POČETNÍ KNIHA

pro

NIŽŠÍ GYMNASIUM.

Sestavil

JOSEF SMOLÍK,
suppl. učitel na c. k. gymnasium Novoměstském.

II. DÍL.

Pro 3. a 4. třídu.

V PRAZE, 1861.
Nákladem **J. G. Calve-ova** c. k. universitního kněhkupectví.
(B. Becke.)

Tiskem K. Schreyer-a & Hynka Fuchse.

Stručné názvosloví.

Člen = Glied, č. vnější, krajní = äusseres G., č. vnitřní = inneres G.

Čtveřina (kvaterno) = Quaterne, Quaternion.

Dvojina (ambo) = Ambe, Binion.

Hodnota = Werth, h. místná = Stellenwerth, h. číselná = numerischer W., h. podoby = W. der Figur.

Kapitál (hlavní peníze) = Capital, jistina = angelegtes, versichertes Capital; jistina základná = Stamm- (Einlags-) Capital.

Kořen = Wurzel, k. druhého stupně (k. druhý), k. třetího stupně (k. třetí) atd. = W. des 2., 3. ... Grades, kořene dobývati, dobírati se, hledati, odmocniti = W. ziehen; n. p. dobývati kořene druhého, třetího . . . stupně = die Quadrat- Cubik . . . Wurzel ziehen.

Lhůta = Termin, Rate, placení po lhůtách (po částkách) = Termin-(Raten-)zahlung.

Mocniti (umocniti, zmocniti, povýšiti nebo uvesti na mocnost) = zur Potenz erheben, potenziren; n. p. součin se zmocňuje umocněním jednotlivých jeho činitelů = ein Product wird zur Potenz erhoben (potenzirt), indem man dessen einzelne Factoren potenzirt.

Počet = Anzahl (Rechnung), p. lhůtový = Terminrechnung, p. řetězový = Kettenrechnung (Kettenregel), p. spolkový = Gesellschaftsrechnung, p. úrokový = Interessenrechnung, p. úrokový složitý = zusammengesetzte Interessenrechnung, Zinseszinsrechnung, p. směšovací (p. měšby hmot) = Alligations- (Vermischungs-) Rechnung.

Počtářství (počtověda, číslověda) = Arithmetik, p. zvláštní, všední = besondere Arithmetik, gemeine Rechenkunst, p. obecné, písmenné = allgemeine Arithmetik, Buchstabenrechnung.

Poměr = Verhältniss, p. přímý = gerades V., poměr obrácený = verkehrtes V., p. jednoduchý = einfaches V., p. složitý (složený) = zusammengesetztes V.

Průměrný = mittlere.

Prvek = Element.

Přemistění (přestavení) = Permutation (Versetzung), p. s opakováním = P. mit Wiederholung, p. bez opakování = P. ohne Wiederholung.

Přemistiti (přestaviti) = permutiren (versetzen).

Odmocnění (dobývání kořene) = Wurzelziehung.

Odmocniti = Wurzel ziehen.

Rovnice = Gleichung, r. prvního, druhého ... stupně = G. des 1., 2.... Grades, r. jednostejná = identische G., r. určovací = Bestimmungsgleichung, rovnici sestaviti = Gleichung bilden.

Sestava (kombinace, sestavování) = Combination, Combiniren; sestava neb sestavování s opakováním obmezeným = C. mit eingeschränkter Wiederholung, sestava neb sestavování s opakováním neobmezeným = C. mit unbeschränkter Wiederholung, nauka o sestavování = Combinationslehre.

Sestavovati (kombinovati) = combiniren.

Skupina = Gruppe.

Součinitel = Coëfficient.

Souhlasný (shodující se) = übereinstimmend.

Srovnalosť = Proportion, s. jednoduchá = einfache P., s. složitá = zusammengesetzte P.

Trojina (terno) = Terne, Ternion.

Účastník = Interessent, Betheiliger.

Udavatel = Exponent, u. mocnosti = Potenzexponent, u. kořene (dobyvatel) = Wurzelexponent.

Ukazovatel = Zeiger, Index.

Úroky = Interessen, Zinsen, ú. ze sta $(^0/_0)$ = Procente (Percente).

Úročitel rostoucí (vzestupný) = Aufzinsungsfactor; úročitel sestupný = Abzinsungsfactor.

Veličina = Grösse, veličiny pojmenované = benannte Grössen, v. nepojmenované (bezejmenné) = unbenannte G., v. spojité, nepřetržité = stetige, continuirliche G., v. rozpojité, přetržité = unterbrochene, gesonderte, discrete G., v. protivné = entgegengesetzte G., v. kladné = positive G., v. záporné = negative G., veličina jednočlenná, jednočlen = eintheilige G., Monom, v. dvoučlenná, dvoučlen = zweitheilige G., = Binom.... v. mnohočlenná, mnohočlen = mehrtheilige G., Polynom, veličiny jednorodé = homogene, gleichartige Grössen, v. rozdílno- (různo-) rodé = ungleichartige, heterogene Grössen.

Větší = grösser, n. p. $15 > 4$, t. j. patnáct jest větší nebo více nežli čtyry.

Výraz = Ausdruck.

Částka první.

Veličiny protivné.

§. 1.

Cožkoliv se dá na stejnorodé částky bezejmenné nebe pojmenované rozvesti (buď skutečně anebo pouze v mysli) nazývá se veličina.

Veličiny se vyjádřují buď

a) čísly zvláštními n. p. 5, 10; 8 zl., 12 kroků atd. aneb

b) čísly všeobecnými, n. p. a, b, c atd.

Veličiny vůbec se považují buď samy o sobě, anebo vztažně k veličinám jiným téhož druhu. N. p. 6 zl. jest veličina prostá, neboť neudává ani že jest jmění, ani že jest dluh, ani jaký jiný vztah k zlatým vůbec. Jest však mnoho jiných veličin, které mimo počet stejnorodých částek, jež v sobě zaujímají, naznačují jakýsi vztah, jakousi protivu k veličinám stejného druhu, n. p. 8 zl. jmění, 6 zl. dluhu; 12 kr. příjmu a 4 kr. vydání; 7 kroků v pravo a 9 kroků v levo atd. V prvním a druhém příkladu se zlaté a krejcary vztahují na jmění jednotlivce avšak ve smyslu protivném, neboť co 8 zl. jmění zvětšuje, zmenšuje je 6 zl. dluhu; a taktéž co 12 krej. příjmy zvětšuje, zmenšuje tyto 4 kr. vydání, avšak hodnota 8 zl., 6 zl. 12 kr., a 4 kr. nemění se sama sebou, nýbrž pouze vzájemným vztahem. Taktéž u třetího příkladu mají se kroky v pravo za tak dlouhé jako kroky v levo, jen směr jim dává protivný význam.

Takové veličiny, které mimo určitý počet stejnorodých částek, jež v sobě obsahují, vzájemný vztah k sobě naznačují, nazýváme veličiny protivné. K těmto náležejí všechny veličiny vyjadřující jmění a dluhy, příjmy a vydání, zisk a ztrátu, k předu a zpátky, nahoru a dolů atd. Abychom protivu rozličných veličin naznačili a je od veličin prostých rozeznali, nazýváme jedny kladné a druhé záporné. Ze dvou protivných veličin možná kteroukolivěk považovati za kladnou, avšak druhá musí se pak pokládati za zápornou, což z toho vysvítá, že i jmění i dluh skutečně jsou, tedy že jest i jmění i dluh (každé samo o sobě) kladné, a že jenom vzájemným vztahem k sobě stává se jedno kladným a druhé záporným. Obyčejně však považuje se jmění, příjem, zisk, nahoru, k předu a p. za kladné, a protiva toho t. j. dluh, vydání, ztráta, dolů, nazpátek a p. za záporné veličiny. Kladným veličinám se předkládá znaménko +, záporným —, tak že se n. p. píše na místě 4 zl. zisku pouze + 4 zl., a 9 zl. ztráty — 9 zl., z čehož opět patrno, že znaménka + a — mění pouze vzájemný vztah veličin, nikoliv však jejich hodnotu.

Jako čísla pojmenovaná jsou též čísla bezejmenná sama o sobě prostá, t. j. nejsou ani kladná ani záporná, n. p. 1, 2, 3, 4.... Jakmile však jedno nebo druhé číslo učiníme kladným, n. p. + 1, + 2, + 3,..... stavíme je i hned naproti číslům záporným, totiž — 1, — 2, — 3.... Rozhraní mezi bezejmennými čísly kladnými a zápornými činí nicka (0), takže všechna čísla kladná jsou větší a všechna záporná menší nežli 0, tedy

$$0 < +1 < +2 < +3 < +4 \ldots\ldots \text{ a}$$
$$0 > -1 > -2 > -3 > -4 \ldots\ldots$$

Sestavíme-li po obou stranách nicky kladná a záporná čísla, bude

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots.$$

Poznamenání. Pro začátečníky uvádíme toto: kladnosť a zápornosť jest tolik co n. p. bohatství a chudoba, pilnosť a nedbalosť, sličnosť a škaredosť atd. Jakmile řekneme, ten neb onen jest bohatý (pilný, sličný ...) stavíme jej i hned naproti nebohatému, totiž chudému (nedbalému, škaredému ...); tedy při vyřknutí úsudku „ten jest bohatý“ musíme věděti a předpokládáme, že „jiný jest chudý“. Taktéž u veličin kladných a záporných. Řekneme-li 6 jest kladné (+ 6), stavíme číslo to naproti zápornému, totiž — 6, kdybychom nevěděli, že skutečně stává záporného čísla 6 (— 6), nemohli bychom věděti, že stává téhož čísla kladného t. j. + 6. Tedy vyslovením „číslo to neb ono jest kladné“ uznáváme mlčky jeho protivu, t. j. že stává nebo stávati může téhož čísla záporného.

§. 2.

Jak jsme právě byli viděli, znamenají se kladné veličiny znaménkem sečítání (+) a veličiny záporné znaménkem odčítání (—), avšak stejná tato znaménka u sečítání a u veličin kladných, u odčítání a u veličin záporných, mají rozličný význam, a sice:

a. Více (+) jelikož znaménko sečítání, znamená, že se mají dvě nebo více veličin v celek spojiti, n. p. 4 + 6 + 10 = 4 se má spojiti s 6 = 10, a toto se má spojiti s 10 = 20. Znaménko to klade se tedy vždy, kdy se jakékolivěk veličiny sečítati mají.

Více (+) jelikož znaménko kladné, naznačuje vztah veličiny jedné k veličině jiné, s kterou se porovnává; ono jest s veličinou tou nerozdvojné, nechť se už k jiné připočítá, od nich odečítá atd., pročež se má i s veličinou opatřiti závorkou n. p. (+ 5) + (+ 3) t. j. kladná veličina 5 má se připočísti ku kladné veličině 3. Má-li tedy kdosi n. p. 5 zl. a 3 zl. a chce-li věděti, mnoho-li má dohromady, spojí obě znaménkem sečítání, totiž 5 zl. + 3 zl. = 8 zl. V příkladu tom nebralo se žádného ohledu na to, jsou-li peníze ty jmění nebo dluh; kdyby však znamenaly jmění, musilo by se sečítati (+ 5 zl.) + (+ 3 zl.), a kdyby znamenaly dluh (— 5 zl.) + (— 3 zl.)

b. Méně (—) jelikož znaménko odčítání naznačuje, že se mají dvě veličiny od sebe odečísti, n. p. 5 — 3 = 2 t. j. 2 jest rozdíl mezi 5ti a 3mi. Znaménko to se klade všude, kde se rozdíl dvou veličin udati má.

Méně (—) jelikož znaménko záporné udává vztah veličiny k veličině, která se s ní porovnává, a jest s veličinou tou nerozdvojné, nechť jest to v sečítání, v odčítání atd., pročež se má vždy opatřiti závorkou, n. p. (— 5) + (— 3), nebo (— 5) — (— 3) atd.

Měl-li by se udati rozdíl mezi n. p. 5 zl. a 3 zl., tu jednoduše odečteme 5 zl. — 3 zl. = 2 zl. Béře-li se však ohled na to, že jsou peníze ty buď jmění nebo dluh, a určí-li se, že jsou dluh (—), tu by se musilo napsati (— 5 zl.) + (— 3 zl.), nebo kdyby se obě veličiny porovnávaly (— 5 zl.) — (— 3 zl.).

Takovým porovnáním stejných znamének + a — nemožno, aby se rozličný jich význam neuznal. Poněvadž však pouze dvé znamének vztah protivný dvou, nebo více veličin, naznačuje, možná jedno z nich vypustiti. Na počátku a po znamení rovnosti (=) neklade se obyčejně před veličinu znaménko kladné (+), tak že n. p. 8 + (— 4) nebo 19 = 11 + (+ 8) znamená (+ 8) + (— 4) nebo (+ 19) = (+ 11) + (+ 8). Je-li však veličina záporná, nesmí se nikdy patřičného znaménka (—) vynechati.

§. 3.

Mají-li dvě, tři . . . . veličiny stejná znaménka, nazýváme je souhlasné; poněvadž však rozeznáváme dvé znamének; může souhlas ten býti dvojí a sice

1. u veličin kladných a
2. u veličin záporných.

1. Souhlasné veličiny kladné se rozmnožují. N. p. $+5+7+6=+18$, neboť, má-li kdosi 5 zl. jmění, 7 zl. jmění a 6 zl. jmění, má v celku 18 zl. jmění $=+18$ zl.

2. Souhlasné veličiny záporné se taktéž rozmnožují. N. p. $-5-7-6=-18$, neboť má-li kdosi 5 zl. dluhu, 7 zl. dluhu a 6 zl. dluhu, má v celku 18 zl. dluhu $=-18$.

Nemají-li dvě, tři . . . . veličiny stejná znaménka, nazývají se protivné, n. p. $+5-3$, $-6+4$ atd.

Porovnáváme-li spolu dvě nebo více protivných veličin, mohou míti všechny bez ohledu na znaménka touž hodnotu aneb jest hodnota jejích rozličná.

1. Je-li hodnota dvou protivných veličin sobě rovna snímají se vespolek t. j. kladná veličina snímá veličinu zápornou téže hodnoty. N. p. $+8-8=0$. Kdo přijal 8 zl. ($+8$) a vydal 8 zl. (-8), tomu nezbývá ničeho.

2. Dvě protivné veličiny rozličné hodnoty snímají se vespolek jen tak dalece, dokud jsou si rovny, a výsledek podrží znaménko čísla většího. N. p. $+8-3$. Každé číslo možná považovati za součet dvou nebo více čísel, pročež můžeme též $+8$ považovati za součet $+5+3$ a pak máme $+8-3=+5+3-3$. Protivné veličiny téže hodnoty se snímají vespolek, tedy $+3$ snímá -3 a zůstane $+5$, pročež $+8-3=+5$ t. j. zbývá taková částka čísla většího, o kterou (bez ohledu na $+$ nebo $-$) samo o sobě větší jest než-li číslo s ním porovnávané. Kdo přijme 8 zl. ($+8$) a vydá 3 zl. (-3), tomu zůstane ještě 5 zl. jmění ($+5$), poněvadž z 8 zl. příjmu 3 zl. příjmu snímají 3 zl. vydání.

Porovnává-li se více protivných veličin vespolek, srazí se nejprvé v celek veličiny kladné a veličiny záporné, a pak se snímají; n. p.

$$+8-4+7-9+6=+8+7+6-4-9$$
$$=+21-13=+8;\ \text{nebo}$$
$$-18+12+4-6+1-23=+12+4+1-18$$
$$-6-23=+17-47=-30.$$

Za tou příčinou nazývají se ty veličiny protivné, které se vespolek buď docela anebo částečně snímají.

Cvičení.

1. $+8+10+12=?$
2. $+18+16+24+30=?$
3. $-3-4-16-26-10=?$

4. $-14-15-18-5-1=?$
5. $+16-3-5+1-18+9-28+32=?$
6. $+6+7+16-3-12-4=?$
7. $-12+25-37+22-26-4+36-18+29-4=?$
8. $-24+7+14-28-38+40-11+21=?$
9. $+13+29-52+64+17-69-72+14=?$
10. $-23+65-72-15+87+3-46+57=?$

I. Tvary početné veličin protivných.

1. Sečítání.

§. 4.

Sečítati možná veličiny souhlasné i protivné.

Souhlasné veličiny se sečítají, pak-li se znaménko sečítání vypustí a veličiny ty se (jako v §. 3) v celek srazí; n. p.

$(+10)+(+7)=+10+7=10+7=17$ (poněvadž se po znaménku stejnosti + neklade).

$(+24)+(+8)+(+5)=+24+8+5=24+8+5=+37=37.$

$(-7)+(-4)=-11.$

$(-12)+(-15)+(-18)=-12-15-18=-45.$

Veličiny protivné se sečítají, pakli znaménko sečítaní se též vypustí a veličiny ty (jako v §. 3) se srazí. Sečítání takové jest vlastně odčítání, poněvadž se skutečně veličina hodnoty nižší bez ohledu na znaménka od veličiny hodnoty vyšší odečte. Nicméně však náleží odčítání takové k sečítání, poněvadž se dvě nebo více veličin (jako jmění a dluhy) v celek sráží, n. p.

$(+15)-(-9)=+15-9=+6=6.$

$(-18)+(+21)=-18+21=+3=3.$

$(+16)+(-9)+(+5)+(-13)=(+16)+(+5)+(-9)+(-13)=16+5-9-13=21-22=-1.$

$(+25)+(-19)+(-4)+(+17)+(-1)+(+10)=25+17+10-19-4-1=52-24=28.$

Cvičení.

Sečtěte:

1. $(+12)+(+17)$; $(+27)+(+29)$; $(+34)+(+12)$; $(-4)+(-11)$; $(-18)+(-15)$; $(-16)+(-23)$.
2. $(+4)+(+18)+(-13)+(-8)$; $(+15)+(-5)+(-12)+(-2)$.
3. $(+17)+(-8)+(+5)+(-27)+(+23)+(-32)+(-3)+(+26)$.
4. $(-27)+(-12)+(+52)+(-30)+(+14)+$

$(+25)+(-43)+(-1)$.

5. $(-3)+(+29)+(-32)+(-17)+(+58)+(-7)+(-24)$.

2. Odčítání.

§. 5.

Odčítati znamená buď od jedné veličiny hodnotu veličiny druhé odejmouti, anebo určiti rozdíl mezi dvěma veličinama, který udává, o mnoho-li jest veličina jedna větší než-li druhá. Tyto dvě veličiny jsou menšenec a menšitel, pročež porovnáváme menšence s menšitelem, abychom se dověděli, o mnoho-li jest menšenec větší nebo menší než-li menšitel a naopak.

Menšenec a menšitel jsou buď souhlasní anebo protivní.

Jsou-li souhlasní, mohou býti oba buď a) kladní,
nebo b) záporní.

Jsou-li protivní, může býti

c) menšenec kladný a menšitel záporný, nebo
d) menšenec záporný a menšitel kladný.

Za tou příčinou rozeznáváme u odčítání čtyř případů, n. p.

a. $(+8)-(+5)$.

Porovnáme-li 8 zl. jmění s 5 zl. jmění, patrno, že 8 zl. jest o 3 zl. větší než-li 5 zl., tedy rozdíl mezi oběma + 3 zl.; což jest tolik, jako kdybychom k + 8 zl. připočetli — 5 zl., nebo

$+8$ zl. $+(-5$ zl.$)=8$ zl. -5 zl. $=+3$ zl., tedy

$$(+8)-(+5)=(+8)+(-5)=+8-5=+3.$$

b. $(-8)-(-5)$.

Má-li někdo 8 zl. dluhu (— 8) a jiný pouze 5 zl. dluhu (— 5), tu má první, porovná-li se s druhým, o 3 zl. dluhu (— 3) více, nebo o 3 zlaté jmění méně (— 3) než-li druhý. Kdyby se tedy každému z nich 5 zl. dalo (+ 5), nebyl by druhý ničeho dlužen; první však ještě 3 zl. (— 3), z čehož patrno, že k — 8 zl. pouze + 5 zl. připočítati můžeme t. j. (— 8 zl.) + (+ 5 zl.), abychom se dověděli, o mnoho-li jest první více dlužen než-li druhý, tedy

$$(-8)-(-5)=(-8)+(+5)=-8+5=-3.$$

c. $(+8)-(-5)$.

Má-li někdo 8 zl. jmění (+ 8), a porovná-li se s jiným, který má 5 zl. dluhu (— 5), tu patrno, že by byl první, kdyby druhý neměl ničeho (0) o 8 zl. bohatší, avšak druhý nemá nejen ničeho, nýbrž ještě 5 zl. dluhu, tedy jest o 5 zl. chudší nežli ten, kdo nemá ničeho, pročež jest první u porovnání s ním o 8 zl. + 5 zl. = 13 zl. bohatší, tedy

$$(+8)-(-5)=(+8)+(+5)=+8+5=+13\text{·}$$

d. $(-8)-(+5)$.

Má-li někdo 8 zl. dluhu (— 8), a porovná-li se s jiným, jenž má 5 zl. jmění (+ 5), tu mu do zaplacení dluhu schází

8 zl. (-8), a aby měl také 5 zl. jmění, scházelo by mu ještě 5 zl. (-5), tedy se mu v celku nedostává $(-8) + (-5) = -13$, tedy

$$(-8) - (+5) = (-8) + (-5) = -8 - 5 = -13.$$

Sestavíme-li 4 tyto případy pro lepší přehled pod sebe, bude

a. $(+8) - (+5) = (+8) + (-5) = +8 - 5 = +3.$
b. $(-8) - (-5) = (-8) + (+5) = -8 + 5 = -3.$
c. $(+8) - (-5) = (+8) + (+5) = +8 + 5 = +13.$
d. $(-8) - (+5) = (-8) + (-5) = -8 - 5 = -13.$

Že udané rozdíly jsou pravé, snadno se přesvědčíme, připočteme-li každý z nich k menšiteli původnímu, součet obou musí se rovnati menšenci, tedy

v *a.* $+3 + 5 = +8$
v *b.* $-3 - 5 = -8$
v *c.* $+13 - 5 = +8$
v *d.* $-13 + 5 = -8$

Porovnáme-li každý případ s rozřešením jemu rovným ohledně znamének, vidíme, že se znaménka menšenců nezměnila, avšak znaménka odčítání se naskrz proměnila v znaménka sečítání, a znaménka jednotlivých menšitelů v znaménka protivná (t. j. + v — a — v +).

Z tohoto pozorování se utvořilo všeobecné pravidlo:

Protivné veličiny se odčítají, promění-li se znaménko menšitele v protivné a připočte-li se takto menšitel k menšenci.

N. p. $(+24) - (+18) = 24 + (-18) = 24 - 18 = 6.$
$(-35) - (-26) = -35 + (+26) = -35 + 26 = -9.$
$(+18) - (-13) = 18 + (+13) = 18 + 13 = 31.$
$(-16) - (-10) = -16 + (+10) = -16 + 10 = -6.$

Kdyby byl menšitel výraz složitý t. j. kdyby se skládal z více veličin, spojených znaménky + nebo —, musil by se uzávorkovati na důkaz, že se má každý v něm uvedený člen odečísti, neboť, má-li se celek odečísti, musí se to státi s každým jeho dílem. Kdybychom tedy n. p. na místě

$$(+28) - (+15) = 28 - 15 = 13$$

menšitele + 15 rozvedli na dva díly $10 + 5$, musili bychom díly ty uzávorkovati a napsati $(+28) - (+10 + 5)$, pak by se znaménko každého dílu menšitele proměnilo v protivné a znaménko odčítání v znaménko sečítání, totiž

$$28 - (+10 + 5) = 28 + (-10 - 5) = 28 + (-15) = 28 - 15 = 13.$$

Nebo: $(-256) - (295)$; $-295 = -200 - 90 - 5$ tedy
$(-256) - (-200 - 90 - 5) = -256 + (+200 + 90 + 5) = -256 + 295 = 39.$

Nebo: $(+3685) - (3000 + 400 + 20) = 3685 + (-3000 - 400 - 20) = 3685 - 3420 = 265.$

Poznamenání. Takovým spůsobem se umožňuje odčítání větších veličin od menších, které při číslech prostých jest nemožné. Porovnáme-li sečítání veličin protivných s odčítáním, spozorujeme, že se veličiny protivné sečítáním často zmenšují a odčítáním často zvětšují, čehož bychom u čísel prostých darmo hledali.

Cvičení.

Odečtěte a v 1. 2. 3. 4. vysvětlete odčítání:

1. $(+ 18) - (+ 15);\ (+ 26) - (+ 8);\ (+ 23) - (+ 9);$
$(+ 16) - (+ 11);\ (+ 20) - (+ 31);\ (+ 17) - (+ 42).$
2. $(- 15) - (- 7);\ (- 18) - (- 6);\ (- 18) - (- 15);$
$(- 26) - (- 19);\ (- 16) - (- 28);\ (- 7) - (- 26).$
3. $(+ 4) - (- 8);\ (+ 10) - (- 25);\ (+ 22) - (- 36);$
$(+ 14) - (- 15);\ (+ 26) - (- 15);\ (+ 9) - (- 31).$
4. $(- 9) - (+ 8);\ (- 12) - (+ 5);\ (- 26) - (+ 15);$
$(- 13) - (+ 17);\ (- 19) - (+ 11);\ (- 28) - (+ 17).$
5. $(+ 14) - (+ 10 + 1);\ (+ 28) - (+ 10 + 4);$
$(+ 36) - (+ 10 + 7);\ (+ 53) - (+ 46 + 9);$
$(+ 64) - (30 + 7).$
6. $(- 18) - (+ 10 + 5);\ (- 48) - (+ 20 - 1);$
$(- 57) - (+ 30 - 6);\ (+ 72) - (+ 100 - 25);$
$(+ 468) - (+ 300 + 20 + 4).$
7. $(- 367) - (200 + 50 + 9);\ (+ 767) - (500 + 70 - 4);$
$(- 753) - (300 - 50 - 7).$
8. $(- 3758) - (2000 + 7000 - 60 - 5);$
$(- 5673) - (40000 + 7000 + 600 + 20 - 7).$

3. Násobeni.

§. 6.

Násobení má svůj základ v sečítání, neboť jest skrácené sečítání stejných sčítanců. Známo, že násobitel udává, kolikráte se násobenec sám k sobě připočísti má, za kterouž příčinou nesmí míti násobitel žádného jména, tedy ani kladného ani záporného znaménka, neboť možná n. p. $(+ 5) + (+ 5) + (+ 5)$ t. j. kladnou veličinu 5 viděti 3krát co sčítance, avšak nemožno $+ 5$ viděti ani $+$ 3krát, ani $-$ 3krát, jako nemožno viděti n. p. 5 zl. 3 zlaté-krát, nechť jest to už jmění nebo dluh.

Má-li však násobitel předce nějaké znaménko ($+$ nebo $-$), není to ani znaménko kladné ani záporné, nýbrž jest $+$ znaménko sečítání a $-$ znaménko odčítání

V násobení rozeznáváme taktéž čtyř případů, totiž:

a. $+ 6 \times + 4$
b. $- 6 \times + 4$
c. $+ 6 \times - 4$
d. $- 6 \times - 4$

Že v každém případu bude součin 24 snadno nahlédneme, tedy se pouze o to jedná, jaké znaménko bude míti každý součin.

a. $+ 6 \times + 4.$

Kdyby byl násobitel 4 (bez znaménka) totiž $+ 6 \times 4$, byl by součin roven

$(+ 6) + (+ 6) + (+ 6) + (+ 6) = + 24,$

Že jest ale násobitel $+ 4$, tož znamená tolik co $+ (+ 6) \times 4$ t. j. $+ 6$ se má 4^mi^ násobiti a součin k něčemu připočítati; že ale žádné veličiny před násobencem není, tedy se má součin připočísti k ničemu (0), za tou příčinou bude

$+ 6 \times + 4 = 0 + (+ 6) + (+ 6) + (+ 6) + (+ 6) =$
$= 0 + 6 + 6 + 6 + 6 = + 24.$

Kdyby někdo 6 zl. jmění (tedy $+ 6$) připočetl k ostatnímu jmění 4krát ($+ 4$), připočítal by v celku 24 zl. jmění ($+ 24$).

b. $- 6 \times + 4.$

Zde znamená taktéž $+ 4$, že se má $- 6$ 4krát k sobě a součin ještě k něčemu připočítati, poněvadž však násobence žádná veličina nepředchází, tedy se má součin připočísti k nicce t. j. $0 + (- 6) + (- 6) + (- 6) + (- 6) = 0 - 6 - 6 - 6 - 6 = - 24.$

Kdyby někdo 6 zl. dluhu (tedy $- 6$) připočetl k svému jmění 4krát ($+ 4$), připočetl by v celku 24 zl. dluhu ($- 24$)

c. $+ 6 \times - 4.$

$- 4$ znamená, že se má 1. násobenec $+ 6$ sám k sobě 4krát připočítati a 2. že se má součin ten odečísti, poněvadž však žádná veličina násobence nepředchází, tedy od ničeho (0) pročež $+ 6 \times - 4 =$

$- (+ 6) \times 4 = 0 \mp (\pm 6 \pm 6 \pm 6 \pm 6) = 0 +$
$(- 6 - 6 - 6 - 6) = - 24.$

Kdyby někdo 6 zl. jmění ($+ 6$) 4kráte od svého ostatního jmění odečetl ($- 4$), byl by odečetl v velku 24 zl. t. j. byl by o 24 zl. chudší ($- 24$).

d. $- 6 \times - 4$

Jako prvé znamená $- 4$ 1. že se násobenec $- 6$ má 4krát k sobě připočítati a 2. že se součin má odečísti, že ale žádná veličina násobence nepředchází, tedy od ničeho (0) pročež $- 6 \times - 4 = - (- 6) \times 4 = 0 - (- 6 - 6 - 6 - 6) = 0 \mp (\mp 24) = + 24.$

Odečte-li kdosi jinému 6 zl. dluhu (-6) 4krát (-4), odečte mu 24 zl. dluhu ($-(-24)$) t. j. udělá jej o 24 zl. bohatším ($+24$).

Sestavíme-li všechny 4 případy pro lepší přehled i s výsledky pod sebe, bude

$$
\begin{aligned}
&a.\ +6 \times +4 = +24\\
&b.\ -6 \times +4 = -24\\
&c.\ +6 \times -4 = -24\\
&d.\ -6 \times -4 = +24
\end{aligned}
$$

Porovnáme-li znaménka součinu se znaménky činitelů, uvidíme, že, jsou-li znaménka obou činitelů souhlasná (jako u *a.* obě + a u *d.* obě —) součin má znaménko +, a jsou-li protivná (jako u *b.* a *c.*) že má součin znaménko —. Z toho se odvodilo všeobecné pravidlo:

U násobení dávají souhlásná znaménka +, protivná — k součinu. N. p.

$$
\begin{aligned}
+18 \times -7 &= -126\\
-15 \times -3 &= +45 \text{ atd.}
\end{aligned}
$$

Kdyby byl násobenec složitý (vícečlen) patrno, že bychom každý jeho člen, berouce ohled na jeho znaménko, násobitelem násobili, a na znamení toho násobence uzávorkovali, n. p.

$$(+20+8) \times +6 = (+20 \times +6) + (+8 \times +6) =$$
$$= +120 + 48 = +168$$

Nebo: $(300 + 40 - 2) \times -5 = \mp(\pm 300 \pm 40 \mp 2)$

$$\times 5 = -1500 - 200 + 10 = -1700 + 10 =$$
$$-1690.$$

Kdyby byl násobenec jednoduchý a násobitel složitý, musil by se násobence každým členem uzávorkovaného násobitele násobiti, n. p.

$$+6 \times (+20 + 4) = (+6 \times +20) + (6 \times +4)$$
$$120 + 24 = +144;$$
$$+8 \times (10 - 3) = (8 \times 10) + (8 \times -3) = (8 \times 10)$$
$$-(+8 \times -3) = 80 - 24 = +56;$$
$$+5 \times (100 + 50 - 7) = (5 \times 100) + (5 \times 50) +$$
$$(5 \times -7) = 500 + 250 - 35 = 750 - 35 = 715.$$

Kdyby byl násobenec i násobitel složitý, uzávorkovali by se oba, bral by se ohled na znaménka a násobil by se každý člen násobence každým členem násobitele, jak se to v násobení čísel prostých vůbec dělá. N. p.

$$+24 \times +13 = (20 + 4) \times (10 + 3) = (20 \times 10)$$
$$+(4 \times 10) + (20 \times 3) + (4 \times 3) = 200 + 40$$
$$60 + 12 = 312.$$
$$(30 - 2) \times (10 - 4) = (30 \times 10) + (-2 \times 10) +$$
$$(30 \times -4) + (-2 \times -4) = 300 - 20 - 120 + 8 =$$
$$+308 - 140 = 168.$$

Kdyby se mělo více činitelů násobiti, šetřilo by se pouze pravidla ohledně znamének a pak by se jako obyčejně násobil první činitel druhým, součin ten třetím, opětný součin čtvrtým atd. n. p.

$$+6 \times -4 \times -7 = -24 \times -7 = +168.$$

Cvičení.

Násobte a u 1. 2. 3. 4. násobení vysvětlete:

1. $(+3) \times (+7)$, $(+9) \times (+7)$, $(+10) \times (+2)$, $(+8) \times (+4)$;
2. $(-8) \times (+5)$, $(-4) \times (+9)$, $(-7) \times (+6)$, $(-9) \times (+2)$;
3. $(+7) \times (-3)$, $(+9) \times (-8)$, $(+5) \times (-4)$, $(+6) \times (-9)$;
4. $(-3) \times (-9)$, $(-8) \times (-7)$, $(-6) \times (-3)$, $(-7) \times (-4)$;
5. $(+10+9) \times (+7)$, $(+20+5) \times (+8)$, $(100+60+7) \times (+4)$, $(200+70+4) \times (+9)$.
6. $(+20-2) \times (+3)$, $(+100+40-5) \times (+7)$ $(+200+90-1) \times (+5)$, $(200-60-5) \times (+8)$.
7. $(30+4) \times (20-3)$, $(50+7) \times (30-2)$, $(100+40+6) \times (90-8)$, $(200+70-9) \times (30-9)$.
8. $(40-6) \times (10-5)$, $(50-3) \times (60-7)$, $(40-2) \times (50-1)$, $(60-7) \times (30-5)$.
9. $(100+90-9) \times (30-4)$, $(200-96-9) \times (10-3)$, $(400+50-3) \times (100+90-1)$, $(500+30-1) \times (200-40-1)$.
10. $+6 \times +9 \times +2$, $+7 \times +8 \times +3$, $+5 \times +4 \times -9$, $-6 \times +4 \times -3$, $-5 \times -7 \times -1$, $+9 \times -8 \times -1$, $-5 \times -2 \times -3$, $-5 \times -7 \times +3$, $+8 \times +9 \times +2 \times +3$, $+4 \times -5 \times +2 \times -1$, $-4 \times -7 \times -3 \times -1$, $-9 \times -3 \times +2 \times -1$.

4. Odnásobení.

§. 7.

Je-li odnásobenec a odnásobitel pojmenován, aneb má-li jakékoliv znaménko, musí býti podíl bezejmenný, tedy i bez znaménka, což vysvítá z toho, an násobení a odnásobení jsou protivné tvary početné, a poněvadž odnásobitel a podíl jsou činitelé odnásobence. Má-li však podíl přece nějaké znaménko, jest opět + znaménko sečítání a — znaménko odčítání. Při odnásobení rozeznáváme ohledně znamének též čtyř případů, totiž buď jsou znaménka odnásobence a odnásobitele souhlasná anebo protivná, n. p.

a. + 8 : + 4
b. — 8 : — 4
c. — 8 : + 4
d. + 8 : — 4.

Že podíl u každého případu bude 2, snadno nahlédneme, pročež se pouze jedná o to, jaké znaménko podíl 2 míti bude.

V prvním případu *a.* + 8 : + 4
se tážeme, kdy + 4 dá + 8? Odpověď: Když + 4 k sobě 2krát připočteme (+ 2krát), totiž
(+ 4) + (+ 4) = + 8, tedy + 8 : + 4 = + 2.

V druhém případu *b.* — 8 : — 4
se opět tážeme, kdy — 4 dá — 8? Odpověď: Když — 4 2krát k sobě připočteme (+ 2krát), totiž
(— 4) + (— 4) = — 8, tedy — 8 : — 4 = + 2.

V třetím případu *c.* — 8 : + 4
se tážeme, kdy + 4 dá — 8? Odpověď: Když + 4 2krát odečteme (— 2krát), totiž
$\mp (\pm 4) \mp (\pm 4) = (-4) + (-4) = -8$, tedy
— 8 : + 4 = — 2.

V čtvrtém případu konečně *d.* + 8 : — 2.
se tážeme, kdy — 4 dá + 8? Odpověď: Když — 4 2krát odečteme (— 2krát), totiž
$\mp (\mp 4) \mp (\mp 4) = (+4) + (+4) = +8$, tedy
+ 8 : — 4 = — 2.

Sestavíme-li pro lepší přehled rozřešené tyto případy pod sebe, totiž

a. + 8 : + 4 = + 2
b. — 8 : — 4 = + 2
c. — 8 : + 4 = — 2
d. + 8 : — 4 = — 2

vidíme, že souhlasná znaménka u odnásobence a odnásobitele (u *a.* *b.*) dají k podílu +, a protivná znaménka (u *c.* *d.*) — (tedy jako v násobení).

Že jednotlivé podíly i co do znamének i jinak jsou pravé, přesvědčíme se, násobíme-li odnásobitele patřičným podílem, součin, jak známo, se musí rovnati odnásobenci,

u *a.* dá + 4 × + 2 = + 8
„ *b.* „ — 4 × + 2 = — 8
„ *c.* „ + 4 × — 2 = — 8
„ *d.* „ — 4 × — 2 = + 8

Je-li odnásobenec složitý (vícečlen) a odnásobitel jednoduchý, uzávorkuje se odnásobenec a jako u čísel prostých vůbec dělí se nejprvé nejvyšší člen odnásobence, podíl se násobí odnásobitelem a součin ten se od patřičného členu odnásobence odečte t. j. znaménko jeho se v protivné promění a k členu tomu připočítá (§. 5.) n. p.

$$+ 66 : - 3 =$$
$$(+ 60 + 6) : - 3 = - 20 - 2 = - 22$$
$$\pm 60 \qquad = - 3 \times - 20$$
$$„ \; + 6$$
$$\pm 6 = - 3 \times - 2.$$
$$„$$

$$- 228 : - 4 =$$
$$(- 200 - 20 - 8) : - 4 = + 50 + 5 + 2 = + 57$$
$$\mp 200 \qquad = - 4 \times + 50$$
$$„ \; - 20 - 8$$
$$\mp 20 \qquad = - 4 \times + 5$$
$$„ \; - 8$$
$$\mp 8 \qquad = - 4 \times + 2$$
$$„$$

Je-li odnásobenec i odnásobitel složitý, uzávorkují se oba a dělí se jako u prostých čísel vůbec nejvyšším členem odnásobitele nejvyšší člen odnásobence, podíl se násobí každým členem odnásobitele, částečné součiny napíší se pod stejnorodé členy odnásobence a odečtou se t. j. znaménka částečných součinů se promění v protivná a tyto se připočtou k stejnorodým oněm členům (§. 5.), n. p.

$$+ 144 : - 12 =$$
$$(100 + 40 + 4) : (- 10 - 2) = - 10 - 2 = - 12$$
$$\pm 100 \pm 20 \qquad = - 10 \times - 10 + - 2 \times - 10$$
$$„ \; + 20 + 4$$
$$\pm 20 \pm 4 = - 10 \times - 2 + - 2 \times - 2.$$
$$„ \quad „$$

$$- 275 : - 11 =$$
$$(- 200 - 70 - 5) : (- 10 - 1) = + 20 + 5 = + 25$$
$$\mp 200 \mp 20 \qquad = - 10 \times + 20 + - 1 \times + 20$$
$$„ \; - 50 - 5$$
$$\mp 50 \mp 5 = - 10 \times + 5 + - 1 \times + 5$$
$$„ \quad „$$

Cvičení.

Dělte a u 1. 2. 3. 4. odůvodněte podíl.

1. + 8 : + 2, + 10 : + 5, + 9 : + 3, + 6 : + 2
2. — 4 : — 2, — 10 : — 2, — 6 : — 3, — 8 : — 2
3. + 10 : — 5, + 6 : — 3, + 9 : — 3, + 8 : — 2
4. — 6 : + 2, — 8 : + 2, — 4 : + 2, — 10 : + 2
5. (40 + 8) : + 4, (90 + 9) : + 9, (100 + 40 + 5) : — 5, (300 + 30 + 6) : — 6, (700 + 80 + 4) : — 7, (4000 + 80 + 8) : + 8.
6. (+ 100 + 60 + 8) : (+ 10 + 4), (+ 400 + 60 + 2) : (+ 40 + 2), (+ 600 + 50 + 1) : (+ 20 + 1), (+ 3000 + 400 + 60 + 5) : (+ 50 + 5), (+ 800 + 60 — 2) : (40 — 1), (+ 2000 + 200 + 4 — 8) : (+ 20 — 2), (+ 3000 + 100 — 20) : (+ 60 — 4).

Částka druhá.

Veličiny algebraické.

§. 8.

Číslicemi možná sice čísla zvláštní rozličného druhu vyjádřiti a je na rozličný způsob, jak jsme u početných tvarů viděli, spojovati, avšak nemožno určitě vytknutou hodnotu jejich zvšeobecniti, neboť, jak známo, naznačuje n. p. 5 vždy a všude jen 5 jedniček, jako + 8 zl. nebo — 8 zl. vždy a všude jen 8 jedniček, totiž zlatých, buď si už jmění nebo dluhu. Aby se této obmezenosti odpomohlo, zavedla se všeobecná znaménka, kterými možná nejen rozličné druhy veličin, nýbrž i libovolný počet jedniček vyjádřiti. Znaménka těchto čísel všeobecných jsou písmeny latinské, kterých se následovně užívá:

1. Veličiny, za známé (udané) se pokládající, vyjádřují se prvními písmenami abcedy totiž a, b, c, d....
2. Veličiny vyjadřené písmenami x, y, z považují se za neznámé.
3. Každá veličina všeobecná má libovolnou hodnotu podoby, avšak nemá nižádné hodnoty místné.
4. V témž početném tvaru nesmí kterákolivěk písmena hodnotu svou měniti, t. j. znamená-li v některém tvaru početném, n. p. *a* 6 zl., musí každé *a* v témže tvaru jen 6 zl. znamenati. Tytéž písmeny mají tedy v témže tvaru početném stejnou hodnotu.

Náuka jednající o počítání písmenami jmenuje se počtověda obecná (písmenná) nebo algebra,*) kdež

---

*) Původ slova toho hledají někteří v jazyku řeckém, jiní v arabském za předložkou al (kterou jiná slova arabská začínají jako almagest, alkali a j.), jiní opět myslí, že první, kdo písmenami počítal, byl Arab Geber a od toho prý se počítání písmenné nazvalo al Geber, nebo algebra.

naproti tomu počítání číslicemi nazýváme počtovědu zvláštní nebo všední.

§. 9.

O číslech všeobecných platí ohledně znamének vše, co o číslech zvláštních v předešlých §§. povědíno bylo, jen u srážení všeobecných veličin nepostačí pouze souhlasnosť znamének, nýbrž musejí mimo to býti veličiny ty stejnorodé t. j. musejí býti stejné a v stejném počtu, n. p.

$$+ a + a + a + a = 4a$$
$$+ b + b + b = 3b \text{ atd.}$$

U 4a jmenuje se zvláštní číslo 4 součinitel, a znamená, jak z uvedeného příkladu patrno, kolikrát by se všeobecná veličina sama k sobě připočítati měla. Taktéž jest 3 v příkladu 3b součinitel. Avšak jest číslo, naznačující kolikrát se veličina jakási sama k sobě připočítati má, skutečný činitel, (§. 6), za kterouž příčinou jest součinitel číslo zvláštní, které se číslem všeobecným násobiti má, tedy $4a = 4 \times a$, $3b = 3 \times b$ atd. Každá veličina sama o sobě má 1 za součinitele, n. p. $a = 1a$, $b = 1b$ atd., avšak se 1 co činitel ani nepíše, ani nevyslovuje.

Jsou-li veličiny různorodé, t. j. nejsou-li stejné, aneb jsouce stejné, jsou-li v rozličném počtu, nemožno je dohromady sraziti, n. p.

$$+ a + b + c = a + b + c.$$
$$+ 5a + 7aa = 5a + 7aa.$$

Poznamenání. Čísla zvláštní, bezejmenná, jsou vždy stejnorodá, různorodými stanou se teprv pojmenováním n. p. 5, 8, 13 atd. jsou stejnorodá, protože se zakládají na téže jedničce, avšak 5 zl., 8 lib., 13 roků atd. jsou různorodá, neboť jest základní jednička u každého z nich jiná: Jméno čísel zvláštních a písmena čísel všeobecných jsou si velmi podobny. Každé číslo zvláštní pojmenované jest vlastně součinitel, tak jako číslo zvláštní u písmeny, neboť n. p. 5 zl. = 1 zl. + 1 zl. + 1 zl. + 1 zl. + 1 zl. = 5 zl. jako $5a = a + a + a + a + a = = 5 \times a = 5a$. Jako možná + 5 zl. + 7 zl., nebo — 5 zl. — 7 zl., nebo — 5 zl. + 7 zl. (§. 3), taktéž možná + 5a + 7a, — 5a — 7a, — 5a + 7a dohromady sraziti, z čehož vysvítá, že ani znaménka ani součinitel veličinám stejnorodým u srážení nevadí. Začátečníci mohou písmeny, kde to početný tvar dovoluje (jmenovitě při sečítání a odčítání) za jména zvláštních číslic považovati.

§. 10.

Všeobecné veličiny nemají žádné hodnoty místné, nemohou se tedy jako čísla zvláštní dle soustavy dekadické, nýbrž pouze znaménkem $+$ nebo $-$ skládati.

Každá veličina sama o sobě, se součinitelem nebo s jinou veličinou bez jakéhokoliv znaménka spojená, nazývá se jednoduchý výraz algebraický, n. p. a, $5a$, $-7ab$, $+abbc$ atd.

Dvě nebo více veličin spojených znaménkem $+$ nebo $-$ jmenuje se složitý výraz algebraický, kterýž se opět nazývá buď

dvoučlen, jsou-li pouze dvě veličiny $+$ nebo $-$ spojeny n. p. $a + b$, $3a - 4b$ atd.
trojčlen, jsou-li tři veličiny $+$ nebo $-$ spojeny, n. p. $a + b + c$, $2a - 5b + 7c$ atd.
čtyrčlen, jsou-li čtyry veličiny $+$ nebo $-$ spojeny, n. p. $a + b + c + d$, $3a - 4bb + 7ccd + 8abb$ atd.
nebo vůbec mnohočlen n. p. $6a - 7b + 3cc + 7abb - 6aab + abba$ atd.

Složitý výraz algebraický musí se v každém tvaru početném uzávorkovati, aby se naznačilo, že, co se díti má s výrazem celým, díti se musí s každým v něm obsaženým výrazem jednoduchým.

§. 11.

U čísel zvláštních bezejmenných jsme brali pouze ohled na jejich souhlas (§. 3), u veličin všeobecných však musíme hleděti k souhlasu a k stejnorodosti. Složitý výraz algebraický sestávající ze stejnorodých veličin možná vždy v jednoduchý sraziti, jsou-li veličiny ty buď naskrz kladné nebo naskrz záporné. Součinitelé se totiž jako čísla zvláštní (§. 3.) dohromady sraží a stejná písmena (stejné písmeny) se k součtu tomu jednou přidá, n. p.

$$+ 5a + 10a = + 15a$$
$$+ 6aab + 7aab + 3aab + aab = 17\ aab.$$
$$- 3abb - 10abb - 14abb - abb = - 28abb.$$
$$- 10abc - 3abc - abc - 8\ abc = - 22abc.$$

Kdyby se složitý výraz algebraický skládal z veličin stejnorodých, avšak protivných, srazme nejprvé stejnorodé veličiny kladné a záporné ve dva výrazy jednoduché a tyto teprv v jediný výraz, n. p.

$$+ 6a - 6a = 0$$

$$+8a+6a-10a+7a-2a-6a=\underbrace{+8a+6a+7a}\underbrace{-10a-2a-6a}=+21a-18a=+3a.$$

$$-4ab+7ab-15ab-8ab+12ab-ab=+19ab-28ab=-9ab.$$

$$-3aab+aab-7aab+4aab-2aab=+5aab-12aab=-7aab.$$

Skládá-li se složitý výraz algebraický z veličin *různorodých*, napíší se tyto se svými znaménky pouze vedle sebe; kdyby však *některé z nich byly stejnorodé*, srazí se v jediný výraz, který se se svým znaménkem napíše k ostatním různorodým, n. p.

$$+6a-3b-7c+10a=+6a+10a-3b-7c=+16a-3b-7c.$$

$$-3ccd+7cdd-5cd=-3ccd+7cdd-5cd.$$

Ze všeho toho patrno, že se (jako v §. 3.) *stejnorodé souhlasné veličiny rozmnožují* a *stejnorodé veličiny protivné buď úplně nebo částečně snímají.*

Cvičení.

Srazte v jediný výraz:

1. $+3a+15a$; $+6ab+17ab+ab$; $+3aab+7aab+9aab$; $+7abbb+12abbb+21abbb+18abbb$.

2. $-7ab-2ab$; $-8ab-12ab-17ab$; $-5aabb-16aabb-13aabb$; $-abbc-7abbc-18abbc$.

3. $+3aab-15aab+aab-7aab-9aab$; $-5aabb+16aabb-20aabb+2aabb-14aabb+3aabb$; $-16abcc-abcc+7abcc-25abcc+32abcc-26abcc$; $-8cdd+13cdd-46cdd+cdd+38cdd-19cdd-$
$-5cdd$; $+18ddfg-24ddfg-13ddfg-28ddfg+$
$+2ddfg-38ddfg-12ddfg$.

4. Srazte jak možná: $-3abc+12abc-7ccd+9cdd-2ccd$; $+7ac-12acc+acd-16ac-14acc+8acd$; $+7xy-18xx+15xyy-22xy+28xx-28xyy+$
$+17xy-23xyy$; $-36xz-15xy+17xyz-26xy+$
$+17xy-26xyz-30xz-26xy$; $+22abb-18aab+7abc+29aab+ac-18abc-27aab-33abb+$
$+16ac-7abc-4ac$.

I, Počítání celými výrazy algebraickými.

1. Sečítání.

§. 12.

a. Sečítání výrazů jednoduchých.

Sečítati se mohou pouze veličiny stejnorodé, nechť jsou souhlasné nebo protivné; vždy se součinitelé sečtou, stejné písmeny k součtu tomu jednou přidají a znaménko sčítanců (jsou-li souhlasné) aneb sčítance většího (jsou-li protivné) se mu představí. Kdyby byli sčítancové různorodí, napíší se bez proměny za součet. N. p.

1. $(+ a) + (+ a) = + 2a.$
2. $(+ 4a) + (+ 7a) = + 11a.$
3. $(- 12ab) + (- 7ab) = - 19ab.$
4. $(- 6aa) + (- 14aa) = - 20aa.$
5. $(+ 8abb) + (- 7abb) = + abb.$
6. $(- 4ac) + (+ 9ac) = + 5ac.$
7. $(- 4acc) + (+ 15acc) = + 11acc.$
8. $(+ a) + (+ b) = a + b.$
9. $(- 4a) + (- 3aa) = - 4a - 3aa.$
10. $(+ 7ab) + (- 7c) = 7ab - 7c.$

b. Sečítání výrazů složitých.

Složité výrazy algebraické se sečítají jako jednoduché. Pro lepší přehled se

1. stejnorodé veličiny kladou vedle sebe, nebo pod sebe, a různorodé taktéž;
2. stejnorodé veličiny kladné se sečtou, taktéž záporné a srazí se v jediný výraz;
3. různorodé se k onomu výrazu se svými znaménky bez změny připíší; n. p.

$$5ab + (7cd + 3ab) + 9d - 3cd + (8ab - 4d + cd) =$$
$$5ab + 3ab + 8ab + 7cd + cd - 3cd + 9d - 4d =$$
$$16ab + 8cd - 3cd + 9d - 4d =$$
$$16ab + 5cd + 5d.$$

$$3aa - 5ab + (7aa - 4ac) + (18ab - 4aa) + 5ac =$$

$$\begin{array}{lll} + 3aa & - 5ab & - 4ac \\ + 7aa & + 18ab & + 5ac \\ - 4aa & & \\ \hline 6aa & + 13ab & + ac. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -6abb + (7aab - 18ab + 12abb) + 13aab + abb = \\ \qquad -6abb + 7aab - 18ab \\ \qquad +12abb + 13aab \\ \qquad + abb \\ \hline \qquad 7abb + 20aab - 18ab. \end{array}$$

Cvičení.

Sečtěte:

1. $(+3a) + (+8a)$; $(+12ab) + (+17ab)$; $(+24aa) + (+11aa)$; $(+13abc) + (+9abc)$.
2. $(-7aa) + (-13aa)$; $(-15ac) + (-27ac)$; $(-18accd) + (-accd)$; $(-29abb) + (-26abb)$.
3. $(+18aab) + (-7aab)$; $(+23aac) + (-28aac)$; $(-4ab) + (+17ab)$, $(-28ccd) + (+16ccd)$.
4. $5acc + (7acc - 18acc)$; $-16abb + (18abb - 20abb + abb)$; $20aab + 4aab + (7aab - 27aab)$; $-6acd + (17acd - 21acd - acd + 5acd)$; $(21xy + 7xy - 29xy) + (27xy - 12xy) + 16xy$.
5. $6aabb + (7aabb - 20aab + 7ab) + (-25ab - 2aab) + 28aab - 32\,ab$.
6. $(-3acc + 25ac) + (-18aac + ac - 17acc) + (-5ac + 32aac)$.
7. $12acd + (17acc - 18ad - 29acd) + (-15ad - 35acc - 16acd) + 32ad$.
8. $13xy - 12xz + (-26yz + 36xy - 41xz) - 18yz + (15xz - 16xy)$.

2. Odčítání.

§. 13,

a. Odčítání výrazů jednoduchých.

Algebraické veličiny jednoduché se odčítají jako veličiny zvláštní (§. 5.) totiž znaménko menšitele se promění v protivné a menšitel se připočítá k menšenci.

Ohledně na znaménka rozeznávají se 4 případy totiž:

1. $(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = +a - b$
2. $(-a) - (-b) = (-a) + (+b) = -a + b$
3. $(+a) - (-b) = (+a) + (+b) = +a + b$
4. $(-a) - (+b) = (-a) + (-b) = -a - b$.

Že tomu tak přesvědčíme se, připočteme-li rozdíl k patřičnému menšiteli, součet, jak známo, se musí rovnati menšenci, tedy:

1. rozdíl $+$ menšitel $= (+ a - b) + b = + a =$ menšenci
2. „ $+$ „ $= (- a + b) - b = - a =$ „
3. „ $+$ „ $= (+ a + b) - b = + a =$ „
4. „ $+$ „ $= (- a - b) + b = - a =$ „

b. Odčítání výrazů složitých.

Je-li menšitel výraz složitý, uzávorkuje se, neboť před ním položené znaménko odčítání naznačuje, že se má celý menšitel t. j. každá jeho část odečísti. Odčítání děje se zcela jako u výrazu jednoduchého totiž: znaménko každé částky menšitele promění se v protivné a částky takto změněné se k menšenci připočítají, načež stejnorodé z nich se srazí, n. p.

$$+ 8a \mp (\pm 7a \mp 5b) = + 8a + (- 7a + 5b) = 8a - - 7a + 5b = a + 5b.$$

$$- 26aab \mp (\mp 2ac \pm 16aab) = - 26aab + (+ 2ac - 16aab) = - 26aab + 2ac - 16aab = - 42aab + 2ac.$$

$$- 9aa + 5ac + 12acc \mp (\pm 6ac \mp 18acc) \mp (\pm ac \pm 16aa) = - 9aa + 5ac + 12acc - 6ac + 18acc - ac - 16aa = - 25aa - 2ac + 30acc.$$

Je-li menšenec výraz složitý a jsou-li některé jeho částky stejnorodými s částkami menšitele, kladou se obyčejně tyto pod sebe, znaménka menšitele se promění v protivná a srazí se; n. p. Na místě

$3ab - 4aa + 7abb - (- 5aa + 7ab - 15abb)$ píše se

$$\begin{array}{rrrr} & + 3ab & - 4aa & + 7abb \\ \mp (& \pm 7ab & \mp 5aa & \mp 15abb \\ \hline & - 4ab & + aa & + 22abb. \end{array}$$

znaménka se promění v protivná a výrazy se srazí

$$\begin{array}{rrrrrr} & + 6ac & - 8aac & + 9acc & - 17abc & \\ \mp (& \mp ac & \mp 2aac & \pm 16acc & \pm 4abc & \mp 2abb) \\ \hline & + 7ac & - 6aac & - 7acc & - 21abc & + 2abb. \end{array}$$

Cvičení.

Odečtěte:

1. $(+ 8a) - (+ 6a)$, $(+ 24cc) - (+ 25cc)$, $(+ 18ac) - (+ 20ac)$, $(+ 36abb) - (+ 9abb)$;

2. $(-mn) - (8mn)$, $(-6np) - (-27np)$, $(-13fg) - (-20fg)$, $(-30xyz) - (-42xyz)$;
3. $(+18mn) - (-mn)$, $(+19xy) - (-13xy)$; $(+21pq) - (-pq)$, $(+xyz) - (-15xyz)$;
4. $(-4abb) - (+11abb)$, $-(+13abbb) - (+abbb)$, $(-cd) - (+7cd)$, $(-17ac) - (+9ac)$;
5. $(+23aac) - (14a + 18aac)$; $(-26aad) - (-15ad - 17aad)$; $(-13add) - (-7aad + 5add)$; $(-33xy) - (-5x - 30xy)$;
6. $(+34a) - (5ac + 7a) - (8a - 7ac)$; $(-7ad + 9aad) - (6ab - 13aad) - (19ad + 2aad - 6ab)$; $(-5mn + 10mp) - (7mn + mp) - (-9q)$; $(-18ac + 26aac + 9acc) - (-7ad - 15aac + 9acc) - (-18ac - 5aac)$;
7. $(12x + 17xy - 8yz) - (-28xy - 37x + 23yz)$; $(36mn + 20mp - 7np - 8m) - (-3mp + 9np - 10m + 40mn)$; $(46mq - (10q + 15nq) + 6nq) - (-23q + 13mq - (6q + 3nq) - 28nq)$; $(+38x - 15xy - 16z - 16xz) - (-39xz + 16yz - (xy - x) + 36xy)$.

3. Násobení.

§. 14.

a. Násobení výrazu jednoduchého jednoduchým.

U násobení algebraických výrazů nutno bráti ohled na tři věci, totiž:

1. na znaménka,
2. na součinitele,
3. na písmeny.

1. O znaménkách platí vše, co při násobení čísel zvláštních (§. 6.) pověděno bylo, totiž že násobitel znaménka míti nemá a pakli že s některým spojen jest, že jest to znaménko sečítání aneb odčítání, a že stejná znaménka obou činitelů dají k součinu + a protivná —.

2. Součinitelé se násobí jako čísla zvláštní vůbec.

3. Písmeny, nechť jsou stejné nebo rozličné, kladou se po vynechání znaménka násobení v abecedním pořádku vedle sebe, t. j. násobení písmen se může pouze naznačiti. Že se nemohou písmeny u násobení tak v hromadu sraziti jako u sečítání nebo odčítání (kde jsme je za jména součinitelů považovali), má svou příčinu v tom, poněvadž každá písmena má nejen libovolnou hodnotu podoby co číslo, nýbrž může i libovolnou věc naznačovati (§. 8), tak že, (není-li hodnota písmeny

jmenovitě udána) věděti nemůžeme, co a, b, c,... významenává, leč to, že v tomže příkladu není a to co b, nebo c co d..a naopak, že není b to co a, c, d... atd.

Máme-li tedy n. p. $a \times b$, nevíme, na jaké jedničce se zakládá a, a kolik těch základních jedniček v sobě obsahuje, o b, jelikož násobiteli víme pouze, že naznačuje, kolikrát se násobenec a sám k sobě připočítati má, avšak opět nevíme, kolikrát bylo a sčítancem, pročež se řekne a byl sčítancem b-krát a píšeme a-krát b ($a \times b$), nebo po vynechání znaménka násobení ab.

N. p. $+a \cdot +b = +ab$

$-a \cdot -b = +ab$

$+a \cdot -b = -ab$

$-a \cdot +b = -ab$

$+4a \cdot -7ab = -28aab$ t. j. protivná znaménka dají k součinu —, součinitelé se násobí jako čísla vůbec, $4 \times 7 = 28$, a písmeny se v abecedním pořádku vedle sebe kladou aab.

$-8xy \cdot -6xyz = +48xxyyz.$

Měli-li by se tři, čtyři atd. činitelé násobiti, násobí se nejprvé první druhým, součin těch třetím atd., n. p.

$$\underbrace{+6a \cdot -7ab}_{} \cdot +5abb =$$
$$-42aab \cdot +5abb = -210aaabbb.$$
$$\underbrace{-4xy \cdot +3yz}_{} \cdot -4y \cdot +5yz = \underbrace{-12xyyz \cdot -4y}_{} \cdot +5yz =$$
$$+48xyyyz \cdot +5yz = 240xyyyyzz.$$

b. Násobení výrazů složitých.

Rozeznáváme zde tré případů, totiž
1. buď jest násobenec složitý a násobitel jednoduchý,
2. nebo jest násobenec jednoduchý a násobitel složitý, nebo
3. oba činitelé jsou složití.

1. Je-li násobenec výraz složitý, tu se každý jeho člen násobitelem násobí (§. 6), poněvadž násobitel udává, kolikrát se celý násobenec (tedy každý jeho člen) sám k sobě připočítati má, za kterouž příčinou se násobenec uzávorkuje.

Při násobení beře se ohled na znaménka každého členu násobence a násobitele, na součinitele a na písmeny. Částečné součiny se k sobě připočtou. N. p.

$(3a + 4b) \cdot -5a = -15aa - 20ab.$

$(4ab + 7ac - 3bc) \cdot -2ac = -8aabc - 14aacc + 6abcc.$

$(-3xy - 4y + 5z) \cdot -4yz = +12xyyz + 16yyz - 20yzz.$

2. Totéž se děje, kdyby násobenec byl výraz jednoduchý a násobitel složitý, n. p.

$$+ 6a \cdot (5ab - 7a) = 30aab - 42aa.$$
$$- 9ab \cdot (7ab - 6b + 3a) = - 63aabb + 54abb - 27aab.$$

3. Kdyby *násobenec* i *násobitel* byli výrazy složité, uzávorkují se oba, *každý* člen násobence se násobí *každým* členem násobitele a částečné součiny se, možná-li, srazí, za kterouž příčinou se hned při násobení stejnorodé veličiny pod sebe kladou. N. p.

$$\begin{array}{l} (4a + 5b) \cdot (6a + 7b) = 24aa + 30ab \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 28ab + 35bb \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 24aa + 58ab + 35bb \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (aa + ab + bb) \cdot (a - b) \\ \qquad = aaa + aab + abb \\ \qquad\qquad\quad - aab - abb - bbb. \\ \hline \qquad\quad aaa \quad 0 \quad 0 \quad - bbb = aaa - bbb. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (6ab - 3a + 2bb) \cdot (4a + 3bb - ab) \\ = 24aab - 12aa + 8abb + 18abbb + 6bbbb - 6aabb + 6aab. \\ \qquad\qquad\qquad - 9abb - 2abbb \\ \hline \quad 24aab - 12aa - abb + 16abbb + 6bbbb - 6aabb + 6aab \end{array}$$

Kdyby bylo *více složitých činitelů*, násobil by se nejprvé první druhým, součin se, možná-li, srazí a násobí se činitelem třetím, součin opět se srazí atd. N. p,

$$\begin{array}{l} \underbrace{(3a - 4b) \cdot (5a + 3b)} \cdot (4a - b) = \\ 15aa - 20ab \\ \qquad + 9ab - 12bb \\ \hline (15aa - 11ab - 12bb) \cdot (4a - b) \\ \qquad = 60aaa - 44aab - 48abb \\ \qquad\qquad\quad - 15aab + 11abb + 12bbb \\ \hline \qquad 60aaa - 59aab - 37abb + 12bbb. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underbrace{(3x - 4y) \cdot (3x + 4y)} \cdot (x - y) \cdot (2x - 3y) = \\ 9xx - 12xy \\ \qquad + 12xy - 16yy \\ \hline \underbrace{(9xx \qquad - 16yy) \cdot (x - y)} \cdot (2x - 3y) = \\ (9xxx - 16xyy - 9xxy + 16yyy) \cdot (2x - 3y) = \\ \quad 18xxxx - 32xxyy - 18xxxy + 32xyyy \\ \qquad\qquad + 27xxyy - 27xxxy + 48xyyy - 48yyyy \\ \hline \quad 18xxxx - 5xxyy - 45xxxy + 80xyyy - 48yyyy. \end{array}$$

Cvičení.

1. $6a \cdot - 5b$, $7a \cdot + 3ab$, $10ab \cdot + 5bc$, $9m \cdot - 3mn$, $- 4mn \cdot - 5mn$, $- 6mp \cdot + 8mn$, $- 5x \cdot - xy$.

2. $3a \cdot -4b$, $8ab \cdot -4ac \cdot -5ab$;
$7aa \cdot -4ab \cdot 10bb \cdot +9ab$;
$8ac \cdot -7aac \cdot -acc \cdot -9abc$.
3. $(2a + 3b) \cdot -2a$; $(4a + 3ab - c) \cdot 3ac$;
$(4mn + 5mp - 3np + mnp) \cdot -2mnp$;
$(10p - 4q + 7pq - pp) \cdot -6pq$;
$(8ab - 3cd + 4b) \cdot -2a$;
$(-10xy - 13xz + 12yz + 3xx) \cdot -3xxz$.
4. $12ab \cdot (-4a + b)$; $9bc \cdot (3ab - 4ac - bc)$;
$2ac \cdot (-10aa - 12abb - 13abbc + aab)$.
5. $(a+b) \cdot (a+b)$; $(a-b) \cdot (a-b)$; $(a+b) \cdot (a-b)$;
$(aa+2ab+bb) \cdot (a-b)$; $(4aa-12ab+9bb) \cdot (2a+3b)$;
$(9aa - 24ab + 16bb) \cdot (3a + 4b)$;
$(16aa - 8ab + bb) \cdot (4aa + 4ab + bb)$;
$(4m + 3n - 6mn) \cdot (5m - 2n + mn)$.
6. $(3x - 4y) \cdot (5x + y) \cdot (x - 5y)$;
$(5xy - 5y + 2x) \cdot (4x - y) \cdot 6y$;
$3yz \cdot (4xz - 10x) \cdot (-8xy - 5yz - x)$.

4. Odnásobení.

§. 15.

a. Odnásobení výrazů jednoduchých.

Každá veličina jest sama v sobě jednou obsažena, n. p. $a : a = 1$, $b : b = 1$ atd.

Má-li výraz algebraický jednoduchý více písmen n. p. abbc, tu z předešlého §. známo, že písmeny takové jsou naznačené násobení, že tedy každá z nich jest činitel, který sám v sobě 1 obsažen jest. Takový výraz algebraický může se tedy jiným jen tehdáž skutečně děliti, když jest tento roven jednotlivým činitelům onoho, n. p.

$abbc : ab = bc$, neboť
a jest v a obsaženo 1
b „ v b „ 1, tedy $abbc : ab = 1 \cdot 1 \cdot bc = bc$.
$abbc : abc = b$, neboť jest opět
a v a obsaženo 1
b v b „ 1
c v c „ 1, tedy $abbc : abc = 1 \cdot 1 \cdot b \cdot 1 = b$.

Jednička co činitel se nepíše, pročež se hned udá pravý podíl. Kdyby však odnásobenec a odnásobitel stejných činitelů neměli, nemohlo by se děliti, nýbrž by se odnásobení pouze naznačilo v podobě zlomku, n. p.

$$a : b = \frac{a}{b}$$

$$ab : cd = \frac{ab}{cd}$$

Kdyby byli v odnásobenci a v odnásobiteli někteří činitelé sobě rovni, jiní rozliční, dělili by se činitelé odnásobence rovným činitelem (činiteli) odnásobitele, a co by se nemohlo děliti, napsalo by se v podobě zlomku, anebo celé odnásobení by se naznačilo v podobě zlomku a stejní činitelé v čitateli a jmenovateli by se skrátili. N. p.

$$\cancel{a}\cancel{a}acc : \cancel{a}\cancel{a}d = \frac{acc}{d}, \text{ nebo } aaacc : aad = \frac{\cancel{a}\cancel{a}acc}{\cancel{a}\cancel{a}d} = \frac{acc}{d}.$$

U odnásobení beře se jako u násobení ohled na znaménka, součinitele a písmeny:

Souhlasná znaménka dají k podílu +, protivná — (§. 7); součinitelé se dělí jako čísla zvláštní, a písmeny dle uvedeného se co možná skrátí. N. p.

$$-18\,\cancel{a}\cancel{a}c : +9\,\cancel{a}\cancel{a}b = -\frac{2\,c}{b} \text{ nebo:}$$

$$-18\,aac : +9\,aab = \frac{-18\,\cancel{a}\cancel{a}c}{+9\,\cancel{a}\cancel{a}b} = -\frac{2\,c}{b};$$

$$+24\,xyy : -6\,yz = -\frac{4\,xy}{z};$$

$$-24\,xyy : +6\,yz = -\frac{4\,xy}{z};^{*)}$$

$$-30\,mmnp : -5\,mnpq = +\frac{6\,m}{q};$$

$$+72\,abcc : +9\,bccd = +\frac{8\,a}{d}.$$

O pravosti podílu se přesvědčíme, násobíme-li jej odnásobitelem, součin obou se musí rovnati odnásobenci.

b. Odnásobení výrazů složitých.

Jako u násobení rozeznáváme i zde tré případů, totiž:

1. buď jest odnásobenec složitý a odnásobitel jednoduchý, nebo
2. jest odnásobenec jednoduchý a odnásobitel složitý, nebo
3. odnásobenec i odnásobitel jsou složití.

1. Je-li odnásobenec složitý a odnásobitel je-

---

*) Z těchto dvou příkladů patrno, že hodnota zlomku jest záporná (—), je-li buď čitatel (odnásobenec) kladný a jmenovatel (odnásobitel) záporný, nebo naopak, je-li čitatel záporný a jmenovatel kladný.

dnoduchý, uzávorkuje se odnásobenec a každý jeho člen se dělí odnásobitelem, n. p.

$$(+4aa + 6aab - 10abb) : 2a =$$

$$\left.\begin{array}{l} +4aa : +2a = +2a \\ +6aab : +2a = +3ab \\ -10abb : +2a = -5bb \end{array}\right\} = +2a + 3ab - 5bb;$$

$$(-3abc + 9abb - 15aabc) : -3ab = +c - 3b + 5ac.$$

2. Je-li odnásobenec jednoduchý a odnásobitel složitý, možná odnásobení pouze naznačiti v podobě zlomku. N. p.

$$+5aa : (4a - 7b) = \frac{5aa}{4a - 7b};$$

$$-3abb : (2a - 3ab + abb) = \frac{-3abb}{2a - 3ab + abb}.$$

3. Je-li odnásobenec i odnásobitel složitý, uzávorkují se oba, a dělí se jako u složitých zvláštních čísel vůbec, (§. 7) totiž:

a. První člen odnásobence se dělí prvním členem odnásobitele, podílem se násobí celý odnásobitel, částečné tyto součiny se napíší pod stejnorodé členy odnásobence (každý se svým znaménkem) a odečtou se.

b. K zbytku se připíší některé členy odnásobence; dělí se opět první zbytek v odnásobenci prvním členem odnásobitele, podíl se napíše k prvnímu (s patřičným znaménkem), a násobí se jím opět celý odnásobitel; částečné součiny se opět napíší pod stejnorodé členy odnásobence a odečtou se.

c. K zbytku tomu se připíší opět ostatní členy odnásobence a dělá se jako prvé. Zbyde-li konečně jeden neb více členů, z nichž není žádný odnásobitelem dělitelný, napíše se k němu odnásobitel za jmenovatele, a zlomek ten se připočte k podílu. N. p.

$$\begin{array}{lllll} & (16aa & -40ab & +25bb) : (4a - 5b) = 4a - 5b. & \\ & \pm 16aa & \mp 20ab & & = (4a - 5b) \cdot +4a \\ \hline ,, & & -20ab & +25bb & \\ & & \mp 20ab & \pm 25bb & = (4a - 5b) \cdot -5b \\ \hline & & ,, & ,, & \end{array}$$

$$(21aa - 10ab - 24bb - ac + 32bc - 10cc) : (3a - 4b + 2c) = 7a + 6b - 5c.$$

$$\begin{array}{llllllll} & \pm 21aa & \mp 28ab & & \pm 14ac & & & = (3a - 4b + 2c) \cdot +7a \\ \hline ,, & & +18ab & -24bb & -15ac & +32bc & -10cc & \\ & & \pm 18ab & \mp 24bb & & \pm 12bc & & = (3a - 4b + 2c) \cdot +6b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
,, \quad ,, & -15ac+20bc-10cc & \\
 & \mp 15ac \pm 20bc \mp 10cc & = (3a-4b+2c)\cdot -5c \\
\hline
 & \quad ,, \quad ,, \quad ,, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(aaa - 27\,bbb) : (a - 3\,b) = aa - 3\,ab + 9\,bb. \\
\pm\, aaa \quad \mp\, 3\,aab \\
\hline
,, + 3\,aab - 27\,bbb \\
\pm\, 3\,aab \qquad \mp\, 9\,abb \\
\hline
,, + 9\,abb - 27\,bbb \\
\pm\, 9\,abb \mp 27\,bbb \\
\hline
\quad ,, \quad ,,
\end{array}$$

Cvičení.

1. $+ 18ab : + 9a$, $- 36aab : - 4ab$, $+ 38acc : - 19ac$, $- 25abcc : + 5bc$, $- 81acdd : - 27d$, $+ 40abb : - 2abb$, $- 52aacc : 4\,aac$, $- 42mmnp : + 14mp$.
2. $- 16abb : - 4aab$, $+ 45\,accd : - 9aac$, $+ 49abc : - 7aabb$, $- 60mmnn : - 12mmnp$, $- 64mpp : - 8mnp$, $+ 63mnpp : - 7mmp$, $+ 28mmnp : + 4mnpp$.
3. $(20abbc - 15abbcc) : + 5abc$; $(36aabcc - 56abbcc) : - 4abcc$; $(- 32mmnp + 16mmpp) : - 8mp$, $(- 9mnpp + 15mmnp - 21mnp) : - 3mp$; $(14mmnpp - 28mmmnp + 42mmnpp) : - 7\,mnp$.
4. $4abb : (2ac - 5ab)$, $- 8aab : (5aab - 3cd)$, $- 15acc : (- 8ab + 3ac + 7bc)$.
5. $(4aa + 40ab + 100bb) : (2a + 10b)$; $(25aa - 10ab + bb) : (5a - b)$; $(4aaa - 24aab + 24abb - bbb) : (2a - 2b)$; $(12aa - 43ab + 10bb + 6ac - 20bc) : (3a - 10b)$; $(6aa - 26ab + 20bb + 6ac - 20bc) : (2a - 2b + 2c)$; $(aaa - bbb) : (a - b)$; $(8xxx - 8yyy) : (2x - 2y)$; $(81xxxx - 81yyyy) : (3x - 3y)$.

Vyvozování z násobení a odnásobení.

§. 16.

V předešlých §§. jsme viděli, jak se u algebraických veličin z činitelů součin, z odnásobence a odnásobitele podíl vyvozuje. Odnásobenec jest součin odnásobitele a podílu, tedy jsou odnásobitel a podíl činitelé odnásobence. Velmi často se stává, že se mají z *daného součinu činitelé, z nichž byl*

vznikl, udati, t. j. že se má z odnásobence odnásobitel a podíl určiti. Provedení takových úloh jest v algebře snadné, jmenovitě proto, že v součinu jednotliví činitelé vesměs jsou patrní, neboť nesplývají tak v celek jako u čísel zvláštních, poněvadž se jimi součin pouze naznačiti může. Rozdíl součinu čísel zvláštních a všeobecných vysvítá z následujícího příkladu:
$8 \cdot 9 = 72$, $a \cdot b = ab$.

Kdybychom měli udati ze součinu 72 ony dva činitele, z nichž vznikl $(8 \cdot 9)$, patrno, že to věc skoro nemožná, neboť 72 mohlo vzniknouti z $2 \cdot 36$, $3 \cdot 24$, $4 \cdot 18$, $8 \cdot 9$, kde naproti tomu ze součinu ab hned pozorujeme, že nejsou oni dva činitelé, z nichž vznikl, jiní, než-li $a \cdot b$.

Kdyby dán byl součin algebraických veličin, a kdybychom měli určiti činitele, z nichž vznikl, vysaďme společného činitele všech členů, dělme jím do celého součinu, a bude takto společný činitel jedním a podíl druhým činitelem daného součinu. N. p. kdybychom měli součin $aa + ab$ na dva činitele rozvesti, vysaďme společného činitele a, a dělme jím součin celý totiž

$$(aa + ab) : a = a + b,$$

z čehož vysvítá, že $(aa + ab) = a \cdot (a + b)$.
Nebo kdybychom měli součin $aab + aabc + aaabbc$ na činitele rozvesti, tu společný činitel všech členů jest aab, tedy
$(aab + aabc + aaabbc) : aab = 1 + c + abc$,
tedy $(aab + aabc + aaabbc) = aab \cdot (1 + c + abc)$.
Taktéž jest u $4xxy - 6xyy + 10xy$
společný činitel $2xy$, tedy $(4xxy - 6xyy + 10xy) : 2xy =$
$= 2x - 3y + 5$
a $(4xxy - 6xyy + 10xy) = 2xy \cdot (2x - 3y + 5)$ atd.

Cvičení.

Z jakých činitelů vznikly následující součiny?
$abb + abc$; $abcc - aabc + abbc$; $mmn - mnpp + mmnpp$;
$6aab - 3ab + 9abb$; $4aa + 8aab + 16abb$;
$5xyz - 10xxyzz + 25xyyz - 50xyzz$.

II. Počítání zlomkovými výrazy algebraickými.

1. Sečítání.

§. 17.

Známo, že jen zlomky stejných jmenovatelů sečítati možno, a že se čítatelé sečítají, společný jmenovatel pak jednou (jelikož jméno) pod ně napíše, n. p.

$$\frac{4a}{5b} + \frac{3a}{5b} = \frac{4a + 3a}{5b} = \frac{7a}{5b}.$$

$$\frac{8aa}{3bc} + \frac{2a}{3bc} + \frac{7aa}{3bc} = \frac{8aa + 2a + 7aa}{3bc} = \frac{15aa + 2a}{3bc}.$$

Měl-li by se zlomek připočítati k celé veličině algebraické, musí se tato, jako u čísel zvláštních, na jmenovatele zlomku uvesti, což se, jak známo, stane, násobíme-li a dělíme-li celou veličinu oním jmenovatelem, n. p.

$$a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}.$$

$$2a + \frac{3a}{4b} = \frac{2a \cdot 4b}{4b} + \frac{3a}{4b} = \frac{8ab + 3a}{4b}.$$

$$5\,ab + \frac{4\,ac}{5\,b} = \frac{25\,abb + 4\,ac}{5\,b}.$$

$$a + \frac{3aa - 2ab}{a + b} = \frac{a(a + b) + 3aa - 2ab}{a + b} = \frac{aa + ab + 3aa - 2ab}{a + b}$$
$$= \frac{4\,aa - ab}{a + b}.$$

Kdyby se zlomky rozličných jmenovatelů k sobě připočítati měly, určí se nejprvé společný nejmenší jmenovatel, na kterého se veškeré ty zlomky uvedou, n. p.

$$\frac{4\,a}{5} + \frac{5\,a}{8} + \frac{3\,a}{10} + \frac{7\,a}{4}$$

Nejmenší společný jmenovatel se určí známýn způsobem, totiž tento se dělí každým jmenovatelem, podílem se násobí čítatel téhož zlomku, a k součtu čítatelů přidá se společný jmenovatel.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{5},\ 8,\ 10,\ \cancel{4} & 2 \\ 4,\ \ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{2 \times 4 \times 5 = 40} \\ \hline 8 & 32\,a \\ 5 & 25\,a \\ 4 & 12\,a \\ 10 & 70\,a \quad \text{t. j.} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{4\,a}{5} + \frac{5\,a}{8} + \frac{3\,a}{10} + \frac{7\,a}{4} = \frac{139\,a}{40}.$$

$$\frac{3\,a}{8\,b} + \frac{5\,aa}{16\,bb} + \frac{9\,b}{10\,aa} + \frac{3\,c}{4\,aab}$$

Nejprvé se určí nejmenší společný jmenovatel čísel zvlaštních, a pak čísel obecných, totiž:

$$\begin{array}{rrrr|l}
8b, & 16\,bb, & 10\,aa, & 4\,aab & 4 \\
 & 4\,bb & & aab & 2 \\
 & 2\,bb & 5\,aa & aab & 2 \\
 & bb & 1 & b & 5 \\
 & b & 1 & 1 & aa \\
 & & & & b \\
 & & & & b
\end{array}$$

$$4 \times 2 \times 2 \times 5 \times aabb = 80\,aabb$$

$$\begin{array}{r|l}
10\,aab & 30\,aaab \\
5\,aa & 25\,aaaa \\
8\,bb & 72\,bbb \\
20\,b & 60\,bc
\end{array}$$

tedy $$\frac{3\,a}{8\,b} + \frac{5\,aa}{16bb} + \frac{9\,b}{10\,aa} + \frac{3\,c}{4aab} = \frac{30\,aaab + 25\,aaaa + 72\,bbb + 60\,bc.}{80aabb}$$

Cvičení.

1. $\frac{7\,a}{16} + \frac{11\,a}{16}$; $\frac{6\,a}{10} + \frac{17\,a}{10} + \left(\frac{-2\,a}{10}\right) + \left(\frac{-a}{10}\right)$;
$\frac{7\,ab}{8\,cd} + \frac{5\,ab}{8\,cd} + \frac{3\,ab}{8\,cd} + \frac{ab}{8\,cd}$;
$\frac{5\,aa}{7\,b} + \frac{4\,ac}{7\,b}\left(\frac{-4\,aa}{7\,b}\right) + \left(\frac{-ac}{7\,b}\right)$;
$\frac{25\,a - 3\,b}{a - b} + \frac{13\,a - 5\,b}{a - b} + \frac{a + 2\,b}{a - b}$;
$\frac{x - n}{x + y + z} + \frac{y - z}{x + y + z} + \frac{2\,z + n}{x + y + z}$.

2. $a + \frac{7\,b + 7\,c}{8}$, $x + \frac{1}{x}$, $6\,a + \frac{3\,b}{7\,a}$,
$(25\,a - 25\,b) + \frac{17\,a}{3\,b}$, $7\,a + \frac{aa - bb}{4\,a}$,
$(3\,a + 4\,b) + \frac{7\,aa - 10\,ab}{2\,a - 3\,b}$, $(8\,x - 7\,y) + \frac{2\,xy - 8\,yy}{2\,x - y}$.

3. $\frac{2\,a}{3\,b} + \frac{4\,a}{7\,b}$; $\frac{a}{bbc} + \frac{d}{bcc}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$;
$\frac{9\,m}{8\,b} + \frac{7\,n}{3\,bb} + \frac{11\,m}{28\,b}$;

$$\frac{7\,m}{4\,b} + \frac{7\,n}{8\,bb} + \frac{23\,m}{10\,bbb} + \left(\frac{-14\,n}{5\,b}\right);$$

$$\frac{x}{y} + \frac{2\,xx + yy}{xy} + \frac{3\,xyy - 3\,xxx - yyy}{xxy}$$

$$+ \left(\frac{-xyyy + 2\,xxyy + yyyy}{xxyy}\right)$$

2. Odčítání.

§. 18.

Odčítati možná taktéž pouze zlomky stejných jmenovatelů, nemají-li jich, musejí se na společného jmenovatele uvesti. Poněvadž se však vždy jen *dva* zlomky od sebe odčítati mohou, tedy se společného jmenovatele docílí, pakli se čitatel i jmenovatel každého zlomku jmenovatelem druhého násobí. N. p.

$$\frac{3\,a}{4\,b} - \frac{a}{4\,b} = \frac{3\,a - a}{4\,b} = \frac{2\,a}{4\,b} = \frac{a}{2\,b}.$$

$$\frac{8\,aab}{3\,cd} - \frac{5\,ab}{3\,cd} = \frac{8\,aab - 5\,ab.}{3\,cd}$$

$$8\,a - \frac{4\,a}{5\,b} = \frac{8\,a \cdot 5\,b - 4\,a}{5\,b} = \frac{40\,ab - 4\,a.}{5\,b}$$

$$5\,ac - \frac{7\,b}{4\,ac} = \frac{20\,aacc - 7\,b.}{4\,ac}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad - bc.}{bd}$$

$$\frac{4\,a}{5\,b} - \frac{7\,a}{9\,b} = \frac{4a \cdot 9b - 7a \cdot 5b}{5\,b \cdot 9\,b} = \frac{36ab \; -35ab}{45\,bb} = \frac{a}{45\,b}.$$

Byl-li by čitatel menšitele výraz složitý, nemusí se, dokuď jest pod ním lomídko, uzávorkovati, avšak jak mile se čitatel jmenovatelem menšence násobí, musí se za znaménkem — uzávorkovati. N. p.

$$\frac{a - b}{a + b} - \frac{a + b}{a - b} = \frac{(a-b) \cdot (a-b) - (a+b) \cdot (a+b)}{(a + b) \cdot (a - b)} =$$

$$\frac{aa - 2ab + bb \mp (\pm\, aa \pm 2\,ab \pm bb)}{aa - bb} = \frac{-4\,ab}{aa - bb};$$

$$\frac{3\,a + 4\,b}{5\,c + d} - \frac{6\,a - 7\,b}{4\,c - 2\,d}$$

$$= \frac{(3\,a + 4\,b) \cdot (4\,c - 2\,d) - (6\,a - 7\,b) \cdot (5\,c + d)}{(5\,c + d) \cdot (4\,c - 2\,d)}$$

$$= \frac{12ac + 16bc - 6ad - 8bd \mp (\pm 30ac \mp 35bc \pm 6ad \mp 7bd}{20\,cc + 4\,cd - 10\,cd - 2\,dd}$$

$$= \frac{-18\,ac + 51\,bc - 12\,ad - bd}{20\,cc - 6\,cd - 2dd}.$$

Cvičení.

1. $\frac{a}{5} - \frac{b+c}{5}$, $\frac{a}{6} - \frac{b-c}{6}$, $\frac{a}{7} - \frac{b-c}{7}$,
$\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$, $\frac{3a}{3b} - \frac{4a}{5b}$, $\frac{7a-9b}{3a+2b} - \frac{5a-7b}{3a+2b}$,
$\frac{13a-29b}{5(a-b)} - \frac{7b-21a}{5(a-b)}$.

2. $a - \frac{a-c}{9}$, $m - \frac{n+p}{4}$, $a - \frac{b-c+d}{x}$,
$3a - \frac{5m-9an}{7n}$, $(14b+3ab) - \frac{4ab+7bb+2abb}{3a-2b}$,
$(4x+7y) - \frac{3xx-7yy}{4x-y}$, $a - \frac{19n-38mm+19am}{9m}$.

3. $\frac{3a-6b}{a+b} - \frac{5a-6b}{a-b}$, $\frac{7a-8b}{2a-2b} - \frac{a-b}{a+b}$,
$\frac{a}{b} - \frac{a+b}{2a-2b}$, $\frac{m}{a-b} - \frac{a-b}{m}$, $\frac{6a-7b}{3a-2b} - \frac{5a}{9b}$,
$\frac{2x}{11y} - \frac{3x-8y}{7x-5y}$, $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$,
$\frac{aa+ab+bb}{4ab+2b} - \frac{aa-ab+bb}{4a-4b}$,
$\frac{aa-bb}{4ab-1} - \frac{aa+bb}{ab-4}$.

3. Násobení.

§. 19.

Zlomek se násobí celou veličinou algebraickou anebo tato zlomkem, pak-li se čitatel násobí celou veličinou a jmenovatel se nepromění, nebo, pak-li se jmenovatel dělí celou veličinou — možná-li — a čitatel se nepromění, n. p.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}.$$

$$\frac{4a}{9bb} \cdot -3b = -\frac{4a}{3b}.$$

$$\frac{3m + 4n}{5q} \cdot -7m = \frac{-21mm - 28mn}{5q}.$$

Kdyby byl násobenec smíšená veličina algebraická, zřídí se nejprvé, a pak jako zlomek vůbec násobí, n. p.

$$\left(2a + \frac{4a}{5b}\right) \cdot 3b = \frac{10ab + 4a}{5b} \cdot 3b = \frac{30ab + 12a}{5}.$$

$$(3a + 4b) \cdot \left(3a - 4b + \frac{9aa + 16bb}{3a + 4b}\right) =$$

$$(3a + 4b) \cdot \frac{(3a - 4b) \cdot (3a + 4b) + 9aa + 16bb}{3a + 4b}.$$

$$= 9aa - 16bb + 9aa + 16bb = 18aa$$

Zlomek se násobí zlomkem, násobí-li se čítatel čítatelem a jmenovatel jmenovatelem. Kdyby ale jeden nebo oba činitelé byli veličiny smíšené, spořádají se nejprvé a pak se jako obyčejně násobí. Součin — možná — li — se srazí nebo skrátí. N. p.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{3a}{4b} \cdot \frac{5b}{7a} = \frac{15ab}{28ab} = \frac{15}{28}.$$

$$\frac{4a + 3b}{5a} \cdot \frac{3a - 4b}{2a - b} = \frac{12aa + 9ab - 16ab - 12bb}{10aa - 5ab}$$

$$= \frac{12aa - 7ab - 12bb}{10aa - 5ab}.$$

$$\left(a + \frac{a}{b}\right) \cdot \left(a - \frac{a}{b}\right) = \frac{ab + a}{b} \cdot \frac{ab - a}{b} = \frac{aabb - aa}{bb}$$

$$\left(3x - \frac{5x}{4y}\right) \cdot \left(2x - \frac{3x}{7y}\right) = \frac{12xy - 5x}{4y} \cdot \frac{14xy - 3x}{7y}$$

$$= \frac{168xxyy - 106xxy + 15xx}{28yy}.$$

Cvičení.

1. $\frac{7a}{8b} \cdot 6a$, $\frac{4aa}{5bb} \cdot 13$, $\frac{5a - 3b}{4a + b} \cdot 6ab$;

$\left(\frac{8xxx}{27yyy} + \frac{xxz}{yy} + \frac{3xzz}{8y} + \frac{27zzz}{64xy}\right) \cdot 8xyy$;

$$\left(\frac{aa}{4} + \frac{2ab}{3} + \frac{bb}{9}\right) \cdot (a - b).$$

2. $\frac{a}{bn} \cdot n, \; \frac{5bb}{9aa} \cdot 7ab, \; \frac{9nxx}{128yy} \cdot 32xxyy;$

$\frac{6a - 7b}{3a - 2b} \cdot 3a; \; 13mnn \cdot \frac{7pp}{8nn};$

$(6ab - 9ac) \cdot \frac{5a}{3a - 3b}; \; (x + y) \cdot \frac{x - y}{2\,(x + y)}.$

3. $\frac{3a}{4b} \cdot \frac{2b}{6a}, \; \frac{2a - 2b}{c} \cdot \frac{d}{a - b}, \; \frac{5\,(m - n)}{4\,(m + n)} \cdot \frac{8\,(m + n)}{15\,(m - n)};$

$\frac{3acd}{4pqx} \cdot \frac{16p}{27ac}, \; \frac{5mmnn}{7ppqq} \cdot \frac{3mm - 5nn - 7mn,}{6pp + 9qq - 11pq};$

$\frac{5ab}{4cd} \cdot \frac{3a - 5b}{10ab} \cdot \frac{2a + 3b}{a - b};$

$\frac{13 \cdot (a - b)}{7 \cdot (p - q)} \cdot \frac{5 \cdot (r - s)}{39 \cdot (a - b)} \cdot \frac{21 . (p - q)}{55 . (r - s)}.$

4. Odnásobení.

§. 20.

Zlomek se dělí celou veličinou, pak-li se jí buď čítatel dělí, možná-li, a jmenovatel se nepromění; anebo se čítatel nepromění, a jmenovatel se jí násobí. Je-li odnásobenec veličina smíšená, spořádá se dříve, n. p.

$$\frac{4aa}{5b} : 2a = \frac{2a}{5b}.$$

$$\frac{5ab}{2c} : 8cd = \frac{5ab}{16ccd}.$$

$$\frac{3xy}{4z} : 6xz = \frac{3xy}{24xzz} = \frac{y}{8zz}.$$

$$\left(a - \frac{4b}{3c}\right) : -5a = \frac{3ac - 4b}{3c} : -5a = -\frac{3ac - 4b}{15ac}.$$

$$\left(2m + \frac{3n + mn}{7n}\right) : 4n = \frac{14mn + 3n + mn}{7n} : 4n$$

$$= \frac{15mn + 3n}{7n} : 4n = \frac{15mn + 3n}{28nn} = \frac{n\,(15m + 3)}{28nn} =$$

$$= \frac{15m + 3}{28n}.$$

Je-li odnásobitel zlomek a odnásobenec celá veličina, obrátí se odnásobitel (t. j. čítatel stane se jmenovatelem a jmenovatel čítatelem) a násobí se jím veličina celá. Kdyby byl odnásobenec veličina smíšená, spořádá se nejprvé, n. p.

$$8a : \frac{4a}{5b} = 8a \cdot \frac{5b}{4a} = 2 \cdot 5b = 10b.$$

$$- 7ab : \frac{5a - 4b}{3c} = - 7ab \cdot \frac{3c}{5a - 4b} = - \frac{21abc}{5a - 4b}.$$

$$10xy : \left(x + \frac{2y}{3x}\right) = 10xy : \frac{3xx + 2y}{3x}$$

$$= 10xy \cdot \frac{3x}{3xx + 2y} = \frac{30xxy.}{3xx + 2y}.$$

Je-li odnásobenec i odnásobitel zlomek, obrátí se odnásobitel a násobí se jím odnásobenec. Byl-li by odnásobitel nebo odnásobenec, nebo kdyby byly oba veličiny smíšené, spořádají se nejprvé, a pak se odnásobenec obráceným odnásobitelem násobí, n. p.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{3a}{4b} : \frac{5a}{6b} = \frac{3a}{4b} \cdot \frac{6b}{5a} = \frac{18ab}{20ab} = \frac{9}{10}.$$

$$\left(2a + \frac{a}{b}\right) : \frac{3a}{4b} = \frac{2ab + a}{b} \cdot \frac{4b}{3a} = \frac{8ab + 4a}{3a}$$

$$= \frac{a\,(8b + 4)}{3a} = \frac{8b + 4}{3}.$$

$$\left(x + \frac{x - y}{x + y}\right) : \left(x - \frac{x - y}{x + y}\right) = \frac{xx + xy + x - y}{x + y} :$$

$$\frac{xx + xy \mp (x \mp y)}{x + y}.$$

$$= \frac{xx + xy + x - y}{x + y} \times \frac{x + y}{xx + xy - x + y}$$

$$= \frac{xx + xy + x - y}{xx + xy - x + y}.$$

Je-li oduásobenec nebo odnásobitel anebo jsou-li oba výrazy složité, přivedou se nejprvé na stejného jmenovatele, a pak se dělí zlomek zlomkem, n. p.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \frac{ad + bc}{bd} : \frac{ad - bc}{bd}$$

$$= \frac{ad + bc}{bd} \cdot \frac{bd}{ad - bc} = \frac{ad + bc}{ad - bc}.$$

$$\left(\frac{4m}{5n} - \frac{3m}{4n}\right) : \left(3m + \frac{m}{n}\right) = \frac{16mn - 15mn}{20nn} : \frac{3mn + m}{n}$$

$$= \frac{16mn - 15mn}{20nn} \cdot \frac{n}{3mn + m} = \frac{mn}{20nn} \cdot \frac{n}{3mn + m}$$

$$= \frac{m}{60mn + 20m} = \frac{m}{m\,(60n + 20)} = \frac{1}{60n + 20}\,.$$

Cvičení.

1. $\frac{8ab}{7cd} : 2abb,\ \frac{14aab}{13ccd} : 2bbc,\ \frac{32mn}{15pqq} : 16mm,$
$\frac{12mpq}{11nn} : 15mqq,\ \frac{10xyy}{2x + y} : 5xx.$

2. $a : \frac{1}{b},\ abc : \frac{ab}{cd},\ 3aabb : \frac{12aab}{5mn},\ 24aaabcd : \frac{8cd}{9aabb},$
$(49xxyyy - 28xxy) : \frac{7xxyy}{11pq}.$

3. $\frac{7ab}{3mn} : \frac{5pq}{11xyz},\ \frac{14abbb}{39ddcc} : \frac{35aab}{9ddc},\ \left(3a - \frac{5a}{4c}\right) : \frac{2a}{3c},$
$\left(2x - \frac{3x}{4y}\right) : \left(2x + \frac{3x}{8y}\right),\ \left(6a - \frac{8a}{3c}\right) : \frac{2a}{3b},$
$\left(x + \frac{1}{y}\right) : \frac{3xy + 4}{4y}.$

Částka třetí.

Mocnosti a veličiny kořenové.

§. 21.

Mocnosť nazýváme součin dvou neb více sobě rovných *činitelů*, n. p. $2 \times 2 = 4$, $2 \times 2 \times 2 = 8$, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ atd. nebo $a \times a = aa$, $a \times a \times a = aaa$, $a \times a \times a \times$, $a = aaaa$ atd. 4, 8, 16 .... aa, aaa, aaaa .... jsou mocnosti. Činitel, který se sám sebou násobí, nazývá se *kořen*, v uvedených příkladech 2, a. Dle toho, kolikráte se kořen sám sebou násobí, rozeznáváme rozličných mocností. Součin dvou sobě rovných kořenů nazýváme *mocnosť druhého stupně* (čtverec), n. p. $2 \times 2 = 4$, $a \times a = aa$; součin tří sobě rovných kořenů *mocnosť třetího stupně*, n. p. $2 \times 2 \times 2 = 8$, $a \times a \times a = aaa$; součin čtyř sobě rovných kořenů *mocnosť čtvrtého stupně*, n. p. $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, $a \times a \times a \times a = aaaa$ atd. Aby se sobě rovní činitelé v úplném počtu při umocňování psáti nemusili, psává se kořen pouze jednou, a k němu v pravo nahoru se napíše číslo udávající, kolikráte se kořen sám sebou násobiti má, tak se píše

na místě $2 \times 2 = 2^2$ nebo $a \times a = a^2$
„ „ $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ „ $a \times a \times a = a^3$
„ „ $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ „ $a \times a \times a \times a = a^4$ atd.

Číslo napsané v pravo u kořenu, které udává, kolikrát se kořen sám sebou násobiti má, jmenuje se *udavatel stupně mocnosti* nebo krátce *udavatel mocnosti*, n. p. $6^5 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$, 6 jest kořen a 5 udavatel mocnosti, taktéž u $a^4 = a \times a \times a \times a$ jest *a* kořen a 4 udavatel mocnosti, podobně bude $ab^2 = abb$, $a^3b^2 = aaabb$, $(ab)^2 = ab \times ab = aabb$, $(ab)^4 = ab \times ab \times ab \times ab$

$= aaaabbbb$, $(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b)$, $(a + b)^3 = (a + b) \times (a + b) \times (a + b)$ atd.

Mocnosť začíná sice teprv druhým stupněm, t. j. je-li některá veličina dvakráte sama sebou násobena, avšak se považuje každá veličina sama o sobě za mocnosť prvního stupně, n. p. 4, 5 .... a, b, c atd., a potřeba-li toho, znamená se též $4 = 4^1$, $5 = 5^1$, $a = a^1$, $b = b^1$, $c = c^1$ atd.

§. 22.

Jako jest odnásobení opak násobení, tak jest odmocňování opak umocňování.

Mocnosť jest součin dvou neb více sobě rovných činitelů, pak-li se naopak z mocnosti domáháme jediného z těchto činitelů nebo kořene, musíme mocnosť odmocniti. Odmocniti znamená tedy kořen dané mocnosti udati. Znamení odmocnění jest přetvořené r ($\surd$ = radix).

Na koliký stupeň možná veličinu umocniti, tolikého stupně možná kořene dobývati, tedy možná z veličiny dobývati kořene stupně druhého, třetího, čtvrtého atd., což se naznačí patřičným číslem vepsaným v otvor znamení odmocňování, kteréž jmenujeme dobyvatelem nebo udavatelem kořene; jen udavatel kořene druhého stupně se nepíše n. p. $\sqrt{4}$ znamená, z veličiny 4 se má dobývati kořene druhého stupně, $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[4]{16}$ atd. znamená, že se má z veličiny 8 dobývati kořene stupně třetího a z 16 kořene stupně čtvrtého atd.

Znamení odmocňování se vztahuje pouze k veličině u něho stojící n. p. $\sqrt{a^2}$; byla-li by veličina ta výraz složitý a mělo-li by se ze všech částek kořene dobývati, musí se buď uzávorkovati n. p. $\sqrt{}(a^2 + 2ab + b^2)$, anebo se nad ní rameno znamení odmocňování převede, totiž $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$.

1. Sečítání a odčítání mocností.

§. 23.

Sečítati a odčítati možná pouze mocnosti stejnorodé, t. j. takové, které mají tentýž kořen a tohotéhož udavatele; jsou-li však protivné, platí o nich vše, co o veličinách protivných vůbec. N. p.

$6a^2 + 7a^2 = 13a^2$ *)
$18ab^2 + 3ab^2 + ab^2 = 22ab^2.$
$13x^2y_2 \mp (\mp 4x^2\ y^2) = 17x^2y^2.$
$10x^3y^2 \mp (\pm 3x^3y^2) \mp (\mp 7x^3y^2) = 10x^3y^2 - 3x^3y^2$
$+ 7x^3y^2 = 14x^3y^2.$

Jsou-li mocnosti různorodé, možná sečítání a odčítání pouze naznačiti, n. p.

$8a^2 + (-7b^2) = 8a^2 - 7b^2.$
$3\,a^2b \mp (\mp 4\,a^2b^2) = 3\,a^2b + 4\,a^2b^2.$
$3\,a^2 - 4\,b^2 + 5\,c^2 - (+7\,d^2) = 3\,a^2 - 4\,b^2 + 5c^2 - 7d^2.$

Cvičení.

Sečtěte: $3\,a^2 + 4\,a^2 + 7\,a^2$, $8\,a^2b^3 + a^2b^3 + 2\,a^2b^3$,
$8\,a^2 + (-4\,a^2) + 3\,a^2b$, $5\,ac^3 + (-7\,ac^3) + (-a^3c^2)$;
$5\,a^3 + 7\,a^2b + (8\,a^3b^2)$.
Odečtěte: $9\,x^2 - (+7\,x^2)$, $15\,x^2y^2 - (-5\,x^2y^2)$,
$24\,xy^2z^3 - (+3\,xy^2z^3)$, $13\,x^3y^3 - (-5\,x^3y^3) - (10\,x^3y^3)$;
$8\,m^2n^2 - (+5\,m^2n^2) - (+3\,m^2n^2)$,
$6\,m^2n^2 + 7\,m^2p^2 - (-18\,m^2p^3 + 6\,m^2n^2)$,
$7\,x^2y^2 - (10\,x^2y^2 + 3\,x^2y^4 - x^2y^4)$,
$3\,x^3y^5 + x^2y^4 - (+3\,x^2y^4 - 5\,x^3y^5 - x^4)$.

2. Násobení mocností.

§. 24.

Mocnosti se násobí jako veličiny vůbec, totiž souhlasná znaménka dají k součinu +, protivná —, součinitelé se násobí jako čísla vůbec, a ohledně mocností samých platí následující pravidla:

1. Mocnosti rozličných kořenů napíší se vedle sebe a znaménko násobení se vypustí, n. p.

$$a^2 \times b^3 = a^2b^3,\ -a^2 \times b^2 \times c^3 = -a^2b^2c^3,$$
$$2\,a^3 \times -3\,c^2 = -6\,a^3c^2.$$

2. Mocnosti téhož kořene se násobí, pak-li se kořen jen jednou napíše a udavatelé se sečtou, n. p, $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$.

---

*) Vysloveno: 6(krát)a mocnosti druhé více 7(krát)a mocnosti druhé rovná se 13ti(krát)a mocnosti druhé.

Příčinu toho udává význam udavatelů samých, neboť udavatel mocnosti znamená, kolikráte se kořen sám sebou násobiti má, totiž $a^3 = a \cdot a \cdot a$, $a^2 = aa$, pročež $a^3 \cdot a^2 = aaa \cdot aa = a^5$.

Taktéž: $a^4 \times a^6 = aaaa \cdot aaaaaa = a^{4+6} = a^{10}$.

$$3\,a^2 \times 6\,a^4 = 3\,aa \cdot 6\,aaaa = 3 \cdot 6\,a^{2+4} = 18\,a^6$$

$$-\,a^3b^2 \times 6\,a^2b^4 = -\,aaabb \cdot 6\,aabbbb$$

$$= -\,6\,a^{3+2} \cdot b^{2+4} = -\,6\,a^5b^6.\text{*)}$$

3\. Je-li některý z činitelů anebo jsou-li oba složití, uzávorkují se a násobí se **každý** člen jednoho činitele **každým** členem činitele druhého, při čemž se opět hledí na znaménka, na součinitele a na kořeny. V součinu se stejnorodé mocnosti srazí. N. p.

$$(3\,a^2 - 5\,b^3 + 4\,a^2b^4) \cdot 4\,a^5b^2 = 12\,a^{2+5}b^2 - 20\,a^5b^{3+2}$$
$$+ 16\,a^{2+5}b^{4+2} = 12\,a^7b^2 - 20a^5b^5 + 16a^7b^6.$$

$$(4\,a^3 - 5\,b^3) \cdot (7a^5 + 4b^4) = 28\,a^8 - 35a^5b^3 + 16a^3b^4 - 20b^7.$$

$$(3\,x^2y^8 + 7\,x^3y^4) \cdot (-\,2\,x^2y^5 - 3\,x^4y^3) = -\,6\,x^4y^8 - 14\,x^5y^9 -$$
$$-\,9\,x^6y^6 - 21\,x^7y^7.$$

4\. Jsou-li kořeny rozličné, mají-li však stejného udavatele, násobí se, pakli se součin jednotlivých kořenů na společnou mocnosť uvede. N. p.

$$a^2 \cdot b^2 = aa \cdot bb = ab \cdot ab = (ab)^2.$$
$$a^4 \cdot c^4 = aaaa \cdot cccc = ac \cdot ac \cdot ac \cdot ac = (ac)^4.$$
$$x^5 \cdot y^5 = xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy = (xy)^5.$$

Cvičení.

1\. $a^3 \times b^4$, $2\,a^2 \times -\,4\,b^3$, $-\,4\,a^5 \times 7\,c^4$, $-\,3\,m^2 \times 10\,n^7$, $6\,m^2n^3 \times 5p^2q^4$, $-\,7\,m^2 \times 12\,n^2p^4$, $-\,4\,x^2y^3 \times -\,7\,y^4$.

2\. $a^5 \times a^3$, $a^4 \times a^7$, $4\,m^2 \times 7\,m^4$, $-\,6\,m^4 \times 3\,m^{10}$, $15\,n^2 \times -\,3\,n$, $-\,4\,a^2b^3 \times -\,5\,a^4$, $8\,a^5b^6 \times -\,7\,b^2$, $10\,a^4b^4 \times 3\,a^3b^6$, $14\,a^4b^3c^2 \times 8\,a^2bc^3$, $-\,12\,m^2n^3p^4 \times -\,5\,m^4n^3p^2$, $16\,m^4n^5 \times -\,3\,m^2n^3p^5$.

3\. $(a^3 - b^2 - c^4) \cdot a^2b^2c^2$, $(3\,a^4 - 5\,b^3) \cdot 5\,a^5b^6$, $(-\,4\,a^3b^4 + 3\,a^7b^2 - 10\,a^4b^5) \cdot 18\,a^2b^4$, $(5\,m^3n^2 - 3\,m^4n^5 + 5\,mn^6) \cdot 6\,m^2n^4p^4$.

4\. $(a^2 + 5^2) \cdot (a^2 - b^2)$, $(a^2 - 2\,ab + b^2) \cdot (a^2 - b^2)$, $(9\,a^2 + 24\,ab + 14\,b^2) \cdot (3\,a^2 + 4\,b^2)$, $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \cdot (x + y)$.

---

*) Vysloveno: záporné a třetí mocnosti (krát)b mocnosti druhé vedeno do 6(krát)a mocnosti druhé (krát)b mocnosti čtvrté se rovná 6(krát) a mocnosti páté(krát)b mocnosti šesté.

5. $a^3 \cdot b^3$, $c^4 \cdot d^4$, $- a^3 \cdot a^4 \cdot b^4$, $7^2 \cdot m^2 \cdot n^2 \cdot - p^2$, $-8^2 \cdot m^2$, $-9^2 \cdot n^2$, $10^5 \cdot x^5$, $8^5 \cdot y^5 \cdot z^5$, $-8a^4 \cdot 3b^4$, $-5m^3 \cdot 3n^3 \cdot 7p^3$, $2x^2 \cdot 3y^2 \cdot 4z^2$.

3. Odnásobení mocností.

§. 25.

Mocnosti se odnásobují jako veličiny vůbec, totiž souhlasná znaménka dají k podílu +, protivná —, součinitelé se dělí jako čísla vůbec a ohledně mocností platí nasledující pravidla:

1. Mocnosti rozličných kořenů se nemohou odnásobiti, nýbrž se odnásobení naznačí v podobě zlomku, n. p.

$$a^2 : b^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$4a^2b^3 : 5c^3 = \frac{4a^2b^3}{5c^3}\text{*)}$$

2. Mocnosti stejného kořene se odnásobí, pak-li kořen se napíše jednou a udavatel odnásobitele se odečte od udavatele odnásobence, n. p.

$$a^6 : a^4 = a^{6-4} = a^2, \text{ neboť}$$

$$a^6 : a^4 = \frac{\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}aa}{\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}\,1} = aa = a^2.$$

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3, \text{ nebоť}$$

$$a^5 : a^2 = \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3.$$

$$a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0, \text{ nebo}$$

$$a^3 : a^3 = \frac{aaa}{aaa} = 1, \text{ tedy } a^0 = 1.$$

$$-8a^8 : 2a^3 = -4a^{8-3} = -4a^5, \text{ nebоť}$$

$$-8a^8 : 2a^3 = \frac{-8\,aaaaaaaa}{2\,aaa} = -4\,aaaaa = -4a^5.$$

Je-li udavatel odnásobitele větší než-li udavatel odnásobence (u stejných kořenů), bude udavatel podílu záporný, nebo, což jedno jest, bude podíl zlomek, jehož jmenovatel se rovná kořenu podílu prvního s týmže udavatelem kladným, n. p.

---

*) Vysloveno: 4(krát)a mocnosti druhé(krát)b mocnosti třetí děleno 5ti(krát)c mocnosti třetí rovná se 4(krát, čtyrem)a mocnosti druhé (krát)b mocnosti třetí lomeno 5ti c mocnosti třetí.

$$a^4 : a^7 = a^{4-7} = a^{-3} \text{ nebo}$$

$$a^4 : a^7 = \frac{\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}\,1}{\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}aaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3}, \text{ tedy } a^{-3} = \frac{1}{a^3}.\text{*)}$$

$$x^5 : x^6 = 5^{5-6} = x^{-1}, \text{ nebo}$$

$$x^5 : x^6 = \frac{xxxxx}{xxxxxx} = \frac{1}{x}, \text{ tedy } x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

$$15\,x^2 : -3\,x^4 = -5\,x^{2-4} = -5\,x^{-2}, \text{ nebo}$$

$$15\,x^2 : -3\,x^4 = \frac{-5\,xx}{xxxx} = \frac{-5}{x^2}, \text{ tedy } -5x^{-2} = \frac{-5}{x^2}.$$

3. Je-li **odnásobenec mnohočlen** a **odnásobitel jednočlen**, dělíme **každý** člen odnásobence odnásobitelem, berouce ohled na znaménka, součinitele a udavatele mocnosti, n. p.

$$(6\,a^4 - 12\,a^2b^3 + 18\,a^3c) : 3\,a^2 = 2\,a^2 - 4\,b^3 + 6\,ac.$$

$$(-8a^5 - 16a^3b^2 - 32a^4b^3) : 8a^3 = -a^2 - 2b^2 - 4ab^3.$$

$$(10\,x^4 - 15x^3y + 25\,x^5y^2) : -5x^3 = -2x + 3y - 5x^2y^2.$$

4. Jsou-li **odnásobenec i odnásobitel mnohočleny**, dělí se jako veličiny vůbec (§. 19), jen že se prvé dle mocností srovnají tak, že první místo (v levo) zaujímá veličina nejvyšší mocnosti, druhé veličina téhož kořene mocnosti nejblíže nižší atd. až k nejnižší mocnosti; pak se dělí první člen odnásobence prvním členem odnásobitele a podílem se násobí **celý** odnásobitel, součin ten se napíše pod stejnorodé členy odnásobence a odečte se; k zbytku tomu připíší se ostatní členy odnásobence a dělí se opět jako prvé. N. p.

$$\begin{array}{l}
(\;a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3) : (a + b) = a^2 + 2\,ab + b^2. \\
\pm\, a^3 \pm\; a^2b \\
\hline
\;,,\; + 2\,a^2b + 3\,ab^2 + b^2 \\
\qquad \pm\, 2\,a^2b \pm 2\,ab^2 \\
\hline
\qquad\quad ,, \quad + \;ab^2 + b^3 \\
\qquad\qquad\quad \pm \;ab^2 \pm b^3 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; ,, \qquad\quad ,, \\
(20\,a^5 - 88\,a^4b + 47\,a^3b^2 - 6\,a^2b^3) : (5\,a^3 - 2\,a^2b) = \\
\pm\, 20\,a^5 \mp 8\,a^4b \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4\,a^2 - 16\,ab + 3\,b^2 \\
\hline
\;,, \quad - 80\,a^4b + 47\,a^3b^2 - 6\,a^2b^3 \\
\qquad\;\; \mp 80\,a^4b \pm 32\,a^3b^2 \\
\hline
\qquad\qquad ,, \quad + 15\,a^3b^2 - 6\,a^2b^3 \\
\qquad\qquad\qquad \pm 15\,a^3b^2 \mp 6\,a^2b^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad ,, \qquad\qquad ,,
\end{array}$$

---

*) Vysloveno: a povýšeno na mocnosť záporně třetí rovná se jednničce lomené a mocnosti třetí.

5. Jsou-li odnásobenec a odnásobitel rozličných kořenů avšak téže mocnosti, naznačí se odnásobení v podobě zlomku a podíl se uvede na společnou mocnost, n. p.

$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

$$m^5 : n^5 = \frac{m^5}{n^5} = \frac{mmmmm}{nnnnn} \cdot = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^5.$$

Cvičení.

1. $6a^2 : 5b^3$, $18a^3 : -3c^4$, $15m^2n^2 : 12p^4$,
$-27m^2n^3 : 9p^4q^3$, $-16x^2y^4 : -4z^5$, $36x^4 : 18y^2z^3$.

2. $8a^5 : -4a^2$, $25a^7 : -5a^5$, $-22a^{10} : 11a^6$,
$45a^4b^5 : -9a^2b^4$, $-63a^5b^7c^3 : 21a^2b^3c^2$,
$-54m^4n^3p^5 : 27m^2n^2p^2$, $6a^3 : 3a^5$, $27a^4 : -9a^7$,
$-32m^2 : -8m^6$, $14m^3 : -7m^5$.

3. $(144a^5c^3 + 84a^4c^4 - 60a^3c^6) : 12a^2c^3$,
$(81a^3b^4 - 27a^4b^5 - 45a^4b^6) : -9a^2b^2$,
$(65m^4n^3p^4 - 39m^3n^4p^3 - 78m^4n^6p^5 + 13m^5n^7p^{10})$
$: -13m^3n^3p^3$.

4. $(18x^4 - 24x^3 + 38x^2 - 68x + 32) : (6x - 4)$;
$(30x^4 - 130x^3 + 165x^2 - 147x + 36) : (60x - 180)$;
$(60x^5 - 85x^4 + 86x^3 - 69x^2 + 32x - 10) : (60x^2 - 40x + 20)$;
$(8x^3 - 27y^3) : (2x - 3y)$; $(16x^4 - 81y^4) : (x + y)$;
$(625x^4 - 256y^4) : (25x^2 - 16y^2)$.

5. $a^5 : b^5$, $a^4 : b^4$, $5^2a^2 : 3^2b^2$ $-4^3a^3 : 5^3b^3$,
$16^2m^2 : -4^2n^2$, $-25x^4 : -5y^4$, $-28x^3 : 9z^3$.

Umocňování součinů, podílů a mocností.

§. 26.

1. Umocňování součinu.

V §. 24 (4.) bylo praveno, že se rozličné kořeny téže mocnosti spolu násobí, pak-li se jejich součin na společnou mocnost uvede. Měl-li by se naopak tedy součin dvou nebo více kořenů na společnou mocnosť uvesti, musil by se každý kořen na touže mocnosť povýšiti, n. p.

$(ab)^2 = ab \cdot ab = a \cdot a \cdot b \cdot b = a^2b^2$ *)
$(ab)^4 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = aaaa \cdot bbbb = a^4b^4.$
$(2\,ac)^3 = 2\,ac \cdot 2ac \cdot 2\,ac = 2^3a^3c^3 = 8\,a^3c^3.$

2. Umocňování podílu.

V §. 25 (5.) bylo praveno, že se, jsou-li odnásobenec a odnásobitel rozličných kořenů avšak stejných mocností, podíl kořenů na společnou mocnosť uvede. Z toho následuje naopak, že se, má-li se naznačený podíl (zlomek) na nějakou mocnosť uvesti, na touže mocnosť i čitatel i jmenovatel povýšiti musí. N. p.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}\text{**)}.$$

$$\left(\frac{3\,c}{4\,d}\right)^3 = \frac{3\,c}{4\,d} \cdot \frac{3\,c}{4\,d} \cdot \frac{3\,c}{4\,d} = \frac{3\,c \cdot 3\,c \cdot 3\,c}{4\,d \cdot 4\,d \cdot 4\,d} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot ccc}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot ddd}$$
$$= \frac{3^3c^3}{4^3d^3} = \frac{27\,c^3}{64\,d^3}.$$

$$\left(\frac{2\,xy}{3\,z}\right)^4 = \frac{2^4x^4y^4}{3^4z^4} = \frac{16x^4y^4}{81\,z^4}.$$

3. Umocňování mocnosti.

Mocnosť se umocňuje, pak-li se kořen na mocnosť, rovnající se součinu obou udavatelů, povýší t. j. kořen se napíše jednou a udavatelé se násobí. N. p.

$(a^2)^2 = a^2 \cdot a^2 = a^{2+2} = a^{2 \cdot 2} = a^4.$
$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}.$
$(a^2b^3)^3 = a^2b^3 \cdot a^2b^3 \cdot a^2b^3 = a^{2+2+2} \cdot b^{3+3+3}$
$= a^{2 \cdot 3} \cdot b^{3 \cdot 3} = a^6b^9.$
$(2\,m^3n^4)^2 = 2^2m^{3 \cdot 2}n^{4 \cdot 2} = 4m^6n^8.$ ***)

Cvičení.

1. $(abc)^2$, $(mnpq)^3$, $(xyz)^5$, $(2\,ab)^3$, $(4\,abc)^4$, $(10\,mn)^5$, $(3\,xyz)^3$, $(6\,abcd)^3$, $(3\,xy)^6$.

---

*) Vysloveno: uzávorkované a (krát)b mocnosti druhé rovná se a mocnosti druhé (krát)b mocnosti druhé.

**) Vysloveno: uzávorkované a lomeno b povýšeno na mocnosť druhou rovná se a mocnosti druhé, lomenému b mocnosti druhé.

***) Vysloveno: 2 (krát, dvě) m mocnosti třetí (krát) n mocnosti čtvrté, celý výraz povýšen na mocnosť druhou rovná se atd.

2. $\left(\frac{m}{n}\right)^3$, $\left(\frac{2a}{5b}\right)^2$, $\left(\frac{4ab}{7cd}\right)^3$, $\left(\frac{3mn}{4pq}\right)^4$, $\left(\frac{2xy}{5z}\right)^3$; $\left(\frac{5abcd}{3efgh}\right)^2$.

3. $(a^3)^2$, $(a^2b^4)^3$, $(m^2n^3p^2)^4$, $(2a^2b^2)^4$, $(3a^3b^2)^3$, $(5x^2y^3)^3$, $(3x^3y^4z^5)^4$, $\left(\frac{2a^2}{5b^3}\right)^2$, $\left(\frac{2a^2b^3}{3c^2d}\right)^2$, $\left(\frac{3x^4y^6}{4z^5}\right)^5$, $\left(\frac{2x^3y^4}{3z^6}\right)^6$.

Jak se zdvojmocňují dvou-tři- a vícečleny?

§. 27.

Dvoučlen se zdvojmočňuje, pakli se sám sebou násobí. N. p.

$$\begin{array}{rl} (a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = & a^2 + ab \\ & \quad\; + ab + b^2 \\ \hline & a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = & a^2 - ab \\ & \quad\; - ab + b^2 \\ \hline & a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Porovnáme-li kořen $a + b$ s druhou jeho mocností $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, nebo kořen $a - b$ s druhou jeho mocností $a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, vidíme, že druhá mocnost dvoučlenu se rovná čtverci členu prvního (a^2), čtverci členu druhého (b^2), a dvojnásobnému součinu obou členů ($2ab$).

Druhá mocnost součtu $(a + b)$ a rozdílu $(a - b)$ liší se pouze znaménkem dvojnásobného součinu obou členů $(\pm 2ab)$, čtverec prvního a druhého členu jest vždy kladný.

Měl-li by se trojčlen zdvojmocniti, můžeme první dva členy považovati za jediný a třetí za druhý, tak že s třemi členy možná nakládati jako se dvěma, n. p.

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + c^2 + 2(a+b)\cdot c \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + 2ac + 2bc, \text{ nebo} \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \text{ t. j.} \end{aligned}$$

Druhá mocnost trojčlenu se rovná čtverci každého členu ($a^2 + b^2 + c^2$) a dvojnásobnému součinu vždy dvou členů ($2ab + 2ac + 2bc$). Byl-li by některý člen záporný, patrno, že čtverec bude kladný, ale dvojnásobný jeho součin jiným členem kladným záporný, n. p.

$$(\overbrace{\underbrace{a+b}\underbrace{-c}})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc.$$

Měl-li by se čtyrčlen zdvojmocniti, možná taktéž první tři členy považovati za jediný, a čtvrtý za druhý. N. p.

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 &= ((a+b+c)+d)^2\\ &= (a+b+c)^2+d^2+2(a+b+c)\cdot d\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+d^2+2ad+2bd+2cd\\ &= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd\end{aligned}$$

t. j. Druhá mocnost čtyrčlenu se rovná čtverci každého členu ($a^2+b^2+c^2+d^2$) a dvojnásobnému součinu vždy dvou členů ($2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$). Poněvadž se u vícečlenu kromě počtu členů nic jiného nemění, platí pravidlo toto o zdvojmocnění vícečlenů vůbec tak, n. p. bude $(a+b+c+d+e+f)^2$

$= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$ t. j. druhé mocnosti každého členu

$+2ab+2ac+2ad+2ae+2af$ t. j. dvojnásobnému součinu 1. členu každým následujícím,

$+2bc+2bd+2be+2bf$ t. j. dvojnásobnému součinu 2. členu každým následujícím,

$+2cd+2ce+2cf$ t. j. dvojnásobnému součinu 3. členu každým následujícím,

$+2de+2df$ t. j. dvojnásobnému součinu 4. členu každým následujícím,

$+2ef$ t. j. dvojnásobnému součinu 5. členu následujícím.

Dle těchto všeobecných vzorců možná každé zvláštní číslo, rozvede-li se na dvou — tří — nebo vícečlen, zdvojmocniti, n. p.

$$\begin{array}{rrl} 34^2=(30+4)^2= & 30^2 & =900\\ & +\ 4^2 & =16\\ & +2\cdot30\cdot4 & =240\\ \hline & & 1156.\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} 123^2=(100+20+3)^2= & 100^2 & =10000\\ & +\ 20^2 & =400\\ & +\ 3^2 & =9\\ & +2\cdot100\cdot20 & =4000\\ & +2\cdot100\cdot3 & =600\\ & +2\cdot20\cdot3 & =120\\ \hline & & 15129.\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 239^2=(200+40-1)^2=\left.\begin{array}{rl} 200^2 & =40000\\ +\ 40^2 & =1600\\ +-1^2 & =1\\ +2\cdot200\cdot40 & =16000\end{array}\right\}57601\\ \left.\begin{array}{rl} +2\cdot200\cdot-1 & =-400\\ +2\cdot40\cdot-1 & =-\ 80\end{array}\right\}-480\\ \hline 57121.\end{array}$$

Cvičení.

1. $(m + n)^2$, $(x + y)^2$, $(x - y)^2$, $(2a + 2b)^2$, $(3a - 4b)^2$, $(5a + 3b)^2$, $(2x - 4y)^2$.
2. $(m + n + p)^2$, $(x + y + z)^2$, $(x - y - z)^2$, $(2a + 2bc + 2c)^2$, $(3a + 4b - 3c)^2$, $(5a - 3b + c)^2$, $(2x - 3y - 4z)^2$.
3. $(m + n + p + q)^2$, $(2m + 2n + 2p + 2q)^2$, $(3a - 4b + 2c - 3d)^2$, $(6a - 3b - 4c + 2d)^2$, $(3m - 4n + 5p - 6q)^2$.
4. 23^2, 45^2, 173^2, 246^2, 865^2, 1234^2, 2353^2, 6315^2, 13911^2, 16758^2, 32695^2, 123456^2.

Kolik členů má každý zdvojmocněný vícečlen?

§. 28.

Z předešlého patrno, že se každý vícečlen zdvojmocňuje jako každý jednočlen vůbec t. j. že se vícečlen ten násobí sám sebou.

Násobí-li se dvoučlen sám sebou, skládá se druhá jeho mocnosť ze $2.2 = 2^2 = 4$ členů.

Násobí-li se trojčlen sám sebou, skládá se druhá jeho mocnosť že $3.3 = 3^2 = 9$ členů.

Násobí-li se čtyrčlen sám sebou, skládá se druhá jeho mocnosť ze $4.4 = 4^2 = 16$ členů.

Násobí-li se pětičlen sám sebou, skládá se druhá jeho mocnosť ze $5.5 = 5^2 = 25$ členů atd.

Z toho vysvítá, že každý zdvojmocněný vícečlen z tolika členů se skládá, kolik jedniček drží druhá mocnosť **počtu** členů, které se zdvojmocňují, n. p. 10-ti člen bude v druhé mocnosti míti $10^2 = 100$ členů, 15-ti člen bude v druhé mocnosti míti $15^2 = 225$ členů atd.

V předešlém §. jsme však viděli, že některé členy se vždy, jelikož jsou stejnorodé, srážejí, a sice zdvojmocněný 2-člen má na místě 4 pouze 3 členy; zdvojmocněný 3-člen má na místě 9 pouze 6 členů; zdvojmocněný 4-člen má na místě 16 pouze 10 členů; zdvojmocněný 5-tičlen má na místě 25 pouze 15 členů; zdvojmocněný 6ti-člen má na místě 36 pouze 21 členů. atd.

Z pozorování tohoto vyvozuje se všeobecný zákon pro počet sražených členů každého zdvojmocněného vícečlenu, totiž

2-člen má míti 4 a má sražené $3 = \frac{2 + 4}{2}$

3 člen má míti 9 a má sražených $6 = \frac{3 + 9}{2}$

4 „ „ „ 16 „ „ „ $10 = \frac{4 + 16}{2}$

5 „ „ „ 25 „ „ „ $15 = \frac{5 + 25}{2}$ atd.

Počet sražených členů každého zdvojmocněného víceělenu rovná se tedy součtu počtu členů, které se mají zdvojmocniti, a (+) počtu jednotlivých členů, z kterých se má druhá mocnost skládati, dělenému dvěma. Měl-li by se n. p. zdvojmocniti 10-ti člen, bude míti jednotlivých členů $10^2 = 100$, a sražených $\frac{10 + 100}{2} = 55$; zdvojmocněný 20-ti člen bude míti jednotlivých členů $20^2 = 400$ a sražených $\frac{20 + 400}{2} = 210$ atd.

Cvičení.

Kolik členů jednotlivých a kolik sražených má druhá mocnost 6ti-členu, 9ti-členu, 13ti-členu, 18ti-členu, 23ti-členu, 30ti-členu?

Výhody při zdvojmocňování čísel zvláštních.

§. 29.

1. Každé číslo, jehož jednotky jsou 5, se zdvojmocňuje, násobí-li se jeho desítky číslem o jednu desítku vyšším, a připíše-li se k součinu tomu druhá mocnost 5-ti ($5^2 = 25$), n. p.

$$35^2 = 30 \cdot 40 + 5^2 = 1225 \left(\text{krátce } \frac{3 \cdot 4 \quad 5 \cdot 5}{1225}\right)$$

$$65^2 = 60 \cdot 70 + 5^2 = 4225 \left(\text{krátce } \frac{6 \cdot 7 \quad 5 \cdot 5}{4225}\right)$$

$$105^3 = 100 \cdot 110 + 5^2 = 11025 = \left(\text{krátce } \frac{10 \cdot 11 \quad 5 \cdot 5}{11025}\right)$$

a t. d.

Příčina toho jest následující: $35^2 = (30 + 5)^2$

$= 30 \cdot 30 + 2 \cdot 5 \cdot 30 + 5 \cdot 5$

$= 30 \cdot 30 + 10 \cdot 30 + 5 \cdot 5$; 30 se vysadí

$= 30\,(30 + 10) + 5 \cdot 5$
$= 30 \cdot 40 + 5 \cdot 5 = 1225.$
Taktéž: $65^2 = (60 + 5)^2$
$= 60 \cdot 60 + 2 \cdot 5 \cdot 60 + 5 \cdot 5$
$= 60 \cdot 60 + 10 \cdot 60 + 5 \cdot 5$; 60 se vysadí.
$= 60\,(60 + 10) + 5 \cdot 5$
$= 60 \cdot 70 + 5 \cdot 5 = 4225$ atd.

2. Je-li druhá mocnosť kteréhokoliv čísla známa, možná snadně určiti druhou mocnosť následujících čísel, pak-li k známé druhé mocnosti čísla předcházejícího připočteme dvojnásobné téhož čísla + 1; n. p.

Byla by známa 2. mocnosť čísla 134 totiž
$134^2 = 17956$,
bude tedy následujícího čísla
$135^2 = 17956 + 134 \times 2 + 1 = 17956 + 269 = 18225$,
u nejblíže příštího čísla
$136^2 = 18225 + 135 \times 2 + 1 = 18225 + 271 = 18496$,
a taktéž
$137^2 = 18496 + 136 \times 2 + 1 = 18769$ atd.

Příčina toho zakládá se na pozorování kořenů a druhých mocností v přirozeném pořádku po sobě následujících, n. p.

kořen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 .....
druhá mocnosť 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 ....

Z toho vysvítá, že

$2^2 = 4$	převyšuje	předcházející	mocnosť	1 o	$3 = 1 \times 2 + 1$
$3^2 = 9$	„	„	„	4 „	$5 = 2 \times 2 + 1$
$4^2 = 16$	„	„	„	9 „	$7 = 3 \times 2 + 1$
$5^2 = 25$	„	„	„	16 „	$9 = 4 \times 2 + 1$
$6^2 = 36$	„	„	„	25 „	$11 = 5 \times 2 + 1$
$7^2 = 49$	„	„	„	36 „	$13 = 6 \times 2 + 1$

a t. d.

Poslední sloupec $\begin{matrix} 1 \times 2 + 1 \\ 2 \times 2 + 1 \end{matrix}$ a t. d. ukazuje rozdíl dvou po sobě následujících mocností a spolu také, že se rozdíl ten rovná dvojnásobnému předcházejícímu kořenu + 1, připočteli se tedy rozdíl tento k předcházející mocnosti, dá součet ten druhou mocnosť čísla následujícího.

3. Praveno (§. 27.), že se druhá mocnosť dvoučlenu rovná čtverci členu prvního, čtverci členu druhého, více dvojnásobnému součinu obou členů, můžeme tedy první a druhý člen zdvojmocniti, (vynechajíce nicky) druhé tyto mocnosti vedle sebe napsati, a dvojnásobný součin obou členů, (vynechajíce opět nicky) k tomu náležitě připočítati, n. p.

$$\begin{array}{rrl} 46^2 = & 1636 & \text{t. j. } 4^2\ 6^2 \\ & \underline{48} & \text{t. j. } 4 \times 6 \times 2 \\ & 2116 & \\ 54^2 = & 2516 & \text{t. j. } 5^2\ 4^2 \\ & \underline{40} & \text{t. j. } 4 \times 5 \times 2 \\ & 2916 & \\ 73^2 = & 4909 & \text{t. j. } 7^2\ 3^2 \\ & \underline{42} & \text{t. j. } 7 \times 3 \times 2 \\ & 5329 & \end{array}$$

že dá 3^2 pouze jednu číslici, vyplní se desítky nickou.

Jak by se tatáž výhoda dala provesti u čísla trojciferného (tříčlenu)?

Cvičení.

1. Udejte s výhodou druhou mocnost čísel: 25, 45, 55, 85, 195, 495, 695, 995.
2. $36^2 = 1296$, udejte s výhodou druhou mocnost čísel 37, 38, 39; $125^2 = 15625$, udejte s výhodou druhou mocnost čísel: 126, 127, 128, 129; $1121^2 = 1256641$, udejte s výhodou druhou mocnost čísel: 1122, 1123, 1124, 1125.
3. Udejte s výhodou druhou mocnost čísel 59, 68, 76, 79, 83, 87, 89, 99.

Jak se dobývá kořene druhého stupně?

§. 30.

Dobývati kořene druhého stupně znamená určiti veličinu, která by, sama sebou jsouc násobena, se rovnala mocnosti dané, n. p.

$$\begin{array}{lll} \sqrt{a^2} = a^{*)} & \text{poněvadž} & a \cdot a = a^2 \\ \sqrt{b^2} = b & \text{„} & b \cdot b = b^2 \\ \sqrt{16} = 4 & \text{„} & 4 \cdot 4 = 16 \\ \sqrt{49} = 7 & \text{„} & 7 \cdot 7 = 49 \end{array}$$

$\sqrt{(a+b)^2} = a + b^{**)}$ poněvadž $(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$

$\sqrt{(a + b + c)^2} = a + b + c$ poněvadž $(a + b + c) \cdot (a + b + c) = (a + b + c)^2$ atd.

---

*) Vysloveno: Kořen mocnosti druhé (kořen druhý) z a mocnosti druhé (z a na druhou mocnosť) se rovná a.

**) Vysloveno: druhý kořen ze zdvojmocněného dvoučlenu se rovná a + b (kořenu samému).

Z počtu cifer mocnosti snadno se určí počet cifer kořene, neboť druhá mocnosť čísel o jedné cifře t. j. 1^2, 2^2, $3^2 \dots 9^2$ jest buď jedno- neb dvouciferná n. p. $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, ... $9^2 = 81$; druhá mocnosť čísel o dvou cifrách t. j. 10^2, $11^2 \dots . 99^2$ jest buď tří- nebo čtyrciferná, n. p. $10^2 = 100$, $11^2 = 121$ ..... $99^2 = 9801$; druhá mocnosť čísel o třech cifrách t. j. 100^2, $101^2 \dots . 999^2$ jest buď pěti- nebo šesticiferná n. p. $100^2 = 10000$, $101^2 = 10201$, ... $999^2 = 998001$ atd. Z toho patrno, že *každá cifra kořene předpokládá jednu nebo dvě cifry v mocnosti*. Rozdělíme-li tedy mocnosť danou od pravé ruky k levé na třídy o dvou cifrách bez ohledu na to, je-li nejvyšší třída o jedné cifře, musí každá taková třída v mocnosti dáti jednu cifru kořene, tak n. p.

$\sqrt{1|21}$ dá dvouciferný kořen
$\sqrt{98|01}$ „ „ „
$\sqrt{1|02|01}$ „ tříciferný „
$\sqrt{1|00|20|01}$ „ čtyrciferný kořen atd.

Je-li mocnosť o jedné nebo o dvou cifrách, určí se její kořen velmi snadně, an pouze zapotřebí zkoumati, který by to byl z čísel jednociferných (1, 2, 3 .... 9). n. p. $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{64} = 8$ atd. Jak se vydobývá kořene druhé mocnosti u veličin vůbec, ukážeme nejprvé na všeobecném vzorci. Známo totiž že $\sqrt{(a + b)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$. Kořene $a + b$ dobudeme následujícím způsobem:

$$\begin{array}{l} \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)} = a + b \\ \underline{\underset{-}{+}}\; a^2 \\ \hline \text{„}\; (+ 2ab + b^2) : 2a \\ \quad \underline{\underset{-}{+} 2ab \underset{-}{+} b^2} \\ \quad\; \text{„} \qquad \text{„} \end{array}$$

Z prvního členu (a^2) dobudeme druhého kořene a, neboť $a \cdot a = a^2$; odečteme-li a^2 od stejného členu mocnosti, zbyde $2ab + b^2$ t. j. dvojnásobný součin obou členů a čtverec členu druhého. Ze $2ab + b^2$ má se určiti druhý člen kořene totiž b; b^2 nemůže nám dáti pouze b, neboť jest b^2 už čtverec tohoto hledaného kořene, pročež přihleďněme k 2ab. Abychom z 2ab určili b, musíme výraz ten děliti 2a t. j. *dvojnásobným prvním členem* tedy $+ 2ab : 2a = + b$, napíšeme-li $+ b$ k určenému už kořenu a, dostaneme z uvedené veličiny známý nám kořen $a + b$. Pomocí druhého členu b dostaneme násobením $2a \times b$ = dvounásobný součin obou členů totiž 2ab, a povýšením b na druhou mocnosť b^2; odečteme-li je od stejnorodých členů, nezbyde ničeho na důkaz, že $a + b$ jest pravý kořen druhý mocnosti $a^2 + 2ab + b^2$.

Dle tohoto vzorce možná vydobýti kořene druhého stupně z každého čísla zvláštního, n. p.

$$\begin{array}{l}
\qquad\quad a + b\\
\sqrt{42|25} = 60 + 5\\
\underline{3600} = 60 \times 60 = a \times a\\
\text{„}625 : 120 = 2 \times 60 = 2a\\
\underline{600} = 2 \times 60 \times 5 = 2ab\\
\text{„}25\\
\underline{25} = 5 \times 5 = b \times b\\
\text{„„}
\end{array}$$

Rozdělíme-li mocnost tuto od pravé k levé na třídy o dvou cifrách, uvidíme, že její kořen bude dvouciferný. Z nejvyšší třídy (4200) dobírejme se kořene druhého, poněvadž ale 4200 není úplná mocnost některého čísla, dobude se z ní kořene nejblíže nižšího, totiž 60, neboť $60^2 =$ 3600, 60 jest tedy první člen a. Ve zbytku 625 jest obsaženo 2ab + b^2, abychom určili b t. j. druhý člen, musíme 2ab děliti dvojnásobným a, tedy 2 × 60 = 120 a 625 : 120 = 5, 5 připočteme co druhý člen kořene (b) k 60, násobíme jím 120, povýšíme jej na druhou mocnost a odečteme. 60 + 5 = 65 jest druhý kořen mocnosti 4225.

$$\begin{array}{l}
\qquad\quad a + b\\
\sqrt{17|64} = 40 + 2\\
\underline{1600} = a^2\\
\text{„}164 : 80 = 2a\\
\underline{160} \quad = 2ab\\
\text{„„}4\\
\underline{4} \quad = b^2.\\
\text{„}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\qquad\quad a + b\\
\sqrt{65|61} = 80 + 1\\
\underline{6400} = a^2\\
\text{„}161 : 160 = 2a\\
\underline{160} \quad = 2ab\\
\text{„„}1\\
\underline{1} \quad = b^2.\\
\text{„}
\end{array}$$

V praktickém počítání vydobýváme druhého kořene způsobem následujícím;

1. Daná mocnost se rozdělí od pravé k levé na třídy o dvou cifrách, poslední třída může míti i jednu cifru.
2. Z nejvyšší třídy se dobude druhého kořene, jako z každého čísla jedno-nebo dvouciferného t. j. bez ohledu na to, že v třídě té jsou sta, tisíce atd., a že kořen jsou tedy desítky, sta atd.
3. První kořen částečný se zdvojmocní, od nejvyšší třídy odečte, k zbytku se následující třída připíše a týmže dvojnásobným kořenem se dělí célé toto číslo vyjma posledního místa, které se zatrhne.
4. Nový kořen se napíše vedle prvního, a spolu k odnásobiteli, pak se jím násobí celý odnásobitel a součin ten se opět odečte.
5. Byla-li by mocnost na více než-li dvě třídy rozdělena t. j. měl-li by kořen býti 3-, 4-, 5-, atd. ciferný, určí se první dva členy kořene jako prvé, považují se za jediný člen, kterýž se opět dvojnásobí, součinem tím se opět číslo pod čárou dělí (vynecháním poslední číslice), nový kořen se jak k určeným už členům kořenu tak k odnásobiteli připíše, celý odnásobitel

se jím násobí a součin odečte. To se opakuje tolikrát, až nezbývá žádné třídy, která by se pod čáru napsati měla; n. p.

$\sqrt{51|84} = 72$
49 = 7 × 7, se odečte,
„28(4 : 142
284 = 142 × 2
„

poslední číslice se zatrhne a dělí se 14 do 28 = 2, 2 se připíše ke kořenu a k odnásobiteli (14), násobí se jimi celý odnásobitel a součin ten se opět odečte.

$\sqrt{1|51|29} = 123$
1 = 1 · 1
„5(1 : 22
44 = 22 · 2
„ 72(9 : 243
729 = 243 × 3
„

Druhý kořen z 1 jest 1, $1^2 = 1$, která se od nejvyšší třídy odečte; příští třída se dá pod čáru a dělí se dvojnásobným kořenem určeným t. j. 2^{ma}, poslední číslice se zatrhne, 5 : 2 = 2, 2 se napíše ke kořenu a k odnásobiteli, který se jimi násobí; součin se odečte a příští třída se napíše pod čáru. Kořen 12 se považuje za jediný člen, dvojnásobí se a součinem tím se dělí t. j. 729 : 24 = 3, 3 se napíší ke kořenu a k odnásobiteli, násobí se jimi atd.

$\sqrt{12|98|88|16} = 3604$
9 = 3 · 3
„ 39(8 : 66
396 = 66 × 6
„ 2881(6 : 7204
28816 = 7204 × 4
„

Mělo-li by se dobývati kořene druhého stupně ze zlomku desetinného, rozdělí se tento taktéž na třídy o dvou cifrách, ale od desetinného bodu v pravo; byla-li by poslední třída jednociferná, doplní se nickou. V kořenu se položí desetinný bod, jakmile se má třída z desetinného zlomku pod čáru napsati, n. p.

$\sqrt{0{\cdot}13|17|69} = 0{\cdot}363$
9
417 : 66
396
„2169 : 723
2169
„

Druhý kořen z 0 jest 0 (žádné celé číslo)
„ „ z 13 „ 3 atd.

$\sqrt{4|55\cdot82|25} = 21\cdot35.$
4
„ 55 : 41
41
1482 : 423
1269
„ 21325 : 4265
21325
„

Má-li se dobývati kořene z čísla celého, které by ale nebylo úplná mocnosť některého čísla, možná za ním položiti desetinný bod a za tímto libovolný počet nicek, které se na třídy o dvou rozdělí a pod čáru kladou, n. p.

$\sqrt{5\cdot00|00} = 2\cdot23$
4
100 : 42
84
„ 1600 : 443
1329
„ 271 atd.

V podobných případech nebude nikdy kořen číslo celé, poněvadž nestává žádného čísla jednociferného, jehož druhá mocnosť by na místě jednotek měla nicku.

Ze zlomku obyčejného se dobývá kořene, pak-li se buď v desetinný zlomek promění, anebo se z čitatele a jmenovatele kořen určí; zvlášť pak, je-li čitatel neb jmenovatel úplná mocnosť druhá. N. p.

$\sqrt{{}^3/_5} = \sqrt{0\cdot60|} = 0\cdot774\ldots\ldots$, anebo $\sqrt{{}^3/_5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, t. j.
49
1100 : 147
1029
„ 7100 : 1544
6176
„ 924

$\sqrt{3{\cdot}00} = 1{\cdot}73\;\ldots\;;\;\sqrt{5} = 2{\cdot}23$ (dle předešlého)

$$\begin{array}{l} 1 \\ \hline 200 : 27 \\ 189 \\ \hline „\,1100 : 343 \\ 1029 \\ \hline „\,71 \end{array}$$

$$\text{tedy}\ \sqrt{{}^{3}/_{5}} = \frac{1{\cdot}73}{2{\cdot}23} = \frac{1730}{1690} : 223 = 0{\cdot}77\ldots$$

$$\sqrt{\frac{8}{49}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{8}}{7} \qquad \sqrt{8{\cdot}00} = 2{\cdot}8\ldots.$$

$$\begin{array}{l} 4 \\ \hline 400 : 48 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\text{tedy}\ \frac{\sqrt{8}}{7} = \frac{2{\cdot}8}{7} = 0{\cdot}4\ldots$$

Cvičení.

1. $\sqrt{7225} = ?$
2. $\sqrt{7744} = ?$
3. $\sqrt{961} = ?$
4. $\sqrt{6084} = ?$
5. $\sqrt{15129} = ?$
6. $\sqrt{207936} = ?$
7. $\sqrt{622521} = ?$
8. $\sqrt{185761} = ?$
9. $\sqrt{1831449} = ?$
10. $\sqrt{975335376} = ?$
11. $\sqrt{4401604} = ?$
12. $\sqrt{51825601} - ?$
13. $\sqrt{780811249} = ?$
14. $\sqrt{900548081} = ?$
15. $\sqrt{3466383376} = ?$
16. $\sqrt{150229108836} = ?$
17. $\sqrt{13{\cdot}69} = ?$
18. $\sqrt{0{\cdot}7081} = ?$
19. $\sqrt{0{\cdot}013689} = ?$
20. $\sqrt{0{\cdot}00056644} = ?$
21. $\sqrt{3{\cdot}1415\ldots} = ?$
22. $\sqrt{1.0129} = ?$
23. $\sqrt{{}^{49}/_{64}} = ?$
24. $\sqrt{{}^{1111}/_{8100}} = ?$
25. $\sqrt{{}^{8}/_{9}} = ?$
26. $\sqrt{{}^{4}/_{7}} = ?$
27. $\sqrt{{}^{5}/_{8}} = ?$
28. $\sqrt{{}^{103}/_{120}} = ?$
29. $\sqrt{{}^{10}/_{11}} = ?$

30. Čtverci podobný dvorek jest dlážděn 784 čtver. dlážidcemi, kolik dlaždic jest na jedné straně?

31. Zahrada má podobu čtverce a drží 152·2756 čtvercových sáhů, jak jest dlouhá?

52. Školka má podobu čtverce a jest v ní obsaženo 61009 štěpů, jeden od druhého jest střevíc vzdálen. Jak široká (nebo dlouhá) jest ta školka?

33. Odvěsnice pravoúhelného trojúhelníku jsou 57921′ a 98756′ dlouhé. Jak dlouhá jest přepona?
34. Pole podoby obdélníku jest 712 sáhů 3 střevíce dlouhé a 518 sáhů 3 střevíce široké. Jaká jest odlehlosť dvou protilehlých úhlů?
35. Kdosi potřebuje žebřík, který by 5′ 6″ od stavení mohl na téže 5° vysoké stavení položiti. Jak dlouhý musí žebřík ten býti?
36. Jakási tabule jest 5′ 3″ dlouhá, 4′ 1″ široká, jak dlouhá jest na ní čára úhlopříčná?

Jak se ztrojmocňují dvou — tří — a vícečleny?

§. 31.

Veličinu ztrojmocniti znamená, ji 3kráte samu sebou násobiti n. p. $a^3 = a. a. a = aaa.$

$$4^3 = 4. 4. 4, \quad (a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b),$$
$$(a + b + c)^3 = (a + b + c) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b + c),$$
$$12^3 = (10 + 2)^3 = (10 + 2) \cdot (10 + 2) \cdot (10 + 2),$$
$$234^3 = (200 + 30 + 4)^3 = (200 + 30 + 4) \cdot (200 + 30 + 4) \cdot (200 + 30 + 4) \text{ atd.}$$

Z jakých veličin třetí mocnosť dvoučlenu sestává, ukazuje následující vývedení všeobecného vzorce.

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 \cdot (a + b)$$

Dle předešlého jest $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, tedy bude

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b)$$
$$\begin{array}{r} = a^3 + 2a^2b + ab^2 \qquad\quad \\ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2. \end{array}$$

Třetí mocnosť dvoučlenu rovná se tedy třetí mocnosti členu prvního (a^3), třetí mocnosti členu druhého (b^3), trojnásobnému čtverci členu prvního násobeného druhým ($3a^2b$) a trojnásobnému čtverci členu druhého násobeného prvním členem ($3ab^2$).

Dle vzorce tohoto možná každé číslo zvláštní, rozvedené na dva členy, ztrojmocniti, n. p.

$$23^3 = (20 + 3)^3 = \quad \begin{array}{rcrcl} & 20^3 = & 8000 & = & a^3 \\ & 3^3 = & 27 & = & b^3 \\ 3 \cdot 20^2 \cdot 3 & = & 3600 & = & 3a^2b \\ 3 \cdot 20 \cdot 3^2 & = & 540 & = & 3ab^2 \\ \hline & & 12167 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcl}
54^3 = (50 + 4)^3 = & 50^3 & = & 125000 & = & a^3 \\
 & 4^3 & = & 64 & = & b^3 \\
 & 3 \cdot 50^2 \cdot 4 & = & 30000 & = & 3a^2b \\
 & 3 \cdot 50 \cdot 4^2 & = & 2400 & = & 3ab^2 \\
\hline
 & & & 157464 & &
\end{array}$$

Každý tří-čtyř-a vícečlen se podobným způsobem ztrojmocní, neboť můžeme každý z nich za dvoučlen považovati, totiž:

V tříčlenu $a + b + c$ možná $a + b$ považovati za jeden a c za druhý člen, tedy

$(a + b + c)^3 = \left((a + b) + c\right)^3$, což se dle předešlého vzorce rozřeší:

$$= (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 + 3(a^2 + 2ab + b^2)c + 3(a + b)c^2$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2$$ nebo pro lepší paměť

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc,$$

t. j. Třetí mocnost tříčlenu se rovná třetí mocnosti každého členu ($a^3 + b^3 + c^3$), trojnásobnému čtverci prvního členu násobeného druhým ($3a^2b$), trojnásobnému čtverci prvního členu násobeného třetím ($3a^2c$), trojnásobnému čtverci členu druhého násobeného prvním ($3ab^2$), trojnásobnému čtverci členu druhého násobeného třetím ($3b^2c$), trojnásobnému čtverci členu třetího násobeného prvním ($3ac^2$), trojnásobnému čtverci členu třetího násobeného druhým ($3bc^2$) a šestinásobnému součinu všech tří členů ($6abc$).

Krátce by se totéž vyjádřilo: Třetí mocnost tříčlenu se rovná třetí mocnosti každého členu, trojnásobnému čtverci každého členu násobeného každým z ostatních, a šestinásobnému součinu všech tří členů. N. p.

$$\begin{array}{rrcrcl}
124^3 = (100 + 20 + 4)^3 = & 100^3 & = & 1000000 & = & a^3 \\
 & 20^3 & = & 8000 & = & b^3 \\
 & 4^3 & = & 64 & = & c^3 \\
 & 3 \cdot 100^2 \cdot 20 & = & 600000 & = & 3a^2b \\
 & 3 \cdot 100^2 \cdot 4 & = & 120000 & = & 3a^2c \\
 & 3 \cdot 100 \cdot 20^2 & = & 120000 & = & 3ab^2 \\
 & 3 \cdot 20^2 \cdot 4 & = & 4800 & = & 3b^2c \\
 & 3 \cdot 100 \cdot 4^2 & = & 4800 & = & 3ac^2 \\
 & 3 \cdot 20 \cdot 4^2 & = & 960 & = & 3bc^2 \\
 & 6 \cdot 100 \cdot 20 \cdot 4 & = & 48000 & = & 6abc \\
\hline
 & & & 1906624 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Nebo } 124^3 = (120 + 4)^3 = 120^3 = & 1728000 \\
4^3 = & 64 \\
3 \cdot 120^2 \cdot 4 = & 172800 \\
3 \cdot 120 \cdot 4^2 = & 5760 \\
\hline
 & 1906624
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
251^3 = (200 + 50 + 1)^3 = 200^3 = & 8000000 & = a^3 \\
50^3 = & 125000 & = b^3 \\
1^3 = & 1 & = c^3 \\
3 \cdot 200^2 \cdot 50 = & 6000000 & = 3a^2b \\
3 \cdot 200^2 \cdot 1 = & 120000 & = 3a^2c \\
3 \cdot 200 \cdot 50^2 = & 1500000 & = 3ab^2 \\
3 \cdot 50^2 \cdot 1 = & 7500 & = 3b^2c \\
3 \cdot 200 \cdot 1^2 = & 600 & = 3ac^2 \\
3 \cdot 50 \cdot 1^2 = & 150 & = 3bc^2 \\
6 \cdot 200 \cdot 50 \cdot 1 = & 60000 & = 6abc \\
\hline
 & 15813251 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Nebo } 251^3 = (250 + 1)^3 = 250^3 = & 15625000 \\
1^3 = & 1 \\
3 \cdot 250^2 \cdot 1 = & 187500 \\
3 \cdot 250 \cdot 1^2 = & 750 \\
\hline
 & 15813251
\end{array}$$

Čtyrčlen $a + b + c + d$ by se podobným způsobem ztrojmocnil, neboť možná $a + b + c$ považovati za jeden a d za druhý člen, totiž

$$\begin{aligned}
&(a + b + c + d) \\
&= \big((a + b + c) + d\big)^3, \text{ dle ztrojmocnění dvoučlenu} \\
&= (a + b + c)^3 + d^3 + 3(a + b + c)^2d + 3\,(a + b + c).d^2 \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 \\
&\quad + 3bc^2 + 6abc + d^3 + 3a^2d + 3b^2d + 3c^2d + 6abd \\
&\quad + 6acd + 6bcd + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2.
\end{aligned}$$

Srovnáme-li toto jako prvé, bude

$$\begin{aligned}
(a + b + c + d)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3a^2b + 3a^2c \\
&\quad + 3a^2d + 3ab^2 + 3b^2c + 3b^2d + 3ac^2 + 3bc^2 + 3c^2d \\
&\quad + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + 6abc + 6abd + 6acd + 6bcd,
\end{aligned}$$

t. j. *Třetí mocnosť čtyrčlenu se rovná třetí mocnosti každého členu, trojnásobnému čtverci každého členu násobeného každým z ostatních a šestinásobným součinům vždy tří rozličných členů*; n. p.

$$2314^3 = (2000 + 300 + 10 + 4)^3 = \begin{array}{rcr}
2000^3 & = & 8000000000 \\
300^3 & = & 27000000 \\
10^3 & = & 1000 \\
4^3 & = & 64 \\
3 \cdot 2000^2 \cdot 300 & = & 3600000000 \\
3 \cdot 2000^2 \cdot 10 & = & 120000000 \\
3 \cdot 2000^2 \cdot 4 & = & 48000000 \\
3 \cdot 2000 \cdot 300^2 & = & 540000000 \\
3 \cdot 300^2 \cdot 10 & = & 2700000 \\
3 \cdot 300^2 \cdot 4 & = & 1080000 \\
3 \cdot 2000 \cdot 10^2 & = & 600000 \\
3 \cdot 300 \cdot 10^2 & = & 90000 \\
3 \cdot 10^2 \cdot 4 & = & 1200 \\
3 \cdot 2000 \cdot 4^2 & = & 96000 \\
3 \cdot 300 \cdot 4^2 & = & 14400 \\
3 \cdot 10 \cdot 4^2 & = & 480 \\
6 \cdot 2000 \cdot 300 \cdot 10 & = & 36000000 \\
6 \cdot 2000 \cdot 300 \cdot 4 & = & 14400000 \\
6 \cdot 2000 \cdot 10 \cdot 4 & = & 480000 \\
6 \cdot 300 \cdot 10 \cdot 4 & = & 72000 \\
\cline{3-3}
 & & 12390535144
\end{array}$$

Nebo $2314^3 = (2300 + 10 + 4)^3 =$

$$\begin{array}{rcr}
2300^3 & = & 12167000000 \\
10^3 & = & 1000 \\
4^3 & = & 64 \\
3 \cdot 2300^2 \cdot 10 & = & 158700000 \\
3 \cdot 2300^2 \cdot 4 & = & 63480000 \\
3 \cdot 2300 \cdot 10^2 & = & 690000 \\
3 \cdot 10^2 \cdot 4 & = & 1200 \\
3 \cdot 2300 \cdot 4^2 & = & 110400 \\
3 \cdot 10 \cdot 4^2 & = & 480 \\
6 \cdot 2300 \cdot 10 \cdot 4 & = & 552000 \\
\cline{3-3}
 & & 12390535144
\end{array}$$

Nebo $2314^3 = (2310 + 4)^3 =$

$$\begin{array}{rcr}
2310^3 & = & 12326391000 \\
4^3 & = & 64 \\
3 \cdot 2310^2 \cdot 4 & = & 64033200 \\
3 \cdot 2310 \cdot 4^2 & = & 110880 \\
\cline{3-3}
 & & 12390535144
\end{array}$$

Podobným způsobem možná i jiné mnohočleny ztrojmocniti.

Jak se dobývá kořene třetího stupně?

§. 32.

Dobývati kořene třetího stupně znamená určiti veličinu, která by, sama sebou třikráte jsouc násobena, se rovnala mocnosti dané, n. p. $\sqrt[3]{a^3} = a$,*) neboť $a \cdot a \cdot a = a^3$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{b^3} &= b, \quad „ \quad b \cdot b \cdot b = b^3 \\ \sqrt[3]{8} &= 2, \quad „ \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ \sqrt[3]{125} &= 5, \quad „ \quad 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{(a + b)^3} = a + b$, neboť $(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^3$

$\sqrt[3]{(a + b + c)^3} = a + b + c$, neboť $(a + b + c) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b + c) = (a + b + c)^3$ atd.

Kolik cifer bude míti třetí kořen, možná snadno určiti z počtu cifer třetí mocnosti té neb oné veličiny, neboť třetí mocnosť kořene o jedné cifře t. j. 1^3, 2^3, 3^3, . . . 9^3 jest buď jedno- dvou- nebo tříciferná; n. p. $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $9^3 = 729$; třetí mocnost kořene o dvou cifrách t. j. 10^3, 11^3, 12^3 ... 99^3 jest buď čtyr-pěti-nebo šesticiferná; n. p. $10^3 = 1000$, $30^3 = 27000$, . . . $99^3 = 970299$; třetí mocnosť kořene o třech cifrách t. j. 100^3, 101^3 . . . . . 999^3 jest buď sedmi-osmi- nebo devíticiferná, n. p. $100^3 = 1000000$, $300^3 = 27000000$ . . . . $999^3 = 997002999$ atd.

Z toho patrno, že *každá cifra kořene předpokládá jednu, dvě nebo tři cifry v mocnosti.* Chceme-li tedy věděti, kolik cifer v kořenu dá určitá mocnosť, z níž se má třetího kořene dobývati, zapotřebí pouze, abychom mocnosť tu od pravé ruky k levé na třídy o třech cifrách rozdělili, bez ohledu na to, bude-li nejvyšší třída pouze o dvou nebo o jedné cifře. Na kolik tříd se dá mocnosť rozděliti, tolik cifer bude míti kořen.

$\sqrt[3]{64}$ dá jednociferný kořen
$\sqrt[3]{1|728}$ „ dvouciferný „
$\sqrt[3]{1|124|064}$ „ tříciferný „ atd.

Je-li mocnosť o jedné, dvou nebo třech cifrách, určí se kořen velmi snadně, neboť zapotřebí pouze zkoumati, které číslo jednociferné povýšené na třetí mocnosť dá onu veličinu, n. p. $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{125} = 5$, $\sqrt[3]{216} = 6$ atd.

Jak se třetího kořene z veličin vůbec vydobývá, ukážeme na všeobecném vzorci. Známo, že

---

*) Vysloveno: třetí kořen z veličiny a povýšené na třetí mocnosť se rovná kořenu a.

**) Vysloveno: třetí kořen z trojčlenu mocnosti třetí rovná se atd.

$\sqrt[3]{(a + b)^3} = \sqrt[3]{(a^3 + 3a^3b + 3ab^2 + b^3)} = a + b$

Jak dobudeme tohoto kořene?

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)} = a + b \\
\underline{\pm a^3} \\
\text{〃} \; (+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : 3a^2 \\
\quad \underline{\pm} \, 3a^2b \; \underline{\pm} \, 3ab^2 \; \underline{\pm} \, b^3 \text{ t. j.} \\
\hline
\qquad\qquad \text{〃}
\end{array}$$

Dobuďme třetího kořene z prvního členu a^3, tento bude a, neboť $a \cdot a \cdot a = a^3$; ztrojmocněný kořen tento odečtěme od stejnorodého a ostatní členy dejme pod čáru.

Ze $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ máme určiti druhý člen kořene, totiž b. Z b^3 nemůžeme určiti b, poněvadž b^3 jest už třetí mocnosť onoho hledaného kořene b, ze $3ab^2$ se nemůže taktéž určiti b, poněvadž jest b^2 čtverec hledaného b, avšak ze $3a^2b$ možná pouhé b určiti, neboť zapotřebí pouze $3a^2b : 3a^2$ t. j. $3a^2b$ děliti trojnásobným čtvercem prvního členu v kořenu ($3a^2$), bude tedy $+ 3a^2b : 3a^2 = + b$; druhý tento člen kořene b napíšeme s patřičným znaménkem k prvnímu; a + b bude třetí kořen dané mocnosti, neboť pomocí druhého členu (b) dostaneme násobením odnásobitele ($3a^2$) $3a^2b$, trojnásobný čtverec téhož členu ($3b^2$) násobený členem prvním (a) dá $3ab^2$, a ztrojmocněný druhý člen (b) dá b^3, což-li se odečte od stejnorodých veličin pod čárou, nezbyde ničehož na důkaz, že a + b jest skutečně třetí kořen dané mocnosti.

Dle tohoto vzorce možná vydobyti kořene třetího stupně z každého čísla zvláštního a sice:

1. Číslo takové se rozdělí od pravé k levé na třídy o třech cifrách, nejvyšší třída může míti dvě nebo jednu cifru. Na kolik tříd jest mocnosť rozdělena, tolik cifer bude míti kořen.
2. Z nejvyšší třídy se dobude třetího kořene, ztrojmocní se a od téže třídy odečte.
3. Ke zbytku se připíše pod čáru příští třída. To vše se dělí trojnásobným čtvercem prvního členu, a podíl jest druhý člen. Tento se násobí odnásobitelem, k součinu tomu se připočte trojnásobný čtverec členu druhého násobený členem prvním a ztrojmocněný člen druhý; součet těchto tří sčítanců se odečte od celého čísla pod čárou.
4. Je-li ještě více tříd v mocnosti, dá se příští opět pod čáru, určené číslo kořene se považuje za člen jediný, uvede se na druhou mocnosť, ztrojnásobí se a dělí se jím číslo pod čárou, aby se třetí člen kořene určil. Od čísla pod čárou se opět odečte součin trojnásobného čtverce prvních dvou členů násobeného členem třetím, součin trojnásobného čtvrce členu

třetího násobeného členy předcházejícími a ztrojmocněný člen třetí. Totéž se opakuje při každé nové třídě mocnosti.

5. Má-li se ze zlomku desetinného kořene třetího stupně dobýti, rozdělí se zlomek takový taktéž na třídy o třech cifrách, ale od desetinného bodu v pravo. U zlomku obyčejného dobývá se kořene třetího z čitatele a jmenovatele, anebo se promění v zlomek desetinný. Příklady:

$$\begin{array}{r l}
 & a + b \\
\sqrt[3]{12|167} & = 20 + 3 \\
8\,000 & \\ \hline
4167 & : 1200 \\ \hline
3600 & \\
540 & \\
27 & \\ \hline
4167 & \\ \hline
\end{array}$$

Rozdělme mocnost tuto na třídy o třech cifrách, nejvyšší třída bude míti dvě cifry. Z nejvyšší třídy (12000) dobuďme kořene třetího stupně, bude 20 (a); ztrojmocněný kořen ten $20^3 = 8000$ odečteme od celého čísla. Ve zbytku (4167) jest obsaženo $3a^2b + 3ab^2 + b^3$; abychom určili druhý člen kořene (b), musíme zbytek děliti trojnásobným čtvercem určeného kořene ($3a^2 = 3 \cdot 20^2 = 3 \cdot 400 = 1200$), tedy $4167 : 1200 = 3$, 3 jest druhý člen kořene, pročež napíšeme jej k prvnímu a pomocí jeho určíme

$$\begin{array}{r l l}
3a^2b & = 3 \cdot 20^2 \cdot 3 = & 3600 \\
3ab^2 & = 3 \cdot 20 \cdot 3^2 = & 540 \\
b^3 & = \phantom{3 \cdot 20 \cdot{}} 3^3 = & 27 \\ \hline
 & & 4167,
\end{array}$$

což odečteme-li od zbytku, nezbyde ničehož na důkaz, že $20 + 3 = 23$ jest třetí kořen mocnosti 12167.

$$\begin{array}{r l}
 & a + b \\
\sqrt{68|921} & = 40 + 1 \\
64\,000 & \\ \hline
4921 & : 4800 \\ \hline
4800 & = 3a^2b = 3 \cdot 40^2 \cdot 1 \\
120 & = 3ab^2 = 3 \cdot 40 \cdot 1^2 \\
1 & = b^3 = \phantom{3 \cdot 40 \cdot{}} 1^3 \\ \hline
4921 & \\ \hline
\end{array}$$

První člen kořene bude 40, neboť $40^3 = 64000$. Zbytek 4921 dělíme $3 \cdot 40^2 = 4800$, tedy $4921 : 4800 = 1$, připočteme-li 1 co druhý člen kořene k předešlému, bude $40 + 1 = 41$ kořen třetího stupně mocnosti 68921.

$$\begin{array}{r l}
 & a + b \\
\sqrt[3]{238|328} & = 60 + 2 \\
216\,000 & \\ \hline
„\,22328 & : 10800 = 3a^2 = 3 \cdot 60^2 \\ \hline
21600 & = 3a^2b = 3 \cdot 60^2 \cdot 2 \\
720 & = 3ab^2 = 3 \cdot 60 \cdot 2^2 \\
8 & = b^3 = \phantom{3 \cdot 60 \cdot{}} 2^3 \\ \hline
22328 & \\ \hline
\end{array}$$

V praktickém počítání se nebeře ohledu na hodnotu třídy první, nýbrž jen na třídu samou tak, jako by sama o sobě byla. Z této se dobude kořene třetího stupně, který se o jedné cifře napíše, ztrojmocní a ztrojmocněný odečte. K zbytku se připíše třída příští a dělí trojnásobným čtvercem jednociferného kořene tak, že se u odnásobence na dvě poslední místa ohledu nebeře. Takto určený kořen se násobí odnásobitelem a součin se klade pod nejvyšší místa po vynechání dvou nejnižších, trojnásobný čtverec druhého členu násobený prvním se napíše pod předešlý součin tak, že se jím pomkne o jedno místo v pravo a ztrojmocněný člen druhý napíše se jako obyčejně. Částečné tyto součiny se sčítají a hned odečítají. Má-li mocnost více tříd, dá se příští ke zbytku a dělá se jako prvé. N. p.

$$\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{74|088} & = 42\\
\underline{64} & \\
\underline{100{,}88} & = 48\,.\,. = 3\,a^2\\
96\,.\,. & = 3\,a^2b\\
48\,. & = 3\,ab^2\\
\underline{8} & = \quad b^3\\
,,\ \ ,, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{493|039} & = 79\\
\underline{343} & \\
\underline{1500{,}39} & : 147\,.\,. = 3\,a^2\\
1323\,.\,. & = 3\,a^2b\\
1701\,. & = 3\,ab^2\\
\underline{721} & = \quad b^3\\
,,\ \ ,, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{3|048|625} & = 145\\
\underline{1} & \\
\underline{2048 : 3\,.\,.} & = 3 \cdot 1^2\\
12\,.\,. & = 3 \cdot 1^2 \cdot 4\\
48\,. & = 3 \cdot 2 \cdot 4^2\\
\underline{64} & = \qquad 4^3\\
\underline{304625 : 588\,.\,.} & = 3 \cdot 14^2\\
2940\,.\,. & = 3 \cdot 14^2 \cdot 5\\
1050\,. & = 3 \cdot 14 \cdot 5^2\\
\underline{125} & = \qquad 5^3\\
,,\ \ ,, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{29|704|593|673} & = 3097\\
\underline{27} & \\
\underline{,,2704 : 27\,.\,.} & \\
\underline{2704593} & : 2700\\
24300\,.\,. & \\
7290\,. & \\
\underline{729} & \\
200964673 & : 286443\,.\,.\\
2005101\,.\,. & \\
45423\,. & \\
\underline{343} & \\
,,\ \ ,, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{0{\cdot}012|5} & = 0{\cdot}23\cdots\\
\underline{8} & \\
\underline{4500 : 12} & \\
36\,.\,. & \\
54\,. & \\
\underline{27} & \\
,,333 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{{}^5/_{27}} = \sqrt{0{\cdot}185|185\ldots.} & = 0{\cdot}56\ldots.\\
\underline{125} & \\
\underline{,,60185} & : 75\\
450\,.\,. & \\
540\,. & \\
\underline{216} & \\
9569 &
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$$

Cvičení.

1. $\sqrt[3]{216}$; $\sqrt[3]{343}$; $\sqrt[3]{729}$.
2. $\sqrt[3]{389017}$; $\sqrt[3]{493039}$; $\sqrt[3]{681472}$; $\sqrt[3]{912673}$; $\sqrt[3]{753571}$.
3. $\sqrt[3]{1367631}$; $\sqrt[3]{9663597}$; $\sqrt[3]{30371328}$; $\sqrt[3]{170953875}$.
4. $\sqrt[3]{0{\cdot}01771561}$; $\sqrt[3]{0{\cdot}000007880599}$; $\sqrt[3]{3{\cdot}2}$; $\sqrt[3]{1{\cdot}32}$.
5. $\sqrt[3]{{}^{8}/_{2}}$; $\sqrt[3]{{}^{5}/_{6}}$; $\sqrt[3]{7\,{}^{8}/_{9}}$; $\sqrt[3]{1\,{}^{9}/_{20}}$.
6. Jak vysoká jest krychle, drží-li *a)* 216 krych. ″, *b)* 1331 krych. ″, *c)* 9261 krych. ″?
7. Jak vysoká jest krychle, jejíž obsah jest dvakráte větší než-li jiné 3′ 4″ vysoké krychle?
8. Jak veliká jest strana krychle, která se rovná dvěma jiným, z nichž jest jedna 2′ 3″, druhá 5′ 6″ vysoká?
9. Kámen, jehož strany jsou obdélníky, má 8‴ výšky, 2′ 8″ délky, 1′ 4″ šírky, jak vysoká by byla krychle, kdyby se krychlenému obsahu tohoto kamenu rovnala?

Částka čtvrtá.

Náuka o sestavování.

§. 33.

Rozličné veličiny dle určitých vyjímek pořádati, nazýváme veličiny sestavovati. Takové veličiny mohou býti písmeny, slova, číslice, osoby, kostky, vlastnosti atd., vůbec věci smyslné i nadsmyslné, které si buď v prostoře buď v čase, po sobě jdoucí, představujeme. Každou takovou veličinu nazýváme prvek a sestavení více prvků skupinu. V každé skupině zaujímá každý prvek zvláštní místo a veškerá místa stanoví tvar skupiny.

Jednotlivé prvky jsou obyčejně buď číslice anebo písmeny. Následují-li číslice nebo písmeny po sobě v přirozeném pořádku, jsou samy o sobě už ukazovatelé, kdyby však rozličné prvky jediná písmena zastupovala, musí se k ní ukazovatel přidati, n. p. a, a', a'', a'''.... nebo a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 .... Čárky $'$, $''$, $'''$.... nebo číslice $_0$, $_1$, $_2$, $_3$ ... jsou ukazovatelé. Dané prvky se od sebe oddělují čárkou, n. p. a, b, c, d atd., avšak v skupině se prvky od sebe ničím nedělí, n. p. abcd ....

Přicházejí-li v skupině stejné číslice nebo písmeny, nazýváme je prvky stejné, které se buď skutečně tolikrát napíšou, kolikrát se opakují, anebo se opakování takové naznačí ukazovatelem, n. p. 11233344444 nebo $1^2\ 2\ 3^3\ 4^5$.

Sestavování prvků děje se dle určitých pravidel. Sestavíme-li v každé jednotlivé skupině všechny dané prvky tak, že se po sobě jdoucí skupiny ničím od sebe neliší, nežli rozličným spořádáním týchže prvků, nazýváme to přemístění, n. p. a, b, c, d by byly prvky, první skupina bude abcd
druhá „ „ abdc
třetí „ „ acbd atd.

V každé z těchto skupin jsou všechny dané prvky, avšak jinak přemístěny.

Je-li dáno více prvků, z nichž se však pouze dva, nebo pouze tři, čtyry atd. v skupinu sestavují tak, že se jednotlivé skupiny rozličnými prvky od sebe liší, nazýváme to sestavení v užším smyslu nebo kombinování. N. p. z prvků a, b, c, d, e měly by se sestaviti skupiny o třech prvcích; první skupina by byla

abc
druhá abd
třetí abe atd.

Tedy v každé skupině se nalezá jiný prvek (c, d, e).

Skupina o dvou prvcích se nazývá sestavení nebo sestava druhé třídy (ambo = dvojina), n. p. ab, ac, ad.., skupina o třech prvcích sestavení třetí třídy (terno = trojina), n. p. abc, abd, abe atd., skupina o čtyrech prvcích sestavení čtvrté třídy (quaterno = čtveřina), n. p. abcd, abce, abcf, atd.

Prvky i skupiny se dělí na vyšší a nižší. Hodnotu každého prvku udává jeho místo, čím dále od levé k pravé, tím větší jeho hodnota, tedy druhý prvek jest vyšší prvního, třetí druhého atd. Hodnotu dvou skupin téhož sestavení poznáme, porovnáme-li jednotlivé prvky vzájemně od levé k pravé, v které skupině jest na témž místě prvek větší, ta skupina jest vyšší, n. p. 23715}
23716}
druhá skupina jest vyšší než-li první; taktéž u
cade} jest první skupina vyšší než-li druhá, poněvadž jest *d* od
cabe} *a* v abecedě dále než-li *b*.

Skupina jest spořádána, pak-li jsou jednotlivé prvky od levé k pravé vzestupné (rostoucí), n. p. 1234 nebo
2345 nebo
abdf atd.
jinak jest nespořádána, n. p. acb, 132 atd.

Jsou-li prvky dány, tu chceme buď viděti, jaké jsou jednotlivé skupiny, aneb chceme pouze věděti, kolik skupin z nich sestaviti možná.

I. Přemístění.

§. 34.

Chceme-li viděti, jaké jsou jednotlivé skupiny, dělejme takto:
Do 1. skupiny napišme dané prvky v přirozeném pořádku vedle sebe;
v 2. skupině přemístěme pouze dva nejvyšší prvky;

v 3. skupině dejme na místo prvku od pravé k levé prvek nejblíže vyšší, a tomu nechť následují ostatní vzestupně;
,, 4. ,, přemístěme pouze dva poslední prvky;
,, 5. ,, dejme na místo prvku třetího od pravé k levé opět prvek nejblíže vyšší, a tomu nechť následují ostatní vzestupně;
,, 6. ,, přemístěme dva poslední prvky atd., až přijdeme na skupinu, která se rovná první v opáčném pořádku, pak jest přemístění ukončeno. N. p. prvky 1, 2, 3, dají následující skupiny:

1. skup. 123, poslední dva prvky přemístěme, bude:
2. ,, 132, třetí od pravé k levé (1) vyměňme nejblíže vyšším (2) a ostatní nechť následují vzestupně, bude:
3. ,, 213, přemístěme poslední dva, bude:
4. ,, 231, třetí k levé (2) vyměnme nejblíže vyšším (3) a ostatní nechť následují vzestupně, bude:
5. ,, 312, přemístěme poslední dva, bude:
6. ,, 321, rovná se v opáčném pořádku první skupině, tedy jest poslední.

Prvky 1, 2, 3, 4

12(34	21(34	31(24	41(23	prvky a, b, c
1(243	2(143	3(142	4(132	abc
13(24	23(14	32(14	42(13	acb
1(342	2(341	3(241	4(231	bac
14(23	24(13	34(12	43(12	bca
(1432	(2431	(3421	(4321	cab
				cba

Mají-li se přemístiti prvky stejné, děje se taktéž, pro lepší přehled se však mohou ukazovateli opatřiti, n. p.

a, a, b, b, b, t. j. a_0, a_1, b_0, b_1, b_2.

Přemístění děje se jako prvé, jen že se považuje:

a_1, b_1 za vyšší než-li a_0, b_0, a b_0 za vyšší nežli a_0, a_1, a_2 atd.
c_0, c_1, ,, ,, ,, a_0, a_1, a_2, a_3 atd. za vyšší než-li b_0, b_1, b_2 atd.

tedy:	$a_0\ a_1\ b_0\ b_1\ b_2$	$a_0\ b_0\ b_2\ b_1\ a_1$	$a_0\ b_2\ b_1\ a_1\ b_0$
	$a_0\ a_1\ b_0\ b_2\ b_1$	$a_0\ b_1\ a_1\ b_0\ b_2$	$a_0\ b_2\ b_1\ b_0\ a_1$
	$a_0\ a_1\ b_1\ b_0\ b_2$	$a_0\ b_1\ a_1\ b_2\ b_0$	$a_1\ a_0\ b_0\ b_1\ b_2$
	$a_0\ a_1\ b_1\ b_2\ b_0$	$a_0\ b_1\ b_0\ a_1\ b_2$	atd.
	$a_0\ a_1\ b_2\ b_0\ b_1$	$a_0\ b_1\ b_0\ b_2\ a_1$	
	$a_0\ a_1\ b_2\ b_1\ b_0$	$a_0\ b_1\ b_2\ a_1\ b_0$	
	$a_0\ b_0\ a_1\ b_1\ b_2$	$a_0\ b_1\ b_2\ b_0\ a_1$	
	$a_0\ b_0\ a_1\ b_2\ b_1$	$a_0\ b_2\ a_1\ b_0\ b_1$	
	$a_0\ b_0\ b_1\ a_1\ b_2$	$a_0\ b_2\ a_1\ b_1\ b_0$	
	$a_0\ b_0\ b_1\ b_2\ a_1$	$a_0\ b_2\ b_0\ a_1\ b_1$	
	$a_0\ b_0\ b_2\ a_1\ b_1$	$a_0\ b_2\ b_0\ b_1\ a_1$	

Kolikrát se dá určitý počet prvků přemístiti?

§. 35.

Z pozorování vývinu jednotlivých skupin možná vyvoditi všeobecný vzorec pro počet skupin, jakého dané prvky vyžadují. Nazveme-li počet přemístění P a počet prvků 1, 2, 3, 4 . . n, zpozorujeme toto:

Jeden prvek n. p. a možná jen jednou postaviti, t. j. $P_1 = 1$.

Dva prvky a, b možná přemístiti ab, ba tedy dvakrát, t. j. $P_2 = 1 . 2$.

U tří prvků
a, b, c bude a dvakrát na prvním místě totiž abc, acb t. j. 1 . 2
taktéž „ b „ „ „ „ „ bac, bca t. j. 1 . 2
„ „ c „ „ „ „ „ cab, cba t. j. 1 . 2
tedy se dají 3 prvky přemístiti 1 . 2 + 1 . 2 + 1 . 2 t. j. $P_3 = 1 . 2 . 3$

U čtyř prvků a, b, c, d zůstane a na prvním místě, b, c, d se přemístují (jako 3 prvky) = 1 . 2 . 3, pak
zůstane b na 1. místě a, c, d se přemístují (jako 3 prvky) = 1 . 2 . 3
„ c „ „ a, b, d „ „ „ „ = 1 . 2 . 3
„ d „ „ a, b, c „ „ „ „ = 1 . 2 . 3
tedy se dají 4 prvky přemístiti 1 . 2 . 3 + 1 . 2 . 3 + 1 . 2 . 3 + 1 . 2 . 3 . . . . $P_4 = 1 . 2 . 3 . 4$.

U pěti prvků a, b, c, d, e zůstane opět a na prvním místě tolikrát, kolikrát se b, c, d, e přemístují totiž . . . 1 . 2 . 3 . 4
taktéž zůstane b na 1. místě, kolikrát se a, c, d, e přem. totiž 1 . 2 . 3 . 4
„ „ c „ „ „ „ a, b, d, e „ „ 1 . 2 . 3 . 4
„ „ d „ „ „ „ a, b, c, e „ „ 1 . 2 . 3 . 4
„ „ e „ „ „ „ a, b, c, d „ „ 1 . 2 . 3 . 4
tedy se 5 prvků dá přemístiti 1 . 2 . 3 . 4 + 1 . 2 . 3 . 4 + 1 . 2 . 3 . 4 + 1 . 2 . 3 . 4 + 1 . 2 . 3 4 . . . . $P_5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5$.

U šesti prvků dálo by se taktéž, 5 by se přemístovalo = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 šestkrát, t. j. 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6.

U n-prvků by se (n — 1) přemístovalo 1 . 2 . 3 . 4 . . . . (n — 1) n-krát, t. j. Pn = 1 . 2 . 3 . 4 . . . (n — 1) n.

Počet přemístění rozličných prvků udává tedy součin čísel 1 . 2 . 3 . . . až do čísla, které počet prvků naznačuje.

Tedy se dá n. p. 8 prvků $P_8 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 =$ 40320krát přemístiti; taktéž se dá 10 prvků, $P_{10} = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 =$ 3628800krát přemístiti atd.

Součin 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . . . . (n — 1) n naznačuje se n!, tedy $P_4 = 4!$. $P_8 = 8!$. $P_{10} = 10!$. atd.

Poněvadž se mohou libovolné prvky přemístovati, aniž by se čehož na počtu přemístění změnilo, patrno, že i stejné prvky dají tolik skupin jako rozličné, avšak i to patrno, že některé skupiny budou sobě úplně rovny, t. j. že některé skupiny záležeti budou z týchž prvků, v témže pořádku po sobě jdoucích.

Při sobě rovných skupinách beře se však jen na takové ohled, které jsou rozličny, neboť se vždy tážeme, kolik rozličných skupin dají prvky, z nichž jsou některé sobě rovny?

Dva stejné prvky a, a dají sice $a_0\ a_1$, $a_1\ a_0$, t. j. 2! skupiny ty však jsou sobě rovny, tedy $\frac{2!}{2!}$ t. j. 1 skupinu.

Tři stejné prvky a, a, a dají sice opět 1.2.3 skupin, avšak všechny sobě rovné, tedy taktéž pouze $\frac{3!}{3!}$ t. j. 1 skupinu.

Čtyry stejné prvky a, a, a, a dají opět 1.2.3.4 skupin, jsou však všechny sobě rovny, taktéž tedy $\frac{4!}{4!}$, t. j. 1 skupinu.

a, a, b by daly 1.2.3 skupin, avšak $a_0\ a_1$ dají 1.2 skupiny sobě rovné, pročež bude rozličných skupin $= \frac{3!}{2!} = 3$;

a, a, b, b by daly 1.2.3.4 skupin, avšak dají $a_0\ a_1 = 1.2$; $b_0\ b_1$ taktéž 1.2 sobě rovné, tedy dají rozličných skupin $\frac{4!}{2!\ 2!} = 6$;

a, a, a, b, c, c by daly 1.2.3.4.5.6 skupin, v těchto však bude $a_0\ a_1\ a_2 = 1.2.3$; $c_0\ c_1 = 1.2$ rovných, pročež rozličných $\frac{6!}{3!\ 2!} = 60$.

Z toho vysvítá pravidlo:

Počtu rozličných skupin prvků z části sobě rovných se dovíme, dělíme-li počet skupin, které by daly prvky ty, kdyby byly naskrz rozličné, počtem skupin sobě rovných, které by daly uvedené prvky stejné, n. p.

a, a, b, b, b, c, d, d, f bez ohledu na to, že některé prvky jsou stejné, daly by všechny 1.2.3.4.5.6.7.8.9. nebo 9! skupin avšak $a_0\ a_1$ dá 1.2 (= 2!), $b_0 b_1 b_2$ dá 1.2.3 (= 3!), $d_0\ d_1$ dá 1.2 (= 2!) stejné skupiny, tedy musíme první počet těmito děliti a bude $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.1.2.3.1.2} = \frac{9!}{2!\ 3!\ 2!}$ t. j. 15120 rozličných skupin.

Taktéž by daly prvky a, b, b, c, c, c, d, e, e, e, kdyby byly veskrz rozličné $1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 10!$ skupin, že ale přichází $b_0\, b_1$, což dá $2!$ $c_0\, c_1\, c_2$, což dá $3!$, $e_0\, e_1\, e_2$, což též dá $3!$ skupiny sobě rovné, tedy dá a, b, b, c, c, c, d, e, e, e $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.1.2.3.1.2.3} = \frac{10!}{2!\,3!\,3!}$, t. j. 50400 rozličných skupin.

Cvičení.

1. V lavici sedí 9 žáků; kolikrát se mohou přesednouti?
2. Zahradník má vsaditi 7 ovocných stromů rozličného druhu vedle sebe. V jakém pořádku je může vsaditi, a kolikrát může pořádek ten změniti?
3. Kolikráte se může pořádek pěti čísel v malé loterii přemístiti?
4. Kolikráte a jak se mohou aritmetická znaménka $>$, $=$, $<$ přemístiti?
5. Kolikráte se mohou činitelé aabbbc nebo a^2b^3c v rozličném pořádku přemístiti?
6. Kolikráte se mohou 3 červené, 2 modré, a 6 bílých koulí v rozličném pořádku přemístiti?
7. Kolikráte se mohou činitelé $a^4b^7c^2$, $m^3n^3p^3$, $a^2b^2c^3d^2e$, $x^4y^2z^5$ přemístiti?

III. Sestavování.

§. 36.

Sestavovati se mohou buď rozličné anebo z části sobě rovné, t. j. takové prvky, z nichž se některý opakuje. Opakování téhož prvku jest buď obmezené nebo neobmezené. Sestavuje-li se počet prvků, z nichž se některé určitěkrát opakovati mají, nazývá se to sestavování s opakováním obmezeným, může-li se však ten neb onen prvek libovolněkráte opakovati — sestavování s opakováním neobmezeným. Sestavy bez opakování počínají nejnižší skupinou, jejíž počet prvků už napřed se byl určil; při opakování po sobě jdoucích skupin vymění se prvek nižší za nejblíže vyšší jako u přemístování a hledí se na to, aby každá skupina byla vzestupovací (rostoucí). N.ᵉ p. kdyby se měly prvky 1, 2, 3, 4, 5 sestaviti v dvojině, trojině a čtveřině, tedy by

1, 2, 3, 4, 5 daly:

1. po dvou 12, 13, 14, 15; 1 se vymění za nejblíže vyšší, t. j. 2
23, 25, 24; 25„ „ „ „ „ t. j. 3
34, 35; 3 „ „ „ „ „ t. j. 4
45;
2. po třech 123, 124, 125, 134, 135, 145
234, 235, 245
345;
3. po čtyrech 1234, 1235, 1245, 1345;
2345;
4. po pěti 12345.

Taktéž a, b, c, d, e daly by
dvojiny: ab, ac, ad, ae; trojiny: abc, abd, abe, acd, ace, ade;
bc, bd, be bcd, bce, bde;
cd, ce cde;
de
čtveřiny: abcd, abce, abde, acde
bcde;
pateřinu: abcde.

Sestavy s opakováním se tvoří takto:

Každému prvku se přidá první prvek (a nebo 1); druhý prvek se přidá k druhému a ke všem následujícím, třetí prvek se přidá k třetímu a ke všem následujícím atd. Skupiny takové budou dvojiny. K dvojinám se přidávají jednotlivé prvky jako prvé; totiž nejnižší prvek se přidá k dvojině týchže prvků a ke všem ostatním; druhý prvek se přidá k stejné dvojině a ke všem následujícím, třetí prvek se přidá opět k stejné dvojině a všem následujícím atd. Skupiny takové budou trojiny. Čtveřiny se taktéž tvoří přidáváním prvku prvního, druhého, třetího atd. k trojinám naskrz stejných prvků a ke všem následujícím.

Dle toho dají prvky a, b, c, d,

1. dvojiny: aa, ab, ac, ad; pak se přidá druhý prvek b k sobě samému a ke všem následujícím, tedy bb, bc, bd; pak se přidá třetí prvek c k sobě samému a ke všem následujícím cc, cd; konečně: dd.

2. trojiny: aaa, aab, aac, aad, abb, abc, abd, acc, acd, add; b se přidá k stejné dvojině a ke všem následujícím bbb, bbc, bbd, bcc, bcd, bdd; c se přidá k stejné dvojině a ke všem následujícím ccc, ccd, cdd; konečně: ddd.

3. čtveřiny: aaaa, aaab, aaac, aaad atd. Patrno, že by se libovolněkrát jednotlivé prvky opakovati mohly.

Kolikrát se dá určitý počet prvků bez opakování sestaviti?

§. 37.

Počet sestav bez opakování vysvítá z následujícího:

Každý prvek se dá jednou postaviti, n. p. a, b, c, d, e. Z jednotlivých prvků se utvoří dvojiny, přidáme-li ke každému prvku jiný (v rostoucím pořádku) tedy:

k a přidáme b, c, d, e a budou dvojiny ab, ac, ad, ae
k b „ a, c, d, e „ „ „ ab, bc, bd, be
k c „ a, b, d, e „ „ „ ac, bc, cd, ce
k d „ a, b, c, e „ „ „ ad, bd, cd, de
k e „ a, b, c, d „ „ „ ae, be, ce, de.

Pozorujeme-li tyto dvojiny, vidíme, že 5 prvků da 5 řad dvojin po čtyrech skupinách, tedy dohromady 5 × 4 dvojin, avšak, jak patrno, jest polovice jich stejná, pročež:

5 prvků dá rozličných dvojin $\frac{5 . 4}{2} = 10$. Dle toho by dalo 6 prvků 6 řad po pěti dvojinách, tedy 6 prvků dá rozličných dvojin $\frac{6 . 5}{2} = 15$; taktéž 7 prvků 7 řad po šesti dvojinách, tedy 7 prvků dá rozličných dvojin $\frac{7 . 6}{2} = 21$, a všeobečně n prvků dá rozličných dvojin $\frac{n . (n - 1)}{2}$ nebo $\frac{n . (n - 1)}{1 . 2}$.

Přidá-li se ke každé dvojině jiný prvek (v rostoucím pořádku) budou z nich trojiny, tedy

k ab se přidá c, d, e a budou trojiny abc, abd, abe
k ac „ „ b, d, e „ „ „ abc, acd, ace
k ad „ „ b, c, e „ „ „ abd, acd, ade
k ae „ „ b, c, d „ „ „ abe, ace, ade
k bc „ „ a, d, e „ „ „ abc, bcd, bce
k bd „ „ a, c, e „ „ „ abd, bcd, bde
k be „ „ a, c, d „ „ „ abe, bce, bde
k cd „ „ a, b, e „ „ „ acd, bcd, cde
k ce „ „ a, b, d „ „ „ ace, bce, cde
k de „ „ a, b, c „ „ „ ade, bde, cde.

Z toho vysvítá, že dá 5 prvků tolik řad trojin kolik bylo dvojin a že každá řada ma 3 skupiny. Dvojin bylo $\frac{5 . 4}{2}$, tedy jest řad trojin $\frac{5 . 4}{2}$ a každá řada sestává ze 3 skupin, tedy dá

5 prvků $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{2}$ trojin, avšak každá trojina se opakuje třikrát, pročež 5 prvků dá rozličných trojin $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{2 \,.\, 3} = 10$. Taktéž by 6 prvků dalo 4-krát tolik trojin co dvojin, t. j. $\frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{2}$ avšak rozličných pouze $\frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{2 \,.\, 3}$, tedy 6 prvků dá rozličných trojin $\frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{2 \,.\, 3} = 20$. Podobně 7 prků by dalo trojin $\frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5}{2}$ a rozličných $\frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5}{2 \,.\, 3}$, tedy 7 prvků dá rozličných trojin $\frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5}{2 \,.\, 3} = 35$, všeobecně n prvků dá rozličných trojin $\frac{n(n-1) \cdot (n-2)}{2 \,.\, 3}$ nebo $\frac{n(n-1) \cdot (n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$.

Z trojin by se mohly vyvinouti čtveřiny. Trojin dá 5 prvků $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 10$, z každé trojiny možná sestaviti čtveřiny přidáním k ní jiného prvku. Poněvadž jsou v trojině 3 a v celku 5 prvků, tedy z každé trojiny možná 2 čtveřiny sestaviti. Rozličných trojin jest však $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, pročež bude čtveřin všech všudy 2-kráte tolik, t. j. $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, avšak každá čtveřina opakuje se 4-krát, tedy bude rozličných čtveřin $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 5$ dle toho:

dá 6 prvků rozličných čtveřin $\frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 15$,

7 „ „ „ $\frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 35$, tedy

n „ „ „ $\frac{n(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$.

Pozorujeme-li čitatele takového zlomku, vidíme, že záleží z tolik činitelů kolik prvků v jednu skupinu sestaveno býti má, že činitel největší se rovná počtu daných prvků a že ostatní činitelé jsou o 1 menší předcházejícího. Jmenovatel zlomku takového skládá se taktéž z tolik činitelů, kolik prvků skupina míti má, jen že činitelé tito počínají jedničkou (1) a nejvyšší z nich že se rovná počtu prvků v skupině. Dle toho by se rovnal počet sestav bez opakování n. p.

u 10 prvků pro čtveřiny $= \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4,}$ pro pateřiny $\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}$ atd.

u 11 „ „ $\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4,}$ pro pateřiny $\frac{11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5}$

atd. tedy všeobecně:

u n prvků pro čtveřiny $= \frac{n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

pro pateřiny $\frac{n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$

pro šesteřiny $\frac{n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$

$\frac{(n-5)\cdot(n-6)}{5.\ 6.}$ atd.

Kolikrát se dá určitý počet prvků s opakováním sestaviti?

§. 38.

Z předešlého dá se snadno určiti počet sestav, opakují-li se některé z daných prvků. Kdyby se n. př. z 5-ti prvků a, b, c, d, e měly sestaviti dvojiny s opakováním t. j. aby se mimo dvojiny rozličných prvků též dvojiny stejných prvků utvořily, patrno, že by dle předešlého a, b, c, d, e daly dvojin rozličných prvků $\frac{5.\ 4}{1.\ 2}$, ku kterým by se musily připočísti dvojiny prvků stejných. Kolik bude takových stejných dvojin? tolik co prvků daných, tedy pět a sice aa, bb, cc, dd, ee. Připočteme-li počet tento k počtu předešlénému, možná z pěti rozličných prvků sestaviti s opakováním $\left(\frac{5.\ 4}{1.\ 2} + 5\right)$ dvojin, t.j. $\frac{5.\ 4 + 5.\ 2}{1.\ 2}$ $= \frac{5\ (4+2)}{1.\ 2} = \frac{5.\ 6}{1.\ 2} = 15$ dvojin.

Kolik by dalo 5 rozličných prvků trojin s opakováním?

Bez opakování by dalo 5 prvků a, b, c, d, e $\frac{5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3} = 10$ trojin, k těmto by se musilo připočísti:

1. 5 trojin stejných prvků, totiž aaa, bbb, ccc, ddd, eee.
2. 10 trojin, v nichž jest každý prvek se dvěma stejnýma sestaven jako abb, acc, add . . . ., bcc, bdd . . . ., cdd . . . . ., dee, a
3. 10 trojin, v nichž dva stejné prvky spojeny jsou s třetím rozličným jako aab, aac, ..., bbc, bbd, . . ., cce, ..., dde. Tedy by 5 rozličných prvků dalo s opakováním:

$$\left(\frac{5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3}+5+20\right)=\frac{5.\ 4.\ 3+5.\ 2.\ 3+20.\ 2.\ 3}{1.\ 2.\ 3.}$$

$$=\frac{5.3(4+2)+20.6}{1.2.3}=\frac{5.\ 3.\ 6+5.\ 4.\ 6}{1.\ 2.\ 3}=$$

$$=\frac{5.\ 6\ (3+4)}{1.\ 2.\ 3}=\frac{5.\ 6.\ 7}{1.\ 2.\ 3}=35\ \text{trojin.}$$

5 prvků dá čtveřin bez opakování $\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3.\ 4}=5$, k těmto by se musilo připočísti:

1. 5 čtveřin stejných prvků, jako aaaa, bbbb, ...
2. 10 čtveřin s dvěma předníma stejnýma prvky, jako aabc, aabd, . . ., bbcd . . . ccde.
3. 10 čtveřin s dvěma prostředníma stejnýma prvky, jako abbc, abbd, ..., bccd . . . ., cdde.
4. 10 čtveřin s dvěma konečnýma stejnýma prvky, jako abcc, abdd . . . ., bcdd . . . . ., cdee.
5. 10 čtveřin s dvěma a dvěma stejnýma prvky, jako aabb, aacc, . . ., bbcc . . . ., ddee.
6. 10 čtveřin s třemi stejnými prvky na počátku, jako aaab, aaac, ..., bbbc . . . ., ddde a
7. 10 čtveřin s třemi stejnými prvky na konci, jako abbb, accc, ..., bccc . . . . deee.

Tedy by se musilo připočísti $\left(\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3.\ 4}+5+60\right)$

$$=\frac{5.4.3.2+5.4.3.2+60.4.3.2}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$=\frac{5.4.3.2.2+6.5.4.3.2.2}{1.\ 2.\ 3.\ 4}=\frac{5.6.8(1+6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$=\frac{5.\ 6.\ 7.\ 8}{1.\ 2.\ 3.\ 4}=70\ \text{čtveřin atd.}$$

Z toho pozorujeme, že udává počet všech možných skupin z 5-ti prvků zlomek, jehož čitatel se skládá z tolika činitelů, kolik prvků má sestaveno býti v každé skupině (4), z nichž se první rovná počtu prvků (5), a každý následující že jest o 1 větší předcházejícího. Jmenovatel zlomku toho má tolik činitelů jako čítatel, počíná jedničkou (1), a každý následující jest o 1 větší předcházejícího.

Kdybychom nazvali počet prvků = n, daly by tyto s opakováním

$$\text{dvojin} = \frac{n\,(n+1)}{1.\;2}$$

$$\text{trojin} = \frac{n\,(n+1)\cdot(n+2)}{1.\;2.\;3}$$

$$\text{čtveřin} = \frac{n\,(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{1.\;2.\;3.\;4}$$

$$\text{pateřin} = \frac{n\,(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)\ \text{atd.}}{1.\;2.\;3.\;4.\;5}$$

Cvičení.

1. V čem se shodují a v čem se liší všeobecné vzorce pro počet skupin bez opakování a s opakováním?
2. Kolik amb, teren, quateren a quinteren dá 90 čísel malé lotterie?
3. Kolik amb, teren, kvateren a kvinteren da 5 čísel?
4. Kolikrát možná 10 prvních čísel (0, 1, 2, 3 . . . 9) bez opakování a s opakováním po dvou a po třech sestaviti?
5. Lučba uznává 57 prvků, kolik těles může býti sloučených ze dvou, ze tří, ze čtyř prvků?
6. Kolik rozličných hodů možná udělati dvěma, třemi, čtyřmi kostkami? (2 kostky = 6 prvkům po dvou).
7. Kolik dvojin, trojin a čtveřin dají, a, b, c, d, e, f, g, h, i, bez opakování a s opakováním?
8. Kolik slov o třech, o ctyřech, o pěti a o šesti písmenách da 32 písmen (krátkých, dlouhých, i měkkých), bez opakování a s opakováním?

Částka pátá.

I. Složité poměry a srovnalosti.

§. 39.

Více jednoduchých odnásobení možná násobením stejnojmenných částí proměniti v odnásobení složité. Odnásobení jednoduchá by n. p. byla

$$
\begin{aligned}
6 : 3 &= {}^{6}/_{3} = 2 \\
10 : 2 &= {}^{10}/_{2} = 5 \\
12 : 4 &= {}^{12}/_{4} = 3 \text{ atd.}
\end{aligned}
$$

Násobíme-li stejnojmenné částky ${}^{6}/_{3} \times {}^{10}/_{2} \times {}^{12}/_{4} = 2 \times 5 \times 3$, bude odnásobení složité $\frac{6 \times 10 \times 12}{3 \times 2 \times 4} = 2 \times 5 \times 3$.

Čítatel zlomku tohoto skládá se z odnasobenců a jmenovatel z odnásobitelů, pročež jednoduchá odnásobení proměníme v odnásobení složité, násobíme-li všechny odnásobence, a dělíme-li součin ten součinem odnásobitelů.

Odnásobení a poměr neliší se ničím od sebe než jménem jednotlivých částek, v základě jsou si totožnými. Za tou příčinou vysvítá z uvedeného úplně, jak se z jednoduchých poměrů může sestaviti poměr složitý, neboť co u odnásobení se nazývá odnásobencem, odnásobitelem a podílem jest, jak známo, u poměru první člen druhý člen a udavatel poměru. Měli-li bychom tedy jednoduché poměry proměniti v složité, násobme první členy vespolek a taktéž členy druhé; udavatel poměru složitého bude se rovnati (právě jako podíl složitého odnásobení) součinu všech udavatelů týchže poměrů jednoduchých, n. p.

Z jednoduchých poměrů $\left\{\begin{array}{l}5:3\\4:7\\9:8\end{array}\right.$

stane se poměr složitý

$$5\cdot4\cdot9:3\cdot7\cdot8=180:168=45:42.$$

$=15:14$, udavatel $=1\,{}^{1}/_{14}$

§. 40.

Srovnalost jest porovnání dvou sobě rovných poměrů; co o poměrech platí, musí platiti i o srovnalosti, tedy se několik jednoduchých srovnalostí promění v složitou, násobíme-li první členy vespolek, taktéž druhé, třetí a čtvrté, členy, a sestavíme-li součiny ty opět v srovnalost tak, aby se součin prvních členů měl k součinu členů druhých, jako se má součin třetích členů k součinu členů čtvrtých, n. p.

$$\begin{array}{l}3:2=9:6\\5:10=2:4\\\underline{7:3=21:9}\\3\cdot5\cdot7:2\cdot10\cdot3=9\cdot2\cdot21:6\cdot4\cdot9\\105:60=378:216\end{array}$$

Porovnáme-li součin udavatelů poměrů jednoduchých s udavatelem poměru složitého, a součin členů vnějších (nebo vnitřních) srovnalostí jednoduchých se součinem členů vnějších (nebo vnitřních) srovnalosti složité, uvidíme, že jsou si rovny; nebot

první srovnalost má udávatele ${}^{3}/_{2}$
druhá „ „ „ ${}^{1}/_{2}$
třetí „ „ „ ${}^{7}/_{3}$

jich součin jest ${}^{3}/_{2}\times{}^{1}/_{2}\times{}^{7}/_{3}={}^{21}/_{12}=1\,{}^{3}/_{4}$.

Udavatel složité srovnalosti jest: ${}^{105}/_{60}={}^{21}/_{12}=1\,{}^{3}/_{4}$, tedy tentýž.

Součin členů vnitřních (nebo vnějších) jest
u srovnalosti první $2\times9=18$
„ „ druhé $10\times2=20$
„ „ třetí $3\times21=63$
t. j. $18\times20\times63=22680.$

Součin členů vnitřních, nebo vnějších, u složité srovnalosti jest $105\times216=22680$, tedy tentýž.

II. Užívání složitých srovnalostí.

A. Složené pravidlo nazvané „regula de tri“.

§. 41.

Jednoduchým pravidlem nazvaným „regula de tri“ možná ze tří k sobě náležejících veličin neznámou čtvrtou určiti. Složené pravidlo nazvané „regula de tri“ slouží k tomu, jak by se z 5, 7, 9, 11 neb více daných k sobě náležejících veličin neznámá veličina 6tá, 8má, 10tá, 12tá atd. určila. Úlohy, které se pomocí složeného toho pravidla rozřešují, jsou dvojího druhu: 1. takové, jejichž jednotlivé členy mají se k sobě v určitém poměru, aneb 2. takové, jejichž jednotlivé členy jsou si rovny, ač rozličného jména. První způsob se nazývá „regula multiplex“ a druhý „pravidlo řetězové“. Způsob „regula multiplex“ se zakládá úplně na jednoduchých poměrech přímých i obrácených, a vyvozuje se z těchto jak z příkladu následujícího vysvítá.

Mnoho-li mzdy dostane 10 dělníků za 8 dní, dostane-li 15 dělníků za 6 dní 18 zl.?

Kdyby byla otázka: Mnoho-li mzdy dostane 10 dělníků, dostane-li 15 dělníků 18 zl.? rozřešila by se pomocí jednoduché „regula de tri“, v které by se předpokládalo, že nejen stejnými silami pracují, nýbrž též v stejném čase. Úloha daná udává však nestejný čas, totiž 6 a 8 dní, pročež se má poměr neúplný (x zl. : 18 zl.) určiti dvěma úplnýma poměry, totiž 10 dělníků a 15 dělníků; 8 dní a 6 dní.

Vypočítáme-li nejprvé mzdu dle počtu dělníků, t. j. kolik

(x) zl. dostane 10 děln. dostane-li: } bude, an poměr jest přímý, (čím více dělníků, tím více
18 „ 15 „ mzdy)

x zl. : 18 zl. = 10 děl. : 15 děln., po skrácení patřičných členů bude
x = 6 × 2 = 12 zl.

Při tomto rozřešení se předpokládalo, že všichni dělníci pracovali stejný čas (buď 6 neb 8 dní); úloha však praví, že 10 dělníků 8 dní a 15 dělníků 6 dní pracovalo, pročež musíme určenou mzdu 12 zl. dle tohoto poměru změniti a sice dle otázky:

x zl. dostanou dělníci za 8 dní pakli
12 zl. dostali též „ „ 6 dní (čím více dní se pracuje, tím více mzdy se dává)

pročež x : 12 = 8 : 6
x = 2 × 8 = 16 zl.

Mzda 18 zlatých se tedy nejprvé rozdělila dle poměru 10 : 15 a výsledek 12 zl. se proměnil dle poměru 8 : 6, z čehož patrno, že oba úplné poměry účinkovaly na 18 zl., jednoduše se to naznačuje:

$x : 18 = 10 : 15$, z čehož se násobením členů na témže místě
$\underline{8 : 6}$ stojících stane srovnalosť
$x : 18 = 8 \times 10 : 6 \times 15$, po náležitém skrácení bude
$x = 2 \times 4 \times 2 = 16$ zl., t. j.

16 zl. dostane 10 dělníků za 8 dní, dostane-li 15 dělníků za 6 dní 18 zl.

Pro tak zvanou „regula multiplex“ platí tedy následující pravidla:

1. Členy vymínečné polož do jedné a členy otázky polož s neznámou veličinou (x) do druhé řady tak, aby vždy stejnojmenné členy stály pod sebou.

2. První poměr započni s veličinou neznámou (x) a s ní stejnojmennou.

3. Ostatní poměry budou se skládati vždy ze dvou stejnojmenných členů, které jsou s x buď v poměru přímém nebo obráceném (což se pozná dle známých otázek „čím více, tím více, neb čím více, tím méně atd.), a poměry ty se kladou vesměs pod poměr druhý.

4. Jednotlivé poměry se pak skrátí, smíšená čísla se sřídí, jmenovatelů sprostí, a takto nejmenšími čísly vyjádřené poměry se násobením členů na stejných místech promění v poměr složitý, z něhož se x známým způsobem určí, n. p.

Na železné dráze pracuje 500 lidí a upraví za 24 dní po 12 hodin. 10000 loket s déli a 10 loket s šíře; za kolik dní po 10 hodin. by 800 lidí upravilo na ní 25000 loket s déli a 12 loket s šíře?

Členy vymínečné jsou: 500 lidí, 24 dní po 12 hod., 10000 lok. s děli, 10 lok. s šíře.
Členy otázky jsou: 800 lidí, x dní po 10 hod., 25000 lok. s déli 12 lok. s šíře.

Započneme neznámým členem:

$x : 6\;\cancel{24} = 1\cancel{5}\cancel{0}\cancel{0} : \cancel{8}\cancel{0}\cancel{0}\;2$ (čím více dní, tím méně lidí při stej. okolnostech zapotřebí, tedy poměr obracený)
$3\;\cancel{6}\;\cancel{12} : \cancel{10}\;2$ (čím více dní, tím méně hodin při stejných okolnostech zapotřebí, tedy poměr obrácený)
$1\;\cancel{5}\;\cancel{25000} : \cancel{10000}\;2$ (čím více dní, tím více loket při stejných okolnostech se upraví, tedy poměr přímý)
$3\;\cancel{12} : \cancel{10}\;2$ (čím více dní, tím více loket při stej-

ných okolnostech se upraví, tedy poměr přímý)

$$\begin{array}{r} x : 6 = 1 : 1 \\ 3 : 1 \\ 1 : 1 \\ 3 : 1 \end{array}$$

$$x : 6 = 1 \times 3 \times 1 \times 3 : 1 \times 1 \times 1 \times 1$$
$$x : 6 = 9 : 1$$
$$x = 6 \times 9 = 54 \text{ dní.}$$

Kdyby se podobné úlohy vedle čáry vypočítati měly, započalo by se taktéž s neznámou veličinou (x) a se stejnojmennou s touto. Na ostatní členy stejnomenné bychom se podobně jako dříve musili tázati, jsou-li k x v poměru přímém nebo obráceném; byl-li by poměr přímý, dal by se pod x člen vymínečný, byl-li by ale poměr obrácený, dal by se pod x člen z otázky. Čára sama zastupuje dvoutečky jednotlivých poměrů, pročež se mohou členy přes čáru skrátiti a zlomky jmenovatelů zbaviti, jako u poměrů vůbec. Konečně se násobí všechna čísla na jedné a všechna čísla na druhé straně čáry, a dělí se součinem čísel pod x do součinu druhého. Proč se to vše dělá, vysvítá z pozorování předešlého způsobu. Kdyby se uvedený příklad vedle čáry rozřešiti měl, dělalo by se takto:

Členy vymíněčné jsou: 500 lidí, 24 dní po 12 hod., 10000 lok. s déli, 10 lok. s šíře.

Členy z otázky jsou: 800 lidí, x dní po 10 hod., 25000 lok. s déli, 12 lok. s šíře.

Započne se neznámým členem a s druhým s ním stejného jména, tedy: čím více dní, tím méně lidí ukončí touž práci (při stejných okolnostech), tedy jest poměr ten obrácený a člen z otázky se dá pod x. Druhý poměr jest též obrácený; třetí a čtvrtý poměr jsou přímy, tedy se dají pod x členy vymínečné. Skrátíme-li jednotlivé členy přes čáru, bude

$$\begin{array}{r|l} x & \cancel{24}\ 6 \\ 1\ \cancel{800} & \cancel{500}1 \\ 1\cancel{0} & \cancel{12}\ 3 \\ 1\cancel{0000} & \cancel{25000}\ 1 \\ 1\cancel{0} & \cancel{12}\ 3 \end{array}$$

$$x = \frac{3 \times 1 \times 3 \times 1 \times 6}{1 \times 1 \times 1 \times 1} = 54 \text{ dní, tedy jako prvé.}$$

Kdosi dal vystavěti plot kolem své zahrady, který byl 35^0 dlouhý, $9'$ vysoký a $1^3/_4{}'$ tlustý. Smluvil-li se stavitelem, že mu za něj poměrně tolik zaplatí, jako za jiný už hotový, který byl 14^0 dlouhý, $7'$ vysoký a $2^1/_4{}'$ tlustý, mnoho-li mu dal, jestli za první zaplatil 42 zl.?

Členy vymínečné: 14^0 $7'$ $2^1/_4{}'$ 42 zl.
Členy v otázce 35^0 $9'$ $1^3/_4{}'$ x

$$\left.\begin{array}{rcl} x : 42 = 1\frac{3}{4} & : & 2\frac{1}{4} \\ 9 & : & 7 \\ 35 & : & 14 \end{array}\right\}$$

poměry naskrz přímé, po spořádání smíšených čísel, vyloučení jmenovatelů a po skrácení bude:

$$\begin{array}{rcl} x : 3 = 1 & : & 1 \\ 1 & : & 1 \\ 35 & : & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$x = 3 \times 35 = 105 \text{ zl.}$$

Vedle čáry by se tentýž příklad takto vypracoval:

$$\left.\begin{array}{r|l} x & 42 \\ 2\frac{1}{4} & 1\frac{3}{4} \\ 7 & 9 \\ 14 & 35 \end{array}\right\}$$

Po spořádání smíšených čísel, vyloučení jmenovatelů a po skracení bude:

$$x = 3 \times 35 = 105 \text{ zl. jako prvé.}$$

Cvičení.

1. Kdosi doveze za 15 zl. 16 setnýřů 9 mil, za kolik zlatých by dovezl a) 22 setnýřů 12 mil, b) 18 set. 10 mil, c) 26 set. $14\frac{1}{2}$ míle?
2. Z 35 liber příze setkalo se 50 loket $1\frac{3}{4}$ lokte širokého plátna; kolik loket by se setkalo z $84\frac{1}{2}$ libry téže příze, kdyby mělo býti plátno dvouloketní?
3. 10 osob spotřebuje týdně $37\frac{1}{2}$ zlatého, jak dlouho by vystačilo a) 25 osob s 375 zlatými, b) 36 osob s 480 zl., c) 40 osob 600 zl.?
4. Sedm mlýnských složení semele za $1\frac{1}{2}$ dne 75 korců obilí, tři složení se pokazila; za kolik dní semele se na ostatních 100 korců téhož obilí?
5. 15 dělníku zhotoví za 6 dní po 10 hodinách 126 kusů nějaké látky 4 lokte dlouhé a 2 lokte široké; jak dlouhá byla by tato látka, kdyby 24 delníků zhotovilo za 3 dni po 12 hodinách 378 kusů $1\frac{1}{2}$ lokte širokých?
6. 11 zedníků vystavělo za 6 týdnů po 6 dnech po $10\frac{1}{2}$ hod., zeď 72′ dlouhou, $16\frac{1}{2}$′ vysokou a $1\frac{3}{4}$ tlustou; kolik zedníků by vystavělo za 18 týdnů po 5 dnech po 8 hod. zeď 192′ dlouhou 12′ vysokou $2\frac{1}{2}$′ tlustou?
7. 250 lidí upraví na železné dráze 15000 stř. s déli a 24 stř. s šíře za 24 dní po 11 hod.; kolik střevíců s déli po 22 stř. s šíře upraví 400 lidí za 28 dní po 12 hod.?
8. 11 krychlených střevíců sádra spotřebuje se na pole $23\frac{1}{4}$ čtverečného střevíce držící, pakli se sype na $1\frac{3}{4}$ palce; jak veliké pole mohlo by se posypati sádrem $16\frac{1}{3}$ krych. stř. na $2\frac{1}{8}$ palce tloušky?
9. Kašnu 6 loket dlouhou, $2\frac{1}{2}$ lokte hlubokou a 3 lokte širo-

kou naplní roura, která za 5 minut 3·75 krychl. střevíců vody vydá, za 8 hodin. Za kolik hodin naplnila by roura vydávající za 9 minut 5 krychl. stř. vody kašnu 10 loket dlouhou, 4 lokte širokou a 3·5 lok. hlubokou?

10. Dvě zoubkovaná kola sahají do sebe, jedno má 15 a druhé 28 zubů, otočí-li se první za $7\frac{1}{2}$ sekundy 16-krát; kolikrát se otočí druhé za 21 sekund?

11. Mlýnský kámen z čediče má 4 střevíce v průměru, 2 střevíce tloušky a váží 1740 lib. Mnoho-li váží jiný kámen mlýnský z křemence, má-li v průměru $3\frac{1}{2}$ stř., v tlouštce 1 stř. 9 palců, a má-li se váha stejně velkých kusů čediče a křemence jako 13 : 15?

12. Na podlahu sálu 40 stř. dlouhého a 32 stř. širokého spotřebuje se 96 prken 16 stř. dlouhých a 10 palcu širokých; kolik prken 12 stř. dlouhých a 8 palců širokých bylo by zapotřebí, kdyby sál ten byl 60 stř. dlouhý a 24 stř. široký?

13. Železný prut 3 palce široký, $7\frac{1}{2}'$ dlouhý a 2″ tlustý váží 135 lib. 14 lotů; kolik liber váží jiný prut železný, je-li $2\frac{3}{4}''$ široký, $1\frac{1}{3}''$ tlustý a $6\frac{3}{4}'$ dlouhý?

14. 10 tkalců zhotoví za 15 týdnů po 5 dnech po $12\frac{1}{2}$ hod. 90 kusů po 30 loktech plátna. Za kolik týdnů zhotoví 20 tkalců 81 kusů po 40 lokech téhož plátna, pracují-li týdně 6 dní po $13\frac{3}{4}$ hod., a má-li se sběhlosť prvních tklaců k druhým jako 5 : 6?

B. Počet řetězový.

§. 42.

Jako každá jednoduchá i složená „regula de tri“ ze dvou neb více sobě rovných poměrů, skládá se každý počet řetězový z více členů, z nichž dva a dva se v hodnotě srovnávají, ačkoliv mají rozličná jména. Počet řetězový jest jako složená „regula de tri“, pouze rozvedení a rozšíření jednoduché „regula de tri“, liší se však od oné tím, že se u něho nebeře ohledu na to, jak jednotlivé členy po sobě následují (zda-li v poměru přímém neb obráceném), nýbrž na to, aby se vždy dva a dva sobě rovné členy v takovém pořádku po sobě kladly, aby druhý člen předcházející stejnojmenný byl s prvním členem následujícím, pro kteroužto vlastnosť celý ten počet řetězový nazván jest.

Z uvedeného příkladu uvidíme, jak řetězový počet z více jednoduchých „regula de tri“ vznikl.

Za kolik spolkových tolarů po 1 zl. 50 kr. r. č bude 2500 lib. zboží, je-li lot za 4 krejcary?

Za kolik tolarů (x) jest neznámý člen a 2500 lib. jest druhý známý člen v otázce. Dělejme takto:

1. Rozveďme libry na loty:
   1 lib. : 2500 lib. = 32 lot. : x, rozluštěno 1 lib. : 2500 lib. = 32 lot. : 80000 lot.
2. Za kolik krejcarů by bylo 80000 lotů?
   1 lot. : 80000 lot. = 4 kr. : x, rozluštěno 1 lot. : 80000 lot. = 4 kr. : 320000 kr.
3. Proměňme krejcary na zlaté:
   100 kr. : 320000 kr. = 1 zl. : x, rozluštěno 100 kr. : 320000 kr. = 1 zl. : 3200 zl.
4. Proměňme zlaté v tolary:
   1·5 zl. : 3200 zl. = 1 tol. : x nebo 1·5 zl. : 3200 zl. = 1 tol : x tol.

Z jednoduchých srovnalostí bude složená (dle §. 40) 1 lib. × 1 lot. × 100 kr. × 1·5 zl. : 2500 lib. × 80000 lot. × 320000 kr. × 3200 zl. = 32 lot. × 4 kr. × 1 zl. × 1 tol. : 80000 lot. × 320000 kr. × 3200 zl. × x tol., a skrátíme-li stejné členy bude:

1 lib. × 1 lot. × 100 kr. × 1·5 zl. : 2500 lib. = 32 tol. × 4 kr. × 1 zl. × 1 tol. : x tol.; z čehož: x tol. × 1 lib. × 1 lot × 100 kr. × 1·5 zl. = 2500 lib. × 32 lot. × 4 kr. × 1 zl. × 1 tol.

Taková rovnost součinů jednotlivých členů, z nichž jeden jest x, upomíná nás na složenou srovnalost vedle čáry (§ 41); uvedeme-li toto do takové srovnalosti, šetříce toho, aby dva a dva sobě v hodnotě rovné avšak různojmenné členy vedle sebe kladeny byly, a aby první člen pozdější byl stejnojmenný s druhým členem předcházejícím, budeme míti obraz řetězového počtu; tedy:

x tol.	2500 lib.
1 lib.	32 lot.
1 lot	4 kr.
100 kr.	1 zl.
1·5 zl.	1 tol.

nebo za x tol. bude 2500 lib. *)
1 lib. = 32 lot.
1 lot = 4 krej.**)
100 kr. = 1 zl.
1·5 zl. = 1 tol.

Z toho vysvítají úplně vlastnosti počtu řetězového, totiž:

1. Řetězový počet se rozřeší počítáním vedle čáry.
2. Započíná se neznámým členem (x), podle něhož se klade známý člen v otázce.
3. První člen pozdější má stejné jméno s druhým členem předcházejícím.

---

*) Ačkoliv nemůžeme říci x tol. = 2500 librám, můžeme si mysliti hodnota x tol. = ceně 2500 liber.

**) Cena za 1 lot = 4 kr.

4. Poslední člen musí býti stejnojmenný s prvním (x).
5. Možná-li skrátí se jednotliví členové přes čáru, a x se pak určí jako u složené srovnalosti.

V uvedeném příkladu by se x určilo po všemožném skrácení.

$$\begin{array}{r|l} x & 25\cancel{0}\cancel{0}\ 5 \\ 1 & 32 \\ 1 & 4 \\ 1\cancel{0}\cancel{0} & 1 \\ 3\ \cancel{15}\ \cancel{1{\cdot}5} & 10 \end{array}$$

$$x = \frac{5 \times 32 \times 4 \times 10}{3} = \frac{6400}{3} = 2133\,^1/_3$$

Za kolik krejcarů r. č. bude libra víd. zboží, pakli 100 nových hamburských liber jest za $36\,^1/_4$ marko banco?

(25 lib. víd. = 28 hambur. lib.; 21 zl. r. č = $27\,^3/_4$ mar. ban.)

Otázka: za kolik (x) krejcarů bude libra t. j.	x krej.	1 lib. víd.
druhý člen jest lib. víd., tedy musí býti		
první člen následující též lib. víd. .	t. j. 25 lib. víd.	28 lib ham.
příští člen musí býti lib. ham. . .	t. j. 100 l. ham.	$36\,^1/_4$ mar.
příští člen marko banko . .	t. j. $27\,^3/_4$ mar. ban.	21 zl. r. č.
příští člen zlatý r. č. . . .	t. j. 1 zl. r. č.	100 kr.

100 kr. jest stejnojmenné s x kr.

$$x = \frac{28 \times 29 \times 7}{5 \times 37}$$

$$= \frac{5684}{185} = 30{\cdot}71 \text{ kr.}$$

Za kolik centimes-ů bude arch tiskového papíru, platí-li se za balík v Berlíně 40 tolarů?

(frank = 28 kr. jihoněmeckého čísla; 7 zl. jihon. čís. = 4 tol.)

x cent.	1 arch
25 archů	1 kniha
20 knih	1 rys
10 rysů	1 balík
1 balík	40 tol. v Berlíne
4 tol.	7 zl. jihon. čís.
1 zl. j. č.	60 kr.
28 kr.	1 fr.
1 fr.	100 centim.

Po všem skrácení bude: x = 3 cent.

Kdyby se měl zisk nebo ztráta udati v úrocích ze sta (%) započne se počet řetězový takto: kolik zl. (x zl.) se přijme za 100 zl. vydaných, pakli atd. Je-li výsledek větší než-li 100 znamená to zisk, a sice tolik % o kolik zlatých jest výsledek větší, než-li 100 zl. vydání, je-li však výsledek menší než 100 zl., zna mená to ztrátu a sice opět tolik % kolik zlatých se do 100 zlatých nedostává. N. p. Kdosi koupil 146 korců obilí za 780 zl., korec prodal za 5 zl. 80 kr.; kolik % na něm vydělal nebo prodělal?

Kolik zlatých přijme za každých 100 zl. vydaných t. j.	x zl. př.	100 zlat.
dá-li 780 zl. za 156 korců . . . t. j.	780 zl.	156 kor.
a prodá-li korec za 5 zl. 80 kr. . t. j.	1 kor.	5·8 zl.

x = 116 zl. tedy

116 zl. — 100 zl. = 16% výdělku.

Kdosi dal za 5 setnýřů kávy 250 zl., prodával-li lot. za 2 kr., mnoho-li % vydělal nebo prodělal?

x zl. příj.	100 zl. vyd.
za 250 zl.	5 set.
1 set.	100 lib.
1 lib.	32 lotů
za 1 lot.	2 kr.
100 kr.	1zl.

x = 128 zl. t. j. 28% vydělal.

Často se stává, že v podobných příkladech přicházejí úroky ze sta (%). Je-li druhý člen předcházející číslo, při kterémž úroky už přiraženy jsou, musí býti první člen následující: 100 + % a vedle něho 100; je-li však druhý člen číslo bez úroků, musí býti první člen následující: 100 a vedle něho 100 + %. N. p. 1260 lib. zboží bylo za 378 tol. spolkových i s útratami, které 12½% obnášely; za kolik krejcarů r. č. byla libra?

Za kolik kr. (x) byla libra t. j. . . .	x kr.	1 lib.
pakli 1260 lib. bylo za 378 tol. s útratami, t. j.	1260	378 s útratami,
12½% bylo útrat, tedy 112½ tol. při 100 tol., t. j.	112½	100 tol. bez útrat
1 tol. = 1·5 zl. r. č.: t. j. . . .	1	1.5 zl. r. č.
1 zl. = 100 kr. r. č.	1	100 kr. r. č.

x = 40 kr.

Za kolik krejcarů bude 1 libra zboží, je-li 2430 lib. za 324 zl., a obnášejí-li mimo to útraty 15%?

Za kolik krejcarů bude 1 lib., t. j. . . .	x kr.	1 lib.
je-li 2430 lib. za 324 zl. bez útrat, t. j.	2430	324 zl. bez útr.
dělá-li každé 100 bez útrat 115 zl. s útratami, t. j.	100	115 zl. s útr.
a rovná-li se tedy 1·15 zl. s útratami 1 zl. = 100 kr., bez útrat t. j.	1·15	100 kr.

x = 13⅓ kr.

Podle předešlého způsobu by se tento příklad vypracoval takto:

324 zl. po 15% by bylo 372·6 zl. s útratami, tedy

x	1 lib.
2430	372·6 zl. s útratami
115	100 zl. bez útrat
1	100 kr.

x = $13^{1}/_{3}$ kr.

Cvičení.

1. Kolik franků dělá 200 Luisd'orů po $14^{1}/_{4}$ marku, pakli 300 marků = 225 zl. r. č. a 40·5 zl. = 100 frankům?
2. Balík papíru jest v Hamburku za 160 marko kurant, za kolik krejcarů r. č. bude arch, pakli 1 mark kurant = 60 kr. r. č.?
3. Kdosi koupil v Tersti 3 balíky kávy po 265 lib. a dal za ni 1500 lire sardinských; za kolik zlatých r. č. bude libra? (lira = 40·5 kr. r. č.)
4. Zač bude $12^{1}/_{2}$ setnýřů v Praze, pakli ruský pud jest za $4^{1}/_{4}$ ruble? (Rubl = 1·6192 zl. r. č., 10000 pudů = 7313 lib. víd.)
5. 3684 pruských liber jest za $668^{1}/_{2}$ spolk. tolarů i s útratami, které $10^{5}/_{6}\%$ obnášejí, za kolik krejcarů r. č. bude libra vídenská? (Lib. pruská = 0·8927 lib. víd., spol. tol. = 1·5 zl.)
6. Kupec Pražský koupil v Londýně 36 set. a 38 lib. zboží za 124 lib. sterlinků, za kolik zlatých r. č. bude zboží to v Praze, pakli by všeliké útraty obnášely a) $18^{1}/_{2}\%$, b) $22^{1}/_{4}\%$? (Lib. ster. = 10 zl. 10·51 kr.)
7. Zač bude setnýř zboží ve Vídni, pakli 3 setnýře téhož zboží jsou v Hamburku za $208^{1}/_{2}$ mark-banko, 200 mark-banko = $163^{1}/_{4}$ zl. konv. čísla, a chce-li se na něm 15% vydělati? (Setnýř hamburský = 112 hamb. liber po 0·4846 kilogr., libra víd. = 0·56 kilogr.)
8. Kdosi koupil setnýř oleje za 38 zl. badenských; prodává-li libru za 28 kr. r. č.; mnoho-li $\%$ vydělá nebo prodělá? (Badenský zlatý = 85·71 kr. r. č.)
9. Kdosi koupil v Bavořích 20 sudů piva za 28 zl. jihoněmeckých; dával-li pintu po 20 kr. r. č., mnoho-li $\%$ na něm vydělal? (Jihoněmecký zl. = 85·71 kr. r. č.)
10. Pud stříbra jest v Rusku za 825 stříbrných rublů; zač bude lot stříbra u nás, obnášejí-li útraty 2%? (Pud = 40 lib. rus., libra ruská = 0·7313 lib. víd., rubl = 1 zl. 61·92 kr.)

11. Kolik grammů z hruba váží pruský Friedrichsd'or, vejde-li se jich na hřívnu čistého stříbra $38^{10}/_{13}$, a jsou-li $21^{2}/_{3}$ karátové?
12. Jaké zrno má rubl v solotníku, vážíli 100 rublů $5^{1}/_{16}$ lib. ruské, razí-li se z libry 96 solotníků z hruba, a mají-li tyto zrno $83^{1}/_{3}$?
13. Jakou cenu má spolkový tolar v anglickém čísle zlatém, je-li unce standard-stříbra za 62 pence? (30 tolarů = 500 grammům, 373·246 gram. = 12 uncím čistého stříbra, 11 uncí čistého stříbra = 12 uncím standard-stříbra).
14. Co platí stříbrný rubl v $52^{1}/_{2}$ zlatovém čísle, pakli 100 rublů = $5^{1}/_{16}$ lib. po $83^{1}/_{3}$ čistého stříbra, a mincovná libra čistého stříbra = 51 zl. 50 kr.?
15. Jakou cenu má sovrano u nás v čísle korunném, pakli váha 1 sovrano = 113 granům a $32^{10}/_{146}$ setinám granů, a má-li $^{9}/_{10}$ ryzího zlata? (1000 granů = 23352 víden. správných cet., 65536 správ. cet. = víd. hřívně = 280·644 grammům).
16. Kolik císařských dukátů dostane kdosi za 10780 franků, dá-li lážé 10%? (Frank = 40·5 kr. r. č., dukát = 4 zl. 90 kr.)

C. Počet úrokový.

§. 43.

Všechno zboží movité i nemovité, které majetníku nějaký užitek přináší, jmenuje se kapitál, záleží-li kapitál v penězích uložených, nazývá se jistina.

Vypůjčí-li si někdo (dlužník) od jiného (veřitele) peníze, dává tomuto za ně jakousi náhradu, kterou jmenujeme úroky vůbec a rozeznáváme je od úroků ze sta (pro cento, per centum, %) nebo čísla úrokového, t. j. náhrady, kterou dlužník veřiteli za půjčených mu 100 zl. ročně odvádí. Řekne-li se tedy: Ta neb ona jistina nese 5%, tož znamená, že každých 100 zl. té jistiny vynáší ročně 5 zl.

Počtem úrokovým se určují úroky vůbec, jistina, úroky ze stá a čas, t. j. jak dlouho se jistina zúročuje.

Pakli dlužník úroky z vypůjčené jistiny v určité lhůtě (obyčejně každý rok) skládá, nazýváme úroky takové jednoduché. Dlužník splatí jistinu po uplynutí určitého času bez proměny. Pakli se však úroky z vypůjčené jistiny neskládají v určité lhůtě, nýbrž se k jistině přirážejí a opět zúročují s ostatní jistinou, nazýváme úroky takové složité aneb úroky na úrok, dlužník splatí v určitém čase najednou jistinu s úročenými úroky. Za tou příčinou rozeznáváme dvojí počet úrokový, totiž jednoduchý, pakli se jím úroky jednoduché, a složitý, pakli se jím úroky na úrok neb úroky složité určují.

1. Počet úrokový jednoduchý.

§. 44.

Počet úrokový jednoduchý rozřešuje následující otázky:

a) jaké úroky vůbec vynáší určitá jistina na určité úroky ze sta $(^0/_0)$ v daném čase?

b) která jistina, uložená na určité úroky ze sta $(^0/_0)$, vynáší v známem čase udané úroky?

c) na kolik úroků ze sta $(^0/_0)$ jest uložena určitá jistina, pakli v udaném čase známé úroky vynáší?

d) v kterém čase vynáší určitá jistina na známé úroky ze sta v udaném čase úroky vůbec?

Rozřešení těchto otázek děje se buď pomocí složitého pravidla „regula de tri“ (regula multiplex) s poměry přímými a obrácenými, anebo pomocí všeobecných vzorců, které se z předešlého vyvinují.

a. Jak se vypočítají úroky vůbec.

§. 45.

Úroky vůbec možná vypočítati za rozličné lhůty, totiž za roky, měšíce, týdny a dny, kdežto úroky ze sta jen za rok se vyrozumívají.

Mají-li se vypocítati úroky za roky, vypočítají se úroky ty buď nejprvé za jeden rok, a výsledek se násobí počtem daných roků, anebo se vypočítají úroky v celku pomocí „regula multiplex.“ N. p.

Jaké úroky vynáší jistina 850 zl. na $4^0/_0$ za 3 roky?

Za jeden rok by 850 zl. na $4^0/_0$ vyneslo $\frac{850 \times 4}{100} = \frac{3400}{100} = 34$ zl., tedy za 3 roky třikrát tolik, t. j. 34 zl. $\times$ 3 $= 102$ zl.

Pomocí „regula multiplex“:

100 zl. vynáší $4^0/_0$ za 1 rok
850 zl. vynese x úr. za 3 roky

---

x : 4 = 850 : 100 (čím větší úroky vůbec, tím větší jistina, poměr přímý)
3 : 1 (čím větší úroky vůbec, tím déle musí býti jistina uložená, pom. př.)

$$x : 4 = 850 \times 3 : 100$$

$$x = \frac{4 \times 850 \times 3}{100} = 2 \times 51 = 102 \text{ zl. úroků.}$$

Z toho pozorujeme, že jsou úroky vůbec k jistině, k úrokům ze sta a k času v poměru přímém.

Nazveme-li úroky vůbec = ú, úroky ze sta = $^0/_0$, jistinu = j a roky = r, možná z $x = \frac{4 \times 850 \times 3}{100}$ sestaviti všeobecný vzorec, neboť
x = úrokům vůbec = ú
4 = úrokům ze sta = $^0/_0$
850 = jistině = j
3 = rokům = r

tedy $x = \frac{4 \times 850 \times 3}{100}$, t. j. $ú = \frac{^0/_0 \times j \times r}{100}$, t. j. úroky se rovnají součinu z úroků ze sta, jistiny a času dělenému stem.*) Dle tohoto vzorce možná každé úroky vypočítati, n. p.

Jaké úroky vynáší jistina 4620 zl. na $4^1/_2{}^0/_0$ za $5^1/_2$ roků?

Dle jednoduché „regula de tri“

$$\frac{4620 \times 4^1/_2}{100} = \frac{4620 \times {}^9/_2}{100} = \frac{2310 \times 9}{100} = 207{\cdot}9 \text{ zl. za}$$

rok, tedy za $5^1/_2$ roku:

$$207{\cdot}9 \times 5^1/_2 = 207{\cdot}9 \times {}^{11}/_2 = \frac{22869}{2} = 1143{\cdot}45 \text{ zl.}$$

Dle „regula multiplex“:

100 zl. dá $4^1/_2{}^0/_0$ za 1 rok
4620 „ „ x „ „ $5^1/_2$ roku

$x : 4^1/_2 = 4620 : 100$
$5^1/_2 : 1$

---

*) Že se v tomto a ve všech podobných všeobecných vzorcích užívá písmen na místě čísel, k nimž jelikož jména přináležejí, rozumí se samo sebou.

$$x : 9 = 4620 \times 11 : 400$$
$$x : 9 = 50820 : 400$$
$$x = \frac{9 \times 2541}{20} = \frac{22869}{20} = 1143{\cdot}45 \text{ zl. úroků.}$$

Dle všeobecného vzorce:

$$ú = \frac{\% \times j \times r}{100} = \frac{4\,{}^1\!/_2 \times 4620 \times 5\,{}^1\!/_2}{100} = \frac{9 \times 462 \times 11}{100}$$
$$= 1143{\cdot}45 \text{ zl. úroků.}$$

Mají-li se úroky za měsíce vypočítati, možná je vypočítati buď za rok a pak pomocí vlaské praktiky za dané měšíce, nebo dle „regula multiplex“, kladouce místo 1 roku 12 měsíců, nebo dle všeobecného vzorce v němž $\frac{r}{12}$ = měsíci, n. p.

Jaké úroky vynáší 1560 zl. na 5% za 4 měsíce?

Za rok by 1560 zl. na 5% vyneslo $\frac{1560 \times 5}{100} = 78$ zl. úroků; 4 měsíce = $^1\!/_3$ roku tedy za $^1\!/_3$ roku by vynesla daná jistina 78 × $^1\!/_3$ = 26 zl. úroků.

Dle „regula multiplex“ 100 zl. dá 5% za 12 měsíců
1560 zl. dá x „ za 4 měsíce

$$\begin{array}{l} x : 5 = 1560 : 100 \\ 4 : 12 \\ \hline x = 26 \text{ zl. úroků.} \end{array}$$

Dle všeobecného vzorce:

$$ú = \frac{\% \times j \times \frac{r}{12}}{100} = \frac{5 \times 1560 \times {}^4\!/_{12}}{100} = 26 \text{ zl. úroků.}$$

Mají-li se úroky vypočítati za týdny, převedou se tyto obyčejně na dny. Přitom se klade rok = 360 dnům a měsíc 30 dnům.*) Úlohy takové se rozřešují taktéž trojím způsobem, buď se totiž vypočítají úroky za rok a pak pomocí vlaské praktiky (bylo-li by to s výhodou) za určité dny, nebo dle „regula multiplex“, anebo dle všeobecného vzorce kladouce den = $\frac{r}{360}$, n. p.

Jaké úroky vynáší jistina 3685 zl. na 3% za 95 dní?

Za rok by 3685 zl. na 3% vyneslo $\frac{3685 \times 3}{100} = 110{\cdot}55$ zl. úroků;

---

*) Jen v Anglicku a v anglických zemích v Americe se počítá rok na 365 a měsíc na tolik dní, kolik skutečně má.

95 dní = 90 dní + 5 dní, 90 dní = $1/4$ roku
5 dní = $1/72$ „ *)
tedy $110{\cdot}55 \times 1/4 = 27{\cdot}6375$ zl.
$110{\cdot}55 \times 1/72 = 1{\cdot}5354$ zl.
$29{\cdot}1729$ zl. úroků.

Dle „regula multiplex“: 100 zl. dá 3% za 360 dní
3685 „ „ x „ 95 „

$$\begin{aligned} x : 3 &= 3685 : 100 \\ & 95 : 360 \\ \hline x &= 29{\cdot}1729 \text{ zl. úroků.} \end{aligned}$$

Dle všeobecného vzorce:

$$ú = \frac{\% \times j \times \frac{r}{360}}{100} = \frac{3 \times 3685 \times 95}{100 \times 360} = 29{\cdot}1729 \text{ zl.}$$

úroků.

Cvičení.

1. Jaké úroky vynáší jistina 456 zl. na 3% a) za 5 roků, b) za 7 roků, c) za $8\,1/2$ roku, d) za $10\,1/4$ roku?
2. Jaké úroky vynáší jistina 945 zl. na $4\,1/2\%$ a) za 2 roky, b) za $5\,1/2$ roku, c) za $7\,1/6$ roku, d) za $10\,1/4$ roku?
3. Jaké úroky vynáší jistina 1781 zl. na $3\,1/2\%$ a) za 8 měsíců, b) za 6 měsíců, c) za 3 měsíce, d) za 10 měsíců?
4. Jaké úroky vynáší jistina 3680 zl. na $5\,1/4\%$ a) od 1. května 1850 do 1. června 1856, b) od 15. června 1857 do 15. září 1859, c) od 13. dubna 1853 do 13. ledna 1861, d) od 12. března 1851 do 12. prosince 1860?
5. Jaké úroky vynáší jistina 948 zl. na 4% a) za 148 dní, b) za 165 dní, c) za 48 dní, d) za 99 dní?
6. Jaké úroky vynáší jistina 1346·6 zl. na $6\,1/2\%$ a) za 15 dní, b) za 75 dní, c) za 140 dní, d) za 164 dní?
7. Jaké úroky vynáší jistina 6560 zl. na $6\,1/2\%$ a) od 15. května 1853 do 30. června 1861, b) od 11. ledna 1854 do 18. dubna 1860, b) od 12. března 1847 do 22. července 1859, d) od. února 1845 do 17. listopádu 1860?

---

*) Nebo 5 = $1/18$ od $1/4$ roku.

b. Jak se vypočítá jistina?

§. 46.

U vypočítání úroků vůbec byly všechny poměry přímé, u vypočítání jistiny ale jsou poměry přímé a obrácené, a sice:

1. **Jistina má se k úrokům vůbec v poměrů přímém**, t. j. čím **větší** jistina, tím **větší** úroky vůbec.
2. **Jistina se má k číslu úrokovému** (%) v poměru **obráceném**, t. j. čím **větší** jistina, tím **méně** může 100 zl. vynášeti, nebo tím **menší** mohou býti úroky ze sta, aby daly též úroky vůbec.
3. Jistina se má k **času** v poměru **obráceném**, t. j. čím **větší** jistina, tím **kratší** čas může býti uložena, aby dala určité úroky vůbec.

Ve všech případech si musíme k číslu úrokovému (%) přimysliti jistinu 100 zl., a čas 1 rok = 12 měs. = 360 dnim.

Jistina se vypočítává buď pomocí „regula multiplex“ nebo pomocí odvozeného z ní všeobecného vzorce, n. p.

Jaká jistina dá na 5% za 4 roky 768 zl. úroků?

Dle „regula multiplex“: x jistina dá 768 zl. úroků za 4 roky,
pakli: 100 zl. „ 5% „ „ 1 rok

x : 100 = 768 : 5 (čím **větší** jistina, tím **více** úroků, pom. pří.)
1 : 4 (čím **větší** jistina, tím **kratší** čas, poměr obrácený)

$$x = \frac{100 \times 768}{5 \times 4} = 3840 \text{ zl.}$$

Z $x = \frac{100 \times 768}{5 \times 4}$ možná sestaviti všeobecný vzorec, neboť

$$\begin{array}{r} x = j \\ 768 = \text{ú} \\ 5 = \% \\ 4 = r \end{array} \left\{ \text{tedy } j = \frac{\text{ú} \times 100}{\% \times r}, \right.$$

t. j. **jistina se rovná stonásobným úrokům, děleným součinem času násobeného úroky ze sta.**

N. p. Dům vynáší za $3\frac{1}{2}$ roku na 5% 1320 zl. úroků, jakou má cenu?

Dle „regula multiplex“ 100 zl. nese za 1 rok 5%
x „ „ „ $5\frac{1}{2}$ roku 1320 úroků

x : 100 = 1 : $5\frac{1}{2}$
1320 : 5

x = 4800 zl.

Dle všeobecného vzorce:

$$j = \frac{\text{ú} \times 100}{\% \times r} = \frac{1320 \times 100}{5 \times 5\frac{1}{2}} = 4800 \text{ zl.}$$

Má-li se vypočítati jistina, která v určitých měsících, na známé ze sta, udané úroky vynáší, tu se klade na místě jednoho roku 12 měsíců, tedy $\frac{r}{12}$ = měsíci, a počítá se jako obyčejně. Byli-li by místo měsíců dnové, tu se na místo roku klade 360 dní, tedy $\frac{r}{360}$ = 1 dnu, n. p.

Která jistina vynáší za 4 měsíce na $4\frac{1}{2}\%$ 57 zl. 60 kr.?

Dle „reg. mult.“: x zl. jistiny vynáší za 4 měsíce 576 zl. úroků
pakli 100 zl. „ „ „ 12 „ 45 „ „

x : 100 = 12 : 4
57·6 : 4·5

x = 3840 zl.

Dle všeobecného vzorce:

$$j = \frac{\text{ú} \times 100}{\% \times \frac{r}{12}} = \frac{57{\cdot}6 \times 100}{4{\cdot}5 \times {}^{4}/_{12}} = 3840 \text{ zl.}$$

Která jistina vynáší za 75 dní na 6% 35 zl. úroků?

Dle „regula multiplex“: 100 zl. dá za 360 dní 6%
x „ „ „ 75 „ 35 zl. úroků

x : 100 = 360 : 75
35 : 6

x = 1680 zl.

Dle všeobecného vzorce:

$$j = \frac{\text{ú} \times 100}{\% \times \frac{r}{360}} = \frac{35 \times 100}{6\% : \frac{75}{360}} = 1680 \text{ zl.}$$

Porovnává-li se neznámá jistina s jinou známou ohledem na úroky ze sta, úroky vůbec nebo čas, rozřešuje se počet takový obyčejně pouze pomocí „regula multiplex“, n. p.

Která jistina vynáší za $1\frac{1}{4}$ roku 48 zl. úroků, pakli jistina 1840 zl. za $3\frac{1}{2}$ roku 256 zl. vynese? (Patrno, že se u obou jistin předpokládají téže %).

x jistina vynáší za $1\frac{1}{2}$ roku 48 zl.
pakli 1840 zl. „ „ „ $3\frac{1}{4}$ „ 256 „

x : 1840 = $3\frac{1}{2}$: $1\frac{1}{4}$
48 : 256

x = 966 zl.

Která jistina vynesla za 5 roků na $4^0/_0$ tolik úroků, jako jistina 1800 zl. za $3^0/_0$ za 6 roků? (Patrno že se předpokládají téže úroky.)

Jistina 1800 zl. vynesla za 6 roků na $3^0/_0$ téže úroky
jako „ x „ „ „ 5 „ „ $4^0/_0$ „ „

x : 1800 = 6 : 5 (čím větší jistina, tím méně roků, poměr obrácený)
3 : 4 (čím větší jistina, tím menší úroky ze sta, poměr obrácený)

x = 1620 zl.

Cvičení.

1. Která jistina vynáší na $4^0/_0$ za 8 roků 6800 zl. úroků?
2. Která jistina vynáší na $5^1/_4\,^0/_0$ za 6 roků 368 zl. úroků?
3. Která jistina vynáší na $3^1/_2\,^0/_0$ za $5^3/_4$ roku 675 zl. 80 kr. úroků?
4. Statek vynáší za $1^1/_2$ roku na $5^1/_2\,^0/_0$ 6754 zl. úroků; jakou má cenu?
5. Dům vynáší za $4^3/_4$ roku na $6^1/_2\,^0/_0$ 3680 úroků; jakou má cenu?
6. Která jistina vynáší za 190 dní na $3^3/_4\,^0/_0$ 45 zl. 40 kr.?
7. Která jistina vynáší za 3 roky 10 měsíců na 5 $^0/_0$ 160 zl. 80 kr.?
8. Která jistina vynáší za 5 roků 1 měsíc a 15 dní na $5^1/_2\,^0/_0$ 3690 zl.?
9. Která jistina vynáší za 4 roky 5 měsíců a 20 dní na $3^1/_2\,^0/_0$ 1610 zl.?
10. Která jistina vynáší za 5 roků na 4 $^0/_0$ tolik úroků, jako jistina 1800 zl. na 3 $^0/_0$ za 6 roků?
11. Která jistina vynáší za $4^1/_2$ roku 1800 zl. úroků, vynáší-li 1260 zl. na téže $^0/_0$ za 3 roky 810 zl. úroků?
12. Která jistina vynáší na 5 $^0/_0$ 360 zl. 50 kr., vynáší-li 5680 zl. za tentýž čas na $4^1/_2\,^0/_0$ 900 zl.?

Jak se vypočítají úroky ze sta ($^0/_0$)?

§. 47.

Považuje-li se číslo úrokové ($^0/_0$) za úroky vůbec, jest k úrokům k jistině a k času v poměru přímém, neboť čím více úroků ze 100 zl., tím více ze dvou, tří, čtyř atd. set; čím větší jest jistina než-li 100 zl., tím více úroků z ní v celku, tedy tím více úroků ze 100, (čím menší jistina než-li 100 zl., tím menší jsou úroky z ní v celku, tedy tím menší by byly ze 100); čím více úroků ze 100 za 1 rok (měsíc nebo den), tím více úroků za 2, 3, 4.... roky (měsíce nebo dni). N. p. na kolik ze sta byla půjčena jistina 850 zl., vynesla-li za $4\frac{1}{2}$ roku 153 zl. úroků?

850 zl. vyneslo za $4\frac{1}{2}$ roku 153 zl. úroků
100 zl. by „ „ 1 rok x „ „

x : 153 = 1 : $4\frac{1}{2}$ (čím více $^0/_0$ za rok, tím více za $4\frac{1}{2}$ roku, tedy poměr přímý)
100 : 850 (čím více ze sta ($^0/_0$), tím více z 850 zl., tedy poměr přímý)

$$x = \frac{153 \times 100}{4\frac{1}{2} \times 850} = 4^0/_0$$

$x = {}^0/_0$, $153 = ú$, $850 = j$, $4\frac{1}{2} = r$, tedy by bylo všeobecně

$$^0/_0 = \frac{ú \times 100}{j \times r}$$

t. j. **úroky ze sta** ($^0/_0$) **se rovnají 100-násobným úrokům vůbec děleným součinem z jistiny a roků.**

Kdyby místo roku byly dány měsíce, byl by měsíc $= \frac{r}{12}$, a byly-li by dni, byl by den $= \frac{r}{360}$, n. p.

Na kolik $^0/_0$ byla půjčena jistina 12600 zl.; vynesla-li za 4 měsíce 210 zl. úroků? Dle „regula multiplex“:

x $^0/_0$ 100 zl. 1 rok
210 zl. 12600 „ $\frac{1}{3}$ roku

x : 210 = 100 : 12600
1 : $\frac{1}{3}$

x = $5^0/_0$

Dle obecného vzorce:

$$^0/_0 = \frac{ú \times 100}{j \times r} = \frac{210 \times 100}{12600 \times \frac{1}{3}} = 5^0/_0.$$

Považuje-li se však **číslo úrokové za měřídko**, dle něhož se posuzují úroky dvou rozličných jistin, půjčených na určité časy, pak jsou poměry obráceny, (jen k úrokům vůbec jest číslo úrokové v poměru přímém), neboť čím větší jest jistina u porovnání s jistinou zakladní (100 zl.), tím menší mohou býti úroky ze sta, aby jistina dala téže úroky vůbec; čím déle se jistina zúročuje, tím menší mohou býti úroky ze sta, aby dala téže úroky vůbec; a však čím větší jsou úroky ze sta, tím větší jsou úroky vůbec. Na místě základní jistiny 100 zl. a základního času 1 rok může se jiná jistina a jiný čas předpokládati. Úlohy takové se rozřešují obyčejně pravidlem „regula multiplex“.

N. p. Jistina 450 zl. vynáší za $1\frac{1}{2}$ roku téže úroky jako jistina 765 zl. za 9 měsíců na $6^0/_0$. Na kolik ze sta byla první jistina půjčena? Členy výmínečné:

765 zl. vynáší určité úroky na $6^0/_0$ za 9 měsíců,
450 zl. vynese „ „ „ x $^0/_0$ „ $1\frac{1}{2}$ roku?

$x : 6 = 765 : 450$ (čím větší %, tím menší může býti jistina, aby dala téže úroky)

$9 : 18$ (čím větší %, tím za kratší čas dá určitá jistina téže úroky)

$x = 5\frac{1}{10}\,\%$

650 zl. dá v 10 měsících téže úroky jako 455 zl. za $1\frac{1}{4}$ roku na 4%. Na kolik % byla první jistina půjčena?

455 zl. $1\frac{1}{4}$ roku 4%

650 zl. 10 měsíců x %

$x : 4 = 455 : 650$

$15 : 10$

$x = 4\frac{1}{5}\,\%$

Cvičení.

1. Dům v ceně 15500 zl., vynesl za $4\frac{1}{2}$ roku 3836 zl. 45 kr., kolik vynášel ze sta?
2. Na kolik % byla půjčena jistina 3840 zl., vynesla-li za 4 měsíce 64 zl. úroků?
3. Na kolik % byla půjčena jistina 10800 zl., vynesla-li od 28. března do 27. listopadu 216 zl. úroků?
4. Na kolik % byla půjčena jistina 6120 zl., vynesla-li za 2 roky a 3 měs. 76 zl. 50 kr. úroků?
5. 400 zl. vynáší za 6 měsíců právě tolik úroků jako 1000 zl. za 3 měsíce na 4%. Na kolik % byla první jistina půjčena?
6. Na kolik % půjčuje kdosi peníze, dostává-li z 5 zl. za 14 dní 6 krejcarů náhrady?
7. Na kolik % bylo půjčeno 4840 franků, pakli tyto za 15 měsíců 287 fr. $37\frac{1}{2}$ centimes úroků daly?
8. Kdosi má dva domy, první v ceně 13000 zl. vynáší za 2 roky 6 měsíců téže úroky na 6%, jako druhý v ceně 15000 zl. za 3 roky 3 měsíce. Kolik ze sta vynáší druhý dům?
9. Kdosi má půjčeny dvě jistiny, 3600 zl. vynáší mu na $5\frac{1}{2}\,\%$ za 4 měsíce a 10 dní tolik úroků, jako druhá 5700 zl. za 5 měs. 15 dní. Kolik % vynáší druhá jistina?
10. 650 zl. vynáší v určitém čase na 6% 35 zl. úroků, na kolik % jest 780 zl. půjčeno, pakli že v témže čase vynášejí 21 zl. úroků?
11. Jistina 351 zl. vynáší na $3\frac{1}{2}\,\%$ v určitém čase 14 zl. úroků; na kolik % jest jistina 450 zl. půjčena, vynáší-li v témže čase 20 zl.?

d. Jak se vypočítá čas?

§. 48.

U vypočítání času střídají se poměry *přímé* s *obrácenými*, neboť jest:

a) *čas k úrokům* v poměru *přímém*, t. j. čím *déle* jest jistina půjčena, tím *větší* úroky vynáší;

b) *čas jest k jistině* v poměru *obráceném*, t. j. čím *déle* jest jistina půjčena, tím *menší* může býti, aby téže úroky nesla;

c) *čas jest k číslu úrokovému* v poměru *obráceném*, t. j. čím *déle* jest jistina půjčena, tím *menší* mohou býti úroky ze sta, aby téže úroky v celku nesla.

Vypočítání času se děje taktéž podle „regula multiplex“, aneb z ní odvozeného všeobecného vzorce.

N. p. Jak dlouho byla jistina 2650 zl. půjčena, vynesla-li na $4^1/_2\%$ 397 zl. 50 kr. úroků?

100 zl. dává za 1 rok $4^1/_2\%$,
2650 „ dá „ x roků $397^1/_2$ zl.

x : 1 = 100 : 2650 (čím *déle* jistina leží, tím *menší* může býti, poměr *obrácený*)
$397^1/_2 : 4^1/_2$ (čím *déle* jistina leží, tím *větší* úroky nese, poměr *přímý*)

$$x = \frac{100 \times 397^1/_2}{2650 \times 4^1/_2} = 3^1/_3 \text{ roku.}$$

x = r, $397^1/_2$ zl. = ú, 2650 zl. = j, $4^1/_2$ = %, tedy všeobecně

$$r = \frac{100 \times ú}{j \times \%}.$$

Jak dlouho musí jistina 1960 zl. na 3% býti půjčena, aby vynesla 98 zl.?

Dle „regula multiplex“:
100 zl. 3% za 1 rok
1960 zl. 98 zl. x roků

x : 1 = 100 : 1960
98 : 3

x = $1^2/_3$ roku.

Dle všeobecného vzorce:

$$r = \frac{100 \times ú}{j \times \%}$$

$$r = \frac{100 \times 98}{1960 \times 3} = 1^2/_3 \text{ roku.}$$

Jak dlouho musí jistina 980 zl. býti půjčena, má-li na 3% tolik úroků vynesti, jako jistina 630 zl. na $3^1/_2\%$ za $9^1/_3$ měsíce?

630 zl. vynáší na $3^1/_2\%$ určité úroky za $9^1/_3$ měs.
980 „ vynese „ 3% „ „ „ x „

x : $9^1/_3$ = 630 : 980 (čím *delší* čas, tím *menší* může

býti jistina, poměr obrácený)
$3\frac{1}{2} : 3$ (čím delší čas, tím menší mohou
býti %, poměr obrácený)

x = 7 měsíců.

Cvičení.

1. Kdy vynese jistina 7500 zl. na 5% a) 300 zl., b) 420 zl., c) 550 zl. úroků?
2. Kdosi půjčil dne 15. května 1859 jistinu 800 zl. na $5\frac{1}{2}$%, do kterého dne mu vynese na úrocích a) 66 zl., b) 88 zl., c) 121 zl.?
3. Jak dlouho byla jistina 3666 zl. na 5% půjčena, vynesla-li 366 zl. úroků?
4. Který den půjčil kdosi 1825 zl., jestli dne 10. září 1841 vynesly mu na $4\frac{1}{2}$% 125 zl. 15 kr. úroků?
5. 5500 zl. půjčí kdosi na 4%, 9 roků později půjčí tentýž 8000 zl. na 5%, kdy vynese druhá jistina tolik, co vynesla první za 9 roků?
6. Za kolik roků vynese 3400 zl. na $2\frac{1}{2}$% tolik úroků, jako kdyby na 4% po 3 roky a 9 měsíců půjčena byla?
7. Kdy vynese jistina 1125 zl. $36\frac{1}{2}$ zl. úroků, pakli jistina 1780 zl. za 225 dní 44 zl. 50 kr. na téže % vynesla?

2. Počet úrokový složitý.

§. 49.

Z §. 43 známo, že se úroky zúročují, pakli dlužník z vypůjčené jistiny základné neodvádí věřiteli úroky celoročně nebo půlletně, nýbrž tyto k jistině přiráží a z nich opět úroky platí. Vypůjčí-li si někdo n. p. 100 zl. na 4% a přirazí-li úroky (4 zl.) k jistině, jest pro druhý rok 104 zl. dlužen, musí tedy úroky ze 104 zl. věřiteli platiti atd. Takovým způsobem základná jistina rychle roste,*) pročež není všude dovoleno brati úrok z úroků od jednotlivce, u rozličných ústavů ale, jako u spořitelen a všech pojišťoven, n. p. života, má počet tento velikou platnost.

Úrokový počet složitý zanáší se hlavně rozřešením následujících otázek:

---

*) Tak n. p. se jistina uložená na úrok z úroků zdvojnásobí za 23·45 roku, je-li na 3%, za 17·673 roku, je-li na 4% a ztrojnásobí se za 37·161 roku, je-li na 3% a za 28·011 roku, je-li na 4% půjčena.

1. Na jakou sumu vzrostla základná jistina, která byla po určitý čas uložena na úrok z úroků?
2. Jak veliká byla základná jistina, která byla uložena na úrok z úroků, pakli v určitém čase vzrostla na určitou sumu?

Úlohy takové možná rozřešiti dvojím způsobem, totiž buď

a) pravidlem nazvaným „regula de tri“, anebo
b) počtem řetězovým.

1. Sumu, na kterou vzrostla základná jistina, uložená na úrok z úroků, po určitém čase, vypočítáme následovně. N. p.

Jistina 850 zl. byla půjčena na 5%, na jakou sumu vyrostla za 5 roků, byla-li půjčena na úrok z úroků, a přirážely-li se úroky ty k ní celoročně?

a. Rozřešení pravidlem nazvaným „regula de tri.“

Po prvním roce dá 100 zl. s přirážkou 5ti % 105 zl., tedy x zl. dá 850 zl. v témž čase?

$$x : 105 = 850 : 100$$
$$x = 892\cdot5 \text{ zl. na konci 1. roku.}$$

Vzrostla-li jistina 850 zl. na konci 1. nebo na počátku 2. roku na 892·5 zl., na mnoho-li by vzrostly tyto opět za rok, kdyby byly na 5%? (t. j. 100 zl. by dalo 105 zl.)

$$x : 105 = 892\cdot5 : 100$$
$$x = 937\cdot125 \text{ zl. na konci 2. roku.}$$

Na mnoho-li by vzrostla jistina 937·125 zl. na 5% opět za rok?

$$x : 105 = 937\cdot125 : 100$$
$$x = 983\cdot9813 \text{ zl. na konci 3. roku.}$$

Podobně by se $x : 105 = 983\cdot9813 : 100$, tedy

$$x : 1033\cdot1804 \text{ zl. na konci 4. roku.}$$

Konečně $x : 105 = 1033\cdot1804 : 100$, z čehož

$x = 1084\cdot8394$ zl. na konci 5. roku, t. j. jistina 850 zl. uložená na 5% vzrostla by za 5 roků úroky na úrok na 1084·8394 zl.

b. Rozřešení počtem řetězovým.

Tatáž úloha by se takto rozřešila:

x zl. dá 850 zl. jistiny základné na 5%, dá-li prvního roku:

100 „ 105 „ z těchto druhého roku:
100 „ 105 „ „ třetího „
100 „ 105 „ „ čtvrtého „
100 „ 105 „ „ pátého „
100 „ 105 „

Po skrácení bude $x = 1084·8394$ zl.

Obyčejně se však neklade „100 zl. dá 105 zl.,“ nýbrž se udá, na mnoho-li vzroste ročně *každý* zlatý. V předešlé úloze vzroste každý zlatý za rok na 1·05 zl. (kdyby byla jistina na $3^0/_0$, $4^0/_0$, $6^0/_0$ atd. půjčena, vzrostl by každý zlatý za rok na 1·03 zl., 1·04 zl., 1·06 zl. atd.), tedy by se obyčejným způsobem úloha daná rozřešila:

x zl. dá 850 zl. na $5^0/_0$, vzroste-li z nich prvního roku
1 „ na 1·05 „ z toho druhého roku opět
1 „ „ 1·05 „ „ třetího „ „
1 „ „ 1·05 „ „ čtvrtého „ „
1 „ „ 1·05 „ „ pátého „ „
1 „ „ 1·05 „ z čehož:

$x = 850 \times (1·05)^5$, t. j.
$x = 1084·8397$ zl.

Činitel $(1·05)^5$ nazývá se *úročitel rostoucí* nebo *vzestupný* a rovná se vždy *číslu naznačujícímu, mnoho-li dá v určitém čase* (ročně nebo půlletně) 1 zl. *i s úroky, povýšenému na tolikátou mocnost, na kolik roků* (nebo půlletí) *základná jistina uložena byla.*

Kdyby v předešlém příkladu se úroky *půlletně* k jistině přirážeti měly, nezměnilo by se v provedení ničehož, jen že by vzrostlo 100 zl. na $5^0/_0$ za půl roku na 102·5 zl.
nebo 1 zl. na $5^0/_0$ „ „ „ „ 1·025 „
tedy x zl. dá 850 zl., vzroste-li
1 „ na 1·025 zl. za 1 půlletí, z těchto
1 „ „ 1·025 „ „ 2 „ „
1 „ „ 1·025 „ „ 3 „ „
1 „ „ 1·025 „ „ 4 „ „
1 „ „ 1·025 „ „ 5 „ „
1 „ „ 1·025 „ „ 6 „ „
1 „ „ 1·025 „ „ 7 „ „
1 „ „ 1·025 „ „ 8 „ „
1 „ „ 1·025 „ „ 9 „ „
1 „ „ 1·025 „ „ 10 „ „

$x = 850 \cdot (1·025)^{10} = 1088·0603$ zl.

t. j. při půlletních přirážkách vzroste jistina 850 zl. na $5^0/_0$ půjčená na 1088·0603 zl.

Kdyby byla jistina na $4^0/_0$ půjčena, vynesl by každý zlatý za rok 0·04 zl., tedy by 1 zl. vzrostl na 1·04 zl., taktéž by vynesl každý zlatý za půlletí $\frac{0.04}{2} = 0·02$ zl. tedy 1 zl. by vzrostl na 1·02 zl.

Při jistině na 6% vynesl by každý zlatý za rok 0.06 zl., tedy by 1 zl. vzrostl na 1·06 zl. a každý zlatý za půlletí $\frac{0.06}{2} = 0.03$ zl., t. j. 1 zl. by vzrostl za půl léta na 1·03 zl. atd.

Aby vypočítání úročitele rostoucího v praktickém počítání času neukrádalo, stává zvláštních k tomu tabulek, v nichž úročitel takový na 1, 2, 3, 4 . . . . roky vypočítán jest, tak že se pouze základná jistina vypočítaným v tabulce úročitelem (obyčejne skráceně) násobí. Tabulka následující uvadí vypočítané úročitele rostoucí pro 2, 2½, 3, 4, 5, 6 úroků ze sta na 1, 2, 3, 4 . . . . 30 občasí, t. j. roků nebo půlletí.

občasí	2%	2½%	3%
1.	1·02	1·025	1·03
2.	1·0404	1·050625	1·0609
3.	1·061208	1·076880	1·092727
4.	1·082432	1·103802	1·125509
5.	1·104081	1·131397	1·159274
6.	1·126162	1·159682	1·194052
7.	1·148686	1·188674	1·229874
8.	1·171659	1·218390	1·266770
9.	1·195093	1·248850	1·304773
10.	1·218994	1·280071	1·343916
11.	1·243374	1·312072	1·384234
12.	1·268242	1·344873	1·425761
13.	1·293607	1·378494	1·468534
14.	1·319479	1·412956	1·512590
15.	1·345869	1·448280	1·557967
16.	1·372786	1·484487	1·604706
17.	1·400241	1·521598	1·652848
18.	1·428246	1·559638	1·702433
19.	1·456811	1·598629	1·753506
20.	1·485947	1·638595	1·806111
21.	1·515666	1·679460	1·860295
22.	1·545980	1·721446	1·916103
23.	1·576899	1·764482	1·973587
24.	1·608437	1·808594	2·032794
25.	1·640606	1·853809	2·093778
26.	1·673418	1·900154	2·156591
27.	1·706886	1·947658	2·221289
28.	1·741024	1·996349	2·287928
29.	1·775845	2·046258	2·356566
30.	1·811362	2·097414	2·427262

občasí	4%	5%	6%
1.	1·04	1·05	1·06
2.	1·0816	1·1025	1·1236
3.	1·124864	1·157625	1·191016
4.	1·169859	1·215506	1·262477
5.	1·216653	1·276282	1·338226
6.	1·265319	1·340096	1·418519
7.	1·315932	1·407100	1·503630
8.	1·368569	1·477455	1·593848
9.	1·423312	1·551328	1·689479
10.	1·480244	1.628895	1·790848
11.	1·539454	1·710339	1·898299
12.	1·601032	1·795856	2·012196
13.	1·665074	1·885649	2·132928
14.	1·731676	1·979932	2·260904
15.	1·800944	2·078928	2·396558
16.	1·872981	2·182875	2·540352
17.	1·947900	2·292018	2·692773
18.	2·025817	2·406619	2·854339
19.	2·106849	2·526950	3·025600
20.	2·191123	2·653298	3·207135
21.	2·278768	2·785963	3·399564
22.	2·369919	2·925261	3·603537
23.	2·464716	3·071524	3·819750
24.	2·563304	3·225100	4·048935
25.	2·665836	3·386355	4·291871
26.	2·772470	3·555673	4·549383
27.	2·883369	3·733456	4·822346
28.	2·998703	3·920129	5·111687
29.	3·118651	4·116136	5·418388
30.	3·243398	4·321942	5·743491

2. Druhá otázka, kterou složitý počet úrokový rozřešuje jest: *Jak veliká byla základná jistina, která byla uložena na úrok z úroků, pakli v určitém čase vzrostla na určitou sumu?*

V takových úlohách jest tedy známo: jistina zúročená, úroky ze sta a počet roků, a hledá se *jistina základná*, tedy jsou úlohy takové opak úloh předešlých, v nichž se z jistiny základné, z úroků ze sta a z počtu roků jistina zúročená určovala. N. p. Která jistina základná vynese za 5 roků na 5% 1084·8394 zl., přirážejí-li se k ní úroky *celoročně*?

Dle pravidla „regula de tri“ by jistina základná (x) se určila takto:

x zl. dá 1084·8394 zl., pakli za 1 rok
100 zl. dá 105 zl.

x : 100 = 1084·8394 : 105
x = 1033·1803 zl., t. j. jistina zúročená za 5 roků — 1 rok = 4 rokům;
x : 100 = 1033·1803 : 105
x = 983·9812 zl. = jistině zúročené za 5 roků — 2 roky = 3 rokům
x : 100 = 983·9812 : 105
x = 937·125 zl. = jistině zúročené za 2 roky
x : 100 = 937·125 : 105
x : 892·5 zl. = jistině zúročené za rok
x : 100 = 892·5 : 105

x = 850 zl. = jistině základné.

Dle počtu řetězového:

x zl. dalo 1084·8394 zl. za 5 roků na 5%, pakli z těchto
1·05 zl. vzrostlo z 1 zl. 5. rok
1·05 „ „ 1 „ 4. rok
1·05 „ „ 1 „ 3. rok
1·05 „ „ 1 „ 2. rok a
1·05 „ „ 1 „ 1. rok

$$x = 1084{\cdot}8394 \times \frac{1}{(1{\cdot}05)^5} = \frac{1084{\cdot}8394}{(1{\cdot}05)^5} = 850 \text{ zl.}$$

$\frac{1}{(1{\cdot}05)^5}$ t. j. podíl z jedničky dělené úročitelem rostoucím se jmenuje *úročitel sestupný*. Z jistiny úroky zúročené, z úroků ze sta a z počtu roků určíme tedy jistinu základnou, *násobíme-li jistinu zúročenou úročitelem sestupným.*

N. p. která jistina na 5% vynesla za 4 roky 1215·50625 zl. přirážely-li se úroky k základné jistině celoročně?

x zl. : 1215·50625 zl.
1·05 zl. : 1 zl.
1·05 zl. : 1 zl.
1·05 zl. : 1 zl.
1·05 zl. : 1 zl.

$$x = \frac{1215{\cdot}50625}{(1{\cdot}05)^5} = 1000 \text{ zl.}$$

Pro úročitele sestupného a sice na 2, 2½, 3, 4, 5, 6 úroků ze sta na 1, 2, 3, 4, 5 . . . . roků stává též tabulek. Uvedená tabulka udává úročitele sestupného na 2%, 2½%, 3%, 4%, 5%, 6% za 1, 2, 3 . . . . . 30 občasí, t. j. roků a půlletí.

občasí	2%	2½%	3%
1.	0·980392	0·975697	0·970874
2.	0·961169	0·951814	0·942596
3.	0·942322	0·928422	0·915142
4.	0·923845	0·905959	0·888487
5.	0·905731	0·883863	0·862609
6.	0·887971	0·862313	0·837484
7.	0·870560	0·841273	0·813092
8.	0·853491	0·820755	0·789409
9.	0·836755	0·800736	0·766417
10.	0·820349	0·781206	0·744094
11.	0·804263	0·762154	0·722421
12.	0·788493	0·736055	0·701380
13.	0·773033	0·718169	0·680951
14.	0·757875	0·707738	0·661118
15.	0·743015	0·690474	0·641862
16.	0·728446	0·673566	0·623167
17.	0·714163	0·657203	0·605016
18.	0·700159	0·641174	0·587395
19.	0·686431	0·625536	0·570286
20.	0·672971	0·610279	0·553676
21.	0·659776	0·595429	0·537549
22.	0·646839	0·580907	0·521893
23.	0·634156	0·566738	0·506692
24.	0·621722	0·552915	0·491934
25.	0·609531	0·539429	0·477606
26.	0·597579	0·526273	0·463695
27.	0·585862	0·513950	0·450189
28.	0·574375	0·500914	0·437077
29.	0·563112	0·488696	0·424346
30.	0·552071	0·476776	0·411987

občasí	4%	5%	6%
1.	0·961539	0·952381	0·943396
2.	0·924556	0·907030	0·889996
3.	0·888996	0·863838	0·839619
4.	0·854804	0·822903	0·792094
5.	0·821927	0·783526	0·747258
6.	0·790315	0·746215	0·704961
7.	0·759918	0·710681	0·665057
8.	0·730690	0·676839	0·627412
9.	0·702587	0·644609	0·591898
10.	0·675564	0·613913	0·558395
11.	0·649581	0·584679	0·526788
12.	0·624597	0·556837	0·496969
13.	0·600574	0·530321	0·468839
14.	0·577475	0·505068	0·442301
15.	0·555265	0·481017	0·417265
16.	0·533908	0·458112	0·393646
17.	0·513373	0·436297	0·371364
18.	0·493628	0·415521	0·350344
19.	0·474642	0·395734	0·330513
20.	0·456387	0·376890	0·311805
21.	0·438834	0·358942	0·294155
22.	0·421955	0·341850	0·277505
23.	0·405726	0·325571	0·261797
24.	0·390122	0·310068	0·246979
25.	0·375117	0·295303	0·232999
26.	0·360689	0·281241	0·219810
27.	0·346817	0·267848	0·207368
28.	0·333478	0·255094	0·195630
29.	0·320651	0·242946	0·184557
30.	0·308319	0·231377	0·174110

Cvičení.

1. Kdosi půjčí 6000 zl. na 6%, na mnoho-li vzroste tato jistina a) za 4 roky, b) za 6 roků, c) za 10 roků, přirážejí-li se k ní celoročné úroky?
2. Jakou hodnotu má jistina 16500 zl. půjčená na 4% a) za 7 roků, b) za 9 roků, c) za 10 roků, d) za 20 roků, přirážejí-li se k ní celoročné úroky?
3. Otec uloží do spořitelny 1000 zl. pro 12letého syna, mnoho-li

se dostane synovi za 12 roků, vynáší-li jistina ta $4^0/_0$, a přirážejí-li se k ní úroky půlletně?

4. Kdyby syn ten byl 10 roků, mnoho-li by dostal ze spořitelny ve svém 20tém, 24tém, 30tém roce?
5. Na mnoho-li vzroste jistina 1000 zl. na $5^0/_0$ za 4 roky, přirážejí-li se k ní a) úroky celoročné, b) úroky půlletně, c) mnoho-li dělají pouhé úroky z úroků v prvním a v v druhém případu? (Od úroků z úroků se odečtou jednoduché úroky).
6. Kdosi má ve spořitelně 600 zl. na $4^0/_0$ uložených, po každém roce přidá k nim vždy 200 zl., a nechává úroky též zúročiti. Mnoho-li dostane a) za 6, b) za 8, c) za 10 roků, pakli se úroky vždy půlletně přirážejí?
7. Která jistina vzrostla za 6 roků na 1340.0957 zl., pakli byla na $5^0/_0$ půjčena, a přirážely-li se k ní úroky celoročně?
8. Která jistina vzrostla za 15 let na 7310·7875 zl., přiráželo-li se k ní každý rok $5^0/_0$?
9. Která jistina vzroste za $3^1/_2$ roku na 8705·6 zl., je-li na $4^0/_0$ uložena, a přirážejí-li se k ní úroky půlletně?
10. Která jistina vyroste za 6 roků na 21041·4 zl., je-li na $6^0/_0$ uložena, a přirážejí-li se k ní úroky půlletně?
11. Která jistina vyroste za 3 roky na 474189 zl., je-li na $4^0/_0$ a přiráželo-li se k ní $5^0/_0$ celoročně?
12. Kdosi má ve spořitelně 2600 zl. na $4^0/_0$ 5 roků uloženo tak, že úroky půlletně k jistině přiráženy jsou, jest však sám už 3 roky na $4^0/_0$ 1775·942 zl. i s úroky za úrok, které půlletně k základní jistině přirážel, dlužen, dá-li za svůj dluh knížku od spořitelny vystavenou; mnoho-li dostane ještě doplaceno?
13. Kdosi byl 6 roků s úroky z úroků 3731·075 zl. na $5^0/_0$ dlužen, na to prodal svůj statek za 26000 zl., které se mu měly na $6^0/_0$ s půlletní přirážkou úroků k jistině za 4 roky splatiti; zaplatil-li svým jměním ten dluh, mnoho-li mu zbylo?

3. Počet lhůtový.

§. 50.

Počtem lhůtovým se určuje lhůta průměrná, v které se jistiny, jednotlivě v rozličných lhůtách ku placení dospívající, najednou splatiti mají tak, aby tím ani věřitel ani dlužník skrácen nebyl.

Každá jistina vynáší úroky buď věřiteli nebo dlužníkovi, t. j. každá jistina se zúročuje. Splácí-li se určitá jistina po částkách v určitých lhůtách, mohou částečné jistiny tyto buď stejné anebo rozličné úroky ze sta (%) vynášeti, načež při vypočítávání lhůty průměrné zvláštní ohled bráti dlužno.

a. Částečné jistiny vynášejí stejné úroky ze sta (%).

§. 51.

Každý počet lhůtový se zakládá na následujícím rozumování: 100 zl. vynáší za 2 roky tolik úroků, jako 100 zl. × 2 = 200 zl. za 1. rok při týchže úrocích ze sta (%); taktéž 300 zl. vynáší za 5 let tolik úroků, jako 300 zl. × 5 = 1500 zl. za 1. rok při týchže % atd.

Patrno, že co zde praveno o rocích, též platí o měsících, týdnech a dnech. N. p. kdosi koupil pole za 1800 zl. s tou výminkou, že splatí celou jistinu za 6 měsíců, a sice 600 zl. za měsíc, 500 zl. za 3 měsíce a 700 zl. za 6 měsíců.*) Kdyby celých 1800 zl. najednou splatiti chtěl, kdy by se to mělo státi, aby ani prodávač ani on při tom skrácen nebyl?

Celá jistina jest tedy 1800 zl. a vynáší kupci určité úroky ze sta, n. p. 5%. První měsíc po koupi, podrží kupec celou jistinu 1800 zl. u sebe, a tím tedy získá veškeré úroky z této jistiny za 1 měsíc. Po měsíci zaplatí 600 zl., tedy mu zbyde 1200 zl., z nichž užívá úroky po 2 měsíce, po těchto dvou měsících splatí 500 zl., tedy mu zbyde 700 zl., z nichž užívá po 3 měsíce úroky;

tedy užívá úroky z 1800 zl. po 1 měsíc
„ 1200 „ „ 2 měsíce
„ 700 „ „ 3 „

avšak 1200 zl. vynese za 2 měsíce tolik úroků, jako 1200 zl. × 2 za 1 měsíc, taktéž 700 zl. vynese za 3 měsíce tolik úroků jako 700 zl. × 3 za 1 měsíc,
pročež: vynese 1800 zl. za 1 měsíc tolik, co 1800 zl. × 1 = 1800 zl. úroků za 1 měsíc; 1200 zl. za 2 měs. tolik, co 1200 zl. × 2 = 2400 zl. za 1 měs.; 700 zl. za 3 měs. tolik, co 700 zl. × 3 = 2100 zl. za 1 měs. Nemá-li žádný býti skrácen, musí dlužník 1800 zl. zaplatiti pak, ažby tolik úroků vynesly jako 1800 + 2400 + 2100 = 6300 zl. za 1 měs.

Čas ten se určí jednoduchou „regula de tri“, totiž:

v x čase vynese 1800 zl. tolik úroků, jako za
1 měsíc „ 6300 „

---

*) t. j. 600 zl. za měsíc, 500 zl. za 2 měsíce po první lhůtě a 700 zl. za 3 měsíce po druhé lhůtě.

$$x : 1 = 6300 : 1800$$

$$x = \frac{6300}{1800} = {}^7/_2 = 3\,{}^1/_2 \text{ měsíce, t. j.}$$

celá jistina 1800 zl. by se musela zapraviti za $3\,{}^1/_2$ měsíce. Tento čas se nazývá **lhůta průměrná.** Že tomu tak, snadno se přesvědčíme, vypočítáme-li úroky, kterých by kupec užíval, kdyby částečné jistiny v rozličných lhůtách byl splácel, a kterých by užíval, kdyby celou jistinu za $3\,{}^1/_2$ měsíce byl zapravil, neboť:

1800 zl. vynáší za 1 měsíc na 5% : $\frac{1800 \times 5}{100 \times 12}$ = 7zl. 50kr.

1200 „ „ „ 2 měsíce „ „ : $\frac{1200 \times 5 \times 2}{100 \times 12}$ = 10zl.

700 „ „ „ 3 „ „ „ : $\frac{700 \times 5 \times 3}{100 \times 12}$ = 8zl. 75kr.

Kdyby byl tedy dlužník po lhůtách dluh splácel, užíval by úroků dohromady . . . . 26 zl. 25 kr.

Avšak by též 1800 zl. za $3\,{}^1/_2$ měsíce na 5% vyneslo

$$\frac{1800 \times 5 \times 3\,{}^1/_2}{100 \times 12} = \frac{105}{4} = 26 \text{ zl. } 25 \text{ kr.}$$

Z toho vysvítá, jak si máme při **počtu lhůtovém** počínati, totiž:

1. Určeme, jak **dlouho** se celé a každé částečné jistiny užívá.
2. Násobme jistinu takovou časem k ní přináležejícím.
3. Sečteme jednotlivé součiny.
4. Dělme jejich součet celou jistinou (jak z poslední „regula de tri“ vysvítá). N. p. kdosi má zaplatiti 3000 zl. od 3. března do 24. srpna téhož roku, a sice 1000 zl. dne 18. dubna, 800 zl., dne 16. května, 400 zl. dne 20. července a 800 zl. dne 24. srpna. Kdy by měl celou jistinu splatiti **najednou**?

Otázka tato se dělí na tři jiné, totiž:

a. Kdy má splatiti částečné jistiny?

1000 zl.	dne 18. dubna	t. j. od	3. března	46 dní.
800 „	„ 16. května	„ „	18. dubna	25 „
400 „	„ 20. července	„ „	16. května	65 „
800 „	„ 24. srpna	„ „	20. července	35 „

b. Z jakých jistin a jak dlouho bude požívati úroků?

Z celé jistiny 3000 zl. po 46 dní, nebo 3000 zl. × 46 = 138000 zl. 1 den; z 3000 zl. — 1000 zl. =
2000 zl. . . „ 28 „ „ 2000 „ × 28 = 56000 „ 1 „
z 2000 zl. — 800 zl. =

1200 zl. . . „ 65 „ „ 1200 zl. × 65 = 78000 „ 1 den;
z 1200 zl. — 400 zl. =
800 zl. . . „ 35 „ „ 800 „ × 35 = 28000 „ 1 „

Bude tedy požívati úroky jaké vynáší 300000 zl. 1 den

c. Kdy vynese 3000 zl. takové úroky, jako 300000 zl. za 1 den, t. j.

x dní 3000 zl.
1 den 300000 zl.

$$x : 1 = 300000 : 3000, \text{ nebo } x = \frac{300000}{3000} = 100 \text{ dní, t. j.}$$

dne 11. června.

Průměrná lhůta, v které by se mělo 3000 zl. na jednou splatiti, jest tedy 100 dní. Že tomu tak, přesvedčíme se, vypočítáme-li úroky z částečných jistin v jednotlivých lhůtách; n. p. na 4% dá

$$3000 \text{ zl. v } 46 \text{ dnech: } \frac{3000 \times 4 \times 46}{100 \times 365} = {}^{1104}/_{73} = 15\,{}^{9}/_{73} \text{ zl. úroků}$$

$$2000 \text{ zl. v } 28 \text{ ,, } \frac{2000 \times 4 \times 28}{100 \times 365} = {}^{448}/_{73} = 6\,{}^{10}/_{73} \text{ ,, ,,}$$

$$1200 \text{ zl. v } 65 \text{ ,, } \frac{1200 \times 4 \times 65}{100 \times 365} = {}^{624}/_{73} = 8\,{}^{40}/_{73} \text{ ,, ,,}$$

$$800 \text{ zl. v } 35 \text{ ,, } \frac{800 \times 4 \times 35}{100 \times 365} = {}^{224}/_{73} = 3\,{}^{5}/_{73} \text{ ,, ,,}$$

tedy dohromady $32\,{}^{64}/_{73}$ zl. úroků.

A kolik úroků dá 3000 zl. v 100 dnech na 4%?

$$\text{Úroky} = \frac{3000 \times 4 \times 100}{100 \times 365} = {}^{2400}/_{73} = 32\,{}^{64}/_{73} \text{ zl., tedy též tolik.}$$

Poznamenání. Jak z „regula de tri“ x : 1 = 300000 : 3000 vysvítá, má se vždy lhůta průměrná k jedničce času (dni, měsíci atd.), jako součet násobených jistin částečných k jistině celé; za tou příčinou se může jistina celá a částečné jistiny, jelikož jsou členové poměru, společným dělitelem skrátiti.

b. Částečné jistiny vynášejí rozličné úroky ze sta (%).

§. 52.

Vynášejí-li částečné jistiny, které se ve lhůtách spláceti mají, rozličné úroky ze sta, musíme je nejprvé na téže % přivesti, což se stane následujícím rozumováním:

100 zl. na 5% vynáší v určitém čase tolik jako 100 zl. × 5

= 500 zl. na 1%, taktéž 300 zl. na 4% vynáší v určitém čase tolik, jako 300 × 4 = 1200 zl. na 1% atd.

Za tou příčinou násobme částečné jistiny přináležejícími k nim úroky ze sta, tím přivedeme jistiny tyto na stejné úroky ze sta (totiž na 1%), součiny sečtěme a dělme je celou prvotní jistinou; výsledek dá **průměrné úroky ze sta.** Znásobené jistiny považujme pak za jistiny částečné a vypočtěme **průměrnou lhůtu** jako prvé. N. p. Kdosi má splatiti 1800 zl. a sice 400 zl. za 4 měsíce s 5%, 200 zl. za 6 měsíců se 4%, 400 zl. za 8 měsíců s 3½% a 800 zl. za 9 měsíců se 6%. Kdy by měl celou jistinu splatiti najednou?

400 zl. na 5% vynáší tolik co 4 zl. × 5 = 20 zl. na 1%
200 „ „ 4% „ „ „ 2 „ × 4 = 8 „ „ 1%
400 „ „ 3½% „ „ „ 4 „ × 3½ = 14 „ „ 1%
800 „ „ 6% „ „ „ 8 „ × 6 = 48 „ „ 1%
1800 zl. má vynésti tolik úroků jako . . . . . 90 zl. na 1%.

Na kolik ze sta (= x %) musí se 1800 zl. uložiti, aby daly téže úroky jako na 1% dá 9000 zl. (čím větší ze sta,

$$x : 1 = 90 : 18$$

tím menší jistina dá určité úroky, poměr obrácený).

$$x = \frac{90}{18} = 5\%,$$ t. j. **průměrné úroky** jsou v uvedeném příkladu 5%.

Abychom **průměrnou lhůtu** určili, považujme znásobené jistiny, poněvadž jsou na stejné % (1%) převedené, za jistiny částečné a dělejme jako prvé, totiž:

2000 zl. se má splatiti za 4 měsíce
800 „ „ „ „ „ 6 měsíců, tedy za 2 měs. po 1. lhůtě
1400 „ „ „ „ „ 8 „ „ „ 2 „ „ 2. „
4800 „ „ „ „ „ 9 „ „ „ 1 měsíc „ 3. „ tedy
9000 zl. v celku.

Při takovém splácení platí dlužník průměrné úroky 5%
z 9000 zl. za 4 měs. nebo z 9000 zl. × 4 = 36000 zl. za 1 m.
z 9000 — 2000 = 7000 zl. za 2 m. „ 7000 zl. × 2 = 14000 zl. „
z 7000 — 800 = 6200 „ 2 „ „ 6200 zl. × 2 = 12400 zl. „
z 6200 — 1400 = 4800 „ 1 „ „ 4800 zl. × 1 = 4800 zl. „
9000 zl. má vynesti za x měsíců tolik úroků jako 67200 zl. za 1 měsíc, tedy $\frac{67200}{9000} = 7\frac{7}{15}$ měsíců, t. j. 7 měs. a 14 dní jest **lhůta průměrná.**

Že tomu tak, přesvědčíme se jako dříve, vypočítáme-li úroky z částečných jistin uvedených na 1%, neboť dá

9000 za 4 měs. na 1% $\frac{9000 \times 4 \times 1\%}{100 \times 12}$ $= 30$ zl.

7000 za 2 měs. na 1% $\frac{7000 \times 2 \times 1\%}{100 \times 12} = {}^{35}/_{3} = 11^{2}/_{3}$ zl.

6200 za 2 měs. na 1% $\frac{6200 \times 2 \times 1\%}{100 \times 12} = {}^{31}/_{3} = 10^{1}/_{3}$ zl.

4800 za 1 měs. na 1% $\frac{4800 \times 1 \times 1\%}{100 \times 12}$ $= 4$ zl.

tedy vynesou částečné jistiny 56 zl. úroků, a 9000 zl. za $7^{7}/_{15}$ měsíce na 5% vynese taktéž $\frac{9000 \times 5\% \times 7^{7}/_{15}}{100 \times 12} = 56$ zl. úroků.

§. 53.

Takto se vyvozuje počet lhůtový z čela přirozeným způsobem, který se však proměnil v pohodlnější a jednodušší po následujícím pozorování: V odstavci a. (§. 51) uveden jest příklad:

Kdosi koupil pole za 1800 zl. s tou výminkou, že splatí celou jistinu za 6 měsíců, a sice 600 zl. za měsíc, 500 zl. za 3 měs. a 700 zl. za 6 měs. Kdy by se měla celá jistina splatiti na jednou? Tamtéž pověděno, že vynese

1800 zl. za 1 měsíc tolik co 1800 zl. × 1 = 1800 zl. za 1 měs.
1200 zl. za 2 „ „ „ 1200 zl. × 2 = 2400 zl. za 1 „
700 zl. za 3 „ „ „ 700 zl. × 3 = 2100 zl. za 1 „

že by se tedy musilo 1800 zl. zaplatiti najednou ve $\frac{6300}{1800} = 3^{1}/_{2}$ měsíci.

1800 zl. vynáší určité úroky po 1 měsíc, avšak 1800 zl. se rovná částečným jistinám, které v příkladě udány jsou, totiž 1800 zl. = 600 zl. + 500 zl. + 700 zl., a tyto všechny nesou úroky po 1 měsíc;

1200 zl. vynáší určité úroky po 2 měsíce, avšak se 1200 zl. = 500 zl. + 700 zl., tedy tyto nesou též úroky po 2 měsíce, a

700 zl. vynáší určité úroky po 3 měsíce.

Porovnáme-li to vše, patrno, že po

1 měsíc nesou úroky 600 zl. + 500 zl. + 700 zl.
2 měsíce „ „ 500 zl. + 700 zl.
3 měsíce „ „ 700 zl.

Z toho následuje, že

600 zl. vynáší úroky po 1 měsíc
500 zl. „ „ „ 1 měs. + 2 měs. = 3 měs.
700 zl. „ „ „ 1 „ + 2 „ + 3 „ = 6 měs.

Tedy vynáší úroky
600 zl. 1 měs. = 600 zl. × 1 = 600 zl. po 1 měsíc
500 zl. 3 „ = 500 zl. × 3 = 1500 zl. po 1 „
700 zl. 6 „ = 700 zl. × 6 = 4200 zl. po 1 „

Kdy vynese jistina 1800 zl. tolik úroků jako 6300 zl. za 1 měsíc?

Patrno, že konečné výsledky jsou právě takové, jako prvé přirozeným způsobem vyvoděné, a že se lhůta průměrná taktéž rovná $\frac{6300}{1800} = 3\,^1/_2$ měsíci.

Takové porovnání poskytuje velikou výhodu ve vypočítávání lhůty průměrné, a v praktickém počítání se jí vždy užívá. Pravidlo této výhody jest:

1. Násobme každou částečnou jistinu v příkladu udanou lhůtou, v které splacena býti má. Možná-li skraťme dříve částečné jistiny a celou jistinu.

2. Sečtěme jednotlivé, dané jistiny částečné jakož i součiny jejích, a dělme tyto celou jistinou. Podíl udává průměrnou lhůtu. N. p. Kdosi má splatiti 2400 zl., a sice 800 zl. za 3 měsíce, 900 zl. za 5 měsíců, 700 zl. za 7 měsíců, kdy by se celá jistina najednou měla složiti.

Celá jistina jest 2400 zl., částečné jistiny jsou 800 zl., 900 zl. a 700 zl.

1. Částečné jistiny se násobí časem, (t. j. počtem měsíců), v kterémž splaceny býti mají, neboť úroky
z $8\cancel{0}\cancel{0}$ zl. za 3 měs. = 8 zl. × 3 = 24 zl. za 1 měsíc
$9\cancel{0}\cancel{0}$ „ „ 5 „ = 9 „ × 5 = 45 „ „ 1 „
$7\cancel{0}\cancel{0}$ „ „ 7 „ = 7 „ × 7 = 49 „ „ 1 „
24 118

2. Součet součinu dělme celou jistinou (zde jsou obě už skráceny), totiž 118 : 24 = $4^{11}/_{12}$ měsíce.

$4^{11}/_{12}$ jest lhůta průměrná. Známou zkouškou se možná přesvědčiti, je-li dobře pracováno.

Poznamenání. Počet lhůtový se dá též pomocí vícero jednoduchých „regula de tri“ vysvětliti.

Ponecháme-li totiž uvedený už příklad (§. 51), určíme v něm hledanou lhůtu průměrnou, pak-li určíme lhůty jednotlivé, v nichž by celá jistina tolik vynesla, jako každá částečná jistina v čase k ní náležejícím. Za tou příčinou se tážeme:

a. V kterém čase dá 1800 zl. tolik úroků, jako 600 zl. za 1 měsíc? x čase 1800 zl.
1 měsíc 600 „
x : 1 = 600 : 1800, z toho x = $^1/_3$ měs.

b. V kterém čase dá 1800 zl. tolik úroků, jako 500 zl. za 3 měs.?

$x : 3 = 500 : 1800$, z toho $x = {}^{5}/_{6}$ měs.

c. V kterém čase dá 1800 zl. tolik úroků, jako 700 zl. za 6 měs.?

$x : 6 = 700 : 1800$ z toho $x = {}^{7}/_{3}$ měs.

---

tedy dohromady ${}^{21}/_{6}$ měs. $= 3\,{}^{1}/_{2}$ měs. atd.

Cvičení.

1. Kdosi má zaplatiti 3400 zl. tak, že má 1200 zl. splatiti za 4 měsíce, 1000 zl. za 5 měsíců a ostatek za 7 měsíců; kdy by měl zaplatiti celou jistinu najednou?
2. Kdosi koupil dům za 16000 zl. a má jej zaplatiti v 5 lhůtách, totiž 3000 zl. za měsíc, 4500 zl. za 3 měsíce 2600 zl. za 7 měsíců, 2000 zl. za 10 měsíců a ostatek za rok; kdy by měl splatiti celou jistinu najednou?
3. Kdosi má dostati 650 zl., a sice 100 zl. hned, 230 zl. za ${}^{1}/_{4}$ roku, 180 zl. za půl roku a ostatek za rok; kdy by měl dostati celou jistinu najednou?
4. Kdosi má splatiti 3460 zl., od 7. dubna počítaje, takto: 1100 zl. dne 21. dubna, 940 zl. dne 7. května, 828 zl. dne 26. května a ostatek dne 30. června; kdy by měl celou jistinu zaplatiti najednou? (měsíc se = 30 dnům)*)
5. Obchodník A dal továrníkovi B dne 7. srpna čtyry směnky, a sice:

1. směnku na 1000 zl. k splacení dne 8. září téhož roku
2. „ „ 1500 „ „ „ „ 11. „ „ „
3. „ „ 1200 „ „ „ „ 19. „ „ „
4. „ „ 700 „ „ „ „ 3. října „ „

Kdyby chtěl A všechny tyto směnky vyplatiti najednou, kdy by to bylo? (měsíc = 30 dnům).

6. Kdosi koupil zboží za 6390 zl. dne 13. května s výminkou, že splatí 1300 zl. dne 31. května, 1140 zl. dne 20. června, 2450 zl. dne 31. července a 1500 zl. dne 18. srpna; kdy by měl celou jistinu zaplatiti najednou?
7. Kdosi má spláceti sirotkům peníze, z nichž rozličné úroky ze sta byl platil, a sice:

4000 zl. má splatiti za 5 měsíců, platil z nich 4 %
3600 „ „ „ „ 8 „ „ „ „ 5 %
5200 „ „ „ „ 12 „ „ „ „ $4\,{}^{1}/_{2}$ %.

Kdy by měl splatiti celý dluh najednou s průměrnými úroky ze sta?

---

*) Výsledek podobných příkladů ze života není vždy číslo celé, obyčejně se však zlomek považuje za celek t. j. za 1 den.

8. A má splatiti B 12000 zl., a sice 3000 zl. za 12 dní s 3%, 3000 zl. za 17 dní s 4%, 3000 zl. za 20 dní s 5%, a 3000 zl. za 32 dní s 6%, kdy by měl celou jistinu v průměrných úrocích ze sta (%) složiti?

9. A půjčil B dne 3. září 2200 zl. s tou výmínkou, aby mu splatil 500 zl. dne 5. října s 3%, 750 zl. dne 9. října s 4%, 600 zl. dne 12. října s 5%, a 350 zl. dne 26. října s 6%; kdy by měl celou jistinu zaplatiti v průměrných úrocích ze sta?

4. Počet spolkový.

§. 54.

Má-li se jakási veličina rozděliti v určitých poměrech na rozličné částky, stává se to počtem spolkovým. Poměry tyto mohou býti rozličným způsobem vyjádřeny; nesouvisí-li s poměry jinými jest počet spolkový jednoduchý, jinak složitý.

a. Spolkový počet jednoduchý.

N. p. 320 by se mělo dáti třem osobám A, B, C tak, aby se jednotlivé částky k sobě měly jako 4 : 7 : 9 (nebo jak se to obyčejně píše 4, 7, 9), t. j. dostaneli A 4 zl., má dostati B 7 zl. a C 9 zl.

Patrno, že, kdyby osoba A dostala 4 zl. × 2, 4 zl. × 3 atd., by i B musila dostati 7 zl. × 2, 7 zl. × 3 atd., taktéž C 9 zl. × 2, 9 zl. × 3 atd. Za tou příčinou se vlastně tážeme, kolikrát má každá osoba přiřknutou ji částku dostati? a odpovídáme na to: kolikrát 4 zl. + 9 zl. + 7 zl. (t. j. kolikrát součet čísel poměrných) v 320 zl. (t. j. v daném počtu) obsaženo jest.

4 zl. + 7 zl. + 9 zl. = 20 zl., a
320 zl. : 20 zl. = 16-krát, t. j.

přiřknutou částku má každá osoba dostati 16-kráte, tedy

A 4 zl. × 16 = 64 zl.
B 7 „ × 16 = 112 „ Součet podílů těchto musí
C 9 „ × 16 = 144 „ se rovnati dané sumě.
t. j. 320 zl.

Z toho vysvítá pravidlo pro počet spolkový jednoduchý, totiž:

Sečtěme čísla poměrná, dělme součtem tím číslo, které v určitých poměrech se rozděliti má, a násobme podílem každé číslo poměrné; součet těchto součinů se musí rovnati udanému číslu. N. p.

Čtyři by si koupili dohromady los a vyhráli by 400 zl. Mnoho-li by dostal každý, kdyby byl dal na los A 3 zl., B 5 zl., C 2 zl., D 6 zl.?

Dohromady dali tedy 3 zl. + 5 zl. + 2 zl. + 6 zl. = 16 zl., pročež vyhraje každý svou sázku 400 zl. : 16 zl. = 25-krát, t. j.

A 3 zl. × 25 = 75 zl.
B 5 zl. × 25 = 125 zl.
C 2 zl. × 25 = 50 zl.
D 6 zl. × 25 = 150 zl., což dělá dohromady
400 zl.

O takových číslech poměrných platí vše, co o poměrech vůbec praveno bylo, jmenovitě, že se hodnota poměru nemění, dělíme-li neb násobíme-li členy týmže číslem. Poměrná čísla možná děliti společným jim dělitelem, a násobiti, mají-li se zlomky jmenovatelů zbaviti. N. p.

580 zl. mají se poděliti tři osoby, tak aby dostala A 4 zl., B 6 zl. a C 10 zl., mnoho-li dostane každá? Poměrná čísla jsou 4 zl. : 6 zl. : 10 zl., nebo, dělíme-li je dvěma, 2 zl. : 3 zl. : 5 zl.; 2 zl. + 3 zl. + 5 zl. = 10 zl.; 580 zl. : 10 zl. = 58,

tedy A $\cancel{4}$ zl. | 2 zl., dostane 2 zl. × 58 = 116 zl.
B $\cancel{6}$ „ | 3 „ „ 3 „ × 58 = 174 „
C $\cancel{10}$ „ | 5 „ „ 5 „ × 58 = 290 „
580 zl.

1320 zl. má se dáti čtyřem osobám tak, aby dostala osoba A $^1/_4$, B $^2/_3$, C $^1/_2$, D $^5/_{12}$, mnoho-li dostane každá? Zlomky takové znamenají, že, dostane-li A $^1/_4$ zl., má dostati B $^2/_3$ zl., C $^1/_2$ zl., D $^5/_{12}$ zl., tedy se má 1320 zl. rozděliti v poměrech $^1/_4 : {}^2/_3 : {}^1/_2 : {}^5/_{12}$, což, přivedeme-li zlomky tyto na společného jmenovatele 12, se promění v poměr $^3/_{12}$ zl. : $^8/_{12}$ zl. : $^6/_{12}$ zl. : $^5/_{12}$ zl. a násobíme-li všechny členy 12ti, bude se

3 zl. : 8 zl. : 6 zl. : 5 zl., t. j. dostane-li A 3 zl.,
dostane B 8 „
„ C 6 „
„ D 5 „
1320 zl. : 22 zl. = 60,

tedy A 3 zl. × 60 = 180 zl.
B 8 „ × 60 = 480 „
C 6 „ × 60 = 360 „
D 5 „ × 60 = 300 „
dohromady 1320 zl.

Poměry, v kterých se má dané číslo rozděliti, nejsou vždy přímě udány, nýbrž se musejí mnohdy teprv sestaviti, n. p.

Čtyři chalupníci utrpěli požárem škodu na svém majetku, a sice se páčila škoda chalupníka A na 640 zl., B na 520 zl., C na 800 zl. a D přišel o všecho. Dostali-li pohořelí tito od dobrodinců vesměs 1092 zl. 50 kr., mnoho-li dostal z toho každý chalupník, pakli se odhádalo jmění chalupníka A na 2000 zl., B na 1800 zl., C na 2400 zl. a D na 1200 zl.?

Aby se mezi tyto 1092 zl. 50 kr. svědomitě rozdělilo, musilo by se prv určiti, jakou částku celého jmění každy z nich ztratil, čímž by se shledalo, že ztratil

$$\left.\begin{array}{lllllr} \mathrm{A} & {}^{640}\!/_{2000} & = & {}^{8}\!/_{25} & = & 72 \\ \mathrm{B} & {}^{520}\!/_{1800} & = & {}^{13}\!/_{45} & = & 65 \\ \mathrm{C} & {}^{800}\!/_{2400} & = & {}^{1}\!/_{3} & = & 75 \\ \mathrm{D} & {}^{1200}\!/_{1200} & = & 1 & = & 225 \end{array}\right\} \begin{array}{rrl} \text{tedy } 72 \times 2{\cdot}5 & = 180 & \text{zl.} \\ 65 \times 2{\cdot}5 & = 162{\cdot}5 & ,, \\ 75 \times 2{\cdot}5 & = 187{\cdot}5 & ,, \\ 225 \times 2{\cdot}5 & = 562{\cdot}5 & ,, \end{array}$$

$$1092{\cdot}5 : 437 = 2{\cdot}5 \qquad\qquad 1092{\cdot}5 \text{ zl.}$$

b. Spolkový počet složitý.

§. 55.

Zavisí-li poměry, v kterých se má určitá veličina rozděliti, na poměrech jiných, jest spolkový počet složitý, avšak možná jej snadno, převedením dvojích poměrů v jedny, proměniti v jednoduchý. N. p.

94 dělníků pracuje při ražení silnice ve třech odděleních rolično čas, a sice

v prvním oddělení A pracuje 24 dělníků 14 dní
v druhém „ B „ 40 „ 12 „
v třetím „ C „ 30 „ 15 „

Dostanou-li všichni dělníci 633 zl. mzdy, mnoho-li dostane každé oddělení? V takových a podobných příkladech se předpokládá, že jest pracovitosť u všech dělníků stejná, tedy že každý z nich za tentýž čas stejnou mzdu zasluhuje a také dostane, že tedy 1 dělník dostane za 2 dni tolik mzdy, jako (1 × 2 =) 2 dělníci za 1 den, nebo že 5 dělníků dostane za 8 dní tolik mzdy, jako (5 × 8 =) 40 dělníků za 1 den, nebo že 12 dělníků dostane za 10 dní tolik mzdy jako (10 × 12 =) 120 dělníků za 1 den atd.

Dle toho dostane oddělení

A = 24 děl. tolik mzdy za 14 dní jako 24 × 14 = 336 děl. za 1 den,
B = 40 „ „ „ „ 12 „ „ 40 × 12 = 480 „ „ 1 „
C = 30 „ „ „ „ 15 „ „ 30 × 15 = 450 „ „ 1 „
tedy jako 1266 děl. za 1 den.

Dále se pracuje jako při spolkovém počtu jednoduchém.

Abychom se tedy dověděli, mnoho-li dostane 1 dělník, musíme celou mzdu 633 zl. rozděliti na 1266 stejných částek, totiž

633 zl. : 1266 = ${}^{633}/_{1266}$ = ${}^{1}/_{2}$, tedy dostane
oddělení A = 336 × ${}^{1}/_{2}$ = 168 zl.
„ B = 480 × ${}^{1}/_{2}$ = 240 „
„ C = 450 × ${}^{1}/_{2}$ = 225 „ což dohromady dělá:
633 zl.

V nejkratším čase by se mělo semleti 1624 korců žita na čtyrech mlýnech; na mlýně A se semele 15 korců za 4 hodiny, na mlýně B 16 korců za 3 hodiny, na mlýně C 10 korců za 3 hodiny a na mlýně D 9 korců za 2 hodiny. Kolik korců by se mělo odkázati každému mlýnu, kdyby se 1624 korců stejným časem semleti mělo?

Mlýn A semele 15 korců za 4 hodiny tedy ${}^{15}/_{4}$ korců za 1. hodinu,
„ B „ 16 „ „ 3 „ „ ${}^{16}/_{3}$ „ „ 1. „
„ C „ 10 „ „ 3 „ „ ${}^{10}/_{3}$ „ „ 1. „
„ D „ 9 „ „ 2 „ „ ${}^{9}/_{2}$ „ „ 1. „

Převedeme-li čísla poměrná ${}^{15}/_{4}$: ${}^{16}/_{3}$: ${}^{10}/_{3}$: ${}^{9}/_{2}$ na společného jmenovatele 12, bude se ${}^{45}/_{12}$: ${}^{64}/_{12}$: ${}^{40}/_{12}$: ${}^{54}/_{12}$ a násobíme-li 12ti, semele v témž čase

mlýn A 45 korců
„ B 64 „
„ C 40 „
„ D 54 „
dohromady 203 korců.

1624 kor. : 203 kor. = 8-krát.

$$\left.\begin{array}{l} 45 \text{ kor.} \times 8 = 360 \text{ korců} \\ 64 \text{ „ } \times 8 = 512 \text{ „} \\ 40 \text{ „ } \times 8 = 320 \text{ „} \\ 54 \text{ „ } \times 8 = 432 \text{ „} \end{array}\right\}$$ by se musilo přiděliti každému mlýnu, aby stejným časem bylo 1624 korců semleto?

1624 korců.

Z toho vysvítá, že se čísla poměrná vždy převedou na určitou jedničku, nechť se to stane buď násobením čísel těch (jako v 1. příkladu) nebo dělením (jako v 2. příkladu); kdy se k sobě patřící čísla poměrná násobiti nebo děliti mají, vysvítá z úlohy samé. Za tou příčinou platí u spolkového počtu složeného následující pravidla:

1. Napišme k sobě patřící čísla poměrná a násobme nebo dle potřeby dělme jedno druhým.
2. Součiny nebo podíly tyto jsou opět čísla poměrná, která možná-li se skrátí a sečtou. Ostatně pracujme jako u spolkového počtu jednoduchého.

Mnohdy se počítá s výhodou pomocí vlaské praktiky, n. p. Tři obce vystavěly společně most; z obce A pomáhalo k tomu

20 lidí po 15 dní po 10 hodinách, z obce B 15 lidí po 25 dní po 10 hodinách, z obce C 10 lidí po 25 dní po 8 hodinách. Kdyby dohromady za to dostaly 455 zl., mnoho-li by dostala každá obec?

A. 20 lidí 15 dní po 10 hod. skráceno $4 \times 3 \times 5 = 60 = 12$
B. 15 „ 25 „ „ 10 „ „ $3 \times 5 \times 5 = 75 = 15$
C. 10 „ 25 „ „ 8 „ „ $2 \times 5 \times 4 = 40 = 8$
$455 : 35 = 13$

tedy dostala obec A 12×13 zlatých
B 15×13 „
C 8×13 „

Vypočítáme-li však nejprvé, mnoho-li zlatých dostane obec C totiž $8 \times 13 = 104$ zl. možná ostatní podíly určiti pomocí vlaské praktiky, rozvedením 12ti a 15ti na několiké díly 8mi,

totiž $12 = 8 + 4$ tedy $(1 + \frac{1}{2})$
a $15 = 16 - 1$ „ $(2 - \frac{1}{8})$,

pročež se může napsati

$C = 8 \times 13 = 104$ zl.
$A = 12 \times 13 = (1 + \frac{1}{2}) \times 104 = 104 + 52 = 156$ zl.
$B = 15 \times 13 = (2 - \frac{1}{8}) \times 104 = 208 - 13 = 195$ zl.

Že tomu tak, vidíme z toho, že $A + B + C = 156 + 195$ zl. $+ 104$ zl. $= 455$ zl., t. j. celému platu.

Poznamenání. Ve veliké částce početních knih nalezají se při počtu spolkovém příklady, jako: „Osoba A dala na jisté podniknutí 8200 zl. na 5 měs., B 10500 zl. na 4 měsíce“ atd., anebo: A započal obchod 1. ledna s jistinou 8000 zl., 1. května vstoupil s ním v spolek B s 5000 zl. atd. Jaký podíl má každý společník na užitku nebo na ztrátě?“ Takové a podobné příklady jsou úplně nepraktické ano nepravdivé, poněvadž žádný společník nesmí ze spolku libovolně vystoupiti aneb určitou částku peněz jemu odejmouti, aneb trvá-li podniknutí to pouze krátký čas, před ukončením jeho vklad svůj naprosto nazpět vzíti. Taktéž žádný obchodník, který vede šťastně obchod už po delší čas, nepřijme jiného za společníka beze všeho všudy, aby mu snad podíl dal na užitku, který mu dotud obchod poskytoval; jako naopak by žádný moudrý nepřistoupil v spolek s obchodníkem, jemuž se špatně vede, aniž by snad dříve nebyl po shodku pátral a dle toho smlouvu uzavíral.

Cvičení.

1. A, B, C podnikli vespolek obecní stavbu, A vložil 6000 zl., B 8500 zl. a C 9500 zl. Čistý výnos byl 1860 zl.; mnoho-li dostal z něho každý?

2. A, B, C ztratili při jakémsi podniknutí 937 zl. 30 kr., mnoho-li ztratil každý, zúčastnil-li se A 5000 zl., B 4000 zl. a C 6000 zl.?
3. A, B započali spolu obchod, a sice dal A 6600 zlatých a B 5400 zl.; získali-li první rok 1524 zl., mnoho-li získal každý?
4. Jakýsi obchodník se vyrovnává se svými věřiteli, on jest dlužen A 4600 zl., B 5680 zl., C 3800 zl. a D 6400 zl. Mnoho-li dostane každý věřitel, pakli dostanou dohromady 12280 zl.?
5. 5 osob má se rozděliti o 4032 zl., tak aby A dostala $^3/_7$, B $^4/_9$, C $^5/_6$ a D $^7/_{10}$; mnoho-li dostane každá osoba?
6. 4 osoby vsadili do loterie, osoba A dala 5 kr., B 7 kr., C 4 kr. a D také 4 kr., vyhrály-li ambo = 4 zl., mnoho-li dostala každá osoba?
7. Ve městě N. vyhořela čtyry stavení, A měl škody 840 zl., B 750 zl., C 368 zl. a D 560 zl. Od dobrodinců se sešlo 680 zl.; mnoho-li dostal každý, odhádalo-li se jmění A na 1500 zl., jmění B na 1800 zl., jmění C na 2000 zl. a jmění D na 1200 zl.?
8. Čtyři obchodníci začali společně obchod s jistinou 24000 zl.; po jeho ukončení získal A 2000 zl., B 1500 zl., C 1800 zl. a D 1100 zl. Mnoho-li vložil každý?
9. Tři vesnice mají složiti 640 zl. příspěvků, které se mají na ně rozvrhnouti dle přímých daní. Platí-li vesnice A 380 zl., B 420 zl., C 250 zl. daní, mnoho-li musí dáti každá příspěvků?
10. Pěti úředníkům, z nichž má ročního platu A 1200 zl., B 1000 zl., C. 900 zl., D 750 zl., E 650 zl., dalo se 2041 zl. 30 kr. na přilepšenou; mnoho-li dostal z toho každý, pak-li se dělili dle zásady: čím menší roční plat, tím větší příspěvek?
11. Vozka veze 20 setnýřů 22 mil, 35 setn. 16 mil, 42 setn. 14 mil za 160 zl.; mnoho-li dostal za každé dovežení?
12. Čtyry obce vozily na stavbu školy stavivo; obec A propůjčila k tomu 4 vozy na 5 dní, obec B 7 vozů na 3 dni, obec C 6 vozů na 2 dni a obec D 2 vozy na 8 dní. Dostaly-li za to 207 zl., mnoho-li dostala každá obec?
13. Dělníci pracující ve třech odděleních dostali po ukončené práci 858 zl. 50 kr. mzdy, mnoho-li přišlo na každé oddělení, pracovalo-li v oddělení A 26 dělníků 19 dní po 10 hodinách, v oddělení B 30 dělníků 18 dní po 12 hod. a v oddělení C 40 dělníků 12 dní po 13 hod.?
14. Tři obce razily silnici, a sice posýlala k tomu obec A 36 mužů, 16 koní po 15 dní, obec B 50 mužů, 20 koní po 30 dní, obec C 30 mužů, 12 koní po 24 dní. V určitém čase

dostaly obce tyto dohromady 990 zl. Mnoho-li dostala každá obec?

15. 10 tkalců zhotoví ve 3 nedělích 100 kusů, 12 tkalců ve 4 nedělích 120 kusů, a 8 tkalců v 5 nedělích 90 kusů jakés tkaniny. Mnoho-li kusů musí každé z těchto oddělení zhotoviti, mají-li dohromady 1342 kusů v témže čase odvesti?

5. Počet směšovací.

§. 56.

*Počtu směšovacího**) možná použiti ve dvou případech a sice:

1. Chceme-li určiti *průměrnou* hodnotu nebo jakosť dvou neb více stejnorodých veličin rozličné hodnoty; za kterouž příčinou jej též nazýváme *počet průměrný*; anebo

2. Chceme-li poznati, v jakém poměru dané stejnorodé veličiny rozličné hodnoty smíšeny býti mají, aby tato smíšenina měla určitou hodnotu průměrnou. V takových případech jest průměrná hodnota už dána a jedná se pouze o to, jak by se z udaných veličin složila.

Abychom průměrnou hodnotu dvou neb více veličin, které se sloučiti mají, určili, sečtěme nejprv hodnotu veličin těchto a dělme ji jejích počtem. N. p.

Kolika-lotové stříbro dala by smíšenina hřivny 14-lotového s hřivnou 10lotového?

1 hřivna . . . . 14-lotového stříbra
1 „ . . . . 10 „ „

tyto 2 hřivny mají 24 lotů čistého stříbra, tedy jedna hřivna smíšeniny jest 24 : 2 = 12-lotového stříbra.

Kdosi by smísil 1 hřivnu . . . 13-lotového stříbra
s 1 hřivnou . . 12 „ „
s 1 „ . . 8 „ „ kolika-lotová by byla hřivna směsi?

3 hřivny mají 33 lotů čistého stříbra, tedy
1 hřivna směsi bude 33 : 3 = 11 lot. stříbra.

Vinař sleje dohromady 50 láhví vína po 80 kr., 36 láhví

---

*) Někteří nazývají počet ten regula *allegationis* od slova *legovati* (směšovati), poněvadž se ho užívá zvlášť při legování rozličných dobrých kovů; jiné však regula *alligationis* od slova *alligatio* = spojení, poněvadž se dvě čísla spojují s číslem třetím.

vína po 76 kr., 26 láhví vína po 60 kr. a 38 láhví po 58 kr.; zač má prodávati jednu láhev smíšeniny?

50 láhví po 80 kr. = 40 zl.
36 „ „ 76 „ = 27·36 zl.
26 „ „ 60 „ = 15·60 „
38 „ „ 58 „ = 22·04 „

150 láhví jest za 105 zl., tedy jest v průměru láhev za 10500 : 150 = 70 krej.

Kdosi by smísil 16 hřiven 12-lotového stříbra, 12 hřiven 14-lotového stř. a 2 hřivny mědě (měd nedrží v sobě stříbra, tedy hodnota mědě ohledně na stříbro = 0), kolika-lotová byla by hřivna této smíšeniny?

16 hřiven po 12 lotech = 192 lotů čistého stříbra
12 „ „ 14 „ = 168 „ „ „
2 „ mědě 0 „ = 0 „ „ „

30 hřiven drží tedy 360 lotů čistého stříbra a hřivna
360 : 30 = 12 lotů.

Má-li se udati určitá hodnota průměrná z více veličin stejnorodých rozličné hodnoty, musí alespoň jedna z daných veličin stejnorodých býti větší a alespoň jedna z nich menší hodnoty, než-li udaná hodnota průměrná.

Určitou hodnotu průměrnou možná udati buď ze dvou aneb z více veličin stejnorodých rozličné hodnoty.

Ze dvou veličin stejnorodých rozličné hodnoty vypočítá se třetí veličina hodnoty průměrné takto:

Čím větší rozdíl mezi veličinou horšího druhu a veličinou hodnoty průměrné, tím více se musí k oné veličině od lepšího druhu přidati; a čím více se liší veličina druhu lepšího od veličiny hodnoty průměrné, tím více se musí k oné od horšího druhu přimísiti, t. j. lepší i horší druh daných veličin se porovnává s veličinou hodnoty průměrné, mnoho-li se druhu horšímu do této hodnoty průměrné nedostává, musí se druhem lepším dosaditi, a naopak o mnoho-li druh lepší hodnotu průměrnou převyšuje, o tolik se musí druhem horším zmenšiti. Pročež udává rozdíl veličiny hodnoty průměrné a veličiny druhu horšího, kolik částek se musí z druhu lepšího dosaditi, a rozdíl veličiny druhu lepšího a hodnoty průměrné určuje, kolik částek se musí z druhu horšího přidati, aby se určité hodnoty průměrné docílilo.

V počtu tom se obyčejně klade nejprv druh lepší, pod tento druh horší, a mezi oba v levo druh průměrný; rozdíl mezi druhem průměrným a druhem horším se napíše k druhu lepšímu, a naopak rozdíl mezi druhem lepším a průměrným k druhu horšímu. Čísla tato udávají v jakém poměru by se oba druhy smísiti měly, nebo kolik stejných částek by se od každého druhu vzíti musilo, aby smíšenina ta dala udaný druh průměrný. N. p.

Zlatník má z 15-ti a 10-ti lotového stříbra smísiti 13-ti lotové, kolik dílů každého druhu má k tomu zapotřebí?

15 | 3 (13 — 10 = 3), t. j. tři díly (loty) se nedostávají druhu horšímu (10-ti) k druhu průměrnému (k 13-ti), pročež se nedůstatek musí vynahraditi druhem lepším;
13
10 | 2 (15 — 13 = 2), t. j. 2 díly (loty) má druh lepší (15) více, než-li k druhu průměrnému zapotřebí, pročež se musí zhoršiti druhem horším (10-ti).

Z toho tedy vysvítá; že 3 díly 15-ti lotového stříbra se musejí přimísiti ke 2 dílům 10-ti lotového, aby směs byla stříbro 13-ti lotové. Že tomu tak snadno se přesvědčíme. Dějme tomu, že by měl zlatník 20 hřiven 13-ti lotového stříbra zapotřebí; od 15-ti lotového vezme 3 díly (3 hřivny) a od 10-ti lotového 2 díly (2 hřivny), tedy dohromady 5 dílů (5 hřiven), avšak 5 hřiven má málo, neboť potřebuje 20 hřiven, tu patrno, že 20 hřiven : 5 hři. = 4-krát, t. j. on má 5 hřiv. × 4 zapotřebí, tedy 3 hř. × 4 lepšího a 2 hřiv. × 4 horšího druhu = 12 hř. + 8 hř. = 20 hřiv., t. j. od 15-ti lotového stříbra musí vzíti 12 hřiv. a od 10-ti lotového 8 hřiv.

V hřivnách jednotlivých druhů musí býti tolik lotů čistého stříbra jako v smíšenině čili druhu průměrném; tedy:

20 hř. 13-ti lotov. stř. drží v sobě čistého stř. 13 lot. × 20 = 260 lotů
12 „ 15-ti „ „ „ 15 „ × 12 = 180 „
8 „ 10-ti „ „ „ 10 „ × 8 = 80 „

t. j. 180 lotů + 80 lotů = 260 lotům čistého stříbra, tedy jest skutečně ve 20-ti hřivnách 13-ti lotového stříbra právě tolik lotů čistého stříbra, jako v 12-ti hřivnách 15-ti lotového a v 8 hřivnách 10-ti lotového čistého stříbra dohromady.

Kdosi prodává libru kávy za 80 kr. a libru jiného druhu za 64 kr., rád by oba tyto druhy smísil tak, aby mohl dáti libru za 70 kr.; jak ji má smísiti a mnoho-li má zapotřebí od každého druhu, chce-li smíšeniny udělati 1·6 setnýře?

80 | 6 nebo 3, t. j. musí k 6-ti dílům lepšího druhu přidati 10 dílů druhu horšího, aneb k 3 dílům (3 lib.) druhu lepšího, 5 dílů (5 lib.) druhu horšího.
70
64 | 10 „ 5.

Avšak má 1·6 setnýře nebo 160 lib. smísiti, tedy 160 lib. : (5 lib. + 3 lib.) = 160 lib. : 8 lib. = 20-krát, t. j. od každého druhu se musí vzíti 20-kráte více, než-li počet udává, tedy od lepšího 3 lib. × 20 = 60 lib. a od horšího 5 lib. × 20 = 100 lib., dohromady 160 lib.

Libry jednotlivých druhů musejí býti za téže peníze jako 160 lib. směšeniny čili druhu průměrného; o čemž se předsvědčíme následujícím vypočítáním:

160 lib. po 70 kr. = 112 zl. $\begin{cases}\text{60 lib. po 80 kr. = 48 zl.}\\ \text{100 „ „ 64 kr. = 64 „}\end{cases}$

tedy dohromady taktéž 112 zl.

Mají-li se více než dvě veličiny stejnorodé rozličné hodnoty smísiti, aby se určité hodnoty průměrné docílilo, zůstává na vůli udané veličiny libovolně vespolek smísiti, pročež příklady takové jsou neurčité, t. j. připouštějí rozličné směšování daných veličin.

V této neurčitosti sloužiž následující za pravidlo:

Je-li více druhů dáno, z nichž se má určitý druh průměrný smísiti, slučme po sobě vždy dva a dva druhy, z nichž jeden jest lepší a druhý horší druhu průměrného. N. p,

Vinař by chtěl čtveré víno, kterého pintu prodával po 74 kr., 66 kr., 58 kr., 40 kr. smísiti, tak aby mohl prodávati pintu po 60 kr.; kolik stejných dílů (pinet) od každého druhu má k tomu zapotřebí?

	74	20	10
	66	2	1
60			
	58	6	3
	40	14	7

Porovnejme druhý a třetí druh s průměrným a napišme rozdíly (6, 2) k patřičným druhům; porovnejme první druh a čtvrtý druh s průměrným a napišme opět rozdíly (14, 20) k patřičným druhům.

Tedy se má smísiti od 1. druhu 20 pinet nebo 10 pinet
„ 2. „ 2 pinty „ 1 pinta
„ 3. „ 6 pinet „ 3 pinty
„ 4. „ 14 „ „ 7 pinet
dohromady 21 pinet.

Je-li tomu tak, musí 21 pinet po 60 kr. míti touž cenu, kterou mají pinty jednotlivých druhů dohromady, tedy:

21 pinet po 60 kr. = 12·60 zl.; 10 pinet po 74 kr. = 7·40 zl.
1 pinta po 66 kr. = 0·66 „
3 pinty po 58 kr. = 1·74 „
7 pinet po 40 kr. = 2.80 „
tedy 21 pinet bude za . 12·60 zl.
jako 21 pinet po 60 kr.

Avšak by se mohly v témže příkladu jednotlivé druhy ještě jinak smísiti, totiž

	74	2	1
	66	20	10
60			
	58	14	7
	40	6	3

1. a 3. druh s průměrným dá rozdíly 14, 2
2. a 4. „ „ „ „ „ 6, 20

Tedy by se od 1. druhu měly smísiti 2 pinty nebo 1 pinta
„ 2. „ „ „ 20 pinet „ 10 pinet
„ 3. „ „ „ 14 „ „ 7 „
„ 4. „ „ „ 6 „ „ 3 „
což dá opět 21 pinet.

Že tomu tak, možná se jako prvé přesvědčiti:

1 pinta po 74 kr. = 0·74 zl.
10 pinet „ 66 „ = 6·60 „
7 „ „ 58 „ = 4·06 „
3 „ „ 40 „ = 1·20 „
dohromady 12·60 zl., tedy tolik jako
21 pinet po 60 kr.

Že se na pravosti vypočítání toho ničehož nemění, pakli se rozličné díly týmže číslem násobí nebo dělí, vysvítá už z toho, že díly tyto naznačují **poměr**, v jakém se druhy směšovati mají, a známo, že pravosť poměru se nemění, násobíme-li jednotlivé členy týmže číslem.

Kdyby však v podobných případech nestávalo právě tolik druhů lepších kolik horších (v uvedeném příkladu jsou 2 druhy lepší a 2 horší) než-li druh průměrný, musí se zbývající druh (lepší nebo horší) ještě spojiti s některým druhem protičelným (horším neb lepším), n. p.

Z patero druhů po 24, 20, 14, 9 a 5 kr. má se smísiti nový druh za 16 kr.; jak se to stane?

	24	7 + 11	18	9
	20	2	2	1
16				
	14	4	4	2
	9	8	8	4
	5	8	8	4

Druhové lepší průměrného jsou 1. a 2. druh, a horší 3., 4., 5. druh, pročež porovnejme jako prvé 2. a 3. druh s průměrným a rozdíly (4, 2) napišme na patřičná místa; pak porovnejme 1. a 4. druh s průměrným, a napišme opět rozdíly (8, 7) na patřičná místa, zbývající druh 5. (5) spojme s některým z druhů lepších (n. p. s 1. druhem) a napišme rozdíly mezi každým z těchto a průměrným jako obyčejně (t. j. 16 — 5 = 11 napišme k 1. druhu a 24 — 16 = 8 napišme k 5. druhu). Z provedení toho vysvítá, že by se musilo vzíti

od 1. druhu	18 dílů	nebo skrátíme-li členy tyto	9 dílů
„ 2. „	2 díly		1 díl
„ 3. „	4 „		2 díly
„ 4. „	8 dílů		4 „
„ 5. „	8 „		4 „ pročež
		dohromady	20 dílů.

20 těchto dílů (lotů, lib, atd.) musí míti touž cenu, jako všechny díly rozličných druhů dohromady, tedy:

20 po 16 kr. = 3·20 zl. a 9 po 24 kr. = 2·16 zl.
1 „ 20 „ = 0·20 „
2 „ 14 „ = 0·28 „
4 „ 9 „ = 0·36 „
4 „ 5 „ = 0·20 „
dohromady 3·20 „ jako 20 po 16 kr.

V uvedeném příkladu by se byl však 5. druh mohl také spojiti s 2. druhem, jakož i 1 druh s 3. druhem, 2. druh s 4. druhem, a 5. druh opět buď s 1. nebo s 2. druhem atd.

Z toho patrno, že směšování takové jest neurčité a že vždy záleží na vůli toho, kdo směšuje, an rozličné díly rozličných druhů vždy tentýž dávají výsledek.

Cvičení.

1. Kdosi smísí 16 korců pšenice po 3 zl. 80 kr. a 25 korců pšenice po 5 zl.; zač bude korec směsi?
2. Kupec smísí jakéhosi zboží 60 lib. po 15 kr., 80 lib. po 23 kr., 40 lib. po 29, zač bude libra směsi?
3. Zlatník potřebuje 40 hřiven $12\frac{1}{4}$-lotového stříbra, má však 3 hřivny 15-lotového, 10 hřiven 13-lotového a 18 hřiven 12-lotového, kolik hřiven a kolika-lotového stříbra se mu nedostává?
4. Kolika-karátová jest směs 1 hřivny 21-karátového, $\frac{1}{2}$ hřivny 20-karátového, $\frac{1}{4}$ hřivny, 19-karatového, $\frac{1}{12}$ hřivny 18-karátového a $\frac{1}{6}$-hřivny ryzího zlata?
5. Kdosi smísil 4 hřivny zlata 22-karátového s 14 hřivnami mědě; jaká jest směs?
6. Na 9 hřiven $14\frac{1}{3}$-lotového stříbra má zlatník $3\frac{1}{8}$ hřivny $13\frac{1}{2}$-lotového a $2\frac{5}{8}$ hřivny $14\frac{1}{2}$-lotového stříbra, kolikalotové stříbro musí k tomu přidati?
7. Kdosi má 60 liber kávy po 80 kr., přimísí-li k tomu 20 lib. kávy po 60 kr., zač bude libra směsi?
8. Vinař má dvojí víno, pintu jednoho prodává za 80 kr. a druhého za 68 kr., chce-li dáti pintu za 54 kr., mnoho-li od každého druhu musí smísiti, aby bylo směsi 260 pinet?
9. Zlatník chce z 14-lotového a 11-lotového stříbra smísiti 8 hřiven 12-lotového; kolik hřiven má k tomu z každého druhu zapotřebí?
10. Kdosi prodává korec žita za 4 zl. 50 kr. a korec ječmena za 2 zl. 80 kr., chce-li smísiti 102 korce tak, aby směs prodával po 3 zl. 20 kr., kolik korců každého druhu má zapotřebí?

11. Kupec prodává libru cukru za 38 kr. a libru jiného druhu za 45 kr.; chce-li prodávati libru za 40 kr., a chce-li smísiti 91 lib., kolik liber potřebuje od každého druhu?

12. Zlatník chce legovati z 20-karátového a 22½-karátového zlata 10 hřiven 21-karátového, kolik hřiven každého má k tomu zapotřebí?

13. Z 15-, 14- a 10-lotového stříbra, mělo by se smísiti 27 hřiven 12½-lotového, kolik hřiven každého druhu jest k tomu zapotřebí? *)

14. Z 24-, 23-, 20- a 18-karátového zlata mělo by se smísiti 18 hřiven 21-karátového, kolik hřiven jednotlivých druhů jest k tomu zapotřebí?

15. Z 16-, 13-, 10-lotového stříbra a z mědě (0) mělo by se smísiti 12½ hřivny 14-lotového stříbra, kolik hřiven zapotřebí od každého druhu?

16. Z 23-, 20-, 19-, 17-karátového zlata a z mědě (0) mělo by se smísiti 5 hřiven 18-karátového zlata, kolik dílů od každého druhu jest k tomu zapotřebí?

---

*) U tohoto a u následujících příkladů nechť se rozličně jednotlivé druhy spojí.

Částka šestá.

Rovnice prvního stupně o jedné neznámé.

§. 57.

Každé provedené sečítání, odčítání, násobení a odnásobení jest rovnice, t. j. porovnání dvou výrazů téže hodnoty, nebo dvojí výraz téže veličiny, n. p.

$$2a + 4a = 6a$$
$$7b - 5b = 2b$$
$$3d \times 4f = 12\ df$$
$$6mn : 2n = 3m.$$

Znamení rovnosti (=) dělí rovnici na dva díly, z nichž se každý z vícero, rozličnými aritmetickými znaménky spojených, členů skládati může; obyčejně se první díl (n. p. 2a + 4a, 7b — 5b atd.) nazývá levý a druhý díl (6a, 2b atd.) pravý; 2a, 4a, 7b, 5b atd. jsou samy o sobě členy rovnice.

Jako vůbec znamenají zde x, y, z veličiny neznámé, všechny ostatní však písmeny veličiny známé.

Rovnice rozeznáváme 1. dle jakosti,
2. dle stupně a
3. dle počtu veličin neznámých.

1. Dle jakosti jsou rovnice buď určovací, t. j. v nichž číslo obecné jedinou pouze hodnotu míti může (n. p. $x + 4 = 10$; x může býti pouze = 6); nebo jednostejné, t. j. takové, v nichž každé číslo obecné libovolné číslo zvláštní zastupovati může (n. p. $a = a$, $2ab : b = 2a$ atd.)

2. Dle stupně jsou rovnice buď prosté nebo prvního stupně, pakli neznámá veličina (x) nemá žádného udavatele mocnosti, n. p. $4x + 8 = 20$, nebo vyšší, t. j. druhého, třetího atd. stupně, má-li totiž x nejvyššího udavatele druhé,

třetí atd. mocnosti, n. p. $x^2 + x = 16$, nebo $x^3 = x + 24$ atd.

3. Dle počtu veličin neznámých rozeznáváme rovnice o jedné (x) o dvou (x, y), o třech (x, y, z) atd. neznámých. Každou rovnici možná přemístiti, t. j. první díl možná položiti na místo druhého a druhý na místo prvního dílu, n. p. $2x - 4 = x - 1$, nebo $x - 1 = 2x - 4$.

Zde pojednáme pouze o rovnicích prvního stupně, o jedné neznámé a sice určovacích a jednostejných.

I. Rozřešení rovnic prvního stupně o jedné neznámé.

§. 58.

Každá rovnice se nejprvé sestaví, sestavená rozřeší.

Rovnici sestaviti znamená: dané podmínky arithmetickými znaménky tak spořádati a vyjádřiti, aby se docílilo dvou sobě rovných výrazů. Rovnice se dá pouze soudností jednoho každého sestaviti, pročež nelze sestavování ani učiti, ani určitá pravidla proň podati; nýbrž možná si pouze pilným cvičením se zběhlosť v tom získati.

Rovnici rozřešiti znamená: sestavenou rovnici bez všelikého porušení rovnosti obou dílů tak upraviti, aby na jedné straně byla neznámá veličina (x) kladná, bez součinitele, bez jmenovatele, a sama o sobě, na druhé straně aby byly všechny veličiny známé.

a. Jak se rozřešují rovnice sestavené určovací?

§. 59.

Rovnice prvního stupně se rozřešují dle zásady samozřejmé: výrazy sobě rovné, byvše stejně proměněny, zůstávají opět sobě rovnými, aneb což jednostejné:

1. Rovné k rovnému připočtěno dává rovné.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Je-li} & a & = & b \\ & c & = & d \quad \text{jest i} \\ \hline & a + c & = & b + d. \end{array}$$

2. Rovné od rovného odečtěno dává rovné.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Je-li} & a & = & b \\ & c & = & d \text{ jest i} \\ \hline & a - c & = & b - d. \end{array}$$

3. Rovné rovným násobeno dává rovné.

$$\begin{array}{rcl} \text{Je-li } a & = & b \\ c & = & d \text{ jest i} \\ \hline a \cdot c & = & b \cdot d. \end{array}$$

4. Rovné rovným děleno dává rovné.

$$\begin{array}{rcl} \text{Je-li } a & = & b \\ c & = & d \text{ jest i} \\ \hline a : c & = & b : d \text{ nebo } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}. \end{array}$$

Z těchto zásad samozřejmých odvozují se pro rozřešení rovnice o jedné neznámé následující pravidla:

1. Je-li neznámá veličina (x) se známou spojena znaménkem sečítání (+), přivedeme známou na druhou stranu, pak-li ji v obou dílech odečteme, n. p.

$$\begin{array}{rcl} -\frac{5x}{2} - 4 + \frac{1}{4} & = & -13 - \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} \\ \hline -\frac{5x}{2} - 4 & = & -13 - 1 \end{array}$$

2. Je-li x spojeno se známou veličinou znaménkem odčítání (—), přivedeme známou na druhou stranu, pak-li ji k oboum dílům připočteme, n. p.

$$\begin{array}{rcl} -\frac{5x}{2} - 4 & = & -14 \\ +4 & & +4 \\ \hline -\frac{5x}{2} & = & -10 \end{array}$$

3. Je-li x spojeno se známou veličinou znaménkem dělení, t. j. je-li známá jmenovatelem neznámé, odstraníme ji, násobíme-li jí oba díly rovnice, n. p.

$$\begin{array}{rcl} -\frac{5x}{2} & = & -10 \\ \times 2 & & \times 2 \\ \hline -5x & = & -20. \end{array}$$

4. Je-li x spojeno se známou veličinou znaménkem násobení, t. j. je-li známá součinitel neznámé, odstraníme ji, dělíme-li jí oba díly rovnice, n. p.

$$\begin{array}{rcl} -5x & = & -20 \\ :5 & & :5 \\ \hline -x & = & -4. \end{array}$$

5. Je-li x záporné, násobme oba díly rovnice zápornou jedničkou (— 1), n. p.

$$\begin{array}{r} -x = -4 \\ \times -1 \times -1 \\ \hline x = 4. \end{array}$$

K těmto pravidlům přidáváme ještě:

6. Je-li x samo jmenovatelem, násobí se jím oba díly rovnice, n. p.

$$\frac{2}{x} + 6 = \frac{50}{x} - 18$$

$$\left(\frac{2}{x} + 6\right) \cdot x = \left(\frac{50}{x} - 18\right) \cdot x, \text{ t. j.}$$

$$2 + 6x = 50 - 18x.$$

Opáčnými znaménky se všechny neznámé převedou do jednoho a známé do druhého dílu rovnice, tedy:

$$\begin{array}{rcl} 2 + 6x & = & 50 - 18x \\ -2 + 18x & & +18x - 2 \\ \hline 24x & = & 50 - 2 \\ x & = & \frac{48}{24} = 2. \end{array}$$

7. Je-li v rovnici více zlomků s rozličnými jmenovateli, tu se buď **každým** jmenovatelem násobí oba díly rovnice, anebo se zlomky ty uvedou na společného jmenovatele, n. p.

$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{6} = x - 2$; násobme 2ma oba díly rovnice, bude:

$\frac{2x}{3} + x + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2x - 4$; opět 2ma:

$\frac{4x}{3} + \underbrace{2x + x}_{} - \frac{2x}{3} = 4x - 8$; násobme 3mi oba díly rovnice, bude:

$4x + 9x - 2x = 12x - 24$; srazme stejnorodé veličiny dohromady:

$11x = 12x - 24$; x na jednu stranu:

$11x - 12x = -24$;

$-x = -24$; násobme oba díly zápornou jedničkou (— 1), bude:

$x = 24.$

Kdybychom uvedli všechny zlomky na společného jmenovatele, byl by u

$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{6} = x - 2$ takový jmenovatel 12, převedeme-li i hned každý zlomek na jmenovatele 12, bude:

$$\frac{4x + 6x + 3x - 2x}{12} = x - 2, \text{ t. j.}$$

$\frac{11x}{12} = x - 2$, násobme oba díly 12ti bude:

$11x = 12x - 24$, z čeho

$11x - 12x = -24$

$-x = -24$, neb násobeno -1, bude:

$x = 24$ jako prvé.

Je-li rovnice dobře rozřešena musejí oba její díly, vložíme-li v ně hodnotu neznámé veličiny, býti sobě rovny, tedy zde na místo $x = 24$ bude:

$\frac{24}{3} + \frac{24}{2} + \frac{24}{4} - \frac{24}{6} = 24 - 2$ nebo

$8 + 12 + 6 - 4 = 22$, srazíme-li je dohromady

$22 = 22$.

Jiné příklady:

1\. $\frac{x}{4} = \frac{x}{6} + 11$

$x = \frac{4x}{6} + 44$

$6x = 4x + 264$

$6x - 4x = 264$

$2x = 264$

$x = 132$.

Zkouška:

$\frac{132}{4} = \frac{132}{6} + 11$

$33 = 22 + 11$

$33 = 33$.

2\. $2(11 + x) = x + 46$

$22 + 2x = x + 46$

$2x - x = 46 - 22$

$x = 24$.

Zkouška:

$2(11 + 24) = 24 + 46$

$22 + 48 = 24 + 46$

$70 = 70$.

3\. $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + 12 - 100 = 100 - x$; první díl na společného jmenovatele 12 bude:

$\frac{24x + 6x + 3x + 2x + 144 - 1200}{12} = 100 - x$, sraženo bude:

$\frac{35x - 1056}{12} = 100 - x$

$35x - 1056 = 1200 - 12x$

$35x + 12x = 1200 + 1056$

$47x = 2256$

$x = \frac{2256}{47} = 48$.

Zkouška:

$2 \times 48 + \frac{48}{2} + \frac{48}{4} + \frac{48}{6} + 12 - 100 = 100 - 48$

$$96 + 24 + 12 + 8 + 12 - 100 = 52$$
$$152 - 100 = 52$$
$$52 = 52.$$

4. Bylo-li by více závorek, rozřeší se nejprvé buď závorka vnitřní nebo nejkrajnější, n. p.

$$\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}+x\right)}_{}\right]=\frac{1}{3}.\text{Nebo } \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+x\right)\right]=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{9}+\frac{x}{3}\right]=\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{27}+\frac{x}{9}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{1+3x}{27}=\frac{1}{3},$$
$$1+3x=\frac{27}{3},$$
$$3x=9-1,$$
$$x=\frac{8}{3}=2^2/_3,$$

$$\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}+x\right)=\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{27}+\frac{x}{9}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{1+3x}{27}=\frac{1}{3},$$
$$1+3x=9,$$
$$3x=8,$$
$$x=\frac{8}{3}=2^2/_3.$$

Taktéž

5. $$\frac{2}{5}\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot\left(4-\underbrace{\left(\pm\frac{2}{5}\mp 5x\right)}_{}\right)\right]=4,$$

$$\frac{2}{5}\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot\underbrace{\left(4-\frac{2}{5}+5x\right)}_{}\right]=4,$$
$$\frac{2}{5}\cdot\left[\frac{8}{5}-\frac{4}{25}+\frac{10x}{5}\right]=4;$$
$$\frac{16}{25}-\frac{8}{125}+\frac{4x}{5}=4,$$
$$\frac{80-8+100x}{125}=4,$$
$$72+100x=500,$$
$$100x=500-72,$$
$$x=\frac{428}{100}=4{\cdot}28.$$

Nebo: $$\frac{2}{5}\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot\left(4-\left(+\frac{2}{5}-5x\right)\right)\right]=4,$$

$$\frac{4}{25}\cdot\left(4\mp\left(\pm\frac{2}{5}\mp 5x\right)\right)=4$$ atd. Zkouška?

b. Jak se rozřešují rovnice sestavené jednostejné?

§. 60.

U rovnic jednostejných platí všechna pravidla, uvedená u rovnic určovacích, ony neliší se tedy od těchto ničím jiným, než že mají na místě čísel zvláštních, čísla obecná. Za známé veličiny se pokládají čísla a, b, c atd., za veličiny neznámé x, y, z.

Rovnice jednostejné mají v počtářství větší obor a větší důležitosť než-li rovnice určovací, už jen proto, že každé číslo obecné libovolné číslo zvláštní znamenati může. V návodu tomto uvadíme některé příklady rovnic jednostejných pouze pro zdokonalení se v algebře, n. p.

Jsouli v jednom dílu rovnice dvě neb více x s rozličnými součiniteli, vysadí se x jelikož společný činitel.

1.
$$\begin{array}{rcl} cx - b & = & a \\ +b & & +b \\ \hline cx & = & a + b \\ :c & & :c \\ \hline x & = & \dfrac{a+b}{c}. \end{array}$$

Zkouška:

$$c \cdot \frac{a+b}{c} - b = a$$
$$a + b - b = a; (+ b - b = o)$$
$$a = a$$

2. $a - \dfrac{ab}{x} = b$, násobme x oba díly

$$\begin{array}{rcl} ax - ab & = & bx \\ +ab & & +ab \\ \hline ax & = & bx + ab \\ -bx & & -bx \\ \hline ax - bx & = & ab, \end{array}$$

x se vysadí:

$$x\ (a - b) = ab.$$
$$x = \frac{ab}{a-b}.$$

Zkouška:

$$a - \frac{ab}{\dfrac{ab}{a-b}} = b;$$ složený zlomek srovnáme

$$a - \frac{ab\ (a-b)}{ab} = b;$$
$$a \mp (-a \mp b) = b,$$ v prvním dílu odečtěme
$$a - a + b = b; (+ a - a = o)$$
$$b = b.$$

3. $\dfrac{a}{x+b} = \dfrac{c}{x+d}$, násobme oba díly $(x + b)$

$a = \frac{c\,(x + b)}{x + d}$, násobme oba díly $(x + d)$

$a\,(x + d) = c\,(x + b)$ nebo

$ax + ad = cx + bc$; cx na levou stranu a ad na pravou s obrácenými znaménky:

$ax - cx = bc - ad$; x se vysadí:

$x\,(a - c) = bc - ad$, z toho:

$x = \frac{bc - ad}{a - c}$.

Zkouška:

$$\frac{a}{\frac{bc - ad}{a - c} + b} = \frac{c}{\frac{bc - ad}{a - c} + d}$$

$$\frac{a}{\frac{bc - ad + ab - bc}{a - c}} = \frac{c}{\frac{bc - ad + ad - cd}{a - c}}$$

$$\frac{a\,(a - c)}{ab - ad} = \frac{c\,(a - c)}{bc - cd}$$

$$\frac{a^2 - ac}{ab - ad} = \frac{ac - c^2}{bc - cd}$$

$$(a^2 - ac) \cdot (bc - cd) = (ac - c^2) \cdot (ab - ad)$$

$$a^2bc - abc^2 - a^2cd + ac^2d = a^2bc - abc^2 - a^2cd + ac^2d$$

4. $\frac{x}{x + b} - \frac{x}{x - b} = \frac{a}{x + b}$, násobme $(x + b)$

$x - \frac{x\,(x + b)}{x - b} = a$; násobme $(x - b)$

$x^2 - bx - x^2 - bx = ax - ab$ Zkouška?

$-2bx - ax = -ab$

$-x\,(2b + a) = -ab$

$-x = -\frac{ab}{2b + a}$, násobme -1

$x = \frac{ab}{2b + a}$.

5. $\frac{ax}{a + c} - \frac{a + c}{a - c} = \frac{x}{a + c}$, násobme $(a + c)$ Zkouška?

$ax - \frac{(a + c) \cdot (a + c)}{a - c} = x$, násobme $(a - c)$

$ax\,(a - c) - (a^2 + 2ac + c^2) = x\,(a - c)$; x na levou a druhý člen na pravou stranu

$a^2x - acx - ax + cx = a^2 + 2ac + c^2$; x vysaďme

$$x\,(a^2 - ac - a + c) = a^2 + 2ac + c^2;$$

$$x = \frac{a^2 + 2ac + c^2}{a^2 - ac - a + c} = \frac{a^2 + 2ac + c^2}{(a - c) \cdot (a - 1)}.$$

Cvičení.

Rozřešte:

1. $x + \frac{6x}{5} = 297.$

2. $x + 12 = \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12}.$

3. $\frac{x}{4} = \frac{4x + 180}{25}.$

4. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = (x + 90) \cdot \frac{3}{4}.$

5. $\frac{x}{3} = x - 30.$

6. $\frac{x}{4} + 141 = 1826 - x.$

7. $x + \frac{x}{2} = x + \frac{1}{4}.$

8. $x + 105{\cdot}25 = \frac{1413 + 9x}{12}.$

9. $x - \frac{x + 500}{6} = 6x - \frac{x + 500.}{6}$

10. $x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{4x}{5} + \frac{5x}{6} + 9 = 100.$

11. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x.$

12. $\left(\frac{2x}{3} + \frac{5x}{6} + \frac{8x}{9}\right) \cdot 8 - 63 = 969.$

13. $\frac{5x - 1}{2} - \frac{x + 1}{4} = \frac{x + 9}{4}.$

14. $3x - \left(\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6}\right) = x - 249{\cdot}75.$

15. $1 - \frac{2}{3x} + 4 - \frac{5}{6x} = 7 - \frac{8}{9x} + 10 - \frac{11}{12x}.$

16. $\frac{1}{9}\left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\,[x + 2] + 4\right) + 6\right) + 8\right] = 1.$

17. $\frac{2x - 3}{15} - \frac{4x - 19}{20} = \frac{8x - 27}{30} - \frac{16x - 81}{24} - \frac{9}{40}.$

18. $\frac{9x + 4}{5x - 48} + \frac{4x - 19}{51} = \frac{5x + 32}{17} - \frac{11x + 13}{51}.$

19. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2x}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{2}{x} + x}.$

20. $\frac{ax}{b} + x = a.$

21. $\frac{x - a}{c} - \frac{x + a}{b} = b - c.$

22. $\frac{x}{m} - \frac{b}{c} = \frac{x}{c}.$

23. $x + 3a + 5b - 7c = 4a + 3b - 4c.$

24. $a - \frac{m + n}{x} = b - \frac{m - n}{x}.$

25. $\frac{x}{ab} - (c + x)\,d = e - \frac{x + m}{an}.$

26. $ax + b = cx + d.$

27. $(m + n)\,x + a = px.$

28. $a\,(x - a^2) = b\,(x - b^2).$

29. $\frac{x}{p + q} - m = n + x.$

30. $a^2b - \frac{a + x}{b} = ab^2 - \frac{b + x}{a}.$

31. $\frac{1}{a - b} + \frac{a - b}{x} = \frac{1}{a + b} + \frac{a + b}{x}.$

32. $n - \frac{p + x}{q + x} = \frac{nx}{p + x} - m.$

33. $\frac{a}{m + x} - b = c.$

II. Jak se sestavují rovnice určovací?

§. 61.

Praveno už, že se nedá určiti pravidlo, dle něhož by se rovnice sestaviti daly, neboť by musilo býti tolik pravidel, kolik rozličných rovnic jest možná, což pravda nemožno. Účel tohoto paragrafu tedy jest přispěti soudnosti a důmyslnosti žákově, jakož i ukázati mu, jak se v některých případech známé veličiny s neznámou spojiti mají, aby daly rovnici, která jsouc sestavena, snadno se rozřeší, n. p.

1. Které číslo zvětšené svým čtvrtým dílem dá 30?

Číslo to jest neznámé tedy x, jeho čtvrtý díl jest $\frac{x}{4}$; číslo to má být zvětšeno svým čtvrtým dílem tedy $x + \frac{x}{4}$, a má součet ten dáti 30 tedy

$$x + \frac{x}{4} = 30,$$ rozřešíme-li tuto rovnici bude

$$4x + x = 120$$
$$5x = 120$$
$$x = \frac{120}{5} = 24.$$

Tedy $x = 24$, $\frac{x}{4} = \frac{24}{6} = 6$, a $x + \frac{x}{4}$, t. j. $24 + 6 = 30$.

2. Které číslo jest o 9 větší nežli jeho polovice a jeho pětina? Číslo to jest x, jeho polovice $= \frac{x}{2}$, jeho pětina $= \frac{x}{5}$, tedy jeho polovice a pětina $\frac{x}{2} + \frac{x}{5}$. Je-li číslo to (x) o 9 větší než-li jeho polovice a pětina, kdy se bude rovnati své polovici a pětině? patrno, když od něho 9 odpočítáme, tedy

$$x - 9 = \frac{x}{2} + \frac{x}{5},$$ z toho

$$2x - 18 = x + \frac{2x}{5}$$
$$10x - 90 = 5x + 2x$$
$$10x - 7x = 90$$
$$3x = 90$$
$$x = 30.$$

Tedy $x = 30$, $\frac{x}{2} = 15$, $\frac{x}{5} = 6$ a $30 - 9 = 15 + 6$, t. j.

$$21 = 21.$$

3. Které číslo, 19-kráte jsouc znásobeno, dá tolik jako když k němu 6 připočteme?

Číslo to jest x, 19-kráte znásobeno $= 19x$, a to má dáti tolik, t. j. má se rovnati sámému sobě (x) zvětšenému o 6, t. j. $x + 6$, tedy $19x = x + 6$, z čehož

$$19x - x = 6$$
$$18x = 6$$
$$x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Je-li $x = \frac{1}{3}$, bude $19x = 19 \times \frac{1}{3}$, a $x + 6 = \frac{1}{3} + 6$, tedy

$$19 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 6, \text{ t. j. } \frac{19}{3} = \frac{19}{3} \text{ nebo } 19 = 19.$$

4. Třetina čísla jest o 30 menší než-li číslo samé, které jest to číslo?

Číslo to jest neznámé, tedy x, jeho třetina $= \frac{x}{3}$, tato třetina jest o 30 menší, než-li číslo samé; kdy se bude třetina ta rovnati svému celku? pakli to, oč je menší (30) k ní přidáme, tedy

$$\frac{x}{3} + 30 = x$$
$$x + 90 = 3x$$
$$90 = 3x - x$$
$$90 = 2x$$
$$\frac{90}{2} = x = 45.$$

Je-li $x = 45$ jest $\frac{x}{3} = 15$, a $\frac{x}{3} + 30 = 15 + 30 = 45$.

5. Kdosi chtěl své peníze dáti chudým. Kdyby byl dal každému 3 zl., byly by se mu 2 zl. nedostávaly, a kdyby byl dal každému 2 zl., bylo by mu 5 zl. zůstalo. Kolik bylo chudých?

Kolik bylo chudých jest x; kdyby byl dal každému chudému 3 zl, musil by dáti 3x zl., pak ale se mu 2 zl. nedostávaly, tedy $3x - 2$; kdyby byl dal každému 2 zl., dal by 2x zl., pak ale by mu 5 zl. zbylo, t. j. on měl zlatých $2x + 5$ a poněvadž chtěl tytéž (=) peníze chudým dáti, tedy se

$$3x - 2 = 2x + 5, \text{ z toho:}$$
$$3x - 2x = 5 + 2$$
$$x = 7,$$

t. j. bylo 7 chudých, a mezi ně chtěl rozdati:

$3x - 2 = 3 \cdot 7 - 2 = 21 - 2 = 19$ zlatých, nebo

$2x + 5 = 2 \cdot 7 + 5 = 14 + 5 = 19$ zlatých.

6. Posel vyjel na rychlo před třemi dny a urazil denně 8 mil; poslal se za ním jiný, který musil uraziti denně 12 mil; kdy prvního dohonil?

Kdy t. j. v kolika dnech druhý prvního dohonil jest x; první posel byl už na cestě a urazil denně 8 mil, tedy za 3 dni $3 \times 8 = 24$ mil, po těchto třech dnech jeli oba, ale vždy s tím rozdílem, že první urazil denně 8 mil, a druhý 12 mil, jel-li první 1 den, 2 dni, 3 dni, ... x dní, jel taktéž druhý za ním 1 den, 2 dni, 3 dni, . . . x dní, urazil-li první 8 mil jednou, 8 mil dvakrát, 8 mil třikrát . . . 8 mil $\times$ x, urazil i druhý 12 mil jednou, 12 mil dvakrát, 12 mil třikrát . . . . . 12 mil $\times$ x, že ale byl první posel 24 mil napřed, tedy urazil za ten čas, za který vykonal druhý 12x mil, 8x mil + 24 mil, pročež bude

$$12x = 8x + 24$$ Zkouška?

$(x = 6$ dnům$)$.

7. Kolik jest hodin? táže se študující svého soudruha. Kdyby's — odpověděl mu tázaný — sečetl polovici, třetinu a čtvrtinu hodin, kolik právě udeřilo, byl by součet ten o 1 větší než-li počet hodin. Kolik hodin bylo? Kolik hodin $= x$, polovice jich $= \frac{x}{2}$, třetina $= \frac{x}{3}$, čtvrtina $= \frac{x}{4}$, kdyby se tyto sečtly, t. j. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$ byl by součet ten o 1 větší, než-li počet hodin, t. j. než-li x; kdy by se součet ten rovnal x? patrno, kdybychom od něho 1 odečtli anebo k x 1 připočtli, tedy

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1;$$ Zkouška?

$(x = 12$ hod.$)$

8. Kam's dal všechna péra? tázal se študující svého spolubytujícího. Polovici — odpověděl tázaný — jsem jich rozdal, čtvrtý díl jsem ztratil, sedmý díl jsem schoval a zde mám z nich ještě tři. Kolik per měl v celku?

Kolik per $= x$, polovice jich $= \frac{x}{2}$, čtvrty díl $= \frac{x}{4}$, sedmý díl $= \frac{x}{7}$ a 3 dělá $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3$, a to vše se rovná počtu per (x), tedy

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x$$ Zkouška?

$(x = 28$ per.$)$.

9. Rolník vymlátil 5-krát tolik obilí co zasil a 7 měřic, polovici obilí toho prodal a zůstali mu 306 měřic. Mnoho-li zasil?

Zasil x měřic, 5-krát tolik $= 5x$ a 7 měřic jest $5x + 7$, polovici toho prodal $= \frac{5x + 7}{2}$ a předce mu zbylo 306 měřic, t. j. zůstala mu druhá polovice, tedy:

$$\frac{5x + 7}{2} = 306$$ Zkouška?

$(x = 121$ měř.$)$

10. Do kašny teče voda třemi rourami rozličného průměru. Kdyby tekla jen rourou A, naplnila by se kašna za 5 dní, kdyby tekla jen rourou B, naplnila by se kašna za $3^1/_3$ dne, a kdyby tekla jen rourou C, naplnila by se kašna za 6 dní. Kdy se naplní kašna, teče-li voda všemi rourami?

Naplnění kašny se považuje zde (a při podobných příkladech) za práci, kterou vyvesti mají tři rozličné síly (roury), tyto tedy pracují na určitém celku a celek ten se považuje za jedničku (1); tedy by roura

A za 5 dní naplnila celou kašnu, t. j. 1,
B „ $3^1/_3$ dne „ „ „ „ 1,
C „ 6 dní „ „ „ „ 1,

a otázka jest, kdy, t. j. za kolik dní by A + B + C naplnily onu jedničku?

Za kolik dní jest x. Roura A naplní kašnu za 5 dní,
tedy za den naplní $^1/_5$ celé kašny,
„ 2 dní „ $^2/_5$ „ „
„ 3 „ „ $^3/_5$ „ „ tedy
„ x „ „ $\frac{x}{5}$ „ „

Roura B naplní kašnu za $3^1/_3$ dne,
tedy za den $\frac{1}{^{10}/_3} = \frac{3}{10}$ celé kašny,
za 2 dni $= \frac{3\times2}{10}$ celé kašny, a
za x dní $= \frac{3\times x}{10}$ „ „

Roura C naplní kašnu za 6 dní, tedy za den $^1/_6$ celé kašny,
za 2 dni $^2/_6$ „ „
za x dní $\frac{x}{6}$ „ „

a všechny roury mají naplniti za x dní celou kašni, tedy

Zkouška?

$$\frac{x}{5} + \frac{3x}{10} + \frac{x}{6} = 1$$

($x = 1^1/_2$ dni).

11. Dva sekáči požínají louku; pakli A požne tolik za 5 dní jako B za 7 dní, kdy by požali louku pospolu?

Kdy by louku požali jest x dní; celá louka = 1; požal-li by A louku tu za 5 dní, požal by za 1 den,

$^1/_5$ louky, za x dní $\frac{x}{5}$ louky,

a sekáč B by požal za 1 den $^1/_7$ louky, tedy za x dní $\frac{x}{7}$ louky.

Poněvadž žnou dohromady, požnou louku

t. j. 1 za $\frac{x}{5} + \frac{x}{7}$, tedy Zkouška?

$$1 = \frac{x}{5} + \frac{x}{7}$$

$(x = 2^{11}/_{12}$ dne).

12. Jsou tři sudy. Naplní-li se sud B ze sudu A, zbyde v A $^2/_3$ obsahu, naplní-li se sud C ze sudu A, zbyde v A $^5/_9$ obsahu, naplní-li se však sud A obsahem sudů B + C, nedostává se do A 8 věder. Kolik věder drží každý z těchto sudů?

Sud A drží x věder, sud B drží $x - \frac{2x}{3}$, sud C drží $x - \frac{5x}{9}$, tedy drží sudy $B + C = x - \frac{2x}{3} + x - \frac{5x}{9}$, t. j. $2x - \frac{2x}{3} - \frac{5x}{9}$ a přelejeme-li sudy B + C do A nebude se dostávati 8 věder, t. j. v sudě A bude x — 8 věder, tedy

$$2x - \frac{2x}{3} - \frac{5x}{9} = x - 8 \left(\begin{array}{l} A = x = 36 \text{ vědrům} \\ B = x - \frac{2x}{3} = 12 \text{ věd.} \\ C = x - \frac{5x}{9} = 16 \text{ věd.} \end{array}\right) \text{Zkouška?}$$

13. Študující se ptá soudruha, kolik mu je let. Tázaný odpoví: Jest mi dvakrát tolik jako méniu bratrovi, a před 4mi lety bylo mi 3-krát tolik let jako témuž bratrovi. Kolik jest mu let?

Jeho bratrovi jest x let, jemu jest dvakrát tolik = 2x let; před 4mi lety mu bylo 2x — 4 a jeho bratru x — 4, avšak bylo mu před 4mi lety 3-krát tolik let jako jeho bratrovi, tedy 3 (x — 4) pročež

$$2x - 4 = 3(x - 4) \left(\begin{array}{l} x \text{ let} = 8 \text{ let mladšímu bratru a} \\ 2x \text{ „} = 16 \text{ let jemu.} \end{array}\right)$$

Cvičení.

1. Pátý díl jakéhosi čísla rovná se jeho třetině méně 1. Které číslo jest to?
2. Zdvojnásobené číslo jest o pět větší, než-li jeho třetina. Které číslo jest to?

3. 25tý díl čtyrnásobného a o 180 zvětšeného čísla má se rovnati čtvrtému dílu téhož čísla. Které číslo jest to?
4. Mysli si číslo, zdvojnásob je, přidej k tomu 12, součet děl dvěma a odečti od všeho číslo myšlené, rozdíl se má rovnati trojnásobnému číslu samému. Které číslo jest to?
5. Násobím-li číslo jakési 9ti, bude součin o 4 větší, než-li číslo samé. Jaké jest to číslo?
6. 8700 zl. má se rozdati třem osobám tak, aby dostala osoba B o 900 zl. méně nežli A, a C o 1200 méně nežli B. Mnoho-li dostáne každá osoba?
7. Kdosi odporučí v závěti své jmění 4268 zl. čtyřem přátelům s tím podotknutím, aby dostal A 4krát tolik co B, tento dvakrát tolik co C, a tento o 200 zl. více než-li D. Mnoho-li dostal každý?
8. Kdosi odkázal ve své závěti polovic jmění svému bratrovi, třetinu svému strýci a 1000 zl. dobročinným ústavům. Mnoho-li jmění zanechal?
9. Tři bratří dědili po strýci celou peněžitou pozůstalosť, a sice první dědil o 1000 zl. méně, než-li půl pozůstalosti, druhý o 800 zl. méně, než-li třetinu pozůstalosti a třetí o 600 zl. méně, než-li čtvrtinu pozůstalosti. Jaká byla celá pozůstalosť a mnoho-li dědil každý?
10. 1170 zl. má se rozdati třem osobám dle stáří, B jest o třetinu starší, než-li A, a C jest dvakrát tak starý jako A. Mnoho-li dostal každý?
11. Kdosi chtěl poděliti děti jablky, kdyby dal každému 5 jablek, bylo-by se mu 6 jablek nedostalo, a kdyby dal každému 4 jablka, byla by mu 2 jablka zbyla. Kolik bylo dětí a kolik měl jablek?
12. Stavitel vyplácí zedníky. Kdyby dal každému 9 zl., zůstalo-by mu 32 zl., a kdyby dal každému 11 zl., nedostávalo by se mu 32 zl. Mnoho-li zedníků vyplácí a mnoho-li má pro ně peněz uchystáno?
13. Žáci některé třídy se umluví, že chudého spolužáka ošatí. Za tou příčinou se učiní sbírka a každý zámožnější přispěje $^1/_2$ zl. Šaty však jsou o 1 zl. dražší, než-li sbírka vynesla, pročež každý z přispívajících dá ještě $^1/_{10}$ zl., čímž 2 zl. přebývají a na příští sbírku se uschovají. Kolik žáků přispívalo?
14. Do kašny teče voda dvěma rourama. Rourou A by se naplnila za 5 dní a rourou B za 7 dní. Kdy by se naplnila oběma rourama?
15. Kdy vysázejí tři sázeči v tiskárně arch tiskový, pakli-by sázeč A k tomu potřeboval 3 dni, sazeč B $2^1/_2$ dne a C $3^3/_4$ dne?

16. Kdy požnou dva ženci dohromady žito, požal-li by je A sám za $4^1/_2$ dne a B sám za 6 dní (den = 14 hodin)?

17. Za poslem, který denně 6 mil vykonal a 6 dní na cestě byl, poslán jiný, který 9 mil denně urazil. Kdy prvního dohonil?

18. Z A do B jde posel a urazí denně 5 mil, z B do A jde tentýž čas také posel a urazí denně 4 míle; je-li z A do B 27 mil, kdy se poslové ti potkají a jak daleko od míst, z nichž vyšli?

19. Študující chce jíti z A na prázdniny a píše rodičům do B, aby mu určitý den poslali naproti příležitosť. Určitého dne vyjde a urazí denně $3^1/_2$ míle, jestli tentýž den vyjede z jeho rodiště příležitosť a udělá-li 5 mil denně, kdy ji študující potká, a jak daleko od svého rodiště, je-li A od B 17 mil vzdáleno?

20. Hospodář vymlátil 10krát tolik obilí a 6 korců, než-li co zasil, prodal-li z toho třetinu a zbyly-li mu ještě 102 korce, mnoho-li zasil?

21. Kdosi vydělal na zboží 4krát tolik a 4 zlaté, než-li zač jej byl koupil, zůstal-li za ně $^2/_5$ dlužen a zbylo-li mu ještě 55 zl., zač je koupil?

22. Jsou tři sudy. Naplní-li se sud B ze sudu A zbydou v A $^3/_4$ obsahu, naplní-li se sud C ze sudu A, zbyde v A $^1/_2$ obsahu, naplní-li se však sud A obsahem sudů B + C, nedostávají se do A 2 vědra. Kolik věder drží A a kolik B a C?

23. Kupec A byl dlužen; kdyby mu B půjčil své peníze, zůstal by $^3/_5$ dlužen, kdyby mu C půjčil své peníze, zůstal by $^2/_3$ dlužen, a kdyby mu oba půjčili své peníze, zůstalby 1000 zl. dlužen. Mnoho-li byl A dlužen a mnoho-li mu chtěl B a C půjčiti?

24. Jsou čtyři známí A, B, C, D. B jest dlužen a vypůjčuje si od A, tento mu však nemůže více půjčiti než tolik, aby $^1/_3$ dluhu zapravil, (tedy mu $^2/_3$ dluhů zůstanou). A tím pohrdne a požádá B, tento však nemůže mu více půjčiti, než tolik, aby $^2/_3$ dluhů zapravil. A tím pohrdne opět a požádá C, tento mu však chce jen polovici dluhů zapraviti; A vidí, že není pomoci, a žádá opět B, C, D, aby mu slíbeným dohromady pomohli. Po zaplacení zbyde A 1 zl.; mnoho-li byl dlužen a mnoho-li mu každý půjčil?

25. Vinař má dvojí víno. Smísí-li 3 pinty lepšího s 5 pintami horšího, prodává pintu směsi za 82 kr., smísí-li však $3^3/_4$ pinty lepšího vína s $7^1/_2$ pintou horšího, může dáti pintu za 70 krejcarů. Zač jest pinta každého druhu?

26. Mému otci a mně jest dohromady 54 let, mému otci a dědu

112 let, dědu a mně 82 let. Kolik let jest každému z nás? $\left(\text{Co dá } \frac{54 + 112 + 82}{2}?\right)$

27. Jsou tři čísla, součet prvního a druhého = 20, součet prvního a třetího = 28, součet druhého a třetího = 34. Která jsou ta čísla?

Obsah.

Částka čtvrtá.

Částka pátá.

Částka šestá.

Omyly.

Stránka:	řádek:	na místě:	má býti:
7	5 ze zdola	(295)	(— 295)
10	13 „	— (první)	+
13	2 „	— 10 × +	10 × 5 +
24	16 18 ze shora	+ 6aab	+ 3aab
28	4 „	— 3ab	+ 3ab
59	15 ze zdola	(a + b + c+d)	$(a + b + c + d)^3$
72	2 ze shora	23. 25, 24, 25	23, 24, 25, 2.
74	5 „	prků	prvků
81	18 „	s	z
84	14 „	lokech	loktech
94	10 „	též	téže
95	9 10 „	576, 45	57·6, 4·5