34. Zvětší-li se strana rovnostranného trojúhelníku o 4 m, zvětší se jeho obsah o 62·352 $m^2$; jak dlouhá jest jeho strana? ($\sqrt{3} = 1·732$.)

35. Ze 2 úhlů trojúhelníku jest $^1/_5$ prvého o $2^0$ větší než $^1/_8$ druhého; $^2/_{11}$ prvého a $^1/_9$ druhého mají dohromady $18^0$. Jak velké jsou úhly tohoto trojúhelníku?

36. 2 úhly trojúhelníku jsou v poměru $2 : 3$, třetí rovná se $^5/_{11}$ svého úhlu vedlejšího; jak jsou velké?

37. Vypočítati úhly rovnoramenného trojúhelníku, rovná-li se $^1/_{13}$ ($^1/_{10}$) úhlu při vrcholu $^1/_{16}$ ($^1/_{13}$) úhlu při půdici.

38. Jak velký jest obvod rovnoramenného trojúhelníku, jenž má 108 $m^2$ (360 $cm^2$) obsahu a jehož výška $= {^2/_3}$ ($^{20}/_9$) půdice?

39. Rovnoramenný trojúhelník má 98 m obvodu; kdyby byla každá strana o 15 m delší, byla by půdice k ramenu v poměru $3 : 4$; jak velký jest jeho obsah?

40. Půdice rovnoramenného trojúhelníku má 32 cm; součet výšky a ramena 128 cm; vypočítati jeho obsah.

41. Vypočítati obsah rovnoramenného trojúhelníku, v němž má se půdice k výšce jako $3 : 2$ a rameno má 35 cm.

42. Dva sobě podobné trojúhelníky mají 128 $m^2$ a 200 $m^2$ obsahu, součet jejich půdic $=$ 36 m; vypočítati jejich půdice i výšky.

43. V cm udané strany $a$ a $b$ trojúhelníku hoví podmínce:

$$\frac{a-1}{4} - \frac{b+6}{15} = 1, \quad \frac{2a+6}{5} + \frac{b-4}{7} = 13;$$

třetí strana $c$ jest arithmetickým průměrem stran $a$ a $b$; vypočítati jeho obsah.

44. V dm udané strany trojúhelníku hoví podmínce: $3x - y = 2$, $2x + 3z = 146$, $2y - z = 34$; jak velký jest jeho obsah?

45. Strany trojúhelníku mají 51 m, 84 m a 117 m; nejdelší strana jemu podobného trojúhelníku má 78 m; vypočítati obsah obou trojúhelníků.

46. Strany $\triangle$ mají 2·6 m, 2·8 m a 3 m; obvod jemu podobného $\triangle$ má 6·3 m; vypočítati jeho strany i obsah.

47. V daném pravoúhlém trojúhelníku rovná se součet odvěsen 51 m, jejich rozdíl 21 m. Vypočítati strany rovnoramenného trojúhelníku, jehož výška $= 1/3$ delší odvěsny, obvod obvodu a obsah $6/5$ obsahu řečeného trojúhelníku.

48. Půdice rovnoramenného lichoběžníku jsou v poměru $5 : 2$, rameno má 5 dm a výška 4·8 dm; vypočítati jeho obvod i obsah.

49. V cm vyjádřené půdice $z$ a $z_1$ pravoúhlého lichoběžníku, jehož kolmé rameno rovná se delší půdici, hoví podmínce:

$$\sqrt{z+1} : \sqrt{z_1+5} = 3 : 2, \quad 2\sqrt{z+1} + 3\sqrt{z_1+5} = 36;$$

vypočítati jeho obvod i obsah.

50. Rovnoramenný lichoběžník má 160 m obvodu, jeho rameno jest o 18 m kratší než spodní a o 6 m delší než vrchní půdice; vypočítati jeho strany a obsah.

51. Vypočítati obsah lichoběžníku, jehož spodní půdice rovná se úhlopříčce čtverce o straně $a$, vrchní půdice výšce rovnostranného trojúhelníku o straně $a$ a výška střední příčce.

52. Lichoběžník, jehož delší půdice jest $a$, výška $v$, rozdělen jest střední příčkou tak, že jest spodní část 2krát tak velká jako vrchní; jak dlouhá jest vrchní půdice?

53. V rovnoramenném lichoběžníku má spodní půdice 42 m, výška 24 m a úhlopříčka 40 m; vypočítati jeho obvod i obsah.

54. Vypočítati jest poměr obsahů částí na něž rozdělen jest lichoběžník o půdicích $a$ a $b$ o výšce $v$ střední příčkou.

55. Půdice rovnoramenného lichoběžníku mají $29\,1/4$ m a $18\,3/4$ m; úhlopříčka má 25 m; vypočítati jeho výšku, rameno a obsah.

56. Rovnoramenný lichoběžník, jehož rameno má 17 m a výška 15 m rovná se svým obsahem rovnoramennému trojúhelníku, jehož obvod má 100 m a půdice jest o 2 m kratší než rameno. Vypočítati jest $a$) rozměry a obsah trojúhelníku, $b$) obvod lichoběžníku.

57. Kolik stran a úhlopříček má pravidelný mnohoúhelník, jehož vnitřní úhel jest $a$) 11krát tak velký, jako vnější, $b$) o $120^\circ$ větší než úhel vnější?

58. Vypočítati obsah pravid. šestiúhelníku, jehož strana rovná se úhlopříčce čtverce o straně $a$. Jak velký jest obvod a obsah kruhu tomuto šestiúhelníku opsaného?

59. V prav. mnohoúhelníku, jehož strana má délku $a$, jest vnitřní úhel 2krát tak velký, jako vnější; kolik má stran, kolik úhlopříček a jak velký jest jeho obsah?

60. Železnice přechází do směru, jenž svírá s původním směrem úhel $45^0$, obloukem 1320 m dlouhým. Jak velký jest poloměr zakřivení? ($\pi = 3^1/_7$.)

61. Části při vrcholech pravid. šestiúhelníku o straně $a$ odříznuty jsou výsečemi kruhovými o poloměru $\frac{a}{3}$. Vypočítati obvod a obsah zbylé plochy.

62. Tři rovně velké kruhy o poloměru $r$ dotýkají se vzájemně vně; vypočítati obsah plochy omezené většími oblouky jejich obvodů. (Oblouky ty leží vně trojúhelníku centralami omezeného.)

63. Tři kruhy o poloměrech $r$, $\frac{r}{2}$, $\frac{2}{3}r$ dotýkají se vzájemně vně; vypočítati $a$) obsah trojúhelníku jejich střednými omezeného, $b$) délku oběma větším kruhům společné tečny vnější.

64. Kolem vrcholů pravid. šestiúhelníku o straně $a$ opsány jsou vně jeho plochy položené oblouky o poloměru $\frac{a}{2}$, sáhající až k jeho stranám. Vypočítati obsah těmito oblouky omezené plochy.

65. Dle Albrechta Dürrera († 1525) rovná se kruh obsahem svým přibližně čtverci, jehož úhlopříčka rovná se $^5/_2$ jeho poloměru. Kterou hodnotu má při tomto předpokládání $\pi$?

66. Čtverci o straně $a$ vepsán jest kruh, kruhu vepsán jest čtverec a tomuto jest vepsán kruh. Menšímu z řečených kruhů vepsán jest opět čtverec a tomuto opět kruh. Vypočítati obsah mezikruží obvodem největšího a nejmenšího kruhu omezeného a poměr částí, na které jest toto mezikruží třetí kružnicí rozděleno.

67. Kruhu o poloměru 50 cm vepsán jest rovnoramenný trojúhelník, jehož půdice jest 14 cm od středu vzdálena. Vypočítati jest obvod trojúhelníku a obsah kruhu ($\pi = 3{\cdot}14$).

68. Středné 3 vzájemně vně se dotýkajících kruhů mají $a$) 17 cm, 39 cm, 44 cm; $b$) 10 cm, 17 cm, 21 cm. Vypočítati jest poloměry kruhů a obsah trojúhelníku centralami omezeného.

69. Tři kruhy o poloměrech 14 cm, 16 cm, 12 cm dotýkají se vzájemně vně. Vypočítati jest obsah trojúhelníku jejich centralami omezeného.

70. Čtverci o straně $a$ opsán jest kruh a nad jeho stranami sestrojeny jsou polokruhy. Jak velký jest součet obsahů vzniklých měsíčků?

71. Průměr kruhu, jehož obvod má 78·5 cm, rozdělen jest na 2 díly, z nichž jest prvý o 7 cm delší než druhý. V bodě dělícím vztyčena kolmice a krajní její bod spojen s krajními body průměru. Vypočítati obvod vzniklého trojúhelníku ($\pi = 3{\cdot}14$).

72. Ze dvou soustředných kruhů jest prvý $1^9/_{16}$krát tak velký jako druhý; součet jejich poloměrů rovná se $31^1/_2$ m. Vypočítati obsah mezikruží obvody řečených kruhů omezeného ($\pi = 3^1/_7$).

73. Nad stranami pravid. šestiúhelníku, jež mají délku $a$, sestrojeny jsou polokruhy. Kolem středu šestiúhelníku opsán jest kruh, jehož obvod rozpoluje kolmice na strany šestiúhelníku vztyčené. Vypočítati obsah plochy sestrojenými polokružnicemi a obvodem kruhu omezené.

74. Kolem vrcholu rovnostranného trojúhelníku o straně $a$ opsán jest poloměrem rovným $^1/_2$ výšky trojúhelníku kruh a k němu rýsovány jsou z protějšího vrcholu tečny. Vypočítati obsah kruhu a délku tečny.

75. Jak velká jest výseč kruhu o poloměru 16 cm, jejíž oblouk má $11^\circ\ 15'$? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

76. Jak velký jest poloměr kruhové výseče 9·42 cm² veliké, jejíž oblouk má $13^\circ\ 20'$? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

77. Dva kruhy o poloměrech $r$ a $\frac{r}{2}$ dotýkají se vzájemně vně; vypočítati $a$) délku společné tečny, $b$) obsah pravid. šestiúhelníku menšímu a pravid. trojúhelníku většímu z nich vepsaného.

78. Ke kruhu o poloměru $r$ rýsovány jsou z bodu, jehož vzdálenost od středu jest $2r$, tečny; kolem tohoto bodu opsán jest oblouk, jež spojuje body dotyčné. Jak dlouhý jest tento oblouk a jak dlouhá jest strana pravid. trojúhelníku, jenž rovná se svým obsahem deltoidu řečenými tečnami a jim příslušnými poloměry omezeného?

79. Z bodu vně kruhu o poloměru $r$ položeného rýsovány jsou tečny, jež svírají pravý úhel; jak jsou dlouhé a která jest vzdálenost tohoto bodu od středu. Vypočítati též obsah úsečí, na něž rozdělen jest kruh tětivou spojující body dotyčné.

80. Kolem vrcholů čtverce o straně $a$ opsány jsou kruhy, jež dotýkají se vzájemně vně. Vypočítati jest $a$) obsah plochy mezi těmito kruhy obsažené (čtyřúhelník omezený oblouky), $b$) obvod a obsah kruhu řečeným kruhům opsaného.

81. Vnitřní kruh mezikruží 392·5 cm² velikého má 62·8 cm obvodu; jak široké jest mezikruží? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

82. Mezikruží 141·3 cm² veliké jest 3 cm široké; vypočítati oba poloměry. ($\pi = 3{\cdot}14$.)

83. Kruhu $1962^1/_2$ cm² velikému vepsán jest deltoid, jehož hlavní úhlopříčka rozdělena jest úhlopříčkou vedlejší v poměru $9 : 16$. Vypočítati jeho obvod i obsah. ($\pi = 3{\cdot}14$.)

84. Ke kruhu, jehož obvod má 132 m, rýsována jest tečna, jež jest o 8 cm kratší než vzdálenost bodu, z něhož vychází, od středu. Jak jest dlouhá? ($\pi = 3^1/_7$.)

85. V polokruhu 157 cm² velikém rýsován jest pravoúhlý trojúhelník, jehož výška dělí průměr v poměru $9 : 16$. Jak velký jest obvod trojúhelníku? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

86. Kruhový kotouč složen jest ze 2 stejně těžkých výsečí, jedné železné, druhé měděné. Kolik stupňů má každá výseč, je-li měrná váha železa 7·2 a mědi 8·8?

87. Dán jest trojúhelník o stranách $a$, $b$, $c$. Nad stranou $a$ sestrojený čtverec má 169 cm² a nad stranou $b$ sestrojený polokruh 77 cm² obsahu. Nad $c$ jako přeponou sestrojen jest pravoúhlý 54 cm² veliký trojúhelník, jehož odvěsny jsou v poměru $3 : 4$. Vypočítati obvod a obsah daného trojúhelníku. ($\pi = 3^1/_7$.)

88. V lichoběžníku 448 m² velikém jest spodní půdice $2^1/_4$krát, vrchní půdice $1^1/_4$krát tak velká jako výška. Vypočítati jeho půdice a výšku a též obvod kruhu, opsaného obdélníku, jehož rozměry rovnají se výšce a vrchní půdici lichoběžníku.

89. Polokruhu 628 m² velikému vepsán jest pravoúhlý, 16 m vysoký trojúhelník. Vypočítati jeho obsah. ($\pi = 3·14$.)

90. Kruhu o poloměru 25 cm vepsán jest čtyřúhelník, jehož úhlopříčka $ac$ jde středem. Strany, jež vycházejí z vrcholu $a$ mají 30 cm a 48 cm. Vypočítati obvod a obsah řečeného čtyřúhelníku.

---

91. V cm udané rozměry $š$ a $d$ základny pravoúhlého rovnoběžnostěnu hoví podmínce:

$$\frac{2š+3}{7}+\frac{15-d}{3}=4,\quad \frac{4d-3}{9}-\frac{2š-4}{7}=3;$$

jeho úhlopříčný řez má 300 cm². Vypočítati jeho povrch.

92. Pravoúhlý rovnoběžnostěn má 1140 m² povrchu, jeho stěny jsou v poměru $2 : 5 : 12$, vypočítati jeho obsah.

93. Jak dlouhá jest hrana krychle, jejíž povrch by byl o $55^1/_2$ m² větší než jest, kdyby byla hrana o $^1/_2$ m delší?

94. Povrch pravoúhlého rovnoběžnostěnu se čtvercovou základnou, jehož výška jest $2^1/_2$ ($2^2/_5$) krát větší než strana základny, má 432 cm² (290 dm²); vypočítati jeho obsah.

95. Dán jest pravoúhlý rovnoběžnostěn 5 m široký a 15 m vysoký. Kdyby byla jeho délka o 2 m kratší než jest, měl by jeho povrch 550 m². Vypočítati jeho délku a úhlopříčný řez.

96. Základnou kolmé hranolové desky, mající 3060 cm³ obsahu, jest trojúhelník o stranách 41 cm, 51 cm a 58 cm. Jak jest vysoká?

97. Rozměry pravoúhlého rovnoběžnostěnu jsou v poměru $1 : 2 : 3$; rozdíl 3násobné šířky a délky jest o 35 cm menší než 2násobná výška. Vypočítati jeho obsah.

98. Kolik váží litá krychle o hraně 2 dm, jež obsahuje 36·5 kg cínu (měrná váha 7·3) a mimo to olovo (měr. v. 11·5)?

99. Kterou cenu má stříbrná 2 cm vysoká deska, má-li kosočtverečná její základna 68 cm obvodu a 16 cm dlouhou úhlopříčku (1 kg stříbra stojí 180 korun; měrná váha = 10·5)?

100. Dány jsou 3 krychle, hrana první jest $a$, hrana druhé rovná se úhlopříčce stěny a hrana třetí tělesné úhlopříčce prvé krychle. Vypočítati povrch a obsah řečených krychlí a též poměr jejich povrchů i obsahů.

101. V pravoúhlém 1728 dm$^3$ velikém rovnoběžnostěnu jest šířka ku délce v poměru $3:4$, výška rovná se $^4/_3$ délky. Na hranolu tom spočívá hranolová deska, jež má 444 dm$^3$ obsahu. Základna desky přečnívá základnu hranolu všude o $^1/_2$ dm. Vypočítati povrch této skupiny těl.

102. Do částečně vodou naplněné nádoby, jež má tvar pravoúhl. rovnoběžnostěnu, jehož základna má 9·2 dm obvodu $^1/_{10}$ a délky jest o 1 cm větší než $^1/_8$ šířky, ponoří se úplně krychle o hraně 1·2 dm. Oč vystoupí voda v nádobě?

103. Kolik železných krychlí (měr. v. 7·2) o hraně 4 cm ulije se ze 345·6 kg. železa?

104. Vypočítati obsah prav. rovnoběžnostěnu, jehož v cm. udané rozměry hoví podmínkám:

$$a)\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \quad \sqrt{x}+\sqrt{z}=11, \quad \sqrt{y}+\sqrt{z}=9;$$

$$b)\ x+y+z=10, \quad x+2y+3z=22, \quad 3x+y+2z=21.$$

105. Měrná čísla obsahů 3 krychlí tvoří spojitou srovnalost; druhá jest o 56 cm$^3$ a třetí o 504 cm$^3$ větší než první; vypočítati tyto obsahy a hrany i povrchy krychlí těch.

106.) Z krychle o hraně $a$ odříznuty byly u svislých hran svislými rovinami trojboké hranoly, že zbyl osmiboký hranol se souměrnou základnou, jejíž na hranách krychle položené strany mají délku $^2/_3$ $a$. Vypočítati povrch tohoto hranolu.

107. Základnou kolmého 6000 cm$^3$ velikého hranolu jest pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou v poměru $5:12$ a přepona má se ku výšce hranolu jako $13:25$. Vypočítati jeho rozměry (z hodnot $5x$ a $12x$ vypočítej předem hodnotu pro přeponu).

108. Kolmý, šestiboký hranol s pravid. základnou o straně $a$ a výšce $2a$ provrtán jest tak, že tvoří otvor souosý kolmý trojboký hranol s prav. základnou o straně $\frac{a}{3}$. Jak velký jest obsah vzniklé roury?

109. Krychle o hraně $a$ proříznuta jest rovinou stanovenou krajními body hran, jež vybíhají z téhož vrcholu. Vypočítati velikost řezu a obou částí krychle.

110. Na hranolové 22 cm vysoké desce se čtvercovou základnou o straně $1^3/_4$ m spočívá s ní stejně vysoká deska, jejíž hrany při základně jsou od hran základny spodní desky všude $22^1/_2$ cm. vzdáleny.

Na této desce spočívá kolmý 2 m vysoký jehlan, jehož čtvercová základna má 36 dm obvodu. Vypočítati povrch této skupiny.

111. Pobočné hrany kolmého jehlanu se čtvercovou základnou o straně $a$ mají délku $\frac{3}{2}a$; jak jest velký jeho povrch i obsah?

112. Kolmý jehlan se čtvercovou základnou má 800 $dm^2$ povrchu; pobočný jeho povrch jest o 32 $dm^2$ větší než dvojnásobná základna. Vypočítati jeho obsah.

113. Síť pravidelného čtyřstěnu tvoří rovnostranný trojúhelník o výšce $a$; vypočítati jeho hranu, výšku a obsah.

114. Kolmý jehlan se čtvercovou základnou, jehož výška rovná se $^6/_5$ strany základny má 3200 $cm^3$ obsahu; jak velký jest jeho povrch?

115. Kolik váží mramorový komolý jehlan se čtvercovými základnami o stranách 1·2 m a 1 m, je-li 1·5 m vysoký? (m. v. = 2·7.)

116. Řez kolmého 24 cm vysokého jehlanu komolého, jenž stanoven jest dvěma protějšími pobočnými výškami má 312 $cm^2$ obsahu. Vypočítati strany čtvercových základen, povrch a obsah komolého jehlanu, je-li jeho spodní základna o 364 $cm^2$ větší než základna vrchní? (Z obsahu řezu počítej předem součet stran základen.)

117. Na krychli o hraně 24 cm spočívá kolmý komolý jehlan 40 cm vysoký, v němž má strana vrchní základny 6 cm. Na této spočívá krychle a na ní kolmý 4 cm vysoký jehlan tak, že stýkající se stěny řečených těl se kryjí. Vypočítati povrch a obsah této skupiny.

118. Kolmý komolý jehlan se čtvercovými základnami má 7328 $cm^3$ obsahu; strana spodní základny rovná se výšce a strana vrchní základny $^5/_{12}$ výšky. Jak velký jest jeho povrch?

119. Plynová nádrž válcová má 33 m obvodu a 5 m výšky; kolik $m^3$ plynu vejde se do ní? ($\pi = 3\,^1/_7$.)

120. Mlýnský kámen o průměru 1·5 m jest 3·2 dm vysoký. Průřezem vnitřního jeho otvoru jest čtverec o straně 0·9 dm; kolik $dm^3$ obsahuje?

121. Vypočítati obsah válce, v němž jest poloměr základny ku výšce v poměru $4 : 7$; polovička poloměru s $^2/_3$ výšky mají 10 cm. ($\pi = 3\,^1/_7$.)

122. Hodí-li se do válcové částečně vodou naplněné nádoby o poloměru 2·1 dm kámen, vystoupí v ní voda o 5 cm. Jak těžký jest, je-li jeho měrná váha 2·5? ($\pi = 3\,^1/_7$.)

123. Jak velký poloměr má válcová 20 dm vysoká nádoba, do níž vejde se 15·7 hl. ($\pi = 3{\cdot}14$.)

124. Vypočítati povrch 7850 $cm^3$ velikého válce, jehož poloměr jest ku výšce v poměru $2 : 5$ ($\pi = 3{\cdot}14$).

125. Obdélník, jehož obvod má 28 cm a délka jest o 6 cm větší než šířka otáčí se $a$) kolem své délky, $b$) kolem své šířky. Vypočítati povrch a obsah vzniklých válců. ($\pi = 3\,^1/_7$.)

126. Obsah válce o poloměru 5 cm a výšce 21 cm má se o 594 $cm^3$ zmenšiti tím, že se poloměr základny zmenší, výška však se ponechá. Jak velký jest potom poloměr? ($\pi = 3^1/_7$.)

127. Rovnostrannému válci o poloměru $r$ vepsán jest *a*) kolmý jehlan se čtvercovou základnou, *b*) kolmý trojboký jehlan s pravid. základnou. Základny jehlanů jsou spodní základně válce vepsány a jejich temena jsou ve vrchní základně válce. Vypočítati obsahy obou jehlanů a povrch jehlanu čtyřbokého.

128. Hrana kolmého kužele o poloměru $r$ rovná se dvojnásobnému průměru základny. Vypočítati jeho povrch, obsah a středový úhel rozvinuté obliny.

129. Hlavní řez 137·984 $cm^3$ velikého kolmého kužele má 23·52 $cm^2$; vypočítati povrch kužele. ($\pi = 3^1/_7$.)

130. V kolmém 7065 $cm^3$ velikém kuželi rovná se průměr základny výšce; jak jest vysoký? ($\pi = 3.14$.)

131. Kolmý kužel má 704 $cm^2$ povrchu, obvod hlavního jeho řezu má 64 cm; jak velký jest jeho obsah? ($\pi = 3^1/_7$.)

132. Kruh o poloměru *a* jest základnou kužele a jemu vepsaný čtverec základnou rovně vysokého jehlanu. Kolika $^0/_0$ obsahu kužele rovná se obsah jehlanu?

133. Základna kolmého kužele má 78·5 $cm^2$, jeho oblina 204·1 $cm^2$ vypočítati jeho rozměry a obsah. ($\pi = 3·14$.)

134. Poloměr kolmého kužele jest k jeho hraně v poměru $7 : 25$; jak velký jest jeho obsah, má-li jeho povrch 176 $cm^2$? ($\pi = 3^1/_7$.)

135. Které jsou rozměry komolého kužele 119·32 $dm^3$ velikého, jsou-li jeho základny v poměru $9 : 4$ a výška rovná se průměru větší základny? ($\pi = 3·14$.)

136. Poloměry kolmého komolého kužele 8 cm vysokého mají 8 cm a 2 cm. Vypočítati jeho povrch, obsah a výšku i hranu kužele doplňovacího.

137. Každá základna rovnostranného válce o poloměru $r$ jest základnou kolmého kužele, jehož temeno jest v protější základně. Vypočítati jest *a*) povrch a obsah oběma kuželům společné části (dvojitého kužele), *b*) povrch a obsah těla složeného z obou komolých kuželů o společné základně.

138. Pravoúhlý lichoběžník, jehož ramena mají 12 cm a 37 cm, kratší půdice 42 cm, otáčí se kolem delší půdice. Vypočítati obsah tělesa otáčením vzniklého. ($\pi = 3^1/_7$.)

139. Krychle o hraně *a* jest proříznuta rovnoběžně se základnami uprostřed výšky. Tomuto řezu vepsaný kruh jest společnou základnou dvou komolých kuželů, jejichž druhé základny jsou základnám krychle opsané kruhy. Vypočítati obsah těla z obou komolých kuželů složeného.

140. Jak velký jest řez krychle o hraně *a*, jenž stanoven jest krajními body z téhož vrcholu vybíhajících hran? Jemu opsaný kruh

jest základnou kolmého kužele, jehož výška rovná se úhlopříčce krychle. Vypočítati obsah tohoto kužele.

141. Z kolmého 1782 $cm^3$ velikého kužele, jehož výška jest k poloměru základny v poměru $7:3$, vyvrtán jest jemu podobný kužel. Mezikružná základna dutého kužele jest 3 cm široká. Jak velký jest obsah dutého kužele? ($\pi = 3^1/_7$.)

142. Hromada hlíny má podobu komolého kužele; spodní její základna má 66 m obvodu, vrchní základna 14 m průměru, hrana $4^3/_8$ m. Kolik $m^3$ hlíny obsahuje? ($\pi = 3^1/_7$.)

143. Rovnostrannému trojúhelníku o straně $a$ opsán i vepsán jest kruh. Vypočítati povrch i obsah těl, jež vzniknou otáčením řečených ploch kolem výšky trojúhelníku.

144. Dána jest krychle, jejíž povrch $73^1/_2$ $cm^2$; nad její vrchní základnou sestrojen jest kolmý 6 cm vysoký jehlan. Vypočítati povrch jehlanu a obsah krychli vepsané koule. ($\pi = 3^1/_7$.)

145. Krychli o hraně $a$ vepsána jest koule a též válec; mimo to jest jí opsán válec. (Základny řečených válců jsou základnám krychle vepsány a opsány.) Vypočítati poměr obsahů válců a koule.

146. Kouli o poloměru $r$ opsána jest krychle a vepsán jest pravidelný osmistěn. Vypočítati poměr povrchů a obsahů krychle a osmistěnu.

147. Povrch rovnostranného kužele rovná se povrchu koule o poloměru $r$. Vypočítati poměr jejich obsahů.

148. Kouli o poloměru $r$ vepsán jest rovnostranný válec a opsán jest rovnostranný kužel. Vypočítati poměr povrchů i obsahů těchto těl.

149. Řezu koule, jenž půlí její poloměr $r$, vepsán jest pravid. šestiúhelník. Šestiúhelník ten jest společnou základnou 2 kolmých jehlanů, jejichž temena jsou na povrchu koule. Vypočítati obsah dvojitého jehlanu.

150. Kolmý válec o poloměru $r$ rovná se obsahem svým kouli o stejně velkém poloměru. Vypočítati poměr povrchů obou těl.

151. Polokruhu o poloměru 5 cm vepsán jest pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou v poměru $3:4$. Vypočítati poměr povrchů i obsahů dvojitého kužele a koule, jež vzniknou otáčením kolem přepony (průměru).

152. Dán jest kužel o poloměru 16 cm, jehož hrana jest o 2 cm větší než výška. Jak velký jest poloměr koule, jejíž povrch rovná se povrchu daného kužele?

153. Řez koule o poloměru $r$, jehož vzdálenost od středu rovná se $\frac{3}{5}r$, jest společnou základnou 2 kolmých kuželů, jejichž temena jsou na povrchu koule. Vypočítati poměr obsahů dvojitého kužele a koule.

154. Na hranolovém šestibokém podstavci s pravid. základnou o straně $a$ a výšce $\frac{a}{6}$ spočívá kolmý kužel, jehož základna jest vrchní

základně podstavce vepsána. Výška kužele rovná se průměru jeho základny. Hořejší část kužele odříznuta jest rovinou ku základně rovnoběžnou uprostřed výšky vedenou. Na vrchní základně komolého kužele spočívá polokoule. Vypočítati obsah této skupiny těl.

155. Vrchlík úseče koule o poloměru 21 cm má 924 cm$^2$; jak vysoká a jak velká jest tato úseč? ($\pi = 3\,{}^1/_7$.)

156. Základna polokoule o poloměru $r$ jest spodní základnou komolého kužele; vrchní jeho základnou jest řez koule ve vzdálenosti $\frac{4}{5}r$ od její základny vedený. Jak velký jest obsah tohoto komolého kužele?

157. Na kolmém válci o poloměru $r$ a výšce $3r$ spočívá kolmý válcový kotouč o výšce $\frac{r}{6}$, jehož obsah rovná se ${}^1/_8$ obsahu spodního válce; vypočítati poloměr válce a povrch této skupiny těl.

158. Povrch koule má se k povrchu rovnostranného kužele jako $1 : 3$; vypočítati poměr jejich obsahů.

159. Koule o poloměru $r$ proříznuta jest rovinou ve vzdálenosti $\frac{4}{5}r$ od středu. Řezu vepsán jest čtverec, jenž jest základnou kolmého jehlanu větší úseči kulové vepsaného. Vypočítati jest *a*) obsah jehlanu, *b*) obsah menší úseče kulové.

160. Dutá koule, v níž jest poloměr vnější plochy kulové $r$, má $\frac{37}{48}\pi r^3$ obsahu; jak tlustá jest její stěna?