Počátky Měřictví

pro

nižší gymnasia.

Sestavil

Jan Dřízhal

c. k. gymn. prof.

I. Oddíl.

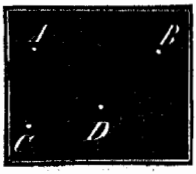
V LITOMYŠLI a PRAZE.

Tiskem a nákladem Ant. Augusty 1862.

Úvod.

§. 1. ***O bodu.*** Místa na tabuli, mapě, zeměkouli poznačujeme ***bodem,*** poznačení toto stává se hmotou barvicí, křídou, tužkou.

Obr. 1.



Bod takto naznačený má vždy cosi hmotného a nazývá se ***hmotný.***

Místo bodem hmotným poznačené jmenuje se bod ***mathematický.***

Body se znamenají písmenami ku př. obr. 1. bod A, B, C, D.

§. 2. ***Poloha dvou bodů.*** Dva body mohou míti trojí polohu. Buď jsou vedle sebe, jako body A a B; neb jsou nad sebou ku př. bod A a C; anebo leží šikmo jako body A a D, B a D.

Kolikerou polohu mohou míti tři body?

Čáry neb linie.

§. 3. ***Vznik čáry.*** Když se bod nějaký pohybuje a dráha pohybu toho poznačí, vznikne ***čára*** neb ***linie.***

Čárou naznačuje se tedy dráha pohybu a sice ***délka*** dráhy této. Čáry jsou rozsáhlé, dlouhé — mají délku.

Čára hmotou barvicí naznačená nazývá se ***hmotná;*** délka její sluje čára ***mathematická.***

Obr. 2.

U čáry nazývá se bod, z něhož čára vychází, ***bod počátečný*** a ten, jímž se čára končí, sluje bod ***konečný.*** Oba nazývají se vůbec konce.

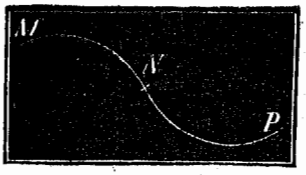
Čáry znamenáme písmenami. Písmeny tyto kladou se v bodech konečných ku př. čára AB obr. 2.

Mimo tyto poznačené body můžeme si v každé čáře mnoho jiných bodů myslit. Body naznačují místa, jimiž čára jde. Pravíme o čáře též, že se jimi vedla, ku př. v obr. 2 body C a D.

§. 4. *Přímka. Křivka. Čáry klikaté a smíšené.* Dráha, kterouž se bod při vzniku čáry pohybuje, nazývá se *směr.*

Je-li směr od počátku až ke konci pohybu tentýž — jednaký, sluje *směr přímý* a čára jmenuje se *čára přímá* neb *přímka* (gerade Linie) ku př. přímka AB obr. 2.

Obr. 3.

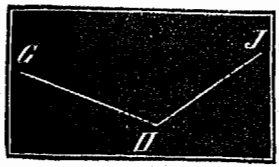


U přímky mají jednotlivé částky stejný směr.

Když se ale směr pohybu od začátku až ke skonu neustále mění, sluje *směr křivý* a čára jmenuje se *čára křivá* neb *křivka* (krumme Linie) ku př. obr. 3. křivka MN, NP.

U křivky mají jednotlivé dílky směr nestejný.

Obr. 4.

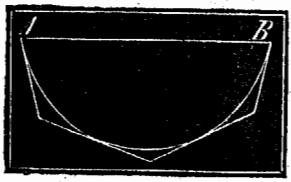


Sestává-li čára z rozličných přímek, nazývá se *přímo-lomená* neb *přímo-klikatá* ku př. čára GJ obr. 4.; sestává-li z několika křivek, sluje *křivo-klikatá*, ku př. čára MP obr. 3.

Čáry, které sestávají z přímek a křivek, nazývají se *smíšené.*

§. 5., *Vlastnost přímky.* Veďme dvěma body A a B přímku, křivku a čáru přímo-klikatou. (obr. 5) —

Obr. 5.



Jestiť patrno, že by se mezi těmato body ještě jiné křivky a čáry klikaté vésti mohly.

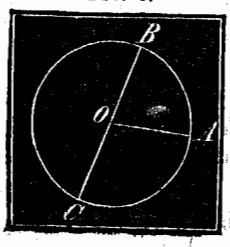
Přímka se mezi nima dá vésti jen *jedna.* Protož pravíme: ***Mezi dvěma body může se jen jedna přímka vésti.***

Jak z obrazce vidíme, je přímka AB menší než křivka, a menší než čára klikatá.

Ze všech čar, kteréž by se mezi dvěma body vésti mohly, bude přímka *nejkratší.* Přímka udává tedy nejkratší vzdálenost dvou bodů.

§. 6. *Čára kruhová neb kruh* (Kreislinie.) Nejdůležitější z křivých čar je *kruh.*

Obr. 6.



Točíme-li přímku OA obr. 6. kolem pevného bodu O tak, až se opět do své prvotní polohy navrátí, opíše se bodem A křivá čára, kteráž se *kruh* nazývá.

V kruhové čáře mají všechny body rovnou vzdálenost od toho bodu, kolem něhož se otáčení dělo. Bod tento jmenuje se střed (Mittelpunkt, centrum). V obr. 6. je bod O středem kruhu. —

Částka čáry kruhové sluje oblouk (Bogen, arcus) ku př. oblouk AB. Celá čára nazývá se *obvod* neb *periferie* (Kreisumfang.)

Přímka ze středu vedená k obvodu sluje *poloměr* (Halbmesser); dva poloměry v přímém směru nazývají se *průměr* (Durchmesser). V obr. 6. je OA poloměr, BC jest průměr.

Každý poloměr udává vzdálenost obvodu a středu. Délky tyto jsou si vesměs rovny.

V kruhu jsou poloměry jakož i průměry sobě *rovny*.

Kruh sestrojuje se kružidlem.

Má se sestrojit kruh 1. určitým poloměrem 2. určitým poloměrem v určitém bodu.

§. 7. *Plochy.* Pohled na rozsáhlou planinu, hladinu vodní, povrch tabule, válce, koule dá nám pojem *o ploše.* (Fläche).

Vznik plochy můžeme si i takto myslit: když se pohybuje v prostoru přímka neb křivka jiným směrem, než jaký sama má, opíše se dráha *dlouhá* a *široká*, totiž *plocha.*

Každá plocha má dvojí rozsáhlost: *šířku* a *délku.* Abysme tedy zvěděli, jak velká je plocha tabule, musíme vědět, jak je tabule široká a dlouhá.

Rozeznáváme dvojí plochy, plochy *přímé* a *křivé.*

Přímá plocha neb *rovina* (ebene Fläche, Ebene) sluje ta, v níž se každým směrem přímky vésti mohou.

Stěna, plocha tabule a stolu, jsou roviny.

Křivá plocha je ta, po níž se buď jen některým směrem přímky vésti mohou, aneb docela vésti nemohou. Povrch klády, válce, koule jsou plochy křivé.

§. 8. *Těleso.* Cožkoli prostor zaujímá, nazývá se *těleso* (Körper). ku př. kníha, bedna, kostka, válec, koule.

Názorem poznáváme, že jsou tělesa se všech stran zaukončená — obmezená. Poznáváme, že má každé těleso určité *lože* (Lage,) dle obmezení jistou podobu — určitý *tvar* (Form) a dle rozsáhlosti určitou *velikost* (Größe).

Tělesa, kteráž smysly svými ku př. hmatem poznáváme, sestávají z hmoty a nazývají se *hmotná* neb *fysická.* Prostor, jejž hmotné těleso zaujímá, sluje těleso *mathematické.*

Těleso mathematické je tedy prostor všestranně obmezený; ku př. prostor v školní světnici je obmezen podlahou, stropem a čtyrmi stěnami.

Každé těleso je částkou prostoru.

Těleso vznikne, když se v prostoru plocha jiným směrem pohybuje, než jaký má sama.

U těles rozeznáváme trojí rozsáhlost: *délku*, *šířku* a *výšku.*

Dle polohy nazývá se často tatáž rozsáhlost *výška*, neb *hloubka* neb *tloušťka;* ku př. světnice je dlouhá, široká a vysoká; příkop je dlouhý, široky a hluboký; deska je dlouhá, široká a tlustá.

Tělesa jsou dle obmezení dvojí; totiž hranatá (eckige) a kulatá (runde).

Tělesa, kteráž jsou jen rovinami obmezena, nazývají se hranatá, ku př. kostka; kulatá jsou obmezena buď rovinami a křivou plochou, ku př. válec; aneb jen plochou křivou, ku př. koule.

§. 9. *Veličiny prostorné.* Tělesa, plochy a čáry jsou rozsáhlé, mají určitou velkost v prostoru; protož nazývají se *veličiny prostorné* (Raumgrößen*).

Učení o veličinách prostorných nazývá se *měřictví* neb *geometrie.*

Měřictví obsahuje tedy náuku o čárách, plochách a tělesech.

Měřictví dělí se na dva díly; tyto jsou: *rovinné plochoměrství* neb *planimetrie* a *tělesoměrství* neb *stereometrie.*

Planimetrie je učení o veličinách prostorných, které se v rovině utvořiti mohou; *stereometrie* obsahuje učení o těch veličinách, které se na jednu rovinu vměstnati nedají, které si v jedné rovině mysliti, představiti nemůžeme.

---

*) Bod nemá žádné rozsáhlosti v prostoru, není tedy veličinou prostornou.

Planimetrie.

I. O přímkách.

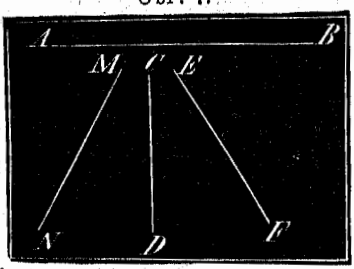
1. Přímky polohou k povrchu země.

§. 10. Dle polohy své k zemi jsou přímky trojí:

1. Vodorovné, rovnovážné (wasserrechte, wagrechte) jsou přímky, ježto mají směr vody stojaté, směr váhových ramen v rovnováze. Takovéto přímky nazývají se též *obzorové* (horizontale.)

2. *Svislé, prostopádné* (vertikale, lothrechte) jsou přímky ve směru těles zavěšených, ve směru těles prosto k zemi padajících.

Obr. 7.



3. Přímky jednou stranou k zemi se klonící jmenují se *šikmé, kosé* (schief neb schräg).

Na tabuli vede se vodorovná přímka přímým směrem od levé k pravé, jako AB v obr. 7.; svislá se vede shora přímo dolů, jako CD. Šikmo se vede přímka buď od levé šikmo k pravé, aneb od pravé šikmo k levé. V obr. 7. je EF šikmá od levé k pravé, MN je šikmá od pravé k levé.

Mají se jmenovat některé předměty, které mají polohu vodorovnou a předměty, které stojí k zemi svisle. —

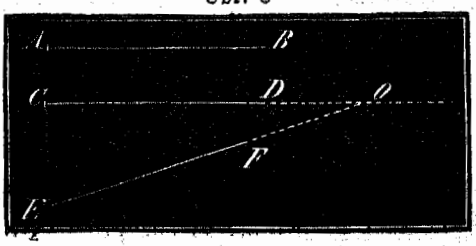
2. Přímky dle vzájemné polohy.

§. 11. Přímky, kteréž běží stále v rovné od sebe vzdálenosti, jmenují se *rovnoběžné* neb *rovnoběžky* (parallel, gleichlaufend); běží-li ale v nerovné od sebe vzdálenosti, nazývají se *nerovnoběžné, různoběžné* neb *různoběžky* (ungleichlaufend).

Různoběžky se jednou stranou k sobě kloní, druhou se však od sebe odchylují.

Známka rovnoběžnosti je ||; známka různoběhu $\wedge$

Obr. 8



Přímka AB v obr. 8. jde rovnoběžně s přímkou CD, AB || CD; přímky CD a EF jsou různoběžné, CD $\wedge$ EF.

Mají se vésti vodorovné, svislé, šikmé rovnoběžky. Jsou v témž místě vodorovné přímky zároveň rovnoběžné? Jdou v témž místě svislé přímky spolu rovnoběžně?

§. 12. ***Průsek dvou různoběžek.*** Prodloužíme-li rovnoběžky, ~~bodu~~ i prodlužky jejich rovnoběžné, jelikož se prodloužením vzájemná vzdálenost přímek těchto nezmění. Prodloužíme-li ale dvě různoběžky tím směrem, jímž se k sobě kloní, protnou se v určitém bodu a bod ten nazývá se bod *protínací*, *průsečný* neb *průsek* × (Durchschnittspunkt). Obr. 8. průsek O přímek CD a EF.

Jelikož se bodem C a O jen jedna přímka CO a bodem E a O taktéž jen jedna přímka EO vésti může, pravíme o přímkách průsečných:

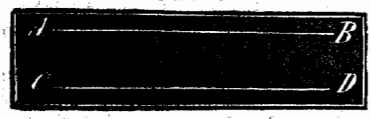
× ***Dvě přímky mohou míti jen jeden společný bod, mohou se jen v jednom bodu séci.***

3. O délce přímek.

§. 13. Vzdálenost konečných bodů sluje ***velkost*** neb ***délka*** přímky. Porovnáme-li délky dvou přímek, mohou délky tyto býti buď ***rovné*** aneb ***nerovné.***

Dvě přímky jsou si rovny, když je vzdálenost konečných bodů jedné přímky tak velká, jako vzdálenost těchže bodů u přímky druhé. Mají-li ale konečné body dvou přímek nerovnou od sebe vzdálenost, nejsou přímky tyto sobě rovny — jsou nerovny.

Obr. 9.



Položme rovné přímky AB a CD (obr. 9.) jednu na druhou dle směru jejich. Položí-li se počátečný bod C přímky CD na počátečný bod A přímky AB, padnou i konečné body D a B na sebe a přímky AB a CD se kryjí.

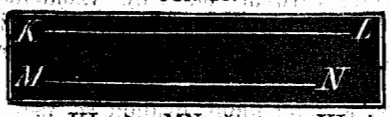
Pročež pravíme: ***Rovné přímky se kryjí; přímky, které se kryjí, jsou sobě rovny.***

Že je přímka AB rovna přímce CD, píše se AB = CD.

Přímky nerovné se krýti nemohou.

Známka nerovnosti je: > aneb <:

Obr. 10.



Věčšina píše se do otvoru, menšina za otvor. Že je přímka KL (obr. 10) věčší než přímka MN aneb, že je MN menší než KL, napíše se takto.

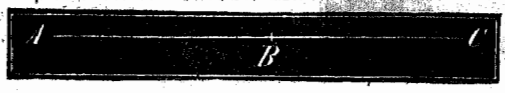
KL > MN, čte se: KL je věčší než MN.
MN < KL, čte se: MN je menší než KL.

Mají se vésti: 1. Dvě rovné rovnoběžky 2. dvě rovné svislé 3. dvě rovné rovnovážné, 4. dvě rovné šikmé rovnoběžky.

4. Počítání přímkami.

§. 14. Přímkami se může tak počítat jako čísly.

Obr. 11.



Prodloužíme-li ku př. přímku AB o délku BC (obr. 11.) je přímka AC ro-

vna oběma přímkám AB a BC dohromady čili přímka AC je rovna *součtu* přímek AB a BC. Je tedy:

AC = AB + BC.

Utne-li se od přímky AC délka BC, zbyde AB co *zbytek* neb *rozdíl* přímek AC a BC, což se takto píše; AB = AC — BC.

Obr. 12.

Vnesou-li se na přímku kružidlem rovné délky AB, BC, CD, DE, (obr. 12.) je délka AC dvakrát, AD třikrát, AE čtyrykrát tak dlouhá jak AB. Tímto způsobem vzniknou 2, 3, 4 . . . *násobné* délky. Je tedy: AC = 2AB, AD = 3 AB, AE = 4 AB.

Na opak obnáší délka AB polovici přímky AC, třetinu délky AD a čtvrtinu délky AE. Je tedy: $AB = \frac{AC}{2} = \frac{AD}{3} = \frac{AE}{4}$

Jak se přímky způsobem měřickým na rovné dílky rozdělují, ukáže se v dalším učení.

Má se sestrojit: 1. přímka rovna součtu tří udaných přímek. 2. přímka rovna rozdílu dvou udaných přímek 3. přímka 2, 3, 4 krát tak velká jak udaná přímka. 4. Z dvou nerovných přímek je menší udána a rozdíl obou, má se vyhledat větší přímka. 5. Z dvou nerovných přímek je větší udána a rozdíl obou, má se vyhledat menší. 6. Je udán třetí, čtvrtý, pátý díl přímky, má se vyhledat délka celé přímky.

5. Měření přímek.

§. 15. K vyměření přímek vezme se určitá délka za jedničku míry (Maßeinheit).

Jedničkou míry délkové je *stopa* neb *střevíc* (Fuß, Schuh.)

Má-li se určitá délka vyměřit, stane se to, když se vyšetří, kolikrát se jednička na ni položit dá. Pravíme, stůl je čtyry stopy dlouhý, tři stopy široký t. j. na délku se dá jednička položit čtyrykrát, na šířku třikrát.

Aby se i menší délky než je střevíc měřiti mohly, dělí se stopa na 12 rovných dílů, ježto se *palce* (Zoll) jmenují. Palec dělí se opět na 12 dílů, — *čárky* neb *linie*.

Míra takto rozdělena sluje *dvanáctinná míra* (Duodecimalmaß). Dle jiné míry rozděluje se střevíc na 10 palců, palec na 10 čárek; míra tato jmenuje se *desetinná* (Decimalmaß).

Větší délky měříme *sáhem* (Klafter).

Dle dvanáctinné míry obnáší sáh 6 střevíců, dle desetinné ale 10.

Sáh, střevíc, palec, čárka znamená se v písmu takto: °, ′, ″, ‴. Píšeme tedy: 5 sáhů, 4 střevíce, 10 palců, 11 čárek takto: 5° 4′ 10″ 11‴.

Dle míry dvanáctinné obnáší sáh:

1° = 6′ = 72″ = 864.‴

Dle míry desetinné:

1° = 10′ = 100″ = 1000.‴

Velké vzdálenosti měříme na míle (Meile). Míle rakouská čítá 4000°, míle zeměpisná obnáší 3912°. —

Mimo uvedené míry užívá se též míra novofrancouzká.

Jednička novofrancouzké délkové míry je *metr*. Měření metrem sluje *metrické*. Metr obnáší 3·1634′ . . anebo 3′ 2″ . . míry rakouské.

Metr rozděluje se dle míry desetinné.

Desátý díl metru sluje *decimetr*; stý díl *centimetr* a tisící díl *milimetr*. —

Má tedy metr 10 decimetrů, 100 centimetrů a 1000 milimetrů.

Délka 10 metrů sluje *dekametr*, 100 metrů *hektometr*.

K měření užívají se měřídka a sice pro věčší délky *sáhovka*, *řetěz měřický*; pro menší délky obnášejí měřídka délku jednoho neb několika střevíců, palců, čárek.

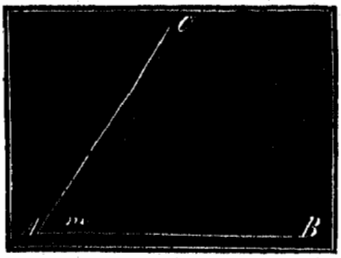
Nemá-li se měření přesně díti, měří se často na kroky. —

II. O úhlu.

1. Vznik úhlu.

§. 16. Když se vedou z téhož bodu A (obr. 13.) dvě přímky AB a AC aneb, když se dvě přímky v témž bodu setkají, vznikne mezi směry obou přímek odchylka. Velkost odchylky této jmenuje se *úhel* (Winkel).

Obr. 13.



Úhel je tedy *odchylka směrů dvou z téhož bodu vycházející přímek* anebo jinak, *úhel je odchylka směrů dvou přímek, kteréž se v témž bodu setkaly.*

Obě přímky AB a AC nazývají se *ramena* (Schenkel) a bod A, z něhož obě přímky vycházejí, sluje *vrchol* (Scheitel).

V písmě znamená se úhel známkou ∢, a poznačuje se buď jen jednou písmenou aneb třemi.

Má-li se úhel jen jednou písmenou poznačit, klade se písmena ta buď do otvoru aneb při vrcholu úhlu. Do otvoru klade se obyčejně písmena malá. Píšeme tedy buď ∢ m aneb ∢ A.

Poznačí-li se úhel třemi písmenami, čte a píše se písmena, kterouž se vrchol poznačí, uprostřed písmen, jimiž se poznačily konce ramen. Čte a píše se tedy: ∢ BAC neb ∢ CAB.

2. O velkosti úhlu.

§. 17. Když ramena úhlu prodloužíme, nezmění se odchylka směrů ve vrcholu úhlu toho, a jelikož se odchylka ta úhlem nazývá, pravíme: *Úhel se nezmění, když ramena jeho prodloužíme.*

Jestliže se ale ramena od sebe odkloní aneb k sobě přikloní, změní se odchylka a tudyž i úhel. Pravíme: *Úhel se změní — zvěčší neb zmenší — jestliže se ramena od sebe odkloní aneb k sobě přikloní.*

Velkost úhlu závisí tedy jen na odchylce ramen jeho.

Dva úhly jsou sobě *rovny*, když jsou ramena jejich od sebe

stejně odkloněná; jsou-li ramena od sebe nestejně odkloněná, nejsou úhly sobě rovny — jsou *nerovny*.

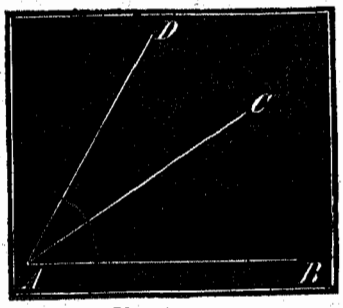
Položí-li se dva rovné úhly na sebe vrcholem a jedním ramenem, padnou na sebe i druhá ramena; úhly se skryjí. Pročež pravíme: ***Rovné úhly se kryjí, když se náležitě na sebe položí. Úhly, které se kryjí, jsou rovny.***

Nerovné úhly se krýti nemohou.

3. Jak se úhly počítá?

§. 18. Úhly může se rovněž tak počítat jako čísly.

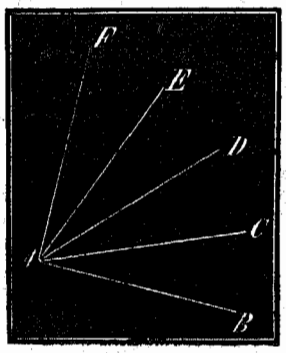
Obr. 14.



Pohybuje-li se rameno AC úhlu BAC (obr. 14). až zaujme polohu AD, vznikne úhel BAD a úhel tento rovná se úhlům BAC a CAD dohromady, nebo jinak, je roven *součtu* úhlů těchto. Je tedy: BAD = BAC + CAD

Pohybuje-li se rameno AD úhlu BAD dolů k ramenu AB až zaujme směr AC, zbyde úhel BAC. Úhel BAC je *rozdílem* úhlů BAD a CAD; je tedy BAC = BAD — CAD.

Obr. 15.



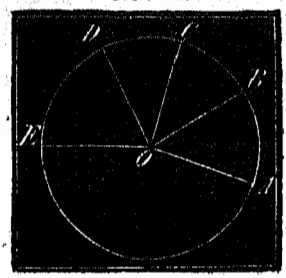
Úhly BAC, CAD, DAE, EAF buďtež sobě rovny, (obr. 15.) Jestiť patrno, že je úhel BAD = 2. BAC, úhel BAE = 3. BAC, úhel BAF = 4. BAC.

Na opak je úhel BAC $= \frac{BAD}{2} = \frac{BAE}{3} = \frac{BAF.}{4}$

Úhly mohou se tedy sčítat i odčítat, násobit i dělit.

4. Souvislost úhlu s obvodem kruhovým.

Obr. 16.



§. 19. Sestrojíme-li v kruhu (obr. 16.) dvěma poloměry OA a OB úhel AOB a točíme-li poloměr OB tak, až zaujme polohu OC, OD, OE, vzniknou rozličné úhly.

Ku každému úhlu připadá určitý oblouk; čím věčší úhel, tím věčší připadlý oblouk.

Jsou-li úhly BOC a COD sobě rovny a položí-li se na sebe, kryjí se. (§. 17.) Poněvadž jsou ramena OB a OD sobě rovny — co poloměry kruhu — kryjí se též, bod

B padne na bod D, a jelikož mají oblouky BC a CD v každém bodu rovnou vzdálenost od středu O, kryjí se taktéž — jsou si rovny. Pročež pravíme: „*K rovným úhlům náležejí rovné oblouky; k rovným obloukům rovné úhly.*“

5. Měření úhlů.

§. 20. Úhly měříme obloukem kruhu.

Celý obvod kruhu rozděluje se totiž na 360 rovných dílů, ježto se *stupně* obloukové nazývají.

Rozdělíme-li obvod tím způsobem a vedeme-li k bodům rozdělovacím poloměry, vznikne 360 malých, rovných úhlů. Jeden takový úhel nazývá se též *stupeň* a sice *stupeň úhlový* (Winkelgrad). Stupeň úhlový je jedničkou *míry úhlové.*

Měl-li by se nějaký úhel vyměřit, musilo by se vyšetřit, kolikrát jednička míry v něm obsažena jest. Takovéto měření jmenovalo by se měření *bezprostředné.* Pohodlněji se však měří úhel *prostředečně* — obloukem kruhu. Pravíme totiž: *Každý úhel má tolik stupňů (úhlových), kolik má stupňů (obloukových) oblouk k němu připadlý,* t. j. *mezi ramenama jeho rozpjatý.*

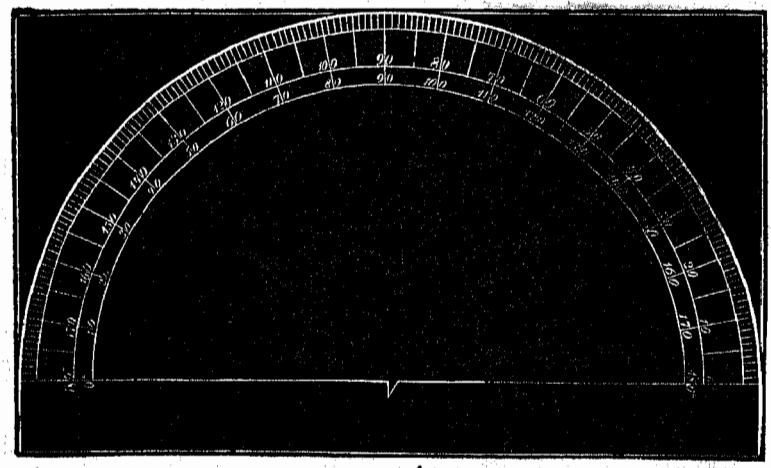
Má-li ku př. oblouk 30, 40, 50 stupňů má tolik stupňů i úhel.

Jak úhlový, tak se dělí i obloukový stupeň na 60 rovných dílů — *minuty,* minuta též na 60 — *sekundy.*

V písmě poznačují se stupně, minuty a sekundy takto: 20° 40′ 50″ a čteme 20 stupňů, 40 minut a 50 sekund.

Měření koná se *úhloměrem* (Winkelmesser, transporteur). obr. 17.

Obr. 17.



Má-li se úhel úhloměrem vyměřit, položí se úhloměr vroubkem na vrchol úhlu; s jedním ramenem srovná se tak, až se skryjí a hledí se, ku kterému dílku na rozměru druhé rameno úhlu připadá. S té strany, kde se úhloměr na rameno položil, se pak na rozměru stupně čítají.

6. Tvary úhlů.

§. 21. Pohybuje-li se v kruhu poloměr OB z polohy OA polohami OC, OD, OE a OF, vzniknou rozličné úhly, obr. 18.

Úhel AOB je menší než úhel AOC. Úhel AOC obnáší čtvrtý díl celého obvodu, tedy $\frac{360^\circ}{4}$, což se rovná 90^0.

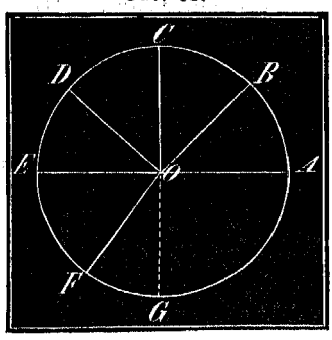
Úhel AOC obnáší tedy 90 stupňů; úhel takový nazývá se *pravý* (rechter Winkel).

Úhel AOB, jenž je menší pravého AOC, jmenuje se *ostrý* (spitziger Winkel).

Úhel AOD je větší než pravý úhel AOC, obnáší tedy více než 90° a nazývá se *tupý* (stumpfer Winkel.)

Přidáme-li k úhlu AOD úhel DOE, povstane úhel, jehož rameno mají směr přímopříčný. Úhel takový obnáší dva pravé, tedy 180^0 a sluje *úhel přímý* (gerader, gestreckter Winkel).

Obr. 18.



Pohybuje-li se poloměr z polohy OA až k poloze OF, utvoří se velký úhel AOF, jenž je větší než úhel přímý a více obnáší než 180^0. Úhel takový nazývá se *vypuklý* (erhabener Winkel).

Úhel, který obnáší méně než 180°, jmenuje se vůbec *úhel dutý* (hohler Winkel).

Jsou tedy úhly: *duté* a *vypuklé* (konkav, konvex).
Duté jsou: ostrý, pravý, tupý.
Ostrý a tupý úhel jmenují se též *úhly kosé* (schiefe Winkel).
Mají se od ruky sestrojit: ostrý, pravý, tupý a vypuklý úhel. —

7. Sestrojení úhlů.

§. 22. Úhloměrem se mohou úhly měřit i sestrojit.

Má-li se úhloměrem určitý úhel sestrojit, vede se přímka, na ni položí se úhloměr středem na ten bod, jenž vrcholem úhlu býti má. Na rozměru se vyhledá úhel a u posledního dílku udělá se tečkou znaménko, ježto se pak s vrcholem spojí.

Mají se sestrojit úhly: 20°, 30^0, 40^0, 60°, 80° 90°. —

Mají se libovolně úhly sestrojit (od ruky) a úhloměrem vyměřit. —

Má se úhel sestrojit, jenž se rovná součtu, rozdílu dvou udaných úhlů.

Je udán rozdíl dvou nerovných úhlů a menší úhel; má se vypočísti a sestrojit úhel větší. Je udán rozdíl a větší úhel, má se vypočíst a sestrojit menší.

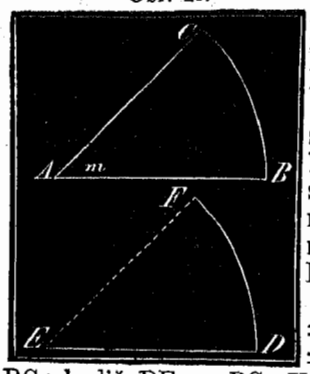
Je udán úhel, má se sestrojit 2, 3, 4 krát tak velký.

Má se sestrojit 2, 3, 4, 6-tý díl úhlu 120^0.

Má se k udanému úhlu sestrojiti rovný.

§. 23. Jak z předešlého učení (§. 19.) víme, náležejí k rovným oblouků rovné úhly. Sestrojímeli týmž poloměrem z bodů A a E (obr. 19.) dva rovné oblouky BC a DF, jsou úhly BAC a DEF sobě rovny.

Obr. 19.



Má-li se tedy k udanému úhlu *m* sestrojit rovný, vyhledá se nejprvé oblouk, jakýž k úhlu tomu náleží. To se stane, když se z vrcholu A délkou AB co poloměrem opíše oblouk až protne druhé rameno v bodu C. Oblouk ten budiž oblouk BC.

Když se oblouk vyhledal, vede se DE = AB; z bodu E se opíše poloměrem ED = AB oblouk a učiní se rovným oblouku BC; budiž DF = BC. Vede-li se EF, je úhel DEF = BAC = m.

Má se k ostrému a tupému úhlu sestrojit rovný.

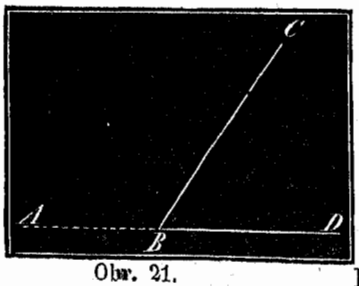
Jak by se sestrojil úhel, jenž by se rovnal součtu a rozdílu dvou udaných úhlů?

Poznam. Výkon předešlý může se poněkud zjednodušit. Jestiť patrno, že se jedná při úhlu DEF o nález bodu F. Bod tento se vyhledá, opíšemeli délkou oblouku z bodu D a poloměrem ED z bodu E průsečné oblouky. Průsek je bod F.

8. Úhly vedlejší.

§. 24. Prodloužíme-li u úhlu CBD vrcholem B jedno rameno ku př. BD až k bodu A (obr. 20), povstanou dva úhly ABC a CBD, kteréž *vedlejší* nazývají (Nebenwinkel). —

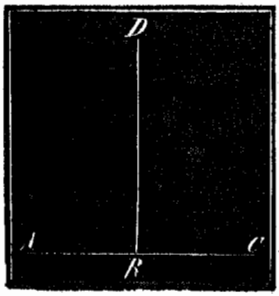
Obr. 20.



Vedlejší úhly mají spolně jedno rameno a vrchol, druhá ramena leží na příč v přímé čáře.

Vedlejší úhly činí vždy úhel přímý, obnášejí tedy dohromady 180°.

Obr. 21.



Když je úhel CBD = 60°, 70°, 90°, 100°, mnoho-li obnáší úhel ABC?

K úhlu ostrému připadá vedlejší tupý, k pravému pravý a k tupému ostrý. —

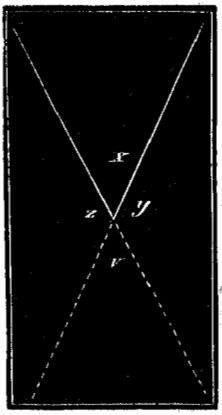
Stojí-li jedna přímka k druhé tak, že s ní tvoří pravé vedlejší úhly, nazývá se přímka ta ***kolmá, kolmice*** (Senkrechte) a pravíme, že stojí k druhé ***kolmo***, ku př. přímka DB (obr. 21) stojí kolmo (⊥) k přímce AC a sice v bodu B. Oba úhly DBA a DBC jsou pravé a tedy sobě rovny.

Jsou-li vedlejší úhly nerovné, stojí přímka k druhé *šikmo* V (schief), ku př. (obr. 20) BC V CD
Jak leží rovnovážná k svislé?

9. Úhly vrcholové.

§. 25. Prodloužíme-li u úhlu vrcholem obě ramena, povstanou čtyry úhly, z nichž se na kříž ležící nazývají *vrcholové* neb *křížové* (Scheitelwinkel) ku př. *z* a *y x* a *v*.

Obr. 22.



Úhly vrcholové mají společný vrchol, — a ramena jejich leží na příč v přímé čáře.

Úhly x + y (obr. 22) činí 180°; přidáme-li k úhlu y úhel v, činí (y + v) taky 180°. Z toho vysvitá, že je úhel x = v; jelikož se jak jedním, tak druhým týž úhel y na 180° vyplňuje t. j.

Vrcholové úhly jsou si rovny.

Jelikož x + y = 180° a z + v = 180°, je tedy: x + y + z + v = 360° t. j.

Součet všech vrcholových úhlů obnáší 360° neb čtyry pravé.

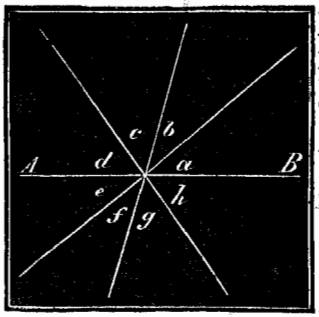
Známe-li z křížových úhlů jeden, vypočítáme dle vlastností úhlů těchto i druhé úhly. Je-li x = 40°, je v = 40°; y = 140° = z.

Je-li z křížových úhlů jeden pravý jsou všechny pravé.

10. Úhly kolem jednoho bodu.

§. 26. Protíná-li se vícero přímek v společném bodu, povstanou kolem bodu toho rozličné úhly, z nichž však ty, kteréž na jedné straně též přímky leží, 180° obnášejí, jelikož tvoří dohromady úhel přímý, ku př. (obr. 23.) $a + b + c + d = 180°$.

Obr. 23.



Úhly na druhé straně přímky AB činí taktéž přímý úhel neb 180°.

Součet dolejších a hořejších úhlů činí tedy 360°, protož pravíme:

Všechny úhly kolem jednoho bodu obnášejí dohromady 360° čili čtyry pravé.

Které úhly v obr. 23. jsou si rovny?

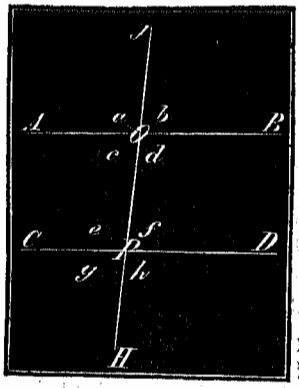
11. Úhly protilehlé, střídnolehlé a přilehlé.

§. 27. Vedeme-li dvě přímky a přes obě průsečnou, (obr. 24) utvoří se osm úhlů, kteréž dle polohy své zvláštní jména mají.

Nejprvé jsou úhly zevnitřní a vnitřní.

Zevnitřní jsou *a b g h*;
vnitřní: *c d e f*.
Dále rozeznáváme po dvou:

Obr. 24.



1. Úhel zevnitřní a vnitřní na též straně přímky protínací, ale v rozdílných vrcholech, nazývají se úhly *protilehlé* neb *protější* (Gegenwinkel); jsou tedy protilehlé: *a e, b f, c g, d h*

2. Dva vnitřní aneb dva zevnitřní na rozdílných stranách přímky protínací a v rozdílných vrcholech nazývají se úhly *střídnolehlé* neb *střídné* (Wechselwinkel); jsou tedy střídné úhly: *c f, d e, a h, b g*.

3. Dva vnitřní aneb dva zevnitřní na též straně přímky protínací, ale v rozdílných vrcholech jmenují se *přilehlé* (Anwinkel); jsou tedy přilehlé: *a g, b h, c e, d f*.

§. 28. ***Rovnoběžky s průsečnou.*** Jsou-li přímky AB a CD rovnoběžné a protíná-li obě přímka JH v bodech O a P, (obr. 24) jsou odchylky směrů OB a PD od přímky JH v bodech O a P rovné; neboť posmyká-li se rovnoběžka AB ve směru protínací přímky HJ dolů tak, že se při tom směr její nezmění, padne z cela do směru druhé rovnoběžky CD, jak mile průsečný bod O padne na průsek P.

Úhly *a* a *e*, *b* a *f* se skryjí a jsou si tedy rovny.

Taktéž je $g = c$, $h = d$.

1. Mezi rovnoběžkama jsou protilehlé úhly sobě rovny.

Jelikož je $b = f$ a $h = c$, je $f = c$, jakož i $d = e$, $a = h$ $b = g$ t. j.

2. Když se přímkou protnou dvě rovnoběžky, jsou střídné úhly sobě rovny.

$b + d = 180^0$, jelikož je $b = f$, je $f + d = 180^0$; taktéž je $c + e = 180^0$, $a + g = 180^0$ t. j.

3 Přilehlé úhly mezi rovnoběžkama obnášejí po dvou dva pravé neb ***180°***.

Protnou-li se tedy přímkou dvě rovnoběžky, jsou si rovny:

1. Úhly protilehlé 2. úhly střídnolehlé a 3. přilehlé úhly obnášejí po dvou dva pravé neb 180°.

Známe-li v průseku dvou rovnoběžek jeden úhel, vypočítáme dle vlastností těchto všechny ostatní úhly. Je-li ku př. $b = 70°$, obnáší úhel *f* též 70°; úhel $d = 110^0$ atd.

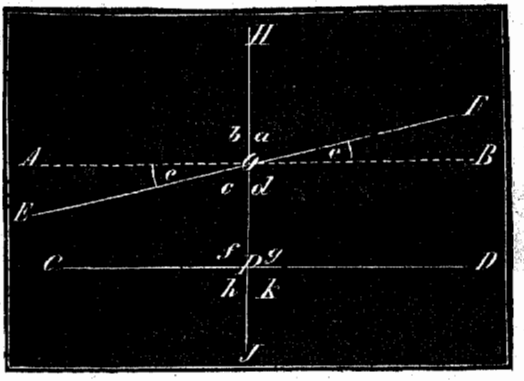
§. 29. ***Různoběžky s průsečnou.*** Protnou-li se různoběžky CD a EF. obr. (24.) přímkou HJ v bodech O a P a jde-li bodem O s přímkou CD rovnoběžně přímka AB, je dle §. 28.

$k = d$, $(a + e) = g$.
$d = f$, $(c + e) = g$.

$f + (c + e) = 180^0$, $d + g = 180^0$.
Porovnáme-li však úhly mezi různoběžkama, je:
$(d + e) > k$.
$c < g$,
$(d + e) + g > 180^0$ a $(F + c) < 180^0$.

Protnou-li se tedy přímkou dvě různoběžky, jsou nerovny: 1. Úhly protilehlé 2. úhly střídnolehlé a 3. úhly přilehlé jsou buď menší, aneb větší než 180°.

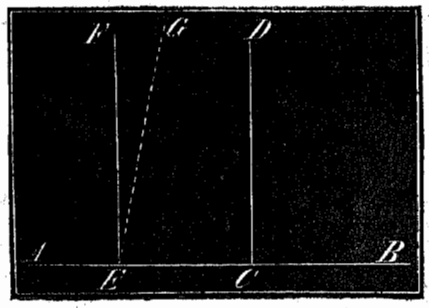
Obr. 25.



§. 30. *Sousledy.* Z předešlého učení v § 28 a 29 vysvitá dále: ***Protnou-li se přímkou HJ (obr. 24.) dvě přímky AB a CD a jsou-li rovny buď úhly protilehlé, aneb úhly střídnolehlé aneb obnášejí-li přilehlé úhly po dvou dva pravé, jsou přímky AB a CD rovnoběžné, neboť by jinak té rovnosti nebylo.***

Stojí-li tedy dvě přímky CD a EF obr. 26 k též přímce AB kolmo, jsou přímky tyto rovnoběžné.

Obr. 26.



Když stojí mezi dvěma rovnoběžkama přímka kolmá, udává se tou kolmou vzdálenost rovnoběžek; tak je (v obr. 26) EC vzdálenost rovnoběžek EF a CD.

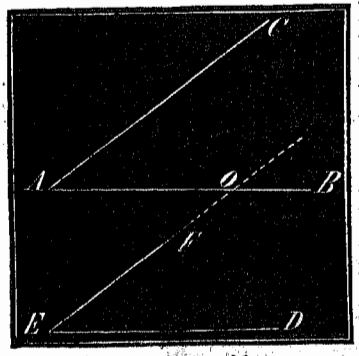
2. ***Protnou-li se přímkou HJ obr. 25 dvě přímky EF a CD a jsou-li nerovny buď úhly protilehlé, aneb úhly střídnolehlé aneb jsou-li úhly přilehlé buď > aneb < 180°, jsou přímky EF a CD různoběžné, neboť, kdyby byly rovnoběžné, nemohly by úhly ty býti nerovné.***

Stojí-li tedy z dvou přímek CD a EG (obr. 26) k též přímce AB jen jedna kolmo, jsou přímky ty různoběžné.

Mohla by se mezi dvěma různoběžkama vésti nějaká přímka tak, aby stála k oběma různoběžkám kolmo?

§. 31. *Úhly, jichž ramena jsou vzájemně rovnoběžná.* Úhly

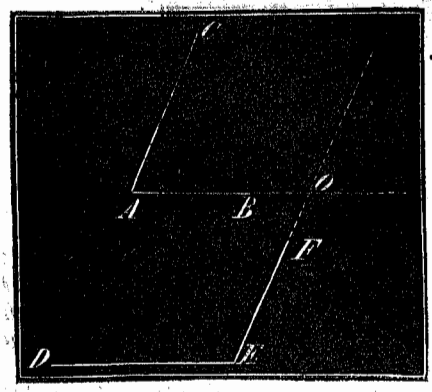
Obr. 27.



BAC a DEF (obr. 27) mají ramena vzájemně rovnoběžná. Prodloužíme-li EF až k průseku O ramena AB, je úhel ABC = AOE = DEO neb DEF.

Úhly BAC a DEF (obr. 28.) mají taktéž ramena vzájemně rovnoběžná Prodloužíme-lí ramena AB a EF až k průseku O, je úhel CAB = AOE; úhel BOE + DEF = 180° a dáme-li místo BOE rovný CAB, je CAB + DEF = 180°.

Obr. 28.



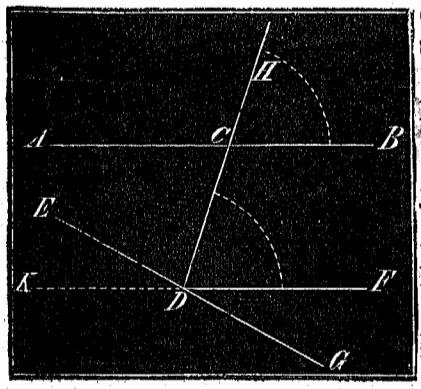
Mají-li tedy dva úhly ramena vzájemně rovnoběžná, jsou si buď rovny aneb obnášejí součtem 180°. Jsou si rovny když jsou nesměrně

Jdou-li totiž ramena stejnosměrně, jsou úhly ty rovny; mají-li ramena směr nestejný, obnášejí úhly součtem dva pravé.

§. 32. *Má se bodem D (obr. 29) vésti přímka rovnoběžná s přímkou AB.*

Vede se daným bodem D přímka DH libovolně tak, aby přímku AB protala ku př. v bodu C. V bodu D sestrojí se úhel CDF rovný úhlu BCH a přímka DF se prodlouží.

Obr. 29.



Přímka FK jde rovoběžně s přímkou AB, poněvadž jsou protilehlé úhly sobě rovny.

Vedeme-li bodem D ještě jinou přímku EG, je úhel CDG > CDF a protož též větší než úhel BCH. Přímka EG je ∧ k přímce AB. —

Taktéž by nešla všeliká jiná přímka rovnoběžně s přímkou AB, byť bysme ji bodem D jakkoli vedli, protož pravíme:

Daným bodem může s danou přímkou jen jedna přímka rovnoběžně jíti.

Úlohy.

1. Veďte rovnovážnou přímku, protněte ji přímkou svislou. Jak stojí přímky ty k sobě, jaké činí spolu úhly?

2. Veďte přímku rovnovážnou, protněte ji přímkou šikmou. Kolik se utvoří úhlů? Jaké jsou úhly ty o sobě? Vyměřte úhloměrem z nich jeden a vypočítejte ostatní.

3. Veďte svislou přímku, protněte ji přímkou šikmo. Kolik vznikne úhlů? Udejte tupé úhly, vyměřte úhloměrem jeden tupý a vypočtěte ostatní úhly.

4. Sestrojte úhel libovolně, sestrojte k němu jiný rovný nejprvé od ruky a pak dle návodu měřického.

5. Sestrojte úhloměrem úhly 10°, 15°, 20°, 25°; sestrojte jiné 2 3, 4-krát tak velké dle návodu měřického.

6. Sestrojte úhel libovolně; sestrojte zároveň jiný, anž je 2, 3-krát tak velký. Vykonejte úlohu tuto nejprvé od ruky a pak dle návodu měřického.

7. Veďte dvě rovnovážné, protněte je přímkou svislou. Kolik vznikne úhlů? Jaké jsou to úhly?

8. Veďte dvě svislé, protněte je rovnovážnou; kolik vznikne úhlů a jaké jsou to úhly?

9. Veďte dvě šikmé rovnoběžky, protněte je přímkou svislou. Kolik vznikne úhlů? Pojmenujte všechny úhly; jmenujte úhly zevnitřní a vnitřní. Udejte všechny protilehlé, střídnolehlé a přilehlé úhly; vyměřte jeden úhel a vypočítejte ostatní.

10. Veďte rovnovážnou, protněte ji šikmo dvěma rovnoběžkama; pojmenujte všechny úhly, udejte proti — střídno — a při-lehlé úhly. Vyměřte pak úhloměrem jeden úhel a vypočítejte ostatní.

11. Veďte přímku svislou, protněte ji šikmo dvěma rovnoběžkama. Pojmenujte, udejte a vypočtěte všechny úhly.

12. Veďte přímku libovolně, sestrojte od ruky jinou tak, aby šly spolu přímky ty rovnoběžně. Protněte obě od ruky tak, aby průsečná s nima činila úhly pravé.

13. Veďte přímku libovolně, protněte ji pravoúhelně. Některým bodem přímky protínací veďte k proťaté přímce rovnoběžku nejprvé od ruky a pak dle návodu měřického.

14 Veďte přímku, protněte ji šikmo. Některým bodem přímky protínací veďte k proťaté přímce rovnoběžku, nejprvé od ruky a pak dle návodu měřického. Ve výkonu tom mají se upotřebiti a) úhly střídné, b) úhly protilehlé.—

15. Sestrojte úhly libovolně a k úhlům těm sestrojte jiné od ruky tak, aby byly ramena jejich na vzájem rovnoběžná a sice a) stejnosměrně b) nestejnosměrně.

16. Sestrojte úhel libovolně; v otvoru úhlu toho veďte od ruky k oběma ramenům rovnoběžky. Jak budou přímky ty k sobě? Protnou se jednou stranou? Bude úhel v průseku roven úhlu, jejž jste zprvu sestrojili?

17. Sestrojte úhel libovolně; v otvoru úhlu toho veďte z libovolného bodu od ruky rovnoběžky k ramenům úhlu toho a sice nejprvé stejnosměrně a pak nestejnosměrně. V kterém z obou případů bude vzniklý úhel roven úhlu, jejž jste sestrojili? Mnoho-li budou dohromady obnášet v případu druhém úhel daný (sestrojený) a úhel nově vzniklý? Vyměřte úhel daný a vypočítejte, mnoho-li obnáší úhel nově vzniklý (v případu druhém).

18. Veďte dvě různoběžky, mezi nima veďte ku každé jednu rovnoběžku. Budou přímky ty k sobě taky různoběžné? Veďte ty přímky tak, aby se proťaly. Kolikkrát se může přímka přímkou protít? Bude úhel v průseku roven tomu úhlu, jejž by dané různoběžky spolu činily, až k průseku prodlouženy jsouce?

19. Veďte dvě různoběžky, mezi nima veďte z libovolného bodu ku každé jednu rovnoběžku; u vzniklého úhlu prodlužte vrcholem jedno rameno. Kolik se utvoří úhlů a jaké jsou to úhly? Vyhledejte, který je z nich roven úhlu, jejž by dané různoběžky spolu v průseku činily.

20. Veďte mezi dvěma různoběžkama k některé z nich rovnoběžku; prodlužte přímku tuto tak, až protne druhou z daných různoběžek. Jaké vzniknou v průseku úhly a který je z nich roven tomu úhlu, jejž by různoběžky v prů-

seku činily? Může se tedy vyhledat úhel dvou různoběžek i tehdáž, když by se přímky ty až k průseku prodloužiti nemohly? Udejte, jak by se taková úloha vykonala.

21. Veďte tři rovnoběžky, protněte je všechny přímkou šikmo. Kolik bude průseků, kolik úhlů vznikne celkem. Pojmenujte všechny úhly a vyhledejte rovné úhly z prvního a třetího vrcholu, vyměřte úhloměrem jeden úhel a vypočítejte všechny ostatní.

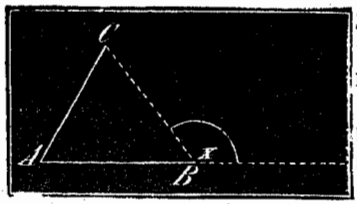
22. Veďte dvě průsečné, se křížící přímky; k přímkám těmto veďte bodem libovolným rovnoběžky. Kolik vznikne úhlů v obou vrcholech dohromady? Které z úhlů těch jsou sobě rovny? Oběma vrcholy veďte přímku neurčitě. Kolik úhlů přibyde přímkou tou? Pojmenujte všechny úhly, vyhledejte úhly rovné, vyměřte jeden úhel a udejte všechny ostatní úhly v obou vrcholech. —

III. O trojúhelníku.

1. Vznik a částky trojúhelníka.

§. 33. Rovina čárami obmezená nazývá se *obrazec* (Figur). Rovina přímkami obmezená sluje *obrazec přímočárný* (geradlinige Figur.) Přímky, jimiž se obrazec obmezuje, jmenují se strany (Seiten). Aby se rovina všestranně obmezila, je zapotřebí nejméně tří stran.

Obr. 30.



Dvěma přímkama AB a AC (obr. 30.) se rovina všestranně obmeziti nemůže. Spojíme-li bod C s bodem B obmezíme všestranně rovinu ABC.

Obrazec třemi přímkami obmezený nazývá se *trojúhelník* (Dreieck). Značí se známkou: △.

Trojúhelník sestává ze šesti částek; má totiž tři úhly a tři strany. Úhly při stranách jmenují se *přilehlé* (anliegend); třetí nazývá se pak *protilehlý* neb *protější*, (gegenüberliegend).

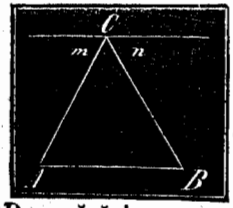
V trojúhelníku ABC (obr. 30.) jsou úhly B a C při straně BC úhly přilehlé, úhel A je úhel protilehlý. —

2. Úhly v trojúhelníku.

§. 34. Prodloužíme-li u trojúhelníka některou stranu, utvoří se úhel, jenž se nazývá *zevnitřní* (äußerer Winkel); úhly v trojúhelníku jmenují se *vnitřní* (innere Winkel).

Prodlouží-li se AB (obr. 30.), je úhel x úhel zevnitřní.

Obr. 31.



§. 35. *Úhly vnitřní.* Vedeme-li (obr. 31) vrcholem úhlu C trojúhelníka ABC k protější straně AB rovnoběžku, vzniknou v bodu C mimo vnitřní úhel *c* úhly *m* a *n*.

Úhly *m*, C, *n* tvoří dohromady úhel přímý. Je tedy:

$$C + m + n = 180^0.$$

Úhly *m* a *n* jsou střídnolehlé k úhlům A a B, pročež je $m = A$, $n = B$.

Dáme-li tedy místo úhlu *m* rovný A, místo úhlu *n* rovný B, je součet:

$C + A + B = 180^0$. t. j.:

V trojúhelníku obnáší součet úhlů vnitřních 180⁰ neb dva pravé úhly.

Známe-li v trojúhelníku jeden úhel, vyhledá se součet obou druhých odčítáním třetího úhlu od 180°.

Je-li $C = 40^0$, je $A + B = 180^0 - 40^0 = 140^0$

Známe-li dva úhly, vypočítá se úhel třetí, když se součet obou známých úhlů od 180^0 odečte.

Je-li $A = 68^0$, $B = 87^0$, je $C = 180^0 - (68 + 87) = 25^0$. Mnoho-li obnáší úhel C, když je $A = 80^0$, $B = 73^0$; $A = 86^0$, $B = 79^0$; $A = 74^0$, $B = 78^0$.

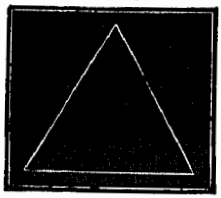
Z věty této vysvitá dále:

1. *V trojúhelníku je součet dvou úhlů vždy menší než 180°.*

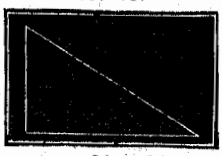
Mohou-li býti tedy v trojúhelníku dva pravé anebo dva tupé úhly?

2. *Jsou-li u dvou trojúhelníků dva úhly vzájemně rovné jsou i třetí úhly sobě rovny.*

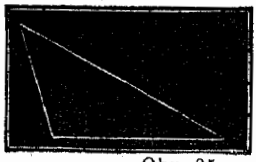
Obr. 32.



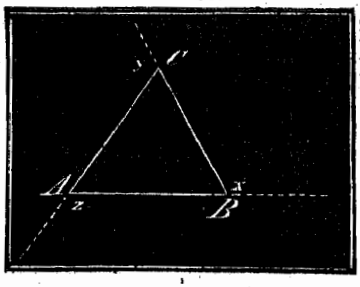
Obr. 33.



Obr. 34.



Obr. 35.



§. 36. ***Trojúhelníky dle úhlů.*** Dle úhlů rozvrhují se trojúhelníky v ***ostroúhelné*** (spitzwinklig) (obr. 32), ***pravoúhelné*** (rechtwinklig) obr. 33. a ***tupoúhelné*** (stumpfwinklig) obr. 34.

Trojúhelník ostroúhelný má samé ostré úhly; pravoúhelný má jeden pravý úhel a druhé dva jsou ostré. Trojúhelník tupoúhelný má jeden tupý úhel a dva ostré.

V trojúhelníku pravoúhelném obnášejí oba ostré úhly dohromady 90°. Známe-li tedy jeden, vypočítá se odčítáním od 90° úhel druhý.

V trojúhelníku tupoúhelném obnášejí oba ostré úhly součtem méně než 90°. Nemůže se tedy udáním jednoho vypočítat druhý.

Sestrojte od ruky ostroúhelné, pravoúhelné a tupoúhelné trojúhelníky.

§. 37. ***Úhly zevnitřní.*** Prodloužíme-li v trojúhelníku ABC (obr. 35.) každou stranu jedním směrem, utvoří se tři zevnitřní úhly *x*, y, *z*.

Jak z obrazce vysvitá činí úhlel *x* a B dohromady přímý úhel; je tady:

$x + B = 180^0$

Jelikož je součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku roven 180^0 totiž;

A + C + B = 180°; rovná se úhel x velkostí úhlům A + C, protož pravíme:

„Úhel zevnitřní je roven oběma vnitřním protilehlým dohromady.“

Vnitřní protilehlé úhly jsou tedy o sobě menší než úhel zevnitřní anebo jinak, úhel zevnitřní je věčší než vnitřní protilehlé úhly o sobě.

Známe-li oba vnitřní protilehlé, dá součet jejich úhel zevnitřní. Je-li A = 64°, C = 48°, je zevnitřní úhel x = 64° + 48° = 112°.

Jak velký je zevnitřní úhel, když obnáší A 70°, C 65°?

§. 38. *Součet úhlů zevnitřních.* Jelikož je úhel zevnitřní roven součtu obou vnitřních protilehlých, je tedy:

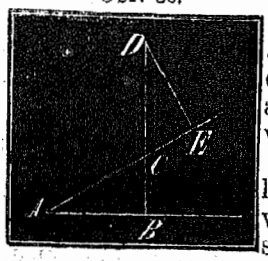
x = A + C
y = A + B
z = B + C

Součet zevnitřních úhlů x, y, z bude tedy:

x + y + z = 2 A + 2 B + 2 C.
A + B + C = 180° (§. 35.)
pročež je:
x + y + z = 2.180° = 360° t. j.:

„U trojúhelníka obnáší součet všech zevnitřních úhlů 360°, neb čtyry pravé úhly.“

Obr. 36.



§. 39. Vedeme-li k ramenům úhlu A (obr. 36.) z bodu vnějšího D, totiž z bodu, jenž je za otvorem úhlu toho, přímky DE kolmo k AE a DB kolmo k přímce AB, vzniknou dva pravoúhelné trojúhelníky ABC a CDE.

Tyto trojúhelníky mají vzájemně rovné úhly; je totiž E = B = 90° a vrcholové úhly v bodu C jsou též rovny. Jsou tedy i třetí úhly sobě rovny, totiž úhel A = D; pročež pravíme:

„Když se vedou k ramenům daného úhlu z bodu vnějšího kolmé, je úhel mezi kolmými onomu úhlu roven.“

3. Strany trojúhelníka.

§. 40. Jak z učení o přímce víme, je délka AB (obr. 35.) menší než čára klikatá AC + CB. Pravíme tedy:

„V trojúhelníku jsou dvě strany dohromady t. j. *součet dvou stran vždy věčší než strana třetí* anebo jinak, *v trojúhelníku jest jedna strana vždy menší než součet obou druhých.“*

Je tedy: AC + CB. > AB neb
AB < AC + CB.

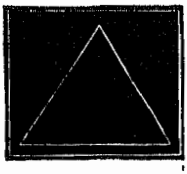
Odečte-li se od nerovnosti této délka CB, bude:

AB — CB < AC.

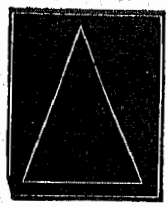
V trojúhelníku je rozdíl dvou stran vždy menší než strana třetí.

§. 41. *Trojúhelníky dle stran.* Dle stran jsou trojúhelníky trojí: *rovnostranné* (gleichseitig) (obr. 37.), jsou-li všecky strany sobě rovny; *rovnoramené* (gleichschenklig) (obr. 38), když jsou jen dvě strany rovné; *nerovnostranné*, když jsou všecky strany nerovné (obr. 39.)

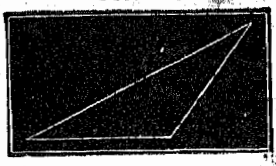
Obr. 37.



Obr. 38.



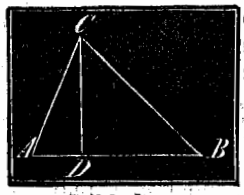
Obr. 69.



Strany trojúhelníka pravoúhelného mají vžláštní jmena. Strana na proti pravému úhlu nazývá se *podpona* (Hypotenuse), ramena úhlu toho jmenují se *odvěsně* neb *odvěsny* (Katheten).

§. 42. *Čára základná a výška trojúhelníka.* Strana, o kteréž myslíme, že na ní trojúhelník spočívá, nazývá se *čára základná, čára spodní, základnice* (Grundlinie).

Obr. 40.



Vrchol toho úhlu, jenž na proti základné čáře leží, jmenuje se *vrchol trojúhelníka* (Scheitel oder Spitze). Kolmá z vrcholu k základnici nazývá se *výška.* (Höhe).

Je-li v trojúhelníku ABC (obr. 40.) AB čára základná, je C vrchol trojúhelníka a kolmice CD je výška.

Základnou může býti kterákoli strana; ku každé straně náleží jistá výška.

V trojúhelníku rovnoramenném brává se obyčejně třetí nerovná strana za čáru základnou.

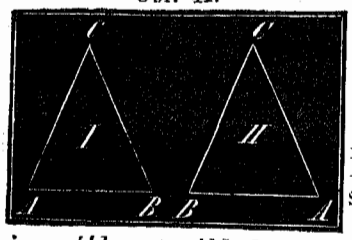
V ostroúhelném trojúhelníku vpadne výška vždy u vnitř obrazce. Je-li ale trojúhelník tupoúhelný, nemůže se výška uvnitř vésti, pak-li se rameno tupého úhlu za základnici vezme; neboť by vznikl trojúhelník, jenž by měl zároveň pravý a tupý úhel, což býti nemůže.

Vezme-li se v pravoúhelném trojúhelníku jedna z odvěsen za základnici, je druhá odvěsna výškou.

4. Vzájemnost stran a úhlů.

§. 43. Trojúhelník ABC (obr. 41. I) budiž rovnoramený, tedy AC = BC.

Obr. 41.



Mysleme si tentýž trojúhelník v poloze BAC (obr. 41. II) a položme (v myšlenkách) trojúhelník BAC (II) na trojúhelník ABC (I.)

Jelikož jsou úhly C a C, strany AC a BC sobě rovny, padnou body A a B na sebe úhly A a B se skryjí a jsou si tedy rovny. Pročež pravíme:

V trojúhelníku rovnoramenném jsou úhly na základnici sobě rovny.

Z toho vysvitá dále:

1. *Jsou-li v trojúhelníku dva úhly sobě rovny, je trojúhelník rovnoramený.*

2. *V trojúhelníku rovnostranném jsou všechny úhly sobě rovny.*

3. *V trojúhelníku nerovnostranném jsou samé nerovné úhly a na opak; jsou-li v trojúhelníku úhly nerovné, jsou i strany nerovné.*

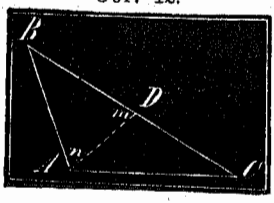
Mnoho-li obnáší jeden úhel v trojúhelníku rovnostranném?

Mnoho-li obnášejí v rovnoramenném trojúhelníku úhly na základnici o sobě, když obnáší úhel ve vrcholu 80°? Mnoho-li, když obnáší 100°, =120°?

Poznam. Věta o trojúhelníku rovnoramenném může se názorně objasnit takto: Vysřihne se z lepenky tentýž trojúhelník dvakrát, strany poznačí se tak jak jsou v obrazci I a II. Položíme-li vrcholem jeden trojúhelník náležitě na na druhý, kryjí se oba, což jest známkou rovnosti úhlů na základnici.

Položí-li se jeden na druhý základnicí, kryjí se též oba, což je známkou, že je trojúhelník, v němž jsou dva úhly sobě rovny, rovnoramený. —

Obr. 42.



§. 44. ***Trojúhelník ABC budiž nerovnostranný, strana BC > AB. obr. 42.***

Učiní-li se BD = AB, je úhel $n = m$.

Úhel A je větší než úhel n a tedy zároveň větší než úhel m. Poněvadž je úhel m. co úhel zevnitřní trojúhelníka ACD větší než C, je tedy i úhel A > C t. j.

V trojúhelníku nerovnostranném leží naproti větší straně větší úhel.

§. 45. Je-li v trojúhelníku ABC obr. 42. úhel A > C, musí býti strana BC větší než AB; neboť, byla-li by BC rovna AB, byly by úhly A a C sobě rovny (§. 43.); byla-li by snad strana BC menší než AB, byl by úhel C větší než A (§. 44), což je obojí nemožné, poněvadž je úhel A > C.

Je tedy BC > AB, jelikož jinak býti nemůže; protož pravíme:

V trojúhelníku leží naproti většímu úhlu větší strana.

V trojúhelníku tupoúhelném leží tedy naproti tupému, v pravoúhelném naproti pravému úhlu největší strana.

Sestrojte od ruky trojúhelník rovnoramený, vyměřte úhloměrem úhel ve vrcholu a vypočítejte úhly na základnici.

Sestrojte trojúhelník nerovnostranný, vyhledejte největší úhel, největší stranu; nejmenší úhel, nejmenší stranu; vyměřte dva úhly a vypočítejte třetí. —

Poznam. Rovnostranný trojúhelník nazývá se trojúhelník *pravidelný* nebo *trojec.*

5. Rovnost, podobnost a shodnost.

§. 46. Rovina, kteráž mezi stranami trojúhelníka obsažena jest, nazývá se jeho *velkost* neb *obsah* anebo *plocha.*

Když mají dva trojúhelníky stejnou velkost pravíme o nich, že jsou *rovné*, že jsou sobě *rovny* (gleich).

Trojúhelníky mohou býti rovné i když se podobou od sebe liší. Trojúhelník tupoúhelný může tak velkou plochu obsahovat, jako trojúhelník ostro— aneb pravoúhelný.

Trojúhelníky, kteréž mají stejnou podobu, jmenují se *podobné* (ähnlich).

Všechny rovnostrané trojúhelníky jsou si podobny.

Mají-li dva trojúhelníky stejnou podobu a stejnou velkost, nazývají se *shodné*; pravíme o nich, že se shodují.

Položí-li se shodné trojúhelníky částkami svými náležitě na sebe, kryjí se úplně.

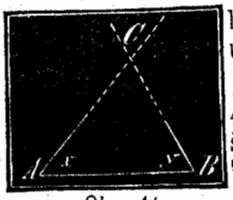
U shodných trojúhelníků jsou tedy částky jednoho trojúhelníka rovné stejnolehlým částkám druhého trojúhelníka.

Jsou-li na opak u dvou trojúhelníků stejnoleblé částky vzájemně sobě rovny, pravíme, že se trojúhelníky ty shodují.

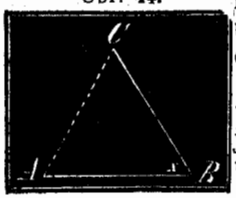
Známka rovnosti je $=$, známka podobnosti $\sim$; známka shodnosti je složena z nich obou a je buď $\cong$ anebo $\approx$.

6. O sestrojení a shodnosti trojúhelníků.

Obr. 43.



Obr. 44.



§. 47. Má-li se trojúhelník sestrojit, není třeba, aby se všech šest částek dalo, z nichž trojúhelník sestává. —

Sestrojíme-li ku př. jednu stranu AB, (obr. 43). a k ní přilehlé úhly x a y, nedostávají se ještě dvě strany a jeden úhel, tedy ještě tři částky. Tyto částky se však sestrojením samy udají; neboť, jestliže prodloužíme neurčitá ramena obou úhlů, protnou se tyto v bodu C a trojúhelník se doplní stranama AC a BC a úhlem ∡ACB.

Sestrojíme-li dvě strany AB a AC (obr. 44) tak, aby určitý úhel x svíraly, nedostává se ještě jedna strana a dva úhly k celému obrazci, celkem tedy tři částky. Spojíme-li však body B a C, doplní

se obrazec a ty tři částky, které ještě scházely, udají se se strojením samy.

K sestrojení trojúhelníka dostačí tedy s jistou výminkou toliko známost tří částek.

Jednou stranou, jedním úhlem, dvěma stranama nebo dvěma úhly nedá se trojúhelník sestavit. Taktéž se třemi úhly nemůže trojúhelník určitě sestrojit.

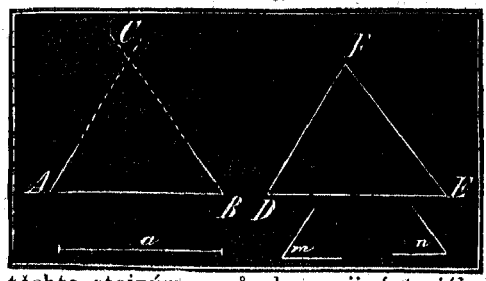
Z tří částek dá se ve čtyřech případech trojúhelník určitě sestavit a sice:

Když se udá:

1. *Jedna strana a úhly k ní přilehlé.*
2. *Dvě strany s úhlem sevřeným.*
3. *Dvě strany a úhel k jedné protilehlý.*
4. *Tři strany.*

§. 48. *Má se trojúhelník sestrojit danou stranou a přilehlýma úhly.*

Obr. 45.



Vede se strana AB = *a* (obr. 45.), při ní se v bodech A a B sestrojí úhly A = *m*, B = *n*. Ramena úhlů těchto se prodlouží až k průseku. C.

Poznam. V tomto případu musí býti součet úhlu A a B vždy menší než 180°, proč?

Sestrojíme-li z částek těchto stejným způsobem jiný trojúhelník DEF a položíme-li jej v (myšlenkách) na trojúhelník ABC tak, aby stejné přilehlo k stejnému, skryje se rovné rovným. Strana AB stranou DE, úhel A úhlem D, úhel B úhlem E. Strana DE padne do směru strany AC, strana EF do směru strany BC. Bod F leží tedy ve směru strany AC a BC tak, jako bod C a, jelikož mají přímky ty jen jeden bod spolně, padnou body C a F na sebe. Trojúhelníky ABC a DEF se kryjí a jsou tedy shodné. Pročež pravíme.

Trojúhelníky se shodují, když mají jednu stranu s přilehlýma úhly vzájemně rovnou.

Shodují se dva rovnoramené trojúhelníky, když jsou základnice a úhly ve vrcholech na vzájem rovny?

Shodují se dva pravoúhelné trojúhelníky, když jsou vzájemně rovny podpona a jeden ostrý úhel? odvěsna a jeden ostrý úhel?

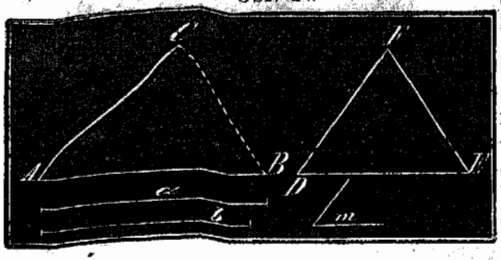
Má se sestrojit trojúhelník danou stranou, přilehlé úhly buďtež 70° a 80°.

§. 49. *Má se sestrojit trojúhelník dvěma stranama tak, aby strany ty určitý úhel svíraly.*

Vede se strana AB $= a$ (obr. 46.), při ní se strojí se daný úhel $m = A$, z ramena druhého se odměří strana AC $= b$ a konečné body B a C se přímkou spojí.

Sestrojíme-li týmž způsobem stejnými částkami jiný trojúhelník DEF a položíme-li jej na trojúhelník ABC stejným k stejnému, skryje se rovně rovným; totiž úhel A úhlem D, strana AB stranou DE, strana AC stranou DF. Bod E padne na bod B, bod F na bod C, přímka EF na přímku BC. Trojúhelníky ABC a DEF se skryjí a jsou tedy shodné.

Obr. 46.



Pročež pravíme:

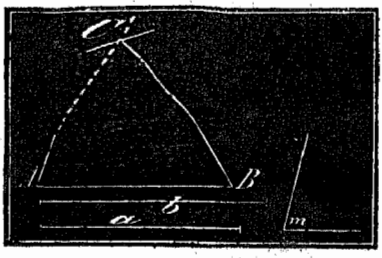
Trojúhelníky se shodují, když mají dvě strany vzájemně rovné a když sou úhly těmato stranama sevřené sobě rovny.

Shodují se dva pravoúhelné trojúhelníky, když jsou odvěsny jejich vzájemně rovny?

Shodují se dva rovnoramené trojúhelníky, když jsou ramena a úhly na základnicích na vzájem sobě rovny?

Sestrojte dvěma stranama trojúhelník, sevřený úhel budiž 80°—

Obr. 47.

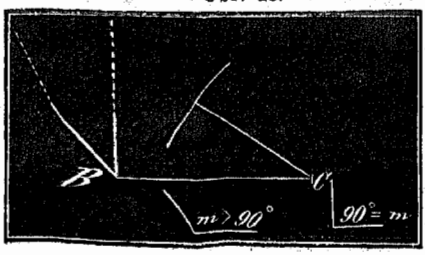


§. 50. *Má se sestavit trojúhelník dvěma stranama a úhlem tak, aby úhel ten ležel naproti jedné oněch stran.*

Sestrojí se menší strana A B $= a$ (obr. 47) při ní daný úhel A $= m$. Z druhého bodu B se opíše větší stranou BC $= b$ oblouk až k průseku neurčitého ramena úhlu A.

Poznam. Výkon úlohy této požaduje, aby se daný úhel vždy při menší straně sestrojil a na proti větší straně ležel.

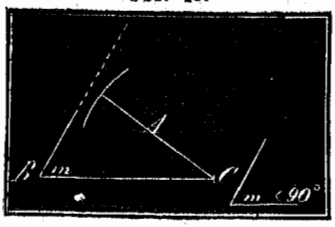
Obr. 48.



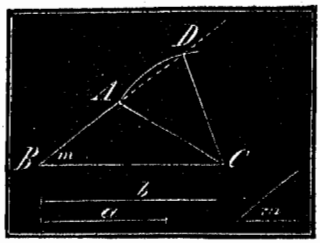
Vedla-li by se větší strana BC $= b$ (obr. 48) a sestrojil-li by se při ní úhel m, měl by se menší stranou vésti průsečný oblouk. Je-li úhel $m =$ aneb $> 90°$, nedá menší strana žádného průseku a trojúhelník jest tedy nemožný.

Je-li úhel $m < 90°$, jsou dle velkosti strany a dva případy možné;

Obr. 49.



Obr. 50.



buď nezasahne oblouk touto stranou opsaný úhlové rameno (obr. 49) anebo protne rameno to a sice ve dvou bodech (obr. 50). V prvním případu není trojúhelník možný; v druhém mohou se těmitéž částkami dva rozličné trojúhelníky setavit. BCA a BCD. —

Vytknutá úloha vyžaduje tedy následného dodatku:

Má se sestrojit trojúhelník dvěma stranama a úhlem tak, aby daný úhel naproti věčší straně ležel.

Sestrojte trojúhelník nerovnýma stranama *a* a *b* naproti věčší straně má ležet úhel 70°.

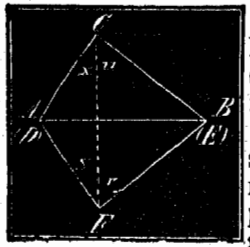
§. 51. Sestrojme týmž způsobem a stejnými částkami dva trojúhelníky ABC a DEF, obr. 51, 52, 53. AC budiž rovna DF, AB = DE, úhel C = F.

Kdyby se vědělo, že jsou u trojúhelníků ABC a DEF i třetí strany totiž BC a EF sobě rovny, shodovaly by se trojúhelníky tyto dle §. 49.

Že strany ty rovné jsou, dozvíme se z úvahy následující:

Položme trojúhelník DEF k trojúhelníku ABC tak, aby rovné věčší strany AB a DE k sobě přilehly; strany tyto se skryjí, neboť jsou sobě rovny.

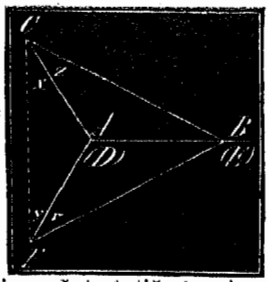
Obr. 51.



Když se takto dva trojúhelníky k sobě položí, může dle velkosti úhlu CAF trojí obrazec vzniknouti; neboť je úhel CAF buď menší než 180° (obr. 51), nebo věčší než 180° (obr. 52) anebo je = 180° (obr. 53).

1. Je-li úhel CAF < 180° (obr. 51) a spojíme-li bod C s bodem F, je trojúhelník CAF rovnoramený (jestiť AC = AF neb DF) protož je $x = y$ a jelikož je úhel C = F, je též $u = v$ (proč?)

Obr. 52.



V trojúhelníku BCF jsou tedy úhly na základnici CF sobě rovny, totiž $u = v$, pročež je CB = BF neb FE.

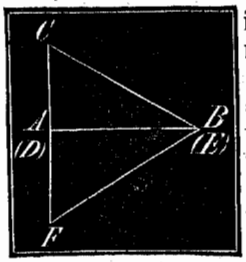
Z toho vidíme, že jsou u trojúhelníků ABC a DEF i třetí strany BC a EF sobě rovny, pročež se trojúhelníky tyto shodují dle §. 49.

2. Je-li úhel CAF > 180° (obr. 52) je taktéž spojením bodů C a F trojúhelník ACF rovnoramený, pročež je $x = y$.

Jelikož je úhel z nebo C = v nebo F, je i součet, totiž $(x + z) = y + v$.

V trojúhelníku BCF jsou úhly na základnici CF sobě rovny trojúhelník ten je tedy rovnoramený, strana BC je = BF neb EF;

Obr. 53.



U trojúhelníků ABC a DEF jsou tedy i třetí strany sobě rovny a protož jsou trojúhelníky ty shodné.

3. Je-li konečně úhel CAF = 180° (obr. 53.) je trojúhelník BCF rovnoramený, neboť je úhel C = F, pročež jsou strany BC a EF sobě rovny.

U trojúhelníků ABC a DEF jsou tedy i v tomto případu třetí strany BC a EF sobě rovny a trojúhelníky ty se shodují.

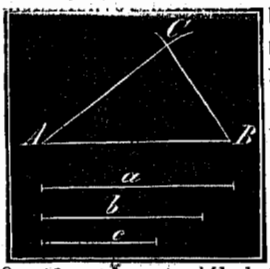
Pravíme tedy:

Trojúhelníky se shodují, mají-li dvě strany vzájemně rovné a jsou-li úhly, které naproti větším stranám leží, sobě rovny.

Shodují se dva pravoúhelné trojúhelníky, když jsou podpony a jedna odvěsna vzájemně sobě rovny?

§. 52. *Má se trojúhelník sestrojit třemi stranami.*

Obr. 54.



Vede se strana AB = *a* (obr. 54), z bodů A a B se opíšou průsečné oblouky stranáma *b* a *c*; průsek C dá s body A a B stranu AC a BC.

Sestrojíme-li těmitéž stranami jiný trojúhelník DEF, (viz obr. 51, 52, 53), má tento trojúhelník s trojúhelníkem ABC vzájemně tři rovné strany.

Kdyby měly trojúhelníky tyto ještě některý úhel vzájemně rovný, shodovaly by se dle §. 49. Že u trojúhelníků těch úhly stejnolehlé vzájemně sobě rovny jsou, poznáme z úvahy této:

Položme trojúhelník DEF k trojúhelníku ABC, tak, aby se rovné strany AB a DE skryly.

Dle velkosti úhlu CAF jsou opět tři případy možné. Buď je úhel CAF < 180° (obr. 51), nebo je > 180° (obr. 52) aneb je = 180° (obr 53).

1. Vedeme-li přímku CF (obr. 51) je v trojúhelníku CAF strana AC = AF neb DF; trojúhelníku CAF je tedy rovnoramený, pročež je úhel $x = y$.

Trojúhelník BCF je taktéž rovnoramený, neboť je BC = BF neb EF, je tedy $u = v$.

Jest tedy i: $x + u = y + v$ nebo C = F. U trojúhelníků ABC a DEF jsou tedy úhly C a F sobě rovny. Trojúhelníky ty se tedy shodují dle §. 49.

2. Spojíme-li bod C s bodem F (obr. 52) je trojúhelník ACF rovnoramený, neboť je strana AC = AF neb DF, pročež je úhel $x = y$.

Taktéž je rovnorameným velký trojúhelník BCF (jestiť BC = B F neb E F); je tedy $x + z = y + v$.

Odečtou-li se od toho součtu rovné úhly x a y, bude:

$z = v$ nebo úhel C v trojúhelníku ABC roven úhlu F v trojúhelníku DEF, pročež se trojúhelníky ty shodují dle §. 49.

3. Poněvadž je strana BC = BF neb EF obr. 53. je úhel C = F a trojúhelník ABC je ≅ DEF.

Pročež pravíme:

Trojúhelníky se shodují, když mají vzájemně rovné strany.

Kdy se shodují trojúhelníky rovnostranné?

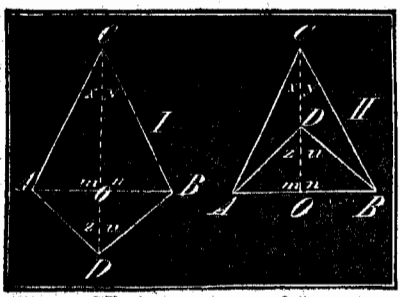
§. 53. *Má se k určitému trojúhelníku sestrojit shodný.*

K výkonu tomuto je zapotřebí tří částek, jimiž se trojúhelník určitě sestrojit dá.

Úloha tato provede se tedy jedním ze čtyr zprvu uvedených způsobů.

7. Vlastnosti trojúhelníků rovnoramených.

Obr. 55.



§. 54. Sestrojme při též straně AB (obr. 55. I) dva rovnoramené trojúhelníky ABC a ABD.

Vedeme-li vrcholem C a D přímku CD, rozdělí přímka tato úhly v obou vrcholech a základnici AB v bodu O. / Přímkou tou vzniknou trojúhelníky ACD a BCD. Trojúhelníky tyto jsou shodné, poněvadž mají vzájemně rovné strany — AC = BC, AD = BD a strana CD jest sama sobě rovna —. Jsou tedy stejnolehlé úhly x a y, z a u sobě rovny.

2. Položíme-li trojúhelník BCD na trojúhelník ACD tak, aby se rovné rovným krylo, padne bod B na bod A, přímka BO na přímku AO, úhel m na úhel n. Z toho vysvitá, že jest AO = BO, úhel $m = n$ a poněvadž jsou úhly tyto úhly vedlejší, jest tedy $m = n = 90^0$.

Když se tedy vrcholy dvou na též základnici stojících rovnoramených trojúhelníků přímkou spojí, rozpoluje přímka ta: *1. úhly v obou vrcholech 2. základnici a stojí 3. k základnici kolmo.*

Obrazec předešlý může se sestaviti i tak, aby vrchol D nad základnicí AB ležel (obr. 55. II.) Z obrazce II. jestiť patrno, že jest výsledek tentýž.

§. 55. *Sousledy.* V rovnorameném trojúhelníku ABC (obr. 55. I) a ABD (obr. 55. II) je kolmá CO a DO výškou a jelikož jest AO = BO = ½ AB, pravíme:

V trojúhelníku rovnoramenném rozpoluje se základnice výškou.

Taktéž vysvitá z obrazců těchto dále: *1. Když se v rovnoramenném trojúhelníku spustí z vrcholu k základnici kolmá, rozpůlí se základnice a úhel ve vrcholu.*

2. Přímka, kteráž v rovnoramenném trojúhelníku úhel ve vrcholu rozpoluje, stojí k základnici kolmo a rozpoluje ji.

3. Přímka, kteráž v rovnoramenném trojúhelníku střed základnice s vrcholem spojuje, rozpoluje úhel ve vrcholu a stojí k základnici kolmo.

4. Když se v rovnoramenném trojúhelníku v středu přímky základné vytyčí kolmá, jde kolmá ta vrcholem trojúhelníka a úhel ve vrcholu se kolmicí tou rozpoluje.

V obrazci 55. II. jest úhel *z* co úhel zevnitřní trojúhelníka ACD věčší, než úhel *x*; taktéž jest úhel *u* > y. Jest tedy úhel ADB > ACB. Zároveň vysvitá, že jest rameno AC > AD; protož pravíme:

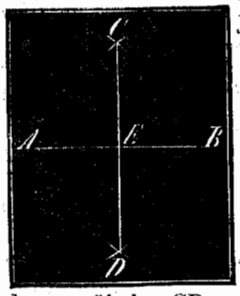
Když stojí dva rovnoramené trojúhelníky na též základnici, jest ve vrcholu úhel menší v onom trojúhelníku, jenž má delší ramena.

Kdy budou úhly ty sobě rovny?

§. 56. Těchto vlastností trojúhelníků rovnoramených užívá se k výkonu mnohých důležitých úloh.

1. *Má se rozpůliti daná přímka* AB, obr. 56.

Obr. 56.



Poněvadž víme, že se přímkou, kteráž spojuje vrcholy dvou na též základnici stojících rovnoramených trojúhelníků, základnice rozpoluje, sestrojíme nad přímkou danou dva rovnoramené trojúhelníky a spojíme vrcholy jejich. Výkon úlohy té provede se tedy takto:

Opíšou se libovolnými avšak rovnými poloměry dvojí průsečné oblouky, obojí buď nad neb pod přímkou, anebo jedny nad přímkou a druhé pod ní. (Poloměry tyto vždy věčší býti musí než půle přímky, proč?) Průsečnými body C a D vede se přímka CD, anaž přímku danou v bodu E protíná a rozpoluje.

Rozdělte danou přimku na 2, 4, 8 rovných dílů.

Vykonejte dále tyto úlohy: 1. Jsou dány dvě nerovné přímky, vyhledejte polovičný součet jejich; vyhledejte polovičný rozdíl jejich.

2. Dány jsou tři nerovné přímky, vyhledejte polovičný součet přímky první a druhé, druhé a třetí, první a třetí.

3. Sestrojte trojúhelník libovolně, rozpůlte všechny strany a spojte body rozpolovací s vrcholy.

V kolika bodech protnou se přímky ty?

4. Dán jest *součet* a *rozdíl* dvou nerovných přímek; mají se vyhledati délky oněch přímek.

Výkon úlohy této provede se dle následné úvahy. *Součet* přímek obnáší obě délky dohromady; *rozdílem* se udává, oč jest kratší přímka menší než přímka věčší. Dáme-li tedy k součtu rozdíl, vznikne délka, anaž obsahuje věčší přímku, přímku menší a ještě to, co k menší přímce schází, aby byla tak dlouhá, jak je přímka věčší. Když se ale k přímce menší tento rozdíl dodá, bude z ní přímka věčší. Z toho vidíme, že obsahuje *součet* a *rozdíl* dohromady věčší přímku dvakrát a že polovice délky součtu a rozdílu dá přímku věčší. —

Jestli že se ale od *součtu* odejme *rozdíl*, zkrátíme-li totiž délku tu o to, oč je delší přímka věčší, než přímka menší, vznikne délka, anaž obsahuje menší přímku dvakrát. Polovice délky této dá přímku menší.

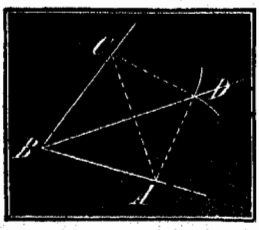
Z toho jde toto pravidlo:

Když se dá součet a rozdíl dvou nerovných přímek, vyhledá se věčší přímka, když se součet a rozdíl v jednu délku sestaví a délka ta rozpůlí; menší přímka se vyhledá, když se od součtu rozdíl odejme a zbylá délka rozpůlí.

Udělejte několik příkladů; veďte dvě nerovné délky, považujte věčší za *součet*, menší za *rozdíl*, vyhledejte délku přímek, z nichž onen součet a rozdíl vznikl.

II. Má se daný úhel rozpůliti:

Obr. 57.



Učiní se rameno AB = BC (obr. 57); z bodů A a C opíšou se průsečné oblouky. Průsek D se spojí s vrcholem B a vede se rozpolovací přímka BD.

Vedeme-li AC, AD a CD jsou trojúhelníky ABC a ACD rovnoramené a přímka BD rozpoluje úhly ve vrcholech jejich.

Sestrojte libovolně úhel a rozdělte jej na 2, 4, 8 rovných dílů.

Vykonejte tyto úlohy: 1. Sestrojte úhloměrem součet těchto úhlů: 68° a 42°, 30° a 40°, 65° a 85°, rozpůlte součty jejich.

2. Sestrojte součet dvou daných úhlů *m* a *n* a úhel, jenž se součtu tomu rovná, rozpůlte.

3. Jsou dány součty a rozdíly dvou nerovných úhlů, vyhledejte úhly ty. Součty jsou: 74°, 85°, 100°, 110°.
rozdíly: 16, 25° 35° 40°.

4. Součet dvou nerovných úhlů jest úhel A a rozdíl úhlů těch je úhel *a*. Sestrojte a vyhledejte věčší i menší úhel.

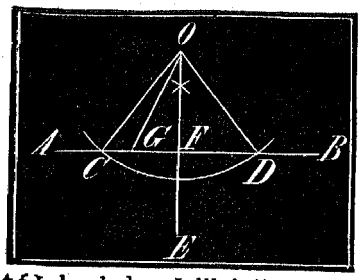
5. Rozpůlte v daném trojúhelníku všechny úhly.
V kolika bodech se budou protínat přímky rozpolovací?

6. Sestrojte úhly vedlejší, rozpůlte oba a veďte přímky rozpolovací; hleďte jak přímky ty k sobě stojí. —

III. Má se z daného bodu O k určité přímce AB spustit kolmá.

Když spojíme vrcholy dvou rovnoramených, na též základnici stojících trojúhelníků přímkou, víme, že stojí přímka tato k oné základnici kolmo; pročež se daná úloha vykoná takto: Libovolným poloměrem se opíše z daného bodu O (obr. 58) oblouk tak, aby přímku AB ve dvou bodech C a D protal, pak se nad anebo pod přímkou CD vedou průsečné oblouky. Průsek E spojí se s bodem O a přímka OE stojí kolmo k dané přímce AB.

Obr. 58.



Vedeme-li z bodu O k přímce AB přímku OG, utvoří se pravoúhelný trojúhelník OGF, v němž jest podpona OG větší než odvěsna OF. Taktéž by byly všeliké jiné přímky, kteréž by se z bodu O k přímce AB vedly, větší než kolmice OF, protož pravíme:

1. Mezi daným bodem a určitou přímkou jest kolmice délkou nejkratší.

2. Vede-li se z daného bodu k určité přímce přímka nejkratší, stojí přímky ty k sobě kolmo.

Z toho zároveň vysvitá, že se z daného bodu k určité přímce jen *jedna* kolmá vésti může.

Vedeme-li z bodu O k přímce AB vícero šikmých OC, OD, ješikmá OC > OG; neboť je v trojúhelníku COG úhel CGO co vedlejší úhel k ostrému úhlu OGF tupý a protož je protilehlá strana OC větší než strana OG t. j. ***Ze dvou šikmých je ta větší, kteráž je vzdálenější od přímky kolmé.***

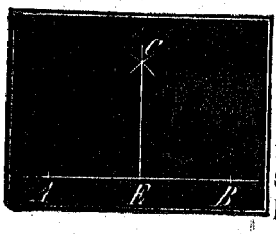
Je-li délka CF = DF, je trojúhelník COF shodný s trojúhelníkem DOF a protož je OC = OD t. j.

Šikmé, kteréž mají od přímky kolmé rovnou vzdálenosť, jsou si rovny.

Sestrojte trojúhelník libovolně, spusťte z vrcholů k stranám protilehlým kolmice. V kolika bodech se budou protínat kolmice tyto?

IV. Má se v daném bodu E vytýčiti k přímce kolmá.

Obr. 59.

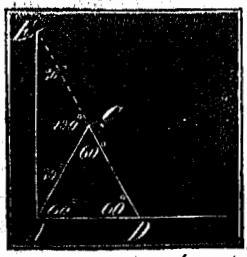


Když spojíme v trojúhelníku rovnoramenném střed základnice s vrcholem, víme, že stojí přímka tato k základnici kolmo; pročež se daná úloha vykoná takto: Z daného bodu E (obr. 59.) utnou se libovolné ale rovné délky, EA = EB; z bodu A a B opíšou se libovolným poloměrem průsečné oblouky, průsek C se spojí s daným bodem E. Přímka CE stojí k dané přímce kolmo.

Kolik kolmých může se v jednom bodu vytýčiti k přímce dané? Sestrojte trojúhelník libovolně, rozpůlte strany jeho a v bodech rozpolovacích vytyčte přímky kolmé. V kolika bodech se budou protínati kolmice ty?

V. V konečném bodu A k přímce AB vytýčiti přímku kolmou.

Obr. 60.

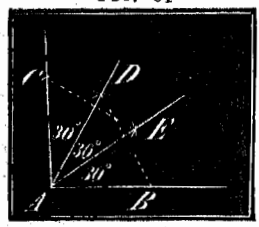


V tomto případu utne se z bodu A obr. 60. z dané přímky libovolná délka a délkou touto sestrojí se rovnostranný trojúhelník ku př. ACD: prodlouží se strana CD o svou délku tak, že je EC = CD a bod E se spojí s bodem A.

Přímka EA stojí kolmo k přímce AB; neboť jest v trojúhelníku rovnostranném úhel DAC jakož i ACD = 60°, tedy úhel ACE = 120°; v rovnorameném trojúhelníku ACE je úhel CAE = AEC = 30°; protož je úhel DAE = 90°, přímka E A tedy kolmá k přímce AD.

VI. Má se pravý úhel rozděliti na tři rovné díly.

Obr. 61

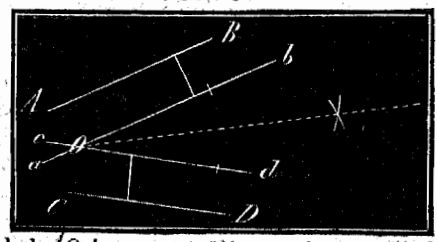


Libovlným poloměrem odměří se z vrcholu A (obr. 61.) délka AB = AC a při těchto stranách sestrojí se rovnostranné trojúhelníky ABD a ACE. Úhel BAD je = 60°, protož je úhel CAD = 30°; taktéž je úhel CAE = 60°, pročež je BAE = 30° a tedy je i DAE = 30°.

Poznam. Jak z obrazce vidno, dostačí k výkonu tomuto nález bodu D a E. Tyto body se vyhledají, když se poloměrem AB = AC opíšou průsečné oblouky z bodů A a B, A a C. Přímky BD a CE se vésti nemusí.

VII. Má se mezi dvěma šikmýma vésti přímka, kteráž by prodloužena, rozpůlila úhel, kdyby se zároveň obě šikmé až k průseku prodloužily.

Obr. 62.



Jelikož se přímky AB a CD (obr. 62) neprotínají, vyhledá se úhel, jenž se úhlu mezi šikmýma vyrovná. Vedou se totiž v rovné vzdálenosti od obou šikmých přímky a sice *ab* rovnoběžně s AB, *cd* rovnoběžně s CD. Přímky *ab* a *cd* se protnou ku př. v bodu O. Úhel *aOd* se rozpůlí a vede se přímka rozpolovací, anaž by, prodloužena jsouc, rozpůlila i úhel mezi šikmýma AB a CD, kdyby se tyto až k průseku prodloužily. —

Úlohy.

Sestrojte 1. danou stranou trojúhelník rovnostranný.

2. trojúhelník rovnoramený: a) základnou a ramenem b) základnou a výškou c) základnou a úhlem přilehlým d) ramenem a úhlem k základnici přilehlým e) ramenem a výškou.

3. Trojúhelník pravoúhelný: a) oběma odvěsnama b) odvěsnou a podponou c) odvěsnou a přilehlým úhlem ostrým. —

Poznam. Úlohy pod číslem 2. provedou se lehko dle vlastnosti trojúhelníka rovnorameného, jakž o tom v §. 43, 54. a 55 pojednáno.

Proveďte ještě tyto úlohy.

1. Sestavte danou stranou trojúhelník rovnostranný. Prodlužte některým vrcholem jednu stranu; jak velký bude vzniklý zevnitřní úhel? Rozpůlte úhel ten a veďte přímku rozpolovací. Půjde rozpolovací přímka ta rovnoběžně s některou stranou v onom trojúhelníku a s kterou?

2. Sestrojte danou základnicí a úhlem k ní přilehlým, ku př. 50°, trojúhelník rovnoramený; prodlužte vrcholem jedno z obou ramen a veďte vrcholem k základnici rovnoběžku. Rovnoběžkou tou rozdělí se vzniklý zevnitřní úhel ve dva úhly. Hleďte, zda-li jsou úhly ty sobě rovny; vypočítejte všechny úhly.

3. Sestrojte danou stranou a přilehlýma úhly, ku př. 60° a 70°, trojúhelník. Bude trojúhelník ten nerovnostranný a proč?

Prodlužte některým vrcholem jednu stranu a veďte týmž vrcholem k straně protilehlé rovnoběžku. Kolik se utvoří úhlů v onom vrcholu? Pojmenujte je a udejte, které z nich jsou rovny úhlům v trojúhelníku sestrojeném; vypočítejte všechny.

4. Sestrojte úhel ostrý: ve vrcholu vytyčte k oběma ramenům přímky kolmé. Bude úhel, jejž kolmice svírají, roven úhlu sestrojenému? Zkuste to i s úhlem tupým. Hleďte, mnoho-li dá úhel kolmicemi sevřený s úhlem tupým dohromady.

5. Sestavte danou stranou trojúhelník rovnostranný; rozpůlte dva úhly, veďte přímky rozpolovací až k průseku a spojte průsek ten s vrcholem třetího úhlu. Hleďte, zdali jsou vzniklé trojúhelníky shodné; vypočítejte úhly, ježto v onom průseku vznikly. Prodlužte přímky z vrcholů vycházející až k stranám protilehlým. Jak budou státi ony přímky k stranám těm? Budou vzniklé pravoúhelné trojúhelníky shodné? Rozpůlí se oněmi přímkami každá strana?

6. Sestrojte danou základnicí a daným k ní přilehajícím úhlem trojúhelník rovnoramený. Rozpůlte oba úhly na základnici a veďte přímky rozpolovací až k průseku; průsekem a vrcholem veďte přímku a prodlužte ji až protne základnici v trojúhelníku daném. Vypočítejte všechny úhly a udejte, které ze vzniklých trojúhelníků by se kryly jeden druhým. Jak stojí ona přímka, jižto jste vrcholem a průsekem vedli k přímce základné a na jaké díly rozděluje ji a úhel ve vrcholu v trojúhelníku sestrojeném? Stojí i v tomto trojúhelníku ony přímky, jimiž jste úhly rozpůlili, k stranám protilehlým kolmo?

7. Sestavte danou stranou a dvěma nerovnýma úhly trojúhelník. Rozpůlte všechny tři úhly a veďte přímky rozpolovací až k průseku. Přímky ty protnou se v témž bodu. Vypočítejte úhly, kteréžto v průseku oněch přímek vzniknou; přímky rozpolovací prodlužte až k stranám protilehlým. Jak budou k stranám těmto státi? Vypočítejte úhly, kteréž se stranami těmi činí.

8. Sestrojte při straně určité $^2/_3$ pravého úhlu v obou koncích, prodlužte neurčitá ramena až k průseku. Jaký trojúhelník se utvoří? Spusťte v trojúhelníku tom z vrcholů k stranám protilehlým přímky kolmé. Kolmice tyto protnou se v témž bodu. Vypočítejte všechny úhly a určte, jaké to trojúhelníky jsou,

jimž je průsek kolmic společným vrcholem. Rozpolují se oněmi kolmicemi v trojúhelníku sestrojeném strany a úhly ve vrcholech?

9. Veďte určitou přímku, v obou koncích sestrojte $\frac{1}{2}$ pravého úhlu, prodlužte neurčitá ramena až k průseku. Jaký to bude trojúhelník? jaký úhel bude ve vrcholu? Rozpůlte úhel ve vrcholu a veďte rozpolovací přímku. Jak bude přímka ta státi k základnici? Budou vzniklé trojúhelníky shodné? Spojte některý bod oné rozpolovací přímky s oběma druhýma vrcholy, a hleďte, které z trojúhelníků vzniklých se shodují.

10. Veďte určitou přímku, v koncích sestrojte nerovné úhly, ku př. 50° a 70°; neurčitá ramena prodlužte až k průseku; jaký trojúhelník vznikne?

Z vrcholu spusťte ku každé protilehlé straně kolmici; vypočtete úhly v vzniklých pravoúhelných trojúhelnících a udejte též úhly, ježto se v společném průseku oněch kolmic utvoří. Rozdělují se strany oněmi kolmými též tak, jako v trojúhelníku rovnostranném?

11. Sestavte libovolně trojúhelník rovnostranný; utněte od dvou stran rovné částky a spojte rozdělovací body přímkou. Jaký bude trojúhelník vzniklý? Jde spojovací přímka s třetí stranou v trojúhelníku sestrojeném rovnoběžně a proč?

Vznikl by taktéž rovnostranný trojúhelník, kdybyste jen od jedné strany určitou délku utali a bodem rozdělovacím k třetí straně rovnoběžku vedli?

Rozpůlte v onom rovnostranném trojúhelníku všechny tři strany a spojte body rozpolovací. Budou všechny vzniklé trojúhelníky rovnostranné a shodné? Půjdou spojovací přímky rovnoběžně s třetími stranami? —

IV. O čtyrúhelníku.

1. Částky čtyrúhelníka.

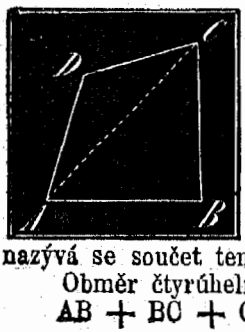
§. 57. Obrazec čtyrmi přímkami obmezený nazývá se *čtyrúhelník*, (Viereck).

Čtyrúhelník má čtyry strany a čtyry úhly.

Z úhlů v čtyrúhelníku nazývají se ty, kteréž stranami obrazce přímo spojeny nejsou, úhly *příčné*. —

Spojíme-li vrcholy dvou příčných úhlů A a C přímkou (obr. 63.) jmenuje se tato přímka *úhlopříčná, úhlopříčna* (Diagonale), ku př. úhlopříčna AC.

Obr. 63.



Úhlopříčnou rozdělí se čtyrúhelník ve dva trojúhelníky, ku př. ABC a ACD.

V každém trojúhelníku obnáší součet úhlů 180°; v čtyrúhelníku obnáší tedy součet všech úhlů 2. 180° = 360°. Protož pravíme:

V čtyrúhelníku obnáší součet všech úhlů 360° neb čtyry pravé.

Jest tedy: A + B + C + D = 360°.

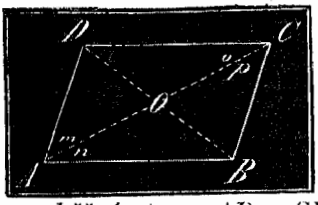
Sečteme-li v čtyrúhelníku všechny strany nazývá se součet tento *obměr* (Perimeter, Umfang).

Obměr čtyrúhelníka ABCD jest tedy:

AB + BC + CD + DA.

2. Tvary čtyrúhelníků.

Obr. 64.

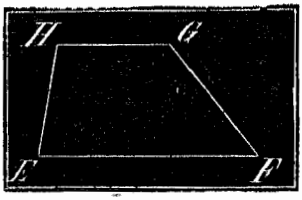


§. 58. Dle vzájemné polohy stran jsou čtyrúhelníky trojího druhu:

1. Jsou-li v čtyrúhelníku dvě a dvě protější strany rovnoběžné, nazývá se čtyrúhelník takový *rovnoběžník* neb *rovnoběžec* (Parallelogramm).

Rovnoběžník má dvé rovnoběžných stran ku př. rovnoběžník ABCD (obr. 64.) má rovnoběžné strany AB a CD, BC a AD.

Obr. 65.



2. Jsou-li v čtyrúhelníku jen dvě protější strany rovnoběžné, druhé pak různoběžné, nazývá se *lichoběžník* neb *lichoběžec*, (Trapez). ku př. EFGH. (obr. 65.)

3. Má-li v čtyrúhelníku každá strana jiný směr, jmenuje se čtyrúhelník *různoběžník* neb *různoběžec* (Trapezoid) ku př. ABCD (obr. 63).

3. Rovnoběžník a vlastnosti jeho.

§. 59. Vedeme-li v rovnoběžníku ABCD (obr. 64.) úhlopříčnou AC, rozdělí se tou úhlopříčnou rovnoběžník ABCD na dva trojúhelníky ABC a ACD.

Trojúhelníky tyto mají společnou stranu AC; úhly *m* a *p*, *n* a *o* jsou co střídné mezi rovnoběžkama sobě rovny. Je tedy trojúhelník ABC $\cong$ ACD.

Ze shodnosti trojúhelníků těchto vysvitá, že je strana AB = CD, AD = BD; úhel ADC = ABC a úhel BAD = BCD. Pročež pravíme:

1. V rovnoběžníku jsou strany protilehlé sobě rovny.
2. V rovnoběžníku jsou příčné úhly sobě rovny a 3. Úhlopříčnou se každý rovnoběžník dělí na dva rovné díly, nebo jinak *úhlopříčnou se každý rovnoběžník půlí.*

První z vět těch zní jinak i takto: *Rovnoběžky mezi rovnoběžkama jsou si rovny.*

Jak by se musely trojúhelníky ABC a ACD na sebe položit, aby se jeden druhým kryl?

Vedeme-li v rovnoběžníku ABCD obě úhlopříčny AC a BD, protínají se přímky ty v bodu O. Trojúhelník DOC je $\cong$ AOB. Jest tedy OC = OA, DO = BO t. j.:

V rovnoběžníku se úhlopříčny na pospol půlí. Bod, v němž se úhlopříčny rozpolují, nazývá se *střed* rovnoběžníka.

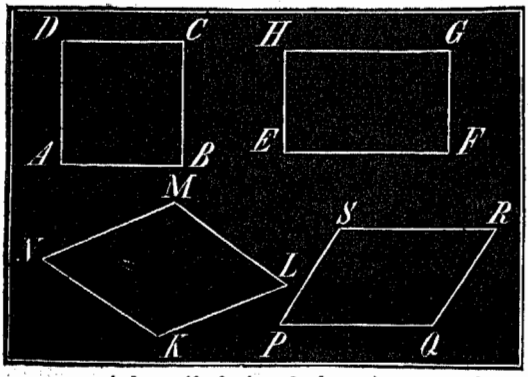
Poněvadž jsou v rovnoběžníku úhly příčné sobě rovny, vypoučtou se lehko všechny úhly v rovnoběžníku, je-li jeden z nich znám, ku př. Je-li A = 70°, je C = 70°, úhel D = 110° = B.

Je-li v rovnoběžníku jeden úhel pravý, jsou všechny úhly pravé, (proč?).

Když obnáší jeden úhel v rovnoběžci 134°; jak velké jsou ostatní úhly?

§. 60. *Rovnoběžníky dle stran a úhlů.* (obr. 66.) Dle stran jsou rovnoběžníky buď *rovnostranné* aneb *nerovnostranné;* dle úhlů jsou buď *pravoúhelné* anebo *kosoúhelné.*

Obr. 66.



Dle stran a úhlů rozeznáváme čtvero rovnoběžníků:

1. Rovnoběžník rovnostranný pravoúhelný neb *čtverec* (Quadrat). obrazec ABCD.

2. Rovnoběžník nerovnostranný pravoúhelný neb *obdélník*, (*pravoúhelník*) Rechteck). Obrazec EFGH.

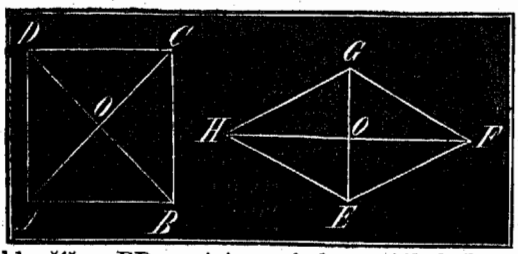
3. Rovnoběžník rovnostranný kosoúhelný neb *kosočtverec* (Rhombus), obrazec KLMN.

4. Rovnoběžník nerovnostranný kosoúhelný neb *kosodélník* (Rhomboid), obrazec PQRS. —

V kosodélníku nejsou ani strany, ani úhly rovny; v kosočtverci jsou jen strany rovny, úhly nerovny; v obdélníku jsou úhly sobě rovny, strany nerovny; ve čtverci jsou strany i úhly rovny.

§. 61. *Úhlopříčny ve čtverci a kosočtverci, v obdélníku a kosodélníku.*

Obr. 67.



Vedeme-li ve čtverci a kosočtverci (obr. 67). obě úhlopříčny, protínají se tyto přímky v středu oněch rovnoběžníků a stojí k sobě kolmo; neboť jsou trojúhelníky ACD a ABC rovnoramené. Taktéž jsou rovnoramené trojúhelníky FGH a FHE. Úhlopříčna BD spojuje vrcholy trojúhelníků ACD a ABC; úhlopříčna EG spojuje vrcholy trojúhelníků FGH a FHE.

Spojíme-li vrcholy dvou rovnoramených trojúhelníků, kteréž ma-

Je-li lichoběžník rovnoramený, jest DE = BD; trojúhelník BDE je tedy rovnoramený, pročež jest úhel m = B = A. Úhel B + D = 180°, úhel A + C = 180° a jelikož je A = B, jest tedy i úhel A + D = 180°, z čehož vysvitá, že je úhel C = D t. j.:

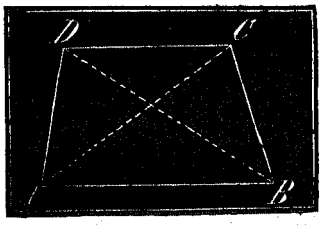
V lichoběžníku rovnoramenem jsou úhly, kteréž k stranám rovnoběžným přilehají, o sobě rovny.

Je-li DE > aneb < BD t. j.: je-li lichoběžník nerovnoramený, je úhel m < neb > B a jelikož je m = A, je tedy úhel A < aneb > B. Protož jsou i ty úhly, jimiž se nerovné úhly A a B na 180° doplňují, nerovné, totiž C > aneb < D t. j.:

V lichoběžníku nerovnoramenem jsou úhly, kteréž k stranám rovnoběžným přilehají, o sobě nerovné.

Je-li v lichoběžníku rovnoramenem jeden úhel znám, mohou se všechny ostatní úhly vypočítat. Je-li ku př. A = 70°, je B = 70°; C = D = 110°. Mohou se v lichoběžníku nerovnoramenem ostatní úhly vypočítat, když se jeden úhel udá?

Obr. 74.



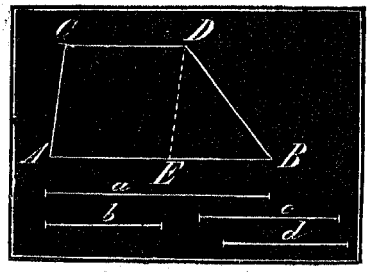
Vedeme-li v rovnoramenem lichoběžci (obr. 74.) úhlopříčny AC a BD, shodují se trojúhelníky ACD a BCD; neboť je AD = BC, strana CD je oběma trojúhelníkům společná, úhel ADC = BCD, jest tedy AC = BD t. j.:

V rovnoramenem lichoběžníku jsou úhlopříčny sobě rovny.

Jsou-li ale strany různoběžné, nerovné; je-li lichoběžec nerovnoramený, neshodují se trojúhelníky. *V lichoběžci nerovnoramenem nejsou úhlopříčny sobě rovny.*

§. 67. *Sestrojení lichoběžce. 1. Má se čtyrmi stranami lichoběžník sestrojit, (obr. 75.)*

Obr. 75.

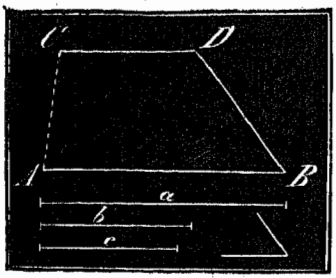


Vede se věčší rovnoběžka AB = a, od ní utne se AE = d a nad zbytkem EB sestrojí se zbývajícíma stranama b a c trojúhelník BED; z bodu D opíše se délkou d, z bodu A délkou DE = b oblouk až k průseku C. Průsečný bod C se spojí s body A a D.

Jak je vidno, sestrojí se v tomto případu lichoběžník dle obrazce 73.

2. Má se lichoběžník sestrojit třemi stranami a úhlem, jenžto má k věčší rovnoběžce přilehati, (obr. 76).

Obr. 76.



Vede se věčší rovnoběžka AB = a, v bodu B sestrojí se daný úhel a z neurčitého ramena se utne BD = b. Z bodu D se vede k straně AB rovnoběžka DC = c a bod C spojí se s bodem A.

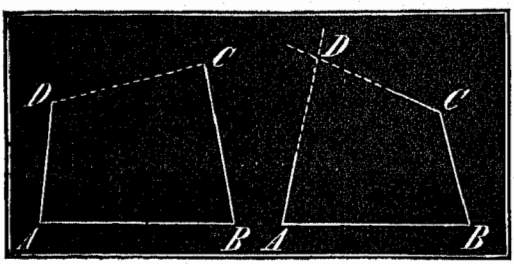
Sestrojte lichoběžník nerovnoramený rovnoběžnýma stranama a dvěma úhly tak, aby úhly ty k věčší straně přilehaly, (dle obr. 73).

Sestrojte lichoběžníky rovnoramené: 1. Jedním ramenem a stranama rovnoběžnýma 2. rovnoběžkama a úhlem k věčší rovnoběžné přilehajícím 3. Jedním ramenem, věčší rovnoběžkou a úhlem k ní přilehlým. 4. Jedním ramenem, menší rovnoběžkou a úhlem k ní přilehlým. 5. Sestavte lichoběžník rovnoramený, když se dá úhlopříčná, věčší rovnoběžka a jedno rameno 6. Sestrojte lichoběžník nerovnoramený, když se dají obě úhlopříčny, věčší rovnoběžka a jedno rameno.

5. Různoběžník, (různoběžec, trapezoid).

§. 68. Různoběžník sestává ze čtyr nerovných, různoběžných stran a čtyr úhlů; má tedy ouhrnem 8 částek.

Obr. 77.



Sestrojí-li se různoběžník třemi stranami a dvěma úhly až k bodům konečným C a D, (obr. 77), má se ještě vyhledat strana CD a dva úhly. Tyto částky se však sestrojením udají samy, když se totiž body C a D spojí přímkou CD.

Jestliže se dvěma stranama a třemi úhly obrázec sestrojuje (obr. 77), scházejí ještě dvě strany a jeden úhel k doplnění celého obrazce. A však i v tomto pádu se částky, kteréž se nedostávají, sestrojením udají, totiž prodloužením ramen úhlů A a C.

Z toho vysvitá, že k sestrojení určitého různoběžníka *pět* částek dostačí, o tři totiž méně, než částek těch různoběžník dohromady má.

Dá se tedy různoběžník sestavit:

1. čtyrmi stranami a jedním úhlem,
2. třemi stranami a dvěma úhly,
3. dvěma stranama a třemi úhly.

Jednou stranou a čtyrmi úhly se různoběžník se určitě sestrojiti nemůže. Úloha tato je neurčitá, jelikož by se délka stran ku př. délka té strany, kteráž mezi druhým a třetím úhlem ležeti má, určitě ustanoviti nedala.

Z toho zároveň vidíme, že počet stran počtem úhlů nikdy o dvě

jí společnou základnici, stojí spojovací přímka ta k základnici kolmo a rozpoluje ji.

Protož pravíme:

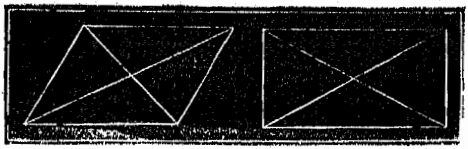
Vedeme-li ve čtverci aneb v kosočtverci obě úhlopříčny, stojí přímky tyto k sobě kolmo.

Jelikož je trojúhelník BCD ≅ ACD, je AC = BD, t. j:

Ve čtverci jsou úhlopříčny sobě rovny.

Trojúhelníky EFG a FGH se neshodují; *v kosočtverci jsou tedy úhlopříčny nerovné.*

Obr. 68.



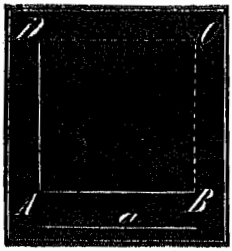
V rovnoběžcích nerovnostranných, obdélníku a kosodélníku (obr. 68.) stojí úhlopříčny k sobě šikmo a jsou v obdélníku rovné, v kosodélníku nerovné.

V jaké trojúhelníky (dle úhlů a stran) rozděluje se jednou úhlopříčnou čtverec, kosočtverec, obdélník a kosodélník?

Poznam. V rovnoběžníku se kterákoli strana za základnou vzíti může; kolmá od přímky základné k druhé rovnoběžce udává výšku rovnoběžníka. —

§. 62. *Má se danou stranou sestrojit čtverec*, (obr 69).

Obr. 69.

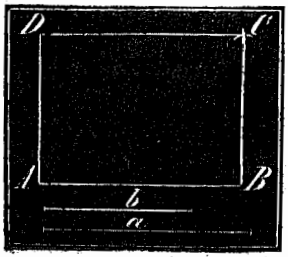


Jelikož je čtverec čtyrúhelník rovnostranný pravoúhelný, sestrojí se určitá strana AB = *a*, při ní pravý úhel; z neurčitého ramena úhlu toho učiní se AC = AB = *a*. Z bodů B a C se délkou *a* opíšou průsečné oblouky. Průsečný bod D se spojí s bodem B a C.

Kolik částek potřebujeme tedy k sestrojení čtverce?

§. 63. *Má se dvěma stranama sestrojit obdélník.* (obr. 70.)

Obr. 70.



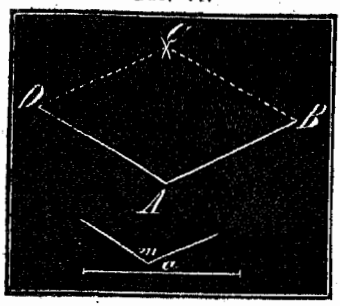
Vede se AB = *a* při ní sestrojí se pravý úhel a z neurčitého ramena se odměří druhá strana AD = *b*; z bodů konečných B a D opíšou se poloměrem oblouky až k průseku; průsečný bod se pak spojí s body B a D.

Kolik částek je zapotřebí k sestrojení obdélníka?

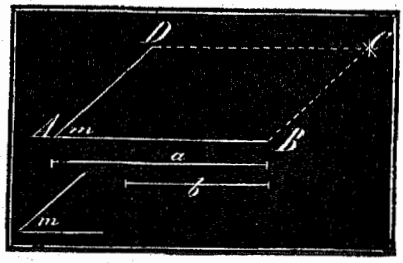
§. 64. *Danou stranou* **a** *a určitým úhlem* **m** *má se kosočtverec* (*Rhombus*) *sestrojit*, (obr. 71).

Vede se strana AB = a, při ní sestrojí se daný úhel m a z druhého ramena se odměří AD = AB = a; z konečných bodu B a D se touž délkou opíšou průsečné oblouky; průsečný bod C se pak spojí s body B a D.

Obr. 71.



Obr. 72.



Kolik a jakých částek je zapotřebí k sestrojení kosočtverce?

Sestrojte kosočtverce danou stranou, úhel daný obnášej 60°, 120°, 130°.

§. 65. *Má se sestrojit kosodélník — rovnoběžec — dvěma stranama a úhlem, jejž strany ty svírati mají,* (obr. 72.)

Vede se strana AB = a, při ní sestrojí se daný úhel m, z neurčitého ramena se odměří strana AD = b; z bodů B a D opíšou se poloměrem b a a průsečné oblouky, průsek C spojí se s bodem B a D.

Kolik a jakých částek vyžaduje se k sestrojení určitého kosodélníka — rovnoběžce?

Sestrojte rovnoběžce danými stranami, sevřený úhel obnášej 40°, 70°, 100°.

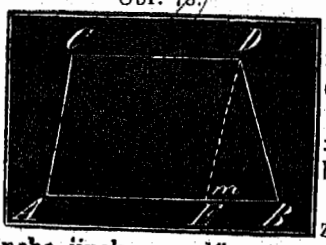
Dodatek. 1. Sestavte dle obr. 67. čtverec, když se dá úhlopříčna; kosočtverec, když se dají obě úhlopříčny.

2. Sestavte dle obr. 68 obdélník když se dá úhlopříčna a jedna strana; kosodélník, když se dají dvě strany a jedna úhlopříčna.

4. Lichoběžník a vlastnosti jeho.

§. 66. Když jsou v lichoběžníku různoběžné strany sobě rovny, sluje lichoběžník *rovnoramený* (gleichschenklig); jsou-li strany ty nerovné, *nerovnoramený* (ungleichschenklig).

Obr. 73.



Vedeme-li v lichoběžníku ABCD. (obr. 73). k některé z obou různoběžek přímku rovnoběžnou, rozdělí se lichoběžník na dva díly: rovnoběžník ACDE a trojúhelník BDE.

Z obrazce toho vysvitá, že jest CD = AE, BE = AB — CD, že jsou v lichoběžníku strany rovnoběžné vždy nerovné.

Trojúhelník BDE sestává ze stran různoběžných a z nadbytku větší rovnoběžky nebo jinak z rozdílu stran rovnoběžných.

jednotky převyšen býti nesmí, nebo jinak, že počet daných stran jen o jednu jednotku může býti menší, než počet daných úhlů.

Mají se ony tři úlohy vykonati.

Sestavte různoběžník čtyrmi stranami a úhlopříčnou.

6. O shodnosti čtyrúhelníků.

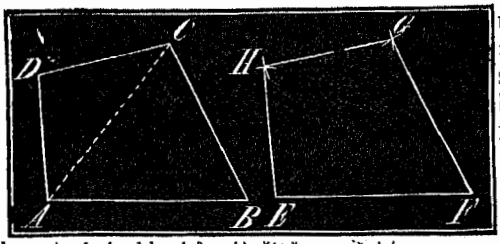
§. 69. Čtyrúhelníky *se shodují*, jestliže se jeden druhým *úplně krýti* dá. Shodné čtyrúhelníky mají *vzájemně rovné* částky.

Jsou-li na opak u dvou čtyrúhelníků částky jednoho rovny stejnolehlým částkám druhého, pravíme, že se čtyrúhelníky tyto shodují.

Kdy se shodují čtverce, kosočtverce, obdélníky, kosodélníky?

§. 70. *Má se k danému čtyrúhelníku sestrojiti shodný,* (obr. 78).

Obr. 78.



Je-li ABCD daný čtyrúhelník, vede se strana EF = AB; ostatní body G a H se vyhledají průsečnými oblouky, ježto se vedou stranami BC, CD, AD a úhlopříčnou AC.

Poznam. Uhlopříčna se v obrazci daném vésti nemusí; délka její se kružidlem vyměří a k sestrojní oblouků náležitě upotřebí.

Sestrojte čtyrúhelníky libovolně a sestavte k ním zároveň čtyrúhelníky shodné. —

V. Úhelníky vůbec.

1. Částky úhelníka.

§. 71. Obrazec mnohými přímkami obmezený nazývá se *mnohoúhelník* (polygon, Vieleck) neb krátce *úhelník.*

Každý úhelník má tolik stran, co má úhlů.

Dle počtu úhlů jmenují se úhelníky: trojúhelník, čtyrúhelník, pěti, šestiúhelník atd.

Strany v úhelníku mohou býti buď *rovné* aneb *nerovné.* Jsou-li v úhelníku všechny strany rovné, nazývá se *úhelník rovnostranný* (gleichseitig); jsou-li nerovné, *nerovnostranný* (ungleichseitig).

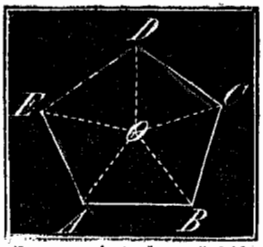
Taktéž mohou býti úhly v úhelníku buď *rovné* aneb *nerovné*; jsou pak úhelníky *rovnoúhelné* (gleichwinklig) a *nerovnoúhelné* (ungleichwinklig).

Úhelníky *rovnostranné, rovnoúhelné* nazývají se *pravidelné* (regelmäßig, regulär); jsou-li úhly a strany nerovné, jmenují se *nepravidelné* (unregelmäßig).

2. Úhly v úhelníku.

§. 72. *Úhly vnitřní.* Úhly k úhelníku náležející jmenují se *vnitřní* (innere Winkel).

Obr. 79.



Spojíme-li uvnitř úhelníka ABCDE (obr 79.) některý bod ku př. O se všemi vrcholy, rozdělí se úhelník ten na tolik trojúhelníků kolik stran má. Pětiúhelník tedy na pět trojúhelníků.

V každém trojúhelníku obnášejí všechny tři úhly dohromady dva pravé či 180°. Pět trojúhelníků, činí tedy 5. 2R*.

Úhly kolem bodu O nenáležejí k pětiúhelníku; má tedy pětiúhelník o to méně, než pět trojúhelníků, co tyto úhly kolem bodu O dohromady obnášejí. Úhly kolem jednoho bodu činí 4R.

V pětiúhelníku obnáší tedy součet vnitřních úhlů 5. 2 R — 4 R = 10 R — 4 R = 6 R = 540°.

Jestiť patrno, že se týmž způsobem každý úhelník dá na tolik trojúhelníků rozděliti, kolik má stran. A protož pravíme:

V každém úhelníku obnáší součet — vnitřních — úhlů tolikkrát 2R, co má úhelník stran méně 4R.

Má-li tedy úhelník 6 stran, obnáší součet vnitřních úhlů jeho: 6. 2R — 4R = 8R = 720°; má-li 7 stran, 7. 2R — 4R = 10R = 900°.

Osmiúhelník má: 8. 2R — 4R = 12R = 1080°.

Je-li vůbec počet stran n, má n- úhelník: n. 2R — 4R.

Je-li úhelník rovnoúhelný, obnáší jeden úhel tolikatý díl celého součtu, kolik je úhlů v úhelníku.

Jeden úhel obnáší tedy v rovnoúhelném

trojúhelníku: $\frac{3.\ 2R - 4R}{3} = \frac{2R}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$,

čtyrúhelníku: $\frac{4.\ 2R - 4R}{4} = \frac{4R}{4} = 90°$,

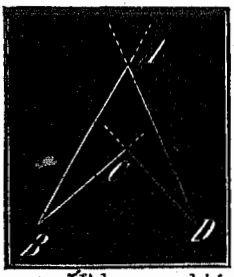
pětiúhelníku: $\frac{5.\ 2R - 4R}{5} = \frac{6R}{5} = \frac{540°}{5} = 108°$,

šestiúhelníku: $\frac{6.\ 2R - 4R}{6} = \frac{8R}{6} = \frac{720°}{6} = 120°$.

V rovnoúhelném n- úhelníku je tedy jeden úhel: $\frac{n.\ 2R - 4R.}{n}$ —

*) Pravé úhly značí se písmenou R.

Obr. 80.



§. 73. V úhelníku nerovnoúhelném mohou býti úhly: *ostré, pravé, tupé* ano i *vypuklé;* tyto nazývají se pak *vběžné* (einspringende Winkel) (obr. 80).

Zdá-li je v úhelníku ten neb onen úhel vypuklý aneb dutý, pozná se, když ramena úhlu toho vrcholem prodloužíme. Vpadnou-li prodloužky dovnitř úhelníka, je úhel vypuklý, vpadnou-li zevnitř, je úhel dutý. V obrazci 80 je úhel C vypuklý, úhel A ale je dutý.

Úhly vppuklé jsou věčší než 180°. V trojúhelníku nemůže žádný úhel býti vypuklý; v čtyrúhelníku (obr. 80.) může býti toliko jeden, v pětiúhelníku mohou býti dva, v šestiúhelníku tři atd.

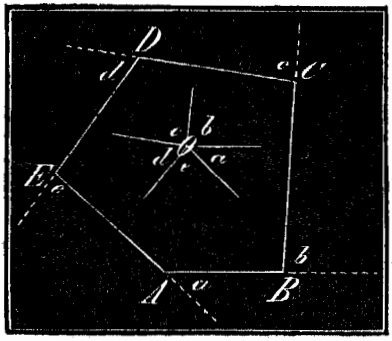
V úhelníku je počet úhlů vypuklých vždy o tři jednotky menší, než počet vrcholů neb stran.

Má-li úhelník jen samé duté úhly, nazývá se *dutoúhelný* (konkavwinklig). Pětiúhelník ABCDE (obr. 79) je dutoúhelný.

Sestrojte pěti, šesti, sedmi, osmi-úhelníky s úhly vypuklými. Kolik vypuklých úhlů může býti v sedmi, osmi-úhelníku?

§. 74. *Úhly zevnitřní.* Prodloužíme-li v úhelníku dutoúhelném ku př. v pětiúhelníku ABCDE obr. 81, každou stranu jedním vrcholem, vzniknou úhly *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. ježto se nazývají úhly *zevnitřní* (äußere Winkel).

Obr. 81



Vedeme-li z libovolného bodu uvnitř pětiúhelníka rovnoběžky k všem stranám, jsou úhly kolem bodu toho rovny úhlům zevnitřním; mají s nimi ramena na vzájem stejnosměrně rovnoběžná.

Součet úhlů $a + b + c + d + e$ kolem jednoho bodu obnáší 360° neb 4R; protož pravíme:

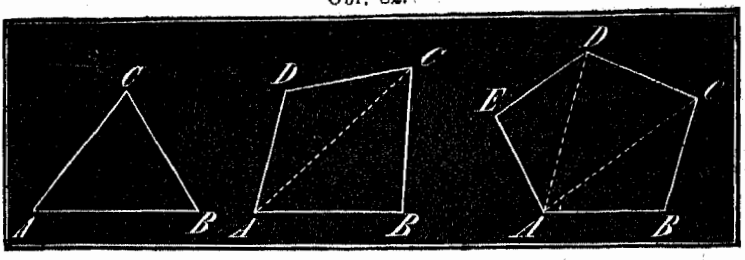
Zevnitřní úhly úhelníka dutoúhelného obnášejí součtem 360° neb *4R.*

3. Úhlopříčny v úhelníku.

§. 75. Úhlopříčna (Diagonale) jest přímka, ježto vrcholy spojuje, kteréž v úhelníku stranami přímo spojeny nejsou.

V trojúhelníku ABC (obr. 82.) se tedy úhlopříčna vésti nemůže, poněvadž každý vrchol s oběma druhýma přímo spojen jest.

Obr. 82.



V čtyrúhelníku ABCD, (obr. 82.) není bod A přímo spojen s bodem C; má tedy čtyrúhelník ABCD z bodu A jednu úhlopříčnu AC.

Pětiúhelník ABCDE (obr. 82.) má z bodu A dvě úhlopříčny AC a AD.

Jak vidíme, může se v úhelníku z určitého bodu vždy o jeden bod v pravo i v levo úhlopříčna vésti; z bodu A v pravo k bodu C a v levo k bodu D.

Vezmou-li se v úhelníku tři za sebou jdoucí body E, A, B, (obr. 82.) nemůže se z bodu A ani k boduE, ani k bodu B úhlopříčna vésti. *Počet úhlopříčen z určitého bodu bude tedy o tři jednotky menší, než počet vrcholů neb stran.* Jest tedy úhlopříčen z jednoho bodu:

v čtyrúhelníku 4 — 3 = 1
v pětiúhelníku 5 — 3 = 2
v šestiúhelníku 6 — 3 = 3

Kolik bude úhlopříčen z jednoho bodu v sedmi, osmi, devítiúhelníku?

Úhlopříčnami rozděluje se úhelník na trojúhelníky.

Čtyrúhelník dělí se úhlopříčnou na dva trojúhelníky (obr. 82); v čtyrúhelníku jest tedy počet trojúhelníků o 2 jednotky menší než počet stran.

Přibude-li k čtyrúhelníku jedna strana, nebo jinak, sestrojí-li se pětiúhelník, přibude jedna úhlopříčna a jeden trojúhelník. V pětiúhelníku bude tedy počet trojúhelníků opět o 2 jednotky menší než počet stran; jestiť 5 — 2 = 3.

A tak bude dále v každém mnohoúhelníku, protož pravíme:

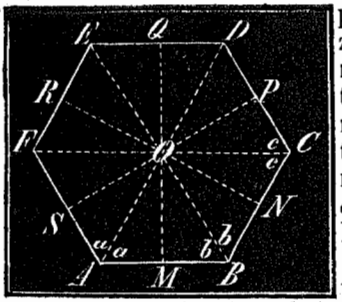
Počet trojúhelníků, kteréž se v úhelníku úhlopříčnami utvoří, jest vždy o dvě jednotky menší než počet stran úhelníka toho.

Na kolik trojúhelníků rozdělí se úhlopříčnami šesti, sedmi, osmiúhelník?

4. Úhelníky pravidelné.

§. 76. Rozpůlíme-li v pravidelném úhelníku (obr. 83.) dva k též

Obr. 83.



straně přilehající úhly a prodloužíme-li přímky rozpolovací až k průseku O, nazývá se bod tento *střed úhelníka*. Spojíme-li totiž všechny vrcholy s bodem tímto a spustíme-li zároveň z bodu toho kolmice k všem stranám, utvoří se shodné trojúhelníky AOB $\cong$ BOC $\cong$ COD atd; neboť jest AB = BC = CD . . . . úhel $a = b = c$ . . . . . , jest tedy AO = BO = CO . . . . , OM = ON = OP . . .

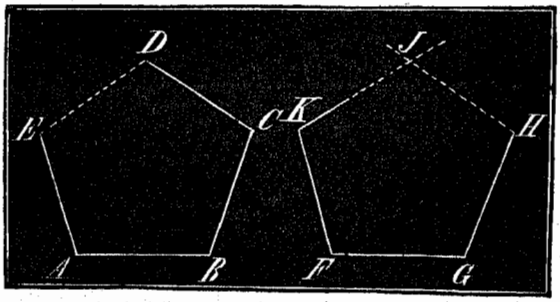
Od bodu O mají tedy jak vrcholy, tak i strany rovnou vzdálenost.

Z toho jestiť patrno, že mnohoúhelníky nepravidelné středu nemají.

5. Sestrojování úhelníků.

§. 77. Každý úhelník má tolik úhlů co stran, ouhrnkem tedy má úhelník dvakrát tolik částek co stran neb úhlů.

Obr. 84.



K sestrojení úhelníka není zapotřebí, aby se všechny částky jeho udaly. Sestaví-li se na př. pětiúhelník (obr. 84.) až k bodům D a E, schází ještě jedna strana DE a dva úhly D a E. Tyto částky se samy sestrojením udají, totiž spojením bodů D a E přímkou DE.

Sestrojíme-li pětiúhelník (obr. 84.) až k bodům K a H a v těchto bodech úhly K a H, scházejí ještě dvě strany a jeden úhel. Tyto částky se ale opět samy sestrojením udají; neboť prodloužíme-li ramena úhlů K a H, protnou se ramena tato v bodu J a obrazec se doplní.

Ač tedy sestává pětiúhelník z deseti částek, potřebujeme k sestrojení jeho o tři částky méně, totiž 10 — 3 = 7 částek.

Z úvahy této jestiť patrno, že pravidlo to o každém úhelníku platnost míti bude, protož pravíme:

K sestrojení úhelníka potřebuje se vždy o tři částky méně, než má úhelník stran a úhlů dohromady.

K sestrojení pětiúhelníka potřebujeme tedy 7 částek a sice:

1. *Pět* stran a *dva* úhly,
2. *čtyry* strany a *tři* úhly.
3. *tři* strany a *čtyry* úhly.

Pozn. Z daných částek nesmí počet úhlů nikdy o dvě neb více jednotek převyšovat počet daných stran. Dvěma stranama a pěti úhly nemůže se pětiúhelník určitě sestavit; neboť při dvou stranách mohou ležet jen tři úhly. Kdyby se čtvrtý a pátý úhel dále sestrojil, byly by neurčité ty strany, které ještě scházejí a mezi těmito úhly ležeti mají. —

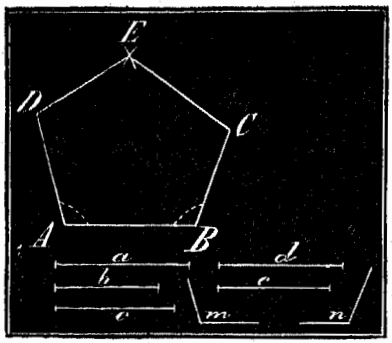
Kolik částek a jakých bude zapotřebí, má-li se šestiúhelník sestavit?

Má-li se úhelník pravidelný sestavit, potřebujeme k tomu, co se stran týče, jen jednu stranu, poněvadž jsou všechny strany rovny. Úhly jsou též rovny a dle učení v § 72. vypočte se jeden úhel, když se součet všech úhlů na tolik rovných dílů rozdělí, kolik stran úhelník má. Má-li úhelník šest stran, obnáší jeden úhel šestý díl celého součtu, totiž: $\frac{6.\ 2R - 4R}{6} = \frac{8R}{6} = \frac{720^0}{6} = 120^0$

K sestrojení pravidelného úhelníka dostačí tedy toliko jedna strana.

§. 78. *Má se nepravidelný pětiúhelník sestavit pěti stranami a dvěma úhly,* obr. 85.

Obr. 85.



Vede se strana AB = a, při ní se oba dané úhly sestrojí, úhel A = m, B = n, od neurčitých ramen úhlů těchto utne se BC = b, AD = c; z bodů C a D opíšou se stranami d a e průsečné oblouky. Průsečný bod E spojí se s body D a C.

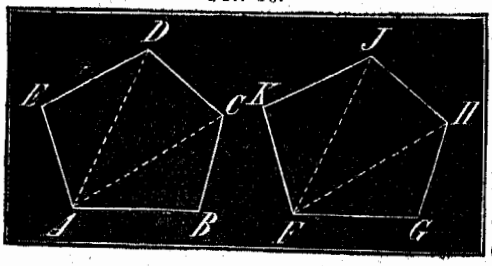
Sestavte pětiúhelníky čtyrmi stranami a třemi úhly; třemi stranami a čtyrmi úhly.

Sestavte pětiúhelník pěti stranami a úhlopříčnama (jenž vycházejí z téhož bodu.) —

Sestavte danou stranou pětiúhelník pravidelný.

§. 79. *Má se k danému úhelníku sestaviti shodný* (obr. 86).

Obr. 86.



Úhlopříčnami rozdělují se úhelníky na trojúhelníky. Jsou-li dva úhelníky ABCDE a FGHIK shodné, shodují se i trojúhelníky ABC a FGH, ACD a FHI, ADE a FIK; neboť by se vzájemně kryly, kdybychom úhelníky ty jeden na druhý náležitě položili.

Má-li se tedy k danému úhelníku sestrojit shodný, provede se sestrojení toto stranami a úhlopříčnami, totiž tak, že se k trojúhelníkům ABC, ACD, ADE sestrojí shodné trojúhelníky FGH, FHJ, FJK. Rozumí se, že se tyto trojúhelníky týmž pořádkem k sobě sestavovati musí, v jakém jsou ony trojúhelníky v úhelníku daném.

Poznam. Když se k danému obrazci shodný obrazec sestavuje, mohou se stranami a délkami úhlopříčen nejprvé vyhledati průsečné body H, J, K, ježto se pak přímkami spojí.

V obrazci daném se úhlopříčny ani vésti nemusí, délky jejich se kružidlem vyměří a k strojení náležitě upotřebí. —

Z výkonu toho vyvodí se tato věta:

Úhelníky nepravidelné se shodují, když sestávají z trojúhelníků vzájemně shodných.

Kdy shodují se dva pravidelné úhelníky?

Sestrojte šesti, sedmi, osmiúhelník a ku každému sestavte úhelník shodný. —

VI. Vypočítání velkosti obrazcův přímočárných.

1. Obměr obrazců.

§. 80. Když se v obrazci všechny strany sečtou, nazývá se součet jejich *obměr* obrazce (Umfang, Perimeter).

Obměr trojúhelníka jest tedy roven součtu všech tří stran. Jsou-li strany tyto:

4′, 5′, 3′, je obměr O:

$O = 4 + 5 + 3 = 12'$.

Jsou-li strany a, b, c, je obměr:

$O = a + b + c$.

Jsou-li strany nepravidelného čtyrúhelníka a, b, c, d, je obměr jeho O:

$O = a + b + c + d$.

Je-li $a = 4'$, $b = 5'$, $c = 6'$, $d = 7'$; je:

$O = 4 + 5 + 6 + 7 = 22'$.

Je-li obrazec pravidelný, jsou všechny strany sobě rovny. Obměr obrazce pravidelného se tedy vypočte, když se jedna strana tolikkrát vezme, kolik stran obrazec má, nebo jinak, když se jedna strana znásobí počtem všech stran.

Je-li jedna strana s a počet všech stran n, je obměr O:

$O = n.\ s$.

Jak se vypočítá obměr trojúhelníka rovnoramenného, obměr rovnoběžníka?

Jak se vypočítá obměr pravidelného troj, čtyr-pětiúhelníka?

Když je znám obměr úhelníka pravidelného, může se na opak vypočísti strana úhelníka toho, když se totiž obměr rozdělí počtem stran, ku př: Obměr trojce obnáší 18′, mnoho-li obnáší jedna strana s?

$s = \frac{18}{3} = 6'$

Obměr čtverce obnáší 22′; mnoho-li obnáší jedna strana?

2. Výměr obsahu obrazcův.

§. 81. *Velkost obrazce v rozsáhlosti plošné jmenuje se obsah neb plocha obrazce.*

K výměru plochy potřebujeme určité měřídko — *jedničku plošnou* (Flächeneinheit.) —

Jedničkou plošnou je čtverec (Quadrat).

Tento výměrový čtverec pojmenuje se dle délky stran svých a sice: Obnáší-li strana jeho jeden sáh (1°), nazývá se *sáh čtvercový* neb *čtverečný* a znamená se takto: 1□°; obnáší-li strana 1′, sluje *čtvercová stopa* neb *střevíc čtverečný* a píše se 1□′; *palec čtvercový* značí se touto známkou 1□″.

Veliké plochy měří se míli čtverečnou = 1□ *m.*

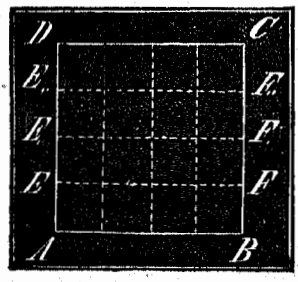
Obsah obrazce měl by se vždy bezprostředně vyměřit; mělo by se totiž vyšetřiti, kolikkrát jednička míry obsažena jest v té ploše, kteráž se vyměřiti má.

Tímto způsobem plochy vyměřovati t. j. obsah jejich vyhledávat, bylo by častokráte obtížné, ano něky nemožné. Jsou však jistá pravidla, dle nichž se plochy se vší přesností vyměřiti, vlastně vypočítati mohou.

Když se obsah určité plochy dle jistých pravidel vyhledá, jmenuje se výměr takovýto výměr *prostředečný*; vyhledá-li se ale obsah vyměřováním, sluje výměr *bezprostředný*.

§. 82. *Výměr obsahu čtverce,* (obr. 87.)

Obr. 87.



Obnáší-li v čtverci jedna strana 4″, může se měřídko 1□″ při té straně 4krát do čtverce toho položit. Plošná část AEFB obsahuje 4□″.

Vedeme-li v čtverci tom rozměry rovnoběžně, vznikne křížkovaný obrazec, rozdělený na palce čtverečné. Část EE„F„F obsahuje též 4□″, taktéž i část E„DCF„. Celkem obsahuje čtverec ABCD čtyry při straně AB položené čtverečné palce tolikkrát, kolik jednotek šířka AD čítá, tedy 4. 4 = 16□″.

Byla-li by strana AB = 5″, byla by plocha = 5. 5 = 25□″; pročež se toto pravidlo stanoví:

Obsah čtverce se vypočítá, když se délka jedné strany sama sebou znásobí, nebo krátce, *když se jedna strana sama sebou znásobí.*

Obnáší-li strana sáhy, stopy a palce, uvedou se nestejnojmenná čísla nejprvé na stejné jméno, ku př. Má se vypočítat plocha čtverce, jehož strana obnáší 3° 5′ 10″.

3° = 3. 6 = 18′

$3^\circ\ 5' = 18 + 5 = 23'$
$23.\ 12 = 276''$
$3^\circ\ 5'\ 10'' = 276'' + 10'' = 286''$
Plocha čtverce toho jest tedy:
$Pl = 286.\ 286 = 81796\square''$.

Když se takto plocha čtverce vypočítá, může se jméno nižší uvésti ve vyšší. Jestiť čtverečný sáh $1\square^0 = 6.\ 6 = 36\square'$; čtverečný střevíc $1\square' = 12.\ 12 = 144\square''$.

Čtverečné palce se tedy uvedou ve vyšší jméno, totiž čtverečné stopy, když se číslem 144 dělí; stopy čtverečné uvedou se na sáhy čtverečné, když se dělí číslem 36. Obsah $81796\square''$ činí tedy:
$81796 : 144 = 568\square'\ 4\square'$ a
$568 : 36 = 15\square^\circ\ 28\square'$
Jest tedy $P = 15\square^\circ\ 28\square'\ 4\square''$.

Mohou se však hned z počátku nižší jmena uvésti v nejvyšší jméno, ku př. Strana obnáší $4^\circ\ 3'\ 9''$, jak velká je plocha čtverce toho;

Jestiť $9'' = \frac{9'}{12} = \frac{3'}{4} = 0{\cdot}75'$,

$3'\ 9'' = 3{\cdot}\ 75' = \frac{3{\cdot}75^\circ}{6} = 0{\cdot}625^\circ$

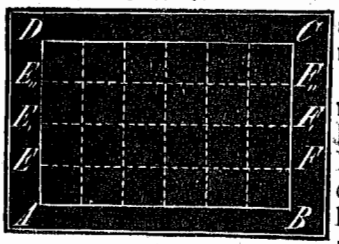
$4^\circ 3'\ 9'' = 4{\cdot}625^\circ$
Jest tedy $P = 4{\cdot}625 \times 4{\cdot}625 = 21{\cdot}39\square^\circ$ . . .

Čtverečná míle $1\square\ m$ rovná se : $4000 \times 4000 = 16000000\square^\circ$. $1600\square^\circ$ nazývá se jitro a rovná se čtverci, jehož strana obnáší 40°.

Strany čtverců obnášejí $5^\circ\ 4'$, $3^\circ\ 4'\ 8''$, $2^\circ\ 5'\ 11''$; vypočítejte obsah čtverců těchto.

§. 83. *Obsah obdélníka* (obr. 88.)

Obr. 88.



V obdélníku ABCD jsou strany AB a AD nerovné; delší AB nazývá se *délka*, menší AD sluje *šířka* nebo *výška*.

Má-li délka 6'' a šířka 4'', můžeme měřídko $1\square''$ na délku AB v 6krát položit. Část AEFB obnáší $6\square''$, taktéž část EE,F,F, E,E,,F,,F, a E,,DCF,,. Celá plocha obdélníka ABCD obnáší tolikkrát $6\square''$, kolik jednotek šířka AD čítá; jest tedy $= 6.4 = 24\square''$.

Plocha obdélníka se tedy vypočte, když se výměr délky znásobí výměrem šířky anebo krátce, *když se délka šířkou znásobí.* —

Strany obdélníka jsou $3^\circ\ 5'$, $2^\circ\ 3'$; mnoho-li obnáší plocha?

Pozn. Obsah obdélníka rovná se tedy součinu z výšky a délky aneb jinak z výšky a základnice. Poznačme plochu písmenou p, výška budiž v základnice z; jest tedy: $p = z\ v$.

Když je plocha p známa a známe-li zároveň základnici, vypočítá se výška, když se obsah plochy p základnicí rozdělí. Je-li ku př. $p = 168\square''$, $z = 28''$, je

$$v = \frac{p}{z} = \frac{168}{28} = 6''$$

Když je plocha a výška známa, vypočítá se základnice, když se plocha výškou dělí, ku př.: $p = 196.\square''$, $v = 7''$, $z = ?$

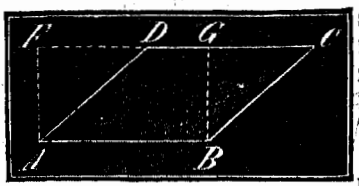
$$z = \frac{p}{v} = \frac{196}{7} = 28''.$$

Plocha p obnáší $2\square^0\ 30\square'$, $z = 1^0\ 5'$; v?

§. 84. *Obsah rovnoběžníka kosoúhelného,* (obr. 89.)

Měl-li by se rovnoběžník kosoúhelný měřídkem čtverečným vyměřit, nemohlo by se vyměření toto provésti; neboť se pravý úhel měřídka nemůže vměstnati na úhel kosý. Abysme jisté pravidlo nalezli, dle něhož se plocha kosoúhelného rovnoběžníka vypočítá, proměníme kosoúhelný rovnoběžník ten v rovnobežník pravoúhelný.

Obr. 89.



Sestrojíme-li v bodech A a B kolmé, vznikne pravoúhelný rovnoběžník ABGF, jenžto se plochou svou rovná rovnoběžci kosoúhelnému ABCD; neboť jsou trojúhelníky ADF a BCG shodné. Jsou totiž přímky AF = BG, AD = BC, rovné jsou též stejnolehlé úhly. Jest-li se tedy v bodu B z obrazce ABCD trojúhelník BCG odejme a v bodu A shodný trojúhelník ADF přidá, neubyde ničehož na plošném obsahu obrazce ABCD. Trojúhelníkem ADF stane se z kosoúhelného rovnoběžníka ABCD pravoúhelný rovnoběžec ADGF.

Plocha ADGF je = AB. AF. (§. 83.)

Jelikož je plocha ADGF = ABCD, jest tedy též ABCD = AB. AF.

Délka neb základnice AB náleží k oběma obrazcům, taktéž i šířka neb výška AF; vidíme tedy, že jest rovnoběžník kosoúhelný roven rovnoběžci pravoúhelnému, když mají stejnou základnici a stejnou výšku.

Z toho jde toto pravidlo:

Plocha rovnoběžníka kosoúhelného se vypočítá, když se výměr délky neb *základnice výměrem šířky* neb *výšky znásobí,* anebo krátce, *když se základnice výškou znásobí.*

Obnáší-li AB 8'', výška AF 3'', je plocha ABCD $= 3 \times 8 = 24\square''$.

V rovnoběžníku kosoúhelném vyměří se tedy základnice, pak se vede k základnici od protější rovnoběžky kolmá a výměr této kolmé — výšky rovnoběžníka — se znásobí výměrem základnice.

Sestrojte dvěma stranama a kosým úhlem rovnoběžník, vyměřte výšku a základnici jeho, vypočítejte obsah. —

§. 85. *Obsah trojúhelníka.*

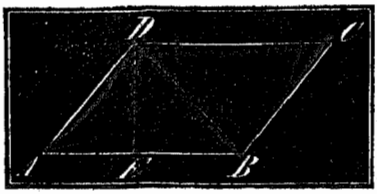
Vedeme-li v rovnoběžníku ABCD (obr. 90) úhlopříčnu BD, utvoří se dva rovné trojúhelníky ABD a BCD. Jeden o sobě obnáší tedy polovici plochy rovnoběžníka ABCD.

Je-li AB základná, DE výška rovnoběžníka ABCD, je obsah je-

ho = AB. DE; pročež bude obsah trojúhelníka ABD = $\frac{AB.\ DE.}{2}$

Každý trojúhelník může se tedy považovat za polovici rovnoběžce, aneb obdélníka, jenž má s trojúhelníkem, tím společnou základnici a výšku. Protož se stanoví toto pravidlo:

Obr. 90.



Plocha trojúhelníka rovná se součinu z výměru základnice a výšky dělenu dvěma.

V součinu tomto může se dělitel psáti buď pod základnicí anebo pod výškou. Pravidlo zní pak takto:

Obsah trojúhelníka se vypočítá, když se polovičná základnice znásobí výškou, anebo *když se polovičná výška znásobí základnicí.*

Ku příkladu: $z = 8^0$, $v = 50^0$,

plocha p je: $p = \frac{8}{2} \times 5 = 20\square^\circ$

V trojúhelníku pravoúhelném béře se obyčejně jedna z odvěsen za základnici, druhá je pak výškou; ku př. jedna odvěsna budiž 3°, druhá 4°; obsah trojúhelníka toho je pak:

$$p = \frac{4}{2} \times 3 = 6\square^\circ$$

Když se tedy dá výška v a základnice z, může se dle uvedeného pravidla vypočítat plocha p. Jestiť:

$$p = \frac{z}{2} \times v \text{ aneb } p = z. \times \frac{v}{2}$$

Známe-li na opak plochu a základnici trojúhelníka, můžeme vypočítat jeho výšku, když obsah plochy polovičnou základnicí rozdělíme; ku př. $p = 20\square^\circ$, $z = 8^\circ$, v?

$$20 : \frac{8}{2} = 20 : 4 = 5$$

$$v = 5^0$$

Když je známa plocha a výška, vyhledá se základnice, když se totiž obsah plochy polovičnou výškou rozdělí ku př.:

$p = 12\square^\circ$, $v = 3^\circ$, z?

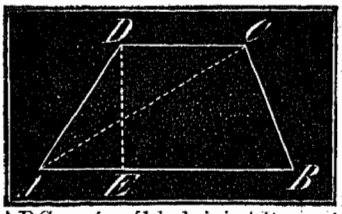
$$12 : \frac{3}{2} = 12 \times \frac{2}{3} = 8^\circ$$

Je tedy $z = 8^0$.

Plocha pravoúhelného trojúhelníka obnáší $3\square^0\ 32\square'$, jedna odvěsna 2° 2′; jak velká je odvěsna druhá?

§. 86. *Obsah lichoběžníka.*

Obr. 91.



Veďme v lichoběžníku ABCD (obr. 91.) úhlopříčnu AC. Úhlopříčnou tou rozdělí se lichoběžník na dva trojúhelníky ABC a ACD. Vedeme-li od jedné rovnoběžky k druhé přímku kolmou DE, nazývá se kolmice tato *výškou* lichoběžníka. Výška DE je zároveň výškou obou trojúhelníků ABC a ACD; trojúhelník ABC má základnici AB, trojúhelník ACD má pak základnici CD.

Obsah trojúhelníka ABC je $= \frac{AB}{2} \times DE$

a obsah trojúhelníka ACD $= \frac{CD}{2} \times DE$.

Součet obou trojúhelníků dá plochu lichoběžníka ABCD; je tedy:

$$ABCD = \frac{AB}{2} \times DE + \frac{CD}{2} \times DE,$$

což se takto píše;

$$ABCD = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) DE,$$

$\frac{AB + CD}{2}$ je polovičný součet obou rovnoběžek, pročež pravíme:

Plocha lichoběžníka se vypočítá, když se polovičný součet obou rovnoběžek výškou znásobí:

Ku př.: AB = 6″ CD = 4″, DE = 5″ ABCD $= \frac{6 + 4}{2} \times 5$ = 25□″

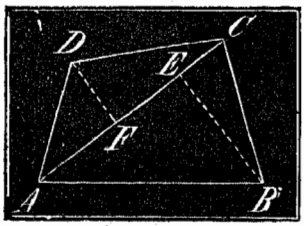
Sestrojte čtyrmi stranami lichoběžník, vyměřte rovnoběžky a výšku a vypočítejte obsah. —

§. 87. *Obsah čtyrúhelníka nepravidelného (různoběžníka)* (obr. 92.)

Veďme v různoběžníku ABCD úhlopříčnu AC a z vrcholů B a D kolmice BE a DF.

Úhlopříčnou tou dělí se různoběžník ve dva nerovné trojúhelníky; a obsah jeho rovná se součtu obou těchto trojúhelníků.

Obr. 92.



Trojúhelník ABC je $= \frac{AC \times BE}{2} = AC \times \frac{BE}{2}$,

trojúhelník ACD $= \frac{AC \times DF}{2} = AC \times \frac{DF}{2}$

Jest tedy plocha ABCD $= AC \times \frac{BE}{2} + AC \times \frac{DF}{2}$

což se takto píše: ABCD $= AC \left(\frac{BE + DF}{2}\right)$

t. j.:

Obsah čtyrúhelníka nepravidelného se vypočte, když se znásobí úhlopříčna polovicí oněch kolmic, kteréž se k ní z protějších vrcholů vedly.

Je-li AC = 8″, BE = 5″, DF = 3″, je:

$$ABCD = 8 \times \frac{5+3}{2} = 8 \times 4 = 32 \square''.$$

Sestrojte různoběžníky čtyrmi stranami a jedním úhlem, třemi stranami a dvěma úhly, dvěma stranama a třemi úhly; veďte úhlopříčnu a k ní z vrcholů protilehlých přímky kolmé, vyměřte délky ty a vypočítejte obsah oněch různoběžců.

§. 88. *Obsah úhelníka pravidelného.* (viz obr. 83.) Úhelník pravidelný může se rozdělit na trojúhelníky rovné. Spojí-li se totiž střed se všemi vrcholy, utvoří se tolik trojúhelníků, kolik stran úhelník má.

V trojúhelníku AOB stojí OM k straně AB kolmo. Kolmice tato udává vzdálenost strany této od středu O a je v trojúhelníku AOB výškou. Obsah trojúhelníka AOB je

$= AB \times \frac{v}{2}$ (§. 85.)

Vezme-li se obsah tohoto trojúhelníka tolikkrát, kolik stran úhelník má, obdržíme plochu celého úhelníka.

Má-li úhelník 6 stran, bude tedy plocha jeho P:

$$P = 6 \times AB \times \frac{v}{2}$$

Součin 6 AB udává celý obměr O a protož je plocha:

$$P = O \times \frac{v}{2} \text{ t. j.:}$$

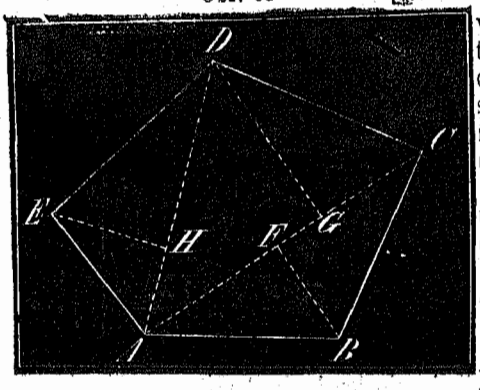
Obsah pravidelného úhelníka se vypočítá, když se obměr znásobí polovičnou vzdáleností jedné strany od středu úhelníka toho.

Ku př.: Strana pravidelného šestiúhelníka obnáší 3″, $v = 2{\cdot}59''$; jak velký je plošný obsah?

$$P = 6 \times 3 \times \frac{2{\cdot}59}{2} = 9 \times 2{\cdot}59 = 23{\cdot}31 \square''$$

§. 89. *Plocha úhelníka nepravidelného.*

Obr. 93



Plocha obrazcův nepravidelných dá se vypočítat takto: Rozdělí se úhlopříčnami obrazec v trojúhelníky a tyto se vypočítají. Součet trojúhelníků těchto dá plochu celého úhelníka.

Tak je (obr. 93) plocha úhelníka ABCDE rovna součtu trojúhelníků a sice:

ABCDE = ABC + ACD + ADE.

Budiž AC = 1′ 2″, BF = 4″, DG = 6″, AD = 11″ EH = 5″.

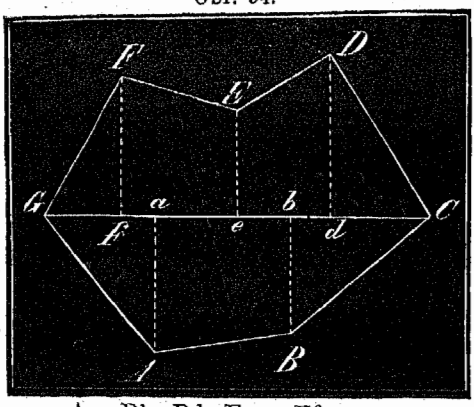
$$ABC = \frac{AC}{2} \times BF = \frac{14}{2} \times 4 = 28\square''$$

$$ACD = \frac{AC}{2} \times DG = \frac{14}{2} \times 6'' = 42\square''$$

$$AED = \frac{AD}{2} \times EH = \frac{11}{2} \times 5 = 27{\cdot}5\square''$$

Je tedy ABCDE $= 28\square + 42\square'' + 27{\cdot}5\square'' = 97{\cdot}5\square''$

Obr. 94.



Obsah nepravidelných úhelníků dá se též následným způsobem vypočítat.

Vede se dvěma nejodlehlejšíma vrcholy přímka a k této přímce se spustí kolmé ze všech ostatních vrcholů. Tím rozdělí se úhelník v trojúhelníky pravoúhelné a lichoběžníky. —

Součet všech trojúhelníků a lichoběžců dá obsah celého úhelníka.

Budiž úhelník ABCDEFG (obr. 94) Veďme GC a kolmice: Aa, Bb, Dd, Ee a Ff.

Celá plocha P je rovna součtu vzniklých obrazců.

Je tedy:

P = AaG + ABba + BCb + CDd + DEed + EFfe + FGf.

Budiž Ga = 4″, Aa = 6″, ab = 7″, Bb = 5″, bB = 6″ Dd = 8″, Cd = 4″, de = 4″, Ee = 5″, Ff = 6″, fe = 5″, Gf = 3″.

Je pak:

$$AaG = \frac{aG}{2} \times Aa = \frac{4}{2} \times 6 = 12\square''$$

$$ABba = \frac{Aa + Bb}{2} \times ab = \frac{6 + 5}{2} \times 7 = 38{\cdot}5\square''$$

$$BCb = \frac{Cb}{2} \times Bb = \frac{6}{2} \times 5 = 15\square''$$

$$CDd = \frac{Cd}{2} \times Dd = \frac{4}{2} \times 8 = 16\square''$$

$$DEed = \frac{Dd + Ee}{2} \times de = \frac{8 + 5}{2} \times 4 = 26\square''$$

$$EFfe = \frac{Ee + Ff}{2} \times fe = \frac{5 + 6}{2} \times 5 = 27{\cdot}5\square''$$

$$FGf = \frac{Gf}{2} \times Ff = \frac{3}{2} \times 6 = 9\square''$$

Součet neb plocha P $= 144\square''$

Sestrojte pěti danými stranami a dvěma úhly pětiúhelník a vypočítejte dle toho aneb onoho způsobu obsah jeho.

Sestrojte šestiúhelníky šesti stranami a třemi úhly, pěti stranami a čtyrmi úhly, čtyrmi stranami a pěti úhly; vypočítejte obsah jejich.

Úlohy

k vypočítání obměru a obsahu obrazcův přímočárných.

1. Mnoho-li obnáší plocha čtverce, jehož strana má: 3°, 3° 4′, 3° 4′ 10″?

2. Mnoho-li obnáší plocha obdélníka, jehož základnice má 4° a výška 3°; základnice 3° 5′ a výška 2° 4′?

3. Čtverec má v obměru 15 sáhů, jak velká je plocha jeho?

4. Obdélník 1′ 6″ široký má v obměru 9 sáhů, jak dlouhý je a mnoho-li obnáší plocha jeho?

5. Obdélník, jenž má 252□″, je 28″ dlouhý; mnoho-li obnáší jeho šířka?

6. Mnoho-li obnáší plocha trojúhelníka, jehož základnice má 5° 5′ 8″ a výška 4° 3′ 10″?

7. Plocha trojúhelníka obnáší 3□° a výška 1° 3′, jak velká je základnice?

8. V lichoběžci obnášejí rovnoběžky a sice
menší $a = 2°, 2° 4′, 3° 4′ 8″, 3° 5′ 10″$
větší $A = 3°, 4° 5′, 5° 4′ 9″, 6° 4′ 11″$
výška $v = 4°, 4° 2′, 3° 5′, 4° 5′ 8″$.
Jak velký je obsah plošný v případech těchto?

9. V různoběžci obnáší úhlopříčna 5′ 48′ odlehlost její od vrcholu úhlů protilehlých 3′ 64′ a 2′74′ Mnoho-li obnáší plocha různoběžce toho?

10. V pravidelném šestiúhelníku má strana 3·464′ a vzdálenost její od středu úhelníka obnáší 3′; mnoho-li činí plošný obsah?

11. Kamená deska je 9′ dlouhá, 5¾′ široká; jak velký je obměr její a jak velká je plocha?

12. Mnoho-li má v obměru deska u stolu, když je 5′ 8″ dlouhá, 3′ 10″ široká a mnoholi obnáší plocha její?

13. Jak široké je okno, když je 5′ vysoké a má v obměru 18′? Jakou zaujímá plochu?

14. Má se zahrada, kteráž tvoří obdélník, ohraditi prkny. Mnoholi bude zapotřebí prken, když je zahrada tato 32° 4′ dlouhá a 24° 5′ široká a když je každé prkno 1′ 3″ široké?

15. Mnoho-li čtvercových palců dalo by se vystříhat z archu papíru, jehož je 20″ dlouhý a 16″ široký?

16. Kus sukna je 32 loket dlouhý a 1¾ lokte široký; mnoho-li čtverečných střevíců obnáší, když má loket 2·465′?

17. Pole má podobu obdélníka, mnoho-li obnáší plocha jeho, když je 28° 5′ dlouhé a 16° 4′ široké?

18. Mnoho-li obnáší louka mající podobu lichoběžce, když obnáší větší rovnoběžka 68° 4′; menší 54° 2′ a vzdálenost jejich 28° 5′?

19. Místo pro budovu má podobu kosodélníka. Jedna strana obnáší 46·75° a je od strany protilehlé 13·45° vzdálena; mnoho-li obnáší plocha místa toho?

20. Jízba je 4° 2′ dlouhá, 3° 1′ široká, mnoho-li obnáší podlaha jízby této?

21. Střecha na domě má podobu lichoběžce. Střecha ta má se pokrýti plechem; mnoho-li čtverečných střevíců plechu toho bude zapotřebí, když má větší rovnoběžka 18° 2′, menší 10° 4′ a když vzdálenost jejich obnáší 3° 2′?

22. Pole má tvar pravoúhelného trojúhelníka, jehož odvěsny obnášejí 54° a 38° 5′. Jakou cenu má toto pole, když se za jitro platí 680 zl?

23. Dvůr, jenž má tvar čtverce, má se vydláždit; mnoho-li bude stát dlažba, když obnáší jedna strana dvoru 5° 5′ a když se za čtverečný sáh platí 72 kr.?

24. Mnoho-li se vyseje na pole, jež má tvar obdélníka a je dlouhé 64° a široké 16° 4′, když se na jitro 3 míry výsevku počítají?

25. Prodala se obdélná zahrada za 67 zl 64 kr. mnoho-li stál čtverečný sáh, když byla 14° 5′ dlouhá a 6° 2′ široká?

26. U zrcadla je rám 1¾″ široký; zrcadlo je 2′ 10″ vysoké a 1′ 8″ široké. Mnoho-li obnáší sklená plocha u zrcadla toho?

27. Má se dát ve dvou jizbách nová podlaha. První jizba tvoří čtverec, jenž má v obměru 25° 2′, druhá má tvar obdélníka a je 5° 2′ dlouhá, 3° 5′ široká. Mnoho-li bude stát práce tato, když se má za čtverečný střevíc platit 18 kr.

28. Má se v domě chodba, jenž je 6° 5′ dlouhá a 1° 4′ široká, nově vydláždit. Mnoho-li bude dlažba tato stát, když se má za dlážku, kteráž je 9″ dlouhá a 8″ široká i s prací 12 kr. platit?

29. V sále, jenž je 9° 5′ dlouhý, 6° 4′ široký má se dát nová podlaha. Kolik prken bude zapotřebí, když jsou prkna tato 2° 4′ dlouhá a 1′ 10″ široká?

30. Pole, ježto má tvar různoběžce a jehož úhlopříčná obnáší 48°, výšky pak obou trojúhelníků 10° 4′ a 19° 2′, má se zaměniti za jiné, kteréž se lichoběžci podobá. Lichoběžec tento je 88° dlouhý a na jednom konci 8° 1′ na druhém 9° 5′ široký. Mnoho-li se musí doplatit po 50 kr. za čtverečný sáh?

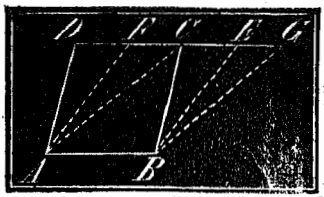
VII. O rovnosti a proměně obrazcův.

(Gleichheit und Verwandlung der Figuren).

§. 90. Obrazce nazývají se *rovné*, když obsahují mezi stranami svými *rovnou* velkosť plochy, když mají *rovný* obsah; tvar mohou míti buď *stejný* aneb *nestejný*. Ku př.: trojúhelník rovnostranný může býti obsahem svým rovný trojúhelníku rovnoramenému aneb nerovnostrannému, může býti roven čtyr- pěti- šestiúhelníku. —

§. 91. *O rovnosti rovnoběžníků.* Už se v §. 84 podotklo, že jest rovnoběžník kosoúhelný obsahem roven obdélníku, když mají stejnou základnici a stejnou výšku. Sestrojme mezi rovnoběžkama (obr. 95.) při též základnici AB kosoúhelné rovnoběžníky ABCD, ABEF, ABGC.

Obr. 95.



Porovnávejme nejprvé rovnoběžce ABCD a ABEF. Rovnoběžník ABCD je = ABCF + ADF ABEF, = ABCF + BCE.

Trojúhelníky ADF a BCE se shodují; jestiť AD, = BC = AF a rovné jsou též úhly stejnolehlé. Z toho jest patrno, že sestávají rovnoběžníky ABCD a ABEFz rovných částek a že jsou si rovny.

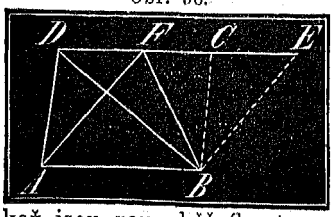
Taktéž jsou si rovny rovnoběžníky ABCD a ABGC; neboť jsou trojúhelníky ACD a BCG shodné (proč?), Dáme-li k oběma těmto rovným trojúhelníkům trojúhelník ABC, obdržíme plochy ABCD ABGC a plochy ty budou též rovné; pročež pravíme

Rovnoběžníky jsou si rovny, když stojí na stejné základnici mezi stejnýma rovnoběžkama nebo jinak, *když mají stejnou základnici a stejnou výšku.*

Sestrojte mezi rovnoběžkama na též základnici dva rovnoběžní-

ky tak, aby se dvě strany jejich protínaly; hledejte, zda-li i ty rovnoběžníky sobě rovny jsou.

Obr. 96.



§. 92. *Rovnost trojúhelníků.* Sestrojme při též základnici mezi rovnoběžkama trojúhelníky ABD a ABF (obr. 96.) Vedeme-li z bodu B k straně AD rovnoběžku BC a k straně AF rovnoběžku BE, je rovnoběžník ABCD = ABEF. Stranami BD a BF rozpolují se rovnoběžce, neboť jsou strany ty úhlopříčnami. Jelikož jsou rovnoběžníky ty sobě rovny, jsou rovny i půle jejich nebo jinak trojúhelníky ABD a ABF; pročež díme:

Trojúhelníky jsou si rovny, když stojí na stejné základnici mezi stejnýma rovnoběžkama a poněvadž mají takové trojúhelníky stejnou výšku, praví se též: *trojúhelníky jsou si rovny, když mají stejnou základnici a stejnou výšku.*

§. 93. *Má se daný trojúhelník proměniti v jiný, obsahem rovný.*

Na základě předešlé věty může se daný trojúhelník proměniti v jiný, obsahem rovný.

Příklady: 1. Má se pravoúhelný trojúhelník ABC proměnit v rovnoramený. (obr. 97).

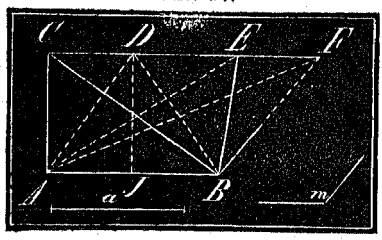
Vede se vrcholem C trojúhelníka daného se základnou AB neurčitá rovnoběžka; rozpůlí se základná v bodu J a v bodu tom se vytýčí kolmice až protne neurčitou rovnoběžku v průseku D.

Vede-li se AD a BD, je trojúhelník ABD rovnoramený a rovný danému trojúhelníku ABC.

Z výkonu tohoto vysvitá, že by se týmž způsobem trojúhelník nerovnostranný dal proměnit v rovnoramený.

2. Má se daný trojúhelník ABC proměnit v jiný s danou stranou a, (obr. 97).

Obr. 97.



Vrcholem C daného trojúhelníka ABC vede se rovnoběžka k základnici AB; z bodu B se opíše danou stranou *a* průsečný oblouk až protne neurčitou rovnoběžku v bodu E a vede se AE.

Trojúhelník ABE obsahuje danou stranu a je roven trojúhelníku ABC.

3. Má se daný trojúhelník ABC proměnit v jiný s daným úhlem m (obr. 97.)

Vede se taktéž vrcholem C k základnici AB rovnoběžka, v bo-

du B sestrojí se daný úhel *m* a prodlouží se rameno jeho až k průseku s neurčitou rovnoběžkou; průsek budiž F.

Vede-li se AF, je trojúhelník ABF rovný danému trojúhelníku ABC a obsahuje daný úhel.

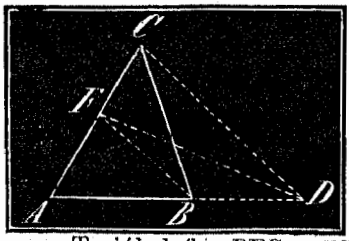
Z výkonu toho vysvitá zároveň, že se týmž způsobem trojúhelník kosoúhelný dá proměnit v pravoúhelný.

Sestrojte libovolně trojúhelník tupoúhelný a proměňte jej v pravoúhelný; sestrojte taktéž nerovnostranný a proměňte jej v rovnoramený.

§. 94. V uvedených příkladech měly sestrojené trojúhelníky stejnou základnici a výšku. Dá se však na základě věty v §. 92 daný trojúhelník též proměniti v jiný, rovný s jinou základnicí aneb s jinou výškou.

Příklad první: Má se daný trojúhelník ABC (obr. 98.) *proměnit v jiný s větší základnicí.*

Obr. 98.



Prodlouží se základnice daného trojúhelníka a učiní se rovna základnici větší; tato budiž AD. Bod D se spojí se bodem C a vede se bodem B s přímkou CD rovnoběžná BF. Vedeme-li DF, vznikne trojúhelník ADF, jenž je roven danému trojúhelníku ABC.

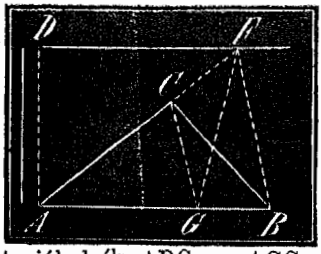
O rovnosti trojúhelníků ABC a ADF přesvědčíme se takto: Jestiť trojúhelník

ABC = ABF + BFC
ADF = ABF + BFD.

Trojúhelníky BFC a BFD jsou si rovny, neboť mají stejnou základnici BF a mezi rovnoběžkama BF a CD stejnou výšku. Je tedy trojúhelník ABC = ADF.

Příklad druhý: Má se daný trojúhelník ABC proměnit v jiný s větší výškou, (obr. 99).

Obr. 99.



Vytýčí se v bodu A kolmice a učiní se rovna dané výšce; konečným bodem D vede se k základnici AB rovnoběžka neurčitě; strana AC se prodlouží až protne onu rovnoběžku v bodu F; vede se BF a s touto rovnoběžná CG. Spojíme-li body F a G, vznikne trojúhelník AFG, jenž jest obsáhem rovný trojúhelníku ABC.

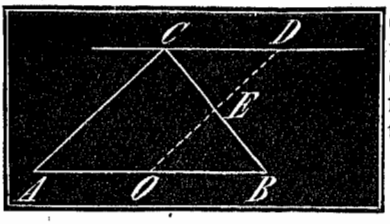
O tom přesvědčíme se takto: Jestiť trojúhelník

ABC = ACG + CGB,
AFG = ACG + CGF.

Trojúhelníky CGB a CGF mají stejnou základnici CG a stejnou výšku mezi rovnoběžkama CG a BF, pročež jsou si rovny. Jest tedy i ABC = AFG.

§. 95. *Má se daný trojúhelník ABC* (obr. 100) *proměnit v rovnoběžník,*

Obr. 100.



Vrcholem C vede se k základnici AB rovnoběžka neurčitě; rozpůlí se základnice a rozpolovacím bodem O se vede rovnoběžná se stranou AC. Rovnoběžec ACDO je roven trojúhelníku ABC; neboť je:

ABC = AOEC + BOE
ACDO = AOEC + CDE.

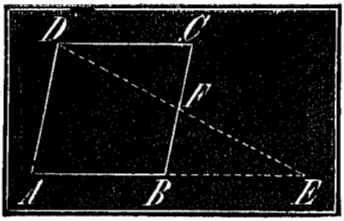
Trojúhelníky CDE a BOE jsou shodné, neboť je strana CD = AO = BO a úhly k stranám těmto přilehlé jsou střídné; je tedy:

ABC = ACDO.

Sestrojte libovolně vícero trojúhelníků a proměňte je v kosodélníky a obdélníky.

§. 96. *Má se daný rovnoběžec ABCD* (obr. 101) *proměnit v trojúhelník.*

Obr. 101.



Prodlouží se základnice AB o svou délku BE = AB a bod E spojí se s bodem D.

Jestiť patrno, že jsou trojúhelníky BEF a CDF shodné. Utne-li se z rovnoběžníka daného trojúhelník CDF a dá-li se do polohy BEF, neubyde obsahu; trojúhelník AED bude tedy roven rovnoběžci ABCD.

Sestrojte libovolně několik rovnoběžníků, proměňte je v trojúhelníky: pravo, tupo-úhelné, rovnoramené.

§. 97. *Má se daný rovnoběžník proměnit v jiný a sice 1. v jiný s danou stranou. 2. v jiný s daným úhlem.*

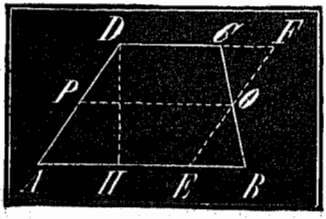
Obě úlohy se dle § 91. lehko vykonají.

§. 98. *Má se daný lichoběžec ABCD proměnit v rovnoběžník.* (obr. 102.)

Rozpůlí se různoběžka BC a rozpolovacím bodem O se vede k protější různoběžce AD rovnoběžka EF.

Rovnoběžník AEFD je roven lichoběžci ABCD, neboť jsou trojúhelníky BOE a COF shodné (proč?)

102.



Je tedy: AEOCD + COF neb AEFD = AEOCD + BOE neb ABCD.

Pozn. Vedeme-li rozpolovacím bodem O k rovnoběžkám AB a CD rovnoběžku OP, je přímka ta rovna přímce AE a DF.

Vede-li se výška lichoběžce DH, je dle §. 86. obsah lichoběžce ABCD roven $\frac{AB + CD}{2}$ DH.

Obsah rovnoběžce AEFD je:

AEFD = AE × DH.

aneb, dáme-li místo AE rovnou OP

AEFD = OP × DH.

Jelikož jsou plochy AEFD a ABCD sobě rovny, je tedy:

$\frac{AB + CD}{2}$ DH = OP × DH, z čehož vysvitá, že je

$\frac{AB + CD}{2}$ = OP. t. j.:

Když se vede v lichoběžci středem některé různoběžky k základným stranám rovnoběžka, je rovnoběžka ta rovna polovičnému součtu obou základných.

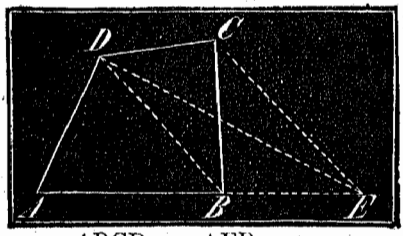
2. *Plocha lichoběžce se též vypočítá, když se přímka, kteráž jde středem stran různoběžných, výškou znásobí.*

Ku př: Je-li OP = 1° 4′, DH = 5′, je lichoběžec ABCD = 10 × 5 = 50□′.

§. 99. *Má se daný různoběžník ABCD proměnit v trojúhelníku* (obr. 103).

Vede se úhlopříčna BD. Úhlopříčnou tou rozdělí se čtyrúhelník na dva trojúhelníky ABD a BCD.

Obr. 103.



Prodlužme AB neurčitě a veďme bodem C k úhlopříčně BD rovnoběžku CE. Vede-li se DE, je trojúhelník AED roven různoběžci ABCD. Jestiť:

ABCD = ABD + BDC

AED = ABD + BDE.

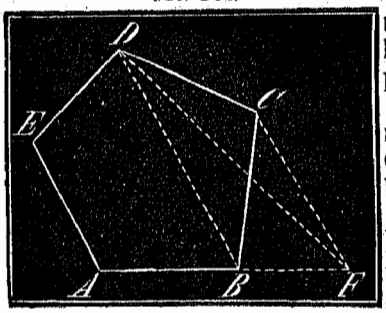
Jelikož jsou trojúhelníky BDC a BDE (§ 92.) sobě rovny; je tedy:

ABCD = AED.

Sestrojte různoběžníky třemi stranami a dvěma úhly, dvěma stranama a třemi úhly a proměňte je v trojúhelníky. —

§. 100. *Má se nepravidelný pětiúhelník proměnit v trojúhelník,* (obr. 104.)

Obr. 104.



Proměna tato vykoná se postupně. Nejprvé se totiž promění pětiúhelník v čtyrúhelník a tento se dále přetvoří v trojúhelník.

Vede se úhlopříčna BD, základnice AB se prodlouží neurčitě a bodem C se vede k úhlopříčně BD rovnoběžka CF.

Vedeme-li DF, je čtyrúhelník AFDE roven pětiúhelníku ABCDE, neboť jsou trojúhelníky BDC a BDF sobě rovny.

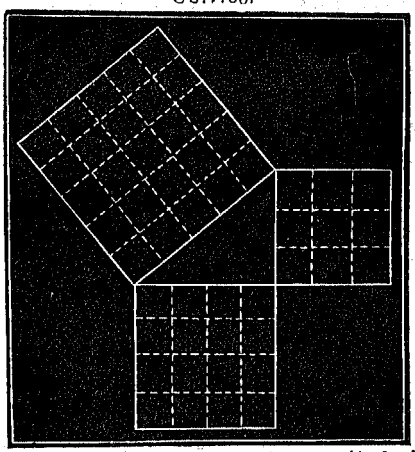
Čtyrúhelník AFDE promění se dle § 99. v trojúhelník.

Z výkonu tohoto vysvitá zároveň, že se každý přímočárný úhelník může proměnit v trojúhelník, a jelikož se může tento proměnit v rovnoběžník; může se tedy každý úhelník proměnit v rovnoběžník.

Sestrojte nepravidelný šesti, sedmiúhelník a proměnte úhelníky ty v trojúhelník, v obdélník. —

§. 101. *Věta Pythagorejská.* Sestrojí-li se dvěma stranama, z nichž jedna 3, druhá 4 rovné dílky obnáší ku př. palce, pravoúhelný trojúhelník, (obr. 106) obnáší podpona trojúhelníka toho 5 takových dílků (palců).

Obr. 105.



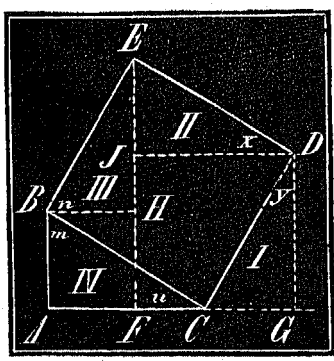
Sestrojíme-li při všech třech stranách čtverce, obnáší čtverec z menší odvěsny 9 a čtverec z věčší 16 malých čtverců; čtverec z podpony obnáší 25 takových čtverců a rovná se součtu $9 + 16 = 25$. t. j.

Sestrojíme-li při stranách pravoúhelného trojúhelníka čtverce, jest čtverec z podpony roven součtu čtverců stran odvěsných.

Věta tato nazývá se dle vynálezce svého *věta Pythagorejská.*

Věta tato dá se pro každý pravoúhelný trojúhelník znázornit takto:

Obr. 106.



Je-li ABC (obr. 106.) pravoúhelný trojúhelník, sestrojme nad podponou BC čtverec BCDE, prodlužme neurčitě odvěsnu AC a spusťme k ní z bodů E a D kolmice EF a DG; z bodů B a D veďme k přímce EF kolmice BH a DJ.

Poznačme vzniklé trojúhelníky čísly I, II, III a IV.

Trojúhelník I jest $\cong$ II; jestiť ED $= CD$, $x = y$ (neboť stojí ramena jejich k sobě na vzájem kolmo), pročež je DJ $= DG$.

Trojúhelník I $\cong$ IV; jestiť $BC = CD$; $u = y$ (neboť jsou ramena jejich k sobě kolmá), pročež je $AC = DG$.

Jelikož je $AC = DG = DJ = FG = FJ$, je obrazec DJFG čtverec a sice z odvěsny AC.

Dále je III $\cong$ IV; jestiť $BE = BC$, $m = n$ (ramena jejich stojí k sobě kolmo), pročež je $BH = AB = AF = FH$.

Obrazec ABHF je čtverec z odvěsny AB.

Trojúhelník, I, II, III a IV jsou vesměs shodné. Přidáme-li te-

dy, jak z obrazce vidno, k ploše BHJDC trojúhelníky II a III, obdržíme čtverec z podpony BC.

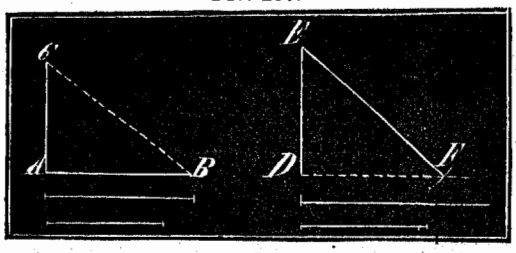
Vezmou-li se tyto trojúhelníky II a III a přidáme-li je k ploše BHJDC do polohy I a IV., obdržíme čtverce obou odvěsen AB a AC.

Z toho jestiť patrno, že má čtverec z podpony o sobě právě tak velkou plochu, jako čtverce z obou odvěsen dohromady.

Když se plocha BHJDC jakož i trojúhelníky I, II, III a IV z tužšího papíru, z lepenky, vystříhnou, dá se věta tato dle naznačeného způsobu znázornit.

§. 102. *Jsou udány strany dvou čtverců, má se vyhledat strana čtverce, jenž by se rovnal součtu obou oněch čtverců.*

Obr. 107.



Sestrojí se pravoúhelný trojúhelník ABC (obr. 107) tak, aby dané strany byly odvěsnama jeho.

Dle předešlé věty je BC strana čtverce, jenž se rovná oběma oněm čtvercům dohromady.

Jak by se vyhledala strana čtverce, jenž by se obsahem třem daným čtvercům vyrovnal?

§. 103. *Jsou dány strany dvou čtverců, má se vyhledat strana čtverce, jenž se vyrovná rozdílu oněch čtverců,* (obr. 107). Sestrojí se pravý úhel, jedno rameno DE učiní se rovným straně menšího čtverce, z konečného bodu E ramene toho opíše se stranou věčšího čtverce oblouk až protne druhé rameno v bodu F. Strana DF dá čtverec, jenž se rovná rozdílu oněch čtverců.

Poznam. Jestiť patrno, že se čtverce úplně sestrojovat nemusí a že tedy nález stran k výkonu úlohy dostačí.

VIII. Dělení obrazcův přímočárných.

Theilung geradliniger Figuren.

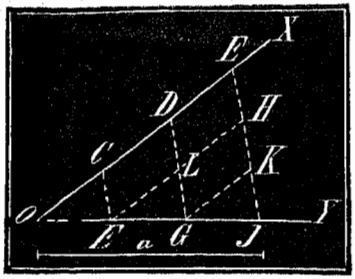
§. 104. *Připomenutí.* Jestit záhodno připomenouti tuto, jak se přímky na rovné díly děliti mohou.

Jak se daná přímka rozpoluje, viděli jsme v §. 56. Když se vzniklá půle opět rozpůlí, obdržíme 4tý díl dané přímky a tak by se mohla daná přímka rozděliti dále na 8, 16 . . . rovných dílů.

Na rovné díly může se daná přímka i rovnoběžkami rozdělit a sice takto:

Je-li *a* daná přímka (obr. 108) sestrojme libovolný úhel XOY, učiňme OJ = *a* a vnesme na rameno OX rovné délky OC = CD = DE. Vedeme-li EJ a k této z bodů C, D rovnoběžky CF, DG rozdělí se těmito rovnoběžkami délka OJ taktéž na tři rovné díly. Vede-

Obr. 108.



li se totiž FH, GK rovnoběžně k přímce OX, je trojúhelník COF ≅ FLG ≅ GKJ; majíť trojúhelníkové tito rovné úhly (proč?) a rovné strany, OC = CD = FL = DE = GK; pročež je též OF = FG = GJ = $^1/_3$ *a*.

Jestiť zároveň patrno, že se rovnoběžkami FH, GK i třetí strana trojúhelníka OEJ na rovné díly rozdělila, neboť je EH = CF = LG = HK = KJ.

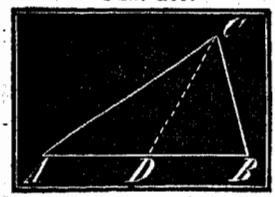
Tato věta o dělbě přímek vyjádří se těmito slovy:

Když se v trojúhelníku jedna strana na rovné díly rozdělí, a když se z rozdělovacích bodů vedou k druhé straně rovnoběžky; rozdělí se i třetí strana na tolikéž rovných dílů.

Rozdělte dle téhož způsobu danou přímku na 5, 6, 7 rovných dílů.

§. 105. *Má se daný trojúhelník rozdělit na dva, tři, čtyry rovné díly.*

Obr. 109.



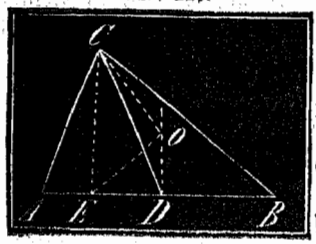
1. Má-li se trojúhelník na rovné díly rozdělit, rozdělí se základnice na tolik rovných dílů, na kolik dílů se trojúhelník rozděliti má. Body rozdělovací se spojí s vrcholem daného trojúhelníka.

Ku př. Rozděliti trojúhelník na dva rovné díly neb rozpůlit trojúhelník.

Rozpůlí se základnice a bod rozpolovací se spojí s vrcholem (obr. 109).

2. Požaduje-li se, aby se *daný trojúhelník ABC* (obr. 110.) *z udaného bodu uvnitř plochy své rozpůlil*, vykoná se rozpůlení takto: Daný bod O spojí se s bodem, jímž se základnice rozpoluje na př. D; z vrcholu C se vede k přímce OD rovnoběžka, ježto základnou v bodu E protíná. Tento bod jakož i vrchol se spojí s daným bodem.

Obr. 110.

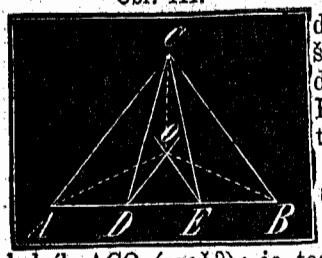


Vede-li se CD, je BCD = $^1/_2$ ABC; taktéž bude BCOE = $^1/_2$ ABC, neboť je:

BCD = BCOD + DOC
BCOE = BCOD + DOE.
DOC = DOE (proč?),
pročež je: BCOE = BCD = $^1/_2$ ABC.

§. 106. *Má se daný trojúhelník ABC na tři rovné díly tak rozdělit, aby rozdělovací přímky z vrcholů vycházely a uvnitř trojúhelníka v společném bodu se protínaly.*

Obr. 111.



Rozdělí se základnice na tři rovné díly, z bodů rozdělovacích se vede k bližší straně rovnoběžka, tedy (obr. 111.) z bodu D k straně AC, z bodu E k straně BC. Průsečný bod O je bod rozdělovací; bod ten se spojí s vrcholy.

Vede-li se CD, je trojúhelník ACD = $^1/_3$ ABC.

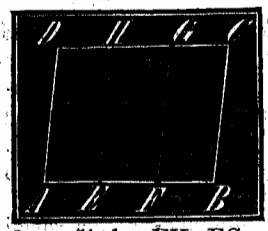
Trojúhelníku tomuto je roven trojúhelník ACO (proč?); je tedy i:

ACO = $^1/_3$ ABC.

Týmž způsobem se dokáže, že je trojúhelník BOC = $^1/_3$ ABC, (vede-li se CE) a protož obnáší i trojúhelník AOB třetinu trojúhelníka ABC.

§. 107. *Má se daný rovnoběžník ABCD na rovné díly rozdělit,* (obr. 112.)

Obr. 112.

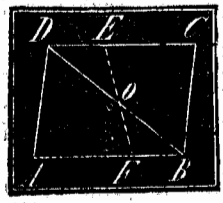


Má-li se rovnoběžník na rovné díly rozdělit, rozdělí se základná na tolik rovných dílů, na kolik dílů se obrazec rozděliti má; rozdělovacími body se vedou rovnoběžky k stranám pobočným.

Má se rovnoběžník ABCD rozdělit na tři rovné díly.

Rozdělí se základnice AB na tři rovné dílky AE = EF = FB a bodem E a F se vedou přímky EH, FG rovnoběžně k straně BC.

Obr. 113.



Má-li se rovnoběžník rozpůliti, stane se to úhlopříčnou. Taktéž se rovnoběžník rozpůlí, když se vede středem jeho přímka až k průseku stran protilehlých. —

Je-li ku př. (obr. 113) bod O středem rovnoběžníka ABCD, a vedeme-li EF bodem O, utvoří se dva lichoběžce ADEF a BCEF.

Jak z obrazce vidno, utvoří se z trojúhelníka ABD, jenž je roven $^1/_2$ ABCD, lichoběžec ADEF, když se od trojúhelníka toho odejme trojúhelník BOF a přidá k němu trojúhelník DOE. Trojúhelníky BOF a DOE jsou shodné (proč?)

Jest tedy lichoběžník ADEF roven trojúhelníku ABD a tudyž roven $^1/_2$ ABCD.

Rozdělí se čtverec úhlopříčnama na čtyry rovné díly?

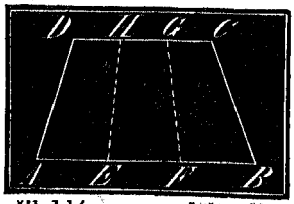
Sestrojte libovolné rovnoběžce a rozdělte je na 3, 5 rovných dílů.

§. 108. *Má se daný lichoběžník, trapez ABCD* (obr. 114.) *na rovné díly rozdělit.*

U lichoběžníků rozdělí se obě rovnoběžky na tolik rovných dílů, na kolik rovných dílů se obrazec rozděliti má. Body rozdělovací se pak náležitě spojí.

Má se lichoběžník ABCD (obr. 114) na tři rovné díly rozděliti:

Obr. 114.



Rozdělí se přímka AB jakož i CD na tři rovné díly a vedou se přímky EH a FG; je pak:

AEHD = EFGH = FBCG = $^1/_3$ ABCD

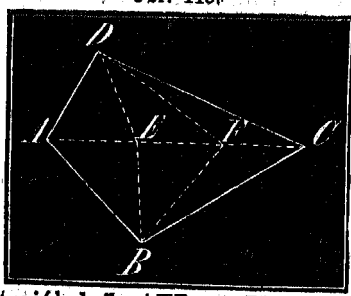
Udejte příčinu, proč díly ty sobě rovny jsou.

Sestavte lichoběžníky čtyrmi stranami, třemi stranami a úhlem k věčší rovnoběžce přilehlým a rozdělte lichoběžníky ty na 2, 3, 4 rovné díly.

Rozdělte daný lichoběžník na dva rovné díly tak, aby rozdělovací přímka z některého vrcholu lichoběžníka toho vycházela.

§. 109. *Má se různoběžník, trapezoid ABCD* (obr. 115.) *na rovné díly rozděliti.*

Obr. 115.



Vede se úhlopříčna a rozdělí se na určitý počet rovných dílů; body rozdělovací se spojí s oběma protileblýma vrcholy.

Má se trapezoid ABCD na tři rovné části rozděliti:

Rozdělí se úhlopříčna AC na tři rovné díly AE = EF = FC; body E a F se spojí s vrcholy B a D.

Trojúhelníky ABE, BEF a BCF jsou vesměs rovny (proč?); taktéž je trojúhelník AED = DEF = DCF. Protož je část:

ADEB = DEBF = DFBC.

Sestavte různoběžníky úhlopříčnou a čtyrmi stranami, čtyrmi stranami a úhlem; rozdělte je na 2, 3, 4 rovné částky. —

Rozdělte libovolně:

I. *Daný trojúhelník,*

a) jednou přímkou:

1. na dva trojúhelníky 2. na jeden trojúhelník a trapezoid, 3. na trojúhelník a trapez.

b) dvěma přímkama:

1. na tři trojúhelníky 2. na dva trojúhelníky a trapezoid, 3. na dva trojúhelníky a lichoběžník, 4. na dva trojúhelníky a pětiúhelník 5. na jeden trojúhelník a dva různoběžníky, 6. na jeden trojúhelník a dva lichoběžníky 7. na tři trojúhelníky a různoběžník 8. na dva trojúhelníky a dva trapezoidy 9. na dva trojúhelníky a dva lichoběžníky 10. na dva trojúhelníky, jeden trapezoid a jeden pětiúhelník 11. na jeden trojúhelník, dva trapezoidy a jeden pětiúhelník.

Rozdělte libovolně:

II. Daný rovnoběžník,

a) jednou přímkou:

1. na dva trojúhelníky 2. na dva lichoběžníky 3. jeden trojúhelník a lichoběžník 4. jeden trojúhelník a pětiúhelník.

b. dvěma přímkama a sice ve dva obrazce:

1. na trojúhelník a pětiúhelník s úhlem vypuklým 2. trojúhelník a šestiúhelník s úhlem vypuklým 3. trojúhelník a sedmiúhelník 4. čtyrúhelník a pětiúhelník. 5. dva pětiúhelníky.

c) dvěma přímkama na tři obrazce:

1. na tři trojúhelníky 2. na dva trojúhelníky a lichoběžník 3. na jeden trojúhelník, rovnoběžník a lichoběžník 4. na dva trojúhelníky a jeden pětiúhelník.

d) dvěma přímkama na čtyry obrazce:

1. na čtyry trojúhelníky 2. na tři trojúhelníky a různoběžník 3. na tři trojúhelníky a pětiúhelník 4. na dva trojúhelníky a dva lichoběžníky 5. na dva trojúhelníky a dva pětiúhelníky.

Vyhledejte ještě více podobných rozdělení, jak by se dvěma přímkama rozdělovacíma utvořily jenom tři obrazce, čtyry obrazce.

IX. Podobnost obrazcův přímočárných.

(Ähnlichkeit geradliniger Figuren.)

1. Poměry a srovnalosti.

§. 110. Sestrojme délkou *m* (obr. 116.) dvě přímky; první AB budiž 3-krát, druhá CD 4-krát tak dlouhá jako *m*.

Obr. 116.

Porovnáme-li přímky AB a CD dle velkosti jejich, jestiť patrno, že se přímky tyto tak k sobě mají, jako čísla 3 a 4. Pravíme o nich, že jsou v *poměru* jako 3 : 4 aneb že mají *poměr* 3 : 4.

Z toho zároveň vidíme, jak by se mohly sestrojit dvě přímky, kteréž by se tak k sobě měly, jako dvě daná čísla ku př. 2 : 5. Vedly by se totiž dvě délky, jedna 2-krát, druhá 5-krát tak dlouhá, jako je *m*.

Sestrojte přímky, kteréž by se k sobě měly jako čísla: 2 : 3, 3 : 5, 4 : 5, 5 : 7.

Sestrojte trojúhelník, aby se strany k sobě měly, jako se mají k sobě čísla 3, 4, 5.

§. 111. Přímka CD (obr. 116.) je 4krát tak velká, jako je délka *m*. Délka *m* dala by se na přímku CD čtyrykrát vnésti a sice bez zbytku.

Když se přímka na jinou přímku několikráte bez zbytku vnésti dá, pravíme, že je měrou přímky té. Tak je *m* (obr. 116.) měrou přímky CD. —

Když se na dvě neb vícero přímek táž míra bez zbytku vnésti může, pravíme o přímkách těch, že mají *míru společnou*. Přímky AB a CD (obr. 116) mají společnou míru *m*.

§. 112. Přímky AB a CD sestrojili jsme dle poměru čísel 3 a 4 aneb vyjádřili jsme číselný poměr 3 : 4 délkami oněch přímek. Na opak může se poměr dvou daných přímek vyjádřiti čísly.

Poměr dvou daných přímek vyjádří se čísly, když se vyhledá společná míra oněch přímek a to stane se takto:

Vnáší se menší přímka na věčší tolikkrát, kolikkrát se vnésti může. Je-li v přímce věčší bez zbytku na př. 4krát obsažena, je 1 : 4 onen číselný. poměr t. j. menší přímka má se k věčší jako čísla 1 : 4.

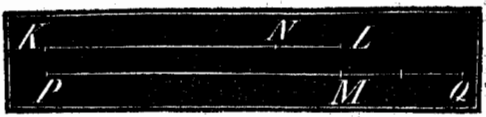
Když ale menší přímka v přímce věčší bez zbytku obsažena není, hledá se, zda-li je zbytek ten obsažen v přímce menší.

Vneseme-li ku př. přímku AB (obr. 116) na přímku CD, bude přímka AB v přímce CD jednou obsažena a zbytek bude délka DE. Vnese-li se délka DE na přímku AB, bude v ní obsažena třikrát. Je tedy:

AB = 3DE

CD = AB + DE = 3DE + DE = 4DE

Obr. 117.



Délka DE je společnou měrou přímek AB a CD a přímky ty mají se k sobě, jako čísla 3 : 4.

Kdyby ale první zbytek v přímce menší bez zbytku obsažen nebyl, vnáší se druhý zbytek na zbytek první, ku př.: Má se vyhledat číselný poměr přímek KL a PQ (obr. 117.)

Menší přímka KL se vnese na věčší PQ, a budiž v ní obsažena jednou a zbytek budiž délka MQ. Délka MQ vnáší se na přímku menší; budiž v ní obsažena dvakrát a zbytek buď délka NL. Druhý tento zbytek NL vnáší se na zbytek první, totiž délku MQ. V délce té budiž NL obsažena dvakrát. Je tedy:

MQ = 2NL

KL = 2MQ + NL = 4NL + NL = 5NL

PQ = KL + MQ = 5NL + 2NL = 7NL

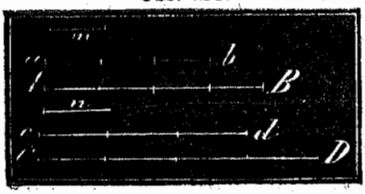
Délka NL je společnou měrou přímek KL a PQ a přímky ty mají se tak k sobě jako čísla 5 : 7.

Tímto způsobem může se tedy k dvěma daným přímkám společná míra vždy vyhledat nebo jinak, může se vyjádřit číselný poměr jejich.

Sestrojte přímky libovolně a vyhledávejte k nim společnou míru.

§. 113. Sestrojme délkou *m* přímky AB a *ab* (obr. 118) tak, aby se k sobě měly jako 4 : 3; délkou *n* sestrojme taktéž dvě přímky CD a cd, CD budiž rovna 4*n*, cd = 3*n*.

Obr. 118.



Jestiť patrno, že se mají k sobě přímky CD a cd taktéž, jako čísla 4 : 3.

Poměry AB : ab a CD : cd jsou si *rovny*. Spojíme-li je známkou rovnosti, sluje srovnání to *srovnalost* neb *úměra* (Proportion):

AB : ab = CD : cd

anaž se takto čte: AB má se k ab, jako se má CD: cd.

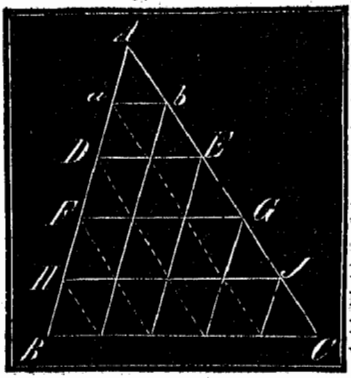
O přímkách v srovnalosti té pravíme, že jsou *srovnalé* neb *uměrné* (proporzionirt).

Sestrojte srovnalé přímky a sice dle poměru 2: 3, 3: 5.

2. Podobnosť trojúhelníků.

§. 114. Rozdělme v trojúhelníku ABC (obr. 119) stranu AB na rovné díly ku př. na pět dílů a veďme některým rozdělovacím bodem na př. od vrcholu A druhým bodem D k straně BC rovnoběžku DE. Rovnoběžkou tou utvoří se trojúhelník ADE, jenž má rovné úhly s trojúhelníkem ABC; neboť je úhel A oběma společný a úhly ADE a AED jsou co protilehlé úhly rovny úhlům ABC a ACB.

Obr. 119.



Hleďme dále v jakém jsou asi poměru strany těchže trojúhelníků. Strany AD a AB mají se k sobě, jako 2:5, neboť obsahuje AD dva, AB pět rovných dílků. Je tedy:

AD: AB = 2: 5.

Vedeme-li rozdělovacími body rovnoběžky k straně BC, rozdělí se i AC na pět rovných dílů, jako je dílek Ab (§. 104.) Mají se tedy strany:

AE: AC = 2: 5.

Jestiť patrno, žeše i třetí strana BC na pět rovných dílů rozdělí, když se rozdělovacími body a, D, F, H k straně AC rovnoběžky vedou. Strana BC obsahuje pět takových dílků, jako je ab; strana DE obsahuje dva takové dílky. Má se tedy:

DE: BC = 2: 5.

Poměry stran trojúhelníků ADE a ABC jsou rovny a mohou se tedy do srovnalosti vrovnat:

AD: AB = AE: AC = DE: BC

Pravíme o stranách trojúhelníků ADE a ABC, že jsou *srovnalé* a sice, že jsou ty strany srovnalé, jenž naproti rovným úhlům stojí. Strany tyto nazývají se *stejnolehlé*.

Když se tedy v trojúhelníku vede k některé straně rovnoběžka, utvoří se nový trojúhelník, jenž má s trojúhelníkem daným rovné úhly a srovnalé strany.

Jestiť dále patrno, že tutéž vlastnost mají i trojúhelníky AFG, AHJ. Trojúhelníky tyto liší se od sebe jen velkostí, podobu mají vesměs stejnou. Trojúhelníky, kteréž mají stejnou podobu, nazývají se *podobné* (ähnlich.) V obr. 119 jsou všechny trojúhelníky sobě podobny.

Jak z výkladu vysvitá, jsou tedy u trojúhelníků podobných stejnolehlé úhly rovné a strany stejnolehlé jsou srovnalé.

Jaký je rozdíl mezi trojúhelníky podobnými a trojúhelníky shodnými?

K podobnosti dvou trojúhelníků vyžaduje se celkem šest podmínek; totiž aby byly všechny tři úhly vzájemně rovny, a všechny tři strany aby měly tentýž poměr nebo jinak, aby byly poměry všech tří stran sobě rovny, aby strany byly srovnalé.

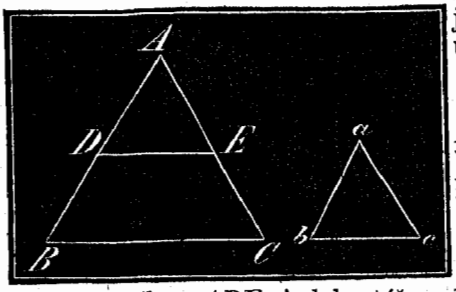
Když by tedy dva dané trojúhelníky sobě podobny býti měly, zdálo by se dle předešlého výkladu, že by se všech oněch šest podmínek vždy udati musilo.

Avšak dostačí k podobnosti dvou trojúhelníků jen několik oněch podmínek, jak se tomu z následujících případů vyrozumí.

§. 115. Trojúhelníky ABC a abc (obr. 120) mějtež rovné úhly, totiž A = a, B = b, C = c.

U trojúhelníků těchto jsou tedy jen tři podmínky známy. Z další úvahy uvidíme, že jsou u trojúhelníků takových poměry stran sobě rovny aneb jinak, že jsou strany jejich srovnalé a trojúhelníky ty sobě podobny.

Obr. 120.



Utněme z vrcholu A strany AB délku AD = ab a veďme bodem D k straně BC rovnoběžku DE. Z učení předešlého víme, že je trojúhelník ADE ~ ABC. Kdyby byl trojúhelník abc shodný s trojúhelníkem ADE, byl by též podoben trojúhelníku ABC.

Trojúhelníky ADE a abc jsou shodné, neboť je AD = ab, úhel A = a, D = B = b, E = C = c.

Je tedy: abc ~ ABC; pročež pravíme:

Když mají dva trojúhelníky vzájemně rovné úhly, jsou stejnolehlé strany jejich srovnalé a trojúhelníky ty jsou si podobny.

Jak z výkladu tohoto vysvitá, dostačí k podobnosti dvou trojúhelníků toliko rovnost úhlů; protož se může předešlá věta kratčeji i takto vyjádřiti:

Dva trojúhelníky jsou si podobny, když mají vzájemně rovné úhly.

Podobají se sobě dva trojúhelníky, když mají jen dva úhly vzájemně rovné? Jsou dva rovnoramené trojúhelníky podobny, když jsou úhly ve vrcholech jejich sobě rovny? Jsou dva pravoúhelné trojúhelníky podobny, když je z ostrých úhlů jejich jeden vzájemně rovný? Jsou rovnostranné trojúhelníky sobě vždy podobny?

Sestrojte vícero podobných trojúhelníků s úhly 70° a 80°; volte při tom strany základné v tomto poměru 2: 3, 3: 4, 3: 5, 4: 5.

Sestrojte dva rovnoramené podobné trojúhelníky, jejichž úhly na základnici mají dohromady 130°; voltež základnice v poměru 3:5, 4: 7, 5: 7.

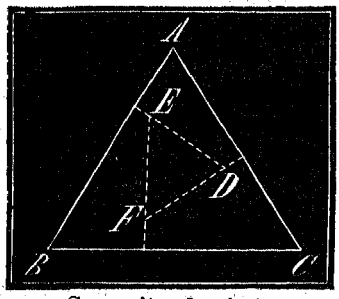
Sestrojte podobné pravoúhelné trojúhelníky; ostrý úhel na základnici měj 40°, poměr základnic buď 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5.

Je dán trojúhelník a přímka; má se při té přímce sestavit trojúhelník tak, aby se podobal trojúhelníku danému.

Sestrojte dva trojúhelníky tak, aby šly strany jejich na vzájem rovnoběžně. Budou trojúhelníky ty sobě podobny? Jak se vyjádří věta o podobnosti jejich? —

§. 116. Sestrojme dva trojúhelníky ABC a DEF tak, aby strany jejich stály k sobě vzájemně kolmo, (obr. 121).

Obr. 121.



Dle učení v §. 39. je úhel A = D, B = E, C = F. Trojúhelníky ty jsou si tedy podobny; pročež pravíme:

Dva trojúhelníky jsou si podobny, když stojí strany jejich k sobě na vzájem kolmo.

Je dán trojúhelník, sestrojte jiný, aby strany jejich stály k sobě kolmo; vyhledejte rovné úhly, strany stejnolehlé.

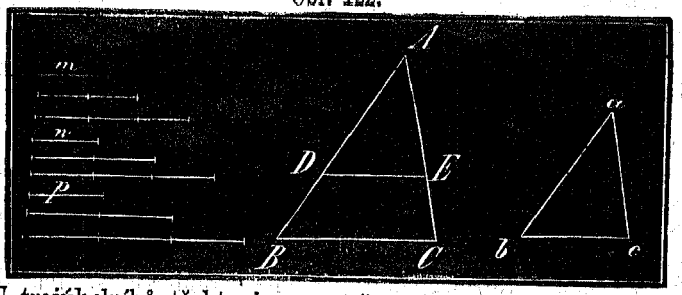
Sestrojte danými třemi stranami trojúhelník; sestrojte k tomu trojúhelníku jiný, aby strany obou stály k sobě kolmo; vyhledejte strany stejnolehlé.

Sestrojte základnicí a ramenem trojúhlelník rovnoramený; odvěsnou a přilehlým ostrým úhlem trojúhelník pravoúhelný. Sestrojte v každém tom trojúhelníku jiný, aby stály strany k sobě na vzájem kolmo. —

§. 117. Jak jsme z výkladu v §. 115 vyrozuměli, dostačí k podobnosti dvou trojúhelníků vzájemná rovnost tří ano dvou úhlů. Nyní probereme případ jiný.

Sestrojme trojí měrou neb jedničkou *m*, *n*, *p* (obr. 122.) dle návodu v § 109. délky v poměru 2 : 3; délkami, které totéž násobné obsahují, sestrojme trojúhelníky abc a ABC.

Obr. 122.



U trojúhelníků těchto jsou poměry stran vesměs rovny neb jinak, strany trojúhelníků ABC a abc jsou srovnalé, totiž:

AB: ab = BC: bc = AC: ac = 3: 2

V tomto případu jedná se o to, zda-li AD též úhly vzájemně rovny. Uťněme z vrcholu A strany AB délku jsou = ab a veďme DE rovnoběžně se stranou BC.

Jak z výkladu v § 114 víme, jsou poměry stran trojúhelníků ADE a ABC sobě rovny, totiž:

AB : AD = BC: DE = AC: AE

Jelikož je AD = ab, je tedy:

AB : AD = AB : ab = 3 : 2

pročež je i:

BC: DE = 3: 2 = BC: bc:

AC: AE = 3: 2 = AC: ac t. j:

AD = ab, DE = bc, AE = ac

Trojúhelníky ADE a abc mají vzájemně rovné strany a jsou tedy shodné; (§. 52) pročež je úhel A = a, D = B = b, E = C = c.

Trojúhelníky ABC a abc mají tedy srovnalé strany a vzájemně rovné úhly — jsou si podobny.

Když jsou tedy u dvou trojúhelníků poměry stran sobě rovny, jsou i stejnolehlé úhly vzájemně rovné a trojúhelníky ty jsou si podobny; pročež pravíme:

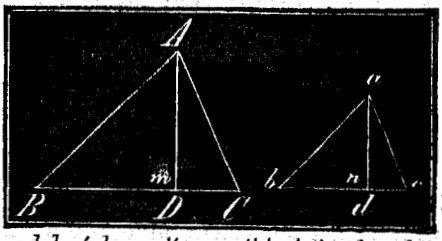
Dva trojúhelníky jsou si podobny, když jsou poměry stran jejich sobě rovny anebo jinak, *když jsou strany jejich srovnalé.*

3. Vlastnosti trojúhelníků podobných.

§. 118. Trojúhelníky ABC a abc (obr. 123.) buďtež sobě podobny. Veďme v obou trojúhelnících výšky AD a ad.

Jelikož jsou si oba trojúhelníky ABC a abc podobny, jsou podobny též trojúhelníky ABD a abd; neboť je úhel B = b, úhel $m = n = 90°$. Má se tedy:

Obr. 123.



AB : ab = AD : ad

a poněvadž je ABC ∾ abc, má se též:

AB : ab = BC: bc

pročež je i:

AD: ad = BC: bc t. j:

U trojúhelníků podobných je poměr základnic roven poměru výšek aneb jinak, *u trojúhelníků podobných mají se základnice k sobě, jako výšky.*

§. 119. V obrazci 119 jsou trojúhelníky Aab, ADE, AFG, AHJ, ABC vesměs podobny. Z výkladu v §. 114 jestiť patrno, že jsou strany trojúhelníka ADE dvakrát, strany trojúhelníka AFG třikrát, strany trojúhelníka AHJ čtyrykrát a strany trojúhelníka ABC pětkrát tak velké, jako jsou strany trojúhelníka Aab.

Hledá-li se obměr trojúhelníka Aab a ADE, bude obměr trojúhelníka ADE dvakrát tak velký, jako je obměr trojúhelníka Aab, a

budou se obměry ty k sobě míti, jako 1 : 2, tedy zrovna tak, jako se k sobě mají strany stejnolehlé.

Obměr trojúhelníka AFG bude třikrát, obměr trojúhelníka AHJ čtyrykrát a obměr trojúhelníka ABC pětkrát tak velký, jako je obměr trojúhelníka Aab.

Z úvahy této vidíme, že se obměry oněch trojúhelníků tak k sobě míti budou, jako stejnolehlé strany; pročež pravíme:

Obměry trojúhelníků podobných mají se k sobě, jako stejnolehlé strany.

§. 120. Rozdělíme-li strany trojúhelníka ABC rovnoběžkami na rovné díly (obr. 119.), rozdělí se rovnoběžkami těmito trojúhelník ten na malé, shodné trojúhelníky.

Trojúhelník ADE, jehož strany jsou dvakrát tak velké jako strany trojúhelníka Aab, obsahuje čtyry takové trojúhelníky; trojúhelník AFG obsahuje jich devět, trojúhelník AHJ šestnáct a ABC konečně 25.

Mají se tedy obsahy ADE, AFG, AHJ a ABC:

ADE : AFG = 4 : 9
AFG : AHI = 9 : 16
AHJ : ABC = 16 : 25;

kdežto se strany jejich k sobě mají, jako 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5.

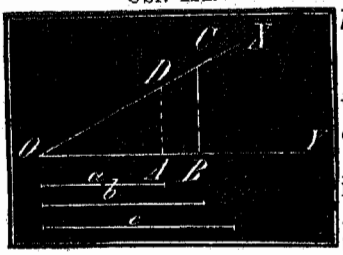
Čísla 4, 9, 16 25 slují *čísla čtvercová* nebo jinak, *druhé mocnosti* čísel 2, 3, 4, 5.

Pravíme tedy:

Obsahy podobných trojúhelníků mají se k sobě jako čtvercová čísla anebo jinak, *jako druhé mocnosti stran stejnolehlých.*

4. Sestrojení, kteráž se na podobnosti trojúhelníků zakládají.

Obr. 124.

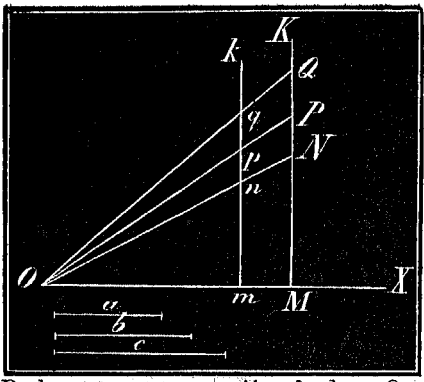


§. 121. *Má se k třem daným přímkám vyhledati čtvrtá srovnalá,* (obr. 124).

Sestrojí se libovolný úhel XOY, z vrcholu O se z ramena OY utne OA = a, OB = b; z ramena OX utne se OC = c. Spojíme-li bod B s bodem C a vedeme-li k přímce BC z bodu A rovnoběžku AD, je trojúhelník AOD ∼ BOC; má se tedy:

AO : BO = DO : CO
a jelikož je AO = a, BO = b, CO = c, má se tedy:
$a : b = DO : c$.
Přímka DO je tedy čtvrtá srovnalá. —

Obr. 125.



§. 122. *Mají se dané přímky daným poměrem buď zvěčšiti, aneb zmenšiti,* (obr. 125.)

Vede se přímka. OX libovolně a mají-li se dané přímky *a*, *b*, *c* zvěčsit v poměru 4: 5, vnesou se z bodu O na přímce OX 4 rovné dílky a pak opět z bodu O 5 rovných dílů; v bodech *m* a M vytýčí se kolmice *mk* a MK. Na kolmici *mk* = se vnesou z bodu *m* všecky dané přímky tak, že je *mn* = *a*, *mp* = *b*, *mq* = *c*. Body *n*, *p*, *q* se spojí s bodem O a přímky On, Op, Oq se prodlouží až k průseku s kolmicí MK, jižto v bodech N, P, Q protínají.

Přímky MN, MP, MQ jsou zvěčšené délky přímek *a*, *b*, *c* a sice dle poměru daného; neboť se má:

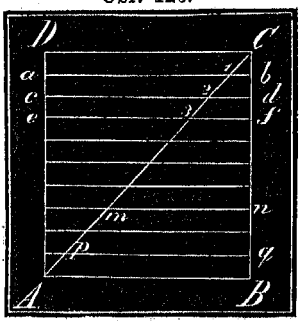
mn: MN = 4: 5, *mn* = *a*
mp: MP = 4: 5, *mp* = *b*
mq: MQ = 4: 5, *mq* = *c*

Měly-li by se tyto dané přímky týmž poměrem zmenšit, vnesly by se na kolmici MK; na kolmé *mk* byly by pak délky zmenšené.

Sestrojte třemi danými stranami trojúhelník, zmenšte délky stran těch v poměru 2: 3, 3: 4, 4: 5; sestrojte zmenšenými stranami opět trojúhelníky. Budou trojúhelníky ty sobě podobny?

§. 123. *Má se daná přímka na vícero rovných dílů rozdělit.*

Obr. 126.



Má-li se určitá přímka AB (obr. 126.) na *mnoho malých* dílků rozdělit, může se rozdělení toto provésti následným způsobem:

V konečných bodech A a B sestrojí se kolmice AD a BC; na kolmých těchto se odměří tolik rovných dílků, na kolik dílů se přímka rozděliti má, ku př. 10.

Když se hořejší body kolmých přímek AD a BC spojí, utvoří se obdélníkový obrazec ABCD.

Vedeme-li rozdělovacími body kolmic AD a BC přímky *ab*, *cd*, *ef* . . a v obdélníku ABCD úhlopříčnu AC, má se:

*b*1 : AB = 1 : 10
*d*2 : AB = 2 : 10
*f*3 : AB = 3 : 10,
z čehož jde, že je:

$$b1 = \frac{AB}{10}, \quad d2 = \frac{2AB}{10}, \quad f2 = \frac{3AB}{10}$$

Lehko se vyrozumí, že je délka *mn* = $^7/_{10}$ AB, délka *pq* = $^9/_{10}$ AB.

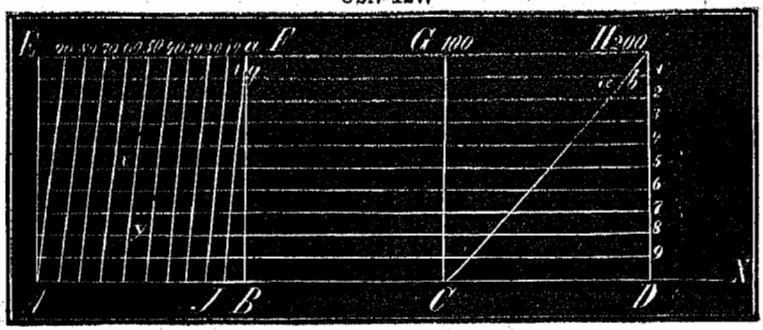
§. 124. *Měřídko popříčné.* (obr 127.)

Na předešlém rozdělovacím způsobu se zakládá sestrojení *zmenšovacího, popříčného měřídka* (verjüngter Transversal-Maßstab.)

Sestrojíme měřídko to pro *míru desetinnou.*

Vede se přímka AX a rozdělí se na několik rovných dílů. Jeden z dílů těchto se rozdělí na 10 rovných dílků dle způsobu předešlého.

Obr. 127.



Aby se však měřídkem tím ještě menší délky měřiti mohly, vnese se dílek *ab* = $\frac{CD}{10}$ na délky AB a EF a sice desetkrát a vedou se pak *příčné,* jak z obrazce vidno.

Jestiť patrno, že se má dílek:

$$g1 : BJ = 1 : 10$$

pročež je:

$$g1 = \frac{BJ}{10}$$

Délka BJ je rovna *ab* = $\frac{AB}{10}$, protož je:

$$g1 = \frac{1}{10} \times \frac{AB}{10} = \frac{AB}{100}$$

Dílek g1 obsahuje tedy stý díl přímky AB; délka BJ obnáší 10 takových dílků; pročež se na hořejší přímce EF rozdělovací body poznačí čísly 10, 20, 30, 40. . . . .

Délka F10 je rovna BJ a obnáší 10 takových dílků, jako je dílek g1; délka F20 obnáší 20 takových dílků; F30 obsahuje jich 30 . . .

Udává-li AB zmenšenou délku sáhovou, je BJ = *ab* = 0·1; dílek g1 = 0·01 zmenšené délky sáhové.

Má-li se rozdělení státi pro *míru dvanáctinnou,* rozdělí se AB, počítá-li se na sáhy, na 6 a kolmice na 12 rovných dílů.

§. 125. *Úlohy, kteréžto se měřídkem popříčným vykonati mohou.*

1. *Má se daná přímka směřit.*

Má-li se měřídkem popříčným určitá délka vyměřit, vezme se do kružidla; kružidlo se zasadí jedním ramenem v hořejším konečném bodu některé kolmice a hledí se pak, do kterého rozdělovacího bodu mezi E a F druhé rameno kružidla zapadá. Ku příkladu: Zatkněme jedno rameno v bodu G a druhé zasahuj do bodíku 70. V tomto pádu obnášela by délka ta 170 takových dílků, jako je dílek *g1*.

Pak-li ale druhé rameno do žádného hořejšího bodu mezi E a F nezapadá, posmyká se kružidlo jedním ramenem po kolmých přímkách dolů, tak daleko, až se druhé rameno s některou příčnou setká, ku př.: Jedno rameno stůj v bodu 5tém kolmice DH a druhé v bodu *x*; v tomto případu měla by délka 265 takových dílků, jako je dílek *g1*.

Jak z příkladu tohoto vidíme, udávají se *na měřídku popříčném* kolmicemi sta, příčnými desítky a rovnoběžkami jednotky. —

Sestavte libovolně troj, čtyr, pěti, šestiúhelník a vyhledejte měřídkem popříčným obměr úhelníků těch.

2. *Má se určitá délka sestrojit.*

Dle daného počtu vyšetří se kružidlem délka na měřídku a vnese se na přímku neurčitou.

Ku př.: Má se sestrojit délka 200. Zasadí se kružidlo jedním koncem v bodu F a druhým v bodu H. Má-li se délka 240 sestrojit, zatkne se kružidlo jedním koncem v bodu H a druhým v bodíku 40.

Délka 258 vyhledá se takto: Jedno rameno kružidla zasadí se v kolmé 200 a sice na rovnoběžce 8; druhým se vyhledá příčná 50 a posmyká se po příčné té dolů až k bodu *y* na rovnoběžku 8.

Sestrojte délky 220, 280, 268, a sestavte z nich trojúhelník.

Sestrojte délky 214 a 167; věčší sestrojte čtverec, z obou pak sestavte obdélník. —

3. *Má se vyhledat poměr délky dvou daných přímek.*

Vyhledá se dle úlohy 1. délka obou přímek.
Vyhledaná čísla dají poměr přímek.
Veďte čtyry přímky a vyhledejte vzájemný poměr jejich.

4. *Má se daná přímka na rovné díly rozdělit.*

Vyhledá se na měřídku nejprvé délka přímky té dle úlohy 1. Vyhledaný počet rozdělí se na tolik dílů, na kolik dílů se ona přímka rozděliti má. Podíl se pak vyhledá dle úlohy 2, ku př: Měla se daná přímka rozdělit na 12 dílů. Délka její obnášej 156.

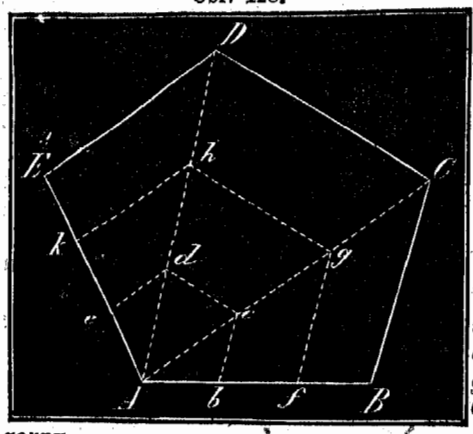
Dělí se tedy 156 : 12 = 13

Jeden dílek je tedy 13; dílek tento se dle úlohy 2. na měřídku vyhledá a může se na přímku danou 12krát vnésti.

5. O podobnosti úhelníků.

§. 126. Veďme v pětiúhelníku ABCDE obr. 128. úhlopříčny AC a AD; rozdělme stranu AB na tři rovné díly Ab = *bf* = *f*B, z bodů *b* a *f* veďme k straně BC rovnoběžky *bc*, *fg*, z bodů C a G k straně CD rovnoběžky *cd* a *gh*, z bodů *d* a *h* k straně DE rovnoběžky *de*, *hk*. Tímto způsobem vzniknou v pětiúhelníku ABCDE dva menší pětiúhelníky Abcde, Afghk. Všechny tyto pětiúhelníky mají společný úhel A a jelikož jdou strany *bc*, *cd*, *de* rovnoběžně se stranami *fg*, *gh*, *hk*, a BC, CD, DE, jsou i ostatní stejnolehlé úhly sobě rovny.

Obr. 128.



Dále jestiť patrno, že se má:

Ab : Af = 1 : 2

a jelikož jde *bc* rovnoběžně se stranou *fg*, má se též (§. 114)

bc : *fg* = 1 : 2;

taktéž se má

cd : *gh* = 1 : 2

de : *hk* = 1 : 2.

Z toho vysvitá, že jsou poměry stejnolehlýeh stran pětiúhelníků Abcde a Afghk sobě rovny.

Strany ty jsou tedy *srovnalé*.

Taktéž jest patrno, že se má:

Af : AB = 2 : 3, a poněvadž jde *fg* rovnoběžně se stranou BC, má se též:

fg : BC = 2 : 3

gh : CD = 2 : 3

hk : DE = 2 : 3 t. j:

Stejnolehlé strany pětiúhelníků Afghk a ABCDE jsou *srovnalé*.

Z toho vidíme, že mají pětiúhelníky ty stejný tvar a že se liší jen velkostí.

Úhelníky, kteréž mají stejný tvar, jmenují se *úhelníky podobné*.

Z předešlé úvahy vysvitá tata věta:

U podobnýeh úhelníků jsou stejnolehlé úhly rovné a strany stejnolehlé jsou srovnalé.

Všechny pravidelné úhelníky, jenž mají stejný počet stran, jsou si podobny (proč?)

Jak z obrazce 130 vidíme, jsou si trojúhelníky Abc, Afg, ABC podobny, pročež pravíme:

1. *Úhelníky podobné rozdělují se stejnolehlými úhlopříčnami v podobné trojúhelníky.*

Jelikož se má: Ac: Ag = Ab: Af, praví se:

2. *U podobných úhelníků mají se stejnolehlé úhlopříčny k sobě, jako stejnolehlé strany.*

§. 127. Pětiúhelníky Abcde, Afghk a ABCD jsou si podobny. Strany úhelníka Afghk jsou 2krát, strany úhelníka ABCDE jsou 3krát tak velké, jako jsou strany úhelníka Abcde; bude tedy i obměr úhelníka Afghk dvakrát, obměr úhelníka ABCDE třikrát tak velký, jako je obměr úhelníka Abcde. Obměry ty budou se k sobě míti, jako čísla 1: 2: 3. V témž poměru jsou strany oněch úhelníků; pročež pravíme:

Obměry úhelníků podobných mají se k sobě jako stejnolehlé strany.

Jak se mají k sobě obměry dvou pravidelných úhelníků, jenž mají stejný počet stran?

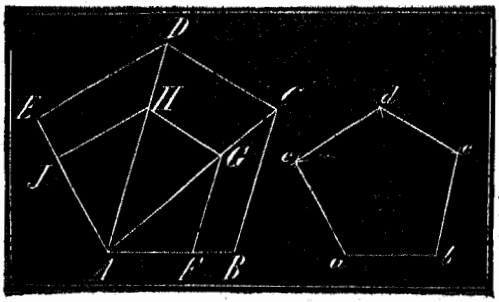
§. 128. Jak z učení v §. 120 víme, mají se obsahy podobných trojúhelníků k sobě, jako druhé mocnosti stran stejnolehlých. V pětiúhelníku Afghk jsou strany 2krát, v pětiúhelníku ABCDE 3krát tak velké, jako jsou strany pětiúhelníka Abcde. V pětiúhelníku Afghk je každý trojúhelník 4krát, a v úhelníku ABCDE devětkrát tak velký, jako je stejnolehlý trojúhelník v úhelníku Abcde. Bude tedy i součet všech trojúhelníků v obrazci Afghk neb plocha úhelníka toho 4krát, plocha úhelníka ABCDE ale 9krát tak velká, jako je plocha pětiúhelníka Abcde. Obsahy ty budou se k sobě míti jako čísla 4: 9; tentýž poměr mají druhé mocnosti stran stejnolehlých, protož pravíme:

Obsahy úhelníků podobných mají se k sobě, jako druhé mocnosti stejnolehlých stran.

§. 129. Má se při straně *ab* sestrojit úhelník tak, aby byl podobný úhelníku ABCDE (obr. 129.)

V daném úhelníku se vedou úhlopříčny AC, AD, od strany AB utne se z bodu A délka AF = ab, vedou se pak FG || BC, GH || CD, HJ || DE. K úhelníku AFGHJ sestrojí se shodný abcde; úhelník tento podobá se úhelníku ABCDE. —

Obr. 129.



Sestrojte libovolně čtyr, pěti, šestiúhelník. K úhelníkům těm sestrojte podobné a strany voltež v poměru 4: 5, 5: 7, 7: 10.

Dodatek: 1. Když v pravidelném mnohoúhelníku, jenž má sudý počet stran, protilehlé vrcholy spojíme a ze středu od

délek těch rovné částky utneme, vznikne tolikéž stranný podobný úhelník, když se totiž rozdělovací body po pořadí spojí.

2. Když vedeme v mnohoúhelníku pravidelném všechny možné úhlopříčny — totiž úhlopříčny, kteréž se z každého vrcholu vésti mohou,— protnou se tyto úhlopříčny uvnitř obrazce a úseky jejich tvoří nový tolikéžstranný podobný úhelník.

3. Když v mnohoúhelníku pravidelném všechny strany, každou oběma konci prodloužíme až k průsekům, dají průseky ty, spojeny jsouce, nový podobný úhelník.

Proveďte úlohy tyto a sice v pravidelném šestiúhelníku, v pětiúhelníku. —

Rozvrh obsahu.

Planimetrie.

I. O přímkách.

II. O úhlu.

III. O trojúhelníku.

IV. O čtyrúhelníku.

V. Úhelníky vůbec.

VI. Vypočítání velkosti obrazcův přímočárných.

IX. Podobnost obrazcův přímočárných.

Hrubší omyly.

Na str. 10. v §. 16. místo: *z bodu vycházející* čti: *z bodu vycházejících.*
„ 14. v §. 24. místo: *kteréž vedlejší* čti: *kteréž se vedlejší.*
„ 16. v §. 28. v řádku desátém místo: $h = c$ čti: $b = c$.
„ 18. v §. 31. v řádku pátem místo: *ABC* čti: *BAC.*
„ 17. v §. 29. v řádku pátém místo: $(F + c)$ čti: $(f + c)$.
„ 23. v §. 41. v řádku sedmém místo: neb *odvěsné* čti: neb *odvěsny.*
„ 25. v §. 47 v řádku desátém místo: a úhlem z čti: a úhlem ACB.
„ 26. v §. 48. v řádku třináctém místo: úhlem F čti: úhlem E.
„ 29. v §. 52. v řádku osmnáctém místo: *trojúhelníku* čti: *trojúhelník.*
„ 34. v úloze číslo VI. v řádku čtvrtém místo: a ADE čti: ACE.
„ 34. v úloze číslo VII. od dola v řádku třetím místo: úhel aOd čti: *bOd.*
„ 39. v §. 62. v řádku čtvrtém místo: AC = AB čti: AD = AB; místo C má býti D, místo D stůj C.
„ 39. v §. 63. v řádku čtvrtém místo: *poloměrem* dodej: *poloměrem a a b.*
„ 45 v §. 73. v řádku pátém místo: *prodloužky* čti: *prodlužky.*
„ 45 v §. 73. v řádku šestnáctém místo: *Pětiúhelník ABCDB* čti: *ABCDE.*