GEOMETRIE

pro čtvrtou třídu škol reálných.

Sepsal

Čeněk Jarolímek,

professor při c. k. české vyšší reálce v Praze.

Se stem obrazců v textu.

V PRAZE,

Nákladem jednoty českých mathematiků.

1874.

Tiskem dra. Edvarda Grégra.

Předmluva.

Rozšířením reálek vlasti naší v ústavy sedmitřídné, jakýmiž jsou v zemích sousedních již po několik let, nadešla nutnost, postarati se o novou třídu čtvrtou v příčině kněh učebných. Nelzeť v ní naprosto použiti kněh dosavadních, přispůsobených k dřívější osnově vyučování, kterouž byly počátky geometrie deskriptivní položeny do prvé třídy oddělení vyššího. Jelikož však není knihy, ať již české nebo německé, kteráž by činila zadost novému stavu věcí, odhodlal jsem se k sepsání knížky této, maje — tuším právem — za to, že vyhovím skutečné potřebě našich škol realných nově upravených.

Pokud nebude zákonodárstvím postaráno o zvláštní osnovu vyučování pro sedmitřídné reálky v Čechách, nařízeno jest zatím zavedení osnovy moravské; touto pak vyměřuje se měřictví v nové třídě čtvrté látka následující: „Užívání základních čtyř výkonů algebraických k řešení úloh planimetrických a stereometrických. Theoretická a konstruktivní cvičení o nejdůležitějších křivkách rovinných.“ Prvou částí této látky učebné míní se, jakž sdělili mi pp. kollegové moravští, konstruktivné řešení úloh geometrických pomocí algebry. Jelikož však přichází se úlohami podobnými k řešení rovnic, pokládám za nutné, abych odložil část tuto do běhu druhého, kde žáci mohli v algebře tou měrou pokročiti, že dovedou řešiti rovnice linearné a pouhé rovnice stupně druhého. Úkoly, jichž třeba řešiti pomocí kvadratických rovnic obecných a s dvěma neznámými, náležejících do nynější třídy páté, nemohou ovšem ve spisku tomto místa míti.

V příčině druhé části látky učebné, křivek rovinných, sebral jsem nejjednodušší konstrukce křivek pro technickou praxi nejdůležitějších, jakož i tečen a normál jejich, maje zvláště na zřeteli křivky stupně druhého.

Odůvodňuje jednotlivé věty a konstrukce, přestával jsem ovšem nutně na případech toho druhu, jež nevymáhají hlubších vědomostí z algebry a planimetrie, jelikož vykládají se tato odvětví mathematiky teprv ve třídách vyšších na základě vědeckém.

Jakkoliv teda nauka o křivkách může se v této třídě jen elementárně vykládati, získá tím přec učitel mnoho času ve vlastní geometrii deskriptivní, neboť, předpokládaje známost těchto počátků, bude moci nauku o křivkách v čase krátkém náležitě doplniti a k zobrazování křivek průměty orthogonálnými přistoupiti.

Měl jsem také zvláštní péči o to, aby obrazce v textu položené byly pokud možno pěkné a zřetelné, ale pohříchu zvýšil se tím náklad na vydání spisu nemálo. Přece však domnívám se právem, že cena spisu, porovná-li se s cenou kněh jiných toho druhu, bude shledána levnou, obsahu zcela přiměřenou.

Odevzdávaje práci tuto do rukou pp. kollegů, vznáším k nim prosbu, by věnovali jí laskavě pozornost svou a neobtěžovali sobě, oznámiti mi své zkušenosti při vyučování za pomocí jí anebo své náhledy o vadách jejích. Budu svědomitě všeho šetřiti, aby mohla tato knížka průběhem času lépe a lépe vyhověti svému účelu — býti ku prospěchu školám naší drahé vlasti.

V Praze, v měsíci lednu l. 1874.

Spisovatel.

Část I.

O křivkách rovinných.

I. O čarách vůbec.

1. *Čáru měřickou* vytvoří bod, pohybuje-li se v prostoru dle určitého zákona. Bod pohyblivý nazývá se bodem *tvořícím*, a zákon, dle něhož pohyb se děje, zákonem *výtvarným*.

2. Čára jest buď *přímá* (přímka), pohybuje-li se bod tvořící určitým směrem *stálým*, aneb *křivá* (křivka), mění-li se směr pohybu neustále.

3. Křivky rozvrhujeme na *rovinné* a *prostorové*; křivka rovinná leží celá v rovině, kterou položíme kterýmikoliv třemi různými body křivky; neleží-li veškeré polohy bodu tvořícího v jedné rovině, sluje křivka prostorovou.

4. Čarám náležejí, jako měřickým útvarům vůbec, tři vlastnosti měřické: *tvar, velikost* a *poloha*. Různé zákony výtvarné mají za následek různé tvary křivek; dle zákonů těch dáváme křivkám různá jména. *Kružnicí* na př. nazýváme křivku rovinnou, jejímž zákonem výtvarným jest podmínka, aby bod tvořící vzdálenost svou od určitého bodu jiného neměnil.

Dle tvaru dělíme čáry vůbec a) na křivky *konečné*, jichž tvořící bod navracuje se, vykonav dráhu konečnou, do své původní polohy a dráhu vytvořenou více neopouští; b) na křivky *nekonečné*, pohybuje-li se tvořící jejich bod do vzdálenosti nekonečné; nekonečně vzdálená poloha bodu tvořícího sluje *úběžným bodem* křivky. Má-li křivka nekonečná několik částí od sebe odloučených, tedy se takové zovou *větvemi* křivky.

Křivky konečné, jsou-li úplně zobrazeny, jeví se co křivky *uzavřené*; obrazy částí křivek nekonečných, které arci úplně zobraziti nelze, jeví se co křivky *otevřené*.

5. Dvě nekonečně blízké č. bezprostředně za sebou následující polohy bodu tvořícího nazývají se polohami *soumeznými*; jimi dán jest určitý *prvek* čáry, jenž za *přímočarý* pokládán býti může, poněvadž jest délka jeho nekonečně malá. — Dle toho možno považovati čáru uzavřenou za mnohoúhelník o nesčíslném počtu nekonečně malých stran.

6. Co do velikosti má čára, jakožto dráha bodu tvořícího, jediný rozměr, *délku*. Nekonečná čára má ovšem délku nekonečně velkou, pročež jen omezenou část čáry takové měřiti možno. Délka omezené přímky měří se *mírou;* aby pak délka čáry křivé přímou mírou měřena býti mohla, jest třeba sestrojiti přímku, jejíž délka by se délce dané křivky rovnala; tento výkon nazýváme *rektifikací* č. *zpřímením křivky.*

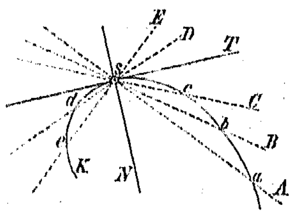
7. Co polohy se týče, dlužno připomenouti, že přímka určitý běh, dva však na vzájem protivné směry má. Tvořící bod může se stálým směrem pohybovati do nekonečna a rovněž tak směrem protivným. Jest tudíž přímka čarou nekonečnou, neomezenou, pojímáme-li ji co měřický útvar dokonalý. Ješto čáry nekonečné úplně zobraziti nelze, jest každá přímá čára nakreslená obrazem jen určité části přímky, obrazem přímky konečné, omezené.

Přímka, co čára nekonečná, má určitý bod úběžný. Přímky spolu rovnoběžné mají týž běh, mají nekonečně vzdálený bod, bod úběžný, společný.

II. Vzájemné polohy přímky a křivky rovinné.

8. Je-li dána v rovině křivka K a přímka P, tedy může vzájemná poloha těchto dvou útvarů především dvojí býti: buď a) nemají oba útvary žádného bodu společného, aneb b) mají jeden aneb i více bodů společných. V případě posledním jest přímka P *sečnou* křivky K, seče-li ji v jednom neb v několika bodech jednotlivých, tudíž ne soumezných. Část sečny takovými dvěma průsečíky omezená, sluje *tetivou* křivky. Tak jsou v obrazci 1. přímky A, B, C, D, E sečnami, části jejich as, bs, cs, ds, es tetivami křivky K. Myslíme-li sobě sečnu A kolem bodu s tak točenou, že postupně přijde do poloh zde zobrazených B, C, D, E, tedy se průsečík druhý a,

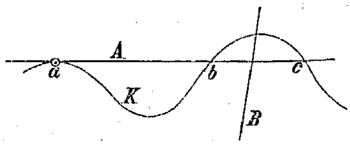
Obr. 1.



přicházeje do poloh b, c, stále přibližuje k bodu s; délka tetivy as se zkracuje, až posléze zaujme přímka A takovou polohu T, při které druhý průsečík a nekonečně se blíží k bodu s, načež oba tyto body jsou polohami soumeznými a délka tetivy se rovná nulle. V této poloze přímka T *dotýká* se křivky K, majíc s ní dvě soumezné polohy bodu tvořícího společné, a sluje *tečnou* křivky, bod s pak *bodem dotyčným.* Tečnu nelze definovati co přímku, která má s křivkou jen jediný bod společný; neboť tečna křivky může zároveň býti sečnou její, což platí na př. o přímce A (obr. 2.), která se křivky K v bodu a dotýká a v bodech b a c ji protíná; aneb zase jiná přímka B může míti s křivkou jediný toliko bod společný, aniž by tečnou její byla.

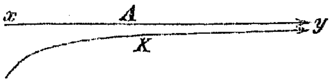
9. Křivce nekonečné náleží v úběžném bodu jejím také určitá tečna, jež *asymptotou* se nazývá, a třeba bod dotyčný byl ve vzdálenosti nekonečné, přec dá se často určitá část asymptoty zobraziti, jakož se později při jednotlivých křivkách přesvědčíme. Tak jest přímkou A (obr. 3.) zobrazena část asymptoty křivky K, kteráž směrem xy stále se ku křivce K přibližuje, teprv však v úběžném jejím bodu jí se dotkne. Má-li křivka několik větví nekonečných, má také několik asymptot.

Obr. 2.



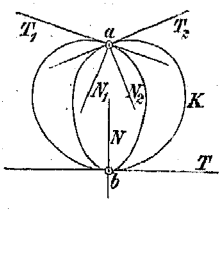
10. *Normálou* křivky nazývá se přímka, která v dotyčném bodu k tečně kolmo stojí. Tak jest v obr. 1. přímka $N \perp T$ normálou křivky K v bodu s.

Obr. 3.

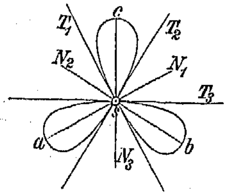


11. Přichází-li tvořící bod křivky během pohybu $n$kráte do téže polohy, sluje v takové *bodem n-násobným* (vůbec mnohonásobným) a to *průsečným* neb *dotyčným* dle toho, *protíná-li* aneb *dotýká-li* se v bodě tom n různých částí křivky. Obecně náleží křivce v každém bodu jejím jen jediná tečna a normála; v n-násobném bodu průsečném má však křivka n různých tečen a normál; v mnohonásobném bodu dotyčném má křivka tečnu i normálu jedinou, s kterou se všechny ostatní sjednocují. V obr. 4. zobrazena jest křivka K, jež má v bodu

Obr. 4.

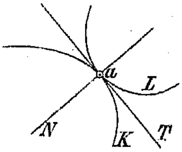


Obr. 5.



a dvojnásobný bod průsečný, v bodu b dvojnásobný bod dotyčný. V bodu a má dvě různé tečny T_1 a T_2, jakož i různé dvě normály $N_1 \perp T_1$, $N_2 \perp T_2$. V bodu b má tečny dvě, jež se však v T sjednocují; podobně se zde sjednocují obě normály v N. Křivka v obr. 5. znázorněná má v trojnásobném bodu průsečném s tři různé tečny.

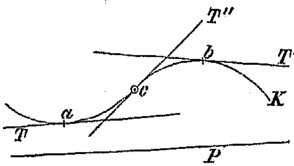
Obr. 6.



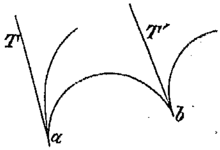
12. Dvě *křivky* K a L (obr. 6.) *se dotýkají*, mají-li v společném bodu a společnou tečnu T; normály jejich v bodu dotyčném se pak ovšem taktéž sjednocují.

13. Během tečny určuje se běh křivky v bodu dotyčném. Křivka jest v určitém bodu a (obr. 7.) ku přímce P *vypuklá*, leží-li tečna T v bodu a mezi křivkou a přímkou P; jest však *vydutá* v bodu b, leží-li křivka mezi tečnou bodu tohoto T' a přímkou P. Mezi částí vypuklou a vydutou bude mezní poloha c; obě části leží na různých stranách tečny T'', která náleží bodu c; bod tento nazývá se *bodem obratu.*

Obr. 7.



Obr. 8.



14. Změní-li se směr pohybu bodu tvořícího v určité poloze náhle v směr protivný, sluje v poloze takové bodem *návratu* (bod a v obr. 8.) neb *úvratu* (bod b) dle toho, nacházejí-li se části křivky bodem takovým oddělené na téže straně aneb na různých stranách jeho tečny. *Vrcholem* křivky jmenujeme bod, jenž dělí křivku na dvě části, jež k jeho normále *souměrnými* jsou. Křivka v obr. 5. znázorněná má tři vrcholy a, b, c.

15. *Stupeň křivky* udává nejvyšší možný počet průsečíkův křivky s přímkou. Křivka jest tedy stupně druhého, třetího, vůbec $n$tého, neseče-li ji žádná přímka ve více než ve dvou, ve třech, v n bodech. Dle toho jest *přímka čarou stupně prvního*, poněvadž ji každá přímka jiná v jediném toliko bodu protínati může; každá

pak čára křivá jest nejméně stupně druhého, poněvadž ji vždy přímkou alespoň ve dvou bodech protnouti lze.

16. Nejdůležitějšími ze všech čar křivých jsou *křivky stupně druhého*, jež také *kuželosečkami* nazýváme, poněvadž je možno obdržeti co průseče plochy kuželové s rovinami.

17. Máme-li určitou křivku zobraziti, sestrojme dostatečný počet poloh bodu tvořícího dle výtvarného zákona křivky, načež body ty křivou čarou jedním tahem spojme. Dostatečný počet bodův jest sestrojen, jeví-li se z nich určitě tvar křivky žádané.

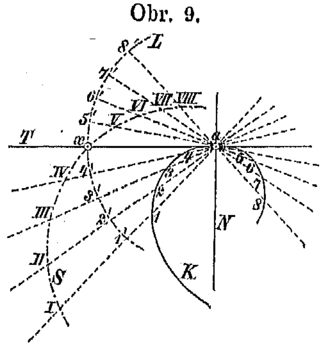
III. Obecné spůsoby strojení tečen a normál.

18. Úlohy o tečnách a normálách jsou tři: buď jest dán bod dotyčný na křivce, buď má tečna procházeti bodem daným mimo křivku aneb má býti rovnoběžná s danou přímkou. Především jedná se o řešení těchto úloh při křivkách vůbec, jichž výtvarné zákony nejsou známy.

Na základě známých zákonů výtvarných jest řešení úloh těchto při mnohých křivkách jednoduché a snadné, jak později okázáno bude.

19. Má-li se sestrojiti ku zobrazené křivce K (obr. 9.) tečna, je-li dán dotyčný bod a, veďme bodem tímto několik sečen, jichž průsečíky 1, 2, . . . 8 s křivkou K blíže bodu a se nacházejí, načež sečny ty protněme kruhovým obloukem L, opsaným ze středu a poloměrem libovolným. Od oblouku L vnášejme na sečny délky tetiv v nich obsažených: $a1 = 1'I$, $a2 = 2'II$ atd., na sečny však, jež druhou část křivky bodem a dělené protínají, směrem opáčným: $a5 = 5'V$, $a6 = 6'VI$ atd. Spojme nyní takto sestrojené body $I, II, \ldots VIII$ křivou čarou S, která v určitém bodě x kruhový oblouk L protínati bude; spojíme-li konečně body a a x přímkou, obdržíme tečnu žádanou. Neboť na každé sečně bodem a procházející rovná se délka tetivy části sečny mezi čarami L a S obsažené;

Obr. 9.



poněvadž tato část v přímce T přechází v jediný bod x, rovná se také délka tetivy v přímce T nulle; musí tudíž býti T tečnou křivky v bodu a (dle odst. 8.)

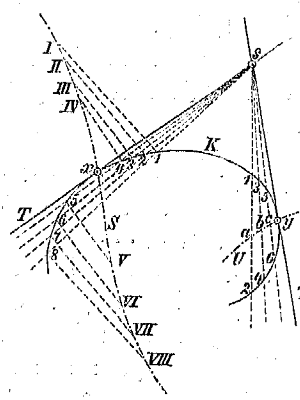
Pomocná čára S sluje *křivkou strojnou.*

Pozn. Aby veškeré čáry, jež kreslíme, byly co možná věrnými obrazy *bezhmotných čar měřických,* které při těchto úlohách na mysli máme, jest potřebí, aby veškeré čáry bez výminky rejsovány byly co možná *jemně,* což jest mimo to nezbytnou podmínkou přesnosti konstrukce. Kdyby na př. v obr. 9. křivka K a sečny její hrubými čarami kresleny byly, nemohly by se průsečíky 1, 2 . . . přesně vytknouti, což by nesprávnost čáry S a tudíž i tečny T za následek mělo. Aby se pomocné čáry rozeznávaly od daných a úlohou žádaných, vytahují se tyto čarami plnými, ony pak hustě a stejnoměrně přetržitými, jak to v obr. 9. naznačeno.

20. Máme-li sestrojiti v daném bodu a křivky K normálu, zobrazme především spůsobem právě uvedeným v bodu a tečnu, a veďme k ní daným bodem kolmici N.

Daným bodem křivky dá se obecně vésti jen jediná tečna a jediná normála; počet jejich jest však n, je-li daný bod n-násobný průsečný (viz odstavec 11).

Obr. 10.



21. Má-li procházeti tečna T daným bodem s mimo křivku (obr. 10), dá se tato zobraziti bezprostředně pozorným přiložením pravídka; poněvadž však hmotné obrazy naše T a K mají prvek společný, jenž má délku patrnou, konečnou, bude zde zároveň úlohou, sestrojiti přesně obraz bodu dotyčného. K tomu cíli zobrazme několik sečen, bodem s procházejících a od tečny T co možná málo se odchylujících, načež sestrojme k tetivám kolmice v koncových bodech protivnými směry, a udělme jim délky příslušných tetiv $18 = 1I = 8VIII$, $27 = 2II = 7VII$ atd. Strojná křivka S body $I\ II\ III\,..\ VIII$ spojující seče tečnu T v dotyčném bodu jejím x.

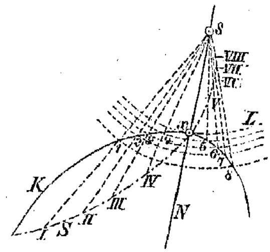
22. Křivka zde zobrazená má ještě druhou tečnu T' bodem s procházející; dotyčný bod její y sestrojen jest spůsobem jiným.

Strojná křivka U spojuje zde půlící body tetiv, obsažených v sečnách bodem s vedených: $a1 = a2$, $b3 = b4$ atd.

Křivka stupně $n$tého má obecně n tečen různých, procházejících bodem, jenž dán jest mimo křivku. Při některých křivkách není však tečna vůbec možná, je-li dán bod, jímž tečna procházeti má, uvnitř plochy omezené křivkou neb některou větví její.

23. Má-li se vésti normála bodem s mimo křivku K (obr. 11.) daným, opišme ze středu s kruhový oblouk L, jenž dotýká se křivky K, a sestrojme dotyčný bod x pomocí strojné křivky S, načež bude přímka $sx = N$ normálou žádanou. Křivky K a L dotýkajíce se totiž v bodu x, mají společnou zde normálu; normálou kruhového oblouku L v bodu x jest pak jeho poloměr xs.

Obr. 11.

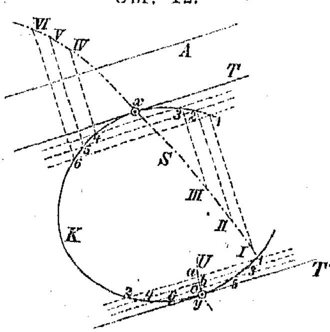


Jednotlivé body I, II... $VIII$ křivky strojné S obdržíme následovně. Protněme křivku K několika oblouky kruhovými s tečným obloukem L soustřednými, a spojme průsečíky se středem s. Na paprsky tyto přenesme od křivky K délky tetiv příslušných oblouků, a to v různých částech křivky K, bodem x dělené, směry protivnými: $18 = 1I = 8\,VIII$, $27 = 2II = 7\,VII$ atd.

Jiný spůsob strojení normály bodem mimo křivky uveden jest později v odst. 105.

24. Mají-li se vésti ku křivce K tečny rovnoběžné s přímkou A (obr. 12.), možno je zobraziti taktéž bezprostředně rovnoběžným pošinutím pravídka; dotyčné body obdržíme pomocí strojných křivek S a U, sestrojených spůsobem podobným, jako v případě předchozím. Pomocné sečny jsou vedeny rovnoběžně s tečnou T a k sečnám sestrojeny kolmice v bodech křivky; délky jejich $16 = 1I = 6\,VI$, $25 = 2II = 5\,V$ atd. Tím sestrojena křivka S, dávající dotyčný bod x. Při tečně T' užito strojné křivky U, jež rozpoluje tetivy s tečnou rovnoběžné.

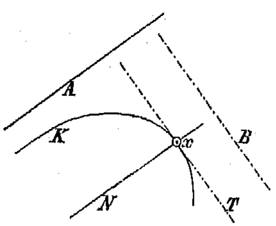
Obr. 12.



25. Abychom zobrazili normálu křivky K (obr. 13.), která by

s danou přímkou A rovnoběžná byla, veďme ku křivce K především tečnu kolmou ku přímce A ($B \perp A$, $T \parallel B$), sestrojme kterýmkoliv spůsobem bod dotyčný x, načež bude kolmice N v tomto bodě k tečně T sestrojená normálou žádanou; je-li totiž $A \perp T$ i $N \perp T$, musí býti $N \parallel A$.

Obr. 13.

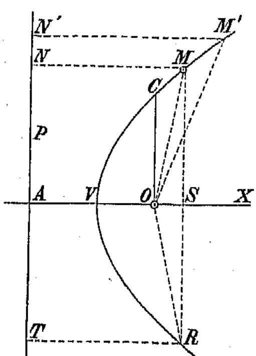


Počet možných tečen neb normál v případě tomto rovná se stupni křivky dané.

IV. O křivkách stupně druhého vůbec.

26. Předpokládejme v rovině přímku P (obr. 14.) a určitý bod O; pohybuje-li se bod tvořící tím spůsobem, *aby poměr vzdáleností jeho od bodu O a od přímky P se neměnil*, vytvoří *křivku stupně druhého.*

Obr. 14.



Všeobecný tento výtvarný zákon křivek stupně druhého dá se vyjádřiti buď úměrou $MO : MN = M'O : M'N'$, jsou-li M a M' dvě libovolné polohy bodu tvořícího, a MN i $M'N' \perp P$ aneb rovnicí $\frac{MO}{MN} = \varepsilon$, při čemž znamená ε určité stálé číslo pro všechny body křivky; jest to podíl jmenovaného poměru a sluje číselnou výstředností křivky.

Je-li na př. $\varepsilon = 2$, tedy $\frac{MO}{MN} = 2$, $MO = 2 . MN$, pak jest vdálenost každého bodu křivky od bodu O dvakráte větší vzdálenosti jeho od přímky P. Přímka P nazývá se *řídící přímkou*, bod O *ohniskem* křivky, a paprsek, kterýkoliv bod křivky s ohniskem spojující, na př. MO, *průvodcem* bodu toho.

27. Přímka AX ohniskem k přímce řídící kolmo vedená dělí křivku na dvě části souměrné. Abychom větu tuto odůvodnili, sestrojme $MR \perp AX$, učiňme $SR = MS$, $RT \perp P$, a spojme R s O, načež jest $\triangle ROS \cong \triangle MOS$, pročež $RO = MO$; poněvadž jest

dále $RT = MN$, plyne z posledních dvou rovnic dělením $\frac{RO}{RT} = \frac{MO}{MN} = \varepsilon$.

Dle toho musí bod R, jenž jest s bodem M ku přímce AX souměrný, křivce této náležeti, a podobně musí každému bodu jejímu náležeti souměrný bod křivky na druhé straně přímky AX.

Přímka AX jest *osou* křivky a rozpoluje veškeré tetivy kolmo k ní vedené.

Bod křivky v ose AX ležící V jest jejím vrcholem; musí tu ovšem $\frac{VO}{VA} = \varepsilon$ býti.

Průvodce CO k ose AX kolmý sluje *parametrem* křivky.

28. Dle toho, je-li číslo $\frac{MO}{MN} = \varepsilon \lesseqgtr 1$, č. má-li každý bod křivky menší, rovnou aneb větší vzdálenost od ohniska než od přímky řídící, obdržíme křivky tvarem svým nápadně se lišící; v prvním případě ($\varepsilon < 1$) sluje křivka *ellipsou*, v druhém ($\varepsilon = 1$) *parabolou* a ve třetím ($\varepsilon > 1$) *hyperbolou*. Zvláštním případem ellipsy jest kružnice; jest to křivka stupně druhého, při níž $\varepsilon = 0$.

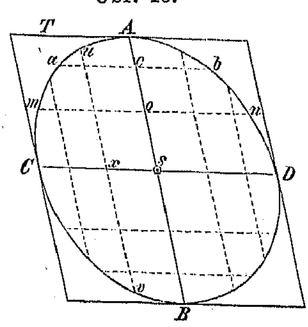
29. V každé kuželosečce jest čára, jež veškeré spolu rovnoběžné tetivy rozpoluje, přímá a nazývá se *průměrem*; takových průměrů má křivka nesčíslné množství, poněvadž má tolikéž soustav tetiv rovnoběžných.

V obr. 15. rozpoluje průměr AB tetivy $ab \parallel mn$ atd., $ac = bc$, $mo = no$. Veškeré průměry protínají se v jediném bodu — v *středu* křivky s, jenž je zároveň vesměs rozpoluje ($As = Bs$, $Cs = Ds$).

30. Dva průměry křivky jsou spolu *sdružené*, jestliže každý z nich rozpoluje tetivy rovnoběžné s průměrem druhým.

V obr. 15. jsou průměry AB a CD spolu sdružené, ješto průměr AB rozpoluje tetivy $ab \parallel mn \parallel CD$, kdežto průměr CD zase rozpoluje tetivy rovnoběžné s průměrem AB. Máme-li k danému průměru AB sestrojiti průměr sdružený, spojme půlící body dvou tetiv rovnoběžných s průměrem AB; aneb,

Obr. 15.



je-li dán střed s, učiňme $uv \parallel AB$, $ux = xv$, načež bude přímka sx čili CD průměrem žádaným.

31. Různým průměrům náležejí různé průměry sdružené; poněvadž průměru jednomu možno dáti směr jakýkoliv, má křivka patrně nesčíslné množství párů průměrů sdružených. Obecně tvoří průměry sdružené spolu úhly kosé; máť ale křivka stupně druhého jeden pár sdružených průměrů k sobě kolmých, a takové slují *osami* křivky. Každá z nich rozpoluje tetivy k ní kolmé, pročež jest křivka k oběma osám svým souměrná; koncové body os jsou vrcholy křivky.

32. Pošineme-li tetivu ab (obr. 15.) rovnoběžně s průměrem CD až do koncového bodu A průměru sdruženého, stane se v této poloze tečnou křivky v bodu A, jelikož koncové body tetivy, jsouce napořád stejně vzdáleny od průměru AB, v této poloze s bodem A se sjednotí. Vedeme-li tudíž koncovými body každého průměru rovnoběžky s průměrem sdruženým, obdržíme čtyři tečny rovnoběžník tvořící.

Poněvadž tedy seče tečnu průměr sdružený v bodu dotyčném, bude snadné bod ten sestrojiti, je-li dána jakákoliv tečna křivky T (obr. 15.): veďme dvě tetivy $ab \parallel mn \parallel T$, a spojme body c, o je rozpolující; přímka oc prodloužena seče tečnu T v dotyčném bodu A. Je-li ale dán střed křivky s, stačí jediná tetiva $ab \parallel T$; spojíme-li střed tetivy c se středem s, seče průměr sc tečnu T v bodu dotyčném.

V. Sestrojení ellipsy.

33. Obecný výtvarný zákon kuželoseček poskytuje zároveň prostředek k sestrojení křivek těchto. Každá křivka taková dána bude oběma řídícími útvary O a P, totiž ohniskem a přímkou řídící, a číselnou výstředností ε.

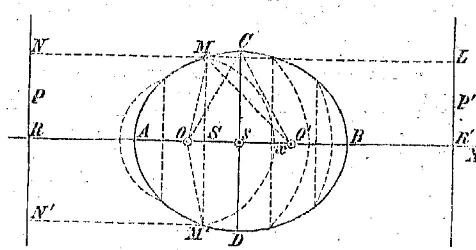
Při ellipse musí býti číslo $\varepsilon < 1$.

Budiž v obr. 16. O ohniskem, P řídící přímkou ellipsy, a ε na př. $= 1/2$, tedy $\frac{MO}{MN} = \frac{1}{2}$, čili $MN = 2 . MO$, t. j. vzdálenost každého bodu této ellipsy od přímky řídící jest dvakráte větší, než vzdálenost jeho od ohniska. Přímka $XOR \perp P$ jest osou ellipsy. Opíšeme-li tedy z ohniska libovolným poloměrem Ox kruhový oblouk a učiníme-li $RS = 2 . Ox$, bude kolmice v bodu S k ose

RX sestrojená onen oblouk protínati ve dvou bodech ellipsy M a M', neboť $MN = RS = 2.\ MO$ a $M'N' = RS = 2.\ M'O$. V každém oblouku opsaném z O poloměrem jiným obdržíme podobně vždy dva body ellipsy k ose RX souměrné. Zvětšujeme-li stále poloměry pomocných oblouků, shledáme posléze, že kolmice MM' neseče více oblouk, poněvadž jest OS větší, než jeho poloměr; v určitém místě budou tyto délky stejné, ona kolmice bude se oblouku v ose RX dotýkati, a dotyčný bod bude vrcholem ellipsy. Totéž objeví se nám, zkracujeme-li stále poloměr pomocného oblouku; má tudíž ellipsa v ose RX dva vrcholy A a B, jež obdržíme, učiníme-li $OA = \frac{OR}{3}$ a $OB = OR$, poněvadž $\frac{AO}{AR} = \varepsilon = {}^1/_2$, jakož i $\frac{BO}{BR} = {}^1/_2$.

Spojíme-li pak veškeré body sestrojené čarou křivou, obdržíme ellipsu žádanou.

Obr. 16.



34. Poněvadž má ellipsa dvě osy k sobě kolmé a vzájemně se rozpolující v středu křivky (odstavec 31.), zobrazíme osu druhou, sestrojíme-li k ose AB (obr. 16.) v středu jejím s kolmici CD; bod s jest středem ellipsy, body A, B, C a D vrcholy jejími.

V následujícím odstavci bude okázáno, že osa ohnisko obsahující vždy delší jest; za tou příčinou nazývá se osa AB velkou, osa CD malou osou ellipsy. Poněvadž jest ellipsa i k ose CD souměrná, možno považovati přímku $P' \parallel P$ $(sR' = sR)$ za druhou přímku řídící a bod O' $(sO' = sO)$ za druhé ohnisko ellipsy; vzhledem k těmto řídícím útvarům musí taktéž býti platným zákon $\frac{MO'}{ML} = \varepsilon$, je-li $ML \perp P'$. Má tedy ellipsa dvě ohniska v ose AB; rovná jejich vzdálenosť od středu křivky sluje linearnou *výstřednosti* (č. excentrikou) ellipsy a znamená se písmenem e; pročež $Os = Os' = e$. Každý bod ellipsy má dva průvodce; znamenejme délky jejich $MO = \varrho_1$, $MO' = \varrho_2$. Dle zákona ellipsy jest

$$MO = \varrho_1 = \varepsilon \,.\, MN$$
$$MO' = \varrho_2 = \varepsilon \,.\, ML$$

tudíž sečtením

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \varepsilon(MN + ML)$$
$$\varrho_1 + \varrho_2 = \varepsilon \,.\, NL = \varepsilon . RR'.$$

$$AO' = \varepsilon \,.\, AR'$$
$$BO' = AO = \varepsilon \,.\, AR$$

$$AO' + BO' = \varepsilon(AR + AR')$$

čili $AB = \varepsilon \,.\, RR'$.

Z obou těchto rovnic následuje $\varrho_1 + \varrho_2 = AB$, t. j. *součet vzdáleností každého bodu ellipsy od obou ohnisek čili součet obou průvodců rovná se velké ose ellipsy.*

35. Dle této vlastnosti ellipsy musí býti $CO + CO' = AB$, a poněvadž $CO = CO'$, jest také $CO = \frac{AB}{2} = As$, t. j. vzdálenost každého koncového bodu osy malé od kteréhokoliv ohniska rovná se polovině osy velké. Délka osy velké značí se obyčejně $2a$, osy malé $2b$, tedy $As = Bs = a$, $Cs = Ds = b$; v $\triangle\, CsO$ jest vždy $Cs < CO = a$, pročež v každé ellipse $b < a$. Pro $a = b$ přechází ellipsa v kružnici; ohniska jsou v středu jejím, $e = 0$.

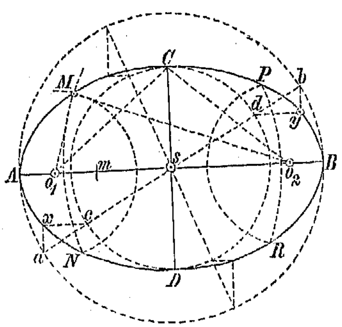
V $\triangle\, CsO$ jest $\overline{OC}^2 = \overline{Os}^2 + \overline{Cs}^2$ čili $\overline{OC}^2 = \overline{As}^2 = a^2 = e^2 + b^2$, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Je-li ellipsa na př. dána velkou osou a oběma ohnisky, sestrojíme koncové body osy malé, protneme-li ji z ohniska obloukem, jehož poloměr se rovná polovině osy velké. Je-li ale ellipsa dána oběma osami, sestrojíme ohniska její, protneme-li osu velkou polovinou její z některého koncového bodu osy malé.

Úloha. Sestrojte obě osy ellipsy, jsou-li dány obě ohniska a jeden bod její.

36. Vlastnost ellipsy v odstavci 34. odůvodněná poskytuje nový spůsob sestrojení křivky této.

Jsou-li dány osy ellipsy AB a CD (obr. 17), sestrojme ohniska její ($Co_1 = Co_2 = As$), zvolme bod m mezi o_1 a s, opišme z o_1 kruhový oblouk MN poloměrem Am, a z o_2 poloměrem Bm jej protněme; průsečíky M a N náležejí žádané ellipse, poněvadž $Mo_1 + Mo_2 = Am + mB = AB$. Opíšeme-li z o_2 poloměrem Am oblouk a protneme-li jej z o_1 poloměrem Bm, obdržíme nové dva body ellipsy P a R. Každý jiný bod zvolený na přímce o_1s dá jako bod m nové čtyři body ellipsy, jež tímtéž spůsobem sestrojíme.

Obr. 17.

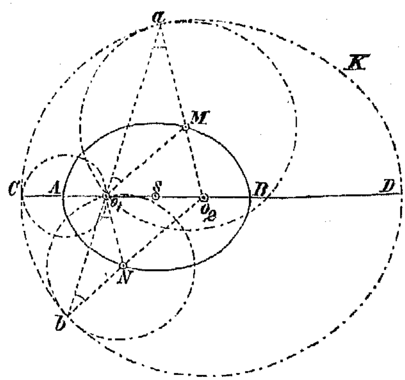


37. Jiným spůsobem sestro-

jíme jednotlivé body ellipsy, opíšeme-li ze středu jejího kružnice nad oběma osami (obr. 17.) a zobrazíme-li v nich průměry různými směry; vedeme-li z průsečíků c a d každého průměru v kružnici malé rovnoběžky s osou velkou $dy \parallel cx \parallel AB$, a k nim kolmice z průsečíků a a b v kružnici velké ($ax \perp cx$, $by \perp dy$), tedy jsou paty těchto kolmic x a y dvěma body ellipsy. Pomocí každého průměru jiného obdržíme nové dva body ellipsy.

38. Rovněž jednoduchý i praktický jest spůsob následující. Opišme z některého ohniska, na př. z o_2 (obr. 18.) kružnici K poloměrem rovnajícím se velké ose ellipsy: $o_2C = AB$; veďme v kružnici této směrem libovolným tetivu ab ohniskem o_1, spojme ao_2, bo_2 a učiňme $o_1M \parallel bo_2$, $o_1N \parallel ao_2$, načež jsou M a N dva body ellipsy. Poněvadž jest totiž $ao_2 = bo_2$, jest v $\triangle abo_2$ úhel $a = \sphericalangle b$; těmže úhlům však rovnají se též úhly $\sphericalangle ao_1M$ a $\sphericalangle bo_1N$, ješto $o_1M \parallel bo_2$, $o_1N \parallel ao_2$. Jsou tedy trojúhelníky ao_1M a bo_1N rovnoramené, pročež $Mo_1 = aM$ $No_1 = bN$. Mimo to jest $AB = ao_2 = aM + Mo_2$, pak $AB = bo_2 = bN + No_2$, a dosadíme-li do těchto rovnic za aM rovné Mo_1, a za bN rovné No_1, obdržíme $AB = Mo_1 + Mo_2$, $AB = No_1 + No_2$, čímž odůvodněno, že (dle odstavce 34.) body M a N ellipse náležejí, neboť součet průvodců každého bodu tohoto rovná se velké ose ellipsy. Každá tetiva ohniskem o_1 směrem jiným vedená dá podobně nové dva body ellipsy; možno tudíž zobraziti tímto spůsobem libovolné množství bodů ellipsy.

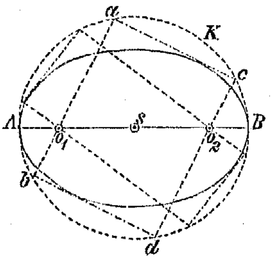
Obr. 18.



39. Zároveň obsahuje tato ellipsa *středy veškerých kružnic, jež kružnice K se dotýkajíce bodem o_1 procházejí.* Kružnice opsaná na př. z bodu M poloměrem Mo_1 dotýká se kružnice K v bodu a, poněvadž $Ma = Mo_1$ a oba středy těchto kružnic M i o_2 s bodem a v jedné přímce leží. Podobně kružnice z N poloměrem No_1 opsaná dotýká se kružnice K v bodu b; nejmenší ze všech těchto kružnic má střed svůj v A a poloměr její jest $Ao_1 = AC$; středem kružnice největší jest bod B, a poloměrem jejím $Bo_1 = BD$.

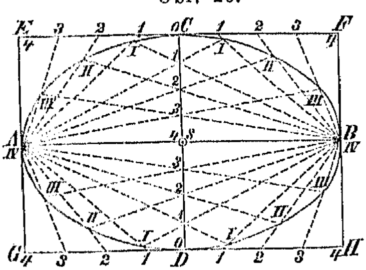
Pohybuje-li se tudíž bod tím spůsobem, že v každé poloze své od kružnice K a od určitého bodu o_1 uvnitř kružnice K ležícího rovné vzdálenosti má, vytvořuje ellipsu.

Obr. 19.

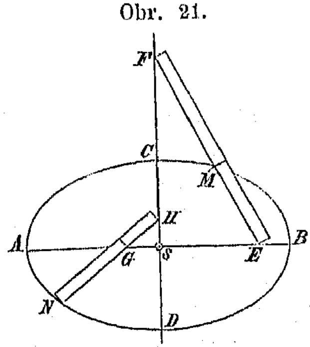


40. Opíšeme-li nad velkou osou ellipsy AB (obr. 19.) kružnici K, vedeme-li oběma ohnisky o_1 a o_2 libovolným směrem dvě rovnoběžné spolu tetivy $ab \parallel cd$, a spojíme-li koncové jejich body ac a bd, budou přímky tyto tečnami ellipsy. Měníce směr tetiv ab a cd, můžeme vepsati do kružnice K libovolné množství obdélníků, jichž dvě protější strany ohnisky ellipsy procházejí: ostatní strany jejich jsou vždy tečnami ellipsy. Zobrazíme-li pak čáru, jež dotýká se těchto tečen a mimo to kružnice K v bodech A a B, obdržíme ellipsu žádanou. Čára dotýkající se soustavy určitých čar sluje čarou *obalovou*. Sestrojili jsme zde tedy ellipsu co obalovou čáru všech tečen jejích.

Obr. 20.



Obr. 21.



41. Je-li dána ellipsa oběma osami AB a CD (obr. 20.), a sestrojíme-li ku každé ose v koncových bodech kolmice, obdržíme obdélník $EFGH$. Rozdělme kterékoliv dvě protější strany jeho na rovný počet stejných dílků a osu, která strany ty rozpoluje, na dílků rovněž tolik, i označme body C a D nullou a od těchto bodů počínajíc ostatní dělící body všemi směry císlicemi 1, 2 atd. Spojme pak každý dělící bod stran EF a GH s bližším vrcholem velké osy (A neb B) přímkami, mimo to vrcholy A i B se všemi dělícími body osy CD, a prodlužme paprsky poslední; průsečíky paprsků procházejících stejně označenými body dělícími náležejí ellipse. Tak na př. seče paprsek $A1$ prodlou-

žený paprsek B 1 v bodu ellipsy I; paprsky $A2$ a $B2$ protínají se v druhém bodu ellipsy II atd.

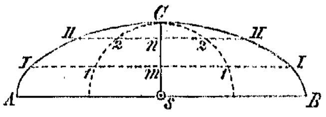
Podobně bychom byli mohli rozděliti strany EG, FH a osu AB, paprsky pak, jež by se v bodech ellipsy protínaly, vésti vrcholy C a D.

Ellipsa dotýká se pak obdélníka $EFGH$ ve svých vrcholech A, B, C, D; za tou příčinou nazývá se tento spůsob *vepsáním ellipsy do obdélníka.*

42. Chceme-li zobraziti ellipsu, jejíž osy dány jsou, rychle a nezáleží-li příliš na přesnosti, možno obdržeti jednotlivé body její následovně. Na přímočárně seříznutý proužek papíru vnesme od konce E půl malé osy $EM = Cs = b$ (obr. 21.) a přičtěme k tomu polovinu osy velké $MF = As = a$, poznamenajíce přesně body M a F. Položíme-li nyní proužek ten libovolným směrem na obrazec tak, aby konec E v ose velké AB, konec F v prodloužené ose malé CD se nacházel, bude dělící bod M obou poloos krýti určitý bod ellipsy. Poznamenejme jej a udělme proužku polohu jinou, majíce stále na zřeteli, že při zobrazování nových bodů ellipsy bod E v ose velké a bod F v ose malé vždy se nacházeti musí. Takovýmto spůsobem, jenž *sestrojením ellipsy ze součtu poloos* se nazývá, možno sobě zjednati rychle jakékoliv množství bodův ellipsy.

43. Podobně možno *sestrojiti ellipsu z rozdílu poloos.* Dáme-li proužku papíru délku velké poloosy $NH = As = a$ (obr. 21.), a vneseme-li naň od konce N polovinu osy malé $NG = Cs = b$, bude $GH = a - b$ rozdílem obou poloos. Položíme-li nyní proužek NH tak, aby bod H byl v malé ose CD, bod G v ose velké AB, bude v každé takové poloze bod N bodem ellipsy. Tento spůsob stává se tím nespolehlivějším, čím menší jest rozdíl poloos; součet poloos dává v každém případě ellipsu přesnější.

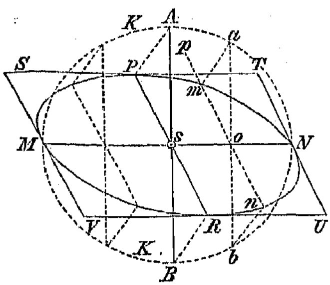
Obr. 22.



44. Jedná-li se o zobrazení nějaké ellipsy vůbec, a může-li poměr os libovolným býti, učiňme velkou poloosu $As = a = 2b = 2 . Cs$ (obr. 22.), opišme poloosou Cs z bodu s kružnici a veďme několik sečen rovnoběžných s osou AB. V každé takové sečně obsažená tetiva ellipsy rovná se dvojnásobné tetivě kružnice; učiníme-li tedy $1I = m1$, $2II = n2$ atd., zobrazíme ellipsu spojením bodů $I\ II \ldots$.

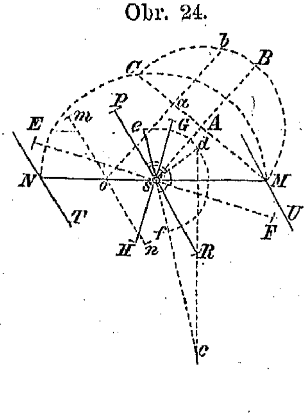
Podobně bychom sestrojili body ellips ztroj-, vůbec zmnohonásobením, ano i dělením délek $m1$, $n2$ ... v témž poměru.

Obr. 23.



45. Místo osami může býti dána ellipsa dvěma průměry sdruženými, vždy úhly kosé tvořícími (odst. 31). Má-li se ellipsa sestrojiti, jež délkami i úhlem dvou průměrů sdružených MN a PR (obr. 23.) dána jest, veďme především koncovými body každého průměru rovnoběžky s průměrem druhým, čímž obdržíme rovnoběžník $STUV$, jehož stran se ellipsa v bodech M, N, P a R dotýkati (odst. 32.) bude. Do tohoto rovnoběžníka dá se ellipsa vepsati podobně jako do obdélníka dle odst. 41. obr. 20; strojení jednotlivých bodů ellipsy děje se zde tímtéž spůsobem. Provedení zůstavuje se čtenáři; jednou buďtež děleny strany ST, UV a průměr PR, podruhé strany SV, TU a průměr MN.

Obr. 24.



46. Jednotlivé body ellipsy možno tu sestrojiti také co koncové body tetiv rovnoběžných s průměrem PR, jež průměr MN rozpoluje. Opišme k tomu účelu nad průměrem MN kružnici K (obr. 23.), učiňme $AsB \perp MN$ a spojme AP, BR. Veďme libovolným bodem o v průměru MN přímku $op \parallel PR$ a $ab \perp MN$; přímky $am \parallel AP$, $bn \parallel BR$ protínají přímku op ve dvou bodech ellipsy m a n. Podobně možno omeziti každou jinou tetivu s průměrem PR rovnoběžnou.

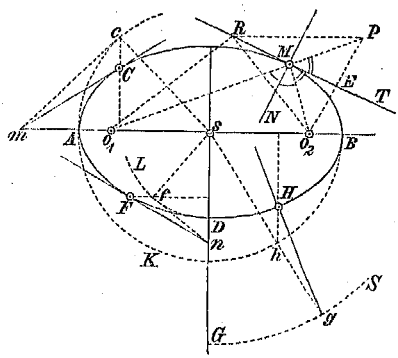
47. Tetivy rovnoběžné s průměrem PR v ellipse, jež průměry sdruženými MN a PR (obr. 24.) dána jest, omeziti lze také následovně. Opišme nad průměrem MN kružnici, protněme ji z M celým průměrem druhým v bodu C ($MC = PR$) a opišme druhou kružnici nad průměrem MC. Máme-li omeziti nyní tetivu mn rovnoběžnou s průměrem PR, veďme jejím průsečíkem o v MN kolmici oab ku MC, a učiňme $om = on = ab$. Podobně omezme větší počet tetiv rovnoběžných s PR a koncové body spojme ellipsou.

48. Máme-li sestrojiti z daných dvou průměrů sdružených MN a PR (obr. 24) osy ellipsy, veďme bodem R přímku $cd \perp MN$, učiňme $Rc = Rd = Ms$, spojme ds, cse, rozpůlme $\sphericalangle\, dsc$ přímkou EF a $\sphericalangle\, esd$ přímkou GH, a opišme z s poloměrem sd oblouk edf; ec jest délka velké osy, fc osy malé. Učiníme-li $Es = Fs = \frac{ec}{2}$, $Gs = Hs = \frac{fc}{2}$, bude EF velkou a GH malou osou ellipsy.

VI. Tečny a normály ellipsy.

49. *Normála ellipsy N rozpoluje vnitřní a tečna T vnější úhel obou průvodců* bodu dotyčného M (obr. 25.): $\sphericalangle\, o_1MN = \sphericalangle\, o_2MN$, $\sphericalangle\, o_2MT = \sphericalangle\, PMT$.

Obr. 25.



Máme-li tudíž sestrojiti v daném bodu ellipsy M tečnu i normálu, spojme bod M s oběma ohnisky, prodlužme některého z průvodců, i rozpůlme $\sphericalangle\, o_1Mo_2$ přímkou N a $\sphericalangle\, PMo_2$ přímkou T; T jest tečnou, N normálou v bodu M.

Že takto sestrojená přímka T tečnou ellipsy jest, dá se odůvodniti následovně. Učiňme $MP = Mo_2$, spojme Po_2; zvolme na přímce T kdekoliv bod R a spojme jej s body P, o_1 a o_2. Poněvadž $\triangle PEM \cong \triangle o_2EM$, tedy $PE = Eo_2$ a $\sphericalangle\, PEM = \sphericalangle\, MEo_2$, a z těchto příčin také $\triangle PER \cong \triangle o_2ER$, bude $PR = o_2R$, což vloženo do $PR + Ro_1 > Po_1$ dává $o_2R + Ro_1 > Po_1$; ješto však $Po_1 = PM + Mo_1 = o_2M + Mo_1 = AB$, bude $o_2R + Ro_1 > AB$, z čehož následuje, že bod R ellipse náležeti nemůže.

Poněvadž bod R zvolen byl na přímce T kdekoliv, leží každý bod přímky T kromě M mimo ellipsy; oba body, jež má každá sečna s ellipsou (jakožto křivkou stupně druhého) společné, sjednocují se tudíž v bodu M, pročež musí býti přímka T tečnou ellipsy (odst. 8.).

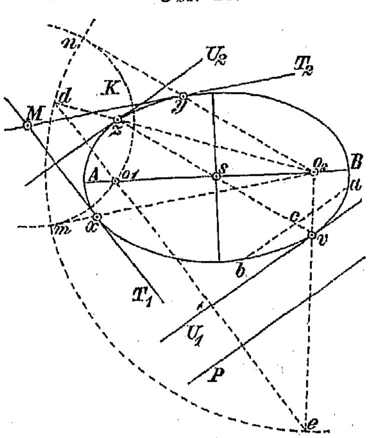
Přímka N jest normálou ellipsy, poněvadž jest kolmá k tečně

T; neboť přímky, jež rozpolují úhly dvou různoběžek, jsou k sobě kolmé.

50. Opíšeme-li z bodu s poloměrem sA kružnici K (obr. 25.), možno sestrojiti tečnu v daném bodu C pomocí kolmice vedené bodem C k ose velké, která kružnici K v bodu c seče; sestrojíme-li $cm \perp cs$ t. j. tečnu ke kružnici K v bodu c, a spojíme-li mC, obdržíme tečnu žádanou. Nachází-li se daný bod F na blízku malé osy, mohla by vzdálenost mF snadno tak velká býti, že by se průsečík m nedal zobraziti v mezích nákresny; tu opišme kruhový oblouk L z bodu s poloměrem sD, učiňme $Ff \perp sD$, $fn \perp fs$, načež bude přímka Fn tečnou ellipsy v bodu F. Normálu bychom pak sestrojili co kolmici k tečně.

51. Opíšeme-li z bodu s poloměrem As kružnici K (obr. 25.) a poloměrem, jenž rovná se součtu obou poloos ($sG = As + sD$) kružnici S, zobrazíme normálu v kterémkoliv bodu ellipsy H, učiníme-li $Hh \perp AB$ a spojíme-li bod H s bodem g, v němž prodloužená přímka sh kružnici S seče. Přímka gH jest normálou ellipsy v bodu H. Tento způsob jest zvláště výhodným, má-li se zobraziti větší počet normál ellipsy dané (na př. v úloze odst. 105.).

Obr. 26.



52. Daným bodem mimo ellipsu M (obr. 26.) možno vésti k ní obě možné tečny T_1 a T_2 bezprostředně přiložením pravídka; dotyčné body sestrojíme pak následovně. Z bodu M co středu opišme kruhový oblouk K, jenž některým ohniskem prochází (na př. o_1), a protněme jej v bodech m a n z ohniska druhého (o_2) délkou rovnající se velké ose AB ($o_2m = o_2n = AB$); přímky, jež průsečíky m a n s ohniskem druhým spojují, protínají tečny v bodech dotyčných: přímka mo_2 tečnu T_1 v dotyčném bodu x, no_2 tečnu T_2 v bodu y.

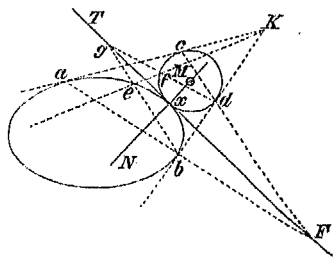
53. Poněvadž tečna T_1 rozpoluje oblouk mo_1, tečna T_2 oblouk no_1, možno tečny tyto sestrojiti také tenkráte, není-li dána křivka, nýbrž toliko osy její.

Sestrojme nejprvé spůsobem uvedeným body m a n, a zobrazme přímky T_1 a T_2, jež bodem M procházejí a oblouky no_1, mo_1 půlí.

54. Tečny ellipsy rovnoběžné s danou přímkou P (obr. 26.) možno rovněž zobraziti bezprostředně, rovnoběžným pošinutím pravídka ku přímce P přiloženého. Dotyčný bod v každé této tečně U_1 a U_2 možno sestrojiti buď spůsobem předcházejícím, myslíme-li sobě, jako by tečna tato některým jejím bodem vedena byla, aneb spůsobem v odstavci 32. uvedeným. Veďme tětivu $ab \parallel U_1$ a rozpůlme ji bodem c, načež seče průměr sc obě tečny U_1 a U_2 v dotyčných bodech v a z. Prvý spůsob jest ovšem přesnější; naopak by zase spůsobem druhým, méně ovšem přesným, sestrojen býti mohl dotyčný bod každé tečny, vedené bodem mimo ellipsu daným.

55. Je-li dána ellipsa osami, a nechceme-li při úloze této křivku samou sestrojovati, veďme ohniskem některým, na př. o_1 kolmici de ku přímce P, jakožto oblouk kruhový, jehož středem je úběžný bod tečen žádaných, a protněme kolmici tú délkou osy velké z ohniska o_2 v bodech d a e ($o_2d = o_2e = AB$). Přímky U_1 a U_2, jež k přímce de kolmé jsou a délky do_1, eo_1 půlí, jsou tečnami žádanými; body z a v, v nichž je sekou přímky do_2 a eo_2, jsou body dotyčnými.

Obr. 27.



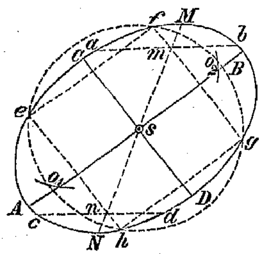
56. Má-li se sestrojiti normála ellipsy, která by daným bodem M mimo tuto křivku procházela (obr. 27.), opišme (dle odst. 23.) z M kružnici, jež ellipsy se dotýká, načež dotyčný bod x dokonale přesně spůsobem následujícím sestrojíme. Zobrazme společné tečny ellipsy a kružnice ac a bd, protínající se v bodě K; ustanovme dotyčné body a, b, c, d, spojme cd, ab a položme průsečíkem F těchto přímek k oběma křivkám společnou tečnu FT. Přímka Mx k této tečně FT kolmo vedená jest normálou žádanou N.

Nachází-li se průsečík F mimo nákresny, veďme bodem K libovolným směrem sečnu Kfe, spojme df, be, položme průsečíkem těchto přímek g tečnu T a učiňme posléze $MN \perp T$.

57. Mají-li se sestrojiti normály ellipsy, jež by s danou přímkou P rovnoběžné byly, zobrazme nejprvé tečny ellipsy ku přímce P kolmé a sestrojme body dotyčné, jimiž žádané normály s přímkou P rovnoběžně vésti lze.

58. Sestrojiti osy a ohniska ellipsy, je-li dána pouhá křivka (obr. 28.).

Obr. 28.



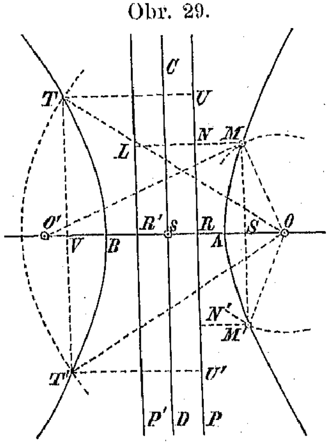
Spojíme-li body m a n, jež dvě rovnoběžné tetivy $ab \parallel cd$ libovolným směrem vedené rozpolují, obdržíme průměr ellipsy MN; bod s, jenž jej rozpoluje, jest středem ellipsy. Protneme-li ellipsu kružnicí, libovolným poloměrem z bodu s opsanou, ve čtyrech bodech e, f, g, h, budou tyto k oběma osám ellipsy souměrné. Spojme je tedy přímkami a veďme středem ellipsy velkou osu $AB \parallel ef$, osu malou $CD \parallel fg$; ohniska pak sestrojíme, učiníme-li $Co_1 = Co_2 = As$.

Osy ellipsy možno též sestrojiti ze dvou sdružených průměrů dle odst. 48; vedeme-li středem s rovnoběžku s tětivou ab, obdržíme k tomu účeli průměr, jenž s MN sdruženým jest.

VII. Sestrojení hyperboly.

59. Hyperbola jest křivka stupně druhého, jejíž tvořící bod má v každé poloze své větší vzdálenost od ohniska O než od přímky řídící $P: \varepsilon > 1$ (odst. 28.).

Obr. 29.



Má se sestrojiti na př. hyperbola, jejíž $\varepsilon = 2$, t. j. vzdálenost každého bodu hyperboly od ohniska rovná se dvojnásobné vzdálenosti jeho od přímky řídící. Budiž O (obr. 29.) ohniskem a P řídící přímkou hyperboly; přímka $OR \perp P$ jest osou její (dle odst. 27.). V kterémkoliv bodu S sestrojme k této ose kolmici a protněme ji z ohniska O poloměrem, jenž rovná se dvojnásobné délce RS: $OM = OM' = 2 . RS$; průsečíky M a M' jsou dvěma body hyperboly, neboť $MO = 2 . RS = 2 . MN$, $M'O = 2 . RS = 2 . M'N'$, tudíž

$$\frac{MO}{MN} = \frac{MO'}{M'N'} = 2 = \varepsilon.$$

Podobně možno v každé kolmici k ose OR sestrojiti dva body hyperboly, při čemž shledáme, že směrem RO možno tyto kolmice vzdalovati od přímky řídící až do nekonečna; v každé obdržíme dva body, tím vzdálenější od osy, čím vzdálenější ony kolmice od přímky řídící. Bude tudíž hyperbola křivkou nekonečnou. Jinak bude tomu, přibližujeme-li kolmice k přímce řídící; v ose sestrojiti možno vrchol hyperboly A, učiníme-li $AO = 2 . RA = \frac{2RO}{3}$, načež kolmice k ose OR vedené v levo od bodu A nebude možno protnouti z ohniska O dvojnásobnou jejich vzdáleností od přímky řídící, poněvadž tato příliš malá jest.

Počínajíc však od určité vzdálenosti obdržíme i tímto směrem v kolmici každé dva body hyperboly. Mez tato nachází se v druhém vrcholu hyperboly B v ose OR; poněvadž i pro tento bod $BO = 2 . BR$ býti musí, obdržíme jej, učiníme-li $BR = RO$.

V kolmici každého bodu V, v levo od bodu B na ose zvoleném, obdržíme opět dva body hyperboly T a T', protneme-li ji z ohniska O dvojnásobnou vzdáleností VR; $OT = OT' = 2 . VR$. Spojením bodů hyperboly, v těchto kolmicích sestrojených, obdržíme oblouk druhé nekonečné části hyperboly; skládáť se tedy tato ze dvou nekonečných, od sebe odloučených větví. Za tou příčinou nelze zobraziti hyperbolu celou, nýbrž toliko části její — hyperbolické oblouky.

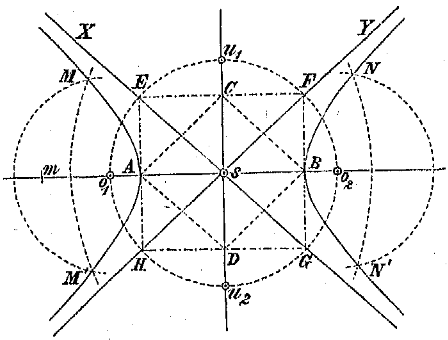
60. Bod s, jenž osu AB rozpoluje, jest středem hyperboly, a kolmice CD v středu s k ose AB sestrojená druhou osou její (odst. 31.). Tato druhá osa není omezena dvěma vrcholy hyperboly, poněvadž ji neseče, pročež osou *imaginárnou* (pomyslnou, smyšlenou) sluje, na rozdíl od osy *reálné* (skutečné) AB. Poněvadž hyperbola i k ose CD souměrnou býti musí, možno považovati přímku $P' \parallel P$ $(R's = Rs)$ za druhou řídící přímku, a bod O' $(sO' = sO)$ za druhé ohnisko hyperboly, pro kteréžto řídící útvary zůstává platným zákon $\frac{MO'}{ML} = \varepsilon$, je-li $ML \perp P'$. Má tudíž i hyperbola dvě ohniska v ose reálné, jichž rovná vzdálenost od středu $Os = O's = e$ linearnou výstředností hyperboly se zove.

Buďtež průvodcové kteréhokoliv bodu hyperboly M (obr. 29.) $MO' = \varrho_1$, $MO = \varrho_2$. Dle zákona hyperboly jest

$MO' = \varrho_1 = \varepsilon . ML$	$BO = \varepsilon . BR$
$MO = \varrho_2 = \varepsilon . MN$	$AO = BO' = \varepsilon . BR'$ z čehož
odečtením $\varrho_1 - \varrho_2 = \varepsilon(ML - MN)$	$BO - AO = \varepsilon(BR - BR')$
čili $\varrho_1 - \varrho_2 = \varepsilon . NL = \varepsilon . RR'$	$AB = \varepsilon . RR'$

Z těchto dvou rovnic následuje $\varrho_1 - \varrho_2 = AB$, t. j. *rozdíl vzdáleností každého bodu hyperboly od obou ohnisek čili rozdíl obou průvodců rovná se reálné ose hyperboly.*

Obr. 30.



61. Protneme-li imaginárnou osu hyperboly z vrcholu A neb B (obr. 30.) délkou lineárné výstřednosti ($AC = AD = so_1 = e$), obdržíme délku imaginárné osy CD. Znamenejme $AB = 2a$, $CD = 2b$, tak že a polovinu osy reálné, b poloosu imagin. značí. V $\triangle\ CsA$ jest $\overline{AC}^2 = \overline{As}^2 + \overline{Cs}^2$, a poněvadž $AC = so_1 = e$, bude $e^2 = a^2 + b^2$.

Kdyby se měla sestrojiti ohniska z daných os hyperboly, učiňme $so_1 = so_2 = AC$.

Poněvadž má hyperbola dvě větve nekonečné, musí také míti asymptoty (odst. 9.). Prodloužené úhlopříčny X a Y obdélníka $EFGH$ sestrojeného z os jsou *asymptotami* hyperboly (viz odst. 67.), tečnami v úběžných bodech této křivky. Pohybuje-li se tvořící bod směrem od vrcholů osy reálné, přibližuje se stále k asymptotě, však až ve vzdálenosti nekonečné sjednotí se s jejím bodem úběžným. Tato vlastnost asymptot jest dobrou pomůckou při zobrazování hyperboly, pročež, máme-li hyperbolu sestrojiti, zobrazme vždy napřed obě asymptoty její.

Úlohy. 1. Sestrojte obě osy a asymptoty hyperboly, jsou-li dány obě ohniska a jeden bod její.

2. Sestrojte obě osy a ohniska hyperboly, je-li dána výstřednost a dvě různoběžky co asymptoty její.

Poznam. Polovina úhlopříčny obdélníka (obr. 30.) sestrojeného z os, rovná se patrně linearné výstřednosti: $Es = AC = so_1 = e$.

62. Sestrojíme-li hyperbolu, jejíž realnou osou jest imag. osa CD hyperboly původní a osou imaginárnou reálná osa této AB, tedy budou míti tyto dvě hyperboly, jež *spolu sdruženými* se zovou, společné asymptoty a rovnou výstřednost: $su_1 = su_2 = so_1$; body u_1 a u_2 byly by ohnisky hyperboly druhé (obr. 30.). Z $\triangle ACs$ jest patrno, že $As \lesseqgtr Cs$ býti může, t. j. že mohou býti délky os v poměru jakémkoliv. Hyperbola, jejíž osy mají rovnou délku ($AB = CD$), jest *rovnoramená;* obdélník $EFGH$ stává se tu čtvercem, odchylka asymptot od osy reálné $= 45^0$, a obě asymptoty jsou k sobě kolmé. Rovnoramené hyperboly spolu sdružené jsou shodné.

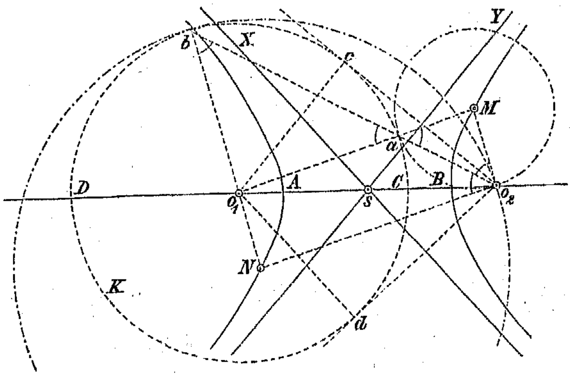
63. Vlastnost hyperboly v odstavci 60. odvozená sloužiti může k sestrojení jednotlivých bodů této křivky, jsou-li dány osy její AB a CD (obr. 30.), z nichž ohniska sobě sestrojiti možno.

Zvolme sobě v ose reálné bod m a považujme $o_1m = \varrho_1$ za délku jednoho průvodce bodu M, jejž máme sestrojiti. Aby rozdíl obou průvodců rovnal se reálné ose AB, musí průvodce druhý ϱ_2 o AB větší býti, tedy $\varrho_2 = Am + AB = Bm$. Opíšeme-li tedy z o_1 kruhový oblouk poloměrem $\varrho_1 = Am$, a protneme-li jej obloukem z o_2 poloměrem $\varrho_2 = Bm$, budou průsečíky M a M' dvěma body hyperboly. Body N a N' s body M a M' k ose CD souměrné obdržíme, opíšeme-li zároveň poloměrem $\varrho_1 = Am$ oblouk z ohniska o_2, a protneme-li jej z o_1 poloměrem $\varrho_2 = Bm$. Každý jiný bod na ose realné (v levo od vrcholu A) zvolený dá jako bod m nové čtyři body hyperboly, jež podobně sestrojíme.

64. Jednotlivé body hyperboly možno sestrojiti též následujícím spůsobem praktickým.

Opišme z některého ohniska, na př. z o_1 (obr. 31.) kružnici K poloměrem, jenž rovná se reálné ose hyperboly ($o_1D = AB$). Veďme ohniskem o_2 libovolným směrem sečnu o_2ab, spojme o_1a, o_1b, prodlužme tyto poloměry a protněme je přímkami $o_2M \parallel bo_1$, $o_2N \parallel o_1a$, načež průsečíky M a N dvěma body hyperboly budou. Úhel $a = \sphericalangle b$, poněvadž $bo_1 = ao_1$; z $o_2M \parallel bo_1$ a $o_2N \parallel o_1a$ následuje $\sphericalangle Mo_2b = \sphericalangle b = \sphericalangle a$, $\sphericalangle No_2a = \sphericalangle a$. Jsou tudíž trojúhelníky ao_2M a bo_2N rovnoramené, z čehož následuje $Mo_2 = Ma$, $No_2 = Nb$. Dosadíme-li do rovnic $Mo_1 - Ma = o_1a = AB$, $Nb - No_1 = bo_1 = AB$ za Ma rovné Mo_2, za Nb rovné No_2, bude $Mo_1 - Mo_2 = AB$, $No_2 - No_1 = AB$, t. j. rozdíl průvodců bodu M jakož i bodu N rovná se reálné ose, pročež body tyto hyperbole (dle věty v odst. 60. odvozené) náležejí. Sečen o_2b lze vésti ohniskem

Obr. 31.



o_2 jakékoliv množství různými směry, a pomocí každé možno sestrojiti tímto spůsobem nové dva body hyperboly.

Vedeme-li ohniskem o_2 ke kružnici K tečny o_2c a o_2d, sjednotí se průsečíky a b v dotyčných bodech c a d; rovnoběžky vedené ohniskem o_2 protínají poloměry o_1c a o_1d v nekonečných vzdálenostech — v úběžných bodech hyperboly, protož budou s nimi asymptoty rovnoběžné: $X \parallel o_1d$, $Y \parallel o_1c$.

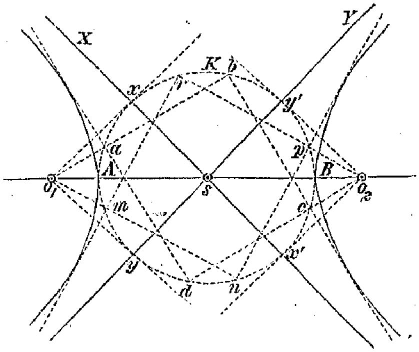
65. Hyperbola tato obsahuje zároveň *středy veškerých kružnic, jež kružnice K se dotýkají a bodem o_2 procházejí.* Kružnice opsaná na př. z bodu M poloměrem Mo_2 dotýká se kružnice K v bodu a, ješto $Ma = Mo_2$; kružnice opsaná z bodu N poloměrem No_2 dotýká se kružnice K v bodu b, poněvadž $Nb = No_2$. Podobnou vlastnost seznali jsme při ellipse (odst. 39.); tam však bod, jímž kružnice tyto procházejí, byl uvnitř kruhu K, kdežto zde se mimo něho nachází.

Pohybuje-li se tudíž bod tím spůsobem, že v každé poloze své od kružnice K a od určitého bodu o_2 mimo kruhu K ležícího rovné vzdálenosti má, vytvořuje hyperbolu.

66. Rovněž jako ellipsu (odst. 40.) lze sestrojiti hyperbolu co obalovou čáru tečen jejích. Opišme nad reálnou osou AB (obr. 32.) kružnici K, a veďme ohnisky o_1 a o_2 libovolným směrem dvě rovnoběžné sečny $o_1ab \parallel o_2cd$; přímky spojující průsečíky ad, bc jsou dvěma tečnami hyperboly. Přímka da prodloužena dotý-

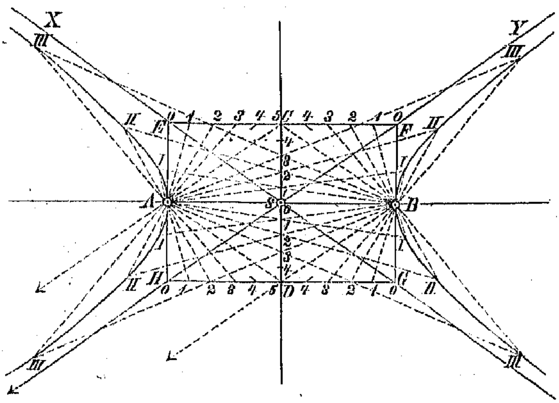
kati se bude vrchní poloviny větve levé, přímka bc spodní poloviny větve pravé. Podobně dají přímky rm a np, jež průsečíky sečen $o_1rm \,\|\, o_2pr$ v K spojují, dvě nové tečny; rm dotýká se spodní části větve levé, np vrchní části větve pravé. Zobrazivše dostatečný počet tečen takových, pomocí sečen různými směry vedených, obdržíme hyperbolu, vedeme-li k těmto tečnám čáru obalovou. Vedeme-li ohnisky ke kružnici K tečny $o_1x \,\|\, o_2x'$, přejde obdélník $abcd$ zde v přímku xx', ve které se obě tečny sjednocují a asymptotou X se stávají. Podobně bude přímka $yy' = Y$, jež dotyčné body tečen $o_1y \,\|\, o_2y'$ spojuje, asymptotou druhou.

Obr. 32.



67. Podobným spůsobem, jakým jsme vepsali ellipsu do obdélníka (odst. 41.), možno sestrojiti hyperbolu z obdélníka $EFGH$ (obr. 33.) zhotoveného z daných os této křivky, AB a CD.

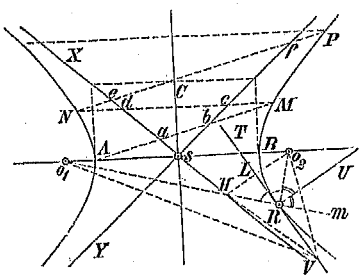
Obr. 33.



Rozdělme strany obdélníka rovnoběžné s osou reálnou EF a GH, jakož i imaginárnou osu CD na stejný počet rovných dílků, a označme dělící body, ve vrcholech obdélníka a v středu s nullou počínajíce, směrem k bodům C a D číslicemi 1, 2, 3 . . . Spojíme-li přímkami dělící body stran obdélníka s bližšími vrcholy reálné osy, pak dělící body osy imaginárné s oběma vrcholy osy reálné, obdržíme v průsečících paprsků sdružených (stejně označenými body dělícími procházejících), dostatečně-li je prodloužíme, jednotlivé body hyperboly. Tak jest průsečík I paprsků $A1$ a $B1$ bodem hyperboly; podobně průsečík II paprsků $A2$ a $B2$ atd. Posledními paprsky sdruženými jsou přímky CA, BD, pak CB a AD; paprsky tyto jsou spolu rovnoběžné, úběžný bod jejich jest úběžným bodem hyperboly. Jsou tudíž asymptoty s těmito paprsky rovnoběžné; poněvadž však středem s procházeti musejí, jsou patrně úhlopříčny obdélníka $EFGH$ asymptotami hyperboly X a Y. Rozdělíme-li strany obdélníka EH, FG a osu reálnou, a sestrojíme-li podobně hyperbolu pomocí paprsků vedených body C a D, bude tato s hyperbolou původní sdružená (odst. 62.).

68. Protneme-li hyperbolu jakoukoliv přímkou, jsou úseče její obsažené mezi hyperbolou a asymptotami rovné. Na tom zakládá se jednoduché a rychlé sestrojování jednotlivých bodů hyperboly.

Obr. 34.



Jsou-li A, B dané vrcholy, a X, Y (obr. 34.) asymptoty hyperboly, kterou sestrojiti máme, veďme vrcholem A přímku AM málo od osy AB se odchylující, a učiňme $bM = Aa$; bodem M veďme přímku v ostrém úhlu, na př. $\parallel AB$, a učiňme $dN = Mc$; podobně $Nf \parallel AM$, $fP = Ne$ atd. Body M, N, P . . . . náležejí hyperbole.

Úloha. Zobrazte hyperbolu, jsou-li dány obě asymptoty a jeden bod její.

69. Má-li se zobraziti hyperbola, jež dána jest dvěma průměry sdruženými (při čemž určitě udáno býti musí, který průměr reálným býti má), zhotovme z nich rovnoběžník, vedouce koncovými body průměru každého rovnoběžky s průměrem druhým, načež sestrojíme jednotlivé body hyperboly tímtéž spůsobem, jako z obdélníka (odst. 67., obr. 33.). Úhlopříčny rovnoběžníka budou asymptotami hyperboly.

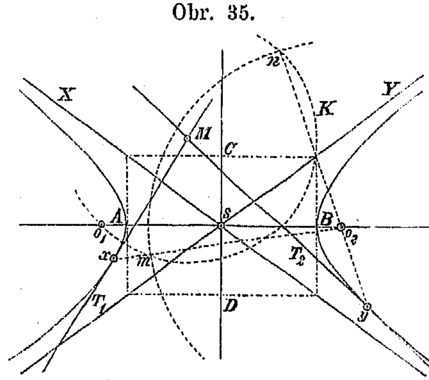
VIII. Tečny a normály hyperboly.

70. *Normála hyperboly rozpoluje vnější úhel, tečna vnitřní úhel průvodců bodu dotyčného.* Máme-li tedy sestrojiti v bodu R (obr. 34.) k hyperbole tečnu a normálu, spojme Ro_1, Ro_2, načež bude přímka T rozpolující úhel o_1Ro_2 tečnou, přímka U rozpolující vedlejší úhel o_2Rm normálou a při tom $U \perp T$.

Kdyby přímka T hyperbolu v bodu R protínala, musela by ji protínati ještě v druhém bodu; lze však dokázati, že žádný jiný bod přímky T, kromě R, hyperbole náležeti nemůže, a že tudíž oba body, přímce T a hyperbole společné, v bodu R se sjednocují, protož T tečnou býti musí. Zvolme na př. na přímce T bod V a spojme jej s oběma ohnisky. Učiňme $RH = Ro_2$, a spojme Ho_2, HV, načež bude $\triangle HLR \cong \triangle o_2LR$, pročež $HL = Lo_2$ a $Ho_2 \perp T$, následkem toho $\triangle HLV \cong \triangle o_2LV$ a $HV = Vo_2$. Toto vloženo do $o_1V - VH < o_1H$ dává $o_1V - o_2V < o_1H = o_1R - HR = o_1R - Ro_2 = AB$, t. j. $o_1V - o_2V < AB$, z kteréžto příčiny bod V hyperbole náležeti nemůže.

71. Daným bodem mimo hyperbolu M (obrazec 35.) lze vésti obě možné tečny T_1 a T_2 bezprostředně; ku sestrojení bodů dotyčných opišme z bodu M kružnici K některým ohniskem na př. o_1 procházející, a protněme ji v bodech m a n z ohniska druhého délkou rovnající se realné ose AB ($o_2m = o_2n = AB$). Přímky, jež tyto průsečíky m a n s ohniskem druhým spojují, protínají tečny, prodlouženy byvše, v bodech dotyčných: o_2m tečnu T_1 v dotyčném bodu x, no_2 tečnu T_2 v bodu y.

Obr. 35.

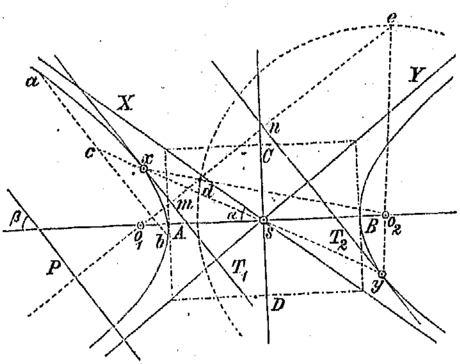


72. Poněvadž rozpoluje tečna T_1 oblouk mo_1, tečna T_2 oblouk no_1, možno řešiti úlohu tuto, je-li hyperbola dána osami svými, aniž bychom křivku zobrazovali.

Sestrojme nejprvé způsobem právě naznačeným body m a n, a spojme body, jež oblouky mo_1 a no_1 rozpolují, s bodem M.

73. Tečny hyperboly T_1 a T_2 (obr. 36.), které s danou přímkou P rovnoběžné býti mají, možno zobraziti bezprostředně. Ku sestrojení bodů dotyčných veďme tetivu $ab \parallel T_1$, rozpůlme ji, $ac = bc$, načež průměr cs tečny T_1 a T_2 v dotyčných bodech x a y (odstavec 32.) protínati bude.

Obr. 36.



Aby v tomto případě tečny možné byly, musí míti daná přímka P větší odchylku od osy reálné než asymptoty: $\sphericalangle \beta > \sphericalangle \alpha$.

Tímtéž spůsobem lze sestrojiti v případě předchozím dotyčný bod každé tečny T_1 a T_2 zvláště; spůsob v odst. 71. uvedený jest však přesnější, kterýmžto zase naopak lze sestrojiti také dotyčný bod každé tečny $T_1 \parallel T_2 \parallel P$ (obr. 36.) v tomto případě zvláště, předpokládáme-li, že tečna taková vedena jest kterýmkoliv bodem jejím.

74. Tečny rovnoběžné s danou přímkou lze zobraziti i tenkráte, není-li dána hyperbola sama, nýbrž toliko osy a tím i ohniska její. Veďme ohniskem některým, na př. o_1 (obr. 36.) kolmici o_1de k dané přímce P, považujíce ji za kruhový oblouk, jehož střed jest v úběžném bodu tečen žádaných, a protněme kolmici tuto délkou osy reálné z ohniska o_2 v bodech d a e ($o_2d = o_2e = AB$).

Učiníme-li $o_1m = md$, $o_1n = ne$, budou kolmice T_1 a T_2 v bodech m a n k přímce o_1e sestrojené tečnami žádanými; prodloužené přímky o_2d a eo_2 protínají je v dotyčných bodech x a y.

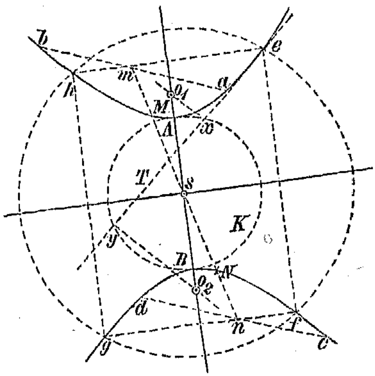
75. Zobrazování normál hyperboly, jež buď daným bodem mimo křivku procházeti aneb s danou přímkou rovnoběžné býti mají, děje se jako při ellipse (odstavce 56. a 57.).

76. Buďtež dány pouhé dva oblouky hyperboly; mají sestrojiti se osy, ohniska a asymptoty hyperboly.

Spojíme-li body m a n (obr. 37.), jež rovnoběžné tetivy $ab \parallel cd$, jakýmkoliv směrem vedené, rozpolují, obdržíme průměr hyperboly MN; bod s, jenž jej rozpoluje, jest středem hyperboly.

Ze středu s opišme kružnici poloměrem libovolným, která hyperbolu v bodech e, f, g, h seče; body tyto spojme přímkami, načež veďme středem s osu reálnou $AB \parallel ef$, imaginárnou $\parallel eh$. Zobrazíme-li kružnici K, jejímž průměrem reálná osa AB jest, pak kteroukoliv tečnu hyperboly T, a sestrojíme-li v průsečících x a y těchto čar K a T kolmice k tečně T, budou protínati tyto osu reálnou v ohniskách hyperboly ($xo_1 \perp T$, $yo_2 \perp T$. Srovnej s odst. 66.) Z ohnisek a z osy reálné možno pak snadno sestrojiti délku osy imaginárné, jakož i obě asymptoty hyperboly (dle odst. 61.).

Obr. 37.



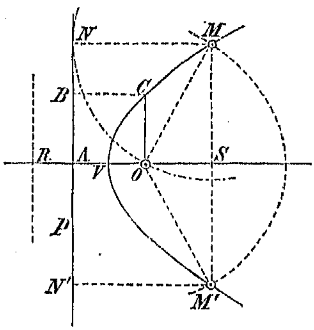
IX. Sestrojení paraboly.

77. *Každý bod paraboly má rovné vzdálenosti od ohniska O a od přímky řídící P.*

Dle odst. 28. jest při parabole $\varepsilon = 1$, tedy $\frac{MN}{MO} = \varepsilon = 1$ ($MN \perp P$), čili $MN = MO$.

Parabola jest tudíž dána ohniskem O a přímkou řídící P (obr. 38.); přímka OA vedená ohniskem O kolmo ku přímce P jest *osou* paraboly (odst. 27.).

Obr. 38.



Jednotlivé body ku sestrojení paraboly obdržíme v přímkách k ose OA kolmých, protneme-li je z ohniska kruhovými oblouky, jichž poloměry rovnají se vzdálenostem kolmic těch od přímky řídící. Protneme-li na př. kolmici v bodu S k ose sestrojenou z ohniska O poloměrem SA, náležejí průsečíky M a M' parabole, poněvadž $OM = AS = MN$ a $OM' = AS = M'N'$.

Vzdalujíce kolmice MM' od přímky řídící směrem AS, obdržíme tímto způsobem v každé dva body paraboly, ať je vzdálenost AS jakákoliv, neboť jest vždy $AS > OS$, pročež každou takovou kolmici protnouti lze z bodu O vzdáleností její od přímky řídící. Jest tedy parabola křivkou nekonečnou.

Směrem opáčným SA zkracuje se tetiva MM' stále; v bodu V pak oba body M a M' se sjednotí, rozpůlíme-li bodem V délku AO. Bod V náleží parabole (poněvadž $AV = VO$), a jest *vrcholem* jejím.

Kolmice vedená k ose AO kterýmkoliv bodem v levo od bodu V na př. R nedává žádných bodův paraboly více, poněvadž délkou $AR < RO$ kolmici takovou z bodu O protnouti nelze.

Má tedy parabola jedinou větev nekonečnou, k ose OA souměrnou.

78. Z každého bodu paraboly lze opsati kružnici, která ohniskem procházejíc dotýká se přímky řídící. Tak v obr. 38. kružnice opsaná z bodu M poloměrem MO dotýká se přímky řídící P v bodu N, poněvadž $MN = MO$ a $MN \perp P$.

Dle toho *tvoří středy veškerých kružnic, jež určitým bodem procházejíce dané přímky se dotýkají, parabolu* (srovnej s odstavcem 39. a 65.).

79. Přímka $OC \perp AO$ (obr. 38.) jest *parametrem* paraboly (odst. 27.); délka jeho značí se písmenem $p = OC$.

Poněvadž jest C bodem paraboly, musí $OC = CB$ býti; avšak $CB = OA$, pročež i $OA = OC$, t. j. *vzdálenosť ohniska od přímky řídící rovná se parametru paraboly*, a vzdálenosť vrcholu jejího od ohniska, jakož i od přímky řídící, rovná se polovině parametru:

$$VO = VA = \frac{p}{2}.$$

Dle odstavce 77. nelze sestrojiti v ose AO více než jeden vrchol paraboly V. Poněvadž však osa AO sečnou paraboly jest a tuto křivku stupně druhého ve dvou bodech protínati musí, jest patrno, že druhý vrchol paraboly v ose AO ve vzdálenosti nekonečné, čili v úběžném bodu osy se nachází. Jest tudíž délka osy nekonečná, pročež i střed paraboly, druhá osa, řídící přímka, jakož i ohnisko její v nekonečné vzdálenosti.

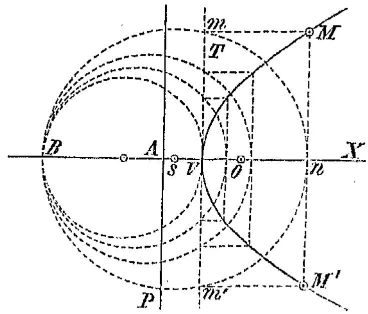
Průměry paraboly, poněvadž středem jejím procházejí (odstavec 29.), *jsou vesměs s osou její (AO) rovnoběžné.*

Asymptotu paraboly zobraziti nelze, ješto s osou rovnoběžná jest a ve vzdálenosti nekonečné leží (důkaz v odst. 87.).

80. Jednotlivé body paraboly, dané ohniskem O a řídící přímkou P, možno sestrojiti také následovně. Zobrazme osu

$XOA \perp P$ (obr. 39.), rozpůlme AO bodem V, jenž bude vrcholem paraboly, sestrojme v bodu tomto přímku $T \perp X$, a učiňme $VB = 2.AO = 2p =$ dvojnásobnému parametru paraboly.

Obr. 39.

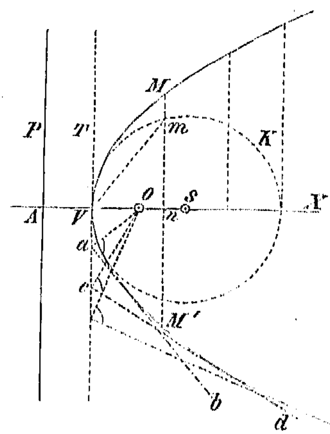


Opíšeme-li z libovolného bodu s v ose X poloměrem sB kružnici, která kolmici T v bodech m a m', osu X v bodu n seče, vedeme-li bodem n kolmici k ose X, a protneme-li ji přímkami $mM \parallel m'M' \parallel X$, budou průsečíky M a M' dvěma body paraboly.

Pomocí kružnic takových, jichž středy zvolíme v ose X směrem sX, možno podobně zobraziti libovolné množství bodů paraboly.

81. Učiníme-li $Vs = AO = p$ (obr. 40.), a opíšeme-li tímto poloměrem z bodu s kružnici K, obdržíme v jednotlivých kolmicích, na př. nm, k ose X vedených body paraboly, spojíme-li průsečík m v kružnici K s vrcholem V, a učiníme-li $nM = nM' = Vm$.

Obr. 40.



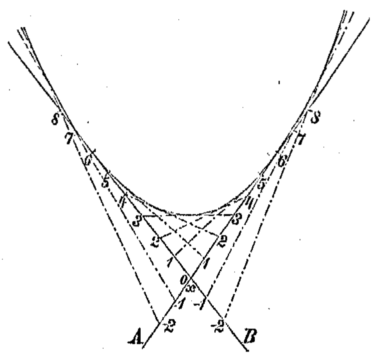
Tímto spůsobem možno však jen určitou část paraboly sestrojiti, poněvadž kolmice, jichž vzdálenost od vrcholu V větší jest než průměr kružnice K, tuto kružnici více neprotínají.

82. Parabolu lze také snadně zobraziti co obalovou čáru tečen jejích.

Učiňme $VT \perp X$ (obr. 40.), veďme ohniskem O jakýmkoliv směrem přímku Oa a v průsečíku a s přímkou T sestrojme $ab \perp Oa$; tato kolmice ab jest tečnou paraboly (důkaz v odst. 88.). Zobrazíme-li několik takových úhlů pravých, jichž vrcholy v přímce T se nacházejí a ramena jedny ohniskem procházejí, budou druhá ramena jejich tečnami paraboly, kterou pak obdržíme co obalovou čáru tečen zobrazených.

83. Jedná-li se o zobrazení nějaké paraboly vůbec, možno sestrojiti ji též co obalovou čáru přímek následovně odvozených:

Obr. 41.



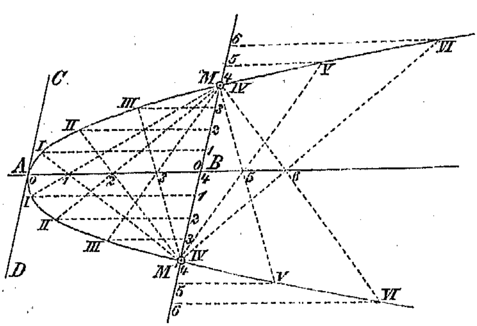
Na každou z libovolných dvou různoběžek A a B (obr. 41.) vnesme od průsečíka jejich x oběma směry větší počet rovných dílků, a označme dělící body na každé různoběžce, počínajíce v průsečíku x nullou, číslicemi 1, 2, 3 . . . , určitým směrem kladnými, protivným zápornými, načež spojujme dělící body přímkami tak, aby součet čísel, jimiž body spojené označeny jsou, byl vždy týž. V obrazci 41. spojovány jsou body dělící do součtu 6:

$$1+5=6,\ 2+4=6\ldots,\ -1+7=6,\ -2+8=6$$

atd. Obalová čára těchto přímek jest parabola, jejíž osa úhel různoběžek A a B rozpoluje.

84. Má se sestrojiti parabola, je-li dán jeden průměr její AB (obr. 42.), koncový bod jeho A v parabole, a tetiva s ním sdružená MM', kterou průměr daný rozpoluje.

Obr. 42.



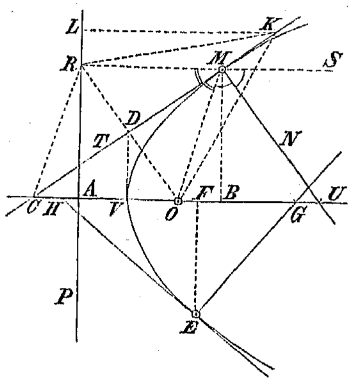
Bodem A vedená přímka $CD \parallel MM'$ jest tečnou paraboly v bodu A (odst. 32.). Rozdělme AB, BM a BM' na stejný počet rovných dílků, označme dělící body číslicemi počínajíce nullou v bodu A na průměru AB a v bodu B na tetivě MM'; spojme body M a M' s dělícími body průměru, prodlužme paprsky tyto a veďme posléze dělícími body tetivy MM' paprsky rovnoběžné s průměrem AB.

Průsečíky I, II, III . . . paprsků $M1$, $M2$ . . . , $M'1$, $M'2$ . . . s rovnoběžkami $1I$, $2II$ . . . jsou body paraboly. Chceme-li větší oblouk parabolický zobraziti než MAM', vnesme několik dílků přímky AB na tutéž od bodu B směrem AB, jakož podobně prodlužme BM a BM' o několik dílků jejich a označme dělící body pořadnými číslicemi 5, 6 . . .; paprsek $M5$ seče přímku $5V \parallel AB$ v bodu paraboly V atd.

X. Tečny a normály paraboly.

85. Tečna a normála rozpolují úhly obou průvodců bodu dotyčného při všech křivkách stupně druhého. Parabola má jedno ohnisko ve vzdálenosti nekonečné, pročež jest průvodce jeden vždy s osou paraboly rovnoběžný.

Obr. 43.



Máme-li v daném bodu paraboly M (obr. 43.) sestrojiti tečnu a normálu, zobrazme oba jeho průvodce MO a $RMS \parallel AB$, a rozpůlme $\sphericalangle SMO$ i $\sphericalangle RMO$. Přímka N rozpolující úhel prvý jest normálou, přímka T, jež půlí úhel druhý, tečnou paraboly v bodu M.

Že takto sestrojená přímka T tečnou paraboly jest, lze dokázati tím, že každý její bod, kromě M, parabole nenáleží, a že tudíž oba body, jež s parabolou (jakožto křivkou stupně druhého) má společné, v bodu M se sjednocují. Zvolme na přímce T bod K, spojme KO, KR, a učiňme $KL \perp P$. Poněvadž $MR = MO$, $MK = MK$, $\sphericalangle RMK = \sphericalangle OMK$, musí býti $\triangle RMK \cong \triangle OMK$, pročež $KR = KO$. V $\triangle KRL$ jest pak $KR > KL$, pročež $KR = KO > KL$; bod K tudíž, maje větší vzdálenost od ohniska než od přímky řídící, parabole náležeti nemůže.

86. Spojíme-li RC a RO, bude patrně $\triangle RDM \cong \triangle ODM$, a poněvadž $\sphericalangle ACM = \sphericalangle CMR$, jsou s těmito trojúhelníky shodné i $\triangle RCD \cong \triangle CDO$, tedy $MR = MO = CO = CR$; v kosočtverci $MRCO$ jsou pak úhlopříčny k sobě kolmé: $RO \perp MC$. Mimo to jest $\triangle ACR \cong \triangle BOM$, pročež

$$CA = OB;$$

přičtením rovnice $\quad AV = VO \quad$ (odst. 77.)

obdržíme $\quad CA + AV = VO + OB \quad$ čili $CV = VB$, t. j. průsečík tečny v ose (C) má tutéž vzdálenost od vrcholu paraboly, jako pata kolmice, s bodu dotyčného na osu spuštěné.

Dle toho možno sestrojiti tečnu v daném bodu paraboly na př. E (obr. 43.) velmi snadně: učiňme $EF \perp AO$, $VH = VF$ a spojme EH.

87. Z rovnice $VC = VB$ (obr. 43.) vychází, že průsečík C tečny T s osou paraboly tím vzdálenější jest vrcholu V, čím vzdálenější jest dotyčný bod M od něho. Asymptota, t. j. tečna v nekonečně vzdáleném, č. úběžném bodu paraboly bude tudíž protínati osu paraboly ve vzdálenosti nekonečné, bude s ní rovnoběžná.

Při tom však má asymptota s bodem dotyčným nekonečnou vzdálenost od osy paraboly a nedá se za tou příčinou zobraziti.

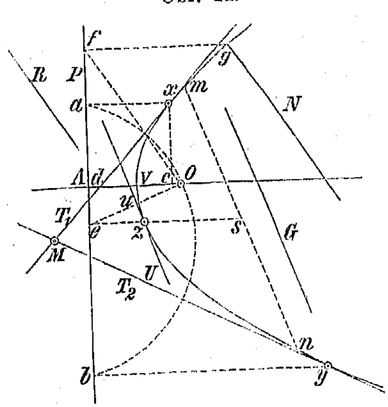
88. Poněvadž $CD = DM$ a $CV = VB$ (obr. 43.), jest $\triangle CVD \backsim \triangle CBM$, pročež $VD \parallel BM$, $VD \perp AO$. Prochází-li tedy jedno rameno úhlu pravého ohniskem O, a má-li úhel tento vrchol svůj v kolmici ve vrcholu V k ose sestrojené, jest druhé rameno jeho tečnou paraboly; věty této užito k sestrojení paraboly v odst. 82.

89. Poněvadž jest $RO \perp T$ (obr. 43.) i $MU = N \perp T$, tudíž $MU \parallel RO$, musí $\triangle MBU \cong \triangle RAO$ býti, pročež $BU = AO = p =$ parametru paraboly.

Máme-li v daném bodu na př. E k parabole sestrojiti normálu, obdržíme ji dle toho nejsnadněji tím, že učiníme $EF \perp AO$, $FG = AO$, a spojíme EG. Přenášení parametru $p = AO$ od bodu F musí se ovšem díti směrem od přímky řídící.

90. Abychom sestrojili dotyčné body x a y tečen T_1 a T_2 vedených daným bodem mimo parabolu M (obr. 44.), učiňme buď $Vc = Vd$ a $cx \perp AO$, aneb opišme z bodu M kruhový oblouk, jenž ohniskem O prochází a přímku řídící v bodech a a b seče; přímky $ax \parallel by \parallel AO$ protínají tečny T_1 a T_2 v dotyčných bodech x a y. Z obr. 43. jest totiž patrno, že každý kruhový oblouk, jenž ohniskem prochází a střed svůj kdekoliv v tečně T má, přímku řídící v bodu R seče.

Obr. 44.



91. Tečny, jež daným bodem M procházeti mají, lze sestrojiti i tenkráte, není-li parabola zobrazena, nýbrž je-li dána toliko řídící přímka a ohnisko její.

Opišme jako nahoře z bodu M (obr. 44.) oblouk aOb a sestrojme přímky T_1 a T_2, které bodem M procházejí a oblouky aO a Ob rozpolují; přímky $ax \parallel by \parallel AO$ dávají opět body dotyčné.

92. Jinými spůsoby sestrojen dotyčný bod z tečny U (obr. 44.) rovnoběžně vedené s danou přímkou G, jichž ostatně při každé tečně paraboly užiti možno.

Buď veďme tetivu $mn \parallel G$, a učiňme $ms = sn$, pak $sz \parallel AO$ (dle odst. 32.), ješto každý průměr paraboly s osou její rovnoběžný jest (odst. 79.), aneb sestrojme $Oe \perp U$, a $ez \parallel AO$ (srovnej s obr. 43.: $OR \perp T$, $RM \parallel AO$).

Tečna paraboly rovnoběžná s danou přímkou dá se ve vzdálenosti konečné zobraziti toliko jedna.

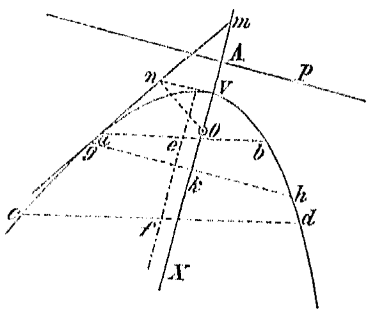
93. Máme-li zobraziti tečnu paraboly U rovnoběžnou s danou přímkou G, a sestrojiti její bod dotyčný z, není-li křivka sama dána, t. j. jedině pomocí ohniska O a přímky řídící P (obr. 44.), veďme $Oe \perp G$, rozpůlme Oe bodem u, učiňme $uU \perp Oe$, a $ez \parallel AO$.

94. Zobrazování normál paraboly, jež buď daným bodem mimo křivku procházeti aneb s danou přímkou rovnoběžné býti mají, děje se jako při ellipse (odst. 56., 57.).

Má-li býti normála paraboly N rovnoběžná s danou přímkou R (obr. 44.), sestrojíme ji nejsnadněji vedením $Of \parallel R$, $fg \parallel AO$, $gN \parallel R$, čehož důvod snadně nalézti lze v odst. 89. (obr. 43.).

95. Má se vyhledati osa, ohnisko a řídící přímka paraboly, je-li dána tato co pouhá křivka (obr. 45.).

Obr. 45.



Veďme libovolným směrem tetivy $ab \parallel cd$ a rozpůlme je: $ae = eb$, $cf = fd$; přímka ef jest průměrem paraboly (odst. 29.); rozpůlme tetivu $gh \perp ef$ v bodu k, i bude přímka $kX \parallel ef$ osou paraboly, bod V vrcholem jejím. Učiníme-li $Vm = Vk$ a spojíme-li gm, bude tato přímka tečnou paraboly v bodu g; sestrojíme-li $Vn \perp X$ a $nO \perp gm$, obdržíme v bodu O ohnisko paraboly.

Konstrukce tyto odůvodněny jsou větami v odst. 86. a 89. o tečnách paraboly odvozenými.

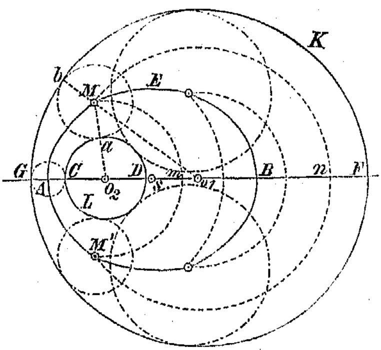
Učiníme-li posléze $VA = VO$ a $AP \perp AX$, obdržíme přímku řídící P.

Úloha. Sestrojte ohnisko a řídící přímku paraboly, je-li dána osa její a α) buď vrchol a jeden bod paraboly, aneb β) jedna tečna s bodem dotyčným.

XI. O tečných kružnicích dvou kružnic daných.

96. *Středy veškerých kružnic, jež dotýkají se daných dvou kruhů K a L, z nichž jeden uvnitř druhého leží, tvoří dvě soustředné ellipsy,* jichž společná ohniska o_1 a o_2 v středech kružnic K a L se nacházejí.

Obr. 46.



Budiž dána kružnice K se středem o_1 a kružnice L se středem o_2 (obr. 46.); spojme o_1o_2 a jmenujme poloměry $o_2C = r$, $o_1G = R$.

Chceme-li zobraziti kružnici dotýkající se kružnic daných, zvolme na přímce o_1o_2 bod m, učiňme $Fn = Dm$, a opišme kruhové oblouky z o_2 poloměrem o_2m, z o_1 poloměrem o_1n, načež z průsečíků těchto oblouků M a M' poloměrem Dm opsané kružnice dotýkati se budou kružnic daných, poněvadž, spojíme-li o_2M, o_1Mb, bude $Ma = Dm = Fn = bM$.

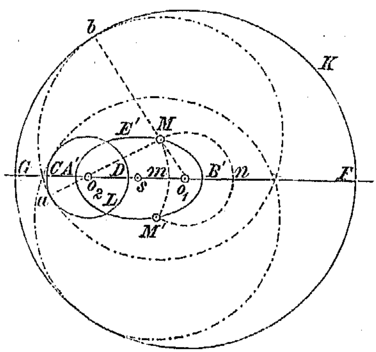
Pomocí jiných bodů m, zvolených na přímce o_1o_2, lze zobraziti jakékoliv množství takových kružnic tečných a čára, jež středy jejich spojuje, jest *ellipsou.* Poněvadž totiž $Ma = Mb$, můžeme psáti $Mo_1 + Mo_2 = Mo_1 + Mb + Mo_2 - Ma = o_1b + ao_2 = R + r$, t. j. součet vzdáleností středního bodu každé kružnice tečné od bodů o_1 a o_2 rovná se určité délce, součtu poloměrů kružnic K a L. Křivka středy kružnic tečných spojující jest tudíž ellipsa E; ohniska její jsou o_1 a o_2, a velká osa její rovná se součtu $R + r$. Bod s, jenž půlí délku o_1o_2, jest středem ellipsy E; rozpůlíme-li GC bodem A, DF bodem B, obdržíme velkou osu ellipsy $AB = r + R$.

Nejmenší z těchto kružnic tečných má střed svůj v A, poloměr $AC = AG$; největší pak kružnice tečná má střed svůj v B, poloměr $BD = BF$.

97. Tyto kružnice tečné jsou vesměs uvnitř kružnice K, ale *mimo* kružnici L. Lze však zobraziti druhou soustavu kružnic, které dotýkajíce se kružnic K a L, tuto poslední v ploše, kterou omezují, obsahují.

Kružnice takové sestrojeny jsou v obr. 47., kdež dány jsou tytéž kružnice K a L z obr. 46. v téže velikosti i vzájemné poloze.

Obr. 47.



Zvolme na přímce $o_1 o_2$ bod m, učiňme $Fn = Gm$, a opišme kruhové oblouky z bodu o_1 poloměrem $o_1 n$, z o_2 poloměrem $o_2 m$; z průsečíků jejich M a M' poloměrem Gm opsané kružnice dotýkají se kružnic daných, neboť spojíme-li $o_1 Mb$, $Mo_2 a$, bude $Mb = nF = Gm = Ma$.

Kružnice L leží tu patrně uvnitř těchto kruhů tečných, jichž středy jsou v bodech M a M'. Středy veškerých takových kružnic jsou v ellipse E', která má s ellipsou E společný střed s i ohniska o_1 a o_2, poněvadž $Mo_1 + Mo_2 = (bo_1 - Mb) + (Ma - ao_2) = bo_1 - ao_2 + Ma - Mb = bo_1 - ao_2 = R - r$. Velká osa $A'B'$ ellipsy E' rovná se tudíž rozdílu poloměrů kružnic K a L. Vrchol ellipsy $A'(GA' = A'D)$ jest středem tečné kružnice nejmenší, vrchol $B'(CB' = B'F)$ středem tečné kružnice největší.

Tím tedy odůvodněna věta na počátku odstavce 96. uvedená.

98. Dotýká-li se kružnice L vnitřního obvodu kruhu K, přejde ellipsa E' v přímku $o_1 o_2$; jsou-li obě kružnice dané soustředné, přecházejí ellipsy E a E' v kružnice.

Je-li místo kružnice L dán toliko bod o_2, jímž kružnice kruhu K se dotýkající procházeti mají, obě ellipsy E a E' sjednocují se (srovnej s odst. 39.).

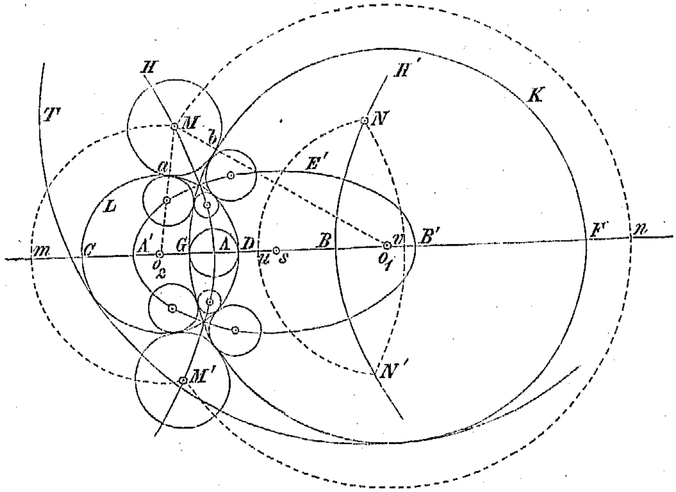
99. *Protínají-li se kružnice K a L, tvoří středy veškerých tečných kružnic jejich ellipsu a hyperbolu (obr. 48.), jež mají ohniska společná.*

Středy tečných kružnic, které leží uvnitř jednoho z kruhů daných, tvoří ellipsu E', kterou sestrojiti lze dle odst. 96.

Středy kružnic, které dotýkají se *vnějších* obvodů kruhů K a L, tvoří hyperbolickou větev H, a středy kruhů tečných, jež *obsahují* v sobě obě dané kružnice (jako na př. T), tvoří druhou větev téže hyperboly H'.

Zvolme na př. na přímce $o_1 o_2$ bod m, učiňme $Fn = Gm$, a opišme kruhové oblouky z o_2 poloměrem $o_2 m$, z o_1 poloměrem

Obr. 48.



$o_1 n$; z průsečíků M a M' opsané kružnice poloměrem Cm budou se dotýkati vnějších obvodů kruhů daných.

Poněvadž $Mo_1 - Mo_2 = (bo_1 + Mb) - (ao_2 + Ma) = bo_1 - ao_2 + Mb - Ma = bo_1 - ao_2 = R - r$, t. j. rozdíl vzdáleností středu M každé kružnice tečné od bodů o_1 a o_2 rovná se stálé délce $R - r$, tvoří středy kružnic těch hyperbolu, jejíž ohniska jsou v o_1 a o_2; reálná osa její $AB = R - r$.

Jednotlivé body větve druhé H' obdržíme následovně. Zvolme bod v, učiňme $Fu = Cv$, opišme kruhové oblouky z o_2 poloměrem $o_2 v$, z o_1 poloměrem $o_1 u$, načež jsou průsečíky jejich N a N' dvěma body větve H'. Z bodů těchto opsané kružnice poloměrem Cv (jako na př. oblouk T opsaný z N) dotýkají se vnějších obvodů kruhů daných a obsahují tyto ve své ploše.

Bod s, jenž rozpoluje délku $o_1 o_2$, jest středem hyperboly, a body A, B ($GA = AD$, $CB = BF$) vrcholy jejími.

Asymptoty hyperboly této jsou kolmé k společným tečnám kružnic daných.

Velká osa ellipsy E' jest $A'B' = R + r$.

Dotýká-li se kružnice L vnějšího obvodu kruhu K, přejde ellipsa E' v přímku $o_1 o_2$.

100. *Leží-li kruh L mimo kruh K, tvoří středy veškerých tečných kružnic jejich dvě hyperboly,* mající ohniska společná v středech kružnic daných.

Čtenář nechť podá důkaz této věty a obě hyperboly sestrojí.

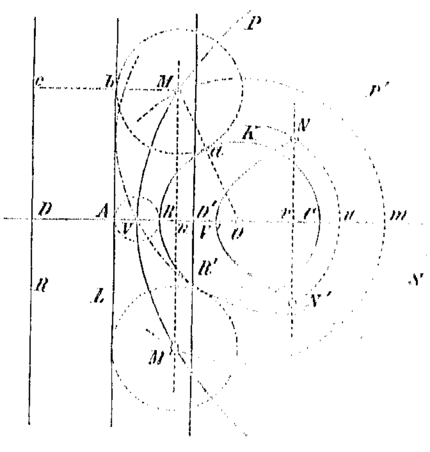
Pozn. Jedna větev hyperboly první obsahuje středy kružnic, jež se kružnic daných dotýkají *vně*, druhá větev středy takových kružnic tečných, které obě kružnice dané v sobě obsahují. Obě větve hyperboly druhé jsou tvořeny středy kružnic tečných, jež jednu z daných kružnic v sobě obsahujíce druhé kružnice se dotýkají *vně*.

Je-li dán místo kružnice L pouze bod o, jenž leží mimo kruh K, tvoří středy kružnic, jež bodem o procházejíce kruhu K se dotýkají, hyperbolu jedinou, t. j. obě hyperboly se v tomto případě sjednocují (srovnej s odst. 65.).

101. *Středy kružnic dané přímky L a kružnice K se dotýkajících tvoří dvě paraboly,* jichž společné ohnisko v středu kružnice K se nachází.

Máme-li zobraziti kružnici, jež přímky L i kružnice K (obr. 49.) dotýkati se má, zvolme na přímce $OA \perp L$ bod m, učiňme $An = Om$, opišme z O poloměrem Om oblouk kruhový, a protněme jej přímkou, bodem n rovnoběžně vedenou s přímkou L; z průsečíků M a M' opsané kružnice poloměrem Om dotýkají se daných čar K a L, a to kružnice prvá v bodech a a b, poněvadž $Ma = Om = An = Mb$.

Obr. 49.



Učiníme-li $AD = OB$, $DR \parallel L$, a prodloužíme-li Mb do c, bude $bc = AD = OB = Oa$; sečtemeli rovnice

$$\begin{aligned} bc &= Oa \\ Mb &= Ma, \text{ obdržíme} \\ \hline Mb + bc &= Ma + Oa \end{aligned}$$

čili $Mc = MO$,

t. j. vzdálenost středu každé kružnice tečné od bodu O rovná se vzdálenosti jeho od přímky R.

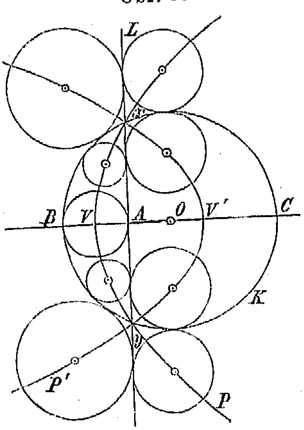
Středy veškerých kružnic tečných jsou tedy v parabole P, jejíž ohniskem jest bod O a přímkou řídící přímka R. Vrchol této paraboly $V (AV = VB)$ jest středem tečné kružnice nejmenší.

102. Kružnice K leží mimo této kružnice tečny; lze však zobraziti druhou soustavu kruhů tečných, jež kružnici K v sobě obsahují (jako na př. v obr. 49. kružnice S opsaná z bodu N).

Abychom středy kružnic takových sestrojili, zvolme na přímce AO bod u, učiňme $Av = Bu$, veďme bodem v rovnoběžku s L, a protněme ji obloukem kruhovým, opsaným z O poloměrem Ou. Z průsečíků N a N' možno opsati poloměrem Bu kružnice (na př. S z N v obr. 49.), jež se čar K i L dotýkají. Středy veškerých kružnic těchto jsou v parabole P'; ohnisko její jest v O, a přímka její řídící R' jest s přímkou R souměrná ku přímce L ($D'A = AD = OB$), o čemž se snadno přesvědčiti lze.

Je-li $r = OC$ poloměr kružnice K a $d = AO$ vzdálenost středu jejího od přímky L, bude parametr paraboly $P = DO = AO + AD = AO + OB = d + r$ a parametr paraboly $P' = D'O = AO - AD' = AO - OB = d - r$, poněvadž parametr paraboly vzdálenosti ohniska od přímky řídící se rovná.

Obr. 50.



103. Seče-li kružnice K přímku L v bodech x a y (obr. 50.), protínají se v těchto bodech také obě paraboly P a P', majíce vrcholy své V a V' na různých stranách ohniska O.

Dotýká-li se kružnice K přímky L, přejde jedna z obou parabol v osu OA.

Je-li místo kružnice K dán toliko bod O, jímž kružnice procházející přímky L se dotýkati mají (srovnej s odst. 78.), tu obě paraboly P a P', jež středy těchto kružnic obsahují, v jediné parabole se sjednocují.

Úlohy. 1. Zobraziti kružnice, jež se dané přímky A a daných kružnic B a C dotýkají,

α) neprotínají-li se čáry dané,

β) protínají-li se dvě z daných čar,

γ) protínají-li se veškeré čáry dané.

Sestrojme obě paraboly středů kružnic, dotýkajících se přímky A a kružnice B a podobně paraboly čarám A a C příslušné; společné průsečíky parabol těchto jsou středy kružnic žádaných.

2. Zobraziti kružnice, jež se daných tří kružnic dotýkají,

α) leží-li každá z kružnic daných mimo ostatní dvě,

β) protínají-li se všechny tři kružnice dané,

γ) leží-li dvě z kružnic daných uvnitř kružnice třetí.

XII. Čáry obalové, evoluty a evolventy; rektifikace křivek a trochoidy.

104. Pohybuje-li se určitá křivka K v rovině své dle určitého zákona, nazývá se čára dotýkající se všech poloh křivky K *čarou obalovou.* Při tom může křivka K i velikost svou měniti, ovšem dle určitého zase pravidla.

Tak na př. čára obalová všech poloh kružnice K pohybující se v rovině tím spůsobem, že střed její vytvořuje přímku A, skládá se z dvou přímek s A rovnoběžných, nemění-li se poloměr kružnice K; stejnoměrně-li se ale poloměr její zkracuje neb prodlužuje, skládá se čára obalová z dvou různoběžek, jež se v přímce A protínají.

Každá křivka jest obalovou čarou veškerých tečen svých; spůsobem tím sestrojeny jsou křivky stupně druhého v obrazcích 19., 32., 40.

Úlohy. Sestrojte obalovou čáru všech poloh *a*) kružnice, jejíž střed opisuje *α*) kružnici, *β*) ellipsu danou, *b*) přímky omezené, jejíž koncové body šinou se po dvou přímkách *α*) k sobě kolmých, *β*) k sobě nakloněných.

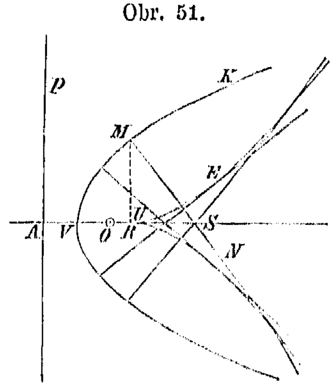
105. Obalová čára E veškerých normál určité křivky K nazývá se *evolutou* její (obr. 51.); každá normála N křivky K jest tečnou evoluty E.

V obr. 51. sestrojena jest evoluta E paraboly K. Jednotlivé její normály sestrojovány jsou dle odst. 89.; normála N na př. v bodu M: $MR \perp AO$, $RS = AO$, $MS = N$.

Evoluta paraboly E jest nekonečná, k ose AO souměrná, a má v ose bod úvratu U.

Úloha. Sestrojte evolutu *a*) ellipsy, *b*) hyperboly. Co jest evolutou kružnice?

Obr. 51.

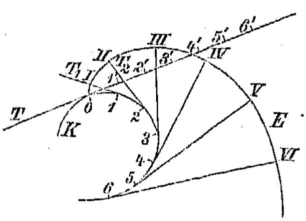


Máme-li zobraziti normály křivky K, jež daným bodem mimo křivku procházeti mají, veďme prostě bodem daným tečny k evolutě křivku K, ješto každá tečna evoluty normálou křivky K býti musí.

106. Pohybuje-li se tečna T (obr. 52.) po křivce K tak, aby pořádné body její 1′, 2′ ... od bodu dotyčného o počínajíc směrem

To staly se postupně body dotyčnými 1, 2 . . ., aniž by se při tom přímka T smykala, vytvoří bod její o křivku E, která *evolventou* křivky K se nazývá. Rovněž takovou evolventu vytvořuje při pohybu tom každý jiný bod tečny T.

Obr. 52.



V zobrazených zde polohách T_1, T_2 . . . tečny T, v nichž dotýká se tečna tato křivky K v bodech 1, 2, 3 . . ., jsou body I, II . . . jednotlivými polohami tvořícího bodu o.

Tutéž křivku E možno sobě mysliti vytvořenou následovně. Představme sobě nit v bodu 6 na př. připevněnou ku křivce K a na tuto navinutou i napnutou až k bodu o; pohybujeme-li nyní tímto bodem o směrem $oI\,II$ . . ., odvíjejíce nit z křivky K a udržujíce ji v stálém napnutí, vytvoří týž evolventu E.

Při tom patrně délky odvinutých částí $1I$, $2II$ . . . rovnají se obloukům $o1$, $o2$, $o3$ . . . a tyto opět délkám $o1'$, $o2'$, $o3'$ . . . Máme-li tudíž evolventu E křivky K sestrojiti, vnesme na T z o rovné dílky $o1' = o2' = \ldots$, učiňme oblouky $o1 = o2 = \ldots = o1'$, a vnesme na tečny T_1, T_2 . . . v bodech 1, 2 . . . ku křivce K sestrojených délky $1I = o1'$, $2II = o2'$, $3III = o3'$ . . ., načež body I, II, III . . . křivou čarou E spojme.

107. Evolventu E možno zobraziti přibližně také následovně. Vytkněme na křivce K několik, co možná blízkých bodů o, 1, 2 . . . a veďme jimi tečny T_1, T_2 . . ., načež opišme z bodu 1 poloměrem $o1$ kruhový oblouk oI, z bodu 2 oblouk $I\,II$, z bodu 3 oblouk $II\,III$ atd., kterýmižto oblouky evolventa E nahražena jest. Poněvadž evolventa v každém bodu svém na př. II dotýká se kruhového oblouku, jehož střed v bodu 2 příslušné tečny T_2 se nachází, mají v bodu tom evolventa i kruhový oblouk společnou tečnu i normálu. Normálou kruhového oblouku v bodu II jest poloměr jeho $2II = T_2$, pročež každá tečna křivky K normálou evolventy E a tudíž křivka K evolutou křivky E býti musí, t. j. každá křivka jest evolutou své evolventy a každá křivka zase evolventou své evoluty.

Tak jest na př. v obr. 51. parabola K evolventou křivky E.

108. Dle odst. 106. rovná se délka tečny křivky K neb normály křivky E mezi těmito křivkami odvinutému oblouku křivky

K; pomocí evolventy spůsobem druhým sestrojené možno tedy křivku danou přibližně zpřímiti, rektifikovati (odst. 6.), t j. sestrojiti délku její. Tak jest na př. v obr. 52. $6VI$ délkou oblouku $o6$ křivky K.

Úlohy. 1. Zobrazte (spůsobem 1.) evolventu kružnice čili křivku, jejíž evolutou jest kružnice daná. 2. Sestrojte délku celého obvodu ellipsy pomocí evolventy její (spůs. 2.) 3. Sestrojte k těmto evolventám tečny a normály ve všech třech případech.

109. Kružnici nelze ani počtem, ani konstruktivně s dokonalou, t. j. s mathematickou přesností rektifikovati; pomocí evolventy rektifikujeme křivku vždy jen přibližně, poněvadž spůsoby uvedenými sestrojujeme evolventu také jen přibližně, rektifikujíce buď oblouky křivky K obecně, aneb nahražujíce části evolventy oblouky kruhovými.

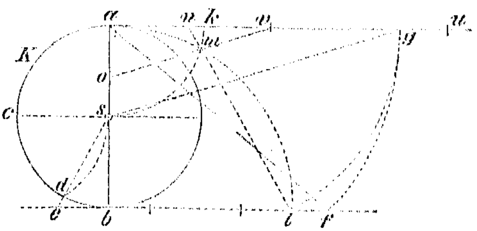
K potřebě praktické dostačí však kterýkoliv z následujících dvou spůsobů přibližných ku sestrojení obvodu kružnice úplně.

Veďme v kružnici dané průměr ab (obr. 53.), v koncových bodech tečny $ag \,||\, bf \perp ab$, a poloměr $cs \perp ab$; učiňme $cd = cs$, spojme sd a prodlužme do e, vnesme od bodu e na tečnu ef tři poloměry kružnice dané ($ef = 3(as)$), a spojme af; délka af rovná se přibližně polovině obvodu kružnice dané.

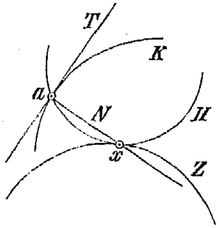
Opíšeme-li z a poloměrem as oblouk sk, a z b poloměrem ba oblouk al, spojíme-li průsečík těchto oblouků m s bodem l, prodloužíme-li přímku lm do n a opíšeme-li z bodu n poloměrem nl oblouk lg, rovná se s nepatrným rozdílem délka ag taktéž polovině obvodu kružnice K.

110. Máme-li úlohu opáčnou, t. j. sestrojiti kružnici, jež danou délku č. obvod d míti má, rektifikujme napřed spůsobem uvedeným kružnici libovolnou K (obr. 53.); budiž ag délka poloviny kružnice K. Spojme sg, učiňme $au = d$ = délce dané, rozpůlme au bodem v a veďme $vo \,||\, gs$; ao jest délka poloměru kružnice žádané, poněvadž jsou obvody kružnic, tudíž i poloviny jejich, v přímém poměru ku poloměrům, a v $\triangle\, aov \sim \triangle\, asg$ skutečně $ao : av = as : ag$.

Obr. 53.



Obr. 54.



111. Kotálí-li se křivka hybná H (obr. 54.) po pevné křivce Z, dotýkajíc se jí ve všech polohách pořadných, aniž se po ní smykajíc, vytvořuje každý bod její na př. a, ano i každý bod mimo ni se nacházející, ale pevně s ní spojený, určitou křivku K, jež *kotálnicí č. trochoidou* sluje.

Poněvadž tvořící bod a do své polohy soumezné točením se kol dotyčného bodu x čar Z a H přichází, má kotálnice K s kruhovým obloukem, jehož středem jest bod x, v bodu a společnou tečnu i normálu. Normálou oblouku tohoto jest však poloměr jeho xa, pročež přímka tato také normálou kotálnice v bodu a býti musí; tečnou její jest pak přímka $T \perp N$.

Normála kotálnice v určitém bodu jejím a prochází tedy vždy dotyčným bodem křivky základní Z a příslušné polohy křivky hybné H, bodem a procházející. Dle toho možno sestrojiti normálu kotálnice volmi snadně, jakož i pomocí normály tečnu.

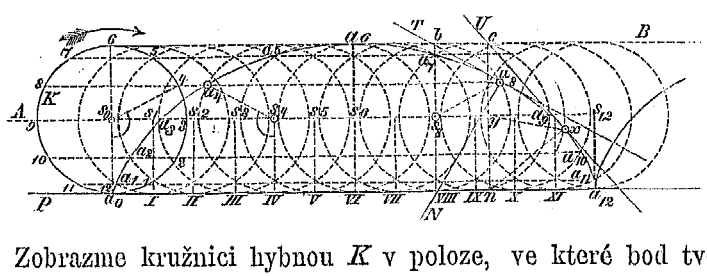
Kotálnice, jichž čarou základní Z jest přímka neb kružnice, čarou pak hybnou rovněž kružnice, nazývají se *cykloidami*.

Poznam. Evolventy kružnice a cykloid užívá se v strojnictví: dle nich zakřivují se na př. zuby hřebenů a kol.

XIII. Cykloidy.

112. Každý bod kružnice K, jež se valí po přímce P (obr. 55.), vytvořuje *cykloidu prostou*.

Obr. 55.



Zobrazme kružnici hybnou K v poloze, ve které bod tvořící dotyčným bodem a se stává. Střed kružnice s opisuje přímku $A \parallel P$; rozdělíme-li kružnici K na př. na 12 rovných dílů, a učiníme-li $a_0 I = I II = \ldots =$ délce jednoho takového dílu $a_0 1$, sjednotí se při pohybu kružnice K dělící body její 1, 2 ... postupně s body I, II ..., jsouce v těchto polohách dotyčnými body čar K a P. V bodech I, II ... sestrojené kolmice ku P protínají přímku A v středních bodech s_1, s_2 ... jednotlivých poloh kružnice K, jež zobrázíme, opíšeme-li z těchto středů kružnice poloměrem $a_0 s_0$.

Abychom nyní na př. v kružnici opsané z bodu s_4 sestrojili polohu tvořícího bodu a_4, uvažme, že oblouk $a_4 4 = a_0 IV =$ oblouku $IV a_4$, tudíž $\sphericalangle 4 s_0 a_0 = \sphericalangle a_4 s_4 IV$; mají tedy patrně body 4 a a_4 rovnou vzdálenosť od přímky P. Bod a_4 obdržíme dle toho v průsečíku kružnice opsané z s_4 s přímkou, bodem 4 rovnoběžně s P vedenou.

Veďme všemi dělícími body kružnice K rovnoběžky s přímkou základní P; průsečíky jejich s kružnicemi, opsanými ze středů označených souhlasnými příponami, jsou jednotlivými body cykloidy, kterou bod a vytvořuje.

Rovnoběžka každá seče sice příslušnou polohu kružnice hybné ve dvou bodech; avšak tvořící bod nachází se potud v levé polovině její, pokud neodvinula se polovina kružnice K na přímce P (polohy $a_1 - a_5$); odvinula-li se více než polovina, objeví se bod tvořící v pravé polovině kružnice hybné (polohy $a_7 - a_{11}$). Bod a_6 jest v přímce $VI s_6 \perp P$, bod a_{12} opět v přímce P, když se byla odvinula kružnice K na přímku základní celá.

Tím vytvořena jedna větev cykloidy; pohybuje-li se kružnice K po přímce P týmž směrem do nekonečna, vytvoří bod a nesčíslné množství větví shodných; polohy bodu tvořícího v přímce základní (a_0, a_{12}) jsou úvratnými body cykloidy.

K přímce $VI a_6$ jest větev zde zobrazená souměrná, bod a_6 jest vrcholem jejím.

Vzdálenosť dvou sousedních bodů úvratných $a_0 a_{12}$ rovná se obvodu kružnice K; obvod jedné větve cykloidy $a_0 a_6 a_{12}$ rovná se osmi poloměrům kružnice hybné.

113. Máme-li sestrojiti tečnu k cykloidě v daném bodu jejím, na př. a_8, uvažme, že normála prochází dotyčným bodem $VIII$ příslušné polohy kružnice hybné na přímce P (odst. 111.); přímka $a_8 VIII = N$ jest tedy normálou, $P \perp N$ tečnou v bodu a_8; ostatně musí procházeti tečna T koncovým bodem b průměru $VIII s_8 b$, poněvadž jest úhel $VIII a_8 b$ pravý.

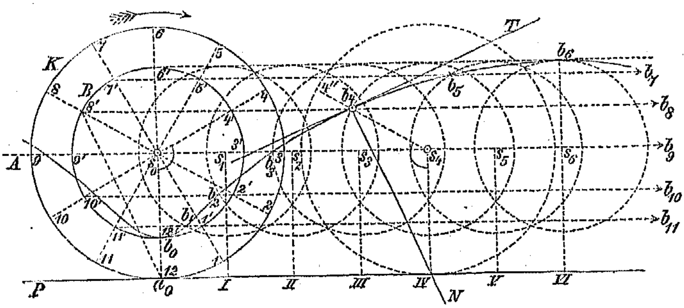
Není-li příslušná poloha kružnice hybné dána, sestrojíme střed její, protneme-li přímku A z daného bodu dotyčného poloměrem kružnice K.

114. Je-li k cykloidě vedena tečna U buď daným bodem mimo křivku aneb rovnoběžně s danou přímkou, obdržíme bod dotyčný, vedeme-li průsečíkem c tečny U s přímkou $B \parallel P$ (obr. 55.) přímku $cyn \perp P$, a protneme-li z bodu y tečnu T poloměrem kružnice K v bodu x ($ox = s_0 a_0$), aneb učiníme-li $nx \perp T$.

Úloha. Zobrazte evolutu cykloidy a sestrojte normálu její, která s danou přímkou rovnoběžná býti má.

115. Každý bod, jenž nachází se *uvnitř* kružnice hybné K, s ní ale pevně spojen jest, vytvořuje *cykloidu zkrácenou*, kotálí-li se kružnice K po přímce P.

Obr. 56.



V obr. 56. jest sestrojena cykloida zkrácená, kterou vytvořuje bod b, jehož původní poloha b_0 dána jest uvnitř kružnice K Středy jednotlivých poloh kružnice K sestrojme jako při cykloidě prvé: $s_0 s_1 = s_1 s_2 = \ldots = a_0 I = a_0 1$. Tvořící bod b nachází se v kružnici B s K soustředné; obě kružnice tyto mysleme sobě pevně spolu spojeny. Opišme ze středů s_1, s_2 . . . jednotlivé polohy kružnice B poloměrem $b_0 s_0$, a sestrojme v nich polohy bodu tvořícího následovně. Rozdělme kružnici B na tolikéž rovných dílů jako K pomocí poloměrů $1s_0$, $2s_0$ atd., a veďme dělícími body $1'$, $2'$ . . . rovnoběžky s přímkou P; průsečíky jejich se zobrazenými polohami kružnice B, opsanými ze souhlasných poloh středu s, jsou jednotlivými polohami bodu tvořícího; spojením jich obdržíme cykloidu zkrácenou. Tak na př. seče přímka $4'b_4 \parallel P$ kružnici opsanou z bodu s_4 v bodu b_4, jenž jest určitou polohou bodu tvořícího; neboť opíšeme-li z s_4 kružnici poloměrem $s_4 IV$ a vedeme-li poloměr $s_4 b_4 4''$, musí býti oblouk $a_0 4 = a_0 IV =$ oblouku $IV4''$, pročež $\sphericalangle 4 s_0 a_0 = \sphericalangle 4'' s_4 IV$. Mají tudíž nejen body 4 a $4''$, nýbrž i body $4'$ a b_4 rovnou vzdálenosť od přímky P, poněvadž $s_0 4' = s_4 b_4$; musí tedy býti $4' b_4 \parallel P$.

Body cykloidy zkrácené, jež jednotlivé větve její oddělují, jako bod b_0, nejsou zde body úvratnými, nýbrž vrcholy.

116. Normála v daném bodu cykloidy zkrácené prochází dotyčným bodem příslušné polohy kružnice K s přímkou P (dle odst. 111.); tak na př. jest normálou cykloidy této v bodu b_4 (obr. 56.) přímka $b_4 IV = N$.

Máme-li sestrojiti v daném bodu cykloidy zkrácené tečnu, zobrazme napřed normálu N a veďme $T \perp N$.

Není-li příslušná poloha kružnice B dána, protněme přímku A z daného bodu dotyčného poloměrem kružnice B, čímž obdržíme střed kružnice žádané.

Je-li dána tečna cykloidy zkrácené T, a má-li se sestrojiti bod dotyčný, veďme bodem a_0 (obrazec 56.) kolmici k tečně T ($a_0 8' \perp T$), která seče kružnici B v bodu $8'$; přímka vedená tímto bodem rovnoběžně s přímkou základní seče tečnu T v dotyčném bodu b_4, poněvadž $\triangle s_0 a_0 8' \cong \triangle s_4 IV b_4$.

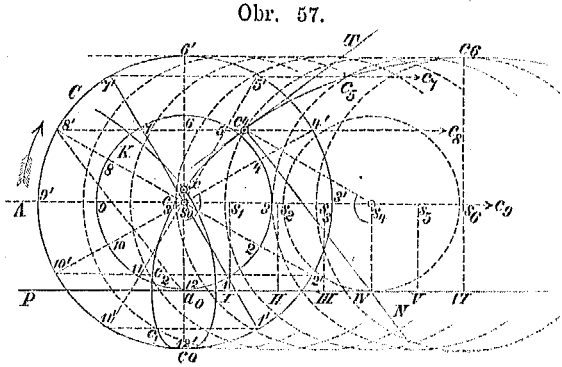
Úlohy. 1. Veďte k cykloidě zkrácené tečny daným bodem mimo křivku, pak rovnoběžné s danou přímkou a sestrojte body dotyčné.

2. Zobrazte normálu této cykloidy, která s danou přímkou rovnoběžná býti má.

117. Každý bod, jenž nachází se *vně* kružnice K po přímce P se valící, vytvoří *cykloidu prodlouženou.*

Budiž c_0 (obr. 57.) původní poloha bodu tvořícího, K kružnice hybná, P přímka základní.

Obr. 57.



Jednotlivé body cykloidy prodloužené sestrojí se týmž způsobem, jako při cykloidě zkrácené. Sestrojme středy s_1, s_2 . . . jednotlivých poloh kružnice $K(s_0s_1 = s_1s_2 = \ldots = a_0I = a_01)$, veďme bodem c_0 kružnici C s K soustřednou, a zobrazme jednotlivé polohy kružnice C, opisujíce z bodů s_1, $s_2 \ldots$ kružnice poloměrem c_0s_0. Rozdělme pak kružnici C na tolikéž rovných dílů jako kružnici K, a veďme dělícími body $1'$, $2'$, ... rovnoběžky s přímkou P; průsečíky jejich s kružnicemi opsanými ze středů s_1, $s_2 \ldots$, souhlasnými příponami označených, jsou jednotlivými polohami bodu tvořícího c, čili body cykloidy prodloužené. Tak seče na př. přímka $4'c_4 \parallel P$ kružnici opsanou z s_4 poloměrem c_0s_0 v bodu cykloidy c_4; důvod toho je týž, jako při cykloidě zkrácené.

Kotálí-li se kružnice K po přímce P směrem protivným (obr. 57.), vytvořuje bod c větev s první souměrnou k průměru c_06'; poloha c_0 obě větve oddělující jest vrcholem cykloidy, a průsečík obou větví x jest dvojnásobným bodem jejím.

118. Normála v daném bodu c_4 této cykloidy prochází dotyčným bodem IV příslušné polohy kružnice K a přímky P: $c_4IV = N$ načež tečna $T \perp N$.

Není-li příslušná poloha kružnice K dána, protněme z daného bodu dotyčného přímku A poloměrem c_0s_0, čímž obdržíme střed kružnice žádané.

Je-li dána tečna T cykloidy prodloužené, a má-li se sestrojiti bod dotyčný, veďme bodem a_0 kolmici k tečně dané ($a_08' \perp T$), která kružnici C v bodu $8'$ protíná; přímka, vedená tímto bodem $8'$ rovnoběžně s přímkou základní P seče tečnu T v bodu dotyčném c_4, poněvadž $\triangle s_0a_08' \cong \triangle s_4IVc_4$.

Jelikož kolmice a_08' kružnici C ve dvou bodech seče, obdržíme tímto způsobem v jedné větvi dvě tečny, jež s danou přímkou rovnoběžné býti mají; kdy jedinou, kdy žádnou?

Úlohy. 1. Veďte k cykloidě prodloužené tečny *a*) daným bodem mimo křivku, *b*) rovnoběžně s danou přímkou, a sestrojte body dotyčné.

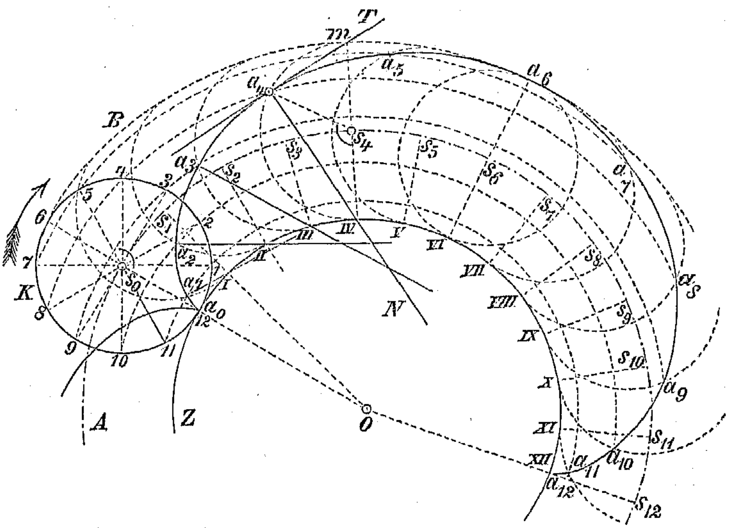
2. Zobrazte normálu této cykloidy, jež s danou přímkou rovnoběžná býti má.

3. Sestrojte evoluty cykloidy zkrácené i prodloužené a veďte pomocí evolut (dle odst. 105.) k cykloidám těm normály body, jež mimo křivku dány jsou.

119. Je-li základní čarou cykloidy kružnice Z (obr. 58.), a dotýká-li se jí kružnice hybná K *vně*, nazývá se *epicykloidou.*

Budiž původní poloha bodu tvořícího a_0 v dotyčném bodu kružnic K a Z. Abychom zobrazili jednotlivé polohy bodu tohoto, rozdělme kružnici K na př. na 12 rovných dílů, a sestrojme v kružnici Z body I, II..., ($a_0I = III = \ldots = a_0 1$), s kterými se dělící body 1, 2...během pohybu kružnice K postupně sjednocují, jsouce v těchto polohách dotyčnými body kružnic K a Z.

Obr. 58.



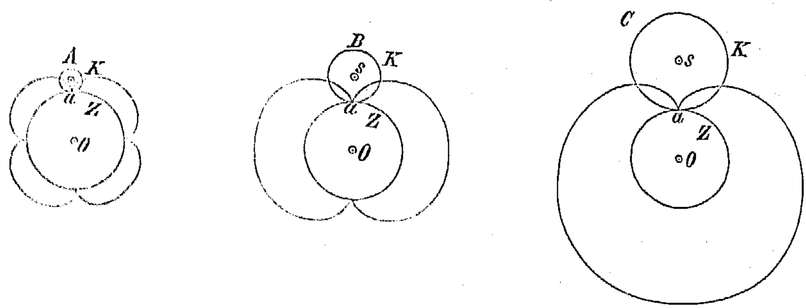
Středy jednotlivých poloh kružnice K, s_1, s_2 ... obdržíme v prodloužených poloměrech OI, OII..., poněvadž dotyčný bod kružnic K a Z vždy v přímce jejich obojstředné se nachází, a v kružnici A opsané z O poloměrem Os_0, kterou střed s opisuje. Opišme ze středů s_1, s_2 ... kružnice poloměrem s_0a_0 a protněme je ze středu O kružnicemi procházejícími body 1, 2, ..., načež budou průsečíky a_1, a_2 ... polohami bodu tvořícího. Tak seče na př. oblouk $4a_4$ kružnici, opsanou z s_4, v bodu epicykloidy a_4, poněvadž oblouky $a_0 4$, $a_0 IV$ i IVa_4 rovné jsou, pročež $\sphericalangle 4s_0a_0 = \sphericalangle a_4s_4IV$; mají tudíž body 4 a a_4 rovnou vzdálenost od kružnice Z, t. j. nacházejí se v kružnici s ní soustředné.

120. Odvine-li se celý obvod kružnice K na kružnici Z, vytvoří bod a jednu větev epicykloidy; oblouk a_0XII = obvodu kružnice K.

Kružnice Z bude míti tedy na celém obvodě svém tolik větví, kolika obvodům kružnice K se rovná obvod kružnice Z.

Je-li poloměr $Oa_0 = R$, $s_0a_0 = r$, bude počet větví $n = \frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{R}{r}$. Má-li býti n číslem celým, musí poloměr R poloměrem r dělitelný býti. Je-li na př. $R = 4r$, bude $n = \frac{4r}{r} = 4$; $R = 2r$, $n = 2$; $R = r$, $n = 1$; t. j. je-li poloměr R čtyři-, dvakráte větší poloměru r, neb

Obr. 59. *A*, *B*, *C*.



jemu roveň, bude míti kružnice základní na celém obvodě svém čtyři (obr. 59. *A*), dvě (obr. 59. *B*) větve epicykloidy, v třetím případě toliko větev jedinou (obr. 59. *C*).

Body, jež jednotlivé větve oddělují, jsou úvratnými body epicykloidy.

121. Normála epicykloidy v daném bodu jejím spojuje tento bod s dotyčným bodem příslušné polohy kružnic *K* a *Z* (dle odstavce 111.); tak jest na př. $a_4 IV = N$ (obr. 58.) normálou v bodu a_4. Tečna *T* jest kolmá k normále *N*; ostatně musí tečna ta procházeti koncovým bodem *m* průměru IVs_4m, poněvadž jest v této kružnici obvodový úhel IVa_4m pravý.

Není-li při této poloze příslušná poloha kružnice hybné dána, obdržíme střed její v kružnici *A*, protneme-li tuto z daného bodu dotyčného poloměrem s_0a_0.

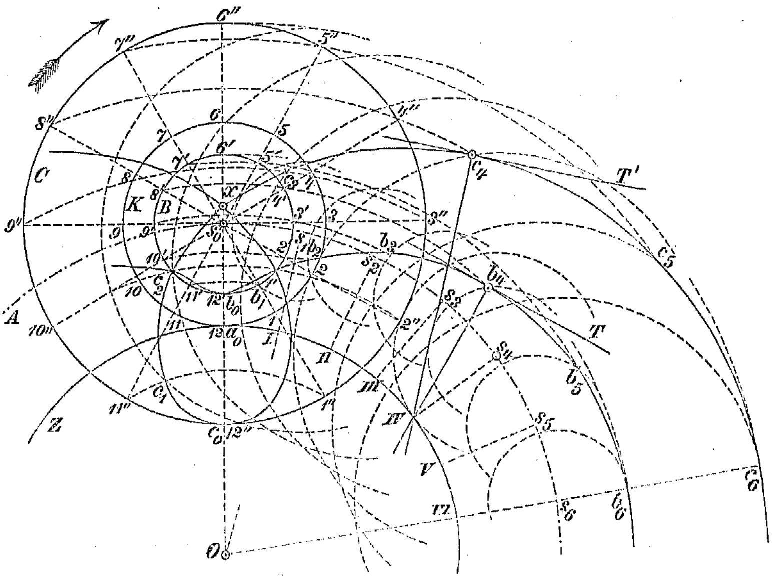
Máme-li sestrojiti dotyčný bod dané tečny *T*, spojme průsečík její *m* v kružnici *B* se středem *O* a bodem, v němž tento poloměr kružnici *Z* seče (zde *IV*), veďme kolmici, t. normálu k tečně *T* ($IVa_4 \perp T$).

Úlohy. 1. Zobrazte evolutu epicykloidy.

2. Sestrojte tečny a normály epicykloidy v ostatních dvou případech a ustanovte body dotyčné.

122. Dle prosté cykloidy zkrácené i prodloužné a epicykloidy právě zobrazené bude snadné, sestrojiti epicykloidu zkrácenou, kterou vytvoří bod b *vnitř* kružnice K daný (obr. 60.), a epicykloidu

Obr. 60.



prodlouženou, jejíž tvořící bod c *vně* kružnice hybné dán jest.

Zobrazme především jednotlivé polohy středu kružnice K v kružnici A; rozdělivše kružnici K na rovné díly, vnesme je na kružnici základní Z, $a_0 I = I\,II = \ldots = a_0 1$, a prodlužme poloměry OI, $OII \ldots$ do kružnice A. Kružnice opsané ze středů s_1, $s_2 \ldots$ poloměry $s_0 b_0$ a $s_0 c_0$ jsou jednotlivými polohami kružnic B a C s K soustředných, v nichž tvořící body b a c se nacházejí.

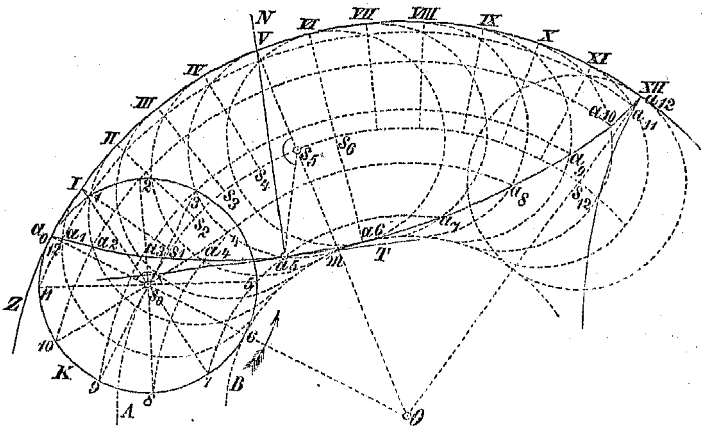
Rozdělme dále kružnice B a C na tolikéž rovných dílů jako kružnici K, a opišme dělícími body $1'$, $2' \ldots$, $1''$, $2'' \ldots$ soustředné kružnice z bodu O; průsečíky kružnic prvých se souhlasnými polohami kružnice B, b_1, $b_2 \ldots$ jsou jednotlivými body epicykloidy zkrácené, průsečíky kružnic druhých se souhlasnými polohami kružnice C, c_1, $c_2 \ldots$ budou body epicykloidy prodloužené.

Body jednotlivé větve těchto epicykloid dělící jsou vrcholy (b_0 a c_0); průsečík x dvou sousedních větví epicykloidy prodloužené jest dvojnásobným bodem jejím.

Počet větví na celém obvodě kružnice základní rovná se, jako při epicykloidě jednoduché, poměru poloměrů kružnic Z a K.

123. Normálami těchto epicykloid na př. v bodech b_4 a c_4 jsou přímky IVb_4, IVc_4, a tečnami přímky $T \perp b_4IV$, $T' \perp c_4IV$. Má-li se vyhledati střed příslušné polohy kružnice hybné, jež daným bodem epicykloidy prochází, protněme kružnici A z daného bodu v epicykloidě zkrácené poloměrem b_0s_0, v prodloužené poloměrem c_0s_0.

Obr. 61.



124. Kotálí-li se kružnice K po *vnitřním* obvodě základní kružnice Z, vytvořuje každý bod její *hypocykloidu*.

Budiž dotyčný bod a_0 kružnic K a Z (obr. 61.) původní polohou bodu tvořícího; rozdělme kružnici K na rovné díly a vnesme je na kružnici Z ($a_0I = I\,II = \ldots = a_0 1$). Dělící body 1, 2 ... sjednotí se během pohybu s body I, II ..., a jsou v těchto polohách dotyčnými body kružnic K a Z. Středy jednotlivých poloh kružnice hybné s_1, s_2 ... obdržíme v poloměrech OI, OII ... a v kružnici A, kterou střed kružnice K opisuje.

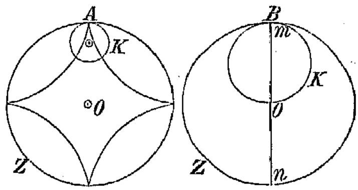
Kružnice soustředné (střed v O) dělícími body 1, 2 ... procházející protínají příslušné polohy kružnice K v jednotlivých polohách bodu tvořícího a_1, a_2 ... Tak náleží na př. průsečík oblouku $5a_5$ s kružnicí opsanou z s_5 hypocykloidě, poněvadž oblouky a_05, a_0V, Va_5 rovné jsou, pročež $\sphericalangle a_0 s_0 5 = \sphericalangle V s_5 a_5$; mají tudíž body 5 a a_5 rovnou vzdálenost od kružnice základní a nacházejí se v oblouku s ní soustředném.

Normálou hypocykloidy v bodu a_5 jest přímka $a_5 V = N$, tečnou přímka $T = a_5 m \perp N$. Máme-li stanoviti dotyčný bod dané tečny T, spojme průsečík její m v kružnici B se středem O, prodlužme Om do bodu V a veďme $Va_5 \perp T$.

125. Počet větví hypocykloidy, vytvořených bodem a za jedno otočení kružnice K kol středu s, jest jako při epicykloidě $n = \frac{R}{r}$, je-li $R = a_0 O$, $r = a_0 s_0$.

V obr. 62. A. jest znázorněna hypocykloida o čtyřech větvích: $R = 4r$. Je-li $R = 2r$, $n = 2$, sjednocují se obě větve v jediné přímce (obr. 62. B.); rovná-li se tedy průměr kružnice hybné poloměru kružnice základní, jest hypocykloida průměrem mn kružnice poslední, dvojnásobně vzatým.

Obr. 62.



Je-li $R = r$, $r = 1$, sjednocuje se kružnice K jakož i hypocykloida s kružnicí základní.

Úlohy. 1. Zobrazte hypocykloidu, je-li $R = 4r$; sestrojte její evolutu jakož i tečny a normály ve všech třech případech.

2. Zobrazte hypocykloidu zkrácenou i prodlouženou, je-li $R = 3r$, a sestrojte v daných bodech těchto křivek tečny a normály.

3. Sestrojte hypocykloidu jednoduchou, zkrácenou i prodlouženou v případě $R = 2r$.

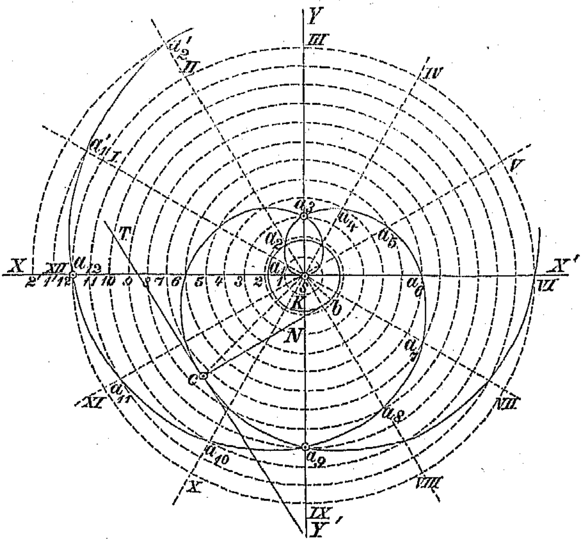
V případě $R = 2r$ jsou hypocykloida zkrácená a prodloužená ellipsami, s kružnicí základní soustřednými; v případě $R = r$ přejdou hypocykloidy tyto v soustředné kružnice.

XIV. Archimedova spirála, konchoida a průmětnice.

126. Točí-li se bod a v rovině kol určitého bodu jejího s, a vzdaluje-li se od tohoto bodu neb přibližuje-li se k němu stále, vytvořuje *závitnici* č. *spirálu*.

Je-li dvojí tento pohyb stejnoměrný, t. j. otočí-li se paprsek as v stejných dobách o rovné úhly kol bodu s, a vykoná-li bod a v stejných dobách rovné dráhy ve směru sa, sluje křivka taková *spirálou Archimedovou* (obr. 63.).

Obr. 63.



Budiž bod tvořící v původní své poloze v bodu s, kol něhož točiti a od něhož napořád vzdalovati se má, i pohybuj se v prvním okamžiku směrem sX. Otočí-li se kol bodu s jednou (o $\sphericalangle 360^0$), dosáhne určitou vzdálenost od bodu tohoto a objeví se opět v paprsku sX, na př. v bodě XII. Vzdáleností $sXII$ jest spirála úplně dána.

Abychom sestrojili jednotlivé polohy bodu tvořícího, rozdělme délku $sXII$ na několik, na př. 12 rovných dílů, opišme z s poloměrem $sXII$ kružnici a rozdělme ji na týž počet dílů stejných; vzdálí-li se bod a o $\frac{1}{12}$ délky $sXII$ od bodu s, bude se nacházeti v kružnici opsané z s poloměrem $s1$, otočí se ale také zároveň kol bodu s o $\frac{1}{12}$ celého otočení, t. j. paprsek as odchýlí se od původního směru sX o úhel $\frac{360^0}{12} = 15^0$ a bude tudíž v poloze sI, pročež bude příslušnou polohou bodu tvořícího průsečík a_1 kružnice $1a_1$ s paprskem sI.

Podobně obdržíme další polohy bodu tvořícího v průsečících a_2, a_3 ... paprsků sII, $sIII$ ... s kružnicemi, opsanými z bodu s poloměry $s2$, $s3$, ... Bod $XII = a_{12}$ jest dvanáctou polohou bodu tvořícího; další polohy jeho možno zobraziti v průsečících paprsků sI, sII ... s kružnicemi opsanými poloměry $s1'$, $s2'$ ..., při čemž $a_{12}1' = 1'2' = \ldots = s1$.

127. Tímto spůsobem může se bod tvořící pohybovati do nekonečna, může se kol bodu s nesčíslněkráte otočiti a zároveň od něho do nekonečna vzdáliti. Pohybuje-li se bod tvořící směrem protivným, přibližuje se stále k bodu s a sjednotí se posléze s ním; pohybuje-li se ale tímto směrem dále dle téhož zákona, vytvořuje druhou část spirály, jež s první částí souměrnou jest ku přímce $YY' \perp XX'$ (obr. 63.).

Z této příčiny jsou průsečíky přímky YY' s částí první zároveň body části druhé, t. j. spirála Archimedova má v přímce YY' nesčíslné množství dvojnásobných bodů průsečných (a_3 $a_9 \ldots$) jediný však vrchol v bodu s.

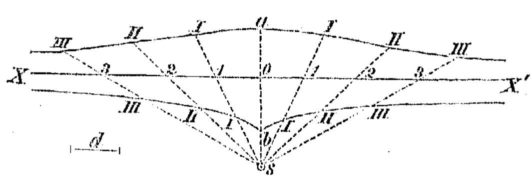
Každá přímka seče spirálu Archimedovu v nesčíslných bodech různých.

128. Kružnice K, jejíž obvod se délce sa_{12} rovná, sluje *hlavní* kružnicí a poloměr její *parametrem* spirály. Jak se tento poloměr sestrojí z daného obvodu kružnice $K = sa_{12}$, okázáno v odst. 110.

Máme-li v daném bodu spirály na př. c sestrojiti normálu a tečnu, spojme cs, zobrazme v kružnici hlavní poloměr $sb \perp cs$, načež bude přímka body b a c spojující žádanou normálou N, tečna pak $Tc \perp N$.

129. Budiž dána přímka XX', bod s a určitá délka d (obr. 64.). Vedeme-li bodem s rozličnými směry různoběžky k přímce XX', vneseme-li na každou z průsečíku jejího s přímkou XX' oběma směry délku d ($oa = ob = 1I = 2II = \ldots = d$), a spojíme-li takto sestrojené body na každé straně přímky XX' křivou čarou, obdržíme obraz křivky, jež pro tvar svůj jmenuje se *lasturnicí* č. *konchoidou*. Přímka XX' jest osou, bod s středem a délka d parametrem jejím.

Obr. 64.



Z konstrukce a z obrazu jest patrno, že má konchoida dvě nekonečné větve na různých stranách osy XX', kteráž jest zároveň společnou asymptotou jejich.

Ku přímce $sa \perp XX'$ jest konchoida souměrnou; v této přímce má konchoida dva vrcholy a a b, je-li $d \gtrless so$; je-li $d = so$, sjednocuje se bod b s bodem s a jest úvratným bodem konchoidy.

Je-li $d > so$ t. j. parametr větší než vzdálenosť středu s od osy, má větev na straně středu ležící podobnou kličku jako prodloužená cykloida, v přímce sa vrcholy dva, a v středu s bod dvojnásobný.

Úlohy. 1. Sestrojte konchoidu v případě α) $d = so$, β) $d > so$.

2. Veďte daným bodem s takovou přímku, aby část její obsažená mezi dvěma danými různoběžkami A a B měla danou délku d.

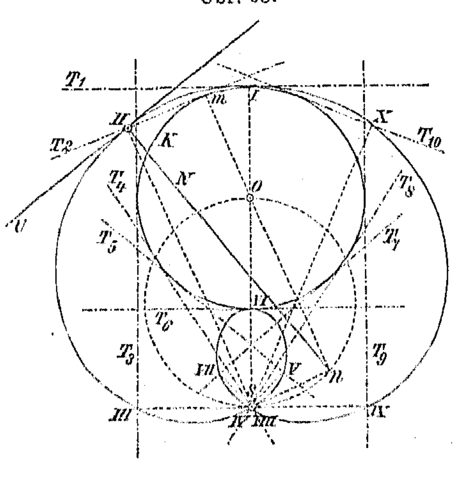
Tu sestrojí se konchoida, jejíž osou jest přímka A, středem bod s a parametrem délka d, načež se spojí body, v nichž tato konchoida druhou různoběžku B seče, s bodem s.

130. Vedeme-li kterýmkoliv bodem s k dané přímce A přímku kolmou, zove se průsečík těchto dvou přímek pravoúhlým *průmětem* bodu s na přímce A.

Průměty libovolného bodu s na veškerých tečnách křivky K tvoří *průmětnici* této křivky; bod s jest *pólem* jejím. Jinými slovy: pohybuje-li se úhel pravý tak, aby jedno rameno jeho procházelo určitým bodem s a aby rameno druhé bylo stále tečnou křivky K, opisuje vrchol jeho průmětnici.

Průmětnici takovou zobrazíme, sestrojíme-li větší počet tečen dané křivky K, protneme-li je kolmicemi s pólu daného s k nim vedenými, a spojíme-li průsečíky čarou křivou.

Obr. 65.



V obr. 65. zobrazena jest tímto spůsobem průmětnice kružnice K, jejímž pólem jest bod s: $sI \perp T_1$, $sII \perp T_2$, $sIII \perp T_3$ .... Body I, II, III... náležejí průmětnici; třeba tu ovšem sestrojiti větší počet bodův ku zobrazení této křivky.

Je-li pól s *vně* kružnice K, jako v obr. 65., náleží také průmětnici, anobrž bude dvojnásobným bodem jejím.

Průmětnice tato jest ku přímce so souměrná a má v ní dva vrcholy: I a VI.

131. Máme-li v daném bodu, na př. II, k průmětnici kružnice (obr. 65.) sestrojiti tečnu i normálu, spojme sII, opišme nad průměrem so kružnici, veďme v ní tetivu $sn \perp sII$ a spojme nII; přímka $nII \equiv N$ jest normálou, přímka $UII \perp N$ tečnou průmětnice v bodu II. —

Průmětnicí ellipsy neb hyperboly, je-li ohnisko některé pólem jejím, jest kružnice opsaná nad osou velkou neb reálnou (viz odstavec 40. a 66., obr. 19. a 32.); průmětnicí paraboly, je-li ohnisko pólem, jest přímka ve vrcholu paraboly k ose její kolmo stojící (viz odst. 82., obr. 40.).

Úlohy. 1. Sestrojte průmětnici kružnice, je-li pól uvnitř kružnice dané, a zobrazte evolutu její.

2. Sestrojte průmětnici *a)* ellipsy, *b)* hyperboly, je-li pól v středu křivky dané, *c)* průmětnici paraboly, jejíž vrchol pólem průmětnice býti má.

Část II.

Užívání algebry v geometrii.

I. Úvod.

1. Měříme-li přímku omezenou, vyšetřujeme, kolikráte určitá *míra* v přímce obsažena jest. Délka přímky vyjadřuje se pak číslem, které poměr její k určité míře udává.

Podobně vyjadřujeme obsah měřického obrazce neb tělesa číslem, které udává poměr obsahu toho k obsahu čtverce neb krychle, jež z oné míry sestrojeny jsou.

Takovými čísly poměrnými délky čar, obsahy obrazců a těles vyjadřujíce, můžeme tyto veličiny do počtu bráti, tudíž přímky na př. sečítati, odčítati, násobiti, děliti, ano i mocniti a odmocňovati, jsou-li dána čísla, jež poměry délek přímek daných k určité míře udávají.

2. Poměrná čísla, jimiž vyjadřujeme délky, znamenejme vůbec písmenem jednoduchým; tak na př. jsou a, b, c poměrnými čísly tří různých délek; první z nich obsahuje v sobě míru délky $a$kráte, délka druhá obsahuje b jednotek atd.

Znásobením dvou délek obdržíme ploský obsah; součin $a.b$ na př. jest obsah obdélníka, jehož rozměry jsou a a b; $c^2 = c.c$ obsah čtverce, jehož strana má délku c.

Součin tří délek dává obsah krychlový; na př. součiny $a.b.c$ a $m.n^2 = m.n.n$ jsou krychlové obsahy pravoúhlých rovnoběžnostěnů, z nichž prvý má rozměry a, b, c, druhý čtvercovou půdici se stranou n a výšku m; x^3 jest obsah krychle, jejíž hrana má délku x.

3. Algebraický výraz vyjadřující délku (na př. a, b, c) sluje *výrazem o jednom rozměru* č. *linearným*; výrazem *o dvou rozměrech* č. *kvadratickým* sluje součin dvou výrazů linearných a znamená

ploský obsah (na př. $a.b$, c^2); výrazem *o třech rozměrech* č. *kubickým* jest součin tří výrazů linearných a značí obsah krychlový (na př. $a.b.c$, $m.n^2$, x^3).

Počet rozměrů jest udavatelem jejich a rovná se patrně součtu mocnitelů jednotlivých činitelů výrazu algebraického. Můžeť arci udavatel rozměrů býti také větší než 3, pak ale výraz takový geometrického významu nemá, jelikož veličiny prostorové nejvýše tři rozměry míti mohou.

Dle toho jsou výrazy $a.b.c.d$, $e^3.f$, g^2h^2, m^4 o čtyřech rozměrech, poněvadž součet mocnitelů jednotlivých činitelů v každém výrazu rovná se 4. — $a.b^2.c^2.d$, $e.f.g^4$, $m^5.n$ jsou výrazy o 6 rozměrech, $x^4.y.z^3$ výraz o 8 rozměrech.

Má-li výraz součinitele vyjádřeného prostým číslem, pokládá se za součinitele některého činitele linearného a jest tudíž *bezrozměrný*.

Výraz $5a$ jest tedy linearný, $3a.b = (3a).b$ kvadratický, $7x^2.y^4 = (7x).x.y^4$ výraz o šesti rozměrech.

Podobně jest číslo π, jímž poměr obvodu kružnice k průměru jejímu označujeme, výrazem bezrozměrným, pročež obvod kruhu $2\pi r$ výrazem linearným, obsah kruhu πr^2 výrazem kvadratickým, obsah koule ${}^4/_3\pi r^3$ výrazem kubickým.

4. Poněvadž má výraz $\frac{a^m}{b^n} = a^m . b^{-n}$ udavatele $(m-n)$, určí se udavatel zlomku, odečteme-li udavatele rozměrů jmenovatele od udavatele rozměrů čitatele. Zlomky $\frac{a^3}{b^2}$, $\frac{2c^4.d}{e^2.f^2}$ jsou výrazy linearné, $\frac{3m^6}{n^3}$, $\frac{x^2.y^7}{2z^6}$ kubické; udavatel rozměrů zlomku $\frac{3a^2b^5}{2u^3}$ jest 4.

Zlomek, jehož čitatel i jmenovatel rovného udavatele mají, jest bezrozměrný. Udavatel zlomku nemění se, znásobíme-li čitatele i jmenovatele jeho týmž výrazem aneb i různými výrazy s rovnými udavateli.

5. Máme-li ustanoviti udavatele rozměrů odmocniny, dělme udavatele odmocňovance odmocnitelem, poněvadž jest $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

Výrazy $\sqrt{a.b}$, $\sqrt[3]{\frac{c^4}{e}}$ jsou tudíž linearné, $\sqrt[3]{a^2b^4}$, $m.\sqrt[5]{\frac{x^6.y}{z^2}}$ kvadratické atd.

Udavatele rozměrů lze bez porušení hodnoty výrazu zvýšiti neb snížiti násobením neb dělením určitou mocninou míry $m = 1$, jakožto jednotky délky.

Aby udavatel rozměrů 4 výrazu $\frac{a^2 . b^3}{c}$ zvýšen byl na 6, násobme jej s $m^2 (m = 1)$: $\frac{a^2 . b^3 . m^2}{c}$; aby byl zlomek $\frac{x^2 . y^3}{z}$ linearný, dělme jej s m^3: $\frac{x^2 . y^3}{z} = \frac{x^2 . y^3}{z . 1^3} = \frac{x^2 . y^3}{z . m^3}$.

6. Výrazy nazýváme *stejnorodými*, mají-li vesměs týž počet rozměrů; *různorodými* slují výrazy s různými udavateli.

Jen stejnorodé výrazy lze bezprostředně sčítati a odčítati; různorodé výrazy třeba prvé pomocí míry $m = 1$ (dle odst. 5.) stejnorodými učiniti.

Mnohočlen $a^4 b + c^2 e^3 - \frac{2x^2 . y^4}{z}$ má stejnorodé členy; upravení výrazů různorodých je patrné z rovnice:

$$a^2 b - \frac{c}{e} + r^3 s = a^2 . b . m - \frac{c . m^4}{e} + r^3 . s,$$

při čemž $m = 1$.

Rovnice jest stejnorodá neb různorodá dle toho, jsou-li veškeré členy její buď stejnorodé neb různorodé. Rovnice

$$a . b - \frac{c^3}{d} = \sqrt{r^3 s} + \sqrt[3]{\frac{x^7}{y}}$$

jest stejnorodá, obsahujíc veskrz členy kvadratické; následující rovnice různorodá upravena jest pomocí míry $m = 1$ tím způsobem, že veškeré členy její stávají se linearnými:

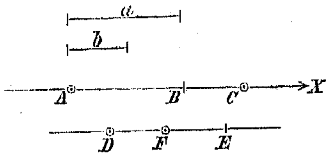
$$x = \frac{a}{b} + c - \sqrt{e} - f^2 . g = \frac{a}{b} . m + c - \sqrt{e . m} - \frac{f^2 . g}{m^2}.$$

Úloha: Vyšetřte udavatele rozměrů výrazů následujících: $a^3 . b . c$, $3d . e^4 . f^2$, $\frac{a . b . e}{2d}$, $\frac{4e^5}{3f^2}$, $\frac{g^3 . h^4 . i}{k^5 . l^3}$, $\sqrt{a . b^3}$, $\sqrt[3]{c . d . e}$, $\sqrt{\frac{2r^3}{s}}$, $2\sqrt[4]{\frac{u^6 . v^3}{3x}}$, $5ab^2 . \sqrt{\frac{c . e^3}{y^3 . z^5}}$, a seřaďte výrazy stejnorodé v skupiny.

II. Sestrojování výrazů linearných.

7. Majíce sestrojiti výraz $x = a + b$*) vnesme na libovolnou přímku AX (obr. 66.) z kteréhokoliv bodu jejího A a kterýmkoliv směrem délku a ($AB = a$), z bodu B pak týmž směrem délku b ($BC = b$), načež bude $AC = x$.

Obr. 66.



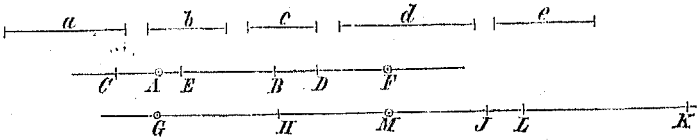
Při odčítání délek uvažme, že znaménka čísel, jimiž délky vyjadřujeme, směry jejich značí, pročež délky protivných znamének také protivnými směry na žádanou přímku přenášeti třeba. Máme-li tedy sestrojiti výraz $x = a - b$, učiňme (obr. 66.) $DE = a$, načež délku b vnesme z E směrem protivným: $EF = b$, $DF = x = a - b$.

Je-li při tom $a < b$, bude x negativné, t. j. z bodu D dospějeme k bodu F směrem negativným.

Součinitel veličiny udává, kolikráte tatáž sečísti se má; na př. $3a = a + a + a$.

Abychom sestrojili $x = a - 2b + 3c - d + 2e$, učiňme (obr. 67.) $AB = a$, z B vnesme směrem protivným $2b$ do C ($BC = 2b$), pak

Obr. 67.



z C směrem původním $3c$ do D ($CD = 3c$), $DE = d$ směrem negativným a $EF = 2e$ posléze směrem positivným, načež $AF = x$. Téhož cíle dosáhneme, odečteme-li součet negativných délek od součtu positivných:

$$x = a - 2b + 3c - d + 2e = (a + 3c + 2e) - (2b + d);$$

učiníme-li tudíž $GK = a + 3c + 2e$ (obr. 67., $GH = a$, $HJ = 3c$, $JK = 2e$), a směrem protivným $KM = 2b + d$ ($KL = 2b$, $LM = d$), bude $GK - MK = GM = x$.

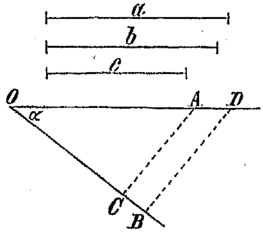
Výkony tyto nazvati můžeme grafickým sečítáním a odčítáním.

---

*) Ve všech následujících rovnicích znamenej x délku, která sestrojena býti má, ostatní pak veličiny a, b, c atd. délky dané.

8. Ze složitých výrazů linearných nejsnáze sestrojiti se dá $x = \frac{a \cdot b}{c}$. Z této rovnice dá se totiž sestaviti úměra $x : a = b : c$, dle kteréž pomocí známé věty o podobnosti trojúhelníků délku x z daných délek a, b, c snadno sestrojiti lze.

Obr. 68.



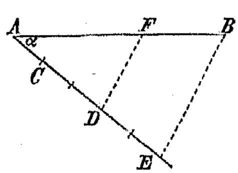
Na jedno rameno libovolného úhlu α (obr. 68.) vnesme $OA = a$, na druhé $OB = b$, $OC = c$, spojme AC a učiňme $BD \parallel CA$, načež jest $OD = x = \frac{a \cdot b}{c}$, poněvadž $\triangle ODB \sim \triangle OAC$ a tudíž $OD : OA = OB : OC$ čili $x : a = b : c$.

Na tom zakládá se též známé *dělení* přímek.

Máme-li sestrojiti na př. $x = \frac{3a}{5}$, tedy bude $x = \frac{3a \cdot n}{5 \cdot n} = \frac{(3n) \cdot a}{5n}$, pročež $x : a = 3n : 5n$, při čemž n jakákoliv délka býti může.

Učiňme jedno rameno lib. úhlu α (obr. 69.) $AB = a$, na druhém rameně zvolme $AC = n$ a učiňme $AD = 3 \cdot AC$, $AE = 5 \cdot AC$, spojme EB a veďme $DF \parallel EB$, načež jest $AF = x = \frac{3a}{5}$.

Obr. 69.



9. Skládá-li se mnohočlen z linearných výrazů tvaru $\frac{a \cdot b}{c}$, sestrojme každý člen o sobě, načež je s ohledem na znaménka jejich sečtěme.

Je-li na př. $x = \frac{a.b}{c} - \frac{4d}{7} + \frac{e.f}{3g} - 2h$, sestrojme především pomocné veličiny $n = \frac{a \cdot b}{c}$, $p = \frac{4d}{7}$, $r = \frac{e \cdot f}{(3g)}$, načež jest $x = n + r - (p + 2h)$.

Na výrazy téhož tvaru lze rozložiti výraz složitější

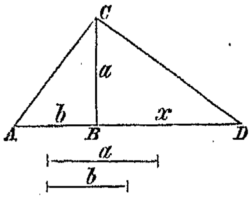
$$x = \frac{a \cdot b \pm c \cdot d}{2e \pm f} = \frac{a \cdot b}{2e \pm f} \pm \frac{c \cdot d}{2e \pm f};$$

sestrojme $g = 2e \pm f$, pak $u = \frac{a.b}{g}$, $v = \frac{c.d}{g}$, načež jest $x = u \pm v$.

Podobně $x = \frac{a^2 - b^2}{m + n} = \frac{(a + b).(a - b)}{m + n}$; sestrojme po řadě $p = a + b$, $r = a - b$, $s = m + n$, $x = \frac{p.r}{s}$.

10. Zvláštním spůsobem lze sestrojiti výraz tvaru $x = \frac{a^2}{b}$. Poněvadž jest tato rovnice následkem úměry $x : a = a : b$, jest veličina a střední měřickou úměrnou mezi veličinami x a b. Délku x možno tudíž sestrojiti na základě známé věty z planimetrie: výška pravoúhlého trojúhelníka spuštěná s vrcholu pravého úhlu ku přeponě jest střední měřickou úměrnou mezi úsečemi přepony.

Obr. 70.



Učiníme-li tudíž (obr. 70.) $AB = b$, $BC \perp AB$, $BC = a$, spojíme-li AC a sestrojíme-li $CD \perp AC$, bude $BD = x$, poněvadž $BD : BC = BC : AB$ čili $x : a = a : b$.

Na podobné tvary lze rozložiti složitější výraz

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{e} = \frac{a^2}{e} + \frac{b^2}{e} - \frac{c^2}{e};$$

sestrojme pomocné veličiny $n = \frac{a^2}{e}$, $p = \frac{b^2}{e}$, $r = \frac{c^2}{e}$, načež $x = n + p - r$.

Výraz $x = \frac{3a^2}{b}$ rozložme sobě v $x = \frac{(3a).a}{b}$, i sestrojme jej dle odst. 8., aneb sestrojme (dle odst. 10.) $n = \frac{a^2}{b}$, načež $x = 3n$.

11. Složitější výraz $x = \frac{a.b.c}{d.e} = \frac{a.b}{d}.\frac{c}{e}$ sestrojiti lze pomocí veličiny $n = \frac{a.b}{d}$, což vloženo do výrazu daného, dává $x = \frac{n.c}{e}$; obě tyto konstrukce vykonají se dle odst. 8.

Podobně sestrojí se každý složitější výraz linearný téhož tvaru. Je-li dán na př. výraz

$$x = \frac{a.b.c.d.e}{f.g.h.i} = \frac{a.b}{f}.\frac{c}{g}.\frac{d}{h}.\frac{e}{i},$$

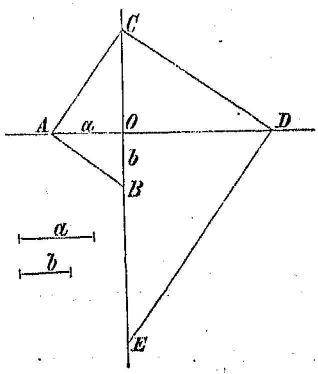
sestrojme pomocné veličiny $n = \frac{a.b}{f}$, $p = \frac{n.c}{g}$, $r = \frac{p.d}{h}$, načež $x = \frac{r.e}{i}$.

Abychom sestrojili $x = \frac{a.b^2}{c^2} = \frac{b^2}{c} . \frac{a}{c}$, vykonejme konstrukce $n = \frac{b^2}{c}$ (dle odst. 10.) a $x = \frac{n.a}{c}$ (dle odst. 8.).

12. Výraz $x = \frac{a^3}{b^2}$ mohl by ovšem sestrojen býti konstrukcemi $n = \frac{a^2}{b}$, $x = \frac{n.a}{b}$, dá se ale také sestrojiti způsobem zvláštním, jednodušším.

Zobrazme dvě různoběžky AD, BC (obr. 71.) k sobě kolmé, učiňme $OA = a$, $OB = b$, spojme AB a sestrojme $AC \perp AB$, $CD \perp AC$, načež bude $OD = x = \frac{a^3}{b^2}$.

Obr. 71.



Důkaz. V pravoúhlém trojúhelníku ACD jest $\overline{OC}^2 = AO . OD$ čili $\overline{OC}^2 = a.OD$, pročež $OD = \frac{\overline{OC}^2}{a}$; v $\triangle BAC$ jest podobně $\overline{AO}^2 = BO . OC$ čili $a^2 = b . OC$, tudíž $OC = \frac{a^2}{b}$, a $\overline{OC}^2 = \frac{a^4}{b^2}$, což do rovnice svrchu odvozené $OD = \frac{\overline{OC}^2}{a}$ vloženo, dává

$$OD = \frac{a^4}{b^2 . a} = \frac{a^3}{b^2} = x.$$

13. Podobně lze sestrojiti $x = \frac{a^4}{b^3}$; učiníme-li $AO = a$ (obrazec 71.), $BO = b$, $AC \perp AB$, $CD \perp AC$, $DE \perp CD$, bude $OE = x$. Dle věty právě odůvodněné jest totiž $OD = \frac{a^3}{b^2}$ a $OC = \frac{a^2}{b}$; vložíme-li tyto hodnoty do rovnice $OE = \frac{\overline{OD}^2}{OC}$ z $\triangle CDE$ plynoucí, obdržíme $OE = \frac{a^6}{b^4} : \frac{a^2}{b} = \frac{a^4}{b^3} = x$.

Patrně lze tímto způsobem sestrojiti každý **výraz** tvaru $x = \frac{a^{n+1}}{b^n}$ vedením n kolmic AC, CD, DE . . . (obr. 71.) **za** sebou, počítajíc od bodu A; vzdálenosť koncového bodu n**té** kolmice od bodu $O = \frac{a^{n+1}}{b^n} = x$, učiněno-li $AO = a$, $BO = b$.

14. Je-li dán výraz $x = \frac{a^3 \pm b^3}{c^2} = \frac{a^3}{c^2} \pm \frac{b^3}{c^2}$, sestrojme pomocné veličiny $m = \frac{a^3}{c^2}$, $n = \frac{b^3}{c^2}$, $x = m \pm n$.

Podobně při

$$x = \frac{a^4 + b^4 + c^2d^2}{e^3} = \frac{a^4}{e^3} + \frac{b^4}{e^3} + \left(\frac{cd}{e}\right)^2 . \frac{1}{e}$$

sestrojme

$$m = \frac{a^4}{e^3}, \quad n = \frac{b^4}{e^3}, \quad p = \frac{cd}{e}, \quad r = \frac{p^2}{e}, \; x = m + n + r.$$

Úlohy. Sestrojte výrazy linearné:

1) $x = a - b - c + d$. 2) $x = 3a - 4b$.

3) $x = 2m - n - 3p + 2r$. 4) $x = 3(2s - t) - 2(u - 3v)$.

5) $x = \frac{2ab}{c}$. 6) $x = \frac{ab}{3c} - \frac{2e}{7}$.

7) $x = \frac{ab - cd}{e}$. 8) $x = \frac{4a^2 - b^2}{c + d}$.

9) $x = \frac{a^2}{2b}$. 10) $x = \frac{9a^2}{c}$.

11) $x = \frac{a^2 + b^2}{c}$. 12) $x = \frac{a^2 - 4b^2 + cd}{2e}$.

13) $x = \frac{a.b.c}{d^2}$. 14) $x = \frac{a^2b}{2c^2}$.

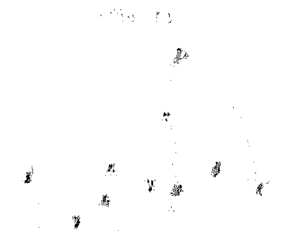
15) $x = \frac{abcd}{efg}$. 16) $x = \frac{abc^2}{d^3}$.

17) $x = \frac{a^3}{(b + c)^2}$. 18) $x = \frac{a^5}{b^4}$.

19) $x = \frac{a^3 - b^3}{c^2}$. 20) $x = \frac{a^4 + b^2c^2 - de^3}{f^3}$.

III. Sestrojování výrazů kvadratických.

15. Nejjednodušší výrazy o dvou rozměrech jsou a) $x^2=a.b$, b) $x^2=a^2\pm b^2$. Rozřešením těchto rovnic obdržíme výrazy $x=\pm\sqrt{a.b}$, $x=\pm\sqrt{a^2\pm b^2}$; poněvadž se tu jedná o sestrojení délky x, není třeba při těchto úlohách na znaménko [illegible] ohled bráti.



Rovnici $x^2=a.b$ proměniti lze v úměru $a:x=x:b$; jest tudíž neznámá délka x střední měřickou úměrnou mezi délkami a a b. Úměrná tato sestrojí se snadně dle známé věty z planimetrie. Učiníme-li $AB=a$, $BC=b$ (obr. 72.), opíšeme-li nad průměrem $AC=a+b$ polokružnici a sestrojíme-li $BD\perp AC$, bude $AB:BD=BD:BC$ čili $a:BD=BD:b$, pročež $BD=x=\sqrt{a.b}$.

Je-li dán výraz $x^2=3a^2=(3a).a$, sestrojme $n=3a$, a $x=\sqrt{n.a}$.

16. Máme-li složitější výraz $x^2=\frac{a.b.c}{d}$, sestrojme pomocnou úsečku $n=\frac{a.b}{d}$ a $x=\sqrt{n.c}$.

Je-li dán výraz $x^2=\frac{a.b^2}{c}$, sestrojme $n=\frac{ab}{c}$, $x^2=bn$.

Chceme-li sestrojiti výraz $x^2=\frac{a.b.c.d}{e.f}$, vykonejme konstrukci $n=\frac{a.b}{e}$, $p=\frac{c.d}{f}$, $x=\sqrt{n.p}$.

17. Dle věty Pythagorovy jest x v rovnici $x^2=a^2+b^2$ přeponou pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky a a b. Abychom tedy sestrojili $x=\sqrt{a^2+b^2}$, učiňme (obr. 73.) $AB=a$, $BC=b$ $(BC\perp AB)$, načež $AC=x$.

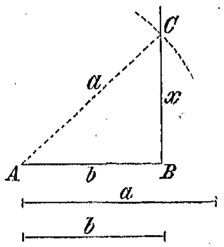
Podobně sestrojíme výraz $x^2=a^2+b^2+c^2$; sestrojme $m^2=a^2+b^2$ a $x^2=m^2+c^2$: $AB=a$ (obrazec 73.), $BC=b$, spojme $AC=m$, učiňme $CD\perp AC$, $CD=c$, $AD^2=m^2+c^2$, tudíž $AD=x$.

Je-li dán výraz $x^2 = a^2 + bc$, sestrojme $m^2 = bc$ a $x^2 = a^2 + m^2$.

Dána-li rovnice $x^2 = 3a^2 + 2b^2$, sestrojme $m^2 = (3a) \cdot a$, $n^2 = (2b) \cdot b$, $x^2 = m^2 + n^2$.

18. Máme-li sestrojiti $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ (z rovnice $x^2 = a^2 - b^2$), uvažme, že jest x délkou odvěsny trojúhelníka pravoúhlého, jehož druhá odvěsna má délku b a přepona délku a. Jedno rameno AB úhlu pravého (obr. 74.) učiňme tedy $= b$ a protněme druhé z bodu A poloměrem a v bodu C ($AC = a$), načež $CB = \sqrt{a^2 - b^2} = x$. Aby trojúhelník takový a tudíž i x možnými byly, jest ovšem podmínka $a > b$ nezbytná.

Obr. 74.



$x^2 = a^2 + b^2 - c^2$ sestrojíme vykonáním konstrukcí $m^2 = a^2 + b^2$, $x^2 = m^2 - c^2$. Pomocí toho lze také snadněji sestrojiti výraz lineárný $x = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{e}$, než jak v odst. 10. okázáno bylo; sestrojme $m^2 = a^2 + b^2$, $n^2 = m^2 - c^2$, $x = \dfrac{n^2}{e}$.

Je-li dán výraz $x^2 = a^2 - bc - d^2 = a^2 - (bc + d^2)$, sestrojme $m^2 = bc$, $n^2 = m^2 + d^2$, $x^2 = a^2 - n^2$. Při tom musí arci býti $a^2 > (bc + d^2)$.

Máme-li sestrojiti $x^2 = 3ab - 4c^2$, zaveďme pomocné veličiny $m^2 = (3a) \cdot b$, $n = 2c$, načež $x^2 = m^2 - n^2$.

19. Abychom sestrojili x dle $x^2 = \dfrac{ac^2}{b}$, učiňme $AO = a$ (obr. 75.), $OB = b$, $OC \perp AB$, opišme nad průměrem AB polokružnici a spojme průsečík C s A a B. Učiníme-li $CE = c$, $EF \parallel AB$, bude $FC = x$. Jest totiž $OC = \sqrt{ab}$, pak $\triangle FCE \sim \triangle COB$, pročež

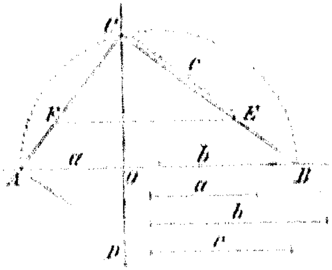
$$FC : CE = CO : OB, \text{ čili}$$

$$FC : c = \sqrt{ab} : b, \text{ z čehož}$$

$$FC = \frac{c \cdot \sqrt{ab}}{b}, \text{ tedy } \overline{FC}^2 = \frac{c^2 ab}{b^2} = \frac{ac^2}{b} = x^2, \text{ a } FC = x.$$

20. Výraz $x^2 = \dfrac{a^3}{b}$ čili $x = \sqrt{\dfrac{a^3}{b}}$ lze sestrojiti buď pomocí veličiny $n = \dfrac{a^2}{b}$, $x^2 = na$, aneb následujícím spůsobem výhodnějším.

Obr. 75.



Zobrazme dvě k sobě kolmé různoběžky (obr. 75.), učiňme $OA = a$, $OB = b$, opišme nad průměrem AB polokružnici, průsečík C spojme s A a sestrojme

$$AD \perp AC;\ OD = x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}.$$

V $\triangle CAD$ jest totiž

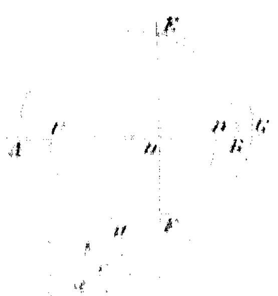
$$OD = \frac{\overline{AO}^2}{OC} = \frac{a^2}{OC}, \text{ tudíž}$$

$$OD^2 = \frac{a^4}{OC^2};$$ vložíme-li do této rovnice $\overline{OC}^2 = AO \,.\, OB = a \,.\, b$, což vychází z polokružnice opsané, obdržíme $\overline{OD}^2 = \frac{a^4}{a \,.\, b} = \frac{a^3}{b} = x^2$, pročež $OD = x$.

Máme-li sestrojiti $x = \sqrt{\frac{a^3 + b^3}{c}}$, vykonejme konstrukce $m = \sqrt{\frac{a^3}{c}}$, $n = \sqrt{\frac{b^3}{c}}$, $x = \sqrt{m^2 + n^2}$.

21. Každý výraz o čtyřech rozměrech nazývá se také bikvadratickým a dá se snadně sestrojiti rozkladem na výrazy kvadratické.

Obr. 76.



Máme-li sestrojiti délku x dle rovnice $x^4 = abcd$, sestrojme pomocné veličiny $m^2 = ab$, $n^2 = cd$, načež bude $x^4 = m^2 n^2$ čili $x^2 = m \,.\, n$. Učiňme tedy (obr. 76.) $AG \perp EF$, $AO = a$, $BO = b$, $OC = c$, $OD = d$, a opišme nad průměry AB a CD kružnice, i bude $OE = \sqrt{ab} = m$, $OF = \sqrt{cd} = n$; v kružnici pak nad průměrem EF opsané bude $OG = \sqrt{OE \,.\, OF} = \sqrt{m \,.\, n} = x$.

Dán-li výraz $x^4 = \frac{a^2bcd}{e}$, sestrojme $m = \frac{bc}{e}$, $n^2 = md$, $x^2 = a \,.\, n$.

Ku sestrojení x dle rovnice $x^4 = 3a^4$ položme $m^2 = (3a) \,.\, a$, $x^2 = m \,.\, a$.

22. Abychom sestrojili $x^4 = a^4 + b^4$ čili $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$, položme $m = \frac{b^2}{a}$, tedy $b^2 = a.m$, načež jest $x^4 = a^4 + a^2m^2 = a^2(a^2 + m^2)$, a položíme-li dále $n^2 = a^2 + m^2$, bude $x^4 = a^2n^2$ aneb $x^2 = an$. Vykonejme tedy konstrukce $m = \frac{b^2}{a}$, $n^2 = a^2 + m^2$, $x^2 = an$.

Máme-li sestrojiti $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4} = \sqrt[4]{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}$, položme $m^2 = a^2 + b^2$, $n^2 = a^2 - b^2$, sestrojme dle těchto rovnic m a n, načež $x = \sqrt[4]{m^2 . n^2} = \sqrt{m . n}$.

I výraz o osmi rozměrech $x^8 = a^3bcd^2e$ lze sestrojiti snadně. Poněvadž $x^8 = a^2 . d^2 . abce$, sestrojme $m^2 = ad$, $n^2 = ab$, $p^2 = ce$, $r^2 = np$; bude tudíž $r^4 = n^2p^2 = abce$, $x^8 = m^4 . r^4$ čili $x^2 = m . r$.

Úlohy. Sestrojte délku x dle následujících rovnic:

1) $x^2 = 2ab$. *2)* $x^2 = 5a^2$.

3) $x^2 = \frac{a^2b}{2c}$. *4)* $x^2 = \frac{a . b . c}{e}$.

5) $x^2 = \frac{a^2bc}{e^2}$ *6)* $x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

7) $x^2 = ab + cd$. *8)* $x = \sqrt{2a^2 + b^2}$.

9) $x^2 = 3a^2 + 2b^2 + 5c^2$. *10)* $x^2 = 4a^2 - b^2$.

11) $x^2 = a^2 - b^2 - c^2$. *12)* $x^2 = a^2 - b^2 + c^2 - d^2$.

13) $x = \sqrt{ab - cd + ef}$. *14)* $x^2 = \frac{a^3}{2b}$.

15) $x^2 = \frac{a^3 - b^3}{c}$. *16)* $x = \sqrt{\frac{ab^2 + cd^2}{e}}$.

17) $x = \frac{a^2 - b^2}{c} - \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^3}{b}}$.

18) $x = \sqrt{\frac{a^3 + b^3}{c}} - \sqrt{\frac{a^3 - b^3}{c}}$.

19) $x = \sqrt{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{e}}$. *20)* $x^4 = abc^2$.

21) $x^4 = 3a^3b$. *22)* $x^4 = 2a^4$.

23) $x^4 = \frac{a^5}{b}$. *24)* $x = \sqrt[4]{a^4 + b^2c^2}$

25) $x^4 = a^4 - bcde$. *26)* $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4 - c^4}$.

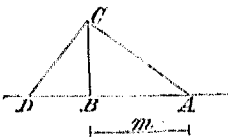
IV. Grafické mocnění a odmocňování čísel.

23. Zvolíme-li sobě jednotku délky $m = 1$, budeme moci snadno znázorniti kteroukoliv mocninu každého čísla a délkou $x = a^n$. Tuto rovnici různorodou lze totiž pomocí míry m proměniti v stejnorodou $x = \frac{a^n}{1^{n-1}} = \frac{a^n}{m^{n-1}}$, kterýžto výraz linearný dle odstavce 13. snadně sestrojiti se dá.

Je-li a číslo celé, jest ovšem tento způsob sestrojení mocniny a^n zbytečným; neboť pak jest i $x = a^n$ číslo celé a žádaná mocnina rovná se x-násobné míře m. Máme-li na př. sestrojiti $x = 2^4$, tedy $x = 16$ jednotkám.

Velmi prospěšným jest však způsob ten, je-li a zlomkem aneb danou délkou, o čemž svědčí dostatečně příklady následující.

Obr. 77.



24. Abychom sestrojili druhou mocninu daného čísla a t. j. $x = a^2$, zvolme sobě délku jednotky $m = 1$ (obr. 77.), učiňme $AB = m$, $BC = a$ jednotkám, spojme AC a sestrojme $CD \perp AC$, načež $BD = \frac{\overline{BC}^2}{AB} = \frac{a^2}{m} = a^2 = x$. V obr. 77. sestrojeno tímto způsobem $x = 0{\cdot}8^2$; zvoleno $AB = 1$, učiněno $CB = 0{\cdot}8$, $CD \perp CA$, $BD = x$.

Máme-li sestrojiti $x = a^3$, zvolme $OB = 1$ (obr. 71.), učiňme $AO = a$, spojme AB, sestrojme $AC \perp AB$, $CD \perp AC$, načež jest dle odstavce 12.

$$OD = \frac{a^3}{\overline{OB}^2} = \frac{a^3}{1^2} = a^3 = x.$$

25. Má-li se sestrojiti $x = (\frac{5}{4})^5$, zvolme $OB = m = 1$ (obr. 78.) učiňme $OA = \frac{5}{4}OB$, $AC \perp AB$, $CD \perp AC$, $DE \perp CD$, $EF \perp DE$, tedy bude (dle odst. 13.)

$$OF = \frac{\overline{AO}^5}{\overline{OB}^4} = \frac{(\frac{5}{4})^5}{1^4} = (\tfrac{5}{4})^5 = x.$$

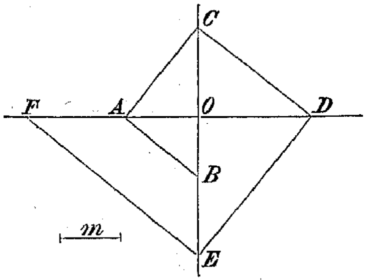
Kdybychom chtěli $x = (\frac{5}{4})^5 = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024}$ prostě na měřídku odměřiti, musili bychom jednotku m na 1024 rovných dílků rozděliti, načež by délka x 3125 dílků takových obsahovala; dělení toto jest však zajisté značně nepohodlnější aniž tak spolehlivé jako konstrukce právě uvedená, nýbrž při malém m takměř nemožné.

Podobně možno dle odst. 13. sestrojiti kteroukoliv jinou mocninu čísla daného.

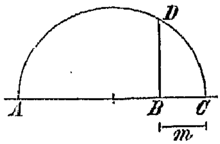
26. Snadně bude také lze sestrojiti druhou odmocninu čísla daného $x = \sqrt{a}$; zvolme jednotku $m = 1$, načež $x = \sqrt{a.m}$ dle odst. 15. sestrojíme. Máme-li na př. sestrojiti $x = \sqrt{3}$, zvolme $m = 1$ (obr. 79.); učiňme $BC = m$, $AB = 3m$, $BD \perp AC$ a opišme nad průměrem AC kružnici: $BD = \sqrt{AB\,.\,BC} = \sqrt{3}$.

Máme-li tedy sestrojiti $x = \sqrt{a}$, dejme přímce libovolné délku $(a + 1)$ a opišme nad tímto průměrem kružnici, načež kolmice sestrojená v bodu, jenž části a a 1 dělí, až ku kružnici, bude rovnati se délce žádané.

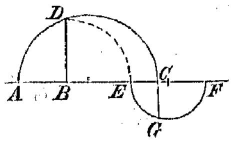
Obr. 78.



Obr. 79.



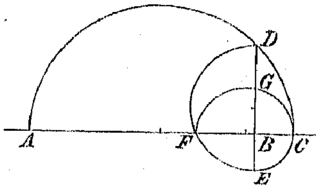
Obr. 80.



27. Máme-li sestrojiti $x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, zvolme $AB = 1$ (obr. 80.), $BC = 2$, opišme polokružnici ADC a sestrojme $BD \perp AC$; $BD = \sqrt{2}$. Učiňme $BE = BD = \sqrt{2}$, tak že $CE = CB - BE = 2 - \sqrt{2}$, tudíž jen $x = \sqrt{CE}$ sestrojiti zbývá; prodlužme EC o $CF = 1$, opišme polokružnici EGF, načež kolmice $CG = \sqrt{EC} = x$.

Podobně lze sestrojiti každou odmocninu $x = \sqrt[m]{a}$, je-li $m = 2^n$, tedy $m = 2, 4, 8 \ldots$; možno totiž odmocňovati $n$kráte za sebou. Tak sestrojeno jest v obr. 81. $x = \sqrt[8]{6} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}}$; $BC = 1$, $AB = 6$, $BD \perp AC$;

Obr. 81.

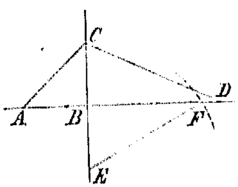


polokružnice ADC dává $BD = \sqrt{6}$; tato přímka prodloužena o $BE = BC = 1$, a opsána kružnice nad průměrem DE, pročež $BF = \sqrt{BD} = \sqrt{\sqrt{6}}$; opíšeme-li posléze kružnici nad průměrem FC, bude (poněvadž $BC = 1$)

$$BG = \sqrt{BF} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}} = x.$$

28. Dá-li se číslo a rozložiti v součet neb rozdíl čtverců dvou čísel celých, na příklad $a = b^2 \pm c^2$, lze sestrojiti $\sqrt{a} = \sqrt{b^2 \pm c^2}$ snadněji dle odst. 17. a 18. V rozdíl čtverců dvou čísel celých dá se rozložiti každé číslo liché.

Obr. 82.



V obr. 82. sestojeno tímto spůsobem $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$; $AB \perp BC$, $AB = BC = 1$, $AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Dále $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{2^2 + 1^2}$; $BC = 1$, $BD = 2$, $CD = \sqrt{5}$.

$BF = \sqrt{3}$ sestrojeno pomocí rozkladu $\sqrt{3} = \sqrt{4-1} = \sqrt{2^2 - 1^2}$; učiněno $BE = 1$ a přímka BD protata jest z E poloměrem $EF = 2$ v bodu F.

Podobně dají se ve dva čtverce rozložiti čísla $8 = 2^2 + 2^2$, $10 = 3^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$, 17, 18, 20, 26 . . . , $7 = 4^2 - 3^2$, $11 = 6^2 - 5^2$, $12 = 4^2 - 2^2$, $13 = 7^2 - 6^2$, $15 = 4^2 - 1^2$ . . . a odmocniny jejich tímto spůsobem sestrojiti.

Úlohy. 1. Sestrojte následující mocniny:

$0{\cdot}6^2$, $0{\cdot}25^3$, $1{\cdot}5^3$, $(\frac{5}{6})^4$, $(1\frac{1}{3})^4$, $0{\cdot}4^5$, $(\frac{1}{2})^6$.

2. Sestrojte následující odmocniny:

$\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{3{\cdot}5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{26}$, $\sqrt{3-\sqrt{3}}$, $\sqrt{2+\sqrt{5}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{4-\sqrt[4]{2}}$, $\sqrt[8]{5}$.

V. Řešení úloh planimetrických pomocí algebry.

29. Výsledkem úloh geometrických jest vždy určitý útvar měřický, jehož velikost i poloha — pomocí vzdáleností jednotlivých částí od přímek a bodů daných — určitými *délkami* stanoviti se dá. Jedná se tudíž vždy při úlohách podobných o sestrojení určitých délek.

Zhusta dají se úlohy geometrické řešiti snadně a s prospěchem pomocí algebry. Chtějíce úlohu tímto způsobem řešiti, počínejme si následovně:

Vyšetřujme vzájemnou závislosť délek daných a neznámých dle podmínek v úloze vyslovených, jimž délky žádané zadost činiti mají, a vyjadřujme závislosť tuto na základě známých vět geometrických rovnicemi neb úměrami. Tyto rovnice neb úměry řešme, vypočítajíce z nich veličiny neznámé, a výrazy vypočítané dle odstavců 1—28. sestrojme.

Sestavování rovnic a úměr na základě daných podmínek bývá při tom úlohou nejnesnadnější a vyžaduje mnohdy nemalého důvtipu. K vyzkoumání vzájemné závislosti jednotlivých veličin prospívá velmi, považujeme-li úlohu za řešenou a zhotovíme-li dle daných podmínek z veličin známých i neznámých geometrický náčrtek (jen od ruky, bez pravídka a kružídka), z něhož pak snadněji odvoditi lze potřebné rovnice a úměry pomocí vět, jichž hojnosť velikou nám poskytuje planimetrie.

Při tom bývá někdy potřebné i výhodné zavedení veličin pomocných, které poznání závislosti té usnadňují, jež ale v rovnicích za neznámé považovati dlužno.

Takových rovnic neb úměr sestaviti se musí tolik, kolik jest veličin neznámých, aby tyto vypočteny a pak sestrojeny býti mohly.

Kterak se těchto návodů obecných v jednotlivých úlohách užívati má, objasňují příklady následující.

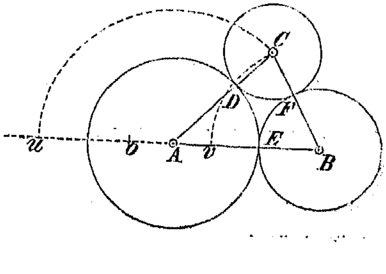
30. *Z vrcholů trojúhelníka daného opsati kružnice, jež vzájemně se dotýkají.*

Především zobrazme sobě tři kružnice, jež se vespolek dotýkají a středy jejich spojme přímkami (obr. 83.).

Strany trojúhelníka ABC jsou dány: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Pokládejme poloměr kružnice opsané z bodu A za veličinu neznámou, $AD = x$, načež bude

$$CD = AC - AD = b - x,$$
$$BE = AB - AE = c - x.$$

Obr. 83.



Poněvadž však

$$BC = a = BF + CF = BE + CD,$$

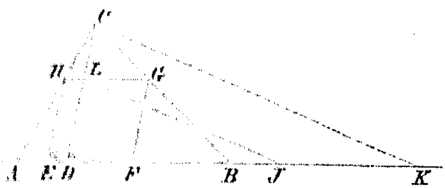
bude $a = (b - x) + (c - x)$,

z čehož $2x = b + c - a$ následuje,

pročež $x = \dfrac{b + c - a}{2}$. Odečteme-li tudíž stranu BC trojúhelnika daného od součtu stran AB a AC ($Au = AC$, $Bv = BC$), rozpůlíme-li zbytek uv, a opíšeme-li z A polovinou zbytku toho $uw = x$ kružnici, můžeme pak bezprostředně opsati z B a C ostatní dvě kružnice tečné, jež budou se také vzájemně v bodu F dotýkati.

31. *Danému trojúhelníku vepsati kosočtverec, je-li dán jeden úhel jeho.*

Obr. 84.



Budiž ABC (obr. 84.) trojúhelník daný; vpišme do něho rovnoběžník $EFGH$, tak aby $\sphericalangle HEB = \sphericalangle \alpha$ = úhlu danému, i považujme jej za kosočtverec, jehož strany $EF = EH = x$. Veďme přímku $CD \parallel EH$, i položme $CD = m$, $AB = a$.

Z podobnosti trojúhelníků, jež vznikly přímkami CD a $GH \parallel AB$, vychází úměra $GH : AB = CL : CD$, a poněvadž $CL = CD - DL = CD - EH = m - x$, bude $x : a = (m - x) : m$; přičteme-li ku členům poměru druhého souhlasné členy poměru prvého, obdržíme

$$x : a = m : (m + a),$$

z čehož $x = \dfrac{am}{a + m}$, kterýžto výraz dle odstavce 8. snadně sestrojiti se dá.

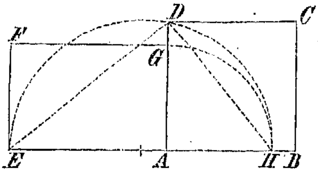
Úloha daná řeší se tedy následovně.

Veďme přímku $CD = m$ k půdici AB v daném úhlu α; učiňme $DJ = AB = a$, $JK = CD = m$, spojme CK a veďme bodem J přímku $JL \parallel CK$; $DL = x$ = straně žádaného kosočtverce. Bodem L veďme $GH \parallel AB$, $HE \parallel GF \parallel CD$, čímž kosočtverec sestrojen. Poněvadž jest totiž $\triangle DLJ \sim \triangle DCK$, bude $DL : DJ = DC : DK$, čili $DL : a = m : (a + m)$, pročež $DL = \dfrac{am}{a + m} = x$.

32. *Proměniti čtverec v obdélník (stejného obsahu), jenž danou délku míti má.*

Je-li strana čtverce daného $AB = s$ (obr. 85.), $AE = a$ daná délka, x neznámá výška žádaného obdélníka, budou obsahy těchto čtyrúhelníků $s^2 = a.x$, tudíž

Obr. 85.



$$x = \frac{s^2}{a},$$

což dle odst. 10. snadně sestrojiti možno. Spojíme-li DE a sestrojíme-li $DH \perp DE$, bude $AH = x$. Učiníme-li tedy $AG = AH$, $GF \parallel AE$, $EF \perp EA$, bude $EAGF$ obdélníkem žádaným.

33. *Proměniti obdélník daný ve čtverec.*

Budiž $AEFG$ (obr. 85.) obdélník daný, $AE = a$, $AG = b$ jeho rozměry a x délka strany čtverce, jenž s obdélníkem rovný obsah míti má.

Obsahy těchto čtyrúhelníků jsou $x^2 = a.b$, což (dle odst. 15.) sestrojíme následovně: učiňme $AH = AG = b$, opišme nad průměrem EH polokružnici a prodlužme AG do D, načež jest $AD = x$ stranou čtverce žádaného.

34. *Daný mnohoúhelník pravidelný zvětšiti (co do obsahu) n-kráte.*

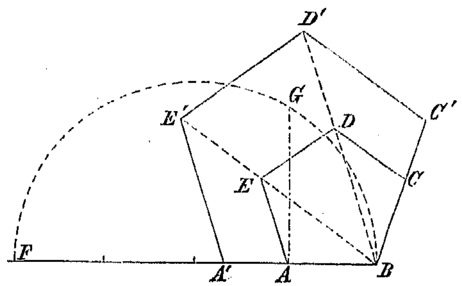
Buďtež o, O obsahy a s, x délky stran mnohoúhelníka daného a neznámého.

Z planimetrie jest známo, že obsahy pravidelných mnohoúhelníků (téhož počtu stran) v témž poměru jsou jako čtverce stran jejich, tudíž

$$O : o = x^2 : s^2,$$

čili $\frac{O}{o} = \frac{x^2}{s^2}$; poněvadž však obsah O $n$kráte větší býti má obsahu o, t. j, $O = n.o$ aneb $\frac{O}{o} = n$, bude $\frac{x^2}{s^2} = n$, čili $x^2 = ns^2$,

Obr. 86.



což dle odstavce 15. snadno sestrojiti lze, ješto n dané číslo znamená a tudíž za součinitele veličiny s^2 považováno býti může.

Máme-li na př. daný pravidelný pětiúhelník (obr. 86.), jehož strana $AB = s$, ztrojnásobniti, bude strana pětiúhelníka žádaného $x = \sqrt{3 . s^2} = \sqrt{(3s) . s}$. Učiňme $AF = 3s$, nad průměrem FB opišme kružnici a sestrojme $AG \perp AB$; $AG = x$ rovná se straně žádaného pětiúhelníka $A'BC'D'E'$ ($A'B = AG$), jenž z této strany nyní snadně zhotoven býti může.

35. *a) Je-li dána délka strany (s) pravidelného osmiúhelníka, sestrojiti poloměr kružnice (r), která se jemu opsati dá.*

Planimetrie učí, že $s = r . \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, tudíž $r = \frac{s}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

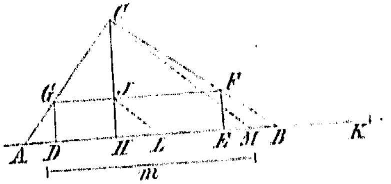
Zvolme jakoukoliv délku $m = 1$, sestrojme $n = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ dle odstavce 27. a $r = \frac{s . m}{n}$ dle odst. 8.

b) Proměniti čtverec v pravidelný šestiúhelník (rovného obsahu). Je-li a délka strany čtverce daného a r poloměr kružnice šestiúhelníku opsané, jsou dle planimetrie obsahy těchto mnohoúhelníků $a^2 = r^2 . 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, tudíž $r^2 = \frac{a^2}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

Zvolme délku $m = 1$, sestrojme dle odst. 27. $n = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, a $r^2 = \frac{a^2 m}{n}$ dle odst. 16., načež do kružnice poloměrem r opsané pravidelný šestiúhelník vpišme.

36. *Danému trojúhelníku vepsati obdélník, jenž určitý (daný) obvod míti má.*

Obr. 87.



Budiž ABC (obrazec 87.) trojúhelník daný a m polovina obvodu daného.

Pokládejme úlohu za řešenou a $DEFG$ za obdélník žádaný. Zobrazme výšku $CH \perp AB$, a položme $CH = v$, $AB = a$, $DG = HJ = x$ (neznámá výška obdélníka). Polovina obvodu $DE + DG = m$, tudíž $DE = GF = m - DG = m - x$.

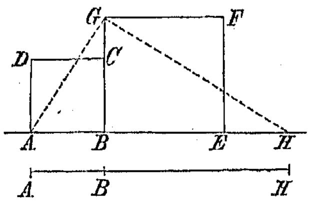
Patrně jest $\triangle CFG \sim \triangle ABC$, pročež $FG : AB = CJ : CH$, a poněvadž $CJ = CH - HJ = v - x$, bude $(m - x) : a = (v - x) : v$, z čehož následuje řešením

$$x = \frac{v(a-m)}{a-v}.$$

Učiníme-li tedy $HL = a - m$ ($HK = AB$, $KL = m$), $HM = a - v$ ($KM = CH$), spojíme-li MC a sestrojíme-li $LJ \parallel MC$, bude $HJ = x$ (proveďte důkaz pomocí $\triangle HJL \sim \triangle HCM$). Veďme pak bodem J přímku $FG \parallel AB$, $FE \perp AB$, $GD \perp AB$, načež bude $DEFG$ obdélník žádaný.

37. *Poměr obsahů daných obrazců znázorniti poměrem délek.* Jsou-li a^2 a b^2 obsahy dvou obrazců, je-li obsah prvý znázorněn danou délkou m a má-li se znázorniti druhý délkou x tak, aby délky m a x byly v témž poměru jako obsahy dané, t. j. $m : x = a^2 : b^2$, sestrojme $x = \frac{b^2 m}{a^2}$ dle odst. 11.

Obr. 88.



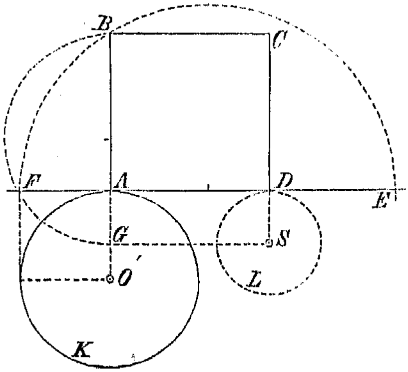
Má-li se na př. nahraditi poměr obsahů dvou čtverců $ABCD$ a $BEFG$ (obr. 88.) poměrem dvou délek, znázorněme nejlépe obsah čtverce prvého stranou jeho $AB = a$, a položíme-li $BE = b$, bude

$$a : x = a^2 : b^2, \text{ pročež } x = \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}.$$

Spojíme-li AG a sestrojíme-li $GH \perp AG$, bude $BH = \frac{\overline{BG}^2}{AB} = \frac{b^2}{a} = x$. Délky AB a BH jsou tudíž v témž poměru jako obsahy čtverců daných.

38. *Proměniti kruh daný ve čtverec téhož obsahu.*

Obr. 89.



Je-li $AO = r$ (obr. 89.) poloměr kruhu daného K, x strana čtverce žádaného, budou obsahy $\pi r^2 = x^2$, čili $x^2 = (\pi r) . r$.

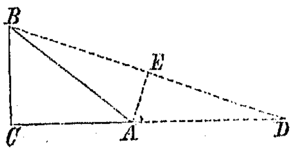
Sestrojme dle odst. 109. (části I.) polovinu obvodu kruhu daného $AE = \pi r$, načež vyhledejme střední měřickou úměrnou mezi $AE = \pi r$ a r, poněvadž $x^2 = (\pi r) . r$. Učiňme $AF = r$, opišme nad průměrem FE polokružnici, a vztyčme $AB \perp AE$ až ku kružnici do bodu B. Čtverec $ABCD$ nad stranou $AB = x$ sestrojený má s kruhem daným K obsah rovný.

39. *Má-li se řešiti úloha opačná, t. j. daný čtverec ABCD (obr. 89.) proměniti v kruh,* bude $\pi y^2 = a^2$, je-li y poloměr kruhu neznámého a $a = AB$ strana čtverce daného.

Z rovnice této bude $y^2 = \frac{a^2}{\pi} = a \cdot \frac{a}{\pi}$; sestrojme tedy $SD = \frac{a}{\pi}$, t. j., poněvadž $a = \pi . SD$, poloměr kružnice L, jejíž polovina obvodu straně daného čtverce $AD = a$ se rovná (dle odst. 110. části I.), načež vyhledejme střední měřickou úměrnou mezi a a SD, ješto $y^2 = a . SD$. Učiňme $AG = SD$ a opišme nad průměrem BG polokružnici; $AF = y = AO$ jest poloměrem kruhu K, jenž s čtvercem daným rovný obsah má.

40. *Sestrojiti trojúhelník pravoúhlý, je-li dána jedna odvěsna jeho a součet ostatních dvou stran.*

Obr. 90.



V $\triangle ABC$ (obr. 90.) jest dáno $CB = a$, $CA + AB = s$. Vypočtěme délku druhé odvěsny $AC = x$. Poněvadž $\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2 = a^2 + x^2$, a $AB = s - AC = s - x$, bude $(s-x)^2 = a^2 + x^2$, čili $s^2 - 2sx + x^2 = a^2 + x^2$; odečteme-li na obou stranách x^2, zbude $s^2 - 2sx = a^2$, z čehož $x = \frac{s^2 - a^2}{2s}$. Tento výraz sestrojme buď dle odst. 9. aneb spůsobem následujícím.

Učiňme $CD = s$, $CB \perp CD$, $CB = a$, spojme BD, rozpůlme délku tuto bodem E a sestrojme $EA \perp BD$; $AC = x$ jest druhou odvěsnou žádaného trojúhelníka ABC.

Jest totiž $\triangle AED \sim \triangle BCD$, pročež

$$ED = \frac{BD}{2} : AD = CD : BD,$$

tudíž $AD = \frac{BD^2}{2CD}$; položíme-li v této rovnici $AD = CD - CA = s - CA$, $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = a^2 + s^2$, $CD = s$, obdržíme

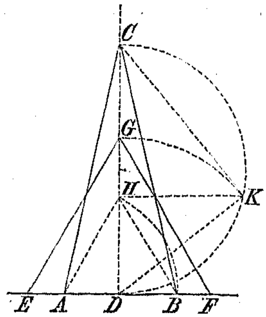
$$s - CA = \frac{a^2 + s^2}{2s},$$

z čehož následuje

$$CA = \frac{s^2 - a^2}{2s} = x.$$

41. *Proměniti trojúhelník rovnoramenný v rovnostraný (stejného obsahu).*

Obr. 91.



Považujme úlohu za řešenou: ABC (obrazec 91.) buďiž trojúhelník daný, $\triangle EFG$ žádaný. Obsahy jejich mají býti rovné, tudíž i poloviny $ADC = EDG$; položíme-li $DC = v$, $DG = x$, musí býti

$$\frac{AD.v}{2} = \frac{ED.x}{2},$$

z čehož $AD:ED = x:v$.

Učiníme-li $AH \| EG$, a položíme-li $DH = a$, bude

$$AD:ED = DH:GD = a:x;$$

z této a z předchozí úměry následuje

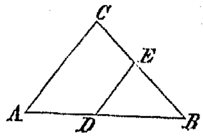
$$x:v = a:x, \quad \text{čili} \quad x^2 = a.v.$$

Je-li tedy $\triangle ABC$ dán, učiňme $AH = AB$, aby $\sphericalangle HAD = 60^0$, opišme nad průměrem CD polokružnici, sestrojme $HK \perp CD$, a spojme DK, načež $DG = DK = x$, poněvadž jest DK dle známé věty planimetrické střední úměrnou mezi $DC = v$, a $DH = a$.

Učiníme-li posléze $GE \| AH$, $GF \| HB$, bude EFG trojúhelníkem žádaným.

42. *Rozděliti daný trojúhelník ABC* (obr. 92.) *na dvě části v daném poměru $a:b$ přímkou, jež s určitou stranou jeho (na př. AC) rovnoběžná býti má.*

Obr. 92.



Je-li $DE \| AC$ přímkou žádanou, bude $\triangle BDE \backsim \triangle ABC$, pročež jsou obsahy těchto trojúhelníků v přímém poměru ku čtvercům stejnolehlých stran:

$$\triangle BDE : \triangle ABC = \overline{DB}^2 : \overline{AB}^2 = x^2 : c^2,$$

položíme-li $DB = x$, $AB = c$.

Poněvadž však

$$DBE : ADEC = a:b$$

aneb $\triangle DBE : \triangle ABC = a:(a+b)$

býti má, následuje z těchto úměr

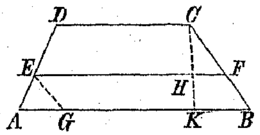
$$x^2 : c^2 = a : (a + b),$$

pročež $x^2 = \dfrac{ac^2}{a+b}$.

Sestrojme výraz tento dle odst. 19. a učiňme pak $BD = x$, $DE \parallel AC$.

43. *Daný lichoběžník* $ABCD$ (obr. 93.) *rozpůliti přímkou s půdicí* AB *rovnoběžnou.*

Obr. 93.



Budiž $EF \parallel AB$ přímkou žádanou, $CK \perp AB$, $AB = a$, $CD = b$, $CK = v$, $CH = x$, $HK = v - x$, $EF = y$.

Obsah lichoběžníka daného $ABCD = \dfrac{(a+b).v}{2}$; obsah vrchní poloviny

$$EDCF = \frac{(b+y).x}{2} = \frac{ABCD}{2} = \frac{(a+b).v}{4},$$

obsah poloviny spodní

$$ABFE = \frac{(a+y)\,(v-x)}{2} = \frac{ABCD}{2} = \frac{(a+b).v}{4}.$$

Dosadíme-li do rovnice druhé hodnotu neznámé x z rovnice první ustanovenou a vypočítáme-li z rovnice nové veličinu y, obdržíme

$$y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Sestrojíme-li tudíž $m^2 = a^2 + b^2$, $y^2 = \dfrac{m}{2} \cdot m$, a učiníme-li pak $BG = y$, $GE \parallel BC$, $EF \parallel AB$, bude EF lichoběžník daný půliti.

Úlohy. *1.* Proměniti daný obdélník v jiný, jenž určitou (danou) délku míti má.

2. Sestrojiti obdélník určité délky, jehož obsah součtu daných tří čtverců rovnati se má.

3. Podmínce v úloze odst. 30. uvedené možno čtverým způsobem vyhověti. Kromě kružnic v obr. 83. sestrojených, možno opsati z vrcholů daného trojúhelníka kružnice vzájemně se dotýkající, z nichž dvě uvnitř třetí leží. Kružnice největší může míti pak střed svůj ve vrcholu A, podruhé v B, po třetí v C. Vypočtěte i sestrojte poloměry kružnic takových, a opište jimi kružnice tečné.

4. Trojúhelníku danému vepsati čtverec (dle odst. 31.).

5. Trojúhelník, kosočtverec (dána půdice a výška), a lichoběžník (dány rovnoběžné strany a vzdálenost jejich) proměniti ve čtverce, jež s danými mnohoúhelníky rovné obsahy mají.

6. Daný kruh zdvojnásobiti (co do obsahu).

7. Daný čtverec zpateronásobiti.

8. Daný šestiúhelník pravidelný zčtyřnásobiti.

9. Sestrojiti čtverec, jehož obsah součtu daných tří *a)* obdélníků, *b)* čtverců rovnati se má.

10. Sestrojiti kruh, jehož obsah součtu daných dvou neb tří kruhů rovnati se má.

11. Proměniti dané mezikruží, t. j. rozdíl dvou kruhů soustředných, v kruh.

12. Je-li dána délka strany s pravidelného *a)* dvanáctiúhelníka, *b)* šestnáctiúhelníka, sestrojiti poloměr kružnice r, která se jemu opsati dá. (V případě *a)* jest $s = r.\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, v *b)*

$$s = r.\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}).$$

13. Proměniti daný čtverec (strana a) v pravidelný α) šesti-, β) osmi-, γ) dvanáctiúhelník. (Sestrojme poloměr r kružnice K v případě

$$\alpha) \text{ dle } r^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot a^2,$$

$$\beta) \text{ dle } r^2 = \frac{a^2}{2\sqrt{2}},$$

$$\gamma) \text{ dle } r^2 = \frac{a^2}{3},$$

načež do kružnice K žádaný mnohoúhelník vepišme).

14. Dán jest čtverec, obdélník, kosočtverec, lichoběžník, pravidelný trojúhelník i šestiúhelník a kruh. Obsah čtverce znázorněn jest délkou strany jeho; mají se znázorniti všechny dané obrazce délkami, jež by se v témž poměru nacházely, jako obsahy obrazců daných.

15. Čtverec proměniti v trojúhelník rovnostraný.

Sestrojme nad půdicí čtverce rovnoramený trojúhelník, jehož výška dvojnásobné půdici se rovná, a proměňme jej v trojúhelník rovnostraný dle odst. 41.

16. Daný kruh proměniti v obdélník určité délky.

17. Daný kruh proměniti v rovnostraný trojúhelník.

18. Daný obdélník proměniti v kruh.

19. Daný trojúhelník rozděliti přímkou s půdicí rovnoběžnou v poměru $2:3$.

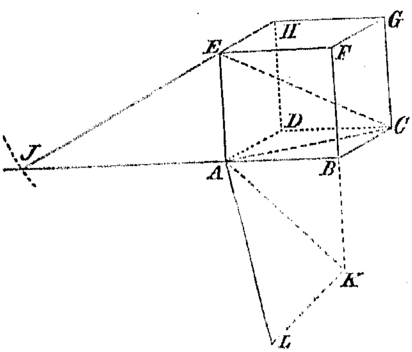
20. Daný trojúhelník rozpůliti přímkou, jež s jednou stranou jeho rovnoběžná býti má.

21. Daný lichoběžník rozpůliti přímkou s půdicí rovnoběžnou; půdice jeho rovná se polovině protější strany rovnoběžné.

VI. Rešení úloh stereometrických pomocí algebry.

44. *Sestrojiti délku úhlopříčny krychle, je-li dána délka hrany její (a).*

Obr. 94.



Zobrazme sobě krychli (obrazec 94.), některou její úhlopříčnu, na př. EC, a úhlopříčnu podstavy AC. V pravoúhlém trojúhelníku ACB jest $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, v $\triangle AEC$ pak $\overline{EC}^2 = x^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AE}^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$. Sestrojme tedy x buď dle $x^2 = (3a).a$ aneb dle $x^2 = 4a^2 - a^2 = (2a)^2 - a^2$. Spůsobem druhým vnesme na jedno rameno úhlu pravého JAE délku hrany krychle $AE = a$, a protněme rameno druhé z bodu E dvojnásobnou délkou hrany $EJ = 2a$; AJ jest délkou úhlopříčny krychle.

45. *Sestrojiti délku úhlopříčny pravoúhlého rovnoběžnostěnu, jehož rozměry (a, b, c) dány jsou.*

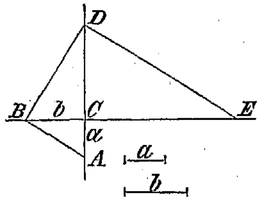
Zobrazme sobě rovnoběžnostěn pravoúhlý (obr. 94.) a úhlopříčnu jeho EC; rozměry jeho buďtež $AB = a$, $BC = b$, $AE = c$. Čtverec úhlopříčny podstavy $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + b^2$; v $\triangle AEC$ jest pak $\overline{EC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AE}^2 = a^2 + b^2 + c^2 = x^2$.

Lze tudíž délku úhlopříčny sestrojiti (dle odst. 17.) následovně. Učiňme $AB = a$, $BK \perp AB$, $BK = BC = b$, $KL \perp AK$, $KL = AE = c$; $AL = x$ jest délkou úhlopříčny rovnoběžnostěnu.

46. *Znázorniti poměr obsahů dvou krychlí poměrem dvou délek.*

Buďtež a a b (obr. 95.) dané délky hran obou krychlí, a znázorňuj zároveň a obsah krychle prvé. Je-li pak x délka, kterou obsah krychle druhé znázorněn býti má, bude $a:x = a^3:b^3$, tudíž $x = \frac{b^3}{a^2}$.

Obr. 95.



Učiníme-li $AD \perp BE$, $AC = a$, $BC = b$, $BD \perp AB$, $DE \perp BD$, bude (dle odst. 12.) $CE = x$. Délky AC a CE jsou v témž poměru, jako obsahy daných krychlí.

47. *Poměr obsahů krychle, pravoúhlého rovnoběžnostěnu a přímého jehlance s čtvercovou podstavou znázorniti poměrem délek.*

Budiž obsah krychle znázorněn délkou hrany její a, obsah rovnoběžnostěnu délkou x, obsah jehlance délkou y.

Jsou-li m, n, p rozměry rovnoběžnostěnu, bude

$$a:x = a^3:m.n.p,$$

pročež sestrojme $x = \frac{m.n.p}{a^2}$ (dle odst. 11.).

Je-li s strana podstavy jehlance a v výška jeho, bude

$$a:y = a^3:\frac{s^2.v}{3};$$

sestrojme tudíž podobně $y = \frac{s^2.v}{3a^2}$.

48. *Tytéž mnohostěny proměniti v pravoúhlé rovnoběžnostěny (týchž obsahů), jichž dva rozměry (c, d) dány jsou.*

Máme-li proměniti krychli, jejíž hrana $= a$, v rovnoběžnostěn rozměrů c, d, x, musí býti $c.d.x = a^3$, pročež sestrojme třetí rozměr jeho dle $x = \frac{a^3}{c.d}$.

Má-li se proměniti rovnoběžnostěn m, n, p v jiný rozměrů c, d, y, sestrojiti třeba rozměr y dle $y = \frac{m.n.p}{c.d}$, jelikož obsahy jejich $c.d.y = m.n.p$.

Jsou-li c, d, z rozměry rovnoběžnostěnu, jenž jehlanci v odst. 47. danému rovnati se má, bude $c.d.z = \frac{s^2.v}{3}$, pročež sestrojme

$$z = \frac{s^2.v}{3c.d}.$$

49. *Součet dvou krychlí proměniti v pravoúhlý rovnoběžnostěn, jehož podstavou daný čtverec býti má.*

Jsou-li a, b délky hran krychlí daných, c strana podstavy a x délka rovnoběžnostěnu, bude $c^2 . x = a^3 + b^3$; sestrojme tudíž (dle odst. 14.)

$$x = \frac{a^3 + b^3}{c^2}.$$

50. *Proměniti válec daný ve válec jiný, jenž danou podstavu míti má.*

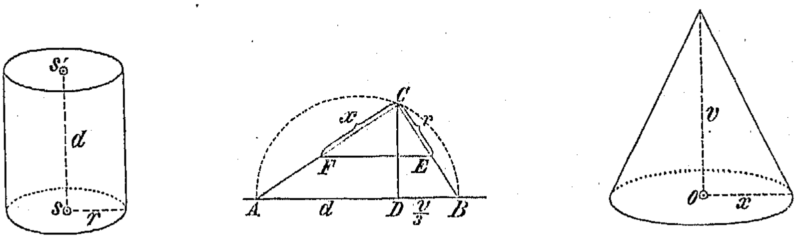
Jsou-li r a R poloměry podstav, d a x délky válce daného a žádaného, budou obsahy jejich $d . \pi r^2 = x . \pi R^2$, tudíž

$$x = \frac{d . r^2}{R^2},$$

což dle odst. 11. snadně sestrojiti lze.

51. *Daný válec proměniti v kužel s určitou výškou.*

Obr. 96. a, b, c.



Buďtež r a x (obr. 96.) poloměry podstav, d a v výšky válce a kužele. Obsahy těchto těles jsou $\pi r^2 . d = \frac{\pi x^2 . v}{3}$, pročež

$$x^2 = \frac{d . r^2}{\left(\frac{v}{3}\right)},$$

což dle odstavce 19. sestrojíme následovně. Učiňme $AD = d$, $DB = \frac{v}{3}$, $DC \perp AB$, opišme nad AB polokružnici, spojme AC, BC, vnesme $CE = r$ a veďme $EF \parallel AB$; $CF = x =$ poloměru podstavy kužele žádaného.

52. *Proměniti kouli ve válec dané délky d.*

Jsou-li r a x poloměry koule a podstavy válce, bude

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi x^2 . d,$$

tudíž

$$x^2 = \frac{r^3}{\left(\frac{3}{4}d\right)}.$$

Poloměr podstavy válce x lze dle této rovnice (odst. 20.) snadno sestrojiti.

53. *Máme-li proměniti válec v pravoúhlý rovnoběžnostěn, jenž dané dva rozměry (a a b) míti má,* vypočtěme a sestrojme třetí jeho rozměr x následovně. Je-li r poloměr podstavy a v výška válce, budou obsahy obou těles $\pi r^2 . v = a . b . x$, pročež

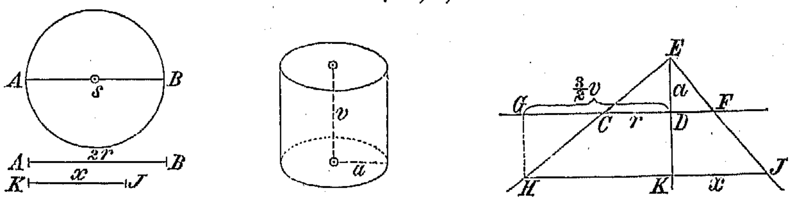
$$x = \frac{\pi r^2 . v}{a . b}.$$

Proměňme nejprvé podstavu válce v čtverec (dle odst. 38.), načež sestrojme $x = \frac{s^2 . v}{ab}$ (dle odst. 11.), je-li s stranou čtverce toho, poněvadž jsme učinili $s^2 = \pi r^2$.

Kdyby byl dán místo válce kužel, bylo by $x = \frac{\pi r^2 . v}{3ab}$.

54. *Poměr obsahů koule a válce znázorniti poměrem dvou délek.*

Obr. 97. *a, b, c.*



Buďiž znázorněn obsah koule na př. délkou průměru jejího $AB = 2r$ (obr. 97.), obsah válce neznámou dosud délkou x.

Je-li a poloměr podstavy a v výška válce, bude dle podmínky dané úlohy

$$x : 2r = \pi a^2 . v : \tfrac{4}{3}\pi r^3,$$

tudíž
$$x = \frac{(\frac{3}{2}v) . a^2}{r^2} = \frac{(\frac{3}{2}v)}{r} . \frac{a^2}{r}.$$

Sestrojme nejprvé pomocnou délku

$$m = \frac{a^2}{r}, \text{ načež } x = \frac{(\frac{3}{2}v) . m}{r}.$$

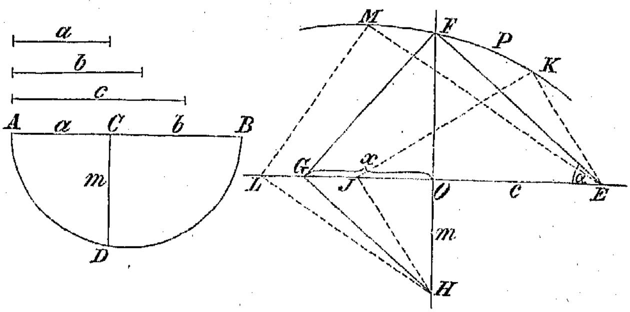
Učiňme (obr. 97.) $CD = As = r$, $DE \perp CD$, $DE = a$, $EF \perp CE$, tak že $DF = m = \frac{a^2}{r}$. Učiníme-li dále $DG = \frac{3}{2}v$, $GH \parallel ED$, $HJ \parallel CF$, bude $JK = x$. Poněvadž totiž $JK : KH = DF : CD$, čili $JK : \frac{3}{2}v = m : r$, musí býti $JK = \frac{(\frac{3}{2}v) . m}{r} = x$.

Jsou tudíž obsahy koule a válce daného v témž poměru, jako délky $AB = 2r$ a $KJ = x$.

55. *Daný rovnoběžnostěn pravoúhlý, jehož rozměry jsou a, b, c (obr. 98.), proměniti v krychli rovného obsahu.*

Je-li x neznámá délka hrany krychle, jsou obsahy těchto dvou těles $x^3 = a.b.c$.

Obr. 98.



Výraz tento *stupně třetího* č. *kubický* nelze jako výrazy linearné a kvadratické setsrojiti *správně* toliko pomocí přímek a kružnic, nýbrž buď pomocí jiné křivky stupně druhého aneb pomocí křivky stupně třetího.

Sestrojme nejprvé pomocnou veličinu m dle $m^2 = a.b$, načež bude $x^3 = m^2.c$; protneme-li přímku $CD \perp AB = a + b$ polokružnicí, jejímž průměrem jest AB, bude $CD = m$. Zobrazíme-li sobě přímky $GE \perp FH$, učiníme-li $OE = c$, $OH = CD = m$, a podaří-li se nám, vésti body E a H dvě rovnoběžky $HG \parallel EF$ takovým směrem, aby přímka $FG \perp EF$ byla, pak bude $OG = x$, jelikož dle odst. 12. neb 20. $\overline{OG}^3 = m^2.c$.

K sestrojení úhlu α, jenž směr tento udává, nestačují, jak již svrchu dotčeno, přímky a kružnice; třeba tudíž vzíti na pomoc křivku jinou.

Vedeme-li na př. body E a H paprsky $EK \parallel HJ$ směrem libovolným, a učiníme-li $JK \perp EK$, bude průsečík K obecně mimo přímku FH.

Vedeme-li body E a H směrem jiným paprsky $EM \parallel HL$, učiníme-li $LM \perp EM$, a sestrojíme-li větší počet bodův podobně, jako K a M, obdržíme spojením jich určitou čáru křivou P. Každý bod této čáry M má tu vlastnosť, že jest $LM \perp ME$, učiníme-li $HL \parallel ME$; tato vlastnosť náleží tudíž i průsečíku F křivky P

s přímkou HF. Spojíme-li jej s E a učiníme-li $FG \perp EF$, bude $OG = x$ délka hrany krychle, jejíž obsah se rovná obsahu rovnoběžnostěnu rozměrů a, b, c.

Pomocná křivka P jest *parabolou kubickou*, t. j. stupně třetího.

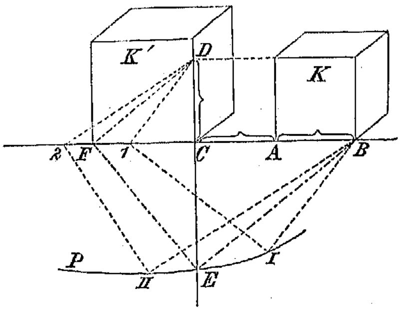
56. Podobně řeší se úloha: *danou krychli zdvojnásobiti.**)

Budiž $AB = m$ hrana krychle dané K (obr. 99.), a x délka hrany krychle dvojnásobné. Dle podmínky úlohy dané bude $x^3 = 2m^3$, čili

$$x^3 = m^2 . (2m) = m^2 . c,$$

položíme-li $2m = c$.

Obr. 99.



Patrně tu máme tutéž úlohu jako v odst. 55.

Učiňme $CB = 2m$, $DCE \perp CB$, $CD = AB = m$, veďme kterýmkoliv směrem body B a D paprsky $D1 \parallel BI$, pak $1I \perp BI$, sestrojme podobným spůsobem několik bodů I, II... a spojme je kubickou parabolou P; průsečík její E s přímkou DE spojme s B, a sestrojme $EF \perp BE$; $CF = x$ jest délka hrany krychle K', jejíž obsah dvojnásobnému obsahu krychle K se rovná.

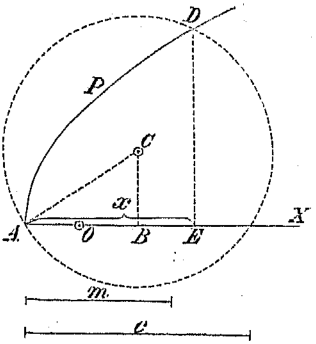
57. Jiný spůsob, jenž slouží k sestrojení kubického výrazu $x^3 = m^2 . c$, rovněž jednoduchý, jest následující.

Učiňme $AB = \frac{c}{2}$ (obr. 100.), $BC \perp AB$, $BC = \frac{m}{2}$, $AO = \frac{AB}{2}$,

---

*) *Úloha Delická*, již starým Řekům známá. Dle pověsti jedné nařídil král *Minos* zdvojnásobení hrobu, jenž pro zemřelého syna jeho vykopán byl a všechny tři rozměry rovné měl. Dle pověsti jiné radila věštkyně, na ostrově *Delos* sídlící, k odvrácení moru v Athénách zuřivšího zdvojnásobiti obětnici Apollovu, krychli to ze zlata. Nejvýtečnější geometrové tehdejší i pozdější doby pokoušeli se o řešení úlohy této, i podařilo se některým, řešiti ji pomocí křivek (*Diokles, Archytas, Pappus* pomocí křivek zvláštních, *Menaichmos* užil průsečíků dvou parabol se společným vrcholem, *Nikomedes* konchoidy), jiní pak (*Plato, Eratosthenes*) vymyslili zvláštní nástroje, jimiž by se délka hrany krychle dvojnásobné sestrojiti dala. Spůsob, jenž v následujícím odstavci 57. vyložen jest, pochází od *Descartesa*, francouzského mathematika z věku 17.

Obr. 100.



a sestrojme parabolu P prostou, t. j. stupně druhého, jež dána jest vrcholem A a ohniskem O.

Protneme-li parabolu P kružnicí, opsanou z C poloměrem CA, v bodu D, a sestrojíme-li $DE \perp AX$, bude $AE = x$. (Důkaz podává geometrie analytická.)

58. Pomocí konsrukce $x^3 = m^2 . c$ lze řešiti i následující úlohy složitější.

Proměniti přímý jehlanec s podstavou čtvercovou v krychli.

Zdvojnásobiti kouli danou.

Proměniti válec neb kužel v kouli.

Sestrojiti krychli, jejíž obsah součtu obsahů dvou krychlí daných se rovná. (Jsou-li x, a, b délky hran krychlí těchto, bude $x^3 = a^3 + b^3$; položíme-li $b^3 = a^2 . m$, pročež $m = \frac{b^3}{a^2}$, následuje $x^3 = a^3 + a^2 . m = a^2 . (a + m)$; sestrojme tudíž pomocnou veličinu $m = \frac{b^3}{a^2}$ dle odst. 12., pak $n = a + m$, a posléze $x^3 = a^2 . n$.)

Dvě koule daných poloměrů proměniti v kouli jedinou.

Úlohy. *1.* Poměr obsahů kychle, přímého hranolu a jehlance (oba s čtvercovou půdicí) znázorniti poměrem délek.

2. Poměr obsahů dvou koulí (různých poloměrů) a kužele znázorniti poměrem délek.

3. Danou krychli proměniti v čtyrboký jehlanec, jenž danou *a)* výšku, *b)* půdici (čtvercovou) míti má.

4. Proměniti součet daných dvou rovnoběžnostěnů pravoúhlých v přímý hranol, jenž čtvercovou půdici a danou výšku míti má.

5. Válec daný proměniti v jiný, jehož délka jest dána.

6. Válec proměniti v kužel, jehož podstava dána jest.

7. Kužel proměniti ve válec určité délky.

8. Proměniti danou kouli v kužel dané výšky.

9. Poměr obsahů koule a kužele znázorniti poměrem dvou délek.

10. Sestrojiti délky úlohami v odst. 47., 48., 49., 50., 52. a 53. žádané a vypočítané.

OBSAH.

Část I.

O křivkách rovinných.

Část II.

Užívání algebry v geometrii.

Omyly.

Str.	Řádek		
17	16	zdola	škrtni a.
21	5	„	místo ellipsy dej ellipsu.
26	2	„	m. úhlopříčny dej úhlopříčny.
28	7	„	m. kruhu dej kruh.
43	3	„	m. této kružnice tečny dej tyto kružnice tečné.

59 v obrazci 64. má míti konchoida v bodu *b* vrchol místo bodu úvratu.

Spisy „Jednotou českých mathematiků v Praze“ vydané.

		Cena pro údy v jednotě	Cena pro neúdy a v knihkupectvích
R. 1870.	*První zpráva jednoty českých mathematiků.* Sestavili ph. c. Mír. Neumann a Karel Zahradník	1 zl. — kr.	1 zl. 20 kr.
„ 1871.	*Druhá zpráva jednoty českých mathematiků.* Sestavili dr. Mír. Neumann a Augustin Pánek	— „ 80 „	1 „ — „
„ 1872.	*Třetí zpráva jednoty českých mathematiků.* Redaktoři dr. Mír. Neumann a Augustin Pánek	— „ 60 „	— „ 80 „
	Dějepis jednoty českých mathematiků. Sestavil ph. c. Fr. Houdek, t. č. jednatel, k slavnosti 10letého trvání mathematického spolku v Praze	— „ 40 „	— „ 50 „
	Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Ročník první o 5 sešitech. Redaktor: Prof. dr. F. J. Studnička	3 „ — „	4 „ — „
R. 1873.	*Mikuláš Koprník.* Na oslavu 400leté památky jeho narození sepsal prof. dr. F. J. Studnička	— „ 40 „	— „ 60 „
	Deskriptivní geometrie v úlohách pro vyšší školy reálné. Sbírka 1000 úloh s návody ku řešení a 40 obrazci na zvláštní tabulce. Sepsal prof. Č. Jarolímek. (Odporučena veleslavnou c. k. zemskou školní radou prof. sborům realních škol a reál. gymnasií co pomocná kniha)	— „ 50 „	— „ 60 „
	Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Ročník druhý o 6 sešitech. Redaktor: prof. dr. F. J. Studnička	4 „ — „	5 „ — „
	Věstník jednoty českých mathematiků. Ročník první o 4 číslech. Redaktor: Jednatel jednoty F. Houdek	— „ 60 „	1 „ — „
R. 1874.	*Úvod do geometrické theorie křivek rovinných.* Sepsal prof. dr. L. Cremona. České, spisovatelem rozmnožené a opravené vydání, uspořádal prof. dr. Emil Weyr	2 „ 50 „	3 „ — „
	Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Ročník třetí o 6 sešitech. Redaktor: Prof. dr. F. J. Studnička	3 „ — „	4 „ — „

Mimo to vyšly co separátní otisky z časopisu:

	Cena
O mírách původních. Od Emanuela Čubra	12 kr.
Poloměr setrvačnosti a centrální ellipsa. Od Em. Čubra	10 „
O prvních deskách logarithmických. Od prof. dra. Fr. Hejzlara . . .	15 „
Nový zrcadlový elektroměr. Od Jos. Herverta	8 „
O vypočítání Neptuna. Od dra. Aug. Seydlera	8 „
Příspěvek k arithmetice národohospodářské. Od dra. F. J. Studničky .	15 „

Údové jednoty mohou tyto spisy obdržeti:

	Cena v jednotě	Cena v knihkupectvích
Baltzer-Pokorný. *Základové mathematiky.* Díl I.	1 zl. 40 kr.	2 zl. — kr.
Dr. J. Durdík. *O pokroku přírodních věd*	1 „ 10 „	1 „ 60 „
Hartmann Š. *O magickém troj- a čtyrčtverci* . .	— „ 10 „	— „ 15 „
Smolík J. *Mathematikové v Čechách*	— „ 20 „	— „ 80 „
Dr. F. J. Studnička. *O determinantech*	— „ 60 „	1 „ — „
— — *O počtu variačním.*	— „ 30 „	— „ 70 „
— — *Úvod do analytické geometrie v prostoru*	1 „ 20 „	2 „ — „
Dr. Emil Weyr a Edvard Weyr. *Základové vyšší geometrie.* Díl I.	— „ 50 „	1 „ — „
Zrzavý Fr. *Theoretische und praktische Anleitung zur Construction der Sonnenuhren*	— „ 10 „	— „ 25 „

Veškeré tyto spisy objednati lze
u jednatelství jednoty českých mathematiků v Praze,
Poštovská ulice 286—I.