ALGEBRA

pro střední školy.

Sepsal prof. **Josef Smolik.**

Druhé, opravené vydání.

V PRAZE.
Nákladem kněhkupectví: I. L. Kober.
1875.

Národní kněhtiskárna: I. L. Kober v Praze.

OBSAH.

Úvod.

Část první.

Část druhá.

Část třetí.

Čásť čtvrtá.

Čásť pátá.

Úvod.

I. Veličiny.

1. Vše, co lze buď skutečně neb v mysli zvětšiti neb zmenšiti, slove *veličina*, na př. čas, prostora, síla, rychlosť, cena a množství zboží atd.

Každou veličinu možná porovnati s čímsi *stejným* a dověděti se tak, kolikrát jest ono stejné v ní obsaženo; tomuto stejnému říkáme *jednosť* čili *míra* veličiny. Na př. veličinu čas lze porovnati s roky, měsíci, dny atd., prostoru s mílí, sáhem, stopou atd., sílu měříme na př. dle setnýře, libry atd. Rok, měsíc, den . . . ., míle, sáh, stopa . . ., setnýř, libra . . . jsou *jednosti* těch kterých veličin.

Z toho pozorujeme, že se rozličné veličiny skládají z rozličných jedností a proto rozeznáváme:

a) *Veličiny stejnorodé,* které se *mohou* měřiti *touže* jedností, jako roky a měsíce, zlaté a krejcary, a

b) *Veličiny různorodé,* které se *nemohou* měřiti *touže* jedností na př. roky a sáhy; setnýře, dny a palce atd.

Z pojmu o veličině plyne, že každou veličinu rozvesti lze libovolně na jakékoli díly čili jednosti, které i vespolek i s celkem jsou stejnorodé. Avšak *ve skutečnosti* nelze u *každé* veličiny takové libovolné rozdělení provesti; a proto rozeznáváme:

c) *Veličiny spojité,* které tvoří souvislý celek, tak že kde jedna čásť přestává, druhá začíná, na př. čas, prostora; a

d) *Veličiny rozpojité,* které se skládají buď ze stejných neb ze stejnorodých částí (jedností) na př. kupa hrachu, peníze a váhy buď stejného neb rozličného druhu atd.

Veličiny spojité lze rozvesti na jednosti libovolné, veličiny rozpojité však jsou už samy o sobě na určité jednosti rozděleny. Ony se zvětšují *poznenáhlým přibýváním* a zmenšují *poznenáhlým ubýváním,* tyto však se zvětšují *přidáváním* a zmenšují *ubíráním* buď stejných neb stejnorodých částí (jedností).

2. Veličiny *stejnorodé jsou si buď rovny,* nebo *nejsou si rovny.* Jsou-li si dvě veličiny stejnorodé rovny, naznačujeme to znaménkem =, jemuž říkáme *rovnitko,* na př.

$$A = B$$

a čteme to: veličina A se rovná veličině B. Úsudku tomu říkáme *rovnice.*

Každá rovnice dělí se rovnitkem na dva díly, totiž díl levý (A) a díl pravý (B), a může se čísti buď od levé ruky k pravé $A = B$, nebo od pravé ruky k levé $B = A$ t. j. každou rovnici lze *obrátiti*, takže pravý díl se stane levým a naopak. Klademe-li tutouž veličinu rovnu samu sobě, říkáme takové rovnici *stejnina* č. *rovnice identická*, na př.

$$A = A.$$

Nejsou-li dvě veličiny vůbec sobě rovny, naznačujeme to znaménkem nerovnosti $\gtrless$ na př.

$$A \gtrless B$$

a čteme: A není rovno čili nerovná se B. V případě tom jest tedy A buď větší neb menší nežli B, což poznačujeme:
$A > B$ t. j. A jest větší nežli B nebo B jest menší nežli A, nebo
$A < B$ t. j. A jest menší nežli B nebo B jest větší nežli A.

II. Čisla.

Porovnáme-li veličinu s její jedností, jest výsledek *číslo.*

Číslo vůbec tedy udává, kolikrát se musí položiti *jednosť*, abychom dostali tu kterou veličinu. Na př. u veličin: pět mil, sedm hodin, tři zlaté, čtyři stromy jsou jednosti: míle, hodina, zlatý, strom, a pět, sedm, tři, čtyři, jsou *čísla.*

U čísel rozeznáváme:

a) *Číslo prosté* čili *bezejmenné*, které udává, kolikrát jest jakás jednosť ve veličině obsažena, a

b) *Číslo pojmenované*, které dostaneme tím, spojíme-li s číslem prostým věc, jejíž počet jednosti naznačuje. V příkladě: krejcar jest ve zlatém obsažen *stokrát*, poněvadž má zlatý *sto krejcarů*, jest číslo *sto* nejprvé bezejmenné, pak pojmenované.

Z toho též patrno, že se číslo vůbec zakládá na jakés jednosti, a sice číslo prosté na př. pět, sedm na prosté jednosti „jedna,“ a číslo pojmenované na př. sto krejcarů na jednosti téhož jména totiž zde „jeden krejcar.“

Za touto příčinou, a proto, poněvadž jednosť u čísla prostého i pojmenovaného není libovolná, nýbrž *určitá*, považují se *čísla vůbec za veličiny rozpojité.*

Porovnáváme-li dvě čísla neb několik čísel vespolek, pozorujeme, že jsou buď:

c) *Čísla stejnojmenná*, mají-li tutouž základní jednosť, na př. tři sáhy a sedm sáhů, aneb

d) *Čísla různojmenná*, nemají-li téže základní jednosti, na př. osm roků a šest liber atd.

A jako se zhusta užívá slova „veličina“ místo „číslo“, kladou se též za jedno slova „stejnorodé“ a „stejnojmenné“ nebo „různorodé“ a „různojmenné“.

III. Zvláštní označení čísel.

a) Číslice indoarabské.

Čísla co veličiny rozpojité zvětšují se přidáváním (I. d.). Poněvadž se tedy k jednosti „jedna“ přidati může opět „jedna,“ k souhrnu „dvě“ opět „jedna“ atd., jest čísel vůbec nekonečný počet. K naznačení všech čísel máme pouze devět *znamének*, jimž říkáme *číslice* (indoarabské) totiž 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ku kterým se přibírá desáté znaménko 0 (nicka).*) Těmito číslicemi mohli bychom však vyjádřiti pouze čísla do devíti čili jak jim říkáme jednosti řádu nulltého. Aby se ale i větší čísla jimi vyjádřiti mohla, byl zaveden a ode všech vzdělaných národů přijat *zákon*, dle kterého deset jednosti řádu nulltého dá *desítku* (10) čili jednost řádu prvního, deset desítek dá *sto* (100) čili jednost řádu druhého, deset set dá *tisíc* (1000) čili jednost řádu třetího atd. Dle téhož zákona kladou se na první místo (od pravé ruky k levé) jednosti řádu nulltého, na druhé místo jednosti řádu prvního, na třetí místo jednosti řádu druhého atd., tak že říkáme jednotlivým místům v témže pořádku: místo jednotek, desítek, set, tisíců, desettisíců atd. Celé té soustavě, která se uvedeným zákonem řídí a na čísle „deset“ zakládá, říkáme *soustava desetinná* čili *dekadická*.

Tak na př. v řadě číslic

785329

jest 9 jednotek, 2 desítky, 3 sta, 5 tisíc, 8 desettisíc a 7 stotisíc.

Abychom danou řadu číslic pohodlně vypověditi mohli, rozdělme ji od pravé ruky k levé na třídy po třech místech, a udělejme za první třídou tečku, jež se vysloví „tisíc,“ za druhou třídou čárku, jež se vysloví „milion,“ za třetí opět tečku, za čtvrtou dvě čárky (bilion) atd. Dle toho rozdělíme řadu

3 672 594 327 takto:

3.672,594.327, a čteme:

3 tisíce, 672 miliony, 594 tisíce, 327 (jednotek). Místo, které se nevypoví, vyplní se nickou, a naopak je-li v řadě číslic nicka, to místo se nevypoví, na př.

4„890.600,750.003

se čte: 4 biliony, 890 tisíc, 600 milionů, 750 tisíc, 3.

Číslice 1, 2, 3, 4 . . . do nekonečna představují *přirozenou řadu čísel*.

Poznamenání. Nejen číslo „deset“ nýbrž každé jiné číslo (kromě 1) tedy 2, 3, 4, 5 . . . . může se považovat za základ, a lze zbudovati pomocí jeho celou soustavu. U *každé* soustavy čísel platí však zákon, že — dokud se týče — 2, 3, 4, 5 . . .

---

*) Číslice tyto byly přinešeny z Indie do Arabie, a odtud v 10. století po Kr. mnichem Gerbertem do Europy a sice nejprvé do Italie.

jedností řádu nulltého dělá jednosť řádu prvního, 2, 3, 4, 5 . . . jedností řádu prvního dá jednosť řádu druhého atd. Soustava, řídící se zákonem, že 2 jednosti řádu nulltého dají jednosť řádu prvního atd., čili soustava, jejíž základ jest číslo 2, jmenuje se *dyadická*, soustava, jejíž základ jest číslo 3, *triadická* a tak podobně *tetradická*, *pentadická*, *hexadická*, *heptadická*, *octadická*, *enneadická*, *hendekadická*, *dodekadická* atd., je-li základ její číslo 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 atd.

Dle vytknutého zákonu psalo by se pomocí soustavy desetinné na př. v soustavě:

číslo:	*dyadické* (základ 2)	*triadické* (základ 3)	*heptadické* (základ 7)	*dodekadické* (základ 12)
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	10	3	3
4	100	11	4	4
5	101	12	5	5
6	110	20	6	6
7	111	21	10	7
8	1000	22	11	8
9	1001	100	12	9
10	1010	101	13	*
11	1011	102	14	**
12	1100	110	15	10
13	1101	111	16	11

Jak se číslo kterékoli soustavy vyjádří číslicemi soustavy desetinné a naopak viz dodatek §. 8.

b) Číslice Římské.

Římských číslic jest sedm, totiž

I. V. X. L. C. D. M.
(1) (5) (10) (50) (100) (500) (1000).

Ostatní čísla naznačují se tím, že se z těchto číslic kladou buď *stejné vedle sebe* nebo *menší za větší*, v obou případech se pak hodnota jejich *sečítá*, aneb se klade *menší číslice před větší*, v kterém případě se hodnota menší číslice vůbec odečítá od hodnoty větší. Na př.

II III XX XXI LVII CLXVI atd.
(2) (3) (20) (21) (57) (166)
IV IX XC atd.
(4) (9) (90)

Pouze před 1000 (M) vypoví se číslice tak jak psána jest, na př.

XM CM atd.
(10000) (100000).

---

* a ** zastupují číslice, které by se pro soustavu dodekadickou teprv určiti musily.

Mimo to však psalo se též buď

CIↃ, CCIↃↃ, CCCIↃↃↃ atd. a vypovídalo:
(1000). (10000) (100000)

anebo se místo M kladla přímka nad číslicí, na př.

$\overline{\mathrm{X}}$ $\overline{\mathrm{C}}$ atd.
(10000) (100000).

IV. Obecné označení čísel.

Mimo číslice indoarabské užívá se k označení čísel vůbec též *písmenek*, a sice obyčejně písmenek malé abecedy, totiž a, b, c, d, . . . x, y, z. Písmenkami a, b, c, d . . . poznačují se kterákoli *čísla známá*, nechť bezejmenná nechť pojmenovaná, a písmenkami u, v, x, y, z, *čísla neznámá*, která se známými určiti mají. Mimo písmenky malé abecedy užívá se též

písmenek velké abecedy	A,	B,	C,	D,	. . . .
„ řecké „	α,	β,	γ,	δ,	. . . .
„ čárkovaných	a'	a''	a'''	a''''	. . . .
„ s ukazovatelem	a_1	a_2	a_3	a_4	. . . .
a „ se dvěma ukazovateli	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	. . . .
	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	. . . .

Písmenkám říkáme *čísla obecná* na rozdíl od *čísel zvláštních*, která naznačujeme číslicemi indoarabskými.

V. Porovnání číslic a písmenek.

a) Každá číslice má dvojí hodnotu, totiž *neměnitelnou hodnotu podoby a měnitelnou hodnotu místa*. Na př. 5 znamená vždy a všude 5 jedností, a teprv místo, na kterém 5 v řadě číslic stojí, určuje řád těchto jedností. V příkladě 555 znamená 5 (od pravé ruky k levé) jednosti řádu nulltého, 5 na druhém místě jednosti řádu prvního čili 50, a 5 na třetím místě jednosti řádu druhého čili 500.

b) Každá písmenka má vůbec libovolnou hodnotu podoby, na př. a může znamenati jakékoli číslo neb jakoukoli veličinu buď bezejmennou neb pojmenovanou, z čehož už plyne, že nemůže míti žádné hodnoty místné čili že se písmenky soustavou desetinnou neřídí. Ačkoliv každá písmenka vůbec libovolnou hodnotu míti může, nesmí nicméně v *témže* počtě znamenati *dvě věci rozličné*, t. j. přichází-li v některém počtu na př. a a dáme-li tomu, že hodnota její jest na př. 15 zl., musí *každé a* v *témže* počtu znamenati 15 zl. A kdyby mimo a tamtéž přicházelo b, může opět b znamenati cokoli jiného jenom ne 15 zl., kterouž hodnotu má už a. Každá písmenka vyznačuje tedy v témže počtu něco jiného, a proto se *rozličné písmenky v témže počtu považují za různorodé — různojmenné*, a kdyby a tolik mělo platiti co b, musili bychom to prvé vyjádřiti rovnicí $a = b$.

VI. Arithmetika, algebra a mathematika.

Hledáme-li ze známých čísel nechť zvláštních nechť obecných (IV) číslo neznámé určitými pravidly — *počítáme*. Při počítání spojují se buď čísla buď písmenky, nebo obé dohromady (jak dále uvidíme) zvláštními znaménky početnými.

Náuka, která nás učí jak se *čísla zvláštní* spojují, a zvláštními proměnami dle určitých pravidel ze známých čísel neznámé určuje — slove *arithmetika zvláštní* na rozdíl *arithmetiky vyšší* čili *náuky o číslech*, která *vlastnosti* čísel celých vyhledává. Náuka, která se zanáší podobným spojováním *písmenek*, a pravidelným jich proměňováním určuje neznámé ze známých, nazývá se *arithmetika obecní* čili *algebra*. Přibéřeme-li k arithmetice a k algebře ještě měřictví, říkáme všem těm náukám dohromady *mathematika*.

VII. Věty mathematické.

V mathematice jsou veškeré věty buď *výměry* (definice), buď *zásady samozřejmé* (axiomata), buď *poučky* (theoremata).

a) *Výměr* podává nejdůležitější známky jakéhosi pojmu, na př. co jest sečítání, odčítání, co činitel, dělitel atd.

b) *Zásada samozřejmá* nevyžaduje žádného dalšího objasnění. Takové zásady jsou:

1. Každá veličina se rovná sama sobě, na př. $a = a$, $b = b$ atd.

2. Veličiny sobě rovné mohou se zastupovati, na př. je-li $a = b$, můžeme v témže počtu klásti všude a místo b nebo naopak.

3. Jsou-li dvě veličiny rovny veličině třetí, jsou rovny i vespolek, na př. je-li

$$\begin{array}{rl} & a = b \\ \text{a} & \underline{c = b}, \text{ jest} \\ & a = c. \end{array}$$

4. Je-li jakás veličina větší (menší) nežli druhá, a tato opět větší (menší) nežli třetí, jest první větší (menší) nežli třetí, na př.
je-li $a > b$ a $b > c$, jest i $a > c$, nebo
je-li $b < a$ a $a < c$, jest i $b < c$.

Jiné zásady samozřejmé poznáme při jednotlivých druzích početních.

c) *Poučka* vyvádí z udaných podmínek (hypothesí) jakousi pravdu, kterou spolu odůvodňuje (dokazuje). Odůvodnění čili důkaz vede se buď *přímo* (důkaz přímý, demonstrace), pakli se tvrzení jakés na základě a pomocí buď zásad samozřejmých buď vět za pravé uznaných, vyvodí, nebo *nepřímo* (ad absurdum), pakli se ukáže, že by opak tvrzení byl proti daným podmínkám.

Čásť první.

I. Sečítání.

§. 1.

1. *Sečítati jest, z daných čísel hledati jiné, které má tolik jedností jako všechna daná dohromady.* Každému z daných čísel říkáme *sčítanec* (addend) a výsledku, jenž se rovná všem sčítancům dohromady, *součet.*

Znaménko sečítání jest + (více, plus), tak že píšeme

$$a + b$$

a čteme: a více b.

2. *Sečítati lze pouze čísla stejnojmenná,* tedy na př. zlaté a zlaté, sáhy a sáhy, jednotky a jednotky, desítky a desítky, a a a, b a b atd. Součet a sčítanci jsou téhož jména.

Různojmenná čísla sečítati nelze, nýbrž se kladou se znaménkem + vedle sebe. Na př.

$$a + b = a + b.$$

Neboť $a + b$ znamená, že se k jednostem čísla a mají přidati jednosti čísla b. Poněvadž však a může vyjádřovati libovolný počet kterýchkoli jedností a b (mimo to co a) může býti též cokoli (V), můžeme součet jejich pouze naznačiti.

Možná-li různojmenná čísla převesti na stejnojmenná, na př. zlaté a krejcary, buď na zlaté neb na krejcary, sáhy a stopy buď na sáhy neb na stopy, učiní se tak, a pak se sčítá.

Často se vyjádřuje součet dvou neb několika čísel obecných jedinou písmenkou za tou příčinou, aby se všichni sčítanci psáti nemusili, na př.

$$a + b + c + d = s.$$

3. *Sčítanci, v kterémkoli pořádku sečítáni, dávají tentýž součet.* Neboť se součet nemůže změniti, dokud zůstávají sčítanci titíž, je-li $a + b = s$, zůstane součet ten tak dlouho $= s$, dokud se ani a ani b nezměnilo, proto jest

$$a + b = b + a = s,$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a = s.$$

4. *Rovné k rovnému (připočteno) dává rovné,* na př.

$$\begin{array}{c} a = b \\ c = c \\ \hline a + c = b + c, \end{array} \quad \begin{array}{c} a = b \\ m = n \\ \hline a + m = b + n, \end{array} \quad \begin{array}{c} a = b \\ c + d = e + f \\ \hline a + c + d = b + e + f \end{array} \text{ atd.}$$

Z této samozřejmé zásady patrno, že k jakékoli rovnici ($a = b$) lze připočísti rovnici jinou buď jednostejnou ($c = c$) buď jakoukoli ($m = n$, $e + d = e + f$).

II. Násobení.

§. 2.

1. *Násobiti jest, ze dvou daných čísel položiti jedno tolikrát co sčítance, kolik jedností drží druhé.* Obě čísla spojují se znaménkem . nebo × (krát); jednomu z nich, které se položiti má co sčítanec, říkáme *násobenec*, a druhému, které naznačuje, kolikrát se násobenec sám k sobě připočísti má, *násobitel.* Výsledku říká se *součin*, na př.

$$\begin{aligned} a \,.\, 2 &= a + a = 2a, \\ a \,.\, 3 &= a + a + a = 3a, \\ a \,.\, 4 &= a + a + a + a = 4a \text{ atd.} \end{aligned}$$

a jest *násobenec*, 2, 3, 4 . . . jsou *násobitelé*, $2a$, $3a$, $4a$ . . . jsou *součiny*. Násobenci a násobiteli říkáme vůbec *činitelé*.

Z toho patrno, že násobení vzniklo ze sečítání stejných sčítanců, jeden z těchto položil se za násobence a číslo, kolikrát se onen sčítanec sám k sobě měl přičísti, za násobitele. Z té příčiny jest *násobitel vždy číslo prosté*, které nemá nižádného pojmenování; součin má jméno násobence. Číslům zvláštním, které stojí před písmenkami na př. $2a$, $3a$ atd., říkáme *součinitelé*, a tito dle předešlého ukazují, kolikrát se má písmenka sama k sobě připočísti.

Součinitel 1 se nikdy nepíše, za kterouž příčinou si u každé písmenky, která jiného součinitele nemá, 1 co takového mysliti lze, tedy

$$a \times 1 = a, \quad b \times 1 = b \text{ atd.}$$

Z pojmu o násobení plyne i $a \times 0 = 0$, poněvadž a nebylo nikdy co sčítanec.

2. Poněvadž

$$\begin{aligned} a \,.\, 2 &= a + a \\ a \,.\, 3 &= a + a + a \text{ bude i} \\ a \,.\, b &= a + a + a + a + a + \ldots b\text{krát.} \end{aligned}$$

V případě tom, kde činitelé jsou vesměs písmenky, klade se v součinu násobenec s vynecháním znaménka vedle násobitele, tedy

$$a \cdot b = ab,$$
$$m \cdot n \cdot p = mn \cdot p = mnp \text{ atd.}$$

3. *Činitelé v kterémkoli pořádku násobení dávají tentýž součin.* Neboť, je-li na př.

$$a \cdot b = m$$

zůstane součin ten tak dlouho $= m$, dokud se ani a ani b nezmění, poněvadž jest vše jedno, jestli a bylo sčítancem $b$krát, nebo b bylo sčítancem $a$krát. Z té příčiny jest

$a \cdot b = b \cdot a = ab = ba,$
$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a = \ldots = abc$
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,\quad a \cdot b \cdot 0 = ab \cdot 0 = 0;$
$a \cdot b \cdot c = ab \cdot c = ac \cdot b = ba \cdot c = ca \cdot b =$ atd., t. j. *má-li se součin (ab, ba, ca . . .) násobiti jakýmsi číslem, možná tímto násobiti kteréhokoli činitele.*

4. Mají-li při násobení písmenky součinitele, násobí se nejprvé tito, a za jejich součinem kladou se písmenky v abecedním pořádku. Je-li několik činitelů, násobí se první druhým, součin ten třetím atd. Na př.

$2a \cdot 3b = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 6ab,$
$5m \cdot 7n = 5 \cdot 7 \cdot m \cdot n = 35mn,$
$3m \cdot 4n \cdot 5p = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot m \cdot n \cdot p = 60mnp$ atd.

Dodatek. Je-li násobenec pojmenován, má — jak už pověděno — součin jeho jméno. Stane-li se však takový (pojmenovaný) násobenec násobitelem, a naopak (bezejmenný) násobitel násobencem, nemění se součin nikterak, pakli původní násobenec postoupí mimo své místo i své jméno původnímu násobiteli, na př.

a zl. × b = ab zl.
b zl. × a = ab zl.

III. Umocňování.

§. 3.

1. *Umocňovati jest, dané číslo tolikrát samo sebou násobiti, kolik jednosti jiné číslo dané drží.* Prvnímu číslu říkáme *mocněnec* (kořen, dignand), druhému, které píšeme k prvnímu v pravo nahoru, *mocnitel*, a oběma dohromady *mocnina*; na př.

$a^2 = a \cdot a$, t. j. a na mocninu stupně druhého čili a na druhou (mocninu)
$a^3 = a \cdot a \cdot a$, t. j. a na mocninu stupně třetího čili a na třetí (mocninu) atd.
$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$
. . . .
$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ . . . . . (m-krát.)

a^2, a^3, a^4 . . . a^m jsou *mocniny*, a jest *mocněnec*, 2, 3, 4 . . . m jsou *mocnitelé* a celému výkonu říkáme *umocňování* (zmocňování). Mimo to považuje se každé číslo samo o sobě za mocninu stupně prvního (za veličinu jednoho rozměru), na př. $a = a^1$, $m = m^1$ atd., mocnině stupně *druhého* (a^2) říkáme též *čtverec* (veličina dvou rozměrů), mocnině stupně *třetího* (a^3) *kostka* (veličina tří rozměrů) a stupně *čtvrtého* (a^4) *dvojčtverec* (veličina čtyř rozměrů).

Z toho patrno, že umocňování není leč násobení *týchže* činitelů, jednomu z těchto říkáme mocněnec, a číslu, které udává, kolikrát se mocněnec sám sebou násobiti má, mocnitel.

2. Mocniny, jichž mocnitelé jsou si buď rovni, aneb dávají tentýž součet, jmenujeme *stejnoměrné*, na př.

a^2 a b^2, ab a cd, $3a^2$ a $5mn$ jsou mocniny dvou rozměrů,
a^3 a b^3, a^2b a cde, $2ab^2$ a c^3 „ „ tří „ atd.

Mocniny stejných mocněnců a stejných mocnitelů nazýváme *stejnorodé* čili *stejnojmenné*, na př. a^3 a $5a^3$, $4m^2$ a $7m^2$, $2a^2b$ a $7a^2b$, $5m^3n^4$ a m^3n^4, $2a^mb^nc^p$ a $3a^mb^nc^p$ atd.

3. Mocniny, mají-li se *sečítati*, musejí býti stejnorodé. V případě tom *sečtou se součinitelé a stejná mocnina se k nim jednou připíše*, na př.

$$a + a = 2a$$
$$3b + 4b = 7b$$
$$a^2 + 3a^2 = 4a^2$$
$$3m^3 + 5m^3 + m^3 = 9m^3$$
$$4a^2b + 5a^2b + 11a^2b = 20a^2b$$
$$2a^m + 7a^m = 9a^m$$
$$4m^pn^q + 3m^pn^q + 5m^pn^q = 12m^pn^q \text{ atd.}$$

Různorodé mocniny sečísti nelze, nýbrž se kladou se znaménkem sečítání vedle sebe, na př.

$$2a^2 + 5b^3 = 2a^2 + 5b^3$$
$$a + a^2 = a + a^2$$
$$5b^3 + 5c^3 = 5b^3 + 5c^3$$
$$4a^m + 3b^m = 4a^m + 3b^m \text{ atd.}$$

4. *Mocniny stejných mocněnců se násobí, napíše-li se mocněnec jednou, a dá-li se k němu součet mocnitelů všech činitelů za mocnitele.* Součinitelé mocnin se násobí jako čísla vůbec, na př.

$$a^2 . a^3 = a^{2+3} = a^5, \text{ neboť}$$
$$a^2 . a^3 = a . a . a . a . a = a^5.$$

Podobně
$$2a^3 . 4a^7 = 8a^{10}$$
$$3m^2 . 4m^3 . 5m = 60m^6$$
$$a^m . a = a^{m+1}$$
$$3a^2 . 5a^m = 15a^{2+m}$$
$$7m^r . 2m^s . 5m = 70m^{r+s+1} \text{ atd.}$$

Mocniny rozličných mocněnců se násobí, kladou-li se písmenky za součinem součinitelů v abecedním pořádku vedle sebe, na př.

$$6a^3 . 5b^4 = 30a^3b^4$$
$$4a^4 . 2b^3 . 7c = 56a^4b^3c$$
$$2a^4b^2 . 3a^3c^4 = 6a^7b^2c^4$$
$$7a^pb^qc . 3a^rb^sc^t = 21a^{p+r}b^{q+s}c^{1+t} \text{ atd.}$$

5. Naopak lze *každou mocninu* (vyjma mocninu prvního stupně) *rozvesti na dvě neb na více mocnin téhož mocněnce, co činitele,* na př.

$$a^2 = a . a$$
$$a^5 = a^4 . a = a^3 . a^2 = a^2 . a^2 . a = a . a . a^3$$
$$a^{m+1} = a^m . a$$
$$a^{p+q} = a^p . a^q$$
$$a^{p+q+r+4} = a^p . a^q . a^r . a^4 \text{ atd.}$$

6. *Součin se umocňuje, povýší-li se každý jeho činitel na danou mocninu.* V případě takovém se celý součin uzávorkuje a mocnitel se napíše mimo závorku v pravo, na př.

$$(2a)^3 = 2a . 2a . 2a = 2^3 . a^3 = 8a^3$$
$$(3ab)^2 = 3ab . 3ab = 3^2 . a^2 . b^2 = 9a^2b^2$$
$$(5mn)^2 = 25m^2n^2$$
$$(3xy)^m = 3^mx^my^m \text{ atd.}$$

Příklady.

1. Sečtěte: 1) $a^4 + a^4$. 2) $3a^2 + 7a^2$.
3) $5a^3 + 4a^3 + a^3$. 4) $9a^2b^3 + 4a^2b^3$.
5) $12ab^2 + 15ab^2 + ab^2$.
6) $12a^2b^3c^4 + 15a^2b^3c^4 + 17a^2b^3c^4 + 20a^2b^3c^4$.
7) $a^5 + 4a^5 + 5a^3 + 7a$.
8) $9a^2b^4 + 4ab^3 + 8a^4b + a^3b$.
9) $a^m + a^m$. 10) $3c^n + 7c^n + 12c^n$.
11) $8a^mb^n + 2a^mb^n$. 12) $12m^pn^q + 14m^pn^q + 10m^pn^q$.
13) $25ab^rc^s + 2ab^rc^s + 13ab^rc^s + ab^rc^s$.
14) $m^n + n^m$. 15) $a^mb^n + a^mb^n + a^nb^m + a^nb^m$.

2. Násobte: 1) $m . m$. 2) $3m . 7m$.
3) $5a^2 . 3a^4 . 2a^7$. 4) $3a^3b^2 . 4a^2b^3$.
5) $2m^5n^6 . 3m^2n^7 . 3mn$.
6) $5ab^3c^4 . 2a^4bc^3 . 7a^3b^4c . 2a^3b^2c^7$.
7) $3m^2n^3p^4 . 4n^2p^5 . 3m^2p^3 . 5m^3n^6$.
8) $m^n . m$. 9) $a^3 . a^3$. 10) $a^m . a^m$.
11) $5a^m . 3a^n . 4a^p$.
12) $7a^mb^n . 2ab^m . 3a^nb . 10a^nb^m$.
13) $4a^mbc^nd . 3ab^mc^nd$.
14) $a^mbc^nd^p . 3ab^mc^nd . 5a^pbc^md^m$.

3. Umocněte: 1) $(4a)^2$. 2) $(5ab)^2$. 3) $(2mnp)^4$.
4) $(ab)^m$. 5) $(3mnp)^r$. 6) $(10abcd)^n$.

IV. Odčítání.

§. 4.

1. *Odčítati jest, z daného součtu dvou sčítanců a jedním z těchto určiti druhého.* Známému onomu součtu říkáme *menšenec*, známému sčítanci, kterého odečítáme, *menšitel*, a sčítanci druhému, kterého hledáme, *rozdíl* nebo *zbytek*.*) Znaménko odčítání čili *menšitko* jest — (méně, minus) na př.

$a - b = d$ se čte a méně b nebo b od a se rovná d,

a jest *menšenec*, b *menšitel* a d *rozdíl* nebo *zbytek*, nebo a jest známý součet, b jest známý sčítanec a d jest druhý sčítanec hledaný. Poněvadž se součet rovná všem sčítancům dohromady (§. 1. 1), *jest menšenec roven menšiteli více zbytku*, totiž

$$a = b + d.$$

2. *Odečítati lze pouze čísla stejnojmenná.* Zbytek, menšenec a menšitel jsou v případě tom téhož jména, čili mají tytéž písmenky (mocniny). Součinitelé u písmenek se odečítají jako čísla vůbec, na př.

$$3a - 2a = a$$
$$5a^2 - 3a^2 = 2a^2$$
$$7a^2b^3 - 4a^2b^3 = 3a^2b^3 \text{ atd.}$$

Různojmenná čísla odčítati nelze, nýbrž se napíšou buď ještě jednou bez proměny vedle sebe, nebo se rozdíl jejich pro krátkost vyjádří jedinou písmenkou, na př.

$$a - b = a - b = d$$
$$8a^2b^3 - 3a^3b^2 = 8a^2b^3 - 3a^3b^2 = d \text{ atd.}$$

3. Z rovnice

$$a - b = d$$

plyne (dle 1) $a = b + d = d + b$ (dle §. 1, 3).

Porovnáme-li rovnice tyto, pozorujeme, že v rovnici

$$a - b = d$$

má b před sebou znaménko —, a v druhé rovnici

$$a = d + b$$

že má totéž b před sebou znaménko +. Nazveme-li znaménka + a — (sečítání od odčítání) *opáčná*, učí nás uvedené dvě rovnice, že členy jednoho dílu rovnice, které mají buď + nebo —, přenášeti lze do druhého dílu se znaménkem opáčným (— nebo +). Mimo to pozorujeme z rovnice druhé

$$a = b + d = d + b$$

---

*) *Rozdíl* jest výsledek *porovnání* dvou čísel na př. o kolik jest 7 větší nežli 4? a *zbytek* jest to, co nám zůstane čili zbude, *odebeřeme-li* jednosti čísla jednoho od jedností čísla druhého na př. odebeřeme-li od 8 jedností 3, zbude 5 (jedností).

že před b jednou není žádného znaménka, a po druhé, že totéž b má znaménko $+$, a podobně, že jednou jest před d znaménko $+$, a po druhé, že totéž d žádného znaménka nemá, a přece jsou výrazy ty sobě rovny. Z toho se odvozuje, že si před každou písmenkou, která stojí buď na počátku neb po rovnítku, a která žádného znaménka nemá, mysliti můžeme znaménko $+$. Proto na př.

$$\begin{aligned} s &= m + n \\ s - m &= n \text{ nebo} \\ s - n &= m. \end{aligned}$$

Dodatek. Každému číslu samému o sobě, nebo i několika číslům v součin spojeným říkáme *výraz jednoduchý* čili *jednočlen* (monom) na př. a, $3m$, $5abc$, $4a^2b^3c$ atd. Několika číslům spojeným znaménkem $+$ neb $-$ říkáme *výraz složitý*, a sice *dvojčlen* (binom), jsou-li *dvě*, *trojčlen* (trinom) jsou-li *tři* čísla atd., *mnohočlen* (polynom), je-li více čísel spojených znaménky $+$ neb $-$. Dle toho jsou:

$a - b$, $2a + 3b$, $9a^2b^3 - 3a^3b^4$ atd. dvojčleny,
$a - b + c$, $3a^2 + 4a^2b^3 - 5c^3$, atd. trojčleny,
$a + b - c + d - e$, $4m^4n - 5m^3 + 4m^2n^3 - 7mn^5$ atd. vícečleny.

Vztahuje-li se některé početní znaménko na celý výraz složitý, musí se tento uzávorkovati, pouze v případě tom, když se výraz složitý k jinému připočísti má, není k naznačení toho zapotřebí žádných závorek, neboť na př.

$$a + (b + c) = s$$

znamená, že se má nejprvé sečísti $b + c$, a součet těchto že se má přidati k číslu a. Avšak součet s by se nikterak nezměnil, kdybychom k a přidali nejprvé b, (c), a k součtu $a + b$, $(a + c)$, opět c, (b), takže

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b = a + b + c = s \quad (\text{§. } 1, 3).$$

Výrazu složitému říkáme *spořádaný*, jsou-li v něm mocniny téhož mocněnce srovnány buď sestupně nebo vzestupně, na př. $ax^4 + bx^3 - cx^2 - dx + e$, nebo $1 + a - a^2 - a^3 + a^4 - a^5$ atd.

4. Z rovnice nebo z rovnice

$$\begin{array}{lll} a - (b + c) = d & a - (b - c) = d & \text{plyne (dle 1.)} \\ a = b + c + d & a = b - c + d & \text{a (dle 3.)} \\ a - b = c + d & a - b = - c + d & \text{nebo i} \\ a - b - c = d & a - b + c = d. & \end{array}$$

Porovnáme-li z těchto rovnic vždy první s poslední, vidíme, že se

$$a - (b + c) = a - b - c \quad \text{a} \quad a - (b - c) = a - b + c$$

t. j. je-li menšitko před závorkou, a vypustí-li se tato, musejí se tamtéž znaménka všech čísel proměniti v *opáčná*, t. j. $+$ v $-$ a $-$ v $+$. Pravidlo toto vyjádřuje se též takto:

Složitý výraz se odčítá, promění-li se znaménka všech jeho členů v opáčná, a *připočte-li* se pak k menšenci; neboť proměníme-li rovnici

$$\begin{array}{l} a \mp \underline{(b} \;\; \underline{\pm} \;\; c) = d \text{ v tuto} \\ a + (-\,b - c) = d \text{ čili (dle dodatku u 3)} \\ a - b - c = d\text{; patrno opět, že se} \\ a - (b + c) = a - b - c \text{ jako prvé.} \end{array}$$

Dle toho tedy

$$\begin{array}{l} 2a \mp (\underline{4b} \;\; \underline{\pm} \;\; 5c \mp 7e) = d \text{ dá} \\ 2a - 4b - 5c + 7e = d \text{ atd.} \end{array}$$

5. *Rovné od rovného dává rovné*, na př.

$$\begin{array}{c} a = b \\ m = m \\ \hline a - m = b - m, \end{array} \qquad \begin{array}{c} a = b \\ m = n \\ \hline a - m = b - n, \end{array} \qquad \begin{array}{c} a = b \\ c + d = e + f \\ \hline a - (c + d) = b - (e + f) \end{array} \text{ atd.}$$

Z této zásady samozřejmé patrno, že od jakékoli rovnice odečísti lze jakoukoli rovnici jinou.

6. Porovnáme-li *menšence s menšitelem*, jest buď
a) *menšenec roven menšiteli*, nebo
b) *menšenec jest větší menšitele*, aneb
c) *menšenec jest menší menšitele.*

a) Je-li *menšenec roven menšiteli*, není mezi oběma žádného rozdílu, t. j.

$$a - a = 0.$$

b) Je-li *menšenec větší menšitele*, můžeme si onoho rozvesti na dva sčítance, z nichž jeden se rovná menšiteli, a pak odečítati. Je-li totiž v příkladě

$a - b \quad a > b$, položme $a = b + m$, a bude
$a - b = b + m - b = m$.

c). Je-li *menšenec menší menšitele*, můžeme si tohoto rozvesti na dva sčítance, z nichž jeden se rovná menšenci, a pak odečítati. Je-li tedy v příkladě

$a - b \quad a < b$, položme $b = a + m$, a bude
$a - b = a - (a + m) = a - a - m = -m$.

V případě tom rovná se zbytek číslu, které vyjádřuje, kolik jednosti se menšenci do menšitele *nedostává*. Číslo toto má znaménko menšitele (—), a říká se mu *číslo záporné* (negativní) co opak čísla, poznačeného znaménkem sečítání +, jemuž se říká *číslo kladné* (positivní).

Položíme-li nicku (0) na počátek řady čísel vůbec, nazýváme veškerá čísla, která jsou větší nežli nicka kladná tedy 0, 1, 2, 3, 4, 5. . . *m*. Rozšíříme-li tuto řadu přirozených čísel též pod nicku píšeme —*m* . . . —5, —4, —3, —2, —1, 0, a sestavíme-li obě řady, dostaneme

$$-m \ldots -5, \; -4, \; -3, \; -2, \; -1, \; 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5 \; . \; . \; . \; m$$
$$(\text{místo } 0, \; +1, \; +2, \; +3 \; . \; . \; . \;).$$

Řadě této rozumíme tak, že veškerá čísla v pravo od nicky naznačují přebytek čili čísla kladná, která jsou nazkrz o udaný počet jedností větší nežli nicka, a veškerá čísla v levo od nicky že naznačují nedostatek (schodek) čili čísla záporná, která jsou o udaný počet jedností menší nežli nicka. A jako si myslíme číslo kladné co soubor týchže jedností kladných $(+1)$, tak si myslíme číslo záporné co soubor týchže jedností záporných (-1).

V uvedeném příkladě $a - b = -m$ určíme tedy rozdíl $(-m)$, najdeme-li v řadě čísel, v levo od nicky, číslo $(-m)$, které se menšenci a do menšitele b nedostává. Čísla záporná musejí míti vždy znaménko —, naproti tomu můžeme každé číslo (3), které před sebou žádného znaménka nemá, považovati za kladné. Má-li některé číslo obě znaménka, na př. $\pm a$, naznačuje se tím, že dle potřeby může se a považovati buď za kladné, buď za záporné.

7. Poněvadž na př.

$$\begin{aligned} 8 - 6 &= 2 \\ 8 - 7 &= 1 \\ 8 - 8 &= 0 \\ 8 - 9 &= -1 \\ 8 - 10 &= -2 \text{ atd.} \end{aligned}$$

jest rozdíl při stejném menšenci tím menší, čím větší jest menšitel, t. j. rozdíl $\ldots 2 > 1 > 0 > -1 > -2 \ldots$
z čehož patrno, že *hodnota čísel kladných* jest tím *větší*, čím *větší* číslo samé, avšak *hodnota čísel záporných* že jest tím *menší* čím *větší* číslo.

8. Číslům buď naskrz kladným neb naskrz záporným říkáme *stejně poznačená*, na př. $a + b + c + d + \ldots$ nebo $-a - b - c - d \ldots$ Číslům kladným a záporným dohromady říkáme *čísla protivná*, a takovými vyjádřuje se na př. jmění a dluh, zisk a ztráta, stoupání a klesání, přítažlivosť a odpudivosť atd. A sice jmění, zisk, stoupání, přítažlivosť atp., naznačujeme jakož veličiny kladné znaménkem $+$, dluhy, ztrátu, klesání, odpudivosť atp., jakož veličiny záporné, znaménkem —. Kdo má a zlatých jmění a b zlatých dluhu, vyjádří své jmění vůbec výrazem $a\text{ zl.} - b\text{ zl.}$ Je-li jeho aktivní jmění větší nežli dluh (jmění passivní), zůstane mu ještě čistého jmění, t. j. je-li při

$a\text{ zl.} - b\text{ zl.}$ $a > b$ a spolu na př. $a = b + m$, bude míti
$a\text{ zl.} - b\text{ zl.} = b\text{ zl.} + m\text{ zl.} - b\text{ zl.} = m\text{ zl.}$ jmění čistého čili $+m\text{ zl.}$

Kdyby jeho aktiva rovnala se passivám, bylo by při $a = b$

$$a\text{ zl.} - b\text{ zl.} = a\text{ zl.} - a\text{ zl.} = 0.$$

A kdyby měl dluhů více nežli jmění, tedy $a < b$, $b = a + m$, měl by vůbec

$$a\text{ zl.} - b\text{ zl.} = a\text{ zl.} - (a\text{ zl.} + m\text{ zl.}) = a\text{ zl.} - a\text{ zl.} - m\text{ zl.} = -m\text{ zl.}$$

t. j. m zl. dluhů.

Podobně kdyby se pohyboval bod s určitého místa a stop v pravo $(+a)$, a s místa, kterého byl konečně došel, b stop v levo $(-b)$, nalezal by se v okamžení, kdy by se přestal pohybovati, buď

$(a-b)$ stop v *pravo*, **při** $a > b$, **buď**
$(a-b)$ stop v levo, **při** $a < b$, **nebo**

by se nalezal zase na místě, s **kterého** vyšel, **čili** by byl

$a - b = 0$ stop, při $a = b$.

1. *Dodatek:* Jako se číslo **kladné** zvětší, **přidáme**-li k **němu** jiné číslo kladné stejnojmenné, **tak** se i zvětší **číslo** záporné, **přidá**-li se k němu jiné záporné **téhož** jména, **na** př. $a + a = 2a$, $-a - a = -2a$, $-3ab - 7ab - 5ab = -15ab$ **atd.** Z té **příčiny** říkáme, že se stejnojmenná čísla **buď** naskrz **kladná** neb **naskrz** záporná rozmnožují.

2. *Dodatek.* Snášíme-li *protivná* čísla stejnojmenná v **jediný** výraz — *snímáme.* U dvou takových čísel odebéře se menší **sou**činitel od většího, k zbytku se **připíše** jednou stejná písmenka (písmenky, mocniny), a výrazu **tomu** se předloží znaménko **čísla** většího. Je-li stejnojmenných čísel protivných **několik**, sečtou se nejprvé veškerá čísla stejnojmenná stejných znamének, a **konečné** dva výrazy se sejmou, na př.

$$6a - 5a = a.$$
$$7ab - 3ab = 4ab.$$
$$5a^2 - 7a^2 = -2a^2.$$
$$3m^2n^3 - 8m^2n^3 = -5m^2n^3.$$
$$5a^2 - 4a^2 - 7a^2 + 8a^2 =$$
$$5a^2 + 8a^2 - 4a^2 - 7a^2 = 13a^2 - 11a^2 = 2a^2.$$
$$-8m^2n^3 - 7m^2n^3 + 4m^2n^3 - m^2n^3 + 10m^2n^3 =$$
$$-8m^2n^3 - 7m^2n^3 - m^2n^3 + 4m^2n^3 + 10m^2n^3 =$$
$$-16m^2n^3 + 14m^2n^3 = -2m^2n^3.$$
$$7a^m - 5a^m - 12a^m + a^m - 3a^m =$$
$$7a^m + a^m - 5a^m - 12a^m - 3a^m = 8a^m - 20a^m = -12a^m.$$

Příklady.

Sejmete: 1) $4a - 3a$. 2) $5ab - 7ab$. 3) $5a^2 - a^2$.
4) $abc - 3abc$. 5) $7mn - 10mn$. 6) $12m^2 - 7m^2$.
7) $15xyz - 9xyz$. 8) $8a - 7a + 4a - 5a$.
9) $12ab - 13ab + 25ab + ab - 24ab$.
10) $13m^2 - 15m^2 - 2m^2 + 10m^2 + 2m^2$.
11) $9y^3 + 7y^3 - 9y^3 + 7y^3$.
12) $4ab^2 + 33ab^2 - 45ab^2 - 3ab^2 + 17ab^2 + 2ab^2$.
13) $26ab^2c + 37ab^2c - 13ab^2c + ab^2c - 54ab^2c + 47ab^2c - 9ab^2c$.
14) $-52pq + 13pq - 17pq + 2pq + 47pq - 13pq - pq$.
15) $64p^2q^2 - 72 + p^2q^2 + 43 - 23p^2q^2 - 23p^2q^2$.

V. Sečítání a odčítání vícečlenů.

§. 5.

1. Má-li se víceělen připočísti buď k jedno- neb víceělenu, vypustí se závorka, sečtou se veškeří členové stejnojmenní týchže znamének, a protivní stejnojmenní se sejmou; členy různojmenné napíšeme k součtu bez proměny s jejich znaménky, na př.

$a + (a - b) = a + a - b = 2a - b$
$a + b + (- a + b) = a + b - a + b = a - a + b + b = 2b.$
$a^2 + b^3 + (2a^2 - 3b^3) = a^2 + b^3 + 2a^2 - 3b^3 = 3a^2 - 2b^3$
$ab - ac - cd + (- ab - ac + cd) = ab - ab - ac - ac - cd + cd$
$= - 2ac.$
$- 7a^3b^2 - 2a^3b^4 + (5a^3b^4 - 8a^3b^2)$
$= - 7a^3b^2 - 8a^3b^2 - 2a^3b^4 + 5a^3b^4 = - 15a^3b^2 + 3a^3b^4.$
$8x^my^n - 7x^ny^m + (- 6x^ny^m + 12x^my^n) + (- 7x^my^n + 5x^ny^m) =$
$8x^my^n + 12x^my^n - 7x^my^n - 7x^ny^m - 6x^ny^m + 5x^ny^m =$
$20x^my^n - 7x^my^n - 13x^ny^m + 5x^ny^m =$
$13x^my^n - 8x^ny^m.$

2. Má-li se víceělen *odečísti* od jedno- nebo víceělenu, promění se v něm všechna znaménka v opáčná, a připočte se k menšenci (§. 4. 4), na př.

$a + b - c - (a - b + c) =$
$a + b - c + (- a + b - c) =$
$a - a + b + b - c - c = 2b - 2c.$
$12m + 7n \underset{+}{-} (\underset{-}{5m} \underset{-}{+} 4n) =$
$12m - 5m + 7n - 4n = 7m + 3n.$
$4ab + 7ac + 5bd \underset{+}{-} (\underset{+}{-} 2ab \underset{-}{+} 8ac \underset{+}{-} 3bd)$
$= 6ab - ac + 8bd.$
$15x - 7y \underset{+}{-} (\underset{-}{4x} \underset{-}{+} 2y) \underset{+}{-} (\underset{-}{x} \underset{+}{-} y) = 10x - 8y.$

3. Je-li menšitel v *několika* závorkách, počíná se odčítati obyčejně u závorky nejmenší, a po *každé* proměně znamének buď sečtou neb sejmou se ihned čísla stejnojmenná, na př.

$8a^m + 7a^n - [6a^m \underset{+}{-} (\underset{-}{5a^m} \underset{+}{-} 3a^n) + 5a^n] =$
$8a^m + 7a^n - [6a^m - 5a^m + 3a^n + 5a^n] =$
$8a^m + 7a^n \underset{+}{-} [\underset{-}{a^m} \underset{-}{+} 8a^n] = 7a^m - a^n.$

$3a^m + 8b^n - 7c^p - (4a^m - [5b^n \underset{+}{-} (\underset{-}{3a^m} \underset{-}{+} 2c^p) - 5c^p] - 2a^m) =$
$3a^m + 8b^n - 7c^p - (4a^m - [5b^n - 3a^m - 2c^p - 5c^p] - 2a^m) =$
$3a^m + 8b^n - 7c^p - (4a^m \underset{+}{-} [\underset{-}{5b^n} \underset{+}{-} 3a^m \underset{+}{-} 7c^p] - 2a^m) =$
$3a^m + 8b^n - 7c^p \underset{+}{-} (\underset{-}{7a^m} \underset{+}{-} 5b^n \underset{-}{+} 7c^p) = - 4a^m + 13b^n - 14c^p.$

Dodatek. Je-li před závorkou znaménko —, promění se dle předešlého znaménka všech členů uzávorkovaných v opáčná; a tedy i naopak: vyžaduje-li toho potřeba, aby se znaménka všech členů některého výrazu složitého proměnila v opáčná, udělejme tak, dejme celý výraz do závorky a předložme této znaménko —. Výkonu tomu říkáme: *znaménko — má se vysaditi,* na př.

$-a-b=-(a+b)$

$-a-b+c=-(a+b-c)$

$2a-3b-4c+3d-5e=-(-2a+3b+4c-3d+5e)$ atd.

Příklady.

Sečtěte: 1) $5a+(7b+4a)$. 2) $12a+17b+(b+3a)$.

3) $7a+(5a+4b)$. 4) $20n+(5m+3n.)$

5) $5a+4b+(7b+13a)$.

6) $7ab+14ac+15bc+(2bc+17ac+15ab)$.

7) $8x+9y+14z+(19x-17y-10z)$.

8) $9xy-17xz+(-12yz+16xy-21xz-3yz)$.

9) $2a^2-4a+(15b^2+3a^2)+(7a-2b^2)$.

10) $7a^2b^3+(15a^2b^4-13ab^3)+(-7a^2b^4+9ab^3-5a^2b^3)$.

11) $-4xyz-7xy+(5xyz-9xz+yz)+(3xz-15xyz-11yz)$.

12) $a^m+(b^m-c^m)+(c^m-a^m+b^m)$.

13) $3a^mb^n-7a^nb^m+(12a^nb^n+17a^mb^n-21a^nb^m)+$
$(29a^mb^n+17a^nb^n)+(a^mb^n-31a^nb^n)$.

14) $(a^2-b^2)+(a^2-b^2)+(a^2-b^2)+(a^2-b^2)$.

15) $7x+(8y-15x)+(9y+3x)+(-17y-2x)+(x-y)$.

Odečtěte: 1) $5a+7b-(4a-3b)$.

2) $7ab-12cd-(8ab-15cd)$.

3) $5a^2b^3-7a^3b^2-(8a^3b^2-6a^2b^3)$.

4) $13a-15b-16c-(12a-16b-17c)$.

5) $10p+16q-19r-(9p+18q-22r.)$

6) $12a-7b+6c-(7a+8b-10c)-(12a+7b-12c)$.

7) $2xy-3yz+5xz-(7xy-5yz+5xz-7x)$
$-(9yz-7xz-12x)$.

8) $2a^2-3b^2-(7c^2-4a^2-5)-(4b^2-3a^2-2c^2+7)$
$-(8-a^2+7b^2)$.

9) $6m-7n+8p-[9m-7p-(4n+5p)]$.

10) $12x^2y-4xy^2-[17x^2y-(15xy^2-8x^2y)+12xy^2]$.

11) $m-\{n-[p-(m-n+q)-m]-q\}$.

12) $3m-3n-\{-7n-[5m-(3n+4m)-6n]-m\}$.

13) $3a^m-\{5a^n-7a^p-[8a^m-(12a^p-a^n)-9a^p]+a^m\}$.

14) $7m^3-[9m^2-(5m-7)+m^3]$
$-\{14m-[13-m-(5m^2-m^3)-m^2]+10m^3\}$.

15) Který výraz musí se připočísti k výrazu $8x-[9y-(7z-x+y)-7z]$, aby byl součet $14x-[z+7y-(5x-z)-13a]$?

16) Který výraz se musí odečísti od výrazu
$7a - (-4b - 3c - [2a + c - (9b - 7c) + b])$
aby se dostalo
$4a + 3b - (2a - c - [7b + 8c - (12a - 4b) + a] - 7b)$.

17) Vysaďte znaménko — ve výrazích:
1) $-3a + 7b - 4c - 5d$.
2) $12a^2 - 7b^2 - 4c^2 + 11d^2 - 3e^4$.
3) $13xy - 14yz - 15xz - x - y$,
4) $7a - (5a^2 - 6a^3) + 1$.
5) $-9a^4 - (3a^3 + 2a^2 - 3a) - 1$.
6) $2x + 5y - (4z + y - x - 1)$.

VI. Násobení vícečlenů.

§. 6.

1. *Vícečlen násobí se jednočlenem, násobíme-li tímto každý člen onoho,* na př.

$$(a + b) . m = am + bm.$$

Neboť $(a + b) . m = (a + b) + (a + b) + (a + b) + \ldots$ $m$krát (§ 2. 1.) t. j.

$a + a + a + a + \ldots\ldots$ $m$krát $= am$ a
$b + b + b + b + \ldots\ldots$ $m$krát $= bm$ tedy
$(a + b) . m = am + bm$.

Podobně se $(a - b) . m = am - bm$, neboť se opět
$(a - b) . m = (a - b) + (a - b) + (a - b) + \ldots$ $m$krát t. j.
$a + a + a + a + \ldots$ $m$krát $= am$
$-b - b - b - b - b - \ldots$ $m$krát, $= -bm$ čili
$(a - b) . m = am - bm$.

Položíme-li v příkladech
$(a + b) . m = am + bm$, a
$(a - b) . m = am - bm$ všude $b = c + d$, bude
$(a + c + d) . m = am + (c + d) . m = am + cm + dm$, a
$[a - (c + d)] . m = am - [(c + d) . m] = am - [cm + dm]$
$= am - cm - dm$.

Součinu $am + cm + dm$ nebo $am - cm - dm$ říkáme *úplný*, a každému jeho členu am, $+ cm$, $+ dm$, nebo am, $- cm$, $- dm$ součin *částečný*.

2. *Vícečlen násobí se vícečlenem, pakli každý člen jednoho činitele násobíme každým členem činitele druhého,* na př.
$(a + b) . (c + d) = (a + b) . c + (a + b) . d$
$= ac + bc + ad + bd$.

Neboť položíme li v příkladě tom $c + d = m$, bude

$(a + b) . (c + d) = (a + b) . m = am + bm$
$= a . (c + d) + b . (c + d) = ac + ad + bc + bd.$

Podobně dá $(a - b) . (c + d) = ac + ad - bc - bd.$

Neboť je-li opět $c + d = m$, jest

$(a - b) . (c + d) = (a - b) . m = am - bm$
$= a . (c + d) - b . (c + d) = ac + ad - [bc + bd].$
$= ac + ad - bc - bd.$

Abychom určili též součin činitelů $(a - b) . (c - d)$, položme $c - d = m$, načež bude

$(a - b) . (c - d) = (a - b) . m = am - bm$
$= a . (c - d) - b . (c - d) = ac - ad - [bc - bd]$
$= ac - ad - bc + bd.$

Poněvadž u každé písmenky, která žádného znaménka nemá, mysliti si můžeme znaménko $+$, mohli bychom např. v případě

$(a - b) . (c - d) = ac - ad - bc + bd$ psáti
$(+ a - b) . (+ c - d) = + ac - ad - bc + bd.$

Porovnáme-li zde znaménka *částečných* součinů se znaménky činitelů, z nichž vznikly, vidíme, že *stejná znaménka činitelů dávají $+$ a protivná $-$ do součinu.*

Důležitou tuto poučku u složitých činitelů poznáme i pro činitele jednočleny z tohoto:

Položíme-li totiž v předešlých příkladech:

$$(a + b) (c + d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a - b) (c + d) = ac + ad - bc - bd$$
$$(a - b) (c - d) = ac - ad - bc + bd$$

na místo $a = c = 0$, a povážíme-li, že jest součin $= 0$, je-li jeden činitel $= 0$ (§. 2. 1), promění se uvedené rovnice, pakli částečné součiny rovné 0 vypustíme, v tyto:

$(0 + b) (0 + d) = + b . + d = + bd$
$(0 - b) (0 + d) = - b . + d = - bd$ nebo (dle §. 2. 3) $+ d . - b = - bd$
$(0 - b) (0 - d) = - b . - d = + bd.$

3. Mají-li členy činitelů součinitele, násobí se tito jako čísla vůbec, mimo to se různojmenné písmenky kladou vedle sebe v abecedním pořádku, a kdyby se měly násobiti mocniny stejných mocněnců, napíše se mocněnec jednou a mocnitelé se sečtou (§. 3. 4). Za tou příčinou béřeme při násobení písmenek vůbec ohled 1) na znaménka, 2) na součinitele a 3) na písmenky (mocniny).

Částečné součiny stejnojmenné se pro lepší přehled píšou pod sebe a sejmou se.

Na př. $$\begin{array}{r} (2a - 3b) \,.\, (5a - 7b) = 10a^2 - 15ab \\ - 14ab + 21b^2 \\ \hline 10a^2 - 29ab + 21b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2x^3 - 5y^2 + 2z^4) \,.\, (3x^3 + 2y^2 - 4z^4) \\ \quad = 6x^6 - 15x^3y^2 + 6x^3z^4 \\ \qquad\quad + 4x^3y^2 \qquad\qquad - 10y^4 + 4y^2z^4 \\ \qquad\qquad\qquad - 8x^3z^4 \qquad\qquad + 20y^2z^4 - 8z^8 \\ \hline \quad 6x^6 - 11x^3y^2 - 2x^3z^4 - 10y^4 + 24y^2z^4 - 8z^8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (4a^2 + 7ab - 9b^2) \,.\, (7a^2 - ab + 5b^2) = \\ \quad 28a^4 + 49a^3b - 63a^2b^2 \\ \qquad\quad - 4a^3b - 7a^2b^2 + 9ab^3 \\ \qquad\qquad\qquad + 20a^2b^2 + 35ab^3 - 45b^4 \\ \hline \quad 28a^4 + 45a^3b - 50a^2b^2 + 44ab^3 - 45b^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (a + b)^2 = (a + b) \,.\, (a + b) = a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2a^{\mathrm{m}} - 4b^{\mathrm{n}} + 5c^{\mathrm{m}}) \,.\, (3a^{\mathrm{n}} - 2b^{\mathrm{m}}) \\ = 6a^{\mathrm{m+n}} - 12a^{\mathrm{n}}b^{\mathrm{n}} + 15a^{\mathrm{n}}c^{\mathrm{m}} - 4a^{\mathrm{m}}b^{\mathrm{m}} + 8b^{\mathrm{m+n}} - 10b^{\mathrm{m}}c^{\mathrm{m}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \,.\, (a - b) \\ \qquad = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 \\ \qquad\qquad - a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 \\ \hline \qquad\quad a^5 \quad 0 \quad\; 0 \quad\; 0 \quad\; 0 \; - b^5 = a^5 - b^5. \end{array}$$

$$(a^{\mathrm{n}-1} + a^{\mathrm{n}-2}b + a^{\mathrm{n}-3}b^2 + a^{\mathrm{n}-4}b^3 + \ldots + a^2b^{\mathrm{n}-3} + ab^{\mathrm{n}-2} + b^{\mathrm{n}-1}) \,.\, (a - b)$$
$$= a^{\mathrm{n}} - b^{\mathrm{n}}.$$

Pozoruhodný jest *součin součtu a rozdílu týchže čísel*, neboť se rovná *rozdílu jejich čtverců*, na př.

$$\begin{array}{r} (a + b) \,.\, (a - b) = a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 + 0 - b^2 = a^2 - b^2. \end{array}$$

Podobně $(2x + 3y) \,.\, (2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$ (§. 3. 6)
$(x + 1) \,.\, (x - 1) = x^2 - 1$
$(x^{\mathrm{m}} + y^{\mathrm{n}}) \,.\, (x^{\mathrm{m}} - y^{\mathrm{n}}) = x^{\mathrm{m+m}} - y^{\mathrm{n+n}} = x^{2\mathrm{m}} - y^{2\mathrm{n}}$ atd.

4. Má-li se *několik* víceělenů spolu násobiti, násobme nejprvé první dva, součin těchto činitelem třetím, součin ten činitelem čtvrtým atd. Na př.

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(2a^2 - 3b^3)\,.\,(5a^2 + 4b^3)}\,.\,(3a^4 + a^2b^3 + 4b^6) = \\
&\quad 10a^4 - 15a^2b^3 \\
&\qquad\quad + 8a^2b^3 - 12b^6 \\
&\overline{(10a^4 - 7a^2b^3 - 12b^6)\,.\,(3a^4 + a^2b^3 + 4b^6)} \\
&\qquad = 30a^8 - 21a^6b^3 - 36a^4b^6 \\
&\qquad\qquad + 10a^6b^3 - 7a^4b^6 - 12a^2b^9 \\
&\qquad\qquad\qquad + 40a^4b^6 - 28a^2b^9 - 48b^{12} \\
&\qquad \overline{30a^8 - 11a^6b^3 - 3a^4b^6 - 40a^2b^9 - 48b^{12}.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)\,.\,(a+b)\,.\,(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)\,.\,(a+b) \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}$$

5. **Má-li** některý výraz složitý buď ve všech **nebo** alespoň ve dvou **členech** téhož činitele, můžeme tohoto *vysaditi*, t. j. můžeme jej **napsati** co činitele jednoho, a co činitele **druhého** veškeré písmenky (**nebo** čísla), s nimiž původně spojen byl, **na** př.

$$\begin{aligned}
ax - bx &= x(a - b) \\
a^2 + a &= a(a + 1) \\
a + bc - cd &= a + c\,(b - d) \\
ab - bc + de - df &= b\,(a - c) + d\,(e - f) \\
ac - bc + ad - bd &= c\,(a - b) + d\,(a - b) \\
&= (a - b)\,(c + d) \text{ atd.}
\end{aligned}$$

6. **Máme**-li složité výrazy, jichž členy mají stejn**é** mocněnce, násobiti, **spořádejme** je nejprvé buď sestupně **nebo** vzestupně, a upravm**e** součin dle stejných mocněnců, vysadivš**e** u jednotlivých **členů** téhož činitele, na př.

$$\begin{aligned}
&(am^2 - bm + c)\,.\,(dm - e) \\
&\quad = adm^3 - bdm^2 + cdm \\
&\qquad\quad - aem^2 + bem - ce \\
&\overline{adm^3 - (bd + ae)\,m^2 + (cd + be)\,m - ce.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1 + ax - bx^2 + cx^3)\,.\,(1 - dx + ex^2) \\
&\quad = 1 + ax - bx^2 + cx^3 \\
&\qquad - dx - adx^2 + bdx^3 - cdx^4 \\
&\qquad\qquad + ex^2 + aex^3 - bex^4 + cex^5 \\
&\overline{1 + (a - d)\,x - (b + ad - e)x^2 + (c + bd + ae)x^3 - (cd + be)x^4 + cex^5.}
\end{aligned}$$

7. **Každé** číslo dekadické lze rozvesti na spoř**ádaný** víceč**len** dle **mocniny** čísla 10.

Neboť $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $23 = 20 + 3 = 2\,.\,10 + 3$, $523 = 500 + 20 + 3 = 5\,.\,10^2 + 2\,.\,10 + 3$, $7523 = 7\,.\,10^3 + 5\,.\,10^2 + 2\,.\,10 + 3$ atd., **tak** že každé číslo **dekadické** lze vyvesti ze všeobecného výrazu

$$a\,.\,10^{n-1} + b\,.\,10^{n-2} + c\,.\,10^{n-3} + \ldots, + p\,.\,10^3 + q\,.\,10^2 + r\,.\,10 + s$$

nebo naopak

$$s+r.10+q.10^2+p.10^3+\ldots+c.10^{n-3}+b.10^{n-2}+a.10^{n-1},$$

kde a, b, c, d,... představují čísla od 0 do 9ti a $n-1$ jest mocnitel čísla 10ti na místě nejvyšším. Máme-li dekadická čísla spolu násobiti, klaďmež (dle 6) částečné součiny se stejnou mocninou, čísla 10 pod sebe, a vysaďme v součinu mocniny společné, na př.

$$(a.10^4+b.10^3+c.10^2+d.10+e).(f.10^2+h.10+i)=$$

$$\begin{array}{l} af.10^6+bf.10^5+cf.10^4+df.10^3+ef.10^2 \\ \qquad +ah.10^5+bh.10^4+ch.10^3+dh.10^2+eh.10 \\ \qquad\qquad +ai.10^4+bi.10^3+ci.10^2+di.10+ei \\ \hline af.10^6+(bf+ah).10^5+(cf+bh+ai).10^4+(df+ch+bi)10^3 \\ \qquad +(ef+dh+ci)10^2+(eh+di)10+ei. \end{array}$$

Dodatek. Je-li vůbec počet členů prvního činitele m, druhého n, třetího p atd., jest počet členů v součinu nejvýše mnp atd. Neboť násobíme-li m členů prvního činitele 1ním, 2hým, 3tím . . . . $n$tým členem činitele druhého, dostaneme *pokaždé* m členů tedy vůbec mn členů, a násobíme-li mn členů 1ním, 2hým, 3tím . . . . $p$tým členem činitele třetího, dostaneme *pokaždé* mn, tedy celkem mnp členů. Počet tento jest vždy určitý, jsou-li členy činitelů naskrz rozličné, tak na př. dají činitelé $(a+b-c).(d+e+f).(j-h-i-k)$ do součinu $3.3.4=36$ členů. Jsou-li někteří členové jednotlivých činitelů buď sobě rovni aneb mají-li tytéž mocněnce, jest počet členů v součinu *menší* nežli mnp, avšak vůbec *nikdy* větší.

8. *Rovné rovným násobeno dává rovné*, na př.

$$\begin{array}{c} a=b \\ \times m=\times m \\ \hline am=bm \end{array} \qquad \begin{array}{c} a=b+c \\ \times m=\times n \\ \hline am=bn+cn \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a+b=c-d \\ \times(a-b)=\times(c+d) \\ \hline a^2-b^2=c^2-d^2 \end{array} \text{ atd.}$$

9. Máme-li v rovnici znaménka všech členů proměniti v opáčná, násobme ji -1, na př.

$$\begin{array}{c} -x=-a \\ \times -1=\times -1 \\ \hline x=a \end{array} \qquad \begin{array}{l} -x=-a+b, \text{ násobeno } -1 \text{ dá} \\ x=a-b. \end{array}$$

Příklady.

1. Násobte: 1) $(m + n) . p$. 2) $(x + y) . q$.
3) $(1 + a) . b$. 4) $(c + 7) . d$.
5) $(p + q) . 13$. 6) $(r + s) . a$.
7) $y . (x + 5)$. 8) $a . (1 - b)$.
9) $x . (x - 1)$. 10) $y . (y + z)$.
11) $b . (a^2 + a - 1)$. 12) $a^2 . (a^2 + a + 1)$.
13) $(a + b - 7) . c$. 14) $(a + b - c - 0) . d$.
15) $13 . (x - y + z - 7)$. 16) $15 . (x - 0 + y - z)$.
17) $(a + b) (a + b)$. 18) $(x + y) (y - z)$.
19) $(a - 1) (a^2 + 3)$. 20) $(a^2 - b) (a + b^3)$.
21) $(m^3 - n^2) (m - n + 1)$.
22) $(a^3 - a^2 + a - 1) . (a^4 + a^2 - 3)$.
23) $(x^2 - y^3 + z^2) . (x^3 + y + z^4)$. 24) $(a + b + c) (a + b + c)$.
25) $(a + b + c) (a - b + c)$. 26) $(a - b - c) (a + b - c)$.
27) $(m^3 + m^2 + m + 1) . (m - 1)$.
28) $(ab^2 + bc + 1) . (ab^2 - bc - 1)$.
29) $(ay^3 - by^2 - cy + d) . (ey^2 + fy - j.)$
30) $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) (x - y)$.
31) $(a^2b^3 - c^4d^2) (e^2f^5 - jh^4)$.
32) $(m^3n - m^2n^3 - mn^5 + 4) . (m^4n^2 - mn - 5)$.
33) $(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5) . (x + y)$.
34) $(7x - 9y) . (5x - y)$. 35) $(13a - 15b) . (2a - 5b)$.
36) $(12m - n) (m + 12n)$. 37) $(10p - 11q) . (10p - 11q)$.
38) $(31a^2 - 17b^3) . (3a^3 - 2b^2)$. 39) $(7m^2 - 5m + 10) . (2m - 1)$.
40) $(2a^3 - 4a^2 + 7a + 9) . (5a^3 + a^2 - 11a - 6)$.
41) $(4x - 7y + 8z - 7) . (2x + 3y - 2z + 5)$.
42) $(2p^3 - 4q^2 + 13r^5) . (4p^3 - 7q^2 - r^5)$.
43) $(2a - 3b)^3$. 44) $(7x - 2y + 3z)^2$.
45) $(2m + 7n - p + 1)^2$. 46) $(a + b - c - d + e)^2$.
47) $(x + a) (x + b)$. 48) $(x + a) (x - b)$.
49) $(x - a) (x + b)$. 50) $(x - a) (x - b)$.
51) $(3x^m - 4y^n) . (2x^m - 7y^n)$.
52) $(7a^p - 8a^q - 13) . (2a^p - 5a^q - 1)$.
53) $(a^{2m} + a^m - 15) . (a^m - 1)$.
54) $(5x^{2m} + 7x^m + x) (3x^{2m} - 10x^m + x^3)$.
55) $(12x^{4n} - 7x^{3n} + 5x - 6) . (2x^{4n} - 7x + 3)$.
56) $(x + y) . (x - y)$. 57) $(7a - 3) (7a + 3)$.
58) $(10m - 11n) (10m + 11n)$. 59) $(4p + 9) (4p - 9)$.
60) $(19x - 20z) . (19x + 20z)$. 61) $(ab - cd) (ab + cd)$.
62) $(mn - pq) (mn + pq)$. 63) $(2ab + 7cd) (2ab - 7cd)$.
64) $(4xyz + 1) (4xyz - 1)$. 65) $(a^m - b^n) (a^m + b^n)$.
66) $(2x^n + 3y^p) . (2x^n - 3y^p)$.
67) $(10p^q - 11q^p) . (10p^q + 11q^p)$.
68) $[x + (a + b)] . [x + (a - b)]$.

69) $[x + (a + b)] \cdot [x - (a - b)] \cdot [x - (a + b)] \cdot [x + (a - b)]$.

70) $(3a - 4b + 5c)\,(2a - 4b)\,(10b - 7c)$.

71) $(7a^2b - 5ab^3 - 4b^4)\,(2a^2b + 5ab^3 - b^4)$.

72) $(4a^2b - 3ab^3 + 10b^4)^3$.

73) $(12x^2y - 2xy^2 + 7) \cdot (3x^3y - 1) \cdot (3x^2y - 7xy^2 + 5)$.

74) $(2a^4b^3 - 7a^3b) \cdot (3a^3b^2 - 5ab^3) \cdot (2a^4b^3 + 7a^3b) \cdot (5ab - ab^3)$.

75) $(3a - 7b)^3$. 76) $(2a - b + 1)^3$.

77) $(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^4$. 78) $(2m^2 - 3n^3 + 4p^4)^4$.

79) $4a^2b^3c \cdot (7a^3b^4c^3 - 3a^2b^3c + 2a^5b^4c^5)$.
$\cdot (2a^3b^4c^2 - 3a^5b^4c^5 - 10a^3b^3c)$.

80) $(x^2y^3z^4 - y^5z + 4x^4) \cdot (2x^4 - 12x^2y^3z^4)$
$\cdot (5y^5z^6 - 7x^2y^3z^4) \cdot (y^2z - 10x^4)$.

81) $(12x^3y^2 - 15y^5z + 17x^5z^3) \cdot 12x^2y^3z$
$\cdot (2x^3y^2 - 13x^5z^3) \cdot 2x^5z^7 \cdot (x^5z^4 - y^5z + 4)$.

82) $(2a - 3b)^3 \cdot (2a + 3b)^2$. 83) $(m^2 - m + 1)^2 \cdot (m^2 + m - 1)^2$.

2. Vysaďte stejné činitele: 1) $3a^4 - 9a^3 + 12a^2$.

2) $7x^4 - 21x^6 - 42x^{12}$.

3) $24a^3b^2 - 36a^4b + 60a^2b^4 - 12a^5b^6$.

4) $2x^2y^4z^6 + 16x^3y^2z^3 - 28x^5y^3z^4$.

5) $16m^{12}n^{16}p^{15} - 24m^8n^8p^5 - 96m^{16}n^4p^{30} + 80m^{24}n^{32}p^{60}$.

6) $\underbrace{12a^5b^6 - 20a^3b^2c^3d} + \underbrace{21a^2b^4c^2d^3 - 35c^5d^4}$.

3. Násobte a sečtěte:

1) $(2a - 4b)\,(5a + 3b - 1) + (7a + 3b + 4)\,(2a + 7b)$.

2) $(7xy + 8xz - 7yz)\,(5xy - 12xz - 6yz)$
$+ (3xy - 2yz + 3xz)\,(5xz - 3xy + yz)$.

3) $(2a^2b^5 - 3a^4b^3 - 7) \cdot (4a^2b^7 - 7a^4b^5 + 3)$
$+ (10a^2b^5 + 12a^4b^3 + 1) \cdot (2a^2b^7 + 10a^4b^5 - 9)$.

4) $(2x^2 + 7x - 1)\,(3x^3 + 5x - 4)$
$+ (4x - 1)\,(2x^3 + 1) + (3x^2 - 7)\,(2x^2 + 7)$.

5) $(3x^m - 10y^n) \cdot (2x^m - y^n) + (12x^m + 13y^n)\,(x^m - y^n)$
$+ (8x^m + y^n)\,(5x^m - 7y^n)$.

6) $(12x^my^n - 7x^ny^m) \cdot (x^my^n - 5x^ny^m)$
$+ (4x^my^n + 5x^ny^m) \cdot (9x^my^n + 2x^ny^m)$.

4. Násobte a odečtěte:

1) $(2a - 3b)\,(7a + 9b) - [(4a + b)\,(2a - 5b) - (10a - 3b)\,(a - 4b)]$

2) $(2a^2b^3 + 7a^4b - 1)\,(13ab^4 + 7)$
$- [(3a^2 - 4a^4) \cdot (5ab^5 - b^3 - 3) + (2a^2 - a^4 + 7)\,(3ab^5 + b^3)]$.

3) $(10m^3n^4 - 15m^4n^3 - 4p^3q) \cdot (3m^2n^8 - 5p^2q^5)$
$- (15m^3n^4 - 23m^4n^3 - 6p^3q) \cdot (2m^3n^8 - 5p^2q^5)$
$- (m^3n^8 - 40p^2q^5) \cdot (m^4n^3 - p^3q)$.

VII. Dělení jednočlenů.

§. 7.

1. *Děliti jest, z daného součinu dvou činitelů a jedním známým z těchto hledati činitele druhého.* Součinu tomu říkáme *dělenec*, známému činiteli, kterým dělíme, *dělitel*, a činiteli, kterého hledáme, *podíl.* Znaménko dělení jsou dvě tečky (:), před tyto klademe dělence, za ně dělitele, a za tohoto po rovnitku podíl. Na př.

$$a : b = c$$

čteme: a děleno b dává c, nebo b do a jde $c$krát. Jinak naznačujeme také dělení tím, že klademe dělitele pod dělence a mezi oběma vedeme (vodorovnou) přímku, na př.

$$\frac{a}{b} = c$$

což čteme: a lomeno b se rovná c. Dělení $a : b$ nebo $\frac{a}{b}$ jest *naznačené* a $a : b = \frac{a}{b} = c$ *provedené*; mimo to říkáme $\frac{a}{b}$ naznačené dělení *v podobě zlomku.*

Z pojmu o dělení plyne:

a) *Dělenec se rovná součinu z dělitele a podílu.* Je-li totiž

$$a : b = c, \text{ jest}$$
$$a = bc.$$

Způsobem tímto zkoumá se, je-li dobře děleno.

b) Poněvadž dělenec dělený dělitelem dává podíl, rovná se naopak *dělenec dělený podílem děliteli,* t. j. je-li

$$a : b = c \text{ jest i}$$
$$a : c = b.$$

Neboť v případě $a : b = c$ jest $a = bc$,
a v případě $a : c = b$ jest též $a = cb = bc$ (§. 2. 3).

c) Poněvadž jsou b a c činitelé součinu a, lze (dle b) *každého činitele vyjádřiti součinem děleným, činitelem druhým.* Neboť z rovnice

$$a = bc \text{ jde}$$
$$a : b = \frac{a}{b} = c \text{ nebo}$$
$$a : c = \frac{a}{c} = b.$$

Tedy i $mx = n$ dá

$$x = \frac{n}{m}.$$

$ax - bx = m$, dá (dle § 6. 5)
$x(a - b) = m$, z čehož

$$x = \frac{m}{a - b}.$$

d) *Každá veličina dělená sama sebou dává 1 za podíl*, na př.

$a : a = 1$, neboť $a = 1 \,.\, a$,
$ab : ab = 1$
$m^2n^3 : m^2n^3 = 1$ atd.

A naopak *dává každá veličina dělená 1 sama sebe za podíl*, na př.

$a : 1 = a$
$ab : 1 = ab$ atd.

e) *Rovné rovným děleno dává rovné*, na př.

$$\begin{array}{rcl} a & = & b \\ :m & & :m \\ \hline a : m & = & b : m \end{array} \quad \text{nebo} \quad \frac{a}{m} = \frac{b}{m}.$$

Z té příčiny můžeme každou rovnici kterýmkoli číslem nebo jinou rovnicí děliti, na př.

$$\begin{array}{rcl} 5bx & = & 3a \\ :5b & & :5b \\ \hline x & = & 3a : 5b = \dfrac{3a}{5b} \end{array} \text{ (srovnej } c\text{).}$$

f) *Podíl se tolikrát zvětší, kolikrát zvětšíme dělence při témže děliteli.* Neboť z rovnice

$a : b = c$ jde
$a = bc$, a násobíme-li tuto rovnici m (§. 2. 5) jest
$am = bcm$, což se může poznačiti
$am = b \,.\, cm$, z čehož dostaneme (§. 2. 3)
$am : b = cm$.

j) Násobíme-li rovnici

$(a : b) = c$ na př. veličinou m, bude (§. 2. 5)
$(a : b)m = cm$, avšak (dle f) se též
$am : b = cm$, a porovnáním obou rovnic dostaneme
$(a : b)m = am : b$

t. j. *naznačené dělení $(a : b)$ násobí se jakousi veličinou (m), násobíme-li pouze dělence (a) a neměníme-li dělitele (b)*. Dle toho se

$(ab : cd)mn = abmn : cd$
$(5a : 4bc)9d = 45ad : 4bc$ atd.

A pakli se $am : b = (a : b)m$, bude se i
$ma : b = (m : b)a$

t. j. *součin se dělí, dělíme-li kteréhokoli činitele*, proto i

$ab : a = (a : a)b = b$ (dle d)
$bcm : m = bc(m : m) = bc$ atd.

h) *Podíl se tolikrát zvětší, kolikrát zmenšíme dělitele při témže dělenci.* Neboť z rovnice

$a : b = c$ jde opět
$a = bc$, a dělíme-li rovnici tuto m (dle e) jest
$a : m = bc : m$, z čehož dělenec
$a = (bc : m) . m$, aneb (dle j)
$a = (b : m) . cm$, nebo
$a : (b : m) = cm$.

A poněvadž se (dle f) $am : b = cm$ a (dle h)
$a : (b : m) = cm$ jest i

$$am : b = a : (b : m) = cm$$

t. j. *má-li se dělenec (a) jakousi veličinou (m) násobiti, může se dělitel (b) touže veličinou děliti, podíl (c) se v každém případě touže veličinou zvětší* $(= cm)$.

i) *Podíl se tolikrát zmenší, kolikrát buď dělitele při témže dělenci zvětšíme nebo dělence při témže děliteli zmenšíme.* Neboť z rovnice

$a : b = c$, plyne
$a = bc$, avšak $bc = bcm : m$ (dle j) proto se
$a = bcm : m = bm(c : m)$, z čehož
1. $a : bm = (c : m)$.

Podobně dostaneme z rovnice $a = bc$ (dle e)
$(a : m) = (bc : m)$ a z toho (dle j)
$(a : m) = b(c : m)$, nebo
2. $(a : m) : b = (c : m)$.

Dosadíme-li do rovnice 1. a 2. na místě c jeho původní hodnotu $= a : b$, dostaneme
z rovn. 1. $a : bm = (a : b) : m$, a z rovn. 2. $(a : m) : b = (a : b) : m$.

Rovnice $(a : b) : m = a : bm$ nás učí, že se může *dělitel (b) jakous veličinou (m) násobiti, má-li se naznačené dělení $(a : b)$ touže veličinou děliti*, a z rovnice $(a : m) : b = (a : b) : m$ vysvítá, že jest vše **jedno**, *dělíme-li jakousi veličinou (m) dělence (a) a podíl ten dělitelem (b), aneb dělíme-li původního dělence (a) dělitelem (b) a podíl ten teprv onou veličinou (m).* Poněvadž se tedy vůbec

$(a : b) : m = (a : m) : b = a : bm$, bude se i
$(3a^2 : 5b) : 4m^2 = (3a^2 : 4m^2) : 5b = 3a^2 : 20bm^2$;
$(5ab^2 : 3c^2d^3) : 8c^3d^2 = (5ab^2 : 8c^3d^2) : 3c^2d^3 = 5ab^2 : 24c^5d^5$;
$[(7a^2 : 5b^3) : 2c^2] : 4c^3 = (7a^2 : 5b^3) : 8c^5 = 7a^2 : 40b^3c^5$ atd.

k) *Podíl se nemění buď násobíme-li neb dělíme-li dělence a dělitele touže veličinou.* Neboť z rovnice

$a : b = c$, jde
$a = bc$, nebo i (§. 2. 3)

$am = bcm$ čili
$am = bm \,.\, c$, z čehož plyne
$am : bm = c.$

A podobně jde z rovnice

$a = bc$ (dle e)
$(a : m) = (bc : m)$ a (dle j)
$(a : m) = (b : m) \,.\, c$, z čehož se
$(a : m) : (b : m) = c.$

V každém dělení můžeme tedy dělence a dělitele touže veličinou *skrátiti*, t. j. součinitele dělme jako čísla vůbec a stejné písmenky v dělenci a v děliteli vypusťme v stejném počtu [srovnej d) a j)]. Na př.

$abc : b = ac$, $\quad abc : bc = a$,
$4ab : 2a = 2b$, $\quad 56xyz : 7x = 8yz$,
$a^3 : a = a^2 \,.\, a : a = a^2$
$6m^5 : 2m^3 = 6m^3 \,.\, m^2 : 2m^3 = 3m^2$
$8x^7 : 4x^3 = 8x^3 \,.\, x^4 : 4x^3 = 2x^4$
$15x^5y^3 : 3x^2y = 5x^3y^2$ atd.

Porovnáme-li v posledních čtyřech příkladech mocnitele podílu s mocniteli dělence a dělitele, pozorujeme, že jest mocnitel podílu rozdíl mocnitele dělence a mocnitele dělitele, tak žebychom v oněch příkladech i psáti mohli:

$a^3 : a = a^{3-1} = a^2$
$6m^5 : 2m^3 = 3m^{5-3} = 3m^2$
$8x^7 : 4x^3 = 2x^{7-3} = 2x^4$
$15x^5y^3 : 3x^2y = 5x^{5-2} \,.\, y^{3-1} = 5x^3y^2.$

Vůbec tedy dá při stejných mocněncích:

$a^{\mathrm{m}} : a^{\mathrm{n}} = a^{\mathrm{m}-\mathrm{n}}$
$a^{2\mathrm{m}} : a^{\mathrm{m}} = a^{2\mathrm{m}-\mathrm{m}} = a^{\mathrm{m}}$
$12a^{\mathrm{m}} : 3a^{\mathrm{p}} = 4a^{\mathrm{m}-\mathrm{p}}$
$16a^{\mathrm{m}}b^{\mathrm{n}} : 8a^{\mathrm{p}}b^{\mathrm{q}} = 2a^{\mathrm{m}-\mathrm{p}} \,.\, b^{\mathrm{n}-\mathrm{q}}$, tedy i
$a^{\mathrm{m}} : a^{\mathrm{m}} = a^{\mathrm{m}-\mathrm{m}} = a^0$, avšak (dle d)
$\underline{a^{\mathrm{m}} : a^{\mathrm{m}} = 1,}$ proto se
$a^0 = 1.$

Za tou příčinou říkáme: *Mocniny stejných kořenů se dělí, napíšeme-li za podíl stejnou mocninu jednou, a odečteme-li mocnitele dělitele od mocnitele dělence.* Při mocninách rozličných mocněnců lze dělení pouze naznačiti, což se stává obyčejně v podobě zlomku na př. $a^{\mathrm{m}} : b^{\mathrm{n}} = \dfrac{a^{\mathrm{m}}}{b^{\mathrm{n}}}$.

l) Poněvadž se $0 = a \,.\, 0$ (§ 2. 5), bude (dle c)
$0 : a = 0$

t. j. *nicka dělená kteroukoli veličinou dává nicku za podíl.*

Z téže rovnice $0 = a \,.\, 0$ plyne dále
$$0 : 0 = a$$
t. j. *nicka dělená nickou dává číslo* (a), *jehož hodnota se po případě určí, za podíl.*

Dodatek. Za tou příčinou nesmí se nikdy rovnice nickou děliti (skrátiti), jelikož by pak nebylo žádného rozdílu mezi čísly vůbec, neboť
$$\begin{aligned} 2a \times 0 &= 0 \\ 7a \times 0 &= 0 \\ \hline 2a \times 0 &= 7a \times 0, \end{aligned}$$
a kdybychom *směli* děliti nickou, bylo by $2a = 7a$, děleno a dalo by nesmysl:
$$2 = 7.$$

m) **Kdyby** se v případě $a : b$ dělenec neměnil a kdyby dělitel b ustavičně rostl, až by každé možné číslo převyšoval, t. j. až by byl nekonečně velký (což se znamená ∞), měl by podíl poznenáhla vždy menší a menší hodnotu, až by konečně byl menší kteréhokoli čísla čili roven nicce, t. j.
$$a : \infty = 0.$$

A kdyby naopak při témže dělenci dělitele ustavičně ubývalo, byl by podíl poznenáhla větší; při děliteli $= 0$ byl by podíl číslo nekonečně veliké (∞), t. j.
$$a : 0 = \infty,$$
což plyne i z dělení $a : \infty = 0$, vyměníme-li dělitele za podíl a naopak (b).

2. *Není-li dělitel v dělenci úplně obsažen*, a je-li dělenec vůbec *menší* dělitele, naznačí se podíl v podobě zlomku, na př.

Je-li $a < b$ bude $a : b = \frac{a}{b}$

Je-li však *při téže podmínce* $a > b$, může se dělení částečně provesti, na všechen způsob zůstane však zbytek menší dělitele. V případě tom rovná se dělenec děliteli násobenému podílem více zbytku. Nazveme-li podíl m, a zbytek r, bude tedy při $a > b$
$$\underset{\text{zbytek } r}{\underline{a}} : b = m, \quad \text{a} \quad a = bm + r$$

Podobně
$$\begin{aligned} a : ab &= \frac{a}{ab} = \frac{1}{b} \\ ab : ac &= \frac{ab}{ac} = \frac{b}{c} \\ m^2 : m^3 &= \frac{m^2}{m^3} = \frac{1}{m} \\ 9m^2 : 3m^4 &= \frac{9m^2}{3m^4} = \frac{3}{m^2} \text{ atd.} \end{aligned}$$

3. Je-li dělenec *pojmenován* může býti *dělitel s ním buď stejnojmenný*, neb *bezejmenný*. *V prvním* případě jest *podíl bezejmenný* čili *prosté číslo*, které ukazuje kolikrát jest dělenec větší dělitele. Takové dělení jest *porovnání* dělence s dělitelem a jeho podílu říkáme též *poměr* (dělence k děliteli), na př.

$$10 \text{ zl.} : 2 \text{ zl.} = 5, \text{ poněvadž } 10 \text{ zl.} = 2 \text{ zl.} \times 5.$$

Podíl 5 jest číslo prosté a ukazuje, že jest 10 zl. 5krát větší nežli 2 zl., nebo že 2 zl. jsou 5krát obsaženy v 10 zl., aneb že poměr 10 zl. ke 2 zl. jest 5.

V druhém případě má *podíl stejné jméno s dělencem*, a jest tedy tolikátý díl dělence, kolikrát dělitel udává. Zde se skutečně *dělí* dělenec na tolik stejných částek, kolik dělitel ukazuje. Na př.

$$10 \text{ zl.} : 5 = 2 \text{ zl.}$$

t. j. 2 zl. jsou 5tý díl 10 zl.

4. Béřeme-li ohled na znaménka dělence, dělitele a podílu, známo, že jest dělenec součin z dělitele a podílu, a že se každý z těchto co činitel rovná součinu dělenému činitelem druhým. Poněvadž tedy (§. 6. 2)

$$\begin{array}{llll}
+a = +b \,.\, +c & \text{bude} & +a : +b = +c \\
+a = -b \,.\, -c & \text{„} & +a : -b = -c \\
-a = +b \,.\, -c & \text{„} & -a : +b = -c \\
-a = -b \,.\, +c & \text{„} & -a : -b = +c.
\end{array}$$

Porovnáme-li zde znaménka dělence a dělitele se znaménkem podílu, pozorujeme, že i *při dělení dávají stejná znaménka dělence a dělitele + a rozličná — k podílu.*

Při dělení čísel obecných budeme tedy (jako při násobení) bráti ohled, 1. na znaménka, 2. na součinitele a 3. na písmenky (mocniny), na př.

$$\begin{aligned}
10a^2 &: 2a = 5a \\
-\ 8a^2b &: 2a = -\ 4ab \\
-\ 28a^4b^3 &: 7ab^2 = -\ 4a^3b \\
-\ 36a^4b^3c^4 &: -\ 4a^2bc^3 = 9a^2b^2c \\
35m^3n^5p^6q^2 &: -\ 7mn^4p^3q^2 = -\ 5m^2np^3 \\
18a^mb^n &: -\ 3a^3b^4 = -\ 6a^{m-3}b^{n-4} \\
-\ 6a^mb^n &: -\ 2a^pb^q. = 3a^{m-p}b^{n-q}\ .
\end{aligned}$$

Dodatek. Na dělení zakládá se hledání *průřezu* čili *průměru*. Pozorujeme-li totiž události téhož způsobu, jež se byly sběhly v stejném sice po sobě čase avšak v nestejné míře, a chceme-li se dověděti, mnoho-li by na jednosť časovou připadlo, kdyby se byly v stejné udály míře, sečtěme všechna daná čísla oné události a dělme součet ten počtem sčítanců. Na př.

Tentýž teploměr ukazoval vždy v poledne v stínu

1. den 15° R.
2. „ 16° „
3. „ 14° „
4. „ 17° „
5. „ 13° „

tedy bylo v uvedené době *průměrně* tepla 75° R. : 5 = 15° R.

Příklady.

1. Odstraňte činitele neznámé veličiny x:

1) $2x = 4$. 2) $7x = 35$.
3) $a^2x = a^2$. 4) $mx = m$.
5) $abx = abc$. 6) $p^2x = p^2q^3$. 7) $2a^3x = 10a^3b^4$.
8) $5m^2n^3x = 75m^2n^3p^4q$. 9) $7x = 5$. 10) $ax = b$. 11) $abx = a$.
12) $2acx = 12ab^2c$. 13) $7a^4b^3x = 21a^4cd^2$. 14) $5mnx = 3np^2q^3$.

2. Dělte: 1) $12ab : 4b$. 2) $18mnp : 9n$. 3) $15p^2qr : 3p^2$.
4) $21ab^2c^3 : 7ac^3$. 5) $45a^2b^5c^6 : 9a^2c^6$. 6) $72x^2yz^3 : 8x^2z^3$.
7) $26x^2y^3z : 13y^3$. 8) $91m^2n^3p^4q : 7n^3q$.

3. Čemu se rovná: 1) $(2a : 3b)9b$. 2) $(4m : 7n)14n^2$.
3) $(4m^2 : 8n)2n$. 4) $(5x^3 : 6x)6x^2$.
5) $(7a^2b^3 : 3c^3d)9c^3de^4$. 6) $(2x^2yz^3 : 5m^2ny^2)15^2ny^3$.
7) $(a^3b^4 : 11a^4b^6c)22ab^2c$.

4. Čemu se rovná: 1) $ab : (b : c)$. 2) $4a^2 : (2a^2 : 3c)$.
3) $m^2n : (3m^2 : 9n^2)$. 4) $7x^3y^2 : (2y^2 : 8x^5)$.
5) $5xy^2z^3 : (3y^3 : 12x^4yz^5)$. 6) $16abc : (8bc : a)$.
7) $36a^4b^3 : (12a^4b^3 : 7mn)$.

5. Čemu se rovná· 1) $(8 : a) : 4$. 2) $(9a^2 : 3) : a^2$.
3) $(15mn : 5) : 3n$. 4) $(8ab : cd) : 2a$.
5) $(21xy^2z : 7y) : xyz$. 6) $(28x^2y^4z^3 : 4x) : xy^4$.

6. Dělte: 1) $a^5 : a$. 2) $a^6 : a^5$. 3) $m^{12} : m^7$.
4) $12m^3 : 4m$. 5) $18x^7 : 9x$. 6) $49a^3b^7 : 7ab^2$.
7) $21x^{14}y^{11} : 3x^{11}y^7$. 8) $78a^4b^7c^9 : 13^3b^5c^6$. 9) $x^{12}y^{13}z^5 : x^{11}y^{10}z^2$.
10) $36a^7b^3c^2 : 4a^6b^2c$. 11) $54a^5b^6c^7 : 7a^5b^2c^7$.
12) $66m^3n^4p^2q^7 : 11mn^4pq^3$.

7. Dělte: 1) $8a^3 : -4a$. 2) $14a^5b^6 : -7a^4b$.
3) $-72a^4b^5c^3 : 8a^3b^5$. 4) $-91ab^4c^3 : 13bc^2$.
5) $-18a^8b^3c^5 : 9a^6b^3c^4$. 6) $-51m^3n^5p^6 : 17m^2n^4p^5$.
7) $-76m^6n^3p^7q : -19m^5p^6$. 8) $-46xy^3z^2 : -23y^2z$.
9) $-115u^7x^6y^8z^3 : -5u^2xz^3$. 10) $-117a^mb^m : 9a^mb^3$.
11) $9a^mb^n : -3b^5$. 12) $33x^my^nz^p : -11x^2y^nz^6$.
13) $56m^5n^p : -8m^pn^5$. 14) $-24m^np^2r^s : -3m^pr^2$.

8. Teploměr ukazuje po 7 dní v 9 hodin ráno + 1°, + 3°, — 2°, — 2°, — 1°, + 3°, + 5° C., jaké bylo *průměrné* teplo v tomto čase?

9. Kdosi počítá po 10 dní mnoho-li každého dne buď vydělal, buď prodělal, a shledá, že má tyto dny po sobě: — 1 zl., + 2 zl., — 1 zl., — 2 zl., + 5 zl., — 4 zl., + 2 zl., 0 zl., — 2 zl., + 1 zl. Mnoho-li vydělal nebo prodělal *průměrně?*

10. Kdosi prodal 85 měřic obilí, a vydělal při 16 měřicích 8 zl. 30 kr., při 18 měřicích 24 zl. 50 kr., avšak prodělal při 12 měřicích 4 zl., při 15 měř. 15 zl. 10 kr., a při 24 měř. 12 zl. Mnoho-li vydělal nebo prodělal průměrně na měřici?

VIII. Dělení vícečlenů.

§. 8.

1. **Má-li se** *víceělen děliti jednočlenem*, dělí se tímto každý člen onoho, při čemž opět béřeme ohled na znaménka, na součinitele a na písmenky (mocniny). Na př.

$$(a+b-c):m=(a:m)+(b:m)-(c:m)=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}.$$

Důkaz toho plyne z pojmu o závorce a o dělení vůbec. Neboť závorka ukazuje, že veličiny v ní obsažené náležejí k témuž celku. Má-li se tedy celek $(a+b-c)$ *m*krát zmenšiti, musí se tak státi s každou jeho částí. Ostatně nás přesvědčuje násobení dělitele podílem, že dobře jest pracováno; neboť se v uvedeném příkladě (dle §. 6. 2)

$$\begin{aligned} a+b-c &= m[(a:m)+(b:m)-(c:m)] \\ &= m(a:m)+m(b:m)-m(c:m) \\ &= (am:m)+(bm:m)-(cm:m) \text{ (dle §. 7. j)} \\ &= a+b-c. \end{aligned}$$

Podobně:

$(12ab-15abc+9ac):3a=4b-5bc+3c$

$(24abc+16acd-40ace):8ac=3b+2d-5e$

$(27a^2b-18ab^2-9a^3b^2+81a^3b^3):-9ab$
$=-3a+2b+a^2b-9a^2b^2.$

$(28x^3y^3z-14x^3y^2z^2-35x^2y^3z^4):-7x^2y^2z$
$=-4xy+2xz+5yz^3.$

$(-36xy^5z-24x^3y^4z^2-48x^2y^3z^4+60xy^2z^3):-12x^2y^2z^2$
$=\frac{3y^3}{xz}+2xy^2+4yz^2-\frac{5z}{x}.$

$(8a^mb^n-12a^nb^p+20a^pb^q):4a^2b$
$=2a^{m-2}b^{n-1}-3a^{n-2}b^{p-1}+5a^{p-2}b^{q-1}.$

2. **Má-li se** *víceělen děliti víceělenem*, považme že jest dělenec součin z dělitele a podílu, že tedy písmenky jednotlivých členů dělence v témže pořádku vedle sebe stojí a po sobě jdou jako v členech obou činitelů. Byli-li tito spořádáni buď dle abeced-

ního pořádku nebo dle jakés mocniny téhož mocněnce, jest i dělenec (jejich součin) podobně sestaven, a není-li, můžeme si jej i dělitele stejně spořádati. Z násobení dvou spořádaných činitelů plyne dále, že první člen součinu vznikl násobením prvních členů obou činitelů. Chceme-li tedy naopak z prvního členu dělence dostati první člen podílu, dělme jej prvním členem dělitele. Avšak při násobení vedli jsme první člen druhého činitele (zde podílu) do *všech* členů činitele prvního, a dostali takto první řadu součinu. Za tou příčinou musíme i naopak první člen podílu násobiti každým členem dělitele a dostaneme první řadu součinu, kterou, kladouce členy její pod stejnojmenné dělence, od tohoto odčítáme. Ve zbytku obsaženy jsou součtem ostatní řady součinu, pročež dělíme opět prvním členem dělitele do prvního členu tohoto zbytku, a dostaneme druhý člen podílu. Tímto násobíme opět celého dělitele, klademe částečné součiny pod stejnojmenné členy zbytku a odečteme je, čímž dostaneme nový zbytek. První člen tohoto dělíme opět prvním členem dělitele, a dostaneme třetí člen podílu, tímto násobíme opět celého dělitele, a kladouce částečné součiny pod stejnojmenné členy nového zbytku, odečteme je, atd. pracujeme podobně, až buď nic více z dělence nezbude, aneb až přijdeme k takovému zbytku, kterého více děliti nelze. V případě prvním jest dělitel v dělenci obsažen úplně, v případě druhém však zůstane zbytek, který se s dělitelem v podobě zlomku připíše k podílu. Na př.

$$\begin{array}{l}
(6x^5+8x^4-21x^3+5x^2+x-3):(2x^3+4x^2-5x-3)=3x^2-2x+1.\\
\underset{-}{6x^5}\underset{-}{+}12x^4\underset{+}{-}15x^3\underset{+}{-}9x^2=(2x^3+4x^2-5x-3)\,.\,3x^2\\
\hline
\text{„}\quad -4x^4-6x^3+14x^2+x-3\\
\quad\;\underset{+}{-}4x^4\underset{+}{-}8x^3\underset{-}{+}10x^2\underset{-}{+}6x=(2x^3+4x^2-5x-3)\,.\,-2x\\
\hline
\text{„}\qquad 2x^3+4x^2-5x-3\\
\qquad\;\underset{-}{2x^3}\underset{-}{+}4x^2\underset{+}{-}5x\underset{+}{-}3=(2x^3+4x^2-5x-3)\,.\,1\\
\hline
\qquad\quad\text{„}\qquad\text{„}\qquad\text{„}\qquad\text{„}
\end{array}$$

Je-li dobře pracováno, musí se opět dělenec rovnati děliteli násobenému podílem, což-li vykonáme, dostaneme všechny řady částečných součinů, které jsme při dělení odečítali, a které součtem dají dělence, totiž

$$\begin{array}{lrrrrrr}
 & (2x^3+4x^2-5x-3)(3x^2-2x+1)= & & & & & \\
1.\text{ řada} \ldots\ldots & 6x^5 & +\,12x^4 & -\,15x^3 & -\,9x^2 & & \\
2.\ \text{„} \ldots\ldots\ldots & & -\,4x^4 & -\,8x^3 & +\,10x^2 & +\,6x & \\
3.\ \text{„} \ldots\ldots\ldots\ldots & & & +\,2x^3 & +\,4x^2 & -\,5x & -\,3\,. \\
\hline
\text{dělenec} = & 6x^5 & +\,8x^4 & -\,21x^3 & +\,5x^2 & +\,x & -\,3.
\end{array}$$

Podobně: $(10ad - 14ae - 15bd + 21be + 20cd - 7ce) : (5d - 7e) = 2a - 3b + 4c + \frac{21ce}{5d - 7e}.$

$$\begin{array}{l}
\underset{-}{}10ad \underset{+}{-} 14ae \\
\hline
\text{„} \quad \text{„} \quad -15bd + 21be \\
\phantom{\text{„} \quad \text{„} \quad} \underset{+}{-}15bd \underset{-}{+} 21be \\
\hline
\text{„} \quad \text{„} \quad 20cd - 7ce \\
\phantom{\text{„} \quad \text{„} \quad} \underset{-}{}20cd \underset{+}{-} 28ce \\
\hline
\text{„} \quad 21ce.
\end{array}$$

$$(a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5) : (a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$\begin{array}{l}
\underset{-}{}a^5 \underset{+}{-} 2a^4b \underset{-}{+} a^3b^2 \\
\hline
\text{„} \quad -3a^4b + 9a^3b^2 - 10a^2b^3 \\
\phantom{\text{„} \quad} \underset{+}{-}3a^4b \underset{-}{+} 6a^3b^2 \underset{+}{-} 3a^2b^3 \\
\hline
\text{„} \quad 3a^3b^2 - 7a^2b^3 + 5ab^4 \\
\phantom{\text{„} \quad} \underset{-}{}3a^3b^2 \underset{+}{-} 6a^2b^3 \underset{-}{+} 3ab^4 \\
\hline
\text{„} \quad -a^2b^3 + 2ab^4 - b^5 \\
\phantom{\text{„} \quad} \underset{+}{-}a^2b^3 \underset{-}{+} 2ab^4 \underset{+}{-} b^5 \\
\hline
\text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}
\end{array}$$

$$(x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1) : (x + 1) = x^4 + (a-1)x^3 + (b-a+1)x^2 + (a-1)x + 1$$

$$\begin{array}{l}
\underset{-}{}x^5 \underset{-}{+} x^4 \\
\hline
\text{„} \quad (a-1)x^4 + bx^3 \\
\phantom{\text{„} \quad} \underset{-}{}(a-1)x^4 \underset{-}{+} (a-1)x^3 \\
\hline
\text{„} \quad (b - a+1)x^3 + bx^2 \\
\phantom{\text{„} \quad} \underset{-}{}(b - a+1)x^3 \underset{-}{+} (b-a+1)x^2 \\
\hline
\text{„} \quad (a - 1)x^2 + ax \\
\phantom{\text{„} \quad} \underset{-}{}(a - 1)x^2 \underset{-}{+} (a - 1)x \\
\hline
\text{„} \quad x + 1 \\
\phantom{\text{„} \quad} \underset{-}{}x \underset{-}{+} 1 \\
\hline
\text{„} \quad \text{„}
\end{array}$$

$$(81x^4y^4 - 16z^8) : (3xy + 2z^2) = 27x^3y^3 - 18x^2y^2z^2 + 12xyz^4 - 8z^6$$

$$\begin{array}{l}
\underset{-}{}81x^4y^4 \underset{-}{+} 54x^3y^3z^2 \\
\hline
\text{„} \quad -54x^3y^3z^2 - 16z^8 \\
\phantom{\text{„} \quad} \underset{+}{-}54x^3y^3z^2 \underset{+}{-} 36x^2y^2z^4 \\
\hline
\text{„} \quad 36x^2y^2z^4 - 16z^8 \\
\phantom{\text{„} \quad} \underset{-}{}36x^2y^2z^4 \underset{-}{+} 24xyz^6 \\
\hline
\text{„} \quad -24xyz^6 - 16z^8 \\
\phantom{\text{„} \quad} \underset{+}{-}24xyz^6 \underset{+}{-} 16z^8 \\
\hline
\text{„} \quad \text{„}
\end{array}$$

Pozorujme ještě tyto čtyři případy:

a) $(a^n - b^n):(a - b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \dots$

$$\begin{array}{l}
\underset{-}{a^n} \mp a^{n-1}b \\ \hline
\text{„} \quad + a^{n-1}b - b^n \\
\qquad \underset{-}{a^{n-1}b} \quad \mp a^{n-2}b^2 \\ \hline
\qquad \text{„} \quad a^{n-2}b^2 - b^n \\
\qquad\qquad \underset{-}{a^{n-2}b^2} \quad \mp a^{n-3}b^3 \\ \hline
\qquad\qquad \text{„} \quad a^{n-3}b^3 - b^n \\
\qquad\qquad\qquad \underset{-}{a^{n-3}b^3} \quad \mp a^{n-4}b^3 \\ \hline
\qquad\qquad\qquad \text{„} \quad a^{n-4}b^3 - b^n \text{ atd,}
\end{array}$$

V tomto pozoruhodném případě jest podíl řada členů, které mají tyto vlastnosti: 1. všechny členy jsou kladné, 2. mocnitel čísla *a* klesá ustavičně o 1, kdežto mocnitel čísla *b* o 1 roste, a v každém členu jest o jednu menší nežli menšitel mocnitele čísla *a* v témže členu, takže součet obou mocnitelů téhož členu $= n - 1$ t. j. mocniteli členu prvního. Za tou důsledností lze i ostatní členy podílu vyvoditi *bez dělení*, neboť by byl příští t. j.

$$\begin{array}{llll}
\text{člen 5tý} & \text{člen 6tý} & \text{člen 7mý} & \text{člen poslední} \\
\dots + a^{n-5}b^4 + & a^{n-6}b^5 + & a^{n-7}b^6 + \dots\dots & + a^{n-n}b^{n-1} \text{ nebo} \\
 & & & + a^0b^{n-1} = b^{n-1},
\end{array}$$

takže vůbec:

$(a^n - b^n):(a - b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + a^{n-5}b^4 + \dots + b^{n-1}$

to jest v $(a^n - b^n)$ jest $(a - b)$ vždy, nechť jest *n číslo sudé nebo liché*, úplně obsaženo. Podíl ten má tolik členů kolik *n* jedností.

Dle toho tedy:

$(a^5 - b^5) : (a - b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$

$(a^6 - b^6) : (a - b) = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$

$(a^{10}b^6 - a^6b^{10}) : (a - b) = a^6b^6(a^4 - b^4) : (a - b)$

$= a^6b^6(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$= a^9b^6 + a^8b^7 + a^7b^8 + a^6b^9$ atp.

b) Položíme-li na místě $a - b$ za dělitele $a + b$, a neměníme-li dělence $a^n - b^n$, změní členy podílu na místě 2., 4., 6., čili na místech sudých znaménka, tak že bude posloupnosť znamének v podílu + — + — + — atd. Aby dělitel $a + b$ *úplně byl obsažen* v dělenci $a^n - b^n$, musí býti *n číslo sudé*, neboť jen takové dá do posledního členu podílu (který jako prvé míti bude *n* členů) $- b^{n-1}$, což násobeno druhým členem dělitele t. j. $+ b$ dá $(+ b \,.\, - b^{n-1} =) - b^n$, kteréž odečteno od druhého členu dělence $(- b^n)$ tento ruší. Proto bude pro *n = číslu sudému*:

$(a^n - b^n) : (a + b) = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots - b^{n-1}$

Tak na př. $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b$
$(a^4 - b^4) : (a + b) = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ atd.

c) Položíme-li na místě $- b^n$ do dělence $+ b^n$, a neměníme-li dělitele $a + b$, bude se podíl co do znamének a jednotlivých členů rovnati podílu předešlému (b). Má-li však v $a^n + b^n$ býti $a + b$ úplně obsaženo, musí *n býti liché*, poněvadž jen potom poslední člen podílu bude $+ b^{n-1}$, který násobený druhým členem dělitele $+ b$ dá $(+ b \,.\, b^{n-1} =) + b^n$, které odečtěno od druhého členu dělence $(+ b^n)$ tento opět ruší. Pro n = *lichému číslu* dostaneme tedy

$$(a^n + b^n) : (a + b) = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \ldots . + b^{n-1}$$

Tak na př.

$(a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2$
$(a^7 + b^7) : (a + b) = a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6$ atp.

d) Položíme-li v případě c) dělitele $a - b$ na místě $a + b$, budou znaménka v podílu [jako při a)] naskrz kladná, posloupnost členů bude tatáž jako v případech předešlých, avšak $a - b$ není *nikdy* úplně obsaženo v $a^n + b^n$. Neboť, poněvadž každý člen podílu tedy i poslední má $+$, dá tento násobený druhým členem dělitele $(- b \,.\, + b^{n-1} =) - b^n$, kteréž odečtěno od $+ b^n$ dá vždy $+ 2b^n$ *co zbytek*. Tedy

$$(a^n + b^n) : (a - b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1} + \frac{2b^n}{a-b}$$

Na př.

$$(a^5 + b^5) : (a - b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + \frac{2b^5}{a-b}$$

$$(a^4 + b^4) : (a - b) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + \frac{2b^4}{a-b} \text{ atd.}$$

Je-li v uvedených případech $b^n = 0$ jest

$$a^n : (a \mp b) = a^{n-1} \pm a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \pm a^{n-4}b^3 \ldots \pm b^{n-1} \mp \frac{b^n}{a \mp b}.$$

A je-li $a = 1$, jest

$$1 : (1 \mp b) = 1 \pm b + b^2 \pm b^3 + b^4 \pm b^5 + b^6 \pm \ldots .$$

t. j. podíl tento jest nekonečná řada mocnin mocněnce b.

Dodatek. Nyní můžeme se též seznámiti s pravidlem, jímž se a) číslo kterékoli soustavy přivede na číslo téže hodnoty soustavy desetinné, a b) číslo soustavy desetinné na číslo téže hodnoty určité soustavy jiné.

a) Nazveme-li základní číslo jakékoli soustavy x, číslice jeho po pořadě od levé k pravé $a, b, c, d, \ldots$ z nichž ovšem jest každá menší nežli x, a počet jejich n, vyjádříme číslo takové (jako desetinné číslo vůbec) výrazem:

$$ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \dots\dots + px^2 + qx + r,$$

nebo vysadíme-li x

$$(([(ax + b)x + c]x + d)x + e)x + f \text{ atd.}$$

Provedeme-li naznačené ve výraze tom počítání, dostaneme číslo soustavy desetinné, které se danému číslu na základě x rovná. Na př.

Máme-li číslo hexadické (základ 6) 35151 převesti na jemu rovné číslo desetinné soustavy, položme $x = 6$, $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$, $d = 5$, $e = 1$, $n = 5$, tedy

$$35151 = 3 \,.\, 6^4 + 5 \,.\, 6^3 + 1 \,.\, 6^2 + 5 \,.\, 6 + 1$$
$$= ([(3 \,.\, 6 + 5) \,.\, 6 + 1] \,.\, 6 + 5) \,.\, 6 + 1 = 5035$$ dle soustavy desetinné.

b) Máme-li naopak číslo soustavy desetinné převesti na jemu rovné číslo soustavy jiné, hledejme číslice tohoto totiž a, b, c, d, . . . Tyto však najdeme, dělíme-li předešlý výraz všeobecný

$$(([(ax + b)x + c]x + d)x + e)x + f \text{ atd.}$$

tolikrát $x$em, kolikrát vůbec možná. Jak z výrazu toho patrno, jest tento celý dělitelný $x$em až na člen f, který tedy zůstane co *první* zbytek. Dělíme-li podíl vyjma f co zbytek opět $x$em, bude jím tento celý dělitelný až na člen e, který zůstane co zbytek *druhý* atd., dělíme každý nový podíl (bez ohledu na zbytek) $x$em až přijdeme k podílu $(ax + b) : x = a$ a zbytek $+ b$. Postavíme-li vedle sebe, za posledním podílem (a), veškeré zbytky v pořádku opačném (b, c, d . . . f), dostaneme číslo soustavy x, které se rovná danému číslu soustavy desetinné. Na př. číslo soustavy desetinné 587 vyjádří se dle soustavy tetradické (základ 4) takto:

$$\left.\begin{array}{rcrl} 587 : 4 & = & 146 & \text{zbude } 3 \\ 146 : 4 & = & 36 & \quad\text{„}\quad 2 \\ 36 : 4 & = & 9 & \quad\text{„}\quad 0 \\ 9 : 4 & = & 2 & \quad\text{„}\quad 1 \end{array}\right\}$$ t. j. 587 = 21023 dle soustavy tetradické.

Podobně vyjádříme číslo soustavy desetinné 5035 v soustavě enneadické (základ 9) takto:

$$\left.\begin{array}{rcrl} 5035 : 9 & = & 559 & \text{zbytek } 4 \\ 559 : 9 & = & 62 & \quad\text{„}\quad 1 \\ 62 : 9 & = & 6 & \quad\text{„}\quad 8 \end{array}\right\}$$ t. j. 5035 = 6814 v soustavě enneadické.

Příklady.

1. Dělte: 1) $(ax + bx) : x$. 2) $(ax^3 + bx^2 + cx) : x$. 3) $16ax - 12ay) : 4a$. 4) $(18mnp + 54np) : 9np$. 5) $(21mn - 14mn^2 - 7mn^3) : 7mn$.

6) $(a^5b^4 - a^4b^3 - a^3b^2 + a^2b) : a^2b.$
7) $8x^2y^3 - 12x^3y^4 - x^4y^2) : 4x^2y.$
8) $(26m^4n^4 + 39m^3n^3 - 65m^2n^3) . 13m^2n^2.$
9) $(85x^5y^4z^7 - 119x^4y^7z^5 - 153x^7y^5z^4) : - 17x^4y^4z^4.$
10) $(- 108a^7b^3c^5d^6 + 90a^3b^7c^6d^5 - 72a^5b^6c^3d^7$
$+ 54a^6b^5c^7d^3) : - 18a^2b^3c^2d.$
11) $[(48x^2y^4z^{10} - 42x^3y^5z^{11}) : 2y^3z^5] : 3x^2z^5.$
12) $[(30m^5n^3p^{10} - 45m^7n^2p^9) : 3m^2p^3] : 5m^3n^2p^6.$
13) $[(56a^4b^6c^7 - 40a^5b^7c^8 + 24a^6b^9c^5) : 2b^3c^3] : 4a^3c^2.$
14) $[(70m^5n^5p^7 - 42m^4n^4p^6 + 14m^3n^2p^5) : 2m^3p^2] : 7n^2p^3.$
15) $(a^m - ab^n + a^nb) : a.$ 16) $(a^mb^n - a^nb^p) : ab.$
17) $(x^my^nz^p + x^ny^pz^m - x^py^mz^n) : x^2y^3z^4.$
18) $(a^mb^nc^p - a^nb^pc^m + a^pb^mc^n) : a^pb^nc^m.$
19) $(10a^3 - 6a^2b^2 - 5ab + 3b^3) : (5a - 3b^2).$
20) $(20a^5 + 15a^3b^2 - 8a^2b - 6b^3) : (4a^2 + 3b^2).$
21) $(8x^5 - 20x^2y^2 - 14x^3y^3 + 35y^5) : (2x^3 - 5y^2).$
22) $(6a^6 - 10a^2b^5 + 27a^4b^3 - 45b^8) : (3a^4 - 5b^5).$
23) $(6a^5 - 15a^3b^3 + 3a^3 + 8a^2b^2 - 20b^5 + 4b^2 - 6a^2 + 15b^3 - 3)$
$: (3a^3 + 4b^2 - 3).$
24) $(6x^5 - 2x^3y + 14x^3 + 15x^2y^4 - 12x^2 - 5y^5 + 35y^4 + 4y - 28)$
$: (2x^3 + 5y^4 - 4).$
25) $(a^2bc + abc^2 - ac^2d - ab^2c - b^2c^2 + 2bc^2d + abcd - c^2d^2)$
$: (ab + bc - cd).$
26) $(x^2y^2 - y^2z^2 + 2xyz^2 - x^2z^2) : (xy - yz + xz).$
27) $(m^4n^6 - 2m^2n^3p^2q^3 + p^4q^6 - m^2n^3 - p^2q^3) : (m^2n^3 - p^2q^3 + 1)$
28) $(a^4b^6c^8 - a^5b^7c^6 - a^7b^6c^5 - a^8b^4c^6) : (a^2b^3c^4 - a^3b^4c^2 - a^4b^2c^3).$
29) $(x^8 - x^7 - x^6 - x^5 + x^3 - x^2 - x - 1) : (x^3 - x^2 - x - 1).$
30) $(- a^5 + 5a^4 - 10a^3 + 10a^2 - 5a + 1) : (a^2 - 2a + 1).$
31) $(x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + ax - 1) : (x - 1).$
32) $(m^4 - 9m^2 - 12m - 4) : (m^2 - 3m - 2).$
33) $(x^3 + ax^2 + ax + 1) : (x + 1).$
34) $(x^5 + 198x^2 - 10609x + 20394) : (x^3 - 2x^2 + 103x - 206).$
35) $(4a^4b^2 - 12a^3b^3 + 9a^2b^4 - 16b^6 + 40b^3 - 25) : (2a^2b - 3ab^2$
$+ 4b^3 - 5).$
36) $(12x^4y^6 - 24x^2y^5z^3 + 4x^5y^3z - 63y^4z^6 + 106x^3y^2z^4 - 40x^6z^2)$
$: (6x^2y^3 + 9y^2z^3 - 10x^3z).$
37) $(49a^8b^8c^8 - 67a^6b^6c^6 - 11a^5b^5c^5 + 5a^4b^4c^4 + 11a^3b^3c^3 - 5a^2b^2c^2 - 1)$
$: (7a^3b^3c^3 + 9a^2b^2c^2 + 2abc + 1).$
38) $(a^8 - b^8) : (a - b).$ 39) $(a^{10} - b^{10}) : (a + b).$ 40) $(a^7 - b^7) : (a - b).$
41) $(a^9 + b^9) : (a + b).$ 42) $(a^5 + b^5) : (a - b).$
43) $(64a^6 - 729b^6) : (2a + 3b).$ 44) $(a^7b^2 + a^2b^7) : (a + b).$
45) $(a^8b^4 - 81a^4b^8) : (a^2 + 9b^2).$ 46) $(a^9b^3 + a^4b^3) : (a + b).$
47) $(m^7n - mn^7) : (m^2 - n^2).$ 48) $(125m^5n^2 + 27m^2n^8) : (5m + 3n^2).$
49) $(343m^{10} - 8m^4n^9) : (7m^2 - 2n^3).$ 50) $(x^4 - 1) : (x - 1).$
51) $(x^5 + 1) : (x + 1).$ 52) $(x^3 + 1) : (x - 1).$
53) $(x^6 - 1) : (x + 1).$ 54) $(x^6 + 1) : (x - 1).$
55) $(x^8 - 1) : (x^3 + x^2 + x + 1).$ 56) $(a^4 - 1) : (a^3 + a^2 + a + 1).$

57) $[a^3 + (n + 1)a^2 + (2n - 1)a + 2] : (a + 2)$.
58) $[bx^4 + (c - 2b)x^3 + (3b - c)x^2 + (c - 2b)x + b] : (x^2 - x + 1)$.
59) $[a^2b^5 - (3a + a^2)b^4 + (2 + a - a^2)b^3 - (1 + a^2)b^2 - b - a]$
$: (ab^2 - b + 1)$.
60) $([x^3 - (m - n - p)x^2 - (mn + mp - np)x - mnp] : (x - m)) : (x + p)$.
61) $([x^4 - (a + b + c - 1)x^3 + (ab + ac + bc - a - b - c)x^2$
$+ (ab + ac + bc - abc)x - abc] : (x - a)] : (x -- b)) : (x - c)$.
62) $(a^{n+1} - b^{n+1}) : (a - b)$. 63) $(a^{n+1} - 1) : (a + 1)$.
64) $(a^{n-1} + b^{n-1}) : (a + b)$. 65) $(1 - a^n) : (1 - a)$.

2. Převeďte čísla soustavy a) dyadické: 100110, b) triadické: 201022, c) tetradické: 20130331, d) hexadické: 543012354, e) hebdomadické: 236506612, f) dodekadické: 9678010088 na čísla téže hodnoty soustavy desetinné.

3. Převeďte čísla soustavy desetinné 13, 147, 5686, 13589, 432756 na čísla jim rovná soustavy a) dyadické, b) pentadické, c) hexadické, d) hebdomadické, e) enneadické, f) dodekadické.

Část' druhá.

I. Dělitelnost čísel.

§. 9.

1. Dělíme-li číslo kterés*) jiným a nezůstane-li žádného zbytku, říkáme, že jest první druhým *dělitelné*, na př.

$8 : 4 = 2$, $12 : 3 = 4$, $28 : 7 = 4$, $ab : a = b$ atd.

Dělenci (8, 12 atd.) říkáme zde *násobné* (dividuus) a děliteli (4, 3 atd.) *míra* dělence nebo *činitel* násobného. Je-li tedy číslo některé dělitelné jiným, jest vlastně dělitelné *dvěma* čísly totiž dělitelem i podílem, z nichž *každého* považujeme za míru dělitele.

2. *Každé číslo jest dělitelné samo sebou a jedničkou* (§. 7. d). Nemá-li číslo jiné míry kromě sama sebe a jedničky, říkáme mu *prvočíslo na prosto* (absolutní) na př. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 atd., je-li však ještě jinými čísly dělitelné, *číslo složené* (z činitelů) na př. 4, 6, 9, 15 atd. Číslo, které jest násobné čísla 2., jmenujeme *sudé* na př. 2, 4, 6, 8, 10 . . . vůbec $2n$, a každé jiné *liché* na př. 1, 3, 5, 7, 9 . . . vůbec $2n + 1$, kde n může býti kterékoli číslo celé. Prvočísla (mimo 2) jsou vesměs čísla lichá.

3. Každé číslo složené jest násobné všech čísel, kterými jest dělitelné. Z příčiny té říkáme mu *společné násobné*. Na př. 30 jest společné násobné (kromě jedničky a sama sebe) čísel: 2, 3, 5, 6, 10, 15, podobně 360 jest násobné čísel: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, ab jest násobné čísla a a b, a^2bc^2 čísel: a, a^2, b, c, c^2, a^2b, a^2bc, a^2c^2, bc^2, abc^2 atd. Poněvadž tedy na př. jest součin ab jakož i součin abn, $abmn$ atd., násobné čísla a a b, a poněvadž ze všech těchto součinů jest ab *nejmenší*, říkáme mu *nejmenší společné násobné* oněch čísel.

4. Je-li některým číslem *několik* čísel dělitelno, nazýváme ono *společnou mírou* těchto, na př. číslem 7 jsou dělitelná čísla 14, 21, 28, 35 atd., proto jest 7 společná míra těchto čísel. Mají-li dvě, tři, čtyři . . . čísla *několik* společných měr, bude mezi nimi některá *největší*. Na př.

80, 240 a 280

mají společné míry 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40;
tedy jest 40 jejich největší míra společná.

5. Nemají-li dvě, tři atd. čísla (kromě jedničky) žádné společné míry, říkáme jim *prvočísla vespolek* (relativní) na př. 8 a 15,

---

*) V této části rozumíme slovem „číslo“ vždy číslo celé.

14 a 45, 9, 14 a 20 atd. Dvě čísla po sobě jdoucí na př. a a $a+1$ jsou vždy prvočísla vespolek. Neboť je-li a jakýmsi číslem m dělitelné, nemůže týmže číslem býti dělitelné i $a+1$, poněvadž se $m \gtrless 1$, a naopak. Písmenky rozličné považují se vůbec v témže počtu za prvočísla vespolek.

6. *V přirozené řadě čísel jest prvočísel bez počtu.* Neboť je-li p největší známé prvočíslo vůbec, A součin všech prvočísel až po p ($A = 2 . 3 . 5 . 7 . 11 \dots . p$), jest $A+1$ buď prvočíslo aneb číslo složené. Je-li $A+1$ prvočíslo, jest na všechen způsob větší nežli p, poněvadž jest už A násobné p. Je-li však $A+1$ číslo složené, nemůže býti žádným prvočíslem od 2 do p dělitelné, poněvadž jest těmito dělitelné A, a čísla A a $A+1$ jsou dle předešlého prvočísla vespolek. Kdyby tedy $A+1$ bylo číslo složené, musil by jeden jeho činitel býti větší nežli p; proto není žádné prvočíslo poslední v řadě čísel.*)

7. *Je-li některé číslo dělitelné jiným, jest i jeho násobné tímto dělitelné.* Je-li tedy na př. a dělitelné m, jest i jak samozřejmo ab, ac, ad ... ax dělitelné m; 15 jest dělitelné 3mi a 5ti tedy i $15 . 2$, $15 . 3$, $15 . 4$ ... $15x$.

8. Je-li a i b dělitelné m, jest i $ax \pm by$, nechť jsou x, y čísla kterákoli, třeba i $x = y = 1$, dělitelné m.

Neboť je-li $a : m = q$, jest $a = mq$ a $ax = mqx$ } tedy součet
" $b : m = q'$, " $b = mq'$ a $by = mq'y$ } nebo rozdíl
$ax \pm by = mqx \pm mq'y = m(qx \pm q'y)$ jest m dělitelný.

9. Jsou-li rozdíly $a - b$ a $c - d$ číslem m dělitelné jest i
$a \pm c - (b \pm d)$, $ac - bd$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$ atd.
m dělitelné. Neboť
$a \pm c - (b \pm d) = (a - b) \pm (c - d)$
$ac - bd = (a - b)c + (c - d)b$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, podobně $c^2 - d^2 = (c + d)(c - d)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ " $c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + cd + d^2$ atd.
Na př. rozdíly $25 - 9$ a $19 - 7$ jsou dělitelné 4mi, proto jest i týmže číslem dělitelné
$(25 + 19) - (9 + 7) = 44 - 16 = 28 = 4 . 7$
$(25 - 19) - (9 - 7) = 6 - 2 = 4$
$25 . 19 - 7 . 9 = (25 - 9)19 + (19 - 7)9 = 16 . 19 + 12 . 9 = 4 . 103$

---

*) Veškerá prvočísla — jak dalece libo — můžeme (dle návodu Eratosthena) nalézti takto: Vypišme všechna lichá čísla 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 . . . . ., přetrhněme $3 \times 3 = 9$, a každé třetí číslo z následujících (t. j. násobné čísla 3), pak $5 \times 5 = 25$ a každé 5té číslo z následujících (t. j. násobné čísla 5), pak $7 \times 7 = 49$ a každé 7mé číslo z následujících atd. (přetrhnutá čísla vždy v to počítajíce). Čísla nezatrhnuta (zde neuzávorkovaná) jsou prvočísla. Na př.

	3	5	7	(9)	11	13	(15)	17	19
(21)	23	(25)	(27)	29	31	(33)	(35)	37	(39)
41	43	(45)	47	(49)	(51)	53	(55)	(57)	59
61	(63)	(65)	67	(69)	71	73	(75)	(77)	79 atd.

$25^2 - 9^2 = (25 + 9)(25 - 9) = 4 . 136$
$19^2 - 7^2 = (19 + 7)(19 - 7) = 4 . 78$ atd.

10. *Je-li dělitel a zbytek jakýms číslem dělitelný, jest jím dělitelný i dělenec.*

Neboť dá-li $a : b$ podílem q a zbytkem r, totiž

$$\begin{array}{l}\underline{a} : b = q\\ r\end{array}$$

jest
$$a = bq + r.$$

A má-li b (tedy i bq) a r společného dělitele na př. m, bude

$$\left.\begin{array}{l} b : m = p \text{ nebo } b = mp \\ r : m = p' \quad ,, \quad r = mp' \end{array}\right\} \text{tedy dosazeno}$$
$$a = mpq + mp' = m(pq + p') \text{ čili } a \text{ dělitelné } m \text{ (dle 7).}$$

Poučku tuto vyjádřujeme i slovy: *každá míra dělitele a zbytku jest společná děliteli, zbytku a dělenci.* Je-li tato děliteli a zbytku společná míra vůbec *největší*, jest i největší *mírou společnou* zbytku, dělitele a dělence.

A naopak: Je-li dělitel a dělenec jakýms číslem m dělitelný, jest i zbytek tímže číslem dělitelný. Neboť z předešlé rovnice

$$a = bq + r \text{ plyne}$$
$$a - bq = r.$$

Má-li tedy a a b (tedy i a a bq) společnou míru m, jest jí (dle 7) i zbytek r dělitelný.

11. Zdali některé *číslo desetinné* dělitelné jest čísly 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 a 11, aneb násobným těchto čili nic, poznáváme z určitých známek snáze, než kdybychom ono číslo některým z těchto skutečně dělili. Rozvedeme-li si totiž na př. číslo N na víceělen dle mocniny 10, totiž

$$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + \ldots .$$

kde $a, b, c, d, e, \ldots$ jsou čísla od 0 do 9, bude N zajisté dělitelné každým číslem, jímž jeho sčítanci dělitelní jsou. A sice:

a) *N jest dělitelné 2ma, jsou-li jeho jednotky* (a) *2ma dělitelné.* Neboť $10b$, 10^2c, 10^3d atd. jsou čísla sudá, proto i 2ma dělitelná, a záleží tedy dělitelnost N 2ma na jednotkách a, jsou-li tyto 2ma dělitelné, t. j. *je-li a sudé,* jsou všichni sčítanci tedy i N 2ma dělitelné; na př.

$$72 : 2 = 36,\ 156 : 2 = 78,\ 3570 : 2 = 1785 \text{ atd.}$$

b) *N jest dělitelné 4mi, jsou-li jeho desítky a jednotky 4mi dělitelné.* Neboť 100 a každé jeho násobné tedy i 10^2c, 10^3d, 10^4e atd., jest 4mi dělitelné, proto záleží dělitelnost N 4mi pouze na $10b + a$, a je-li tento součet dělitelný 4mi, jsou všichni sčítanci tedy i N dělitelné, na př. $712 : 4 = 178$, $1428 : 4 = 357$ atd.

c) *N jest dělitelné 8mi, jsou-li jeho sta, desítky a jednotky 8mi dělitelné.* Příčina toho plyne z předešlého, na př. $6176 : 8 = 772$, $257432 : 8 = 32179$ atd.

d) *N jest dělitelné 5ti, jsou-li jeho jednotky 5ti dělitelné, tedy $a = 5$ nebo $a = 0$, a 10ti, jsou-li jednotky $a = 0$.* Příčina toho jako prvé, na př. 7865 : 5 = 1573, 246890 : 5 = 49378, 5720 : 10 = 572, 682170 : 10 = 68217 atd.

e) *N jest dělitelné buď 3mi nebo 9ti, je-li součet jeho číslic buď 3mi neb 9ti dělitelný.* Neboť dáme-li číslu N podobu

$$N = a + (9b + b) + (99c + c) + (999d + d) + (9999e + e) + \ldots$$

nebo

$$N = 9b + 99c + 999d + 9999e + \ldots + a + b + c + d + e + \ldots$$

pozorujeme, že první jeho sčítanci jsou násobky 9ti, tedy i 3mi i 9ti dělitelní. Aby tedy celé číslo N buď 3mi buď 9ti dělitelné bylo, musí součet

$$a + b + c + d + e + \ldots$$

t. j. součet číslic buď 3mi buď 9ti býti dělitelný, na př.

462 dá součtem číslic $4 + 6 + 2 = 12 = 3 . 4$, proto jest 462 dělitelné 3mi, $462 : 3 = 154$, a číslo

79785 dá součtem číslic $7 + 9 + 7 + 8 + 5 = 36 = 9 . 4$, tedy jest 9ti dělitelné, totiž

$79785 : 9 = 8865$ atd.

f) *N jest dělitelné 11ti, je-li rozdíl součtu číslic na místech lichých a součtu číslic na místech sudých buď 0 buď dělitelný 11ti.*

Neboť dáme-li číslu N podobu

$$N = a + (11b - b) + (99c + c) + (1001d - d) + (9999e + e) + \ldots$$

nebo

$$N = 11b + 99c + 1001d + 9999e + \ldots + (a + c + e +) - (b + d + f),$$

jsou první sčítanci násobky 11ti, tedy i 11ti dělitelní, a proto záleží to na výrazu

$a + c + e + \ldots$ t. j. na součtu číslic na místech lichých a na
$b + d + f + \ldots$ t. j. „ „ „ „ „ sudých

jichž rozdíl musí býti 11ti dělitelný, aby i N 11ti dělitelné bylo, na př. v čísle

57486 jest součet číslic na místech lichých $6 + 4 + 5 = 15$, a součet číslic na místech sudých $7 + 8 = 15$, rozdíl obou součtů $15 - 15 = 0$, proto jest číslo to dělitelné 11ti, totiž

$57486 : 11 = 5226$; nebo v čísle

$$7064519 \text{ jest } \left.\begin{array}{r} 9 + 5 + 6 + 7 = 27 \\ 1 + 4 = \underline{\;\;5} \end{array}\right\} \text{rozdíl} \\ 22 = 11 . 2, \text{ tedy}$$

$7064519 : 11 = 642229$ atd.

j) Je-li N dělitelné číslem m a spolu číslem n, jest dělitelné i součinem mn, neboť $(N : m) : n = N : mn = q$ (§. 7. i). Podobně jest $[(N : m) : n] : p = N : mnp = q$ atd.

Je-li tedy N dělitelné 2ma a 3mi, jest dělitelné i $2 . 3 = 6$ti
„ „ „ „ 3mi „ 4mi, „ „ „ $3 . 4 = 12$ti
„ „ „ „ 3mi „ 5ti „ „ „ $3 . 5 = 15$ti atd.

Na př. 4716 jest dělitelné 4mi a 9ti, tedy také $4 . 9 = 36$ti
totiž $4716 : 36 = 131$;

2145 jest dělitelné 3mi, 5ti a 11ti tedy i 3 . 5 . 11 = 165ti totiž 2145 : 165 = 13 atd.

h) Jiných známek dělitelnosti čísel prvočísly vůbec nemáme aneb jsou takové, že v praktickém počítání žádného prospěchu neposkytují. Kdyby tedy dáno bylo číslo, na kterém bychom žádné známky z uvedených nepozorovali, musili bychom je zkoušebně děliti 7, 13, 17, 19 atd., vůbec všemi po sobě jdoucími prvočísly (pomocí poznámky u 6.) tak dlouho, až bychom buď na pravého dělitele uhodili, aneb až bychom dostali podíl menší dělitele. V případě druhém bylo by zkoušené číslo prvočíslo (§. 10).

Příklady.

1. Kterými prvočísly jsou dle známek dělitelná čísla: 322, 7075, 8472, 9075, 84392, 10656, 123456, 12345678, 19170, 210870, 35244, 876800, 444444, 555555?

2. Kterými násobnými jsou uvedená čísla dělitelná?

3. Dle našeho letopočtu jest každý rok, který jest 4mi dělitelný, přestupný. Které roky jsou přestupné od 1876 do 1899?

4. Odečteme-li od kteréhokoli čísla jiné, které má tytéž číslice v *opačném* pořádku, jest rozdíl dělitelný 9ti. Proč?

5. Odečteme-li od kteréhokoli čísla jiné, které má tytéž číslice v *jakémkoli* pořádku, jest rozdíl dělitelný 9ti. Proč?

II. Výsledky dělitelnosti.

§. 10.

1. Prvočinitelé složených čísel.

Prvočíslu co činiteli říkáme *prvočinitel* na př. 3 . 11 . 17 . 19 atd.

a) Složené číslo desetinné rozvede se na prvočinitele, dělíme-li doň nejprvé nejmenším v něm obsaženým prvočíslem, podíl dělí se pak opět nejmenším prvočíslem, kterým vůbec dělitelný jest, a tak podobně dále, až podíl bude = 1. Dělitelé takto určení jsou vesměs prvočinitelé daného čísla, na př.

$$\begin{array}{r|r} 660 & 2 \\ 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{t. j. } 660 = 2 . 2 . 3 . 5 . 11 \\ \qquad\quad\; = 2^2 . 3 . 5 . 11 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r|r} 3520 & 2 \\ 1760 & 2 \\ 880 & 2 \\ 440 & 2 \\ 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \left\{ \text{t. j. } 3520 = 2^6 . 5 . 11 \right.$$

Aby se dělení skrátilo, může se dané číslo — možná-li — ihned děliti $4 = 2^2$, $6 = 2 . 3$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 . 5$ atd.

Kdyby dané číslo nebylo dělitelné žádným z čísel, které dle známek dělitelnosti v něm co činitele poznáváme, musili bychom je děliti po sobě prvočísly 7, 13, 17, 19 atd. (dle §. 9. 6. poznámka), a sice tak dlouho, dokud by podíl nebyl menší dělitele. Byl-li by podíl jednou menší dělitele, jest to známkou, že zkoušené číslo jest prvočíslo na prosto. Na př.

$\underset{\overline{4}}{1411} : 7 = 201$, $\underset{\overline{7}}{1411} : 13 = 108$, $1411 : 17 = 83$, t. j. $1411 = 17 . 83$,

$\underset{\overline{5}}{2357} : 7 = 336$, $\underset{\overline{4}}{2357} : 13 = 181$, $\underset{\overline{11}}{2357} : 17 = 138$, $\underset{\overline{1}}{2357} : 19 = 124$,

$\underset{\overline{11}}{2357} : 23 = 102$, $\underset{\overline{8}}{2357} : 29 = 81$, $\underset{\overline{1}}{2357} : 31 = 76$, $\underset{\overline{26}}{2357} : 37 = 63$,

$\underset{\overline{20}}{2357} : 41 = 57$, $\underset{\overline{35}}{2357} : 43 = 54$, $\underset{\overline{7}}{2357} : 47 = 50$, $\underset{\overline{25}}{2357} : 53 = 44$,

poněvadž jest podíl $44 <$ dělitele 53, byly by při dalším dělení veškeré podíly ještě menší. Poněvadž jsme však prvočísla menší čísla 44 už zkoušeli, a žádným dané číslo dělitelné nebylo, nemusí se dále děliti; číslo 2357 jest prvočíslo.

b) U čísel obecných, jsou-li *jednočleny*, udává mocnitel počet stejných mocněnců co činitelů. Z té příčiny dostačí, rozvedou-li se pouze součinitelé na prvočinitele, na př.

$$36a^2b^3c = 2^2 . 3^2 . a^2 . b^3 . c.$$

c) Z čísel obecných, jsou-li *vícečleny*, lze dle předešlého pouze takové na činitele rozvesti, které mají buď jednoho neb několik činitelů společných (§. 6. 5) na př.

$$6a^2b + 3ab^2 + 9a^2b^2 = 3ab(2a + b + 3ab) \text{ atd.},$$

aneb které jsou podoby (dle §. 8. 2)

$a^n - b^n$, nechť jest n sudé nebo liché, a

$a^n + b^n$, je-li n liché;

aneb takové, které vznikly ze součinu dvou dvojčlenů podoby

$$\left.\begin{array}{l}(x + a) . (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab\\ (x + a) . (x - b) = x^2 + (a - b)x - ab\\ (x - a) . (x + b) = x^2 - (a - b)x - ab\\ (x - a) . (x - b) = x^2 - (a + b)x - ab\end{array}\right\}$$

kde a, b jsou prvočísla vespolek, tak že ze součinu ab souditi můžeme na součet $a + b$, nebo na rozdíl $a - b$.

Na př. $x^2 + 7x + 10$, z třetího členu $ab = 10 = 2 . 5$ soudíme, že $a + b = 2 + 5 = 7$, tedy $a = 2$, $b = 5$ (nebo naopak) tedy $x^2 + 7x + 10 = (x + 2) . (x + 5)$.

Podobně:

$x^2 + 2x - 15 = (x - 3) . (x + 5)$, $-15 = -3 . 5$, $+2 = 5 - 3$

$x^2 - 3x - 28 = (x - 7) . (x + 4)$, $-28 = -7 . 4$, $-3 = -7 + 4$

$x^2 - 18x + 77 = (x - 7) . (x - 11)$, $+77 = -7 . -11$, $-18 = -7 - 11$

atd.

Jiné řešení podobných vícečlenů poznáme u složitých rovnic druhého stupně (§. 33. 10).

Příklady.

Rozveďte na prvočinitele: 1. 105, 234, 1584, 5346, 26345, 114752, 394416, 262350, 2016000, 181440, 1048640, 75271, 657428.

2. $4a^2 - 1$, $9a^2 - 1$, $25a^2 - 49b^2$, $81x^2 - 4y^2$, $100m^2 - n^2$, $64m^2 - 9n^2$, $x^3 - y^3$, $x^3 + y^3$, $x^5 - y^5$, $x^5 + y^5$, $x^{10} - y^{10}$, $x^{11} + y^{11}$, $(2x)^4 - (3y)^4$, $64x^3 + 27y^3$, $10000a^4 - 1$, $32a^5 + 1$, $81x^4 + y^4$.

3. Rozveďte na činitele: $x^2 + 9x + 20$, $x^2 + 20x + 91$, $x^2 + 13x + 30$, $x^2 + 12x + 35$, $x^2 + 7x - 44$, $x^2 + 3x - 40$, $x^2 + 4x - 45$, $a^2 + 14a - 51$, $a^2 + 6a - 55$, $x^2 - 4x - 45$, $x^2 - 4x - 21$, $x^2 - 6x - 55$, $a^2 - 8a - 65$, $a^2 - a - 56$, $x^2 - 5x + 4$, $x^2 - 7x + 6$, $x^2 - 13x + 40$, $a^2 - 20a + 91$, $a^2 - 22a + 85$.

2. Největší společná míra.

Největší společná míra dvou neb více čísel jest součin veškerých jim společných prvočinitelů. Ona se vyhledává dvojím způsobem takto:

a) Rozveďme daná čísla na prvočinitele a násobme *společné* vespolek. Součin ten jest největší společná míra daných čísel. Na př. čísla 260 a 390 skládají se z prvočinitelů

$$\begin{array}{r|l} 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 390 & 2 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \end{array}$$

t. j. $260 = 2 . 2 . 5 . 13$ } mají tedy obě čísla společné prvočinitele
$390 = 2 . 3 . 5 . 13$ } 2, 5, 13, proto jest jejich největší míra
$2 . 5 . 13 = 130$.

Dělíme-li největší společnou mírou do každého z daných čísel, jsou podíly prvočísla vespolek, na př. $260 : 130 = 2$ a $390 : 130 = 3$. Výkon ten si usnadníme, vysadíme-li pouze *nejmenší společné* prvočinitele daných čísel, jichž součin dá pak největší společnou míru, na př.

$$\begin{array}{rr|l} 260, & 390 & 2 \\ 130, & 195 & 5 \\ 26, & 39 & 13 \\ 2, & 3 & \end{array} \quad 2 . 5 . 13 = 130 \text{ jest největší sp. m. jako prvé.}$$

Podobně

$$\begin{array}{rr|l} 132, & 220 & 2 \\ 66, & 110 & 2 \\ 33, & 55 & 11 \\ 3, & 5 & \end{array} \quad 2 . 2 . 11 = 44 \text{ jest nejv. sp. m. čísel 132 a 220.}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 252, & 294, & 630 & 2 \\ 126, & 147, & 315 & 3 \\ 42, & 49, & 105 & 7 \\ 6, & 7, & 15 & \end{array} \quad 2 . 3 . 7 = 42 \text{ jest nejv. sp. m. čísel 252, 294, 630.}$$

b) Skládají-li se však čísla daná z prvočinitelů, kterých dle známek dělitelnosti v nich poznati nelze, jest podobné vyhledávání největší společné míry pracné, a proto vyhledává se v případě tom snadnějším způsobem takto:

Jsou-li daná čísla a a b, a je-li $a > b$, nemůže býti jejich společná míra větší nežli b. Dělíme-li tedy b do a, poznáme hned, je-li a dělitelné b čili nic. Je-li a dělitelné b, jest b největší společnou mírou obou, není-li však a dělitelné b, zůstane zbytek r. Avšak největší míra zbytku (r) a dělitele (b) jest největší mírou dělitele a dělence (§. 9. 10). Z té příčiny se skoumá, není-li zbytek r úplně obsažen v b. Je-li b dělitelné r, jest r největší mírou sama sebe a dělitele, tedy i dělitele a dělence; není-li b dělitelné r, zůstane zbytek r', kterým se opět dělí do r atd. Poněvadž jest každý zbytek menší dělitele, tedy i každý zbytek následující menší předcházejícího, bude poslední zbytek vždy $= 0$, tak že poslední dělitel jest největší společná míra původního dělitele a dělence nebo daných čísel a a b. Je-li poslední dělitel $= 1$, jsou daná čísla prvočísla vespolek.

Má-li se vyhledati největší společná míra k několika číslům na př. $a, b, c, d \ldots$ vyhledá se nejprvé k číslům a, b, a je-li tato na př. m, hledá se k m a c největší společná míra, a je-li tato na př. n, hledá se k n a d atd. Na př. hledáme-li největší společnou míru čísel 8580 a 5808, pracujme takto

$$\begin{aligned} 8580 : 5808 &= 1 \\ 5808 : 2772 &= 2 \\ 2772 : 264 &= 10 \\ 264 : 132 &= 2 \end{aligned}$$

t. j. poslední dělitel 132 jest největší společnou mírou čísel 8580 a 5808.

Obyčejně píšeme výkon ten takto:

$$\begin{array}{r|r|l} 8580 & 5808 & 1 \\ 2772 & 264 & 2 \\ 132 & & 10 \\ & & 2 \end{array}$$

t. j. 5808 do 8580 jde 1, zbytek 2772 do 5808 jde 2krát, zbytek 264 do 2772 jde 10, zbytek 132 do 264 jde 2krát; 132 jest nejv. sp. m. čísel 8580 a 5808 jako prvé.

Podobně
$$\begin{array}{r|r|l}
7864 & 5713 & 1\\
2151 & 1411 & 2\\
740 & 671 & 1\\
69 & 50 & 1\\
19 & 12 & 1\\
7 & 5 & 9\\
2 & 1 & 1\\
 & & 2\\
 & & 1\\
 & & 1\\
 & & 1\\
 & & 2
\end{array}$$

t. j. 7864 a 5713 jsou prvočísla vespolek.

U čísel 882, 1323, 1470 vyhledejme nejprvé nejv. spol. m. čísel dvou, a pak této největší sp. míry a čísla třetího.

$$\begin{array}{r|r|l}
882 & 1323 & 1\\
\text{„} & 441 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|l}
441 & 1470 & 3\\
\text{„} & 147 & 3
\end{array}$$

t. j. 147 jest nejv. sp. m. čísla 441 a 1470, avšak 441 jest nejv. sp. m. čísel 882 a 1323, tedy jest i 147 nejv. sp. m. čísel 882, 1323 a 1470.

Podobně se určuje nejv. sp. m. u výrazů algebraických, na př.

$$\begin{array}{r|r|l}
10a^4 - 6a^3 - 3a^2 + 3a - 1 & 5a^3 + 2a^2 - 2a + 1 & 2a - 2\\
10a^4 + 4a^3 - 4a^2 + 2a & 5a^3 - 3a^2 + a & a + 1\\
- \quad - \quad + \quad - \qquad\qquad & - \quad + \quad - \qquad & \\
\hline
\text{„} \quad -10a^3 + a^2 + a - 1 & \text{„} \quad 5a^2 - 3a + 1 & \\
-10a^3 - 4a^2 + 4a - 2 & 15a^2 - 3a + 1 & \\
+ \quad + \quad - \quad + & - \quad + \quad - & \\
\hline
\text{„} \quad 5a^2 - 3a + 1 & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} &
\end{array}$$

t. j. $5a^2 - 3a + 1$ jest nejv. sp. m. daných výrazů.

$x^4 - 8x^2 + 16$, $x^4 - 9x^2 + 20$, $x^3 - x^2 - 3x + 2$

$$\begin{array}{r|r|l}
x^4 - 8x^2 + 16 & x^4 - 9x^2 + 20 & 1\\
x^4 - 9x^2 + 20 & x^4 - 4x^2 \qquad & x^2 - 5\\
- \quad + \quad - \qquad & - \quad + \qquad\qquad & \\
\hline
\text{„} \qquad x^2 - 4 & \text{„} \quad -5x^2 + 20 & \\
 & -5x^2 + 20 & \\
 & + \quad - \qquad & \\
\hline
 & \text{„} \qquad \text{„} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l}
x^2 - 4 & x^3 - x^2 - 3x + 2 & x - 1\\
x^2 - 2x & x^3 \qquad - 4x \qquad & x + 2\\
- \quad + \quad & - \qquad + \qquad\qquad & \\
\hline
2x - 4 & \text{„} \quad -x^2 + x + 2 & \\
2x - 4 & -x^2 \qquad + 4 & \\
- \quad + \quad & + \qquad\quad - & \\
\hline
\text{„} \quad \text{„} & \text{„} \qquad x - 2 &
\end{array}$$

t. j. $x - 2$ jest nejv. sp. m. daných výrazů.

Dělíme-li nejv. sp. mírou daná čísla, musejí býti veškeré podíly prvočísla vespolek (dle a.)

c) Nejv. sp. m. dvou čísel se nemění, násobíme-li neb dělíme-li je číslem třetím, které jest s každým z daných prvočíslo. Neboť mají-li čísla a a b nejv. sp. m. m, jest

$$\begin{array}{lcl} a : m = p & \text{a} & b : m = q \text{ nebo} \\ a = mp & \text{„} & b = mq, \end{array}$$

kde m, p, q jsou prvočísla vespolek, poněvadž jest m *největší* sp. m. čísel a a b. Násobíme-li kteroukoli z těchto rovnic číslem n, které jest prvočíslo i s a i s b, tedy i s p a q, a necháme-li druhou rovnici bez proměny, bude na př.

$$an = mnp \text{ a jako prvé } b = mq, \text{ nebo } a = mp \text{ a } bn = mnq$$

t. j. an a b, nebo mnp a mq (podobně a a bn, nebo mp a mnq) mají opět m nejv. sp. m.

A kdybychom některou z rovnic oněch číslem n dělili, dostali bychom z rovnice

$$\begin{array}{lcl} a = mp & \text{neb} & b = mq \\ a : n = mp : n & \text{„} & b : n = mq : n \text{ čili (dle §. 7. f)} \\ a : n = m(p : n) & \text{„} & b : n = m(q : n) \end{array}$$

t. j. $a : n$ a $b : n$ nebo $m(p : n)$ a $m(q : n)$ mají opět nejv. sp. m. m.

Co zde řečeno o a a b, platí vůbec o dělenci a děliteli, tedy i o děliteli a zbytku, pakli první dělíme druhým.

Důležitosti nabývá poučka tato při vyhledávání nejv. sp. m. u takových výrazů, které původně nejsou spolu dělitelné, jakož i tam, kde není zbytek, kterým se děliti má předcházející dělitel, v tomto úplně obsažen.

Na př. Abychom vyhledali nejv. sp. m. výrazů

$$x^3 - 2x^2y - 9xy^2 + 18y^3 \text{ a } 2x^2 - xy - 6y^2,$$

z nichž jeden druhým dělitelný není, násobme nejprvé první výraz 2ma, a pak dělme jako prvé, totiž

$$\begin{array}{lr|r|l}
 & 2x^3 - 4x^2y - 18xy^2 + 36y^3 & 2x^2 - xy - 6y^2 & x \\
 & 2x^3 - x^2y - 6xy^2 & 2x^2 + 8xy - 24y^2 & 2, \\
 & - \quad + \quad + & - \quad - \quad + & \text{děleno} \\ \cline{2-3}
\text{děleno } -3y \text{ do} & -3x^2y - 12xy^2 + 36y^3 & -9xy + 18y^2 & -\ 9y, \\
(\text{děleno do dělitele}) & x^2 + 4xy - 12y^2 & x - 2y & \text{do pře-} \\
 & x^2 - 2xy & & \text{dešlého} \\
 & - \quad + & & \text{zbytku} \\ \cline{2-2}
 & 6xy - 12y^2 & & \text{dostane-} \\
 & 6xy - 12y^2 & & \text{me} \\
 & - \quad + & & \\ \cline{2-2}
 & \text{„} \qquad \text{„} & & x + 6y
\end{array}$$

t. j. $x - 2y$ jest nejv. sp. m. obou výrazů.

Příklady.

Vyhledejte největší společnou míru čísel 1. 104, 130; 1680, 1050; 8415, 11220; 25410, 65219; 102906, 146630; 123556, 19987; 68572, 478901.

2. 455, 2821, 3731; 4914, 6858, 16510; 11375, 19695, 70980; 10815, 34608, 36771; 14808, 32084, 77742; 7641, 8973, 9738.

3. $8a^2 - 2ab - 15b^2$, $16a^2 - 16ab - 5b^2$;
$x^3 + x^2y - xy - y^2$, $x^3 - x^2y - xy + y^2$;
$m^3 - m^2 - 4m + 4$, $2m^3 + m^2 - 8m - 4$;
$6m^2n^2 - 17mn + 5$, $8m^2n^2 - 6mn - 35$.

4. $x^4 - 4x^2 + 5x - 4$, $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2$;
$6x^4y^2 - 10x^3y^3 + x^2y - 5xy^2 - 1$, a
$12x^4y^2 - 17x^3y^3 + 15x^2y^4 - 13x^2y + 14xy^2 + 3$;
$x^7 + x^6 - x - 1$, $x^7 - x^6 - x + 1$;
$4a^2 + 8ac - 9b^2 + 6bc - c^2$, $6a^2 - 13ab + 5ac + 6b^2 - 5bc + c^2$.

5. $6a^3 + 10a^2 - 3a - 5$, $10a^4 + 2a^3 - 7a^2 - a + 1$, a
$4a^5 + 4a^4 - a - 1$;
$x^3 - 4x^2 - 4x - 5$, $x^3 + 8x^2 + 8x + 7$, $x^3 + 9x^2 + 9x + 8$;
$a^6 - a^4b - a^2b^4 + b^5$, $2a^5 - a^4b^2 - 2ab^4 + b^6$, a
$3a^6 - a^5 - 3a^2b^4 + ab^4 + a^4 - b^4$;
$x^4 - x^3 - xy^3 + y^3$, $x^3 - y^3$ a
$2x^4 - 4x^3y - 4x^2y^2 - 3x^3 - 6x^2y - 6xy^2 - 6xy^3 - 9y^3$.

3. Nejmenší společné násobné (dividuus).

a) Jsou-li z daných čísel $a, b, c, \ldots$ vždy dvě a dvě prvočísla vespolek, jest jejich nejmenší násobné součin abc. . , poněvadž není žádného čísla menšího, v kterém by a a spolu b a c v jednom, co činitelé obsažena byla. Na př. čísla 2, 5, 7 mají nejmenší společné násobné $2 \,.\, 5 \,.\, 7 = 70$, 4, 7, 9 číslo $4 \,.\, 7 \,.\, 9 = 252$ atd.

b) Nejsou-li z daných čísel $a, b, c \ldots$ vždy dvě a dvě prvočísla vespolek, vyhledáme jejich nejmenší násobné, rozvedeme-li je nejprvé na prvočinitele, a z těchto uděláme-li takový součin, aby v něm *každý z rozličných činitelů v nejvyšší mocnině* obsažen byl. Na př. Abychom určili nejmenší společné násobné čísel

280, 360, 540

rozveďme 280 na $2^3 \,.\, 5 \,.\, 7$
360 „ $2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5$ dle 1 . *a.*
540 „ $2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 5$

násobíme-li všechny *rozličné* činitele v *nejvyšší* mocnině vespolek, dostaneme nejm. sp. n. daných čísel, totiž

$$2^3 \,.\, 3^3 \,.\, 5 \,.\, 7 = 8 \,.\, 27 \,.\, 5 \,.\, 7 = 7560.$$

Nejm. sp. n. jest každým z daných čísel dělitelné totiž $7560 : 280 = 27$, $7560 : 360 = 21$, $7560 : 540 = 14$.

Podobně se najde nejm. sp. n. výrazů:

$$12a^2bc^3,\ 15ab^2c^2,\ 27abc^3, \text{ takto:}$$

$$12a^2bc^3 = 2^2 \,.\, 3 \,.\, a^2 \,.\, b \,.\, c^3$$
$$15ab^2c^2 = 3 \,.\, 5 \,.\, a \,.\, b^2 \,.\, c^2$$
$$27abc^3 = 3^3 \,.\, a \,.\, b \,.\, c^3$$

a nejm. sp. n. všech jest $2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 5 \,.\, a^2 \,.\, b^2 \,.\, c^3 = 540a^2b^2c^3$.

c) Jak už prvé podotknuto, jest rozvádění na prvočinitele zvláště čísel větších nesnadné. Z té příčiny objeven způsob jiný, jímž se snadněji určí nejm. sp. n. dvou neb několika čísel. Mají-li totiž čísla a a b nejv. sp. míru na př. m, jest

$a : m = p$ nebo $a = mp$

$b : m = q$ „ $b = mq$. Kde p, q, m, jsou prvočísla vespolek.

Z toho patrno, že nejmenší společné násobné čísel a a b musí míti činitel

m, p, q t. j. že jím bude součin mpq.

Součin mpq můžeme naznačiti buď $mp \,.\, q = a \,.\, (b : m)$,

neb $mq \,.\, p = b \,.\, (a : m)$.

Z výsledků $a \,.\, (b : m)$ a $b \,.\, (a : m)$ patrno, že se největší společná míra (m) dělí do kteréhokoli z daných čísel (b neb a), a podíl ten že se násobí číslem druhým (a neb b), součin tento jest nejm. sp. n. daných čísel. Na př. Abychom vyhledali nejm. sp. n. čísel 387 a 215, určeme (dle 2) jejich nejv. sp. m. totiž

$$\left.\begin{array}{r|r|l} 387 & 215 & 1 \\ 172 & 43 & 1 \\ \text{„} & & 4 \end{array}\right\}$$

t. j. 43 (= m), touto dělme do čísla prvního a ná-
$387 : 43 = 9$ sobme podílem číslo druhé; nebo
$9 \,.\, 215 = 1935$ dělme jí do čísla druhého a násobme
nebo $215 : 43 = 5$ podíl číslem prvním.
$5 \,.\, 387 = 1935$,

1935 jest nejm. spol. n. obou čísel a musí býti každým z nich dělitelné, totiž

$$1935 : 387 = 5 \text{ a } 1935 : 215 = 9.$$

Podobně u čísel 335 a 469 vyhledáme nejv. sp. m. 67, a pomocí jí bude

$$\left.\begin{array}{ll} 335 : 67 = 5, & 5 \,.\, 469 = 2345 \\ \text{nebo } 469 : 67 = 7, & 7 \,.\, 335 = 2345 \end{array}\right\} \text{nejm. sp. n.}$$

Výrazy algebraické $a^2 - 2ab - 3b^2$ a $a^2 + 4ab - 21b^2$ mají nejv. sp. m. $a - 3b$, proto bude jejich nejm. sp. n.

$$(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b) = a + b,$$
$$(a + b) \,.\, (a^2 + 4ab - 21b^2) = a^3 + 5a^2b - 17ab^2 - 21b^3,$$
$$\text{nebo } (a^2 + 4ab - 21b) : (a - 3b) = a + 7b,$$
$$(a + 7b) \,.\, (a^2 - 2ab - 3b^2) = a^3 + 5a^2b - 17ab^2 - 21b^3.$$

d) Má-li se určiti nejm. sp. n. tří, čtyř atd. čísel (a, b, c nebo a, b, c, d), jichž činitelé společní na první pohled patrni nejsou, vyhledejme nejprvé nejm. sp. n. čísel dvou a, b n. p. s, pak čísel s a c n. p. t, pak čísel t a d n. p. u atd. V číslu s jsou obsažena čísla a a b, a nejmenší společné násobné čísel s a c musí býti nejm. sp. n. čísel a, b, c atd.

Na př. Má-li se určiti nejm. sp. n. čísel

153, 187 a 204,

vyhledejme nejprvé nejv. sp. m. čísel 153 a 187, která jest 17, proto bude

153 : 17 = 9, 9 . 187 = 1683 nejm. sp. n. oněch dvou čísel.

Pak vyhledejme nejv. sp. m. čísel 1683 a 204, která jest 51, a proto opět bude

204 : 51 = 4, 4 . 1683 = 6732 nejm. sp. n. čísel 1683 a 204, tedy i nejmenší společné násobné čísel 153, 187 a 204.

Z výrazů $20x^2 + xy - y^2$, $10x^2 - 7xy + y^2$, $8x^3 - 10x^2y + xy^2 + y^3$ mají první dva největší společnou míru $5x - y$, tedy nejm. spol. n.

$(20x^2 + xy - y^2) : (5x - y) = 4x + y$,

$(4x + y)(10x^2 - 7xy + y^2) = 40x^3 - 18x^2y - 3xy^2 + y^3$,

A výrazy $40x^3 - 18x^2y - 3xy^2 + y^3$ a $8x^3 - 10x^2y + xy^2 + y^3$ mají nejv. sp. m.

$8x^2 - 2xy - y^2$, a z té příčiny jest

$(40x^3 - 18x^2y - 3xy^2 + y^3) : (8x^2 - 2xy - y^2) = 5x - y$ a

$(8x^3 - 10x^2y + xy^2 + y^3) . (5x - y) =$

$40x^4 - 58x^3y + 15x^2y^2 + 4xy^3 - y^4$ nejm. sp. n.

e) Má-li se vyhledati nejm. sp. n. několika čísel, jichž činitele dle známek dělitelnosti v nich snadno poznati lze, napišme daná čísla v pořádku vzestupném vedle sebe a vysaďme nejmenšího alespoň dvěma číslům společného prvočinitele. Tímto dělme čísla jím dělitelná, a vysazujme podobně tak dlouho vždy nejmenšího prvočinitele dokud konečné podíly nejsou vesměs po dvou prvočísla vespolek. Součin vysazených čísel a konečných podílů jest nejmenší společné násobné čísel daných. Je-li některé číslo z daných v jiném hned na počátku co činitel obsaženo, vypustí se. Tak na př. vyhledáme nejm. sp. n. čísel 10, 15, 52, 69, 92 takto:

10,	15,	52,	69,	92	2
5	15	26	69	46	2
5	15	13	69	23	3
5	5	13	23	23	5
1	1	13	23	23	

to jest 2 . 2 . 3 . 5 . 23 . 13 = 17940 jest nejm. sp. n. daných čísel.

Nebo:	4,	5,	8,	16,	15,	21,	48,	60	2
				8,	15,	21,	24,	30	2
				4,	15,	21,	12,	15	2
				2,	15,	21,	6,	15	2
				1,	15,	21,	3,	15	3
					5,	7,	1,	5	5
					1,	7,		1	

t. j. 4 jsou obsaženy v 16
5 jest obsaženo v 15
8 „ „ v 48
proto se hned vypustí, a dále se pracuje jako prvé.

2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 7 = 1680 jest nejm. sp. n. daných čísel.

Podobně se vyhledá nejm. sp. n. u výrazů algebraických na př.

$$\begin{array}{llll|l} a^2-b^2, & a^3+a^2b+ab^2+b^3, & a^3-a^2b+ab^2-b^3, & a^4-b^4 & a+b \\ a-b, & a^2+b^2, & a^3-a^2b+ab^2-b^3, & a^3-a^2b+ab^2-b^3 & a-b \\ 1, & a^2+b^2, & a^2+b^2 & a^2+b^2 & \end{array}$$

t. j. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2) = a^4 - b^4$ jest nejm. sp. n. daných výrazů.

Příklady.

Vyhledejte nejmenší společné násobné čísel:

1. 15, 32; 14„ 33, 25;
240, 744; 330, 858; 420, 600;
308, 396, 440; 840, 1050, 1470; 594, 648, 702.

2. 391, 437; 713, 899; 2419, 3658; 3053, 7881;
4929, 5673.

3. $x^3 - 2x^2y + xy + xy^2 - y^2$, $x^3 + xy - xy^2 + y^2$;
$4a^4 - a^3b + 6a^2 - 4a^2b + ab^2 - 6b$;
$6a^3 - 3a^2b - 6ab - 2a^2b^2 + 2b^3 + 3b^2$;
$x^4 - x^2y^2 - 2xy^3 - y^4$, $x^3 - y^3$;
$4m^3n^3 - 7mn + 3$, $6m^3n^3 - 23m^2n^2 + 24mn - 7$;
$4a^3b^3 + 14a^4 - 6ab^2 - 6a^2b^4 - 21a^3b + 9b^3$,
$6a^2b^4 - 6a^3 + 10ab - 9ab^5 + 9a^2b - 15b^2$.

4. 703, 851, 1147; 517, 799, 1081;
371, 583, 3233; 1003, 1746, 4189.

5. $x^2 + 2xy - 3y^2$, $x^2 + 4xy + 3y^2$, $x^2 + 4xy + 3y^2 - x - 3y$;
$8a^2 + 2ab - 21b^2$, $8a^2 - 18b^2$, $14a^2 - 19ab - 3b^2$;
$a^3b + 3a - 9ab^3 + 9b$, $10a^2b^2 + 3a^3b + a + 3ab^3 + 3b$, a
$2a^3b^2 - 3a^2b + 4a + 6a^2b^3 - 9ab^2 + 12b$.
$10x^2 - 9xy - 3x - 7y^2 + 8y - 1$,
$15x^2 - 31xy + 38x + 14y^2 - 51y + 7$, a
$35x^3 - 49x^2y + 7x^2 - 25xy + 35y - 5y$.

6. 8, 9, 10, 15, 20, 24; 4, 7, 25, 33, 37, 42, 50;
3, 8, 10, 18, 20, 24, 30, 36; 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
11, 26, 33, 130, 209, 407, 520;
7, 9, 11, 13, 14, 27, 55, 91, 99.

7. $x^4 - y^4$, $x^3 - y^3$, $x^2 - y^2$, $x - y$;
$4x^4 - 1$, $6x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, $2x^3 - 2x^2 - x + 1$, $3x^2 - 2x - 1$;
$a^2 - 1$, $a^3 + a^2 + a + 1$, $a^3 - a^2 + a - 1$, $a^4 - 1$;
$m^4 - 1$, $m^6 + m^4 - m^2 - 1$, $m^5 - m^4 + 2m^3 - 2m^2 + m - 1$,
$m^5 - m^4 - m + 1$.

4. Dělitelé téhož čísla, jejich počet a jejich součet.

a) Známe-li všechny prvočinitele některého čísla, můžeme určiti veškeré jeho dělitele vůbec. Jsou-li totiž a, b, c, d. . . . daného čísla prvočinitelé, jest výraz $a^m b^n c^p \ldots$ každým členem součinu

$$(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^m)(1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^n)$$
$$(1 + c + c^2 + c^3 + \ldots + c^p) \ldots$$

a žádným číslem jiným dělitelný. Neboť každý člen tohoto součinu lze odvoditi z výrazu $a^r b^s c^t \ldots$ kde $r = 0, 1, 2, 3 \ldots m$, $s = 0, 1, 2, 3 \ldots n$, $t = 0, 1, 2, 3 \ldots p$ atd.; a poněvadž jest výraz $a^m b^n c^p \ldots$ součin členů *nejvyšších* mocnitelů, jest dělitelný též výrazem $a^r b^s c^t$ t. j. každým členem součinu. Avšak jest buď $m = r$, $n = s$, $p = t \ldots$ nebo $m > r, n > s$, $p > t$ . . . a mimo to jsou a, b, c, . . . prvočísla, proto nemůže býti ve výrazu $a^m b^n c^p$ žádné jiné číslo obsaženo leč podoby $a^r b^s c^t$ . . . Na př.

$$1800 = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \text{ tedy } a = 2, \quad b = 3, \quad c = 5$$
$$m = 3, \quad n = 2, \quad p = 2, \text{ a}$$

$(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5 + 5^2) =$ (klademe-li místo $+$ pouze čárky)

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360, 25, 50, 100, 200, 75, 150, 300, 600, 225, 450, 900, 1800, z nichž každý člen jest dělitelem čísla 1800.

b) Poněvadž má *každý činitel* naznačeného součinu o jeden člen více nežli udává počet jedností nejvyššího mocnitele, tedy první činitel $(1 + m)$, druhý $(1 + n)$, třetí $(1 + p)$ členů atd. jest počet všech členů součinu čili počet všech dělitelů daného čísla (dle §. 6. 7.)

$$(1 + m)(1 + n)(1 + p) \text{ atd.}$$

v kterémž počtu zahrnuto jest i 1 i číslo samo. V příkladě uvedeném má tedy součin $(1 + 3)(1 + 2)(1 + 2) = 4 \,.\, 3 \,.\, 3 = 36$ členů, tedy číslo 1800 tolikéž dělitelů.

c) Abychom určili *součet* všech dělitelů, považme toto:

Součet členů prvního činitele $(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^m) = s$ násobí se *každým* členem činitele druhého t. j. *součtem* členů činitele $(1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^n) = s'$, čímž dostaneme vůbec $s \,.\, s'$. Tento součin násobí se opět *každým* členem, tedy součtem členů, činitele třetího $(1 + c + c^2 + c^3 + \ldots + c^p) = s''$, čímž opět dostaneme $s \,.\, s' \,.\, s''$ atd. Avšak součin dvou, tří atd. výrazů rovná se součtu částečných součinů všech sčítanců, a jelikož jsou částečné tyto součiny (co členy vůbec) dělitelé daného čísla, jest

$$s \,.\, s' \,.\, s'' \ldots = \text{součtu všech dělitelů daného čísla.}$$

Položíme-li (dle §. 8. příklady)

$$s = 1 + a + a^2 + \ldots + a^m = (a^{m+1} - 1) : (a - 1)$$
$$s' = 1 + b + b^2 + \ldots + b^n = (b^{n+1} - 1) : (b - 1)$$
$$s'' = 1 + c + c^2 + \ldots + c^p = (c^{p+1} - 1) : (c - 1) \text{ atd. bude}$$
$$s \,.\, s' \,.\, s'' \ldots = [(a^{m+1} - 1) : (a - 1)] \,.\, [(b^{n+1} - 1) : (b - 1)] \,.$$
$$[(c^{p+1} - 1) : (c - 1)] \ldots$$

V příkladě prvé uvedeném jest

$$\left.\begin{array}{l}(a^{m+1}-1):(a-1)=15\\(b^{n+1}-1):(b-1)=13\\(c^{p+1}-1):(c-1)=31\end{array}\right\}$$ tedy 15 . 13 . 31 = 6045 t. j. součtu všech dělitelů čísla 1800.

Podobně se číslo 10584 = $2^3 . 3^3 . 7^2$ t. j. $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$, $m = 3$, $n = 3$, $p = 2$.

Dělitelé jeho jsou:

$(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 7 + 7^2) =$ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 27, 28, 36, 42, 49, 54, 56, 63, 72, 84, 98, 108, 126, 147, 168, 189, 196, 216, 252, 294, 378, 392, 441, 504, 588, 756, 882, 1176, 1325, 1512, 1764, 2646, 3528, 5292, 10584.

Počet dělitelů těch jest $(1 + 3)(1 + 3)(1 + 2) = 4 . 4 . 3 = 48$.

Součet dělitelů jest

$$\left.\begin{array}{l}(2^{3+1}-1):(2-1)=15\\(3^{3+1}-1):(3-1)=40\\(7^{2+1}-1):(7-1)=57\end{array}\right.$$ t. j. 15 . 57 . 40 = 34200.

Příklady.

Určete veškeré dělitele, jejich počet a jejich součet, čísel: 390, 720, 3000, 11880, 13520, 23716, 203840, 375518.

III. Zlomky obyčejné.

§. 11.

1. Mimo čísla vůbec, která se zakládají na *celé jednosti* (1) jsou i čísla taková, jichž základem jest *část jednosti celé* čili *jednost zlomková*. Každá *jednost* zlomková naznačuje se dvěma čísly, z nichž jedno jest 1 a druhé, číslo, které udává na kolik stejných částek jsme jakýs celek (jednost celou) rozdělili. Prvnímu číslu říkáme *čítatel*, a druhému *jmenovatel*; tohoto klademe pod onoho a oddělujeme oba přímkou (*lomítkem*) na př. $^1/_5$ (jedna pětina), $^1/_7$ (jedna sedmina), $^1/_6$ (jedna 6tina) atd. Zlomkovým jednostem stejných jmenovatelů říkáme *stejnojmenné* čili *stejnorodé*, a souboru stejnojmenných jedností zlomkových *číslo lomené* čili *zlomek* na př. $^4/_5$, $^6/_7$, $^a/_b$ atd.

Zlomky vůbec dělíme na *pravé*, je-li čítatel menší jmenovatele na př. $^2/_3$, $^5/_8$, na *nepravé*, je-li čítatel větší jmenovatele na př. $^9/_5$, $^4/_3$, na *nevlastní*, je-li čítatel násobné jmenovatele na př. $^{10}/_2$, $^{16}/_8$, a na *složité*, je-li buď čítatel buď jmenovatel zlomek, aneb jsou-li oba zlomky, na př. $\frac{5}{^3/_4}$, $\frac{^7/_9}{8}$, $\frac{^3/_4}{^2/_6}$. Skládá-li se někteté číslo z čísla celého a zlomku, říkáme mu *číslo smíšené*, na př. $5^1/_3$ $(= 5 + {}^1/_3)$, $a + \frac{b}{c}$ atd.

Z pojmu o zlomku plyne, že *při stejných jmenovatelích* ten zlomek jest *větší*, který má *většího čitatele*, na př. $\frac{7}{8} > \frac{5}{8}$, a ten zlomek že jest *menší*, který *při stejných čitatelích* má *většího jmenovatele* $\frac{4}{9} < \frac{4}{7}$, $\frac{5}{8} < \frac{5}{6}$ atd.

2. Každý zlomek lze považovati za součet stejných jedností zlomkových, na př.

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 4 \,.\, \frac{1}{7}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots a\text{krát} = a \,.\, \frac{1}{b}.$$ A poněvadž $\frac{1}{b}$ jest *b*tý díl celku, který bychom též dostali, kdybychom $1 : b$, jest tedy

$$\frac{a}{b} = a \,.\, \frac{1}{b} = a\ (1 : b) = a : b \text{ (§. 7. f.)}$$

t. j. každý zlomek jest naznačený podíl, čitatel se stane dělencem a jmenovatel dělitelem, a proto i naopak lze každé dělení napsati v podobě zlomku, na př.

$2 : 3 = {}^2/_3$, $5 : 8 = {}^5/_8$ atd. (srovnej. §. 7. 1.)

Za touže příčinou považuje se *znaménko* zlomku za výsledek znaménka čitatele a jmenovatele, takže

$+\frac{a}{b} = \frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b}$, a $-\frac{a}{b} = \frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$. Dle potřeby můžeme tedy znaménka čitatele a jmenovatele proměniti v opačná, znaménko podílu se tím nemění.

3. Poněvadž lze každý zlomek považovati za naznačený podíl, platí o něm vše co o dělenci a děliteli vůbec praveno bylo (§. 7.), zejmena:

a) Hodnota zlomku se nemění, násobíme-li nebo dělíme-li čitatele a jmenovatele týmže číslem, na př.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a : m}{b : m}.$$

Neboť $\frac{a}{b} = a : b = am : bm = \frac{am}{bm}$ (§. 7. k), a

$$\frac{a}{b} = a : b = (a : m) : (b : m) = \frac{a : m}{b : m} \text{ (§. 7. k).}$$

Má-li tedy čitatel a jmenovatel jakousi míru společnou, mohou se oba touto děliti čili *krátiti*. Zlomku co možná skrácenému říkáme, že jest psán nejmenšími čísly. Na př.

$$\frac{18}{27} = \frac{18 : 9}{27 : 9} = \frac{2}{3},\ \frac{21}{35} = \frac{3}{5},\ \frac{a^2b}{ab^2} = \frac{a}{b},\ \frac{4a^2b^3}{10a^3b^2c} = \frac{2b}{5ac}.$$

b) *Zlomek se násobí celým číslem, buď násobíme-li jím čitatele a neměníme-li jmenovatele, aneb dělíme-li jím jmenovatele a neměníme-li čitatele*, na př.

$$\frac{a}{b} \times m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b:m}.$$

Nebot $\frac{a}{b} \times m = (a:b)m = am : b = \frac{am}{b}$ (§. 7. j.), a

$$\frac{a}{b} \times m = (a:b)m = a:(b:m) = \frac{a}{b:m} \text{ (§. 7. h.)}$$

Násobíme-li tedy zlomek jeho jmenovatelem, dostaneme za součin jeho čitatele, na př.

$$\frac{a}{b} \times b = \frac{a}{b:b} = \frac{a}{1} = a.$$

A poněvadž $\frac{a}{1} = a$ lze *každému číslu celému dáti podobu zlomku s jmenovatelem 1*; tedy $5 = \frac{5}{1}$, $m = \frac{m}{1}$ atd.

c) *Zlomek se dělí celým číslem, buď dělíme-li jím čitatele a neměníme-li jmenovatele, neb násobíme-li jím jmenovatele a neměníme li čitatele*; na př.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a:m}{b} = \frac{a}{b \, . \, m}$$

Nebot $\frac{a}{b} : m = (a:b):m = (a:m):b = \frac{a:m}{b}$, a

$$\frac{a}{b} : m = (a:b):m = a : bm = \frac{a}{bm} \text{ (§. 7. i).}$$

d) *Každý nepravý zlomek lze uvesti na číslo smíšené (nevlastní zlomek na číslo celé), dělíme-li čitatele jmenovatelem*, na př.

$^8/_3 = 2 + {}^2/_3 = 2^2/_3$, $^9/_2 = 4 + {}^1/_2 = 4^1/_2$, $^9/_3 = 3$,

$$\frac{an + b}{n} = (an + b) : n = a + \frac{b}{n}.$$

Z posledního příkladu patrno, že *lomítko zastupuje závorku.* Je-li čítatel roven jmenovateli, jest hodnota zlomku = 1, na př.

$$\frac{a}{a} = 1, \ \frac{5}{5} = 1 \text{ atd.}$$

4. *Každé celé číslo promění se v nevlastní zlomek s jakýmkoli jmenovatelem, násobíme-li a dělíme li je tímto*; na př.

$$a = \frac{am}{m}$$

Nebot (dle 3. *b*) jest $a = \frac{a}{1} = \frac{a \, . \, m}{1 \, . \, m} = \frac{am}{m}$ (dle 3. a).

Tedy i $5 = \frac{5}{1} = \frac{5 \, . \, 6}{6} = \frac{5 \, . \, 7}{7} = \frac{5 \, . \, 8}{8}$ atd.

5. *Každý zlomek se promění v jiný téže hodnoty s jiným jmenovatelem, je li tento dělitelný jmenovatelem původním.*

Neboť má-li se na př. $\frac{a}{b}$ uvesti na zlomek téže hodnoty s jmenovatelem na př. m, bude

$$\frac{a}{b} = \frac{a:b}{1} = \frac{m(a:b)}{m\,.\,1} = \frac{am:b}{m} = \frac{a(m:b)}{m} \text{ (§. 7. j.)}$$

Z výsledku $\frac{a(m:b)}{m}$ patrno, že jmenovatel nový (m) musí býti násobné jmenovatele původního (b), neboť jen pak, je-li na př. $m : b = p$ čili $m = bp$, jest

$$\frac{a}{b} = \frac{a(m:b)}{m} = \frac{ap}{m}.$$

Z toho plyne pravidlo: *Má-li se zlomek proměniti v jiný téže hodnoty s jmenovatelem jiným, který jest násobné jmenovatele původního, dělme onoho tímto a násobme podílem čítatele a jmenovatele zlomku původního.* Na př.

$\frac{4}{7}$ uvedeme na zlomek jiný jemu rovný s jmenovatelem 21, dělíme-li $21 : 7 = 3$, a násobíme-li podílem 3 čítatele i jmenovatele t. j.

$$\frac{4}{7} = \frac{4\,.\,3}{7\,.\,3} = \frac{12}{21}.$$

Podobně se uvede

$\frac{5}{6}$ na jmenovatele 24, pakli $24 : 6 = 4$, a $\frac{5\,.\,4}{6\,.\,4} = \frac{20}{24}$; taktéž
$\frac{2}{3}$ „ „ 15, „ $15 : 3 = 5$, „ $\frac{2\,.\,5}{3\,.\,5} = \frac{10}{15}$;
$\frac{a-b}{a+b}$ „ „ a^2-b^2, „ $(a^2-b^2) : (a+b) = a-b$, tedy

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}.$$

6. *Sečítati a odečítati lze pouze zlomky stejnojmenné, čítatelé se sečtou a stejný jmenovatel se napíše jednou pod součet*; na př.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = a\,.\,\frac{1}{m} + b\,.\,\frac{1}{m} + c\,.\,\frac{1}{m} = \frac{1}{m}(a+b+c)$$
$$= \frac{a+b+c}{m}, \text{ (2, 3. } b\text{).}$$

Podobně $\frac{3}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$, $\frac{3}{11} + \frac{2}{11} + \frac{4}{11} = \frac{9}{11}$.

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = a\,.\,\frac{1}{m} - b\,.\,\frac{1}{m} = \frac{1}{m}(a-b) = \frac{a-b}{m}$$

$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$, $\frac{18}{23} - \frac{5}{23} = \frac{18-5}{23} = \frac{13}{23}$ atd.

Mají-li se zlomky s rozličnými jmenovateli *sečítati*, přivedou se prvé na *nejmenšího společného jmenovatele*, t. j. vyhledá se nejmenší společné násobné jmenovatelů všech daných zlomků (§. 10. 3), toto se dělí každým jmenovatelem původním, a podílem se násobí čitatel i jmenovatel každého daného zlomku. Na př.

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{7}{9}+\frac{1}{10}+\frac{5}{12}.$$

Nejmenší sp. n. se vyhledá jak známo takto:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3, & 5, & 9, & 10, & 12 & 2 \\ & & 9, & 5, & 6 & 3 \\ & & 3, & 5, & 2 & \end{array}$$

t. j. 2 . 3 . 3 . 5 . 2 = 180 jest nejm. sp. n. čili nejm. sp. jmenovatel, tedy

$$\begin{array}{ll} 180:3 = 60, & \dfrac{2.60}{3.60} = \dfrac{120}{180} \\ 180:5 = 36, & \dfrac{4.36}{5.36} = \dfrac{144}{180} \\ 180:9 = 20, & \dfrac{7.20}{9.20} = \dfrac{140}{180} \\ 180:10 = 18, & \dfrac{1.18}{10.18} = \dfrac{18}{180} \\ 180:12 = 15, & \dfrac{5.15}{12.15} = \dfrac{75}{180} \\ \hline \text{součtem} & \dfrac{497}{180} = 2\,\dfrac{137}{180} \text{ (2. d.).} \end{array}$$

Aby se psaní ušetřilo, pracuje se obyčejně tak, že se nejmenší společný jmenovatel napíše jednou, pod ním se vede kolmice, u této v levo se napíšou podíly z nejm. sp. jm. a jmenovatelů původních a v pravo součiny těchto podílů příslušnými čitateli. Součiny ty se sečtou a k součtu se připíše nejm. spol. jm. Tedy bychom v příkladě předešlém psali:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{180} \\ \hline 60 & 120 \\ 36 & 144 \\ 20 & 140 \\ 18 & 18 \\ 15 & 75 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{497}{180} = 2\,\frac{137}{180}.$$

$$\frac{2a}{a^2-1}+\frac{5a}{a^2+a-2}+\frac{3a}{a^2-3a+2}+\frac{a}{a^2-a-2}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} a^2-1, & a^2+a-2, & a^2-3a+2, & a^2-a-2 & a+1 \\ a-1, & a^2+a-2, & a^2-3a+2, & a-2 & a-1 \\ 1, & a+2, & a-2, & a-2 & a-2 \\ & a+2, & 1 & 1 & \end{array}$$

$$(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) = a^4 - 5a^2 + 4 \text{ jest nejm. sp. jm.}$$

$$\begin{array}{r|l}
a^2 - 4 & 2a^3 \qquad\quad - 8a \\
a^2 - a - 2 & 5a^3 - 5a^2 - 10a \\
a^2 + 3a + 2 & 3a^3 + 9a^2 + 6a \\
a^2 + a - 2 & a^3 + a^2 - 2a \\
\hline
\text{Součet jest} & \dfrac{11a^3 + 5a^2 - 14a}{a^4 - 5a^2 + 4}
\end{array}$$

Mají-li se dva zlomky s rozličnými jmenovateli *odečítati*, přivedou se taktéž prvé na stejné jmenovatele. Jsou-li jejich jmenovatelé prvočísla vespolek, bude jejich nejm. sp. jm. součin obou, za kterouž příčinou se čítatel menšence násobí jmenovatelem menšitele a čítatel menšitele jmenovatelem menšence, tyto součiny se odečtou a připíše se k nim za jmenovatele součin obou jmenovatelů. Je-li menšitel víceělen, musí se po vypuštění lomítka uzávorkovati. Čítatel rozdílu se, možná-li, sejme.

Na př.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b^2} = \frac{ab}{b^2} - \frac{c}{b^2} = \frac{ab-c}{b^2};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd};$$

$$\frac{2a-1}{a+b} - \frac{2a+1}{a-b} = \frac{2a^2 - a - 2ab + b \mp (2a^2 \pm a \pm 2ab \pm b)}{a^2 - b^2}$$

$$= \frac{-2a - 4ab}{a^2 - b^2} = -\frac{2a(1+2b)}{a^2 - b^2}.$$

$$\frac{7}{9} - \frac{3}{15} = \frac{35-9}{45} = \frac{26}{45}, \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}.$$

Chceme-li se o dvou zlomcích s rozličnými čítateli a jmenovateli dozvěděti, který z nich jest větší, přiveďme je na stejného jmenovatele (srovnej pak 1).

7. Má-li se zlomek buď k celému číslu připočísti buď od něho odečísti, aneb naopak má-li se celé číslo buď ke zlomku připočísti neb od něho odečísti, přivede se vždy prvé celé číslo na zlomek s patřičným jmenovatelem. Na př.

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}, \quad \frac{b}{c} + a = \frac{b}{c} + \frac{ac}{c} = \frac{b+ac}{c},$$

$$a - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}, \quad \frac{b}{c} - a = \frac{b}{c} - \frac{ac}{c} = \frac{b-ac}{c},$$

$$x + y - \frac{x^2 - xy - y}{x-1} = \frac{(x+y)(x-1) - (x^2 - xy - y)}{x-1}$$

$$= \frac{x^2 + xy - x - y - x^2 + xy + y}{x - 1}$$
$$= \frac{2xy - x}{x - 1} = \frac{x(2y - 1)}{x - 1}.$$

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} - (x - y) = \frac{x^2 - xy + y^2 - (x - y)(x - y)}{x - y}$$
$$= \frac{x^2 - xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{x - y}$$
$$= \frac{xy}{x - y}.$$

$$(a \pm \frac{b}{c}) \pm (d \pm \frac{e}{f}) = \frac{ac \pm b}{c} \pm \frac{df \pm e}{f} = \frac{acf \pm bf \pm (cdf \pm ce)}{cf}.$$

$$5 + {}^1/_3 = \frac{3 . 5 + 1}{3} = \frac{16}{3}, \quad \frac{2}{7} + 3 = \frac{2 + 21}{7} = \frac{23}{7}.$$

$$7 - {}^2/_5 = \frac{35 - 2}{5} = \frac{33}{5} = 6\,{}^3/_5, \quad \frac{5}{11} - 2 = \frac{5 - 22}{11} = -\frac{17}{11} = -1\,{}^6/_{11}.$$

Poznamenání. Při odčítání buď zlomku nebo smíšeného čísla od celého čísla *zvláštního* doděláme se snadněji rozdílu, odebereme-li menšenci 1, a proměníme-li tuto v zlomek, jehož čítatel a jmenovatel se rovná jmenovateli menšitele, na př.

$$7 - {}^2/_5 = 6\,{}^5/_5 - {}^2/_5 = 6\,{}^3/_5.$$
$$19 - {}^{13}/_{29} = 18\,{}^{29}/_{29} - {}^{13}/_{29} = 18\,{}^{16}/_{29}.$$
$$23 - 9\,{}^2/_3 = 22\,{}^3/_3 - 9\,{}^2/_3 = 13\,{}^1/_3.$$

Podobně se pracuje s výhodou u sečítání a odečítání čísel smíšených, na př.

$$7\,{}^2/_5 + 4\,{}^3/_7 = 7 + 4 + {}^2/_5 + {}^3/_7 = 11 + \frac{14 + 15}{35} = 11\,{}^{29}/_{35}.$$

$$8\,{}^4/_9 - 3\,{}^5/_{11} = 8 - 3 + {}^4/_9 - {}^5/_{11} = 5 + \frac{44 - 45}{99} = 5 - {}^1/_{99} = 4\,{}^{98}/_{99}$$

atd.

8. *Zlomek se násobí zlomkem, násobíme-li čítatele čítatelem a jmenovatele jmenovatelem.* Čitatel jednoho a jmenovatel druhého činitele se, možná-li, před násobením skrátí. Na př.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Neboť $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times (c : d) = \frac{ac}{b} : d = (ac : b) : d = ac : bd$

$= \frac{ac}{bd}$ (§. 7, j, i).

Podobně se $\frac{2a}{3b} \times \frac{5a}{7b} = \frac{10a^2}{21b^2}$; $\frac{3a^2}{4b^3} \times -\frac{8b^2}{9a} = -\frac{2a}{3b}$;

$$\left(x - \frac{1}{x+y}\right)\left(y + \frac{1}{x-y}\right) = \frac{x^2 + xy - 1}{x+y} \cdot \frac{xy - y^2 + 1}{x - y}$$
$$= \frac{x^3y - xy^3 + x^2 + y^2 - 1}{x^2 - y^2}.$$

9. *Zlomek se dělí zlomkem, dělíme-li čitatele dělence čitatelem dělitele a jmenovatele dělence jmenovatelem dělitele.* Na př.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}.$$

Neboť (§. 7. a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{a : c}{b : d} = \frac{c(a : c)}{d(b : d)} = \frac{ac : c}{bd : d} = \frac{a}{b}$ (§. 7. j).

V praktickém počítání řídíme se touto poučkou jen tam, kde jest dělitelný čitatel dělence čitatelem dělitele, a jmenovatel dělence jmenovatelem dělitele, na př.

$$\frac{8x^2}{27y^3} : \frac{4x}{9y^2} = \frac{2x}{3y}; \quad - \frac{15a^2b^2}{16cd^3} : \frac{3ab^2}{4cd} = - \frac{5a}{4d^2} = - 1^1/_4\ \frac{a}{d^2}.$$

$$\left(\frac{4x^2}{9y^4} - \frac{20x^3}{21y^5} + \frac{2x^4}{15y^6}\right) : \frac{2x}{3y^2} = \frac{2x}{3y^2} - \frac{10x^2}{7y^3} + \frac{x^3}{5y^4}.$$

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{4a}{3b} + \frac{4a^2}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{2a}{b}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2a}{b}.$$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{9} \pm \frac{2a}{3b} \\ \hline \text{"} \quad \frac{2a}{3b} + \frac{4a^2}{b^2} \\ \quad -\frac{2a}{3b} \pm \frac{4a^2}{b^2} \\ \hline \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array}$$

Není-li čitatel dělence čitatelem dělitele a jmenovatel dělence jmenovatelem dělitele dělitelný, *násobí se dělenec obráceným dělitelem* (t. j. čitatel tohoto stane se jmenovatelem a jmenovatel čitatelem). Neboť:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} = (a : c) : (b : d), \text{ a položíme-li } a : c = m$$
$$= m : (b : d) = md : b \ (\S.\ 7.\ h)$$
$$= (a : c)\ d : b \ (\S.\ 7.\ j)$$
$$= (ad : c) : b \ (\S.\ 7.\ i)$$
$$= ad : bc = \frac{ad}{bc},$$

t. j. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, kterýž výsledek dostaneme snadněji pakli

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Jinak doděláme se téhož výsledku, násobíme-li čítatele a jmenovatele dělence *součinem* z čítatele a jmenovatele dělitele, načež se dělí čítatel čítatelem a jmenovatel jmenovatelem. Na př.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Příklady.
$$\frac{4a^2}{7b^3} : \frac{5a^3}{8b^4} = \frac{4a^2}{7b^3} \times \frac{8b^4}{5a^3} = \frac{32b}{35a}.$$

$$\frac{5x^2}{6y^3} : \frac{3x}{7y} = \frac{5x}{6y^2} \times {}^7/_3 = \frac{35x}{18y^2} = 1^{17}/_{18}\,\frac{x}{y^2}.$$

$$\frac{2ab^2}{3c^2d} : -\frac{4a^2b^3}{9cd^2} = \frac{2ab^2}{3c^2d} \times -\frac{9cd^2}{4a^2b^3} = -1^1/_2\frac{d}{abc}$$

$$\frac{a^3b^3}{c^2} : \left[\frac{a^3c^3}{b^2} : \left(\frac{b^3c^3}{a^4} : \frac{b^3}{a^2c^2}\right)\right] = \frac{a^3b^3}{c^2} : \left[\frac{a^3c^3}{b^2} : \frac{c^5}{a^2}\right] = \frac{a^3b^3}{c^2} : \frac{a^5}{b^2c^2} = \frac{b^5}{a^2}.$$

Položíme-li v příkladě

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

$b = 1$, bude $a : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}$,

t. j. *celé číslo dělí se zlomkem, násobí-li se jmenovatelem dělitele, a napíše-li se pod tento součin* (co čítatele) *čítatel dělitele za jmenovatele.* Podíl se možná-li skrátí. Tedy

$$6a^2 : \frac{3a^4}{4b^2} = \frac{24a^2b^2}{3a^4} = \frac{8b^2}{a^2}$$

$$-8x^2y^3 : \frac{5yz^2}{7x^4} = -\frac{56x^6y^3}{5yz^2} = -11^1/_5\frac{x^6y^2}{z^2}.$$

Poznamenání. Dělíme-li buď celé číslo buď zlomek do 1, říkáme, že jest podíl *převratná hodnota* dělitele, na př.

$$1 : a = \frac{1}{a}$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$$

$$1 : \frac{x+y}{z} = \frac{z}{x+y} \text{ atd.}$$

t. j. $\frac{1}{a}$ jest převratná hodnota čísla a

$\frac{b}{a}$ " " " " $\frac{a}{b}$

$\frac{z}{x+y}$ " " " " $\frac{x+y}{z}$ atd.

Každá veličina násobená svou převratnou hodnotou dá 1 součinem. Neboť

$$a \times \frac{1}{a} = 1,\quad \frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = 1 \text{ atd.}$$

10. Každý zlomek jest naznačený podíl, tedy i zlomek složitý, a proto bude

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},$$

a a d jmenujeme členy krajní, b a c členy vnitřní, proto říkáme: *složitý zlomek promění se v jednoduchý, násobíme-li členy krajní, jichž součin položíme za čítatele, a násobíme-li členy vnitřní, jichž součin položíme za jmenovatele zlomku jednoduchého.* Tedy

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2\,.\,7}{3\,.\,5} = \frac{14}{15}, \qquad \frac{2^1/_3}{3^1/_4} = \frac{^7/_3}{^{13}/_4} = \frac{28}{39}.$$

$$\frac{a + \frac{b}{c}}{d - \frac{e}{f}} = \frac{\frac{ac + b}{c}}{\frac{df - e}{f}} = \frac{acf + bf}{cdf - ce}.$$

Je-li buď čítatel buď jmenovatel složitého zlomku číslo celé, přimysleme si k němu za jmenovatele 1, a pracujme jako prvé, na př.

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{c}, \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{bc}.$$

$$\frac{7}{^3/_5} = \frac{\frac{7}{1}}{^3/_5} = \frac{35}{3} = 11^2/_3 \qquad \frac{\frac{8}{9}}{5} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{5}{1}} = \frac{8}{45}.$$

11. *Zlomek se umocní, povýší-li se čítatel i jmenovatel na danou mocninu*, na př.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Neboť z pojmu o umocňování plyne

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots \text{ mkrát t. j. } \frac{a\,.\,a\,.\,a \ldots \text{mkrát}}{b\,.\,b\,.\,b \ldots \text{mkrát}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Podobně

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^2 = \frac{4x^2}{9y^2}; \quad \left(\frac{x-1}{y-2}\right)^2 = \frac{(x-1)\,(x-1)}{(y-2)\,(y-2)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{y^2 - 4y + 4}.$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1^m}{a^m} = \frac{1}{a^m}.$$

12. *Každé číslo s mocnitelem záporným rovná se své převratné hodnotě s týmže mocnitelem kladným*, na př.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}. \qquad \begin{aligned} a^{-m} &= a^{0-m} = a^0 : a^m \\ &= 1 : a^m \\ &= \frac{1}{a^m} \end{aligned}$$

Neboť položíme-li $-m = p - q$ nebo $m = -p + q$, bude

$$a^{-m} = a^{p-q} = a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = \frac{1}{a^q : a^p} = \frac{1}{a^{q-p}} = \frac{1}{a^m}$$

t. j. $a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$.

Násobíme-li $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ mocninou a^m, dostaneme

$$a^m . a^{-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1 \text{ nebo}$$

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-m}$$

t. j. *každé číslo s mocnitelem kladným rovná se své převratné hodnotě s týmže mocnitelem záporným.*

Proto jest i $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = 1 : \frac{a^m}{b^m} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

t. j. zlomek s mocnitelem záporným rovná se své převratné hodnotě s týmže mocnitelem kladným a naopak. Tedy

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3^3/_8 \text{ atd.}$$

Příklady.

1. Vyjádřete nejmenšími čísly zlomky:

1) $\frac{9}{12}$. 2) $\frac{63}{70}$. 3) $\frac{72}{216}$. 4) $\frac{a}{a^2}$.

5) $\frac{ab}{ac}$. 6) $\frac{xyz}{xz}$. 7) $\frac{x^4 y^3}{x^5 y^2}$. 8) $\frac{45abcde}{75abf}$.

9) $\frac{42mnp}{49np^2}$. 10) $\frac{77a^3b^4cd^2}{105a^2b^5c^3d}$. 11) $\frac{5a-3b}{15a-15b}$.

12) $\frac{7a^2-7b^3+7c^4}{21a^2-21b^3+7c^4}$. 13) $\frac{8a^2-8b^2}{72a-72b}$.

14) $\frac{5x+5y}{x^2-y^2}$. 15) $\frac{9a^3b^4-18a^2b^3+45ab^2}{54a^4b^3-63a^3b^2-27ab^5}$.

2. Násobte:

1) $\frac{4}{5} \times 7$. 2) $\frac{12}{55} \times 11$. 3) $3^1/_2 \times 4$. 4) $7^1/_4 \times 8$. 5) $9^3/_4 \times 6$.

6) $7^2/_6 \times 10.$ 7) $\frac{7a^2b^3}{15c^4d^5} \times 5ac^3d^2.$

8) $\frac{17m^3n^4}{21p^3q} \times 7np^2q^4.$ 9) $\frac{2a-3b}{m^2-n^2} \times (m+n).$

10) $\frac{10m^3p^4q^5}{33n^4r^3} \times 7m^2n^3pq^2r^3.$ 11) $\frac{2a^2-5b}{(a+b)^2} \times (a+b).$

12) $\frac{3m-4n^2}{m+n} \times (m+n)^2.$ 13) $\frac{x+y}{x^3-y^3} \times (x^2+xy+y^2).$

14) $(\frac{a}{b^2}+\frac{a}{b}+1) \times b.$ 15) $(\frac{3a^2}{4b^3}-\frac{5a}{16b^2}+7)\times 8ab^5.$

3. Násobte:

1) $^5/_8 \times 8.$ 2) $^7/_{13} \times 13.$ 3) $5^2/_7 \times 7.$ 4) $15^1/_9 \times 9.$

5) $13^2/_{11} \times 11.$ 6) $\frac{a^2b}{c^3} \times c^3.$ 7) $\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\right) \times n.$

8) $\left(\frac{a}{m}-\frac{5b}{m}\right)\times m.$ 9) $\left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x+y}-\frac{z}{x+y}\right) \times (x+y).$

4. Dělte: 1) $^8/_9 : 4.$ 2) $^{10}/_{21} : 5.$ 3) $6^2/_3 : 10.$ 4) $5^3/_5 : 7.$

5) $6^2/_5 : 8.$ 6) $10^1/_9 : 13.$ 7) $\frac{6a^2}{5b^3} : 3a.$ 8) $\frac{24a^2b^3}{35c^3d} : 6ab^2.$

9) $\frac{56m^3n^2p^4}{75q^3r^2} : 7m^2n^2p^2.$ 10) $\frac{72xy^3z^4}{77u^4v^5} : 8xy^2z^4.$

11) $\left(\frac{8a^3}{9b^2}-\frac{24a^4}{25b^3}\right) : 4a^3.$ 12) $\left(\frac{15x^2y^3}{16z}-\frac{40x^3y^2}{47z^2}+\frac{30x^4y}{37z^3}\right) : 5x^2y.$

5. Dělte: 1) $^7/_8 : 3.$ 2) $^5/_9 : 4.$ 3) $2^1/_3 : 9.$ 4) $4^1/_5 : 8.$

5) $7^1/_3 : 15.$ 6) $\frac{2a}{3b} : 5c.$ 7) $\frac{12a^2b^3}{17c^2d} : 3a^3b^4c.$

8) $\frac{18m^4n^5}{45p^3q^2} : 6m^3n^5p^4q.$ 9) $\frac{21x^3y^2z}{40u^4v^5} : 63u^2vx^3yz.$

10) $\frac{x^2-y^2}{y^4+z^4} : (x+y).$ 11) $\frac{(2a-3b)^2}{5a+4b} : (4a-6b).$

12) $\frac{(m^2+n-1)^2}{m+n+1} : (7m+7n-7).$ 13) $\left(\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^3}{d^2}\right) : a^3b^3.$

14) $\left(\frac{3m^4}{4n^3}+\frac{5m^3}{7n^2}+\frac{8m^2}{9n}-7\right) : 2m^2n^5.$

15) $\left(\frac{15x^2y^3z}{17u^2v^6}+\frac{9x^3y^2}{10u^3vz^2}-\frac{12x^2z^3}{55uv^2y^3}+\frac{18y^3z^4}{35uvx}\right) : 3x^3y^3z^3.$

6. Proměňte v zlomky čísla:

1) 7, 9, 11, 13, 17, 19 s jmenovatelem 8.
2) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, n 11.
3) a, b, c, $a+b$, $a-b$, $a+1$, $a-1$, $a+b+1$, $a+b-1$ s jm. m.
4) $a+b$, $a-b$, $a-b+1$, $a-b-1$ s jmen. a^2-b^2.

7. Převeďte zlomky na jiné, a sice:

1) $\frac{a}{m}$, $\frac{2b}{m^2}$, $\frac{3c^2}{m^3}$, $\frac{4d^3}{m^4}$ s jmen. m^{10}.

2) $\frac{3c}{xy}$, $\frac{5d}{xz}$, $\frac{7e}{yz}$ s jmen. xyz.

3) $\frac{p}{2x^2y}$, $\frac{3q}{4y^2z}$, $\frac{5r}{6xz^2}$, $\frac{7s}{9x^2z}$ s jmen. $36x^2y^2z^2$.

4) $\frac{5a}{12b}$, $\frac{3a}{40b}$, $\frac{3a}{28b}$, $\frac{7a}{48b}$ s jmen. $1680b$.

5) $\frac{2m}{5p^2q^3r}$, $\frac{9m}{14pq^2r^3s^2}$, $\frac{11m}{30q^2r^3s^2}$, $\frac{13m}{35p^2q^3s^3}$ s jmen. $210p^2q^3r^3s^3$.

6) $\frac{a}{x+1}$, $\frac{a}{x-1}$, $\frac{a}{x^2+1}$, $\frac{a}{x^2-1}$ s jmen. x^4-1.

7) $\frac{2x^2+y}{xy+y^2}$, $\frac{2x-y^2}{xy}$, $\frac{3x^2-5y^2}{x^2+xy}$ s jmen. x^2y+xy^2.

8) $^{2}/_{7}$, $3\,^{1}/_{2}$, $5\,^{2}/_{5}$, $8\,^{3}/_{8}$, $12\,^{5}/_{14}$, $13\,^{7}/_{10}$, s jmen. 280.

9) $6\,^{2}/_{3}$, $7\,^{5}/_{11}$, $4\,^{9}/_{13}$, $8\,^{3}/_{22}$, $10\,^{1}/_{65}$, $12\,^{4}/_{33}$ s jmen. 4290.

8. Sečtěte: 1) $\frac{2a}{9b}+\frac{7a}{9b}$. 2) $\frac{3a^2b}{16c^2}+\frac{5a^2b}{16c^2}+\frac{7a^2b}{16c^2}+\frac{a^2b}{16c^2}$.

3) $\frac{3a-4b}{m-n}+\frac{5a+3b}{m-n}+\frac{a-b}{m-n}$.

4) $\frac{2x-3p}{x+y-z}+\frac{y-2z+4p}{x+y-z}+\frac{z-p-x}{x+y-z}$.

5) $\frac{a}{7}+\frac{a-b}{7}+\frac{b}{7}$. 6) $\frac{12a^2}{13}+\frac{11a^2-b^3}{13}+\frac{16a^2-25b^3}{13}$.

7) $\frac{3a+b}{17}+\frac{15a-13b}{17}+\frac{10a-7b}{17}+\frac{6a+2b}{17}$.

8) $\frac{x+y}{2}+\frac{x^2-y^2}{2}+\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{x-y}{2}$.

9. Sečtěte: 1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$. 2) $2\,^{1}/_{2}+3\,^{1}/_{3}$.

3) $\frac{5}{7}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{11}{14}$.

4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$.

5) $2\,^{1}/_{3}+4\,^{1}/_{5}+7\,^{1}/_{6}+2\,^{1}/_{12}+1\,^{1}/_{15}$.

6) $4\,^{2}/_{11}+3\,^{5}/_{13}+7\,^{5}/_{14}+2\,^{15}/_{22}+1\,^{4}/_{39}+3\,^{7}/_{33}$.

7) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$. 8) $\frac{u}{x}+\frac{x}{u}$. 9) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$. 10) $\frac{m}{xy}+\frac{n}{yz}$.

11) $\frac{a}{b^2c}+\frac{a}{bc^2}+\frac{a}{b^2c^2}$. 12) $\frac{2a}{m}+\frac{3a}{m^2}+\frac{4a}{m^3}$.

13) $\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x}$. 14) $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a-b}$.

15) $\frac{2a-3b}{5a+4b}+\frac{4a+b}{7a-3b}$. 16) $\frac{4a^2b+5ab^2+7b^3}{4a-3b+1}+\frac{a^2b-3ab^2+b^3}{2a+3b-1}$.

17) $\frac{3x^2}{7y^3}+\frac{5x^3-3y}{2xy^3-1}$. 18) $\frac{a}{mn}+\frac{b}{mp}+\frac{c}{np}$.

19) $\frac{a}{xy}+\frac{a-b}{y^2}+\frac{a+b}{x^2z}$.

20) $\frac{a}{c}+\frac{3a^2+4b^2}{cd}+\frac{2ab^2-3a^2c-b^3}{c^2d}+\frac{acd^2-2a^2b^2-b^4}{c^2d^2}$.

21) $\frac{3a}{2x}+\frac{4+a}{2+x}+\frac{1-2ax^2+3ax^3}{4-5x^2+x^4}+\frac{2+3ax^2-7ax^3}{4+3x^2-x^4}$.

22) $\frac{m^2-m+1}{(m-1)^2}+\frac{m+1}{(m-1)^2}+\frac{1}{m-1}$.

23) $\frac{a-1}{a+2}+\frac{2a^4-3a^3+1}{a^2+a-2}+\frac{a^4+3a^2-1}{a^2-4}+\frac{2a^3+7a-1}{a^2-3a+2}$.

24) $\frac{2m^2+1}{4m^2-1}+\frac{3m^2-5}{9m^2+1}+\frac{4m^2-3}{2m^2+2}$.

25) $\frac{3x+5}{x^2-5x+6}+\frac{2x-7}{x^2-2x-3}+\frac{x+1}{x^2+4x-21}+\frac{5x-1}{x^2-4x+3}$.

26) $\frac{a-3}{a-1}+\frac{a-2}{a+2}+\frac{a-1}{a-3}+\frac{a}{a+4}$.

10. Odečtěte: 1) $^1/_2 - {}^1/_3$. 2) $^5/_6 - {}^3/_7$. 3) $12\,^1/_3 - 4\,^5/_6$

4) $10\,^4/_5 - 8\,^7/_8$. 5) $13\,^9/_{11} - 10\,^7/_9$. 6) $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}$.

7) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. 8) $\frac{a}{mp}-\frac{b}{pq}$. 9) $\frac{m}{x}-\frac{n}{xy}$.

10) $\frac{m}{x^2}-\frac{n}{x}$. 11) $\frac{a}{b}-\frac{a+b}{a-b}$. 12) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a}{b}$.

13) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$. 14) $\frac{3a}{11b}-\frac{4a-5b}{2a-7b}$.

15) $\frac{5a^2b^3}{9m^2n^2}-\frac{5a^2b^3+10a^2b^3c^4-2c^3}{9m^2n^2+36c^4m^2n^2+45c^3m^2n^2}$.

16) $\frac{m-n}{p+q}-\frac{m+n}{p-q}$. 17) $\frac{2a+3b}{4m-5n}-\frac{3a-7b}{9m-2n}$.

18) $\frac{a^2-a+1}{a^2+3}-\frac{a^2+a+1}{a^2+5}$. 19) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x^2-x+y}{x^2-2xy+y^2}$.

20) $\frac{x^2+xy-y^2}{x+y-1}-\frac{x^2-xy-y^2}{x-y+1}$. 21) $\frac{a^2-1}{m+b}-\frac{a^2m^2+a^2y^2-m^2}{m^3+m^2y+my^2+y^3}$.

11. Sejměte: 1) $5a+\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{5}$. 2) $\frac{7a-5b}{2a+b}-\frac{3a+11b}{4a-7b}+1$.

3) $\frac{n^2}{x}-\frac{3m-4n^2}{5x+y^2}-\frac{m-n^2}{x-y^2}$. 4) $\frac{2a-7b}{(a-b)^2}-\frac{3a-b}{a^2-b^2}-5$.

5) $\frac{7m^2n+5mn^2-1}{3m^2n^3-7m^3n+2}-\frac{2m^2n-3}{6m^2n^3+7}+mn^2-3$.

6) $\frac{2ax+x^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2+5ax}{(a+x)^2}+\frac{x}{a-x}$.

7) $\frac{2m}{(3m-2n)^2}-\frac{4m+n}{(3m-2n)(5m+3)}-\frac{7}{5m+3}$.

12. Násobte: 1) $\frac{3}{5} \cdot \frac{11}{13}$. 2) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$. 3) $3\,{}^1/_2 \cdot 4\,{}^5/_6$.
4) $1\,{}^1/_3 \cdot 1\,{}^1/_5$. 5) $2\,{}^4/_7 \cdot 5\,{}^2/_9$. 6) $3\,{}^5/_7 \cdot 2\,{}^{10}/_{13}$.
7) $\frac{5a}{7b} \cdot \frac{4c}{11d}$. 8) $\frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^2}{x}$. 9) $\frac{2x^2}{7y^3} \cdot \frac{35y^2}{64x}$.
10) $\frac{2\,{}^1/_3 x^2 - 5\,{}^1/_2 y}{4\,{}^1/_5 x - y^2} \cdot \frac{{}^1/_2 xy^2}{{}^4/_5 x - y^2}$. 11) $\frac{a-b}{a^2-1} \cdot \frac{a+1}{a+b}$.
12) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$. 13) $\left(\frac{2a^2b}{7cd^2} - \frac{ab^3}{5c^2d} + \frac{2b^2}{5c^3} - \frac{4}{7d^2}\right) \cdot \frac{c^2d}{ab}$.
14) $\left(\frac{7x^2y^3}{9z^2} - \frac{81x^2z}{101y^2} + \frac{144y^2z^3}{145x^2}\right) \cdot \frac{4y^3z^2}{9x^4}$.
15) $\left(\frac{2\,{}^1/_3 a^2b}{3\,{}^1/_4 c^3d^2} - \frac{5\,{}^1/_2 ab^3}{6\,{}^1/_4 c^2d^3} + \frac{3\,{}^1/_7 b^4}{7\,{}^1/_2 d^3} - \frac{1\,{}^1/_2 a^4}{1\,{}^1/_3 c^2}\right) \cdot \frac{3\,{}^1/_5 c^4d^5}{4\,{}^1/_2 a^3b^2}$.
16) $\left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^3}\right) \cdot \left(\frac{y}{2x^2} - \frac{y^2}{3x}\right)$. 17) $\left(\frac{2a-3b}{4a-5b} + 1\right) \cdot \left(\frac{4a+5b}{7a-b} - 3\right)$.
18) $\left(a \pm \frac{b}{d}\right)\left(a \mp \frac{b}{d}\right)$.
19) $\left(3a - 4b - \frac{2a^2+3ab-b^2}{2a+3b}\right) \cdot \left(3a + 4b + \frac{7a^2+2ab+4b^2}{4a-7b}\right)$.
20) $\left(a - 2b + 3c - \frac{2a-5b+c}{4a-3b+1}\right) \cdot \left(a + 2b - 3c - \frac{4a-7b-6c}{9a-3b+4}\right)$.
21) $\frac{12(m-n)}{17(p-q)} \cdot \frac{34(r-p)}{45(m-n)} \cdot \frac{5(p-q)}{36(r-p)}$.
22) $\left({}^1/_2 \frac{mn}{p^2} - {}^2/_5 \frac{np}{m^2}\right) \cdot \left({}^5/_7 \frac{mp}{n^2} - {}^6/_{11} \frac{mn}{p^2}\right) \cdot \left({}^4/_7 \frac{np}{m^2} - {}^3/_5 \frac{mn}{p^2}\right)$.
23) $\left({}^1/_{625} \frac{a^4}{c^8} + {}^2/_{375} \frac{a^3b}{c^5} + {}^4/_{225} \frac{a^2b^2}{c^4} + {}^8/_{135} \frac{ab^3}{c^2} + {}^{16}/_{81} b^4\right)$.
$\left({}^1/_5 \frac{a}{c^2} - {}^2/_3 b\right)$.

13. Dělte: 1) ${}^8/_{15} : {}^4/_5$. 2) ${}^{56}/_{77} : {}^8/_{11}$. 3) $3\,{}^1/_8 : 2\,{}^1/_2$.
4) $5\,{}^4/_9 : 2\,{}^1/_3$. 5) $16\,{}^2/_3 : 8\,{}^1/_3$. 6) $5\,{}^5/_{12} : 3\,{}^1/_4$.
7) $8 : {}^4/_9$. 8) $15 : {}^5/_6$. 9) $26 : {}^2/_{13}$. 10) $26 : {}^{13}/_{20}$.
11) ${}^1/_2 : {}^1/_5$. 12) ${}^2/_3 : {}^5/_{11}$. 13) ${}^7/_8 : {}^3/_4$. 14) ${}^7/_{12} : {}^5/_6$.
15) $2\,{}^1/_2 : 3\,{}^1/_4$. 16) $6\,{}^5/_{11} : 2\,{}^1/_3$. 17) $8\,{}^3/_8 : 1\,{}^7/_{16}$.
18) $\frac{9a^3b^4}{16c^2d^5} : -\frac{3a^2b}{4c^2d^3}$. 19) $\frac{12mn^4p^3}{33q^5r^4} : \frac{4mn^3p^2}{11q^4r^3}$.
20) $\frac{77x^2y^4}{84u^5z} : \frac{17xy^4}{12u^3z}$. 21) $\frac{8a^2b^2 - 24a^3b^4 + 56a^4b^3}{45c^2d^2 + 54c^4d^3 - 81c^3d^4} : \frac{8a^2b^2}{9c^2d^2}$.
22) $\frac{6x(3y-5z) - 7y(3y-5z)}{2z(x+y) + 3y(x+y)} : \frac{3y-5z}{x+y}$.
23) $\frac{(2a-5b)(7a+4b) - (5a+7b)(2a-5b)}{(8a-7b)(6a-b) + (6a-b)(3a-5b)} : \frac{2a-5b}{6a-b}$.

24) $\left(\frac{15u^2x^3}{28y^3z^5} - \frac{55u^4x}{72y^4z^2} + \frac{45u^3x^5}{72yz^3}\right) : \frac{5u^2x}{4yz^2}$.

25) $\frac{x^2y^2}{z} : \left[\frac{x^2z^2}{y} : \left(\frac{y^2z^2}{z} : \frac{x^2}{yz}\right)\right]$.

26) $\frac{m^2n^2}{p} : \left[\frac{m^2p^2}{n} : \left(\frac{n^2p^2}{m} : \frac{n^2}{mp}\right) : \left(\frac{mn}{p^2} : \frac{np}{m^2}\right)\right]$.

27) $\frac{3ab}{4cd} : \left\{\frac{5mn}{3pq} : \left[\frac{7cd}{8mn} : \left(\frac{5pq}{ab} : \frac{3mn}{m^2}\right)\right]\right\}$.

28) $({}^{1}/_{6}a^2 - {}^{19}/_{90}ab + {}^{1}/_{15}b^2) : ({}^{1}/_{3}a - {}^{1}/_{5}b)$.

29) $({}^{1}/_{12}a^3 - {}^{9}/_{20}a^2b - {}^{1}/_{27}ab^2 + {}^{1}/_{5}b^3) : ({}^{1}/_{2}a + {}^{1}/_{3}b)$.

30) $({}^{1}/_{10}a^5 - {}^{3}/_{20}a^4b + {}^{16}/_{45}a^3b^2 - {}^{101}/_{600}a^2b^3 + {}^{11}/_{120}ab^4 + {}^{1}/_{10}b^5)$
$: ({}^{1}/_{5}a^2 - {}^{1}/_{6}ab + {}^{1}/_{2}b^2)$.

31) $(14\frac{a^4c^2}{b^6} + 43\frac{a^3c^3}{b^5} + 55\frac{a^2c}{b^3} - 21\frac{a^2c^4}{b^4} + 21)$
$: (2\frac{a^2c}{b^3} + 7\frac{ac^2}{b^2} + 7)$.

32) $\left(32\frac{a^5}{b^{10}} - 243\frac{b^5c^{10}}{a^5}\right) : \left(2\frac{a}{b^2} - 3\frac{bc^2}{a}\right)$.

33) $\left({}^{1}/_{16}\frac{x^8y^4}{z^{12}} + {}^{23}/_{576}\frac{x^2}{y^2z^2} + {}^{1}/_{144}\frac{z^8}{x^4y^8}\right) :$
$: \left({}^{1}/_{4}\frac{x^4y^2}{z^6} - {}^{1}/_{24}\frac{x}{yz} + {}^{1}/_{12}\frac{z^4}{x^2y^4}\right)$.

34) $\left({}^{1}/_{18}\frac{a^6b^3}{c^9d^3} - {}^{1}/_{45}\frac{a^3d}{c^4} - {}^{1}/_{32}\frac{cd^5}{a^4b^{11}} + {}^{1}/_{80}\frac{c^6d^9}{a^7b^{14}}\right)$
$: \left({}^{1}/_{2}\frac{a^2b}{c^3d} - {}^{1}/_{5}\frac{c^2d^3}{ab^2}\right) : \left({}^{1}/_{3}\frac{a^2b}{c^3d} + {}^{1}/_{4}\frac{c^2d^3}{a^3b^6}\right)$.

35) $\left(\frac{6a}{5b} - \frac{3bc^4}{4ad^3} + \frac{8a^2d^2}{7b^2c^3} - \frac{5c}{7d}\right) : \left(\frac{2a^2}{b^2} - \frac{5c^4}{4d^3}\right)^{*)}$.

36) $\left(\frac{a^2}{cd} - \frac{ab^2}{c^2d} + \frac{ab}{d^2} - \frac{cd}{b^2} + \frac{d}{a} - \frac{c^2}{ab}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{d}\right)$.

14. Proměňte v zlomky jednoduché: 1) $\frac{4}{{}^{3}/_{4}}$. 2) $\frac{9}{{}^{5}/_{7}}$. 3) $\frac{{}^{2}/_{3}}{4}$,

4) $\frac{{}^{5}/_{8}}{7}$. 5) $\frac{{}^{2}/_{3}}{{}^{5}/_{7}}$ 6) $\frac{{}^{4}/_{5}}{{}^{6}/_{7}}$. 7) $\frac{3\,{}^{1}/_{2}}{7\,{}^{1}/_{4}}$.

8) $\frac{8\,{}^{1}/_{3}}{9\,{}^{1}/_{6}}$. 9) $\frac{3\,{}^{1}/_{7}}{4\,{}^{5}/_{11}}$. 10) $\frac{a + \frac{b}{d}}{a - \frac{b}{d}}$.

---

*) V příkladu tomto a následujícím násobí se čitatel i jmenovatel prvního členu dělence takovými veličinami, aby byl dělitelný prvním členem dělitele; a podobně i jiné členy toho kterého dělence, kdykoli toho třeba.

11) $\dfrac{a+\dfrac{a^2+ab-1}{a-b}}{a-\dfrac{a^2-ab+1}{a+b}}$. 12) $\dfrac{x^2+xy+y^2-\dfrac{x^3-y^3+y^5}{x-y}}{x-y-\dfrac{x^3+y^3-y^5}{x^2+xy-y^2}}$.

13) $\dfrac{4a-5b-\dfrac{16a^2+25b^2}{4a+5b}}{4a+5b-\dfrac{25b^2-16a^2}{4a-5b}}$.

15 Umocněte: 1) $\left(\dfrac{3a}{5b}\right)^2$. 2) $\left(\dfrac{7a}{a-b}\right)^2$. 3) $\left(\dfrac{3a}{3b}\right)^4$.

4) $\left(\dfrac{5a-2b}{3}\right)^2$. 5) $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^3$. 6) $\left(a-\dfrac{ab+1}{b}\right)^6$.

7) $\left(\dfrac{abc}{def}\right)^m$. 8) $\left(x^2-\dfrac{x^3-2x^2y+y^2}{x-2y}\right)^2$.

16) Proměňte záporné mocnitele v kladné:

1) $\left(\dfrac{m}{n}\right)^{-2}$. 2) $\left(\dfrac{2m}{3n}\right)^{-3}$. 3) $\left(\dfrac{5a}{7b}\right)^{-2}$.

4) $\left(\dfrac{2a-3b}{4a+b}\right)^{-2}$. 5) $\left(\dfrac{xy}{z}\right)^{-m}$. 6) $\left(a-\dfrac{ab-1}{b}\right)^{-m}$.

7) $\left(\dfrac{x^2y-1}{x}-xy+1\right)^{-2}$.

IV. Zlomky desetinné.

A. Výklad.

§. 12.

1. V řadě čísel platí dle soustavy dekadické každá číslice od pravé k levé 10krát tolik, nežli by platila na místě (v pravo) předcházejícím, tedy naopak jest každá číslice *od levé k pravé desetkrát menší*, nežli kdyby stála o jedno místo dále v levo. Kdyby se tedy jednotkami číslo nekončilo, nýbrž za nimi v pravo ještě stály číslice a tyto se řídily dle soustavy dekadické, musila by první z nich býti 10krát menší nežli kdyby stála na místě jednotek, druhá by byla 10krát menší nežli kdyby stála na místě předcházejícím, tedy 100krát menší nežli kdyby stála na místě jednotek atd. Dle toho budou v čísle kde 4 na nejv. m. jsou jednotky, 4 na místě nejblíže nižším $\frac{4}{10}$

4 „ „ „ „ $\frac{\frac{4}{10}}{10} = \frac{4}{100}$

4 „ „ nejnižším $\frac{\frac{4}{100}}{10} = \frac{4}{1000}$

Podobně v čísle 9|456

$$\left.\begin{array}{l} \text{jsou 9 jednotky, 4 jsou } \frac{4}{10} \\ \text{5 jest } \frac{5}{100} \\ \text{6 „ } \frac{6}{1000} \end{array}\right\} \text{čili } 9 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} = 9 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{6}{10^3},$$

Zlomky, které mají za jmenovatele 10 neb vůbec mocninu 10ti, nazýváme *desetinné* čili *desetince* a každou číslici v desetinci *desetinku* na př. $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{6}{1000}$ atd.

Zlomky desetinné řídí se dle soustavy dekadické a naznačují se tím, že se mezi číslo celé a desetinky klade *tečka desetinná* (·), která se udělá o něco výše, nežli bod co znamení násobení. Uvedený příklad by se tedy napsal

9·456,

a vyslovil buď 9 celých 4 desetiny, 5 setin, 6 tisícin
buď 9 „ 456 tisícin,
nebo 9456 tisícin.

Jmenovatel poslední desetinky vyjádřuje vždy na kterém místě tato státi má po jednotkách, neboť kolikátá mocnina čísla 10 onen jmenovatel jest čili kolik nicek tento má, tolikáté místo po jednotkách zaujme poslední desetinka. Dle toho se *vyslovený zlomek desetinný napíše* jako číslo celé, v kterémž se od pravé ruky k levé tolik míst oddělí tečkou, kolik nicek má jmenovatel. Poněvadž činí jednotky rozhraní mezi číslem a desetinkami, musejí se ony vždy poznačiti nickou, je-li nejvyšší místo vysloveného zlomku menší jednotek. Ostatně se vůbec všechna místa desetinná vyplní nickami, která se až do jmenovatele poslední desetinky nevyslovila. Dle toho budeme na př. psáti

47587 desettisícin = 4·7587
47587 tisícin = 47·587
47587 setin = 475·87
47587 stotisícin = 0·47587
47587 miliontin = 0·047587 atd.

2. Zlomek desetinný jest *pravý*, nemá-li žádných jednotek (ani místa vyššího) na př. 0·867, a *nepravý*, je-li spojen s číslem celým, na př. 38·409.

Desetinný zlomek nechť pravý nechť nepravý může býti buď *konečný*, je-li poslední desetinka na jisto udána na př. 0·75, 478·937, buď *nekonečný* pakli poslední jeho desetinku na jisto určiti nelze, což se naznačuje tečkami na př. 7·4587 . . . .

Nekonečný zlomek desetinný jest buď *na prosto občíslný* (*periodický*), pakli se *hned po tečce desetinné* buď jedna číslice neb několik číslic v témže pořádku opakuje na př. 4·555 . . . . . 0·478478 . . . . aneb *smíšeně občíslný*, pakli po desetinné tečce přichází buď jedna neb několik číslic, které v témže pořádku se dále neopakují a po těchto teprv jedna neb několik číslic, jež se v témže pořádku opakují na př. 4·53737 . . ., 0·5734444 . . . 0·0030101 . . .

Číslicím se opakujícím říkáme *občíslí* (*perioda*), a sice dle toho, kolik se jich opakuje, jest občíslí o 1, o 2, o 3 atd. číslicích čili jedno-, dvou-, tří . . . ciferné.

Aby se občíslí nemuselo několikrát psáti, dělá se nad první a poslední jeho číslicí bod, tak na př. značí $0\cdot\dot{4}5\dot{7} = 0\cdot457457457 \ldots$, $23\cdot\dot{7} = 23\cdot777 \ldots$ $0\cdot458\dot{3}\dot{9} = 0\cdot458393939 \ldots$ atd.

B. Proměňování zlomků obyčejných v desetinné téže hodnoty a naopak.

§. 13.

1. Obyčejný zlomek nejmenšími čísly psaný na př. $\frac{a}{b}$ promění se v desetinný téže hodnoty, násobíme-li jeho čítatele a jmenovatele 10^m (kde m jest kterékoli číslo celé), a dělíme-li takto změněného čítatele i jmenovatele původním jmenovatelem. Tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{a \,.\, 10^m}{b \,.\, 10^m} = \frac{a \,.\, 10^m : b}{10^m}$$

t. j. čítatel a se násobí 10^m, čili k čítateli a se připíše volný počet nicek, součin ten se pak dělí jmenovatelem b, a podíl tento se dělí 10^m, čili v podílu tom se od pravé k levé tolik míst oddělí desetinnou tečkou, kolik nicek se čítateli zavěsilo. Nicky k čítateli přidávají se po jedné. Je-li $a > b$, jest desetinný zlomek téže hodnoty nepravý, při $a < b$ však pravý. — Kromě toho jest desetinný zlomek, v nějž jsme $\frac{a}{b}$ proměnili, buď konečný buď nekonečný, dle toho je-li $a \,.\, 10^m$ dělitelné b čili nic. A poněvadž

$$\frac{a \,.\, 10^m : b}{10^m} = \frac{a \,.\, (2 \,.\, 5)^m : b}{10^m} = \frac{a \,.\, 2^m \,.\, 5^m : b}{10^m}, \text{ (§. 3)}$$

patrno, že bude $a . 2^m . 5^m$ vůbec dělitelné b, je li buď $b = 2^m$, buď $b = 5^m$, nebo skládá-li se b vůbec z činitelů 2^r a 5^s, kde r i s jsou buď rovny m, nebo menší tohoto. Neboť

je-li $b = 2^m$, jest $\frac{a . 2^m . 5^m : 2^m}{10^m} = \frac{a . 5^m}{10^m}$

„ $b = 5^m$ „ $\frac{a . 2^m . 5^m : 5^m}{10^m} = \frac{a . 2^m}{10^m}$

„ $b = 2^m . 5^s$ a $m = s + p$, jest $\frac{a . 2^m . 5^{s+p} : 2^m . 5^s}{10^m} = \frac{a . 5^p}{10^m}$, a

„ $b = 2^r . 5^m$ a $m = r + q$, „ $\frac{a . 2^{r+q} . 5^m : 2^r 5^m}{10^m} = \frac{a . 2^q}{10^m}$,

kteréž výsledky představují naskrz *konečné* zlomky desetinné. Mimo to bude míti v prvních dvou případech desetinný zlomek tolik desetinek, kolik jedností drží m, a poněvadž v případě třetím a čtvrtém jest $m > p$ a $m > q$, a spolu jest m jednou mocnitelem čísla 2 a podruhé mocnitelem čísla 5, bude míti desetinný zlomek tolik desetinek, kolik jedností drží *větší mocnitel* činitele 2 nebo 5. Tak na př.

$\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = 3{\cdot}_{00} : 4 = 0{\cdot}75$, pro $m = 2$, má zlomek 2 deset.

$\frac{7}{8} = \frac{7}{2^3} = 7{\cdot}_{000} : 8 = 0{\cdot}875$, „ $m = 3$, „ „ 3 „

$\frac{44}{25} = \frac{44}{5^2} = 44{\cdot}_{00} : 25 = 1{\cdot}76$, „ $m = 2$, „ „ 2 „

$\frac{17}{200} = \frac{17}{2^3 . 5^2} = 0{\cdot}085$, „ $r > s$, „ „ 3 „

$\frac{1597}{500} = \frac{1597}{2^2 . 5^3} = 3{\cdot}194$, „ $s > r$, „ „ 3 „

2. Není-li jmenovatel zlomku obyčejného (b) ani činitelem čísla 2^m ani 5^m ani součinu $2^m . 5^m$, jest zlomek desetinný, ve který se $\frac{a}{b}$ promění, *nekonečný*, a co takový vždy *občíslný*.

Že jest zlomek ten *nekonečný*, vysvítá z předešlého, že jest však spolu *občíslný*, patrno z tohoto:

Při každém dělení jest zbytek menší dělitele, a proto může býti na nejvýše tolik zbytků *rozličných*, kolik jest vůbec čísel menších nežli dělitel. Při ustavičném dělení musí se tedy některý zbytek opakovati, a po něm vždy všechny ostatní zbytky v témže pořádku, tedy i příslušné číslice v podílu.

Je-li jmenovatel zlomku obyčejného prvočíslo, jest desetinný zlomek jemu rovný naprosto občíslný na př.

$^1/_3 = 0{\cdot}\dot{6}$, $^1/_7 = 0{\cdot}\dot{1}4285\dot{7}$, $^1/_{13} = 0{\cdot}\dot{0}7692\dot{3}$, $^8/_{11} = 0{\cdot}\dot{7}\dot{2}$ atd.

Má-li však jmenovatel obyčejuého zlomku za činitele buď 2^m nebo 5^n nebo $2^m . 5^n$ a mimo to ještě prvočíslo, jest jemu rovný desetinný zlomek smíšeně občíslný, a sice předchází jeho občíslí tolik číslic, kolikátá mocnina nejvyšší buď čísla 2 neb 5 v jmenovateli tom co činitel obsažena jest, na př.

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2.3}=0.1\dot{6},\ \frac{7}{12}=\frac{7}{2^2.3}=0{\cdot}58\dot{3},\ \frac{17}{350}=\frac{17}{2.5^2.7}=0{\cdot}04\dot{8}5714\dot{2}.$$

3. Máme-li zlomek desetinný proměniti v obyčejný téže hodnoty, béřeme zvláště k tomu zřetel, je-li *konečný* nebo *nekonečný* (občíslný). *Konečný* zlomek desetinný proměníme v obyčejný, vypustíme-li tečku a napíšeme-li pod něj jeho jmenovatele t. j. dáme-li zlomku desetinnému podobu zlomku obyčejného: Zlomek tento se možná-li skrátí, na př.

$$0{\cdot}68=\frac{68}{100}=\frac{17}{25},\ 3{\cdot}416=\frac{3416}{1000}=\frac{427}{125}=3\frac{52}{125},\text{ nebo}$$

$$3{\cdot}416=3\frac{416}{1000}=3\frac{52}{125},\ 0{\cdot}005=\frac{5}{1000}=\frac{1}{200}\text{ atd.}$$

4. Jak se nekonečný zlomek desetinný *naprosto občíslný* promění v obyčejný téže hodnoty, vysvítá z tohoto:

Nazveme-li takového zlomku občíslí vůbec p, a počet číslic tohoto m, vyjádřuje se každý naprosto občíslný zlomek vzorcem:

$$N=\frac{p}{10^m}+\frac{p}{10^{2m}}+\frac{p}{10^{3m}}+\frac{p}{10^{4m}}+\ldots,\text{ toto násobeno }10^m\text{ dá}$$

$$N.10^m=p+\frac{p}{10^m}+\frac{p}{10^{2m}}+\frac{p}{10^{3m}}+\ldots,\text{ rozdíl první rovn. od druhé dá}$$

$$N.10^m-N=p,\quad\text{nebo}$$

$$N(10^m-1)=p,\quad\text{čili}$$

$$N=\frac{p}{10^m-1},$$

a poněvadž 10^m-1 jest číslo o tolika devítkách, kolik m má jednosti, rovná se *desetinný zlomek naprosto občíslný* (N) *zlomku obyčejnému, jehož čitatel jest občíslí a jmenovatel číslo o tolika devítkách, kolik číslic vůbec ono občíslí drží,* na př.

$$0{\cdot}\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{1}{3},\ 0{\cdot}\dot{0}\dot{9}=\frac{9}{99}=\frac{1}{11},\ 0{\cdot}\dot{7}0\dot{2}=\frac{702}{999}=\frac{26}{37},$$

$$2{\cdot}\dot{0}2\,3\dot{9}=2\frac{2439}{99999}=2^1/_{41}\text{ atd.}$$

5. Desetinný zlomek *smíšeně občíslný*, jehož číslo před občíslím nazveme a počet číslic tohoto n, občíslí p a počet jeho číslic m, vyjádřuje se vzorcem:

$$M=\frac{a}{10^n}+\frac{p}{10^{n+m}}+\frac{p}{10^{n+2m}}+\frac{p}{10^{n+3m}}+\ldots,\text{ toto násobeno }10^n\text{, dá}$$

$$M.10^n=a+\frac{p}{10^m}+\frac{p}{10^{2m}}+\frac{p}{10^{3m}}+\ldots,\text{ a opět násobeno }10^m\text{, dá}$$

$$M.10^n.10^m=.a10^m+p+\frac{p}{10^m}+\frac{p}{10^{2m}}+\ldots,\text{ rozdíl druhé rovnosti od třetí dá}$$

$$M.10^n10^m-M.10^n=a.10^m+p-a,\quad\text{nebo}$$

$M.10^n(10^m-1)=a.10^m+p-a$, z čehož

$$M=\frac{a.10^m+p-a}{10^n(10^m-1)}.$$

Poněvadž jest

$(a.10^m+p)$ číslo před občíslím i občíslí, tedy
$(a.10^m+p)-a$ rozdíl čísla předešlého a čísla před občíslím
10^m-1 číslo o tolika devítkách, kolik (m) občíslí má číslic
$10.(10^m-1)$ číslo předešlé, jemuž zavěšeno bylo tolik nicek, kolik (n) číslic drží číslo před občíslím, rovná se *smíšeně občíslný zlomek:*

M zlomku obyčejnému, jehož čitatel jest rozdíl čísla před občíslím od čísla zahrnujícího v sobě v jedné řadě i číslo před občíslím i občíslí, a jehož jmenovatel jest o tolika devítkách, kolik občíslí má číslic, s tolika nickami v pravo, kolik číslic jest před občíslím, na př.

$$0{\cdot}27\dot{8}0\dot{1}=\frac{27801-27}{99900}=\frac{1543}{5550},$$

$$0{\cdot}003\dot{3}7\dot{8}=\frac{3378-3}{999000}=\frac{3375}{999000}=\frac{1}{296} \text{ atd.}$$

6. Nekonečný zlomek desetinný, který ani na prosto ani smíšeně občíslný není, tedy ze žádného obyčejného zlomku nevznikl, nelze též v určitý zlomek obyčejný proměniti. Takový dává buď přidáním neb vynecháním jednoho místa rozličné zlomky obyčejné, na př. číslo Ludolfovo 3·1415926 . . . .

C. Počítání zlomky desetinnými.

§. 14.

a) Počítání úplné.

1. Jak jsme viděli řídí se zlomky desetinné ve své hodnotě zcela dle soustavy dekadické. Mají-li se tedy *sečítati* neb *odčítati*, napišme jejich stejnojmenná místa, jakož i tečky, správně pod sebe a sečítejme neb odčítejme je pak jako čísla celá. Je-li při odčítání v menšenci méně míst desetinných nežli v menšiteli, mohou se scházející vyplniti nickami, na př.

$$\begin{array}{r} 27{\cdot}458 \\ 3{\cdot}1795 \\ 0{\cdot}45 \\ \underline{0{\cdot}0032} \\ 31{\cdot}0907. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 78{\cdot}54_{000} \\ \underline{63{\cdot}07582} \\ 15{\cdot}46418. \end{array}$$

2. *Zlomek desetinný násobí se celým číslem* (neb naopak celé číslo zlomkem desetinným) jako čísla vůbec, v součinu se pak

tolik míst od pravé k levé tečkou oddělí, kolik desetinek má ten který činitel. Neboť

$$\frac{a}{10^m} \times b = \frac{ab}{10^m}.$$

Na př. 5·734 × 8 = 45·872, 17 × 0·07 = 1·19 atd.

Je-li b mocnina čísla 10, na př. $b = 10^n$, jest

$$\frac{a}{10^m} \times 10^n = \frac{a}{10^m : 10^n} = \frac{a}{10^{m-n}},$$

t. j. desetinný zlomek násobí se 10^n, pakli počet jeho desetinek o n zmenšíme, čili pakli desetinnou tečku pomkneme od levé k pravé o n míst. Kdyby počet desetinek v činiteli byl menší nežli n, vyplní se ostatní místa v součinu nickami, na př. 2·5748 × 1000 = 2574·8 42·78 × 10000 = 427800 atd.

3. *Zlomek desetinný násobíme zlomkem desetinným* jako čísla celá, v součinu pak oddělíme tečkou od pravé k levé tolik míst, kolik desetinek mají *oba* činitelé. Neboť

$$\frac{a}{10^m} \times \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}$$

Na př. 7·05 × 0·007 = 0·04935, 0·0014 × 0·8 = 0·00112, 32·798 × 4·751 = 155·823298.

4. *Zlomek desetinný dělí se celým číslem*, dělíme-li jako u čísel celých, a oddělíme-li v podílu tolik míst od pravé k levé tečkou, kolik desetinek má dělenec. Obyčejně klademe tečku v podílu hned jak mile k ní při dělení v dělenci přijdeme.

Neboť

$$\frac{a}{10^m} : b = \frac{a : b}{10^m}$$

Na př. 684·177 : 13 = 52·629, 1·87 : 17 = 0·11, 3·2766 : 43 = 0·0762, 0·0072 : 9 = 0·0008.

Je-li dělitel b mocnina čísla 10, tedy $b = 10^n$, jest

$$\frac{a}{10^m} : 10^n = \frac{a}{10^m \times 10^n} = \frac{a}{10^{m+n}},$$

t. j. zlomek desetinný dělí se 10^n, pomkneme-li tečku v dělenci od pravé k levé o n míst, na př. 18·745 : 100 = 0·18745, 57·46 : 1000 = 0·05746, 3796·5 : 1000 = 3·7965.

5. *Zlomek desetinný dělí se zlomkem desetinným*, uděláme-li prvé z dělitele číslo celé t. j. násobíme-li dělence a dělitele jmenovatelem tohoto (§. 7. f.), a dělíme-li pak jako prvé (4). Neboť

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^n} = \frac{a \,.\, 10^n}{10^m} : b = \frac{a \,.\, 10^n : b}{10^m}.$$

Na př. 68·571 : 0·9 = 685·71 : 9 = 76·19,
7411·7 : 5·41 = 741170 : 541 = 1370,
1·7437 : 3·71 = 174·37 : 371 = 47.

Podobně se dělí celé číslo zlomkem desetinným na př.
21 : 0·07 = 2100 : 7 = 300,
6 : 0·003 = 6000 : 3 = 2000 atd.

b) Počítání skrácené.

1. Má-li některý zlomek desetinný více desetinek, nežli jich dle úlohy potřebujeme, můžeme jej skrátiti, t. j. můžeme všechna místa desetinná, jichž zapotřebí nám věděti není, vynechati, avšak chyba v skráceném takto výsledku nesmí býti větší nežli $1/2$ jednosti posledního místa. Poněvadž jest totiž na př.

zlomek: 37·853 bližší zlomku 37·850, nežli zlomku 37·860, a
„ 0·4276 „ „ 0·4280 „ „ 0·4270,
můžeme na místě 37·853 položiti *skráceně* 37·85,
a „ „ 0·4276 „ „ 0·428.

Dle toho určuje se *poslední místo skráceného zlomku desetinného* dle nejblíže nižšího místa ve *zlomku úplném*, a sice je-li na tomto místě buď 5 neb číslice větší nežli 5, přidá se k číslici posledního místa *skráceného* zlomku 1, *jinak* se ničehož po skrácení nemění. Tak na př. zlomek

2·716139, skrácený o jedno místo, jest 2·71614, tento o jedno místo skrácený 2·7161 atd.

Při sečítání a odčítání zlomků desetinných skracuje se — potřeba-li — dle uvedeného obyčejně teprv *výsledek*, při násobení a dělení jest však celý výkon skrácený, a proto není vůbec poslední místo výsledku určité.

2. Mají-li se zlomky desetinné *násobit skráceně* t. j. má-li míti součin méně desetinek, nežli jich jest v obou činitelích, pracuje se takto:

Nejprvé se ustanoví *poslední žádané místo* v součinu, a dle tohoto číslice na onom místě v násobenci, která jsouc násobena číslicí na *nejvyšším* místě násobitele, dá součinem číslo s jmenovatelem posledního místa součinu. Potom se vede číslice na *nejvyšším místě násobitele* do číslice násobence, která jest na *nejblíže nižším* místě prv určeného, součin se napíše stranou a násobíce pravidelně dále, připočteme jeho desítky (dle 1. upravené), co *náhradu* čili *opravu* za ostatní vynechané číslice v násobenci, k nejbližšímu součinu. Dále skrátíme násobence o jedno místo t. j. zatrhneme číslici v něm, kterou se (po určení náhrady) násobiti započalo, vedeme do něho číslici na nejblíže nižším místě násobitele, napíšeme opět součin stranou a násobíce pravidelně dále připočteme jeho desítky, jako prvé, co náhradu k nejbližšímu součinu, který klademe pod poslední místo předešlého částečného součinu. Tak se pracuje dále až není v násobenci čeho zatrhnouti, a poněvadž se posloupně číslice na *nejblíže nižším* místě v násobiteli násobí číslicí na *nejblíže vyšším* místě v násobenci, jsou nejnižší místa všech částečných součinů stejnojmenná, a proto se kladou všechna pod sebe. Na př.

$$\begin{array}{r l}
\underline{7{\cdot}456|48} & \times\ 3{\cdot}2576,\ \text{na 3 desetinky}\\
22\,369 & 3 \times 4 = 12\ \text{náhrada}\ 1,\\
1\,491 & 2 \times 6 = 12\quad „\quad 1,\\
373 & 5 \times 5 = 25\quad „\quad 3,\\
52 & 7 \times 4 = 28\quad „\quad 3,\\
\underline{4} & 6 \times 7 = 42\quad „\quad 4,\\
24{\cdot}289 &
\end{array}$$

t. j. jelikož má býti poslední místo v součinu „tisíciny“ a nejvyšší místo v násobiteli (3) jsou jednotky, násobíme jednotky násobitele tisícinami (6) násobence, k vůli náhradě však prvé desettisíciny násobence (4), totiž 3 . 4 = 12, náhrada 1, pak 3 . 6 = 18, 18 + 1 = 19 atd. Podobně zatrhnuvše 6 v násobenci, násobíme číslicí na nejblíže nižším místě násobitele (2) nejprvé 2 . 6 = 12, náhrada 1, pak 2 . 5 = 10, 10 + 1 = 11 atd.

Jiný příklad:

$$\begin{array}{r l}
\underline{0{\cdot}4573|96} & \times\ 234{\cdot}527,\ \text{na 2 desetinky}\\
9148 & 2 . 9 = 18\ \text{náhrada}\ 2,\\
1372 & 3 . 3 = \ \ 9\quad „\quad 1,\\
183 & 4 . 7 = 28\quad „\quad 3,\\
23 & 5 . 5 = 25\quad „\quad 3,\\
\underline{1} & 2 . 4 = \ \ 8\quad „\quad 1,\\
107{\cdot}27 &
\end{array}$$

3. Mají-li se *v podílu* pouze nejvyšší desetinky poznati, *skrátí se dělení.* Aby se tak stalo, násobí se dělenec a dělitel takovou mocninou čísla 10, aby byl *dělitel číslo celé* (a. 5.). Na to se určí počet míst celého čísla v podílu, a dělí se jednou celým dělitelem do dělence, a jako obyčejně se součin dělitele podílem odečte. Na místě však, aby se k zbytku připsalo nejblíže nižší místo z dělence, skrátí se dělitel o poslední místo (které se zatrhne), takto skráceným dělitelem dělí se zbytek, a podílem se násobí nejprvé zatrhnuté místo dělitele, pak se násobí dále a desítky onoho součinu náležitě upravené připočtou se k součinu tomuto nejbližšímu. Při opětném dělení zatrhne se druhé místo (od pravé k levé) v děliteli atd. Na př.

$$\begin{array}{r l}
178{\cdot}4741 & : 4{\cdot}786,\ \text{po násobení 1000cem bude:}\\
\underline{178474{\cdot}1} & : 47\underline{8}\underline{6} = 37{\cdot}29\\
\underline{3489} & \\
\underline{139} & \\
\underline{43} & \\
1 &
\end{array}$$

t. j. 4786 do 178474·1 dá vůbec celé číslo o *dvou* místech, pak se 4786 dělí do 17847, podíl 3, 3 . 6 atd. Poslední místo v děliteli (6) se zatrhne, a 478 se dělí do 3489, podíl 7, 7 × 6 = 42, náhrada 4, 7 . 8 = 56, 56 + 4 = 60 atd. Dále se zatrhne v děliteli druhé místo (8) a dělí se 47 do 139, podíl 2, 2 × 8 = 16, náhrada 2, 2 . 7 = 14, 14 + 2 = 16 atd. Podobně:

```
    1 : 56·47 =
  100 : 5647 = 0·01770.
 1000
 10000
  4353
   400
    „ 5
```

Příklady.

1. Proměňte v zlomky desetinné: 1) $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{5}$, $^{1}/_{8}$, $^{1}/_{25}$, $^{17}/_{640}$, $^{19}/_{125}$, $^{1739}/_{12800}$, $^{173}/_{160}$, $^{323}/_{6250}$, $^{419}/_{5120}$. 2) $^{22}/_{7}$, $^{12}/_{13}$, $^{5}/_{11}$, $^{7}/_{31}$, $^{124}/_{113}$, $^{275689}/_{33102}$, $^{1627}/_{2800}$, $^{4783}/_{5500}$, $^{7641}/_{9152}$, $^{1}/_{1001}$, $^{1}/_{1517}$, $^{1}/_{2701}$, $^{1}/_{5621}$, $^{1}/_{41107}$.

2. Proměňte v zlomky obyčejné: 1) 0·4, 0·5, 0·12, 0·26, 0·36, 0·736, 0·1056, 0·0128, 0·00512, 0·04096, 0·000896, 0·1536, 28·672, 13·128, 4·375. 2) $0{\cdot}\dot{1}$, $0{\cdot}\dot{0}\dot{1}$, $0{\cdot}\dot{3}\dot{6}$, $0{\cdot}\dot{0}0\dot{1}$, $0{\cdot}\dot{0}2\dot{7}$, $0{\cdot}\dot{2}0\dot{7}$, $0{\cdot}\dot{0}7\dot{2}$, $0{\cdot}\dot{7}0\dot{2}$, $0{\cdot}\dot{7}030\dot{8}$, $0{\cdot}\dot{0}00\dot{1}$, $0{\cdot}\dot{0}000\dot{1}$, $0{\cdot}\dot{1}4285\dot{7}$, $0{\cdot}\dot{0}2\dot{7}$, $0{\cdot}\dot{0}09\dot{9}$, $0{\cdot}\dot{0}243\dot{9}$, $0{\cdot}\dot{0}136986\dot{3}$, 3) $0{\cdot}4\dot{3}$, $0{\cdot}83\dot{7}\dot{4}$, $0{\cdot}0\dot{7}\dot{5}$, $0{\cdot}00\dot{9}\dot{3}$, $0{\cdot}36\dot{7}\dot{2}$, $0{\cdot}1443\dot{2}\dot{4}$ $0{\cdot}72\dot{0}520\dot{2}$, $0{\cdot}396\dot{5}34\dot{6}$, $0{\cdot}909\dot{0}72\dot{9}$.

3. Kdy se bude 14·578967 rovnati 14578·967, nebo 1457·8967, nebo 1457896·7, nebo 145·78967, nebo 14578967, nebo 145789670, a kdy 0·014578967, nebo 1·4578967, nebo 0·00014578967, nebo 0·0014578967, nebo 0·0000014578967?

4. Násobte:
1) 7·002 × 5. 2) 3·0405 × 7. 3) 0·4 × 12. 4) 0·007 × 24.
5) 0·05 × 124. 6) 1·0504 × 9. 7) 28 × 0·2. 8) 47 × 0·03.
9) 5 × 0·071. 10) 458 × 0·007. 11) 32 × 0·008. 12) 563 × 0·0003.
13) 0·1 × 0·2. 14) 0·01 × 0·7. 15) 1·05 × 0·6. 16) 7·24 × 0·009.
17) 29·75 × 0·03. 18) 0·0789 × 0·8. 19) 0·00145 × 0·006.
20) 0·000387 × 0·0004. 21) 34·0057 × 1·1.

5. Dělte: 1) 27·36 : 8. 2) 926·9 : 13. 3) 130·05 : 17.
4) 278·07 : 31. 5) 67·877 : 659. 6) 0·1 : 37. 7) 194·649 : 897.
8) 3·39385 : 515. 9) 505·94 : 8·2. 10) 404·752 : 1·64.
11) 1560·6 : 2·55. 12) 996·771 : 45·7. 13) 322·0884 : 0·324.
14) 333·684 : 0·0116. 15) 225·225 : 3·465. 16) 0·1485 : 0·0198.
17) 1·5768 : 21·6. 18) 5·9655 : 14·55. 19) 4245·96 : 0·00164.
20) 0·04305 : 6·15. 21) 7 : 0·16. 22) 1 : 0·0128. 23) 500 : 0·091.
24) 2 : 0·035. 25) 300 : 3·367. 26) 10 : 12·5. 27) 1 : 4·07.
28) 0·00481 : 0·37. 29) 900 : 0·0001356.

6. Násobte skráceně: 1) 76·8943 × 25·3946 (na 3 deset. místa).
2) 6·45739 × 276·421 (na 3 d. m.)
3) 2·006574 × 30·7089 (na 3 d. m.)
4) 10·000695 × 0·7834 (na 4 d. m.)
5) 3·141592 × 0·075 (na 3 d. m.).
6) 1·48976 × 23·578 (na 2 d. m.).
7) 0·47895 × 34·78 (na 2 d. m.).
8) 0·0068957 × 0·06943 (na 5 d. m.)
9) 0·7423589 × 0·9853247 (na 4 d. m.)
10) $0{\cdot}12345^2$ (na 3 d. m.). 11) $3{\cdot}68973^2$ (na 3 d. m.).
12) $5{\cdot}6789^3$ (na 2 d. m.). 13) $1{\cdot}00457^3$ (na 4 d. m.).
14) 67·849532 × 368 (na 1 d. m.) 15) 89·74569 × 476 (na 1 d. m.).

7. Dělte skráceně: 1) 176·5397 : 40·3268.
2) 29·785061 : 21·370125. 3) 4141·759 : 0·7564.
4) 512·7658 : 0·6897512. 5) 0·06897561 : 0·765895.
6) 32·785674 : 5267·3268. 7) 19 : 14·52764.
8) 25 : 0·781236. 9) 47 : 5·764932. 10) 15 : 0·007831257.

8. Metr = 3·1634625 víd. stř., kolik víd. stř. dělá 125, 367, 1895 metrů, a kolik metrů jest 100, 268, 3500, 4990 víd. stř. (skráceně)?

9. Český korec = 1·5184 dolnor. měřice, kolik dolnor. měřic dělá 740, 1250, 8763 českých korců, a kolik českých korců dělá 15, 100, 302, 7253 dolnor. m. (skráceně)?

10. Zeměpisná míle = 7420·438 metrů = 3912·3604 víd. sáhu = 0·978091 rakouské míle. Kolik čtvercových metrů, sáhů a mil dělá čtverečná míle zeměpisná (skráceně)?

V. Řetězce.

§. 15.

1. Jsou-li *a*, *b* dvě čísla, z nichž není žádné mírou druhého a dělíme-li první druhým, pak druhé zbytkem, tento novým zbytkem atd. jako při vyhledávání největší společné míry, dostaneme několiké dělení, v němž se

$a = bq_1 + r_1,$
$b = r_1q_2 + r_2,$
$r_1 = r_2q_3 + r_3,$ atd., kde $q_1, q_2, q_3 \ldots$ jsou podíly a
$r_1, r_2, r_3 \ldots$ zbytky.

Převratné hodnoty těchto rovnic jsou

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{bq_1 + r^1}, \text{ nebo násobeno } b \text{ dá } \frac{b}{a} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{b}}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{r_1q_2 + r_2} \quad " \quad " \quad r_1 \; " \; \frac{r_1}{b} = \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2 q_3 + r_3}, \text{ nebo násobeno } r_2 \text{ dá } \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{q_3 + \frac{r_3}{r_2}} \text{ atd.}$$

Dosadíme-li do pravého dílu každé z těchto rovnic na místě zlomku $\frac{r_1}{b}$, $\frac{r_2}{r_1}$ atd. jejich hodnoty vždy z rovnice následující, dostaneme

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Tak vyvinutému dělení dvou čísel ($b : a$) říkáme *řetězec* nebo *zlomek řetězový*; $\frac{1}{q_1}$, $\frac{1}{q_2}$, $\frac{1}{q_3}$ . . . $\frac{1}{q_n}$ jest první, druhý, třetí, . . . *n*tý člen řetězce, tedy $q_1, q_2, q_3 \ldots . q_n$ jest jmenovatel toho kterého členu.

Řetězec se tedy skládá z několika obyčejných zlomků, z nichž každý následující tvoří s jmenovatelem předcházejícího členu číslo smíšené. Zlomek obyčejný $\frac{a}{b}$, z něhož vznikl řetězec, nazývá se *zlomkem původním.*

Je-li v řetězci člen $\frac{1}{q_n}$ *poslední* t. j. n číslo *určité*, jest řetězec *konečný* (*ukončený*), je-li však $n = \infty$ tedy poslední člen neurčitý, jest řetězec *nekonečný*, a opakují-li se v nekonečném řetězci jmenovatelé jednotlivých členů v témže pořádku, říkáme řetězci *občíslný* (*periodický*).

Není-li před řetězcem čísla celého, jako v příkladě uvedeném, říkáme mu řetězec *prostý;* a takovým jest vždy, je-li $b < a$ čili $\frac{b}{a}$ zlomek *pravý*; je-li před řetězcem číslo celé, nazýváme jej *smíšeným*, a takovým jest, je-li $b > a$ čili $\frac{b}{a}$ zlomek *nepravý*,

na př.
$$\frac{b}{a} = m + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Dodatek. Zde pojednáno pouze o řetězích *konečných*, jichž členy jsou *kladné* a čitatelé jednotlivých členů *jedničky*, jak ukazují uvedené příklady. V některých knihách učebních jest poznačena souvislost členů řetězce též bodem nad znaménkem +, totiž $\frac{1}{q_1} \dot{+} \frac{1}{q_2} \dot{+} \frac{1}{q_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{q_n}$.

2. *Obyčejný zlomek promění se v řetězec téže hodnoty*, dělíme-li dle předešlého jeho čítatele a jmenovatele čítatelem, čítatele a jmenovatele zbytku co druhého členu opět čítatelem tohoto atd., až poslední čili *ntý* zbytek co *ntý* člen řetězce bude míti za čítatele 1 a za jmenovatele předcházejícího čítatele. Každý obyčejný zlomek dá konečný řetězec (srovnej § 10. 2). Na př.

$$\frac{47}{67} = \frac{47 : 47}{67 : 47} = \frac{1}{1 + \frac{20}{47}}, \qquad \frac{20}{47} = \frac{20 : 20}{47 : 20} = \frac{1}{2 + \frac{7}{20}},$$

$$\frac{7}{20} = \frac{7 : 7}{20 : 7} = \frac{1}{2 + \frac{6}{7}} \qquad \frac{6}{7} = \frac{6 : 6}{7 : 6} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}} \text{ tedy}$$

$$\frac{47}{67} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}}.$$

Podobně se

$$\frac{327}{73} = 4 + \frac{35}{73} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

$$1{\cdot}379 = 1 + \frac{379}{1000} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}}}}$$

Převádíme-li pravý zlomek v řetězec, můžeme s prospěchem použiti způsobu, jakým se vyhledává největší společná míra. Neboť dělíce vždy menší číslo do většího, pak zbytek do dělitele atd., dostaneme po pořadě podíly q_1, q_2, q_3, . . . k nimž náležejí čítatelé jedničky. Na př.

$\frac{27}{49}$ dá $\begin{array}{r|r|l} 27 & 49 & 1 \\ 5 & 22 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ & & 2 \\ & & 2 \end{array}$ t. j. $\frac{27}{49} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}.$

3. *Řetězec promění se v obyčejný zlomek téže hodnoty*, zřídí-li se poslední číslo smíšené v zlomek nepravý, takto vzniklý zlomek složitý v obyčejný, nové číslo smíšené opět v zlomek nepravý atd., až se dojde na zlomek původní. Na př.

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{{}^{7}/_{6}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{6}{7}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{{}^{20}/_{7}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{7}{20}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{{}^{47}/_{20}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{20}{47}} = \cfrac{1}{{}^{67}/_{47}} = \frac{47}{67}.$$

$$4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}} = 4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{{}^{3}/_{2}}}} = 4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{11+\cfrac{2}{3}}} = 4+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{35}}$$

$$= 4 + \frac{35}{73} = \frac{327}{73}.$$

4. Bereme-li při řetězci ohled (mimo na číslo celé) buď pouze na jeho člen první, nebo na člen první a druhý, anebo první, druhý a třetí atd., a převedeme-li tyto členy, pomíjejíce všech ostatních, na zlomky obyčejné, *přibližují* se tyto po pořadě vždy více a více hodnotě zlomku původního, za kterouž příčinou jim říkáme *zlomky sblížné*. Nazveme-li sblížné zlomky po sobě jdoucí vůbec

$s_1 = \frac{Z_1}{N_1}$, $s_2 = \frac{Z_2}{N_2}$, $s_3 = \frac{Z_3}{N_3}$ . . . dá řetězec na př.

$$N = m + \cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots\, \cfrac{1}{q_r}}}}$$

tyto sbližné zlomky: $m+\frac{1}{q_1}$, $m+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}}$ $m+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}}}$ atd.

tak že se:

$$s_1 = m+\frac{1}{q_1} = \frac{mq_1+1}{q_1} = \frac{Z_1}{N_1},\quad \text{čili}\quad \begin{aligned} Z_1 &= mq_1 + 1.\\ N_1 &= q_1.\end{aligned}$$

$$s_2 = m+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}} = m+\frac{q_2}{q_1q_2+1} = \frac{mq_1q_2+q_2+m}{q_1q_2+1}$$

$$= \frac{q_2(mq_1+1)+m}{q_1q_2+1} = \frac{q_2Z_1+m}{q_2N_1+1} = \frac{Z_2}{N_2},\quad \text{čili}\quad \begin{aligned} Z_2 &= q_2Z_1 + m.\\ N_2 &= q_2N_1 + 1.\end{aligned}$$

Jak už z tohoto vysvítá, dostali jsme druhý sbližný zlomek z prvního zlomku tím, že jsme k jmenovateli členu onoho totiž ku q_1 přidali člen následující $\left(\frac{1}{q_2}\right)$, a podobně dostaneme třetí zlomek sbližný, přidáme-li k poslednímu jmenovateli q_2 následující člen $\frac{1}{q_3}$, tedy i každý z ostatních, přidáme-li k jmenovateli posledního členu předcházejícího, na př. q_r člen následující $\frac{1}{q_{r+1}}$.

Dle toho se

$$s_3 = \frac{\left(q_2+\frac{1}{q_3}\right)Z_1+m}{\left(q_2+\frac{1}{q_3}\right)N_1+1} = \frac{(q_2q_3+1)Z_1+q_3m}{(q_2q_3+1)N_1+q_3} = \frac{q_3(q_2Z_1+m)+Z_1}{q_3(q_2N_1+1)+N_1}$$

$$= \frac{q_3Z_2+Z_1}{q_3N_2+N_1} = \frac{Z_3}{N_3}\quad \text{atd.}$$

Z výsledku:

$$\frac{mq_1+1}{q_1} = \frac{Z_1}{N_1},\qquad \frac{q_2Z_1+m}{q_2N_1+1} = \frac{Z_2}{N_2},\qquad \frac{q_3Z_2+Z_1}{q_3N_2+N^1} = \frac{Z_3}{N_3}\ \text{atd.}$$

plyne pro sbližné zlomky *smíšeného řetězce* toto:

a) První sbližný zlomek jest číslo celé + první člen řetězce, oba uvedeny na zlomek nepravý.

b) Čítatel druhého zlomku sbližného rovná se součinu z jmenovatele druhého členu řetězce a z čitatele prvního zlomku sbližného + číslo celé (m), a jeho jmenovatel rovná se součinu z téhož jmenovatele druhého členu řetězce a z jmenovatele prvního zlomku sbližného + 1.

c) Každý z ostatních zlomků sbližných určí se *pomocí dvou zlomků sbližných předcházejících*, tak že se čítatel na př. $r$tého zlomků sbližného rovná součinu z jmenovatele $r$tého členu řetězce a z čitatele ($r—1$)ního t. j. předcházejícího zlomku sbližného +

čitatel $(r-2)$ho t. j. ob jeden předcházejícího zlomku sblížného, a jeho jmenovatel se rovná součinu z jmenovatele téhož $r$tého řetězce a z jmenovatele předcházejícího zlomku sblížného + jmenovatel zlomku sblížného ob jeden předcházejícího. Dle toho jest

$$s_4 = \frac{q_4 Z_3 + Z_2}{q_4 N_3 + N_2} = \frac{Z_4}{N_4},$$

$$s_5 = \frac{q_5 Z_4 + Z_3}{q_5 N_4 + N_3} = \frac{Z_5}{N_5},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$s_r = \frac{q_r Z_{r-1} + Z_{r-2}}{q_r N_{r-1} + N_{r-2}} = \frac{Z_r}{N_r}.$$

Je-li řetězec *prostý* t. j. $m = 0$, jest

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1} \text{ a } \frac{Z_2}{N_2} = \frac{q_2 Z_1}{q_2 N_2 + 1} \text{ t. j.}$$

u *řetězce prostého* jest prvním zlomkem sblížným první člen řetězce, a druhý zlomek sblížný dostaneme jako prvé vypustivše číslo celé $(m = 0)$.

5. V praktickém počítání vyhledávají se sblížné zlomky na základě předešlého takto:

a) Vypíší se jmenovatelé všech členů daného řetězce, totiž $q_1, q_2, q_3 \ldots q_n$.

b) Je-li řetězec *smíšený* a celé číslo na př. m, napíše se do druhé řady před prvního jmenovatele, kterého jsme vysadili, totiž před q_1, pomocný zlomek $\frac{1}{0}$ a za tímto $\frac{m}{1}$; je-li řetězec *prostý*, napíše se před předního jmenovatele pomocný zlomek $\frac{0}{1}$, a pod něj první sblížný zlomek $\frac{1}{q_1}$; dále se pracuje u onoho i tohoto řetězce pomocí vzorce

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{q_r Z_{r-1} + Z_{r-2}}{q_r N_{r-1} + N_{r-2}}.$$

Dle toho bychom určili v předešlém příkladě

$$M = m + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \ldots$$

sblížné zlomky takto: Jmenovatelé členů jsou:

$$q_1 \qquad q_2 \qquad q_3 \ldots,$$ pomocný zlomek

$$\frac{1}{0}, \text{ pak } \frac{m}{1}, \frac{mq_1 + 1}{q_1}, \frac{mq_1 q_2 + q_2 + m}{q_1 q_2 + 1}, \frac{mq_1 q_2 q_3 + q_2 q_3 + mq_3 + mq_1 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_3 + q_1},$$

atd.

Je-li $M = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \ldots$

vysadí se jmenovatelé: $q_1 \quad q_2 \quad q_3$

pomocný zlomek $\frac{0}{1}$, pak $\frac{1}{q_1}$, $\frac{q_2}{q_1q_2+1}$, $\frac{q_2q_3+1}{q_1q_2q_3+q_3+q_1}$, atd.

Podobně:

$$4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}. \qquad \begin{array}{ccccccc} & & 2, & 3, & 3, & 1, & 3. \\ \frac{1}{0}, & \frac{4}{1}, & \frac{9}{2}, & \frac{31}{7}, & \frac{102}{23}, & \frac{133}{30}, & \frac{501}{113}. \end{array}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}} \qquad \begin{array}{ccccccc} & 1, & 2, & 1, & 4, & 1, & 2. \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{14}{19}, & \frac{17}{23}, & \frac{48}{65}. \end{array}$$

Z vývodu sbližných zlomků vysvitá, že jest čítatel i jmenovatel každého následujícího zlomku sbližného větší nežli čítatel a jmenovatel sbližného zlomku předcházejícího. Z téže příčiny jest čítatel a jmenovatel posledního zlomku sbližného čili zlomku původního větší čítatele a jmenovatele kteréhokoli zlomku sbližného.

6. *Hodnota zlomku původního nalézá se mezi hodnotami dvou zlomků sbližných po sobě jdoucích, a sice jest každý sbližný zlomek na místě lichém větší a každý na místě sudém menší nežli zlomek původní, a proto jest i každý sbližný zlomek na místě lichém větší nežli jeho zlomek sousední na místě sudém, a naopak.*

Neboť jsou-li u řetězce

$$M=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\ldots}}}$$

sbližné zlomky:

$$\frac{Z_1}{N_1}=\frac{1}{q_1}, \quad \frac{Z_2}{N_2}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}}, \quad \frac{Z_3}{N_3}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}}} \quad \text{atd.}$$

a položíme-li

$$M=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\ldots}}}=\frac{1}{q_1+x_1}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+x_2}}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+x_3}}} \quad \text{atd.}$$

kde x_1, x_2, x_3 atd. zastupuje vždy všechny vypuštěné členy řetězce, jest

$$q_1 + x_1 > q_1, \quad \text{tedy } \frac{1}{q_1+x_1} < \frac{1}{q_1} \text{ t. j. } M < \frac{Z_1}{N_1};$$

$$q_1 + \frac{1}{q_2+x_2} < q_1 + \frac{1}{q_2}, \quad \text{tedy } \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+x_2}} > \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2}} \text{ t. j.}$$

$$M > \frac{Z_2}{N_2};$$

$$q_2 + \frac{1}{q_3+x_3} < q_2 + \frac{1}{q_3}, \quad \text{tedy } \frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3+x_3}} > \frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3}}, \text{ nebo}$$

$$q_1 + \frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3+x_3}} > q_1 + \frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3}} \text{ a proto}$$

$$\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3+x_3}}} < \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3}}} \quad \text{t. j. } M < \frac{Z_3}{N_3} \text{ atd.}$$

A poněvadž jest

$$\frac{Z_1}{N_1} > M,\ M > \frac{Z_2}{N_2},\ \frac{Z_3}{N_3} > M,\ M > \frac{Z_4}{N_4} \text{ atd. nebo}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} > M > \frac{Z_2}{N_2},\ \frac{Z_2}{N_2} < M < \frac{Z_3}{N_3},\ \frac{Z_3}{N_3} > M > \frac{Z_4}{N_4} \text{ atd. jest i}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} > \frac{Z_2}{N_2} < \frac{Z_3}{N_3} > \frac{Z_4}{N_4} \text{ atd.}$$

Dle toho vyvineme-li v příkladě:

$$\frac{48}{65} = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}$$

sbližné zlomky:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{14}{19},\ \frac{17}{23},\ \frac{48}{65}, \text{ jest:}$$

$$\frac{1}{1} > \frac{2}{3} < \frac{3}{4} > \frac{14}{19} < \frac{17}{23} > \frac{48}{65}.$$

7. *Rozdíl dvou po sobě jdoucích sbližných zlomků* $= \pm$ *1 dělené součinem jejich jmenovatelů*, a sice jest rozdíl ten kladný, odečítáme-li sbližný zlomek na místě sudém od jeho sousedního na místě lichém, a záporný, odečítáme-li sbližný zlomek na místě lichém od jeho sousedního na místě sudém.

Nebot při dvou sousedních sbližných zlomcích na př.

$$\frac{Z_r}{N_r},\quad \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}},\qquad \text{a} \qquad \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}},\quad \frac{Z_{r-2}}{N_{r-2}}$$

jest rozdíl prvních dvou (s ohledem na 4.)

$$\frac{Z_r}{N_r}-\frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}}=\frac{q_rZ_{r-1}+Z_{r-2}}{q_rN_{r-1}+N_{r-2}}-\frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}}=\frac{Z_{r-2}N_{r-1}-Z_{r-1}N_{r-2}}{(q_rN_{r-1}+N_{r-2})N_{r-1}},$$
a rozdíl druhých dvou zlomků jest
$$\frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}}-\frac{Z_{r-2}}{N_{r-2}}=\frac{Z_{r-1}N_{r-2}-Z_{r-2}N_{r-1}}{N_{r-1}N_{r-2}}=-\frac{Z_{r-2}N_{r-1}-Z_{r-1}N_{r-2}}{N_{r-1}N_{r-2}};$$

U obou konečných rozdílů jsou si čitatelé rovni až na znaménka, která jsou opačná, a jmenovatelé představují součiny jmenovatelů obou zlomků sbližných po sobě jdoucích. Poněvadž však rozdíl prvních dvou zlomků sbližných jest $\frac{Z_1}{N_1}-\frac{Z_2}{N_2}=\frac{1}{q_1}-\frac{q_2}{q_1q_2+1}=\frac{+1}{q_1(q_1q_2+1)}$, jest rozdíl druhého a třetího zlomku sbližného

$$\frac{Z_2}{N_2}-\frac{Z_3}{N_3}=\frac{-1}{N_2N_3}, \text{ dále}$$
$$\frac{Z_3}{N_3}-\frac{Z_4}{N_4}=\frac{+1}{N_3N_4},$$
$$\frac{Z_4}{N_4}-\frac{Z_5}{N_5}=\frac{-1}{N_4N_5}.$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\frac{Z_r}{N_r}-\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}=\frac{\pm 1}{N_rN_{r+1}},$$
a sice + 1 je-li r liché, a − 1 je-li r sudé.

8. *Sbližné zlomky na místech lichých jsou čím dále tím menší, a na místech sudých čím dále tím větší.*

Neboť je-li r *liché*, jest
$$\frac{Z_r}{N_r}-\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}=\frac{+1}{N_rN_{r+1}} \quad\text{a}\quad \frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}-\frac{Z_{r+2}}{N_{r+2}}=\frac{-1}{N_{r+1}N_{r+2}}, \text{ nebo}$$
násobeno − 1nicí $\frac{Z_{r+2}}{N_{r+2}}-\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}=\frac{+1}{N_{r+1}N_{r+2}}$.

Poněvadž jsou však jmenovatelé sbližných zlomků čím dále tím větší, jsou rozdíly vždy po sobě jdoucích sbližných zlomků, bez ohledu na znaménka, čím dále tím menší, totiž
$$\frac{1}{N_rN_{r+1}}>\frac{1}{N_{r+1}N_{r+2}}, \text{ a tedy}$$
$$\frac{Z_r}{N_r}-\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}>\frac{Z_{r+2}}{N_{r+2}}-\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}} \text{ čili (při stejných menšitelích)}$$
$$\frac{Z_r}{N_r}>\frac{Z_{r+2}}{N_{r+2}}, \text{ tedy pro } r=1,\ 3,\ 5,\ 7\ldots$$
$$\frac{Z_1}{N_1}>\frac{Z_3}{N_3}>\frac{Z_5}{N_5}>\text{ atd.}$$

A je-li r *sudé*, jest
$$\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}-\frac{Z_r}{N_r}=\frac{+1}{N_rN_{r+1}}, \text{ a}$$
$$\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}-\frac{Z_{r+2}}{N_{r+2}}=\frac{+1}{N_{r+1}N_{r+2}}.$$

A poněvadž jest

$$\frac{1}{N_r N_{r+1}} > \frac{1}{N_{r+1} N_{r+2}} \text{ jest i}$$

$$\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}} - \frac{Z_r}{N_r} > \frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}} - \frac{Z_{r+2}}{N_{r+2}} \text{ t. j. (při stejných menšencích)}$$

$$\frac{Z_r}{N_r} < \frac{Z_{r+2}}{N_{r+2}}, \text{ tedy pro } r = 2, 4, 6, \ldots$$

$$\frac{Z_2}{N_2} < \frac{Z_4}{N_4} < \frac{Z_6}{N_6} < \text{ atd.}$$

Z tohoto a z předešlého (7) patrno, že veškeré sblížné zlomky čím dále tím více se přibližují hodnotě zlomku původního, a tuto buď předstihují nebo ji nedostihují, a poněvadž hodnota tato leží mezi hodnotami vždy dvou zlomků sblížných po sobě jdoucích, a rozdíl těchto jest ustavičně menší, jest i rozdíl mezi hodnotou zlomku původního a kteréhokoli ze dvou sousedních zlomků sblížných ustavičně menší, avšak bez ohledu na znaménka nikdy roven 0.

9. Z uvedeného plyne pro zlomky sblížné ještě toto:

a) Čitatel a jmenovatel každého zlomku sblížného jsou prvočísla vespolek. Neboť kdyby Z_r a N_r měly společnou míru na př. $m > 1$, musil by míti i rozdíl součinů $Z_r N_{r-1} - Z_{r-1} N_r$ tutouž míru společnou m. Avšak rozdíl ten jest ± 1, proto jsou Z_r a N_r prvočísla vespolek.

b) Rozdíl dvou sousedních sblížných zlomků jest menší nežli ± 1 dělená čtvercem menšího jmenovatele obou zlomků. Neboť $\frac{Z_r}{N_r} - \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}} = \frac{\pm 1}{N_r N_{r-1}}$, a poněvadž jest $N_r > N_{r-1}$ tedy $N_r \times N_{r-1} > N^2_{r-1}$ bude

$$\frac{\pm 1}{N_r N_{r-1}} < \frac{\pm 1}{N^2_{r-1}}.$$

Z téže příčiny jest rozdíl zlomku původního a kteréhokoli zlomku sblížného menší nežli ± 1 dělená čtvercem jmenovatele zlomku sblížného.

c) Mezi dva sousední zlomky sblížné nelze žádného zlomku vměstnati s jmenovatelem menším, nežli kterýkoli jmenovatel obou zlomků sblížných. Neboť kdyby se vměstnal mezi sblížné zlomky $\frac{Z_r}{N_r}$ a $\frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}}$ na př. zlomek $\frac{Z_m}{N_m}$, bylo by bez ohledu na znaménka

$$\frac{Z_r}{N_r} - \frac{Z_m}{N_m} < \frac{Z_r}{N_r} - \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}}, \quad \text{nebo} \quad \frac{Z_m}{N_m} - \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}} < \frac{Z_r}{N_r} - \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}},$$

a poněvadž se

$$\frac{Z_r}{N_r} - \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}} = \frac{1}{N_r\, N_{r-1}}, \text{ bylo by}$$

$$\frac{Z_r}{N_r} - \frac{Z_m}{N_m} = \frac{Z_r N_m - Z_m N_r}{N_r N_m} < \frac{1}{N_r\, N_{r-1}}, \text{ a rovněž}$$

$$\frac{Z_m}{N_m} - \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}} = \frac{Z_m N_{r-1} - Z_{r-1} N_m}{N_m \, . \, N_{r-1}} < \frac{1}{N_r \; N_{r-1}},$$

tedy $$\frac{Z_r N_m - Z_m N_r}{N_m} < \frac{1}{N_{r-1}} \text{ a } \frac{Z_m N_{r-1} - Z_{r-1} N_m}{N_m} < \frac{1}{N_r}$$

čili $N_m > N_{r-1}$, a $N_m > N_r$, nechť jest rozdíl v kterémkoli z těchto čítatelů $\geqq 1$.

Poněvadž se tedy mezi dva sousední zlomky žádný jiný vměstnati nedá, který má jmenovatele menšího nežli kterýkoli jmenovatel obou zlomků sbližných, a poněvadž hodnota zlomku původního leží mezi hodnotami dvou po sobě jdoucích zlomků sbližných, udává každý zlomek sbližný hodnotu zlomky původního lépe, nežli kterýkoli zlomek jiný *s menším jmenovatelem.*

Pro tuto důležitou vlastnost zlomků sbližných lze každý zlomek, jehož čítatel a jmenovatel jsou tak veliká čísla, že z nich nesnadno souditi na pravou hodnotu celého zlomku, vyjádřiti čísly menšími t. j. zlomkem kterýms sbližným, a tento udává vždy hodnotu zlomku původního lépe nežli kterýkoli zlomek s menším jmenovatelem. Na př. Poměr obvodu kruhu k průměru vyjádřuje se číslem Ludolfickým, které jest nekonečné, totiž číslem 3·1415926... Abychom hodnotu čísla tohoto poznali určitěji, proměňme je v řetězec, totiž

$$3 + \frac{1415926}{10000000} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{243 + \ldots}}}}$$

Sbližné zlomky tohoto jsou:

$$3, \ \frac{22}{7}\,{}^{1)}, \ \frac{333}{106}, \ \frac{355}{113}\,{}^{2)} \ \text{atd.}$$

Synodický měsíc (t. j. čas od jednoho měsíce k druhému) drží 29·530588 dne, a rok sluneční = 365 dnům, 5 hod., 48 min., 47·5711 sek. čili = 365·242264.. dnu. Abychom poměr prvního k druhému poznali v číslech malých, proměňme v řetězec: 29530588 : 365242264, čili v podobě zlomku

$$\frac{29530588}{365242264} = \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17}}}}}}}$$

Sbližné zlomky jeho jsou:

$$\frac{1}{12}, \ \frac{2}{25}, \ \frac{3}{37}, \ \frac{8}{99}\,{}^{3)}, \ \frac{11}{136}, \ \frac{19}{235}\,{}^{4)} \text{atd.}$$

---

1) Poměr Archimedův. 2) Poměr Metiův. 3) Oktaëteris Řeků. 4) Cyklus Metonův.

Příklady.

2. Proměňte v řetězce: 1) $\frac{17}{45}$. 2) $\frac{24}{53}$. 3) $\frac{93}{127}$. 4) $\frac{151}{472}$.
5) $\frac{375}{982}$. 6) $\frac{4325}{8673}$. 7) $\frac{7514}{8329}$. 8) $\frac{387}{176}$. 9) $\frac{7501}{475}$.
10) $\frac{970}{271}$. 11) $\frac{68940}{3757}$. 12) $\frac{m^3+6m^2+13m+10}{m^4+6m^3+14m^2+15m+7}$.
13) $\frac{24x^3+58x^2+43x+10}{24x^4+154x^3+287x^2+193x+43}$.
14) $\frac{72a^4-174a^3+135a^2-43a+7}{24a^3-58a^2+43a-10}$.
15) 0·76543. 16) 0·10357. 17) 0·003279. 18) 4·5831.
19) 3·47853.

2. Proměňte v zlomek obyčejný:

1) $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$ 2) $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2}}}}}$. 3) $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10}}}}}$.

4) $\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}}}}$. 5) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$. 6) $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8}}}}}$.

7) $7+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}}$. 8) $10+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}$. 9) $\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n^2-1+\cfrac{1}{n^3-2+\cfrac{1}{n^4-3}}}}$.

10) $\cfrac{1}{a+5+\cfrac{1}{2a+3+\cfrac{1}{3a+1+\cfrac{1}{a}}}}$. 11) $\cfrac{1}{7a+1+\cfrac{1}{5a+3+\cfrac{1}{3a+5+\cfrac{1}{a+7}}}}$.

12) $4x + \cfrac{1}{x-y+\cfrac{1}{x+y+\cfrac{1}{2x-3y+\cfrac{1}{2x+3y.}}}}$ 13) $2a + \cfrac{1}{a-1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{a-3+\cfrac{1}{a-4.}}}}$

14) $5m + \cfrac{1}{m^2+1+\cfrac{1}{m^2-3+\cfrac{1}{m^2+2+\cfrac{1}{m^2-4.}}}}$

3. Udejte zlomky sbližné všech zlomků v příkladech 1.

4. Lot váhy krámské = 17·503 grammu, a karat co váha na drahokamy = 0·206085 grammu. Kolik grammů rovná se asi kolika lotům?

5. Hřivna Vídeňská = 187·08 grammu, a hřivna Vídeň.-Rýnokolínská = 233·87 gr. Kolik hřiven Vídeňských rovná se as kolika hřivnám Vídeň.-Rýnokolínským?

6. Rakouská míle poštovní = 7586·6628 metru, a anglická míle mořská = 1855·110 metru. Kolik mil mořských rovná se asi kolika mílím rakouským?

7. Metr = 3·16344625 Víd. stopy. Kolik metrů rovná se asi kolika Víd. stopám?

8. Český korec = 1·5184 dolnorak. měřici. Kolik korců rovná se asi kolika měřicím?

Část třetí.

I. Poměry a srovnalosti.

§. 16.

1. Porovnáme-li dvě čísla vůbec, abychom se dověděli, *kolikrát* jest jedno větší nežli druhé, říkáme tomu *poměr měřický*. Čísla ta jmenujeme členy poměru a sice první (přední) a druhý (zadní) člen, tyto spojujeme znaménkem dělení (:) a výsledku říkáme *udavatel* čili *vykladatel poměru* na př. $a : b = q$ (čti: a má se k b nebo poměr a k b jest q); a jest první, b druhý člen a q udavatel toho poměru. Je-li $a > b$, říkáme poměru *sestupný*, na př. 15 : 5, je-li však $a < b$ *vzestupný*, na př. 4 : 8. Poněvadž porovnáváme v poměru velikosť dvou čísel, musejí tato býti buď stejnojmenná buď bezejmenná; udavatel poměru jest vždy bezejmenný čili prosté číslo (§. 7. 2) na př.

a zl. : b zl. $= p$, nebo $a : b = p$, 12 zl. : 4 zl. = 3, nebo 12 : 4 = 3 atd.

Poměr jest tedy naznačené dělení, v němž dělenec a dělitel jsou buď stejno- buď bezejmenní, a proto platí o něm vše, co u dělení praveno bylo (§. 7.), zejmena:

Udavatel poměru se nemění, násobíme-li nebo dělíme-li oba jeho členy týmže číslem; na př.

$$a : b = q \text{ dá násobeno } m$$
$$am : bm = q \text{ (§. 7. f.).}$$

Je-li tedy některý člen zlomek, odstraníme jeho jmenovatele, násobíme-li tímto oba členy. A jsou-li oba členy zlomky se stejnými jmenovateli, vypusťme tyto, mají-li však jmenovatele nestejné, násobme je buď součinem obou (jsou-li tito prvočísla vespolek) aneb nejmenším jejich společným násobným (mají-li společnou míru). Na př.

$$a : \frac{b}{n} = q \text{ dá násobeno } n$$
$$an : b = q; \text{ nebo}$$
$$\frac{a}{n} : b = q \text{ dá } a : bn = q; \text{ nebo}$$
$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b = q,$$
$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = q \text{ dá násobeno } mn$$
$$an : bm = q, \text{ a}$$

$$\frac{a}{mn} : \frac{b}{mp} = q,$$ dá násobeno nejmenším společným násobným mnp

$$ap : bn = q.$$

Z toho plyne: *každý poměr lze vyjádřiti celými čísly.*

Podobně $a : b = q$, děleno m dá

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = q \text{ (§. 7. k)}$$

t. j. *mají-li oba členy poměru společnou míru, skrátí se touto.*

Dodatek. Každému poměru o dvou členech říkáme *jednoduchý*, na př. $a : b$. Ze dvou neb z několika poměrů jednoduchých sděláme poměr *složitý*, násobíme-li členy na stejných místech vespolek, na př.

$$\left.\begin{array}{l} a : b \\ c : d \end{array}\right\} \text{dá složitý poměr}$$
$$\overline{ac : bd} \text{ atp.}$$

2. *Dva poměry jsou si rovny, mají-li téhož udavatele*, na př.

$$a : b = q$$
$$c : d = q, \text{ tedy (úvod VII. 3).}$$
$$a : b = c : d$$ (čti: a má se k b jako se má c k d).

Dvěma rovným poměrům říkáme srovnalost (úměrnost), a tato dle příkladu

$a : b = c : d$, nebo jak se i píše:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

má čtyři členy, totiž první (a), druhý (b), třetí (c) a čtvrtý (d) člen. Prvnímu a čtvrtému členu říkáme *vnější* (a, d), druhému a třetímu *vnitřní* členy (b, c).

3. O každé srovnalosti platí:

a) *Součin členů vnitřních rovná se součinu členů vnějších*, na př. v srovnalosti

$a : b = c : d$ jest

$$ad = bc.$$

Neboť $a : b = c : d$ můžeme též psáti

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, což násobeno bd dá

$$ad = bc.$$

A naopak, jsou-li dva součiny, každý o dvou činitelích sobě rovny, můžeme z rovnice té sestaviti srovnalost. Činitele jedny dáme totiž za členy vnější (vnitřní) a činitele druhé za členy vnitřní (vnější), na př. rovnice

$mn = pq$ dá srovnalost

$$m : p = q : n.$$

Dodatek. Je-li srovnalost pravá, přesvědčíme se tedy způsobem dvojím, a sice určíme-li udavatele každého poměru, nebo násobíme-li členy vnitřní a členy vnější.

b) *Členy srovnalosti mohou osmkrát posloupnosť svou změniti.* Neboť ze srovnalosti

$a : b = c : d$ plyne rovnice

$ad = bc$, kterou můžeme psáti

$ad = bc$, $ad = cb$, $bc = ad$, $bc = da$, $cb = ad$, $cb = da$, $da = bc$, $da = cb$,

a sestavíme-li dle předešlého z každé z těchto rovnic srovnalosť, dostaneme:

1) $a : b = c : d$, 2) $a : c = b : d$, 3) $b : a = d : c$, 4) $b : d = a : c$,
5) $c : a = d : b$, 6) $c : d = a : b$, 7) $d : b = c : a$, 8) $d : c = b : a$.

Ze srovnalosti 1., 2., 7., 8. plyne, že druhý člen může býti třetím, čtvrtý prvním a naopak. Ze srovnalosti 3. 4. 5. 6. plyne, že vnitřní členy mohou býti vnějšími a vnější vnitřními.

c) *Součet neb rozdíl členu prvního a třetího má se k součinu neb rozdílu členu druhého a čtvrtého, jako první člen k druhému, nebo třetí k čtvrtému.* Na př. u srovnalosti

$$a : b = c : d$$

jest na př. $a : b = q$, $a = bq$,
a rovněž $c : d = q$, $c = bq$.

Buď součet neb rozdíl $a \pm c = (b \pm d)\, q$, čili

$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = q \left(\begin{array}{l} = a : b \\ = c : d \end{array} \right) \text{ t. j.}$$

$$\begin{aligned} (a \pm c) : (b \pm d) &= a : b \\ &= c : d. \end{aligned}$$

d) *Součet neb rozdíl členu prvního a druhého má se k součtu neb rozdílu členu třetího a čtvrtého jako první člen k třetímu, neb druhý k čtvrtému.*

Neboť srovnalosť $a : b = c : d$ můžeme též psáti (dle b)
$a : c = b : d$ a dle předcházejícího se má

$$\begin{aligned} (a \pm b) : (c \pm d) &= a : c \\ &= b : d. \end{aligned}$$

e) Beřeme-li ohled pouze na jedno znaménko, dostaneme ze srovnalosti (v *c)*)

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$$

jiné dvě a sice $\left.\begin{array}{r} (a + c) : (b + d) = a : b \\ \text{a } (a - c) : (b - d) = a : b \end{array}\right\}$ a porovnáme-li obě, vyplyne

$$\overline{(a + c) : (b + d) = (a - c) : (b - d)}, \text{ nebo}$$
$$(a + c) : (a - c) = (b + d) : (b - d) \text{ t. j.?}$$

A podobně dostaneme ze srovnalosti (v d))

$$(a \pm b) : (c \pm d) = a : c$$

tyto dvě: $(a + b) : (c + d) = a : c$, a
$(a + b) : (c - d) = a : c$, z nichž plyne

$$\overline{(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)} \text{ t. j.?}$$

f) *Při několika sobě rovných poměrech má se součet členů předních k součtu členů zadních jako každý přední člen k svému zadnímu.*

Neboť má-li se na př.

$$a:b = c:d = e:f = j:h = \ldots = q$$

plyne z poměru $a:b = q$ rovnice $a = bq$
„ $c:d = q$ „ $c = dq$
„ $e:f = q$ „ $e = fq$
„ $j:h = q$ „ $j = hq$ atd., tedy i součet:

$$a+c+e+j+\ldots = (b+d+f+h+\ldots)\,q, \text{ nebo}$$

$$(a+c+e+j+\ldots):(b+d+f+h+\ldots) = q = a:b$$
$$= c:d$$
$$= e:f$$
$$= j:h \text{ atd.}$$

Dodatek. Poněvadž při několika *sobě rovných* poměrech tvoří vždy dva a dva srovnalost, a poněvadž v každé srovnalosti vnitřní členy místa svá změniti mohou, dostaneme z poměrů

$a:b = c:d = e:f = j:h = \ldots$ srovnalosti
$a:c = b:d$, $c:e = d:f$, $e:j = f:h$ atd., nebo srovnalost
$a:c:e:j:\ldots = b:d:f:h:\ldots$

t. j. *přední členy několika sobě rovných poměrů mají se k sobě jako zadní členy týchže poměrů.*

A naopak, skládá-li se v srovnalosti každý ze dvou sobě rovných poměrů z několika členů úměrných, náležejí vždy dva členy jednoho poměru se dvěma členy na stejných místech poměru druhého do téže srovnalosti. Na př. Má-li se

$m:n:p:q:\ldots = m':n':p':q':\ldots$, má se i
$m:n = m':n'$,
$m:p = m':p'$,
$m:q = m':q'$,
$n:p = n':p'$ atd.

j) *Násobíme-li u několika srovnalostí členy na stejných místech vespolek, dostaneme opět srovnalost.* Na př.

1. $a:b = c:d$
2. $a_1:b_1 = c_1:d_1$
3. $a_2:b_2 = c_2:d_2$

4. $aa_1a_2:bb_1b_2 = cc_1c_2:dd_1d_2$

Neboť z 1. srovnalosti plyne $ad = bc$
z 2. „ „ $a_1d_1 = b_1c_1$
z 3. „ „ $a_2d_2 = b_2c_2$

tedy součin $aa_1a_2dd_1d_2 = bb_1b_2 \,.\, cc_1c_2$, což u srovnalost uvedeno dá $aa_1a_2:bb_1b_2 = cc_1c_2:dd_1d_2$, jako prvé.

Kdybychom v uvedených dvou srovnalostech (v 1. a 2.) položili $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, a $d = d_1$, aneb ve všech třech srovnalostech položili $a = a_1 = a_2$, $b = b_1 = b_2$, $c = c_1 = c_2$, $d = d_1 = d_2$, dostali bychom konečnou srovnalost (4).

v případě prvním $a^2:b^2 = c^2:d^2$, a
v případě druhém $a^3:b^3 = c^3:d^3$ atd.

t. j. *srovnalosť zůstává pravou, povýšíme-li každý její člen na tutouž mocninu.*

h) *Dělíme-li u dvou srovnalostí členy na stejných místech vespolek, dostaneme opět srovnalosť.* Na př.

$$\begin{array}{rl} 1. & a : b = c : d \\ 2. & a_1 : b_1 = c_1 : d_1 \\ \hline & \dfrac{a}{a_1} : \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1} : \dfrac{d}{d_1} \end{array}$$

Neboť z 1. srovnalosti plyne $ad = bc$
a z 2. „ „ $a_1 d_1 = b_1 c_1$

dělením dostaneme $\dfrac{a}{a_1} . \dfrac{d}{d_1} = \dfrac{b}{b_1} . \dfrac{c}{c_1}$, což uvedeno v srovnalosť dá $\dfrac{a}{a_1} : \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1} : \dfrac{d}{d_1}$.

i) *Každý člen srovnalosti lze vyjádřiti ostatními třemi.* Z té příčiny může býti kterýkoli člen srovnalosti neznámý a vždy se určí ostatními členy známými. Na př.

$$\begin{array}{c|c} a : b = c : x & x : b = c : d \\ ax = bc & xd = bc \\ x = \dfrac{bc}{a}, & x = \dfrac{bc}{d}, \end{array}$$

t. j. *každý člen vnější rovná se součinu obou členů vnitřních dělenému druhým členem vnějším.*

Podobně

$$\begin{array}{c|c} a : x = c : d & a : b = x : d \\ ad = cx & ad = bx \\ x = \dfrac{ad}{c}, & x = \dfrac{ad}{b}, \end{array}$$

t. j. *každý člen vnitřní rovná se součinu obou členů vnějších dělenému druhým členem vnitřním.*

Jsou-li veškeré známé tři členy v srovnalosti rozličné, říkáme čtvrtému neznámému *čtvrtá měřicky úměrná*, a jsou-li dva členy z daných a sice oba buď vnitřní neb vnější sobě rovny, jmenuje se člen neznámý *třetí měřicky spojitě úměrná*, na př. x v příkladech

$$a : b = b : x, \quad \text{nebo} \quad b : a = x : b.$$

Dodatek. Mají-li dvě srovnalosti tři členy na vzájem rovné, musí i čtvrtý člen v obou býti tentýž; na př.

$$\left.\begin{array}{ll} a : b = c : x, \text{ z čehož } & x = \dfrac{bc}{a} \\ a : b = c : y, \quad „ & y = \dfrac{bc}{a} \end{array}\right\} \text{(dle úvodu VII. 3).}$$

$$\overline{\quad x = y. \quad}$$

Příklady.

Vyhledejte x v srovnalostech: 1) $7 : 13 = x : 65$.
2) ${}^1/_2 : {}^1/_7 = {}^1/_5 : x$. 3) $x : 4\,{}^1/_2 = 5\,{}^3/_7 : {}^5/_6$. 4) $15\,{}^2/_5 : x = 8\,{}^1/_4 : 4\,{}^1/_5$.
5) $7\,{}^{11}/_{13} : x = 10{\cdot}098 : 5\,{}^{14}/_{17}$. 6) $0{\cdot}08 : 7{\cdot}52 = x : 0{\cdot}47$.

7) $91m^2n^2 : 182mnpq = 14mn : x.$

8) $14(a-b) : x = 210(a^2-b^2) : 15(a+b).$

9) $(m+n) : \left(1 - \frac{m+n}{2n}\right) = x : \left(1 - \frac{m-n}{m+n}\right).$

10) $x : (a-x) = a : b.$ 11) $(a+x) : x = (a+b) : a.$

12) $(a+x) : (a-x) = a : b.$ 13) $\left(\frac{1}{x} + a\right) : \left(\frac{1}{x} + x\right) = a : x.$

II. Použití srovnalosti při trojčlence.

§. 17.

Pravidlu, jímž se ze tří známých členů srovnalosti určuje neznámý člen čtvrtý, říkáme „regula de tri“ nebo *trojčlenka*, a touto se řeší velký počet úloh v praktickém počítání. Úlohy takové jsou buď *jednoduché* buď *složité*.

1. V *jednoduchých* úlohách přicházejí dva páry veličin, které v každém páru mají sice různá jména, avšak v páru druhém na vzájem jsou stejnojmenné s oněmi v páru prvním. Veličiny jednoho páru na př. A, B jsou příčiny, a veličiny druhého páru na př. A_1 B_1 následky, mimo to jsou A, B nebo A_1 B_1 různojmenné avšak A, A_1 a B, B_1 stejnojmenné.

Máme-li takové úlohy pomocí „trojčlenky“ řešiti, položme v poměr dvě veličiny stejnojmenné, tedy buď $A : A_1$ nebo $B : B_1$, a abychom z těchto dvou poměrů dostali srovnalost, musejí si býti rovny, což vůbec možná, má-li se buď

$$A : A_1 = B : B_1$$

nebo

$$A : A_1 = B_1 : B.$$

Má-li se $A : A_1 = B : B_1$, říká se, že jest druhý poměr *přímý* k prvnímu, a takový jest vždy pakli 2-, 3-, 4-, ... $m$kráté zvětšení (zmenšení) veličiny A vyžaduje 2-, 3-, 4-, ... $m$kráté zvětšení (zmenšení) veličiny B, nebo jak se vůbec říká, pakli *čím větší* A vyžaduje při týchže okolnostech *tím větší* B. Má-li se však $A : A_1 = B_1 : B$, jest druhý poměr *opačný* k prvnímu a takový jest vždy, pakli 2-, 3-, 4-, ... $m$kráté zvětšení (zmenšení) veličiny A, vyžaduje 2-, 3-, 4-, ... $m$kráté zmenšení (zvětšení) veličiny B, nebo pakli *čím větší* A vyžaduje při týchže okolnostech *tím menší* B.

Při řešení takových úloh položme pro snadnější přehled příčiny do jedné a následky, z nichž jeden jest neznámý, do druhé řady, tedy na př.

$$\begin{array}{cc|l} A & B & \text{nebo } A \quad B \\ A_1 & x & \phantom{\text{nebo }} x \quad B_1. \end{array}$$

Pak položme do prvního poměru veličinu neznámou a s ní stejnojmennou, a dle toho, je-li druhý poměr buď přímý buď opačný, udělejme třetím členem buď známý následek neb známou příčinu, tedy na př.

buď $x : B = A_1 : A$, nebo $x : A = B_1 : B$, je-li poměr druhý přímý,
buď $x : B = A : A_1$, „ $x : A = B : B_1$, „ „ „ opačný.

Na př. a) 5 loket zboží jest za 7 zl., zač 8 loket?

5 lok. 7 zl. } čím více zlatých tím více (téhož) zboží
8 lok. x zl. } t. j. druhý poměr jest přímý k prvnímu,

proto $x : 7 = 8 : 5$

$$x = \frac{7 . 8}{5} = \frac{56}{5} = 11{\cdot}20 \text{ zl.}$$

t. j. je-li 5 loket za 7 zl., jest 8 lok. za 11 zl. 20 kr.

b) 12 dělníků ukončí jakous práci za 9 dní, kolik dělníků ji ukončí za 6 dní?

12 děl. 9 dní (čím více dělníků tím méně času mají zapo-
x děl. 6 dní (třebí k vykonání téže práce, t. j. druhý po-
$x : 12 = 9 : 6$ měr jest opačný k prvnímu, proto
$x = 18$ děl.

Dodatek. Podobné úlohy řeší se též snadně pomocí *dvojčlenky*. Na př.

a lok. za b zl., zač c loket?	5 lok. za 7 zl., zač 8 lok?
Je-li a lok. „ b zl., jest	5 lok. „ 7 zl.
1 lok. „ $\frac{b}{a}$ zl.	1 lok. „ $^7/_5$ zl.
2 lok. „ $\frac{b}{a}$ zl. × 2.	2 lok. „ $^7/_5$ zl. × 2,
3 lok. „ $\frac{b}{a}$ zl. × 3.	3 lok. „ $^7/_5$ zl. × 3,
⋮	⋮
c lok. „ $\frac{b}{a}$ zl. × c.	8 lok. „ $^7/_5$ zl. × 8 = $\frac{56}{5}$ zl.
	= 11·20 zl.

Nebo: a dělníků dokončí práci za b dní, kdy ji vykoná c dělníků?	12 děl. dokončí práci za 9 dní, kdy ji vykoná 18 děl.?
a děl. za b dní	12 děl. za 9 dní,
1 děl. „ b dní × a,	1 děl. „ 9 dní × 12,
2 děl. „ $\frac{b \text{ dní} \times a}{2}$,	2 děl. „ $\frac{9 \text{ dní} \times 12}{2}$,
3 děl. „ $\frac{b \text{ dní} \times a}{3}$,	3 děl. „ $\frac{9 \text{ dní} \times 12}{3}$,
⋮	⋮
c děl. „ $\frac{b \text{ dní} \times a}{c}$.	18 děl. „ $\frac{9 \text{ dní} \times 12}{18} = 6$ dní.

2. V *složitých* úlohách jest i příčin i následků více nežli dva a mezi posledními jeden neznámý (x). Dejme tomu, že by v jakés úloze byly veškeré

příčiny A, B, C, D, E, ...
a následky A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, ...

Hodnota *každé* veličiny z těchto záleží na určitých hodnotách *všech* ostatních veličin, a kdyby se jedna z nich změnila, byl by výsledek úlohy (t. j. hodnota veličiny neznámé) jiný. Dejme tomu, že se A_1 hledá, t. j. že A_1 = neznámé t, tož musí býti toto t jiné, tedy buď u, v, x atd., nechť kteroukoli z ostatních známých veličin změníme. Uděláme-li tedy $C = C_1$, $D = D_1$, $E = E_1$ . . . dostaneme z obou předešlých řad tyto:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ \ldots. \\ 2.\ t,\ B_1,\ C,\ D,\ E,\ \ldots. \end{array}\right\} \text{je-li v této } B_1 = B,\ C = C_1 \text{ bude}$$

$$\begin{array}{ll} 3.\ u,\ B,\ C_1,\ D,\ E,\ \ldots. & \text{položíme-li } C_1 = C,\ D = D_1, \text{ „} \\ 4.\ v,\ B,\ C,\ D_1,\ E,\ \ldots. \text{ a} & \text{„} \quad D_1 = D,\ E = E_1 \text{ „} \\ 5.\ x,\ B,\ C,\ D,\ E_1,\ \ldots. & \end{array}$$

Uděláme-li z řady 1. a 2., 2. a 3., 3. a 4., 4. a 5. srovnalost vypustíce členy stejné a kladouce vždy stejnojmenné po pořadě B, B_1, C, C_1 atd., v poměr, dostaneme:

$$\begin{array}{l} A : t = B : B_1 \\ t : u = C : C_1 \\ u : v = D : D_1 \\ v : x = E : E_1, \text{ z čehož (§. 16. j. a §. 16. 1.)} \\ \hline A : x = BCDE : B_1C_1D_1E_1 \text{ nebo} \\ x : A = B_1C_1D_1E_1 : BCDE. \end{array}$$

t. j. v úlohách složitých polož v první poměr neznámou veličinu se stejnojmennou, a z ostatních veličin polož vždy dvě a dvě stejnojmenné v poměry, které kladiž pod sebe, a sice je-li poměr druhý, třetí atd. buď přímý buď opačný k poměru prvnímu, udělej třetím členem buď veličinu z řady následků neb veličinu z řady příčin a členem čtvrtým jinou s ní stejnojmennou; jednotlivé poměry, možná-li, skrať. Na př. a) Za 1·68 zl. doveze se po železné dráze 16 setnýřů 7 mil, zač by se dovezlo 18 setn. 10 mil?

$$\begin{array}{l} 1{\cdot}68 \text{ zl., } 16 \text{ setn., } 7 \text{ m.} \\ x \text{ zl., } 18 \text{ setn., } 10 \text{ m.} \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x : 1{\cdot}68 = 18 : 16 \text{ čím více se platí, tím více se může naložiti} \\ \qquad\qquad\quad 10 : 7 \text{ čím více se platí, tím dále se zboží doveze} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{při jinak} \\ \text{stejných} \\ \text{okolno-} \\ \text{stech}\end{array}$$

$$x = \frac{1{\cdot}68 \times 18 \times 10}{16 \times 7} = 0{\cdot}03 \times 9 \times 10 = 2{\cdot}7 \text{ zl.}$$

b) 60 dělníků vykopá příkop 380 stop dlouhý, 9 stop vysoký a 26 stop široký za 126 dní, pracují-li denně $7\frac{1}{2}$ hod. Kolik dělníků vykopá příkop 273 stopy dlouhý, 8 stop vysoký a 19 stop široký za 189 dní, pracují-li denně 7 hodin?

60 děl., 380 st. dl., 9 st. vys., 26 st. šir., 126 dní, $7\frac{1}{2}$ hod.,
x „ 273 „ „ 8 „ „ 19 „ „ 189 „ 7 „

$x : 60 = 273 : 380$ čím více dělníků tím delší příkop vykopají
$8 : 9$ „ „ „ „ vyšší „ „ při jinak stejných okolnostech
$19 : 26$ „ „ „ „ širší „ „
$126 : 189$ „ „ „ „ kratší čas budou pracovati
$7\frac{1}{2} : 7$

po skrácení a násobení členů na stejných místech, bude

$x = 20$ děl.

c) Jistina j vynese za r roků na $p\%$ tolik úroků, jako jistina j_1 za r_1 roků. Na kolik % jest druhá jistina uložena?

j, r, $p\%$,
j_1, r_1, $x\%$

$x : p = j : j_1$ čím více ze sta, tím menší může býti jistina při stejných jinak okolnostech.
$r : r_1$ „ „ „ „ „ kratší čas může ležeti

$$x = \frac{pjr}{j_1 r_1}.$$

d) Jaké úroky vynáší jistina j na $p\%$ za r roků? (V úloze této a ve všech podobných vypuštěny jsou příčiny čili podmínky 100 zl. a 1 rok, tak že by se mělo říci: vynese-li 100 zl. za 1 rok $p\%$, jaké úroky vynese j za r roků?)

100 zl., 1 rok, $p\%$,
j zl., r roků, x úroků.

$x : p\% = j : 100$
$r : 1$

$$x = \frac{p\% \cdot j \cdot r}{100}$$

Nazveme-li vůbec $x = ú$ (úroky) bude

$$ú = \frac{p \cdot j \cdot r}{100},$$ a z této rovnice vyhledáme dle potřeby

$$j = \frac{100ú}{p \cdot r}, \quad r = \frac{100ú}{p \cdot j} \quad \text{a} \quad p = \frac{100ú}{j \cdot r}.$$

Příklady.

1. Které úroky vynese jistina 6724 zl. za rok na a) 5% b) $4\frac{1}{2}\%$, c) 6%?

2. Jak se vyjádřejí úroky jistiny j za rok na $p\%$?

3. Která jistina vynese za rok na 5% a) 78 zl. b) 485 zl. c) 1250 zl. úroků?

4. Jak se vyjádří jistina, která uložena jsouc na $p\%$, vynese $ú$ zl. úroků?

5. Na kolik ze sta byla uložena jistina 3780 zl., vynesla-li ročních úroků a) 189 zl., b) 207 zl. 90 kr. c) 226 zl. 80 kr., d) 151 zl. 20 kr.?

6. Na kolik ze sta jest uložena jistina j, vynáší-li ročně $ú$ zl. úroků?

7. 1000 zl. vynese za jakýsi čas 728 zl. úroků. Která jistina vynese v témže čase na tytéž $^0/_0$ a) 910 zl. b) 273 zl. c) 728 zl. úroků?

8. Vynese-li jistina j $ú$ zl. úroků, jak se vyjádří jistina, která v témže čase na tytéž $^0/_0$ vynese $ú_1$ zl. úroků?

9. 3510 zl. vynáší v určitém čase na jakési $^0/_0$ 300 zl. úroků. Kolik úroků vynese 4680 zl. v témže čase na totéž $^0/_0$?

10. Jistina j vynese v určitém čase na jakési $^0/_0$ $ú$ zl. úroků; jak se vyjádřejí úroky jistiny j_1 v tomtémž čase na totéž $^0/_0$?

11. Kdosi koupil zboží za 3400 zl., a jelikož je platí hotovými, dovolí se mu při každém 100 zl. srážky $4^1/_2$ zl. ($4^1/_2$ zl. rabattu *ve* stu); mnoho-li zaplatí hned?

12. Zaplatí-li někdo zboží koupené za a zl. hned se srážkou b zl. rabattu *ve* stu, mnoho-li zaplatí?

13. a) Kdosi koupil zboží za 3400 zl., a povolí se mu $4^1/_2$ zl. rabattu *na* sto (t. j. místo $104^1/_2$ zl. dá 100 zl.), mnoho-li zaplatí? b) Je-li 3400 zl. $= a$, $4^1/_2$ zl. $= b$, jak se vyjádří co zaplatil?

14. Kdosi koupil hodinky za 52 zl. (a) a prodal je za 58 zl. (b), kolik $^0/_0$ vydělal?

15. Kdosi dal za zboží 2110 zl. v bankovkách, když bylo ažio $5^1/_2{}^0/_0$, a prodal je za 2304 zl., když bylo ažio $28^0/_0$, mnoho-li vydělal nebo prodělal?

16. a zl. vynese na $p^0/_0$ za rok tolik, jako b zl. za tentýž čas, kolik ze sta?

17. Která jistina vynese za m roků tytéž úroky, jako jistina a zl. za n roků při týchže $^0/_0$?

18. Za kolik dní vykoná 7 dělníků tutouž práci jako 12 dělníků za 56 dní — při jinak stejných okolnostech?

19. a) 6 koní odveze náklad za 8 hodin, pakli se na každého koně počítá 15 setnýřů nákladu. Kolik koní by tentýž náklad odvezlo, kdyby se na každého koně naložilo 18 setnýřů? b) Jak se vyjádří výsledek, nazveme-li 6, 15 a 18 vůbec a, m, n?

20. Na šat je zapotřebí 18 loket, je-li látka $^3/_4$ lokte široká; kolik loket bylo by zapotřebí, kdyby byla látka $^4/_4$ lokte široká?

21. 6 strojů sepřede určité množství příze za 18 dní, pracují-li denně 10 hodin; za kolik dní by ji sepředly, kdyby pracovaly denně 12 hodin.

22. Zvon 100 liber těžký má míti srdce $2^1/_2$ liberní; jakou váhu má dle toho srdce zvonu 118 setnýřů těžkého?

23. Diamant $2^1/_4$ karatu těžký jest za 210 zl., zač jest diamant téže formy a jakosti, má-li váhy $3^1/_2$ karatu? (Ceny diamantů mají se k sobě jako čtverce jejich váhy.)

24. Kruh, jehož poloměr $= 2^1/_2$ palce, má plochy 19·634 čtver. palců; jak veliká jest plocha jiného kruhu, jehož poloměr jest

$4^1/_6$ palce? (Plochy dvou kruhů mají se k sobě jako čtverce jejich poloměrů.)

25. Průměr země = 1719 mílím a její povrch = 9261238 čtvercovým míl., jak veliký jest povrch slunce, je-li jeho průměr = 190000 mil? (Povrchy dvou koulí mají se k sobě jako čtverce jejich průměrů.)

26. 5 osob vydělá za 10 dní, pracujíce denně 10 hodin, 48 zl. 50 kr.; mnoho-li vydělá 8 osob za 12 dní, pracují-li denně 12 hodin?

27. 12 strojů sepřede za 6 dní po 12 hodinách denně 3500 liber příze; kolik liber sepřede 9 strojů za 15 dní po 13 hodinách denně?

28. Z libry příze zhotoví se $3^7/_8$ loket $^6/_4$ního (šestičtvrtečního) plátna; kolik liber téže příze jest zapotřebí na $232^1/_2$ lokte $5^1/_2$ čtvrtečního ($^{11}/_8$) plátna?

29. 39 liber příze dá 3 kusy po 40 loktech $^5/_4$ního plátna; kolik liber téže příze dá 5 kusů po 36 loktech $^6/_4$ního plátna?

30. Z 20 pásem příze po 40 nitích zhotoví se loket plátna $^5/_4$ního; kolik loket $^6/_4$ plátna zhotoví se z 480 pásem po 48 nitích.

31. Za 42 zl. 75 kr. jest $5^1/_2$ sáhu dříví $^8/_4$ního; zač jest $3^1/_4$ sáhu téhož $^6/_4$ního dříví?

32. K stavbě zdi jest zapotřebí 824 kamenů $1^1/_2$ stopy dl., $^5/_8$ stopy širokých a $^3/_8$ stopy vysokých; kolik kamenů bylo by zapotřebí, kdyby každý byl $1^1/_4$ stopy dlouhý, $^1/_2$ stopy široký a $^1/_2$ stopy vysoký?

33. Na 4 složeních semele se za $1^1/_2$ dne 42 korců žita; za kolik dní semele se na 3 složeních 80 korců žita?

34. Z továrny, kde pracovalo 36 lidí týdně 6 dní po 12 hodin za 106 zl., propustilo se 8 lidí, a ostatní pracují týdně 5 dní po 10 hodin; mnoho-li dostanou týdně tito?

35. 81 dělníků (*a*) vykope příkop 510 stop (*b*) dlouhý, 8 stop (*c*) hluboký a 35 stop (*d*) široký za 187 dní (*m*) po 9 hod. (*n*); kolik dělníků vykope příkop 315 stop (*b'*) dlouhý, 10 stop (*c'*) hluboký a 24 stop (*d'*) široký za 297 dní (*m'*) po 8 kod. (*n'*)?

36. Jak daleko doveze se po železné dráze *a* setn. za *m* zl., pakli se *b* setn. za *n* zl. doveze *p* mil?

37. Kašna, z které se vybéře za 5 minut (*m*) 16 nádob (*n*) o 3 pintách (*q*) vyprázdní se za 3 hod. 30 minut (*s*); za kolik hodin vyprázdní se tatáž kašna, vybéře-li se za 4 minuty (*m'*) 21 nádob (*n'*) 2pintových (*q'*)?

38. Která jistina vynese za *r* roků na $p\%$ *ú* zl. úroků?

39. Které úroky vynese jistina *j* za *r* roků na $p\%$?

40. Za kolik roků vynese jistina *j* na $p\%$ *ú* zl. úroků?

41. Na kolik ze sta jest uložena jistina *j*, vynese-li za *r* roků *ú* zl. úroků?

42. Která jistina vynese na $p\%$ za *r* roků tolik úroků jako jistina *j'* na $p'\%$ za *r'* roků?

III. Počet spolkový.

§. 18.

Má-li se daná veličina rozděliti na několik částek, které jsou k sobě v určitém poměru, stává se to *počtem spolkovým*. Poměr tento vyjádřuje se určitými čísly, jimž říkáme *čísla úměrná*. Tvoří-li tato čísla úměrná *poměr* buď *jednoduchý* nebo *složitý*, říkáme i počtu spolkovému buď *jednoduchý* nebo *složitý*. Neznámé částky, na které známou veličinu na př. s rozděliti máme, poznačujeme písmenkami u, x, y, z, a známá čísla úměrná, udávající v jakém poměru ony neznámé částky vespolek býti mají, písmenkami a, b, c, d atd.

1. *Jednoduchý počet spolkový* provedeme takto: Má-li se daná veličina s rozděliti na částky dosud neznámé u, x, y, z, tak aby tyto byly k sobě v poměru jako známá čísla a, b, c, d, t. j. aby se $u : x : y : z = a : b : c : d$, můžeme ze srovnalosti této vyvesti (§. 16. f.)

$$
\begin{array}{rl}
(u + x + y + z) : (a + b + c + d) = & u : a \\
 & x : b \\
 & y : c \\
 & z : d
\end{array}
$$

A poněvadž $u + x + y + z = s$, dostaneme z těchto srovnalostí, položíme-li $a + b + c + d = m$, srovnalost

$$
\begin{array}{lcl}
s : m = u : a, & \text{z čehož} & u = \dfrac{s}{m} \,.\, a \\
s : m = x : b & „ & x = \dfrac{s}{m} \,.\, b \\
s : m = y : c & „ & y = \dfrac{s}{m} \,.\, c \\
s : m = z : d & „ & z = \dfrac{s}{m} \,.\, d,
\end{array}
$$

t. j. *má-li se daná veličina* s *rozděliti na několik částek, které jsou k sobě v určitém poměru, dělme onu veličinu součtem všech čísel úměrných a násobme podíl ten buď prvním, neb druhým, třetím atd. číslem úměrným dle toho, hledáme-li buď první, neb druhou, třetí atd. neznámou částku.* S čísly úměrnými naloží se tak jako s poměrem vůbec, tedy je skrátíme, mají-li společného dělitele, a vyjádříme celými čísly, jsou-li buď částečně buď naskrz zlomky. Na př.

a) Čtyři osoby podniknou stavbu, ku které dá A 5000 zl., B 3000 zl., C 4500 zl. a D 7000 zl.; vydělají-li při ní 5850 zl., mnoho-li dostane každá z nich?

A 5000 zl. | $10 = a$ — A dostane 150 zl. . $10 = 1500$ zl. $= u$
B 3000 zl. | $6 = b$ — B „ 150 zl. . $6 = 900$ zl. $= x$
C 4500 zl. | $9 = c$ — C „ 150 zl. . $9 = 1350$ zl. $= y$
D 7000 zl. | $14 = d$ — D „ 150 zl. . $14 = 2100$ zl. $= z$

5850 zl. : 39 = 150 zl. $= \dfrac{s}{m}$ — 5850 zl. $= s$.

b) 6000 zl. má se rozděliti osobám A, B, C, tak aby se podíly jejich měly k sobě jako čísla 2 : 3 : 5; mnoho-li dostane každá?

$2 = a$ — A dostane 600 zl. . $2 = 1200$ zl.
$3 = b$ — B „ 600 zl. . $3 = 1800$ zl.
$5 = c$ — C „ 600 zl. . $5 = 3000$ zl.

6000 zl. : 10 = 600 zl. $= \dfrac{s}{m}$ — 6000 zl. $= s$.

c) Číslo 1703 má se rozvrhnouti na tři sčítance, kteří se mají k sobě v poměru $\frac{1}{3} : \frac{1}{7} : \frac{1}{11}$; kteří jsou ti sčítanci?

$\frac{1}{3}$ | 77 — $x = 13.77 = 1001$
$\frac{1}{7}$ | 33 — $y = 13.33 = 429$
$\frac{1}{11}$ | 21 — $z = 13.21 = 273$

1703 : 131 = 13. — 1703.

2. *Složitého počtu spolkového* užívá se tam, kde veličina jakás rozděliti se má na částky, které záležejí na *několika* daných poměrech. Z těchto se sdělá poměr složitý a pracuje se jako prvé. Na př.

Veličina s má se rozděliti na částky u, x, y, z, tak aby tyto měly tentýž poměr jako čísla a_1, b_1, c_1, d_1, a spolu jako čísla a_2, b_2, c_2, d_2, a a_3, b_3, c_3, d_3 atd.

t. j.

$$\begin{array}{rl} u : x : y : z = & a_1 : b_1 : c_1 : d_1 \\ & a_2 : b_2 : c_2 : d_2 \\ & a_3 : b_3 : c_3 : d_3, \text{ čili} \\ \hline u : x : y : z = & a_1a_2a_3 : b_1b_2b_3 : c_1c_2c_3 : d_1d_2d_3 \end{array}$$

nebo i

$$(u + x + y + z) : (a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3 + d_1d_2d_3) = \begin{array}{l} u : a_1a_2a_3 \\ x : b_1b_2b_3 \\ y : c_1c_2c_3 \\ z : d_1d_2d_3, \end{array}$$

z čehož, položíme-li opět

$$u + x + y + z = s, \quad a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3 + d_1d_2d_3 = m,$$

najdeme

$$u = \frac{s}{m} . a_1a_2a_3$$

$$x = \frac{s}{m} . b_1b_2b_3$$

$$y = \frac{s}{m} . c_1c_2c_3$$

$$z = \frac{s}{m} . d_1d_2d_3,$$

t. j. *každá neznámá částka se určí, dělíme-li danou veličinu součtem součinů čísel úměrných pod sebou stojících, a podíl ten násobíme-li součinem buď prvním, nebo druhým, třetím atd. dle toho, hledáme-li část první, druhou, třetí atd.* Na př.

a) Obce *A*, *B*, *C*, *D* vyslaly lidi k ražení silnice, a sice *A* 10 lidí po 21 dní, *B* 14 lidí po 9 dní, *C* 12 lidí po 18 dní a *D* 16 lidí po 12 dní. Pakli se za to dostalo všem obcím 372 zl., mnoho-li každé?

A	10 lidí	21 dní	5 × 7	35
B	14 „	9 „	7 × 3	21
C	12 „	18 „	6 × 6	36
D	16 „	12 „	8 × 4	32

372 zl. : 124 = 3 zl. = $\frac{s}{m}$ zl.

Obec *A* dostala 3 zl. × 35 = 105 zl.
„ *B* „ 3 zl. × 21 = 63 zl.
„ *C* „ 3 zl. × 36 = 108 zl.
„ *D* „ 3 zl. × 32 = 96 zl.
s = 372 zl.

b) U tří parních kotlů, které co do spotřeby uhlí v témže čase mají se k sobě jako: 2 : 2·5 : 2·75, spálí se 10650 krychlových stop uhlí, vytápí-li se první kotel 12, druhý 10 a třetí 8 hodin; mnoho-li spotřebuje každý?

A	2,	12	200,	12	8 × 6	48
B	2·5,	10	250,	10	10 × 5	50
C	2·75,	8	275,	8	11 × 4	44

10650 kr. st. : 142 = 75 kr. st.

A 75 kr. st. × 48 = 3600 kr. st.
B 75 „ „ × 50 = 3750 „ „
C 75 „ „ × 44 = 3300 „ „
10650 kr. st.

Příklady.

1. Kdosi dluhuje věřiteli *A* 3500 zl., *B* 2600 zl., *C* 4800 zl. a *D* 4200 zl. Vyrovná-li se s těmito částkou 9660 zl., mnoho-li dá každému?

2. Číslo 451 má se rozvesti na tři sčítance, kteří se mají k sobě jako $^1/_2 : {}^1/_3 : {}^1/_7$. Kteří jsou ti sčítanci?

3. Vozkovi zaplatí se za dovežení 5ti sudů, z nichž váží 1) $6^1/_4$ setn. 2) $4^1/_2$ setn. 3) $5^1/_5$ setn. 4) $4^2/_5$ setn. a 5) $3^3/_4$ setn. celkem 9 zl. 64 kr. Mnoho-li se mu zaplatí od každého sudu?

4. V čisté vodě jest 85 dílů kyslíku a 15 dílů vodíku; mnoho-li každého z prvků těch jest v nádobě, která drží 75 krychl. st. vody?

5. V novém stříbře jest 30 dílů zinku, 18 dílů niklu a 55 dílů mědi; kolik dílů každého jest ve $257\frac{1}{2}$ libře nového stříbra?

6. Číslo 11713 má se rozvesti na sčítance dle poměru $1:2:2\frac{1}{3}:3\frac{1}{2}$; kteří jsou ti sčítanci?

7. Okres vydal na stavbu silnice 4750 zl., přímé daně se v něm platí 147853 zl. 24 kr., mnoho-li připadá na zlatý daně, a mnoho-li přispěje k stavbě ten, který platí 37 zl. 15 kr. přímé daně?

8. Čtyřem úředníkům, z nichž má *A* 400 zl., *B* 500 zl., *C* 630 zl. a *D* 750 zl. služného, dostane se 456 zl. příspěvku drahotního, s tím doložením, aby tento rozdělili mezi sebe dle zásady: čím větší služné tím menší příspěvek; mnoho-li dostane každý?

9. *A*, *B*, *C* vyhořeli, a sice ztratil *A* 500 zl., *B* 600 zl., *C* 900 zl.; dostalo-li se jim 420 zl. příspěvků, mnoho-li dostal každý?

10. *A*, *B*, *C*, *D* vyhořeli; *před* ohněm měl *A* jmění 1300 zl., *B* 1400 zl., *C* 1800 zl. a *D* 1200, *po* ohni zůstalo *A* jmění 760 zl., *B* 700 zl., *C* 1000 zl. a *D* ztratil vše; pakli dostali na příspěvcích dohromady 891 zl., mnoho-li dostal každý?

11. Zlomek $\frac{7}{15}$ má se rozděliti na tři sčítance dle poměru $5:7:9$; kteří jsou ti sčítanci?

12. V továrně pracují dělníci v 5ti odděleních, a zhotoví za jakýs čas 592 kusy některé látky. Pracuje-li na ní v 1. odděl. 7 dělníků po 15 dní, v 2. odd. 8 děl. po 6 dní, v 3. odd. 9 děl. po 7 dní, v 4. odd. 10 děl. po 4 dní, v 5. odd. 5 děl. po 8 dní, kolik kusů zhotovilo každé oddělení?

13. Čtyři parní kotle, při nichž se spotřebuje v témže čase uhlí v poměru $2:3:3\frac{1}{5}:3\frac{1}{2}$, vytápějí se 16515 krychl. stopami uhlí, topí-li se pod prvním 10, pod druhým 11, pod třetím 8, a pod čtvrtým 9 hodin; kolik krychl. stop spotřebuje se u každého?

14. Obce *A*, *B*, *C* pomáhají při stavbě okresní silnice, a sice *A* 12ti potahy po 17 dní, *B* 15ti potahy po 16 dní a *C* 10ti potahy po 21 dní. Dostanou-li dohromady 981 zl. náhrady, mnoho-li přijde každé obci?

15. Obec dává 21 chudým 156 zl. podpory, a sice podporuje 7 chudých po 3 měsíce, 6 chudých po $3\frac{1}{2}$ měs. a 8 chudých po $4\frac{1}{2}$ měs.; mnoho-li dostává každé oddělení a mnoho-li každý chudý měsíčně?

16. V továrně pracuje v 1. oddělení 18 dělníků 3 týdny po 6 dnech, v 2. odděl. 24 děln. 2 týdny po $5\frac{1}{2}$ dni, v 3. odděl. 27 děln. 3 týdny po 4 dnech a ve 4. odděl. 30 děln. 4 týdny po $4\frac{1}{2}$ dni; dává-li se mzdy všem 1089 zl., mnoho-li dostává každé oddělení?

IV. Určité rovnice prvního stupně.

§. 19.

1. *Rovnice jest porovnání dvou sobě rovných výrazů*, jeden z těchto tvoří díl levý a druhý díl pravý; každé části pak toho neb onoho dílu t. j. každému jednočlenu říkáme vůbec *člen*.

V každé rovnici může se kterákoli veličina považovati za neznámou, tedy ostatní veličiny za známé, pomocí jichž se neznámá určí. Veličina, kterou považujeme za neznámou, poznačuje se buď písmenkou u neb v, x, y, z, veličiny známé pak ostatními písmenkami.

Rovnici, ve které se buď tytéž písmenky porovnávají, aneb ve které jest jeden díl provedení dílu druhého, říkáme *rovnice jednostejná* (*identická*). V rovnici takové může míti neznámá veličina *jakoukoli* hodnotu. Na př.

$$(a+b)x = ax + bx$$
$$(a-b)x + (b-x)a = (a-x)b \text{ atd.}$$

Rovnici, v které má neznámá veličina *určitou* hodnotu, říkáme *rovnice určitá* (*algebraická*). Na př.

$$5x = 30, \text{ pro } x = 6; \ \frac{x}{3} = 4 \text{ pro } x = 12; \ ax = b \text{ pro } x = \frac{b}{a} \text{ atd.}$$

2. Rovnice *určitá* jest buď o *jedné* neznámé, neb o *dvou*, o *třech* atd. neznámých, a dle toho záleží buď z *jedné* rovnice, aneb ze *dvou*, ze *tří* atd. rovnic k sobě náležejících, tak že se vůbec každá *určitá* rovnice skládá z tolika rovnic k sobě náležejících, kolik jest v ní neznámých. Má-li *jediná* rovnice *dvě*, *tři* atd. neznámé, aneb skládá-li se kterás rovnice vůbec z méně rovnic k sobě náležejících, nežli jest v ní neznámých, nazýváme ji rovnici *neurčitou* na př.

$$x + y = a, \text{ nebo}$$
$$x + y = a \text{ a } y - z = b \text{ atd.}$$

Dle *nejvyšší* mocniny *neznámé* veličiny rozeznáváme:

a) *rovnice stupně prvního* čili *linearné* na př. $ax + b = c$;

b) *rovnice stupně druhého* „ *kvadratické* na př. $x^2 - ax = b$;

c) *rovnice stupně třetího* „ *kubické* na př. $x^3 + ax^2 + bx = c$ atd.

A. Určité rovnice prvního stupně o jedné neznámé.

§. 20.

1. Při úlohách vůbec, které se řeší rovnicemi, jest práce dvojí, a sice

a) *danou úlohu rovnicí vyjádřiti* čili *rovnici sestaviti*, a

b) *sestavenou rovnici řešiti* t. j. neznámou v ní veličinu určiti tak, aby byla v jednom díle rovnice *v první mocnině, sama, bez součinitele, bez jmenovatele* a *kladná.*

Danou úlohu rovnicí vyjádřiti není vždy tak snadné, ačkoliv sběhlost a důmysl i složitější úlohy v rovnice sestaví. Je-li však rovnice sestavena, řeší se určitými pravidly, která se vesměs vyjádřují slovy: „Každou rovnici můžeš proměniti v jakoukoli jinou téže hodnoty, naložíš-li s veličinami v každém dílu rovnice stejným způsobem“ (srovnej §. 1. 4, §. 4. 5, §. 6. 8, §. 7. e). Jednotlivá pravidla při řešení rovnice jsou tato:

a) Jsou-li v dané rovnici zlomky, přivedou se na nejmenšího společného jmenovatele, kterým se celá rovnice násobí.

b) Je-li neznámá veličina v závorce, řeší se nejprvé tato, a po této jako každé jiné proměně v rovnici sejmou se stejnojmenné veličiny.

c) Všechny neznámé veličiny přivedou se do jednoho (obyčejně do levého), a známé do druhého dílu rovnice. Přichází-li neznámá veličina v několika členech, vysadí se.

d) Konečně se dělí celá rovnice součinitelem neznámé, čímž neznámá zůstane v jednom dílu rovnice sama; je-li záporná, násobí se celá rovnice — 1nicí.

Ačkoliv jest řešení daných rovnic více mechanické, musí se nicméně k tomu hleděti, aby se každá *nová* rovnice co nejvýhodněji proměnila v jednodušší předešlé. Z té příčiny prohledněme si *každou* rovnici, i původní i proměněnou, a zjednodušme ji jak jen vůbec možná. Je-li v rovnici zlomek se znaménkem —, a čítatel jeho víceělen, nezapomeňme po odstranění jmenovatele a tudíž i lomítka čítatele buď uzávorkovati nebo znaménka jeho členů proměniti v opáčná. Vložíme-li konečnou hodnotu neznámé veličiny do původní rovnice, promění se tato — je-li vůbec dobře pracováno — v rovnici jednostejnou. Na př.

$$\left.\begin{array}{l} 5x-4(x-3)=2(x+1)\\ 5x-4x+12=2x+2\\ 5x-6x=-10\\ \quad -x=-10\\ \qquad x=10 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{r} \text{Zkouška}: 5\,.\,10-4(10-3)=2(10+1)\\ 50-28=22\\ 22=22. \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}(x-\tfrac{1}{2})+x(\tfrac{1}{2}+x)=(x-\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}$$

$$x/_2-\tfrac{1}{4}+x/_2+x^2=x^2-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}$$

$$x=\tfrac{1}{2}.\quad \text{Zkouška?}$$

$$\frac{x+a}{x-b}-\frac{ax-b}{x+b}=\frac{a+b}{x-b}$$

$$\frac{x+a}{x-b}-\frac{a+b}{x-b}=\frac{ax-b}{x+b}$$

$$\frac{x-b}{x-b}=\frac{ax-b}{x+b}$$

$$1=\frac{ax-b}{x+b}$$

$$x+b=ax-b$$

$$2b=ax-x$$

$$2b=x(a-1)$$

$$x=\frac{2b}{a-1}.\quad \text{Zkouška?}$$

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{x}-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{x}(\tfrac{1}{2}-x)-\tfrac{1}{x})+\tfrac{1}{2}]=1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{x}$$

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{x}(\tfrac{1}{2}-x)+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{2}]=1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{x}$$

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{2}{x}+\tfrac{1}{2x}-1]=1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{x}$$

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{5}{2x}-1]=1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{x}$$

$$\tfrac{5}{4x}-\tfrac{1}{2}=1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{x}$$

$$\tfrac{9}{4x}=2$$

$$9=8x$$

$$x=1\tfrac{1}{8}.\quad \text{Zkouška?}$$

$x+x/_3+x/_6+x/_{10}+x/_{12}=$ 10·1, nejmenší spol. jmenov. $=60$

$$60x+20x+10x+6x+5x=606$$

$$101x=606$$

$$x=6.\quad \text{Zkouška?}$$

$$\frac{a-b}{2a-x}+\frac{a-2b}{a+2b}=\frac{a+b}{2a+x}+\frac{a+2b}{a-2b}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}$$

$$\frac{a-b}{2a-x}-\frac{a+b}{2a+x}=\frac{a+2b}{a-2b}-\frac{a-2b}{a+2b}-\frac{8ab}{a^2-4b^3}$$

$$\frac{2a^2-2ab+ax-bx-(2a^2+2ab-ax-bx)}{4a^2-x^2}$$

$$=\frac{a^2+4ab+4b^2-(a^2-4ab+4b^2)}{a^2-4b^2}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}$$

$$\frac{2ax-4ab}{4a^2-x^2}=\frac{8ab}{a^2-4b^2}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}=0.$$

$$2ax=4ab$$

$$x=2b.\quad \text{Zkouška?}$$

2. Má-li se kterákoli úloha pomocí rovnice řešiti, musí se skládati ze dvou dílů sobě rovných. Je-li tomu tak, *sestaví* se daná úloha v rovnici, pakli se význam její z mluvy obyčejné převede do mluvy algebraické, t. j. pakli se veškerá udání v úloze obsažená vyjádří vhodnými výrazy počtářskými, tak aby výsledek toho byla rovnice. Tomu napomáhá nejvíce *způsob analytický* t. j. dá se tomu, že neznámá veličina (na př. x) jest už určena, načež se dle udání v úloze obsažených spojuje rozličnými druhy početními s veličinami známými, tak až konečný výsledek dá dva výrazy ač algebraicky rozličně spojené, nicméně sobě rovné. Na př.

a) Které číslo jest o 7 větší nežli jeho $^2/_3$?
Číslo hledané jest x,
jeho $^2/_3$ jest $^2/_3x$, x jest o 7 *větší* nežli $^2/_3x$, pakli tedy od x *odečteme* 7, bude

$x - 7 = {}^2/_3x$, z čehož Zkouška: $x = 21$
$3x - 21 = 2x$, a $^2/_3x = 14$, a
$x = 21$. 21 jest o 7 větší nežli 14.

b) Připočteme-li k čtyřnásobnému číslu 3, a dělíme-li součet ten 9ti, jest podíl o 9 menší, nežli dvojnásobné ono číslo. Které číslo jest to?

Hledané číslo jest x
x čtyrnásobné + 3 jest $4x + 3$,
součet dělen 9ti $\frac{4x + 3,}{9}$

podíl ten jest o 9 *menší* nežli $2x$, pakli tedy od $2x$ odečteme 9, bude

$\frac{4x + 3}{9} = 2x - 9$, z čehož Zkouška:

$4x + 3 = 18x - 81$ $\frac{4 \,.\, 6 + 3}{9} = 2 \,.\, 6 - 9 = 3.$
$14x = 84$
$x = 6.$

c) Jaké jmění měl kupec na počátku, když každého roku po odrážce 1000 zl., které potřeboval pro svou domácnosť, zvětšil ostatek o třetinu, a po dvou letech měl o polovici více nežli na počátku?

Na počátku měl . . . . x zl.
z toho ročně potřeboval 1000 zl., tedy mu zbylo $(x - 1000)$ zl.
toto ročně o $^1/_3$ zvětšil, tedy měl koncem 1. roku

$$(x - 1000) + {}^1/_3(x - 1000) = \frac{4x - 4000}{3} \text{ zl.}$$

Druhého roku potřeboval opět 1000 zl., tedy mu zbylo

$$\frac{4x - 4000}{3} - 1000 = \frac{4x - 7000}{3} \text{ zl.},$$

a toto se opět rozmnožilo o $^1/_3$ koncem 2. roku, t. j.

$$\frac{4x - 7000}{3} + {}^1/_3 \,.\, \frac{4x - 7000}{3} = \frac{16x - 28000}{9} \text{ zl.},$$

a poněvadž bylo toto o $^1/_2$ větší nežli jmění na počátku, proto se

$$\frac{16x - 28000}{9} = x + \frac{x}{2}.$$

$$16x - 28000 = \frac{27x}{2}$$
$$32x - 56000 = 27x$$
$$5x = 56000$$
$$x = 11200 \text{ zl.}$$

d) Je-li otci 52 a synovi 16 let, za kolik roků bude otec třikrát starší nežli syn?

Za x let bude otci . . . . $52 + x$ roků
a synovi . . . . . $16 + x$,
a poněvadž bude otec za x let 3krát starší nežli syn, bude se

$$\frac{52 + x}{3} = 16 + x, \text{ z čehož}$$

$$52 + x = 48 + 3x$$

$$x = 2,$$

t. j. za 2 leta bude otci $52 + 2 = 54$ let, a synovi $16 + 2 = 18$, a $^{54}/_{3} = 18$.

Každé úloze dostane se významu obecného, pakli na místě čísel zvláštních dosadíme čísla obecná. Položíme-li na př. v úloze předešlé místo 52, 16, 3 vůbec a, b, m, dostaneme rovnici:

$$\frac{a + x}{m} = b + x$$

$$a + x = mb + mx$$

$$x(m - 1) = a - mb$$

$$x = \frac{a - mb}{m - 1}.$$

Kdyby zde bylo $a < mb$, byl by výsledek záporný, což by vyjádřovalo, že už *před* x roky byl otec $m$krát starší nežli syn.

§. 21.

Mimo úlohy, podobné právě provedeným, řeší se rovnicemi veliký počet úloh jiných, z nichž probéřeme ty, které přicházejí nejčastěji, a sice:

a) Úlohy počtu alligačního.

Smíchá-li se a liber (pinet, hřiven, K⁰, litrů atd.) po p zl. zboží druhu A, a b lib. (pinet, hřiven, K⁰, litrů atd.) po q zl. zboží druhu B, zač bude libra (pinta, hřivna, K⁰, litr atd.) směsi?

Libra směsi bude za x zl.,

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ lib. po } p \text{ zl. dá } \quad ap \text{ „} \\ b \text{ lib. po } q \text{ „ „ } \quad bq \text{ „} \end{array}\right\} ap + bq \text{ jest cena obou druhů,}$$

směsi $(a + b)$ lib. po x zl. dá zl. $x(a+b)$, tedy

$$x(a + b) = ap + bq$$

$$x = \frac{ap + bq}{a + b}.$$

Takto se určí x, a poněvadž se v rovnici každá veličina za neznámou považovati může, položme vůbec $x = m$, t. j. hodnota libry (pinty atd.) směsi vůbec

$$m = \frac{ap+bq}{a+b}, \text{ z čehož dle potřeby}$$

$$p = \frac{m(a+b)-bq}{a}, \qquad q = \frac{m(a+b)-ap}{b},$$

$$a = \frac{b(m-q)}{p-m}, \qquad b = \frac{a(p-m)}{m-p}.$$

Často přichází v úlohách místo $a+b$ součet s, tak že se buď $a = s - b$, nebo $b = s - a$, což do uvedených rovnic snadně dosaditi lze.

b) *Úlohy o pohybu.*

1. Dvě tělesa A a B jsou od sobe d jedností míry délky (palců, stop atp.) vzdálena. Začnou-li se pohybovati současně a pohybují-li se stejně rychlostí c a c', v kolika jednostech časových (sekundách, minutách atd.) se buď *potkají* nebo se *dohoní*, dle toho pohybují-li se proti sobě neb za sebou?

Počet časových jedností jest x,
A vykoná za x jedností rychlostí c cx jedností délky,
B „ „ „ „ „ c' $c'x$ „ „

Byla-li obě tělesa na počátku od sebe d jedností délky vzdálena, a pohybují-li se proti sobě, jest

$$cx + c'x = d, \text{ z čehož } 1)\ x = \frac{d}{c+c'};$$

pohybují-li se však při týchže podmínkách za sebou, jest

$$cx - c'x = d, \text{ z čehož } 2)\ x = \frac{d}{c-c'}.$$

2) Jsou-li od sebe dvě tělesa A a B d vzdálena, a začne-li se A o n jedností časových rychlostí c *dříve* pohybovati nežli B, které se pohybuje též stejně rychlostí c', kdy se obě buď *potkají* buď *dohoní?*

A, které se dříve začne pohybovati, dospěje k B za x jedností časových, tedy B, které se o n jedností časových později pohybuje, za $x - n$ jedností časových dospěje k A.

A tedy vykoná rychlostí c cestu cx a
B „ „ c' „ $c'(x-n)$.

Pohybují-li se proti sobě, bude $cx + c'(x-n) = d$, z čehož $3)\ x = \dfrac{d+c'n}{c+c'}$, a

pohybují-li se za sebou, „ $cx - c'(x-n) = d$, „ $4)\ x = \dfrac{d-c'n}{c-c'}$.

Kdyby se nazval čas, v kterém by naopak B dospělo k A vůbec x,
byl by čas, v kterém by A dospělo k B vůbec $x+n$,
a proto vykonána cesta tělesem B byla by $c'x$,
„ „ „ „ A „ „ $c(x+n)$,

tedy $c'x + c(x + n) = d$, z čehož 5) $x = \frac{d - cn}{c + c'}$,

a $c(x + n) - c'x = d$, „ 6) $x = \frac{d - cn}{c - c'}$.

3) Na místě rychlosti c, c' bývá často udáno, že těleso A projde za t jedností časových prostor s (na př. stop), a B za t' jedn. čas. s'. Poněvadž při stejném pohybování se $c = \frac{s}{t}$ a $c' = \frac{s'}{t'}$, doděláme se hodnoty neznámé x, dosadíme-li v předešlých rovnicích tyto hodnoty, tedy

z rovnice 1) dostaneme 7) $x = \frac{dtt'}{st' + s't}$,

„ 2) „ 8) $x = \frac{dtt'}{st' - s't}$,

„ 3) „ 9) $x = \frac{(dt' + s'n) \,.\, t}{st' + s't}$,

„ 4) „ 10) $x = \frac{(dt' - s'n)t}{st' - s't}$,

„ 5) „ 11) $x = \frac{(dt - sn)t'}{st' + s't}$ a

„ 6) „ 12) $x = \frac{(dt - sn)t'}{st' - s't}$.

4) Sem náležejí všechny úlohy o stejném pohybování se do kola, na př. pohybování se rafik na hodinách, určování synodického měsíce atp. Na př.

a) Kolik minut po *n*té (1. 2. 3...12té) hodině kryjí se obě rafiky?

Obvod cifráku $= p$ jest rozdělen na 60 stejných částek čili minut, a celé p opíše velká rafika za hodinu, tedy za minutu opíše $\frac{1}{60}p$, za n minut $\frac{n}{60}p$.

Malá rafika pohybuje se 12krát volněji nežli velká, proto opíše za hodinu pouze $\frac{1}{12}p$, tedy za n hodin $\frac{n}{12}p$, a za minutu $\frac{1}{720}p$, za n minut $\frac{n}{720}p$.

Ukazuje-li malá rafika n-tou hodinu, jest o $\frac{n}{12}p$ minut před velkou. Velká rafika dohoní tedy malou za x minut, v kterémž čase vykoná $\frac{x}{60}p$ a malá pouze $\frac{x}{720}p$, pročež $\frac{px}{60} - \frac{px}{720} = \frac{np}{12}$

$$12x - x = 60n.$$

$$x = \frac{60n}{11} \text{ minut,}$$

Na př. Obě rafiky kryjí se na 12ti ($n = 12$, $\frac{np}{12} = p$), za kolik minut budou se krýti po prvé, po druhé, . . . po *mté*? Kryjí-li se rafiky opět, otočila se velká rafika *o celý obvod více nežli malá.* Dohoní-li velká rafika malou za x minut, vykonala velká rafika $\frac{px}{60}$, a v témže čase malá rafika $\frac{px}{720}$, a poněvadž v témže čase t. j. za těchto x minut otočila se veliká rafika o celý obvod více nežli malá, jest

$$\frac{px}{60} - \frac{px}{720} = p, \text{ z čehož jako prvé}$$

$$x = 65\,{}^{5}/_{11} \text{ min.} = 1 \text{ hod.} + 5\,{}^{5}/_{11} \text{ min.}$$

t. j. obě rafiky se kryjí po prvé po 1 hod. $5\,{}^{5}/_{11}$ min., po druhé po 2. (1 hod. + $5\,{}^{5}/_{11}$ min.) atd., po *nté* po n(1 hod. + $5\,{}^{5}/_{11}$ min.).

b) Podobně se vypočítá vzdálenost obou rafik od sebe určitého času, na př. je-li m minut po *nté* hodině. Neboť je-li *ntá* hodina, jsou obě rafiky, (pohybující se týmže směrem) ${}^{n}/_{12}$ celého obvodu od sebe vzdáleny. Za m minut po *nté* hodině vykoná velká rafika $\frac{m}{60}$ a malá $\frac{m}{720}$ celého obvodu, tak že se vzdálenost obou rafik ($= v$) v uvedeném čase vyjádří

$$v = \frac{np}{12} + \frac{mp}{720} - \frac{mp}{60} \text{ t. j.}$$

$$v = \frac{60n - 11m}{12\,.\,60} \,.\, p = \frac{60n - 11m}{12}, \text{ pro } p = 60.$$

Dle toho, je-li $60n \gtrless 11m$, jest v buď kladné nebo záporné. V prvním případě jest malá rafika *před* velkou a v druhém jest velká před malou o tolik minut, kolik v právě udává.

c) Pomocí známé vzdálenosti v obou rafik od sebe vypočítáme snadně, kdy se obě rafiky kryjí, nechť jsou z počátku kdekoli. Neboť je-li známá vzdálenost obou rafik v kladná, dohoní velká rafika malou na př. za x minut, v kterémž čase vykoná velká rafika $\frac{px}{60}$ a

malá „ $\frac{px}{720}$, tedy

$$v = \frac{px}{60} - \frac{px}{720}, \text{ z čehož}$$

$$v = \frac{11px}{720} \text{ a } x = \frac{12v}{11} \text{ pro } p = 60.$$

Je-li však v záporné, položme v této rovnici doplněk do celého obvodu t. j. $(p - v)$ místo v, a bude

$$x = \frac{12(p - v)}{11}.$$

Dodatek. Podobně se řeší veškeré úlohy, které jednají o pohybování se těles v naznačených drahách, při kterýchž místo 60 a 720 klade se vůbec čas t a t', na př. periodické a synodické oběhy časové slunce a měsíce atp.

c) *Úlohy o prodeji a koupi.*

Nazveme-li hodnotu, za kterou se zboží prodá P a hodnotu kupní K, mimo to úroky ze sta při zisku p, při ztrátě p', vyjádří se

$$P = \frac{K}{100}(100+p), \text{ z čehož } K = P(1 - \frac{p}{100+p}) \text{ nebo}$$

$$P = \frac{K}{100}(100-p'), \quad \text{„} \quad K = P(1 + \frac{p'}{100-p'})$$

Jsou-li P a K známy, bude se

$$p = \frac{100(P-K)}{K} \text{ a } p' = \frac{100(K-P)}{K}.$$

d) *Úlohy z běhu kupeckého vůbec.*

Kupcům se povoluje srážka čili rabat buď *na* sto (t. j. na př. 5% ze 105 zl.), aneb rabat *ve* stu (t. j. 5% z 95 zl.).

Znamená-li dluh . . . . . d,
čas, kdy se má splatit . . . t,
hodnota dluhu . . . . . h,
rabat vůbec (d — h) . . . r,
rabat *na* sto . . . . . p,
rabat *ve* stu . . . . . p', vyjádří se

$$1)\ r = \frac{d}{100+p} \cdot pt. \quad 2)\ d = \frac{h}{100}(100+pt). \quad 3)\ h = \frac{d}{100+pt} \cdot 100.$$

$$4)\ p = \frac{r}{t} \cdot \frac{100}{h}. \quad 5)\ t = \frac{r}{p} \cdot \frac{100}{h}. \quad 6)\ r = \frac{d}{100} \cdot p't.$$

$$7)\ d = \frac{h}{100-p't} \cdot 100. \quad 8)\ h = \frac{d}{100}(100-p't). \quad 9)\ p' = \frac{r}{t} \cdot \frac{100}{d}.$$

$$10)\ t = \frac{r}{p'} \cdot \frac{100}{d}.$$

Příklady.

1) $x+13=47.$ 2) $x-15=8.$ 3) $x-3\,{}^1/_2=43\,{}^1/_5.$
4) $8\,{}^1/_4+x=2\,{}^1/_3.$ 5) $5\,{}^1/_3-x=7\,{}^5/_6.$ 6) $x-a=b.$
7) $\frac{a}{1+a}-x=\frac{1}{1-a}.$ 8) $\frac{m}{m-n}-x=\frac{1-m}{m+n}.$ 9) $5x-4=2x+5.$
10) $8x+75=13x+100.$ 11) $8x+7-13x=7x-12-8x+1.$

12) $1x-29-17x+53=0.$ 13) $ax+x=c.$ 14) $ax-b+c=bx-c.$

15) $ax-1=a-x.$ 16) $3x+5a-4bx=7x-2a+3bx.$

17) $3ax-14b+2bx=10a-2ax-5bx.$ 18) $5x-(3-2x)=2x+7.$

19) $3-2x=4(2+3x)-33.$ 20) $3(x-2)-(5-3x)=9-(5-x).$

21) $13-3(7-2x)+5x=8x-5(x-8)-1.$

22) $2(x-3)+4(5-3x)=12-5(7-x).$

23) $25-2[8+3(4-3x)]=15x.$

24) $17x-[4-5(9-2x)+2(x-1)]=4[2x-7(2-x)]+37.$

25) $a-(b+c)x=d-cx.$ 26) $a(x-b)-b(a-x)=x(a-b).$

27) $m(n-px)-[n(mx+p)-m(np-x)]=np(m-1)-mx(n+1).$

28) $mn(px-q)-[p(mnx+q)-m(npq-x)+mpx]$
$= mnq(p+1)-p(mx-b).$

29) $(ab-x)(x-a)-[(ax-b)(bx+a)-(abx+1)(x-1)]$
$= (b^2-x)(x-1).$

30) $(4a^2-5b^3+x)(2x-3ab-b^2)$
$-[-b^2x(10b+1)-2x(x+4a^2)+4a^2b^2]=0.$

31) ${}^x/_2=5.$ 32) ${}^x/_5-17\,{}^1/_2=2\,{}^1/_3-{}^x/_4.$ 33) ${}^1/_2x+{}^1/_3x=x-1.$

34) ${}^1/_4x+{}^2/_5x+{}^3/_7x-20=x.$

35) ${}^2/_3x+6\,{}^3/_{13}=x+{}^1/_4x-{}^1/_9x-10\,{}^{10}/_{13}.$

36) $3\,{}^5/_6x+7\,{}^1/_2x-5\,{}^4/_{15}-2\,{}^4/_5x=x-3\,{}^1/_4x-{}^1/_8.$

37) $\dfrac{2\,{}^1/_4x-5\,{}^1/_3}{7}-\dfrac{3\,{}^1/_7-1\,{}^1/_6x}{2}=\dfrac{1\,{}^1/_7x-10\,{}^1/_4}{3}$

38) $\dfrac{{}^1/_2x-{}^1/_3}{{}^2/_5}-\dfrac{{}^1/_4-{}^1/_x}{{}^3/_4}=1\,{}^1/_4x-2.$

39) $\dfrac{x}{a}-b=c-\dfrac{x}{b}.$ 40) $\dfrac{ax}{b}-\dfrac{c}{a}=b-\dfrac{bx}{c}.$

41) $a\left(\dfrac{b}{x}-cx\right)=b\left(\dfrac{x}{a}+c\right)-x\left(\dfrac{b}{a}+ac\right).$

42) $\dfrac{3+2x}{4a}-\dfrac{5-3x}{8b}+\dfrac{5-2x}{6ab}=\dfrac{6+5x}{4b}-\dfrac{3-2x}{3a}.$

43) ${}^1/_2({}^1/_3x-{}^1/_5)-{}^1/_4[{}^2/_3-{}^1/_2({}^5/_6x+{}^4/_5)+{}^3/_{10}x]=-1.$

44) $${}^1/_{2a}\left(\frac{x}{c}-\left[\frac{2a}{b}-\left(x+\frac{4a}{3c}\right)+\frac{ax}{4}\right]-\frac{2b}{5c}\right)$$
$$=\frac{x}{c}\left[\frac{1}{2a}(1+c)-\frac{bc}{8}\right].$$

45) $$\frac{{}^2/_3\dfrac{a^2}{b}-1\,{}^1/_2\dfrac{b^2x}{a^3}}{{}^2/_5\dfrac{a^2}{b}}=\frac{1\,{}^1/_2\dfrac{a^2x}{b^2}-\dfrac{2b^3}{a^2}}{1\,{}^1/_2\dfrac{b^2}{a^3}}.$$

46) $\dfrac{{}^1/_2a^2b+{}^1/_3c^2x}{{}^1/_6a^4}+\dfrac{{}^1/_7b^2c-{}^1/_2a^2x}{{}^1/_7b^4}=\dfrac{{}^3/_5a^2b+{}^1/_2c^2x}{{}^1/_5a^4}.$

47) $\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{5}{x-4}=\dfrac{6}{x-5}.$ 48) $\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{6}{15-x}=\dfrac{11}{x-1}.$

49) $\dfrac{6}{{}^1/_2x+2\,{}^1/_2}-\dfrac{5\,{}^1/_2}{{}^1/_2x+2}=\dfrac{7}{{}^1/_2x+3\,{}^1/_2}-\dfrac{6\,{}^1/_2}{{}^1/_2x+3}.$

50) $\frac{2-x}{3+x}-\frac{5+x}{4-x}=\frac{{}^1/_2x-13}{6-{}^1/_2x(x-1)}$.

51) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+4}{x+8}=\frac{x-2}{x-4}$.

52) $\frac{1}{{}^1/_4x-1}-\frac{1}{{}^1/_4x-{}^3/_4}=\frac{1/4}{{}^1/_4x-1{}^1/_4}-\frac{{}^1/_4}{{}^1/_4x-{}^1/_4}$.

53) $\frac{{}^1/_2(x+a)}{x-a}-\frac{{}^1/_2x-a}{x+2a}=\frac{{}^1/_2x+a}{x-4a}-\frac{{}^1/_2x+2a}{x+8a}$.

54) $\frac{a}{x-m}+\frac{b}{x-n}=\frac{a+b}{x-p}$.

55) $\frac{m}{x-a}+\frac{n}{x-b}+\frac{p}{x-c}=\frac{m}{x-b}+\frac{n}{x-c}+\frac{p}{x-a}$.

56) $\frac{a-b}{x-c}+\frac{c-d}{x-b}=\frac{a-b}{x-d}+\frac{c-d}{x-a}$.

57) $a^2+\frac{b^3-a^2x}{x-c^2}=\frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2-x}$.

58) $\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{a}{(a-b)x}=\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{x}\left(\frac{b}{a-b}-1\right)$.

59) $\frac{(a+b)x+c}{(a-b)x-d}-\frac{(a-b)x-c}{(a+b)x+d}=\frac{2x^2(a^2+b^2)-d(bx-c)}{x^2(a^2-b^2)-d(2bx+d)}$.

60) $\frac{(2a^2-1)x+4b^2}{(3-4a^2)x+4b^2}+\frac{2b^2-(3a^2-1)x}{(a^2-2)x-2b^2}$

$=\frac{b^2x(4-19a^2)}{x[a^2x(11-4a^2)-6(x-2a^2b^2)]-2b^2(7x+4b^2)}$.

61) Které číslo jest a) o 5 menší nežli 13, b) o a menší nežli b, c) o 9 větší nežli 1, d) o a větší nežli b?

62) Součet jakéhosi čísla a $^1/_3$ jest dvakrát větší nežli třetí díl téhož čísla a $3^1/_2$; které jest to číslo?

63) Poloviční součet, $^5/_6$ a $1^5/_{16}$ jakéhosi čísla jest o $2^{17}/_{24}$ větší nežli $^5/_6$ téhož čísla; které jest to číslo?

64) Sedmý díl 5ti a jakéhosi čísla jest o 1 větší nežli 14tý díl rozdílu 9ti od onoho čísla; které jest to číslo?

65) Od polovice jakéhosi čísla odečtu 1, rozdíl ten připočtu k třetině téhož čísla a součet odečtu od 1; je-li rozdíl tento o pátý díl onoho čísla větší nežli jeho 6tý díl, které jest to číslo?

66) V obou hrstech mám 7 krejcarů, a sice v pravé o 3 krejcary méně nežli v levé; kolik mám v každé?

67) K jakémusi číslu připočtu 2, dělím součet 3mi, k podílu připočtu 4, dělím součet 5ti, k podílu připočtu 6, dělím součet 7mi, k tomuto podílu připočtu 8 a dostanu součtem 9; které jest ono číslo?

68) Ve společnosti bylo 2 (n)-krát tolik pánů co paní. Když 6 pánů (a) s tolikéž paními odešlo, zůstalo tam 5 (m)-krát tolik pánů co paní. Kolik pánů a kolik paní bylo z počátku ve společnosti?

69) Které číslo musí se připočísti k čitateli i k jmenovateli zlomku $^7/_{16}$ $\left(\frac{a}{b}\right)$ aby se rovnal $^1/_2$ $\left(\frac{m}{n}\right)$?

70) Kupec prodá ve třech týdnech 225 K^0 cukru, a sice v třetím týdnu $1^1/_2$krát tolik co v prvním a ještě 8 K^0, v druhém týdnu $1^1/_3$krát tolik co v prvním a ještě 10 K^0. Kolik K^0 prodá každého týdnu?

71) Rozděl 100 zl. třem osobám, tak aby druhá dostala o 5 zl. více nežli polovice dílu osoby první, a třetí o 5 zl. více nežli polovice dílu osoby druhé; mnoho-li dostane každá?

72) Kolik metrů má kus jakési látky, pakli, když se jí prodá $^2/_5$ a zbytku ještě $^2/_3$, zůstane 23 metrů?

73) Otci jest 35 (*a*), jednomu jeho dítěti 7 (*b*) let a druhému 3 (*c*) leta. Za kolik let bude otci 2 (*m*)krát tolik roků jako oběma dětem dohromady?

74) V dvojciferném čísle jest číslice na místě jednotek 2krát větší nežli číslice na místě desítek; kdyby ony číslice proměnily svá místa, bylo by nové číslo o 27 větší nežli původní; které číslo jest to?

75) Položíme-li u jakéhos čísla šesticiferného číslici 1 na místě nejvyšším na místo jednotek, jest nové toto číslo 3krát větší původního; které číslo jest to?

76) Obchodník má několik metrů zboží. Kdyby prodával metr za 1 zl. 30 kr. (*a*), vydělal by 7 zl. 20 kr. (*b*), a kdyby prodával metr za 1 zl. (a^1), prodělal by 1 zl. 80 kr. (b^1). Kolik metrů toho zboží měl, a zač přišel jemu metr?

77) Kupec smíchá 68 K^0 kávy, kterou prodává po 65 kr., se 102 K^0 kávy, kterou prodává po 55 kr. Zač bude K^0 směsi?

78) Vinař smíchá 20 litrů vína po zlatém s 30ti litry po 80 kr. Zač bude litr směsi?

79) Kdosi smíchá 480 hektolitrů pšenice lepšího a 560 hektolitrů horšího druhu a prodává hektolitr směsi za 15 zl. 80 kr. Prodával-li hektolitr lepšího druhu za 16 zl. 50 kr., zač prodával hektolitr druhu horšího?

80) Dvě jistiny, jedna uložená na 4% a druhá na 5%, vynáší dohromady ročně 65 zl. úroků. Je-li první jistina o 185 zl. větší nežli druhá, jak veliká jest každá?

81) 24 dělníků ukončí jakous práci za 6 dní, a jiných 30 dělníků by jí ukončilo za 5 dní; za kolik dní bude práce hotova, pracují-li na ní všichni tito dělníci?

82) Z *A* do *B* jest 9 hodin cesty. Vyjde-li posel z *A* do *B*, který za hodinu urazí tolik cesty jako posel, jenž téhož času vyšel z *B* do *A* za $1^1/_4$ hodiny, kdy se setkají?

83) Dostavník jede z *A* do *B* a urazí míli za $1^1/_2$ hodiny. 9 hodin po jeho odjezdu vyjede z *A* do *B* rychlík, který ujede míli za hodinu; za kolik hodin po odjezdu dostavníku bude tento dohoněn rychlíkem, a jak daleko od *B*, je-li z *A* do *B* 26 mil?

84. S bodů A a B pohybují se dvě tělesa proti sobě. Těleso s bodu A vykoná za minutu 7 metrů a těleso s bodu B, které se začalo o $19\frac{1}{2}$ minuty později pohybovati, urazí za minutu 6 metrů; za kolik minut se setkají a jak daleko od A, je-li z A do B 260 metrů? Za kolik minut by *dohonilo* první těleso druhé a jak daleko za B?

85. Z A do B jest $4\frac{1}{4}$ míle. Vyjede-li povoz z A k B, který urazí za 4 hodiny 3 míle, a vyjede-li současně povoz z B k A, který urazí 2 míle za 3 hodiny, a) kdy se oba povozy potkají, b) za kolik hodin by první povoz dohonil druhý, kdyby při stejných podmínkách jely oba z B do C, a jak daleko od C, je-li z B do C 36 mil?

86) Z A do B jest 9 mil. Jezdec vyjede z A k B v 7 hodin ráno a urazí za 5 hodin 4 míle. Téhož dne v $9\frac{1}{4}$ hod. ráno vyjde z B k A posel, který za 7 hodin urazí též 4 míle, a) za kolik hodin se oba potkají a jak daleko od A, b) za kolik hodin by první dohonil druhého, kdyby cestovali oba z B k C, a jak daleko od B?

87) Kolik minut po sedmé hodině kryjí se obě rafiky?

88) Obě rafiky kryjí se mezi hodinou 5tou a 6tou, kolik jest hodin?

89) Jak daleko jsou obě rafiky od sebe a) je-li 9 hod. 2 min. 24 sekund, b) je-li 1 hod 50 min. a 24 sekund, c) kdy se budou krýti v prvním a kdy v druhém případě?

90) Kolik % rabatu *ze* sta jest $p\%$ rabatu *na* sto, a kolik % rabatu *na* sto jest $p'\%$ rabatu *ze* sta?

91) Kdosi má splatiti 728 zl. za $2\frac{1}{2}$ měsíce, kolik zlatých rabatu si srazí, zaplatí-li dluh ten hned se srážkou 4% rabatu *na* sto?

B. Určité rovnice prvního stupně o dvou neznámých.

§. 22.

1. Aby se *dvě* neznámé veličiny určily, musejí dány býti *dvě* rovnice, z nichž v každé tytéž dvě neznámé se nalezají, a sice tak spojené, že nesmí jedna rovnice ani plynouti z druhé ani tuto rušiti, což platí vůbec o rovnicích o několika neznámých. U řešení rovnic o dvou neznámých pracuje se k tomu, aby se jedna neznámá odstranila, t. j. aby se ze dvou rovnic o *dvou* neznámých odvodila nová rovnice o *jedné* neznámé. Určí-li se pak hodnota této neznámé, najde se pomocí její i druhá neznámá.

Aby se ze dvou rovnic o dvou neznámých dostala jediná rovnice o jedné neznámé, přivedou se dané rovnice nejprvé na podobu

$$\begin{aligned} &1.\ ax \pm by = c\\ &2.\ a'x \pm b'y = c', \end{aligned}$$

a pak lze pracovati *trojím* způsobem, a sice:

1. Z kterékoli rovnice určí se jedna neznámá, a hodnota její se vloží do rovnice druhé, čímž zůstane v ní pouze jediná neznámá a tato se určí jako prvé (§. 20). Způsobu tomu říkáme *dosazovací* (*substituce*). Na př.

$$\begin{aligned} &1.\ ax + by = c\\ &2.\ a'x + b'y = c'. \end{aligned}$$

Z 1. rovnice jde $3.\quad x = \frac{c - by}{a}$, což vloženo do rovnice 2. dá

$$a' . \frac{c-by}{a} + b'y = c',$$ z čehož

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b},$$ vloženo do rovnice 1. dá

$$x = \frac{c - b . \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}}{a}$$ čili

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

2. Z obou rovnic se vyhledá tatáž neznámá, nové dvě rovnice porovnají se dle zásady: dvě veličiny jsouce rovny téže veličině třetí, jsou rovny vespolek, tím dostaneme rovnici o jedné neznámé, a tuto určíme jako prvé. Způsobu tomu říkáme *srovnávací* (*komparace*). Na př.

$$\begin{aligned} &1.\ ax + by = c\\ &2.\ a'x + b'y = c'. \end{aligned}$$

Z 1. rovnice plyne $3.\quad x = \frac{c - by}{a}$

Z 2. „ „ $4.\quad x = \frac{c' - b'y}{a'}$

porovnáním obou dostaneme

$$\frac{c-by}{a} = \frac{c'-b'y}{a'},$$ čehož

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$ atd.

3. Obě rovnice se upraví tak, aby, sečteme-li je, jedna neznámá z nich vymizela, což se stane, násobíme-li jednu rovnici součinitelem kterékoli neznámé rovnice druhé, a druhou rovnici součinitelem téže neznámé rovnice první. Má-li tato neznámá v obou rovnicích rozličná znaménka, budiž *každý* součinitel, jímž se násobí, kladný (záporný), má-li však ona neznámá v obou rovnicích totéž znaménko, budiž *jeden* součinitel, jímž se násobí, záporný. Kdyby součinitelé téže neznámé měli stejného dělitele, vypustí se tento v obou, takže se násobí prvočísly vespolek;

a kdyby jeden součinitel byl násobkem druhého, násobí se tento činitelem druhým. Po takové proměně obou rovnic se tyto sečtou, čímž jedna neznámá tedy i jedna rovnice vymizí. Způsobu tomu říkáme *vylučovací* (*eliminace*). Na př.

$$1.\quad ax + by = c$$

$$2.\quad a'x + b'y = c'.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. rovn. násobená } a' \text{ dá } 3. & aa'x + a'by = a'c \\ \text{2.} \quad ,, \quad ,, \quad -a \quad ,, \quad 4. & -aa'x - ab'y = -ac' \end{array}\right\}\text{součtem}$$

$$y(a'b - ab') = a'c - ac',$$

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Abychom určili x, vložme hodnotu $y$nu buď do 1. buď do 2. rovnice, aneb násobme 1. rovn. b' a 2. rovnice $-b$, totiž

$$\left.\begin{array}{l} ab'x + bb'y = b'c \\ -a'bx - bb'y = -bc' \end{array}\right\}\text{součtem}$$

$$x(ab' - a'b) = b'c - bc',$$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Dodatek. Kdy se toho neb onoho návodu s prospěchem vůbec užiti má, o tom rozhodne cvik a soudnost počtáře. Návodu vylučovacího používá se obyčejně vždy, jsou-li součinitelé téže neznámé v obou rovnicích výrazy jednoduché, obou ostatních návodů pak vždy, jsou-li oni součinitelé buď výrazy složité, buď velká čísla. Na př.

a)
$$\left.\begin{array}{ll} 1. & 245x - 376y = 194 \\ 2. & 89x + 100y = 1490 \end{array}\right\}\text{dle návodu } \textit{dosazovacího}$$

$$3.\quad x = \frac{1490 - 100y}{89}, \text{ do první rovn. dá}$$

$$245 \cdot \frac{1490 - 100y}{89} - 376y = 194, \text{ z čehož}$$

$y = 6$, vloženo do 3. rovnice dá
$x = 10$. Zkouška?

b)
$$\left.\begin{array}{ll} 1. & 203x + 387y = 449 \\ 2. & 72x - 135y = 129 \end{array}\right\}\text{dle návodu } \textit{srovnávacího}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3. & x = \dfrac{449 - 387y}{203} \\ 4. & x = \dfrac{129 + 135x}{72} \end{array}\right\}\text{porovnáním}$$

$$\frac{449 - 387y}{203} = \frac{129 + 135y}{72}, \text{ z čehož}$$

$y = {}^1/_9$, vloženo do 4. rovnice dá
$x = 2$. Zkouška?

c)
$$\left.\begin{array}{ll} 1. & 7x - 3y = 17 \\ 2. & 2x + 5y = 122 \end{array}\right\} \text{dle návodu vylučovacího 1. rov.} \times 5 \text{ a 2. rovn.} \times 3$$
$$\left.\begin{array}{ll} 3. & 35x - 15y = 85 \\ 4. & 6x + 15y = 366 \end{array}\right\} \text{sečtěno}$$
$$41x = 451$$
$x = 11$, vloženo do 1. rovnice dá
$y = 20$. Zkouška?

d)
$$1. \quad \frac{a-y}{x} + \frac{y}{b} = \frac{2y+c}{2b}$$
$$2. \quad \frac{2x-a}{y} = \frac{2b}{c-2b}$$

Z 1. rovn. $\frac{ab-by+xy}{x} = \frac{2y+c}{2}$
$$2ab - 2by + 2xy = 2xy + cx$$
$$3. \quad cx + 2by = 2ab$$

Z 2. rovn.
$$2cx - ac - 4bx + 2ab = 2by$$
$$x(2c-4b) - 2by = ac - 2ab$$
položeno pod 3. rovnici:

$$4. \quad x(2c-4b) - 2by = ac - 2ab \;\}\; \text{sečtěno}$$
$$x(c+2c-4b) = ac$$
$$x = \frac{ac}{3c-4b}, \text{ vloženo do 3. rovnice dá}$$
$$c \cdot \frac{ac}{3c-4b} + 2by = 2ab$$
$$2by = 2ab - \frac{ac^2}{3c-4b}$$
$$y = \frac{a(6bc-8b^2-c^2)}{2b(3c-4b)}.$$
Zkouška?

e)
$$1. \quad (a+3b)x - (a-3b)y = 2a(3b-1)$$
$$2. \quad (a+2c)x + (a-2c)y = 2(a^2-2c)$$
$$\left.\begin{array}{ll} 3. & x = \dfrac{2a(3b-1)+(a-3b)y}{a+3b} \\ 4. & x = \dfrac{2(a^2-2c)-(a-2c)y}{a+2c} \end{array}\right\} \text{porovnáním}$$
$$\frac{2a(3b-1)+(a-3b)y}{a+3b} = \frac{2(a^2-2c)-(a-2c)y}{a+2c} \text{ atd.}$$
$y = a + 1$, dosazeno do 3. rovnice dá
$x = a - 1$. Zkouška?

Poznamenání. Přicházejí-li v obou rovnicích převratné hodnoty neznámých veličin, aneb jejich násobné, pracuje se snadněji, považujeme-li *tyto* převratné hodnoty za neznámé a určivše je, najdeme-li z nich hodnoty původních neznámých. Na př.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=n\\ \frac{a'}{x}+\frac{b'}{y}=n'\end{array}\right\}\quad \text{položme}\quad \begin{array}{l}\frac{1}{x}=x'\\ \frac{1}{y}=y'\end{array}\quad \text{a bude}$$

$$\left.\begin{array}{l}ax'+by'=n\\ a'x'+b'y'=n'\end{array}\right\}\ \text{atd.}$$

Z těchto rovnic určíme x' a y', a pak teprv x a y.

2. Úlohy, které se řeší rovnicemi o dvou neznámých, *sestavují* se podobně, jako ony, které se řeší rovnicemi o jedné neznámé. Udání, jež se týkají té které neznámé, spojují se náležitými znaménky, až se sestaví tolik rovnic, kolik jest neznámých. Sestavené takto rovnice se pak řeší. Na př.

a) Zvětšíme-li čítatele jakéhos zlomku o a a jmenovatele o a' jest jeho hodnota m, a zvětšíme-li téhož čítatele o b a téhož jmenovatele o b', jest jeho hodnota n. Kterého čítatele a jmenovatele má onen zlomek?

Čítatel jest x a jmenovatel y, proto bude dle udání:

$$\frac{x+a}{y+a'}=m, \text{ a}$$

$$\frac{x+b}{y+b'}=n.$$

Řešíme-li tuto rovnici, dostaneme

$$x=\frac{n[m(b'—a')+a]—bm}{m—n}, \text{ a}$$

$$y=\frac{a+b'n—(b+a'm)}{m—n}$$

Kdyby se čítatel a jmenovatel, dokuď se týče, o číslo a, a', b, b' *zmenšil*, dosadili bychom ve výsledku místo a, a', b, b', všude $—a$, $—a'$, $—b$, $—b'$. Podobně by se upravil tento výsledek, kdyby úloha vyžadovala $a=a'$, $b=b'$, nebo kdyby se v prvním udání čítatel o číslo a *zvětšil* (zmenšil), a jmenovatel o tolikéž *zmenšil* (zvětšil), a taktéž v daném udání kdyby se čítatel o číslo b *zvětšil* (zmenšil) a jmenovatel o tolikéž *zmenšil* (zvětšil). K výsledku bychom přišli pomocí rovnice

$$\frac{x\pm a}{y\mp a}=m \quad \text{a} \quad \frac{x\pm b}{y\mp b}=n.$$

b) Parník vykoná po vodě za t hodin a mil a proti vodě za t' hodin b mil. Jak daleko by parník ten doploul za hodinu pouze silou svého stroje (při tiché hladině) a pouze hnaný proudem (bez pomoci stroje)?

Pouze silou svého stroje uplyne parník za hodinu x mil, a
" " proudu " " " " y " tedy
po vodě uplyne za hodinu $x+y$ mil,
za t hodin $t(x+y)$ " t. j.

1. $(x+y)t=a$,

proti vodě uplyne za t' hodin $(x-y)t'$ mil t. j.

$$2.\quad (x-y)t' = b$$

Z obou rovnic plyne $x = \dfrac{at' + bt}{2tt'}$

$$y = \frac{at' - bt}{2tt'}$$

Je-li $t = t'$, jest $x = \dfrac{a+b}{2t}$, $y = \dfrac{a-b}{2t}$.

c) Kterých dvou čísel jest součet *a*krát, a součin *b*krát větší nežli jejich rozdíl?

$$1.\quad \frac{x+y}{a} = x - y$$

$$2.\quad \frac{xy}{b} = x - y$$

$$x = \frac{2b}{a-1},\qquad y = \frac{2b}{a+1}.$$

d) Jsou dva sudy, v jednom jest x, v druhém y litrů vína. Dá-li se z prvního do druhého tolik litrů, kolik tam už bylo, na to z druhého do prvního tolik, kolik tam zbylo, pak z prvního do druhého tolik, kolik v tomto zbylo a konečně z druhého do prvního tolik, kolik v tomto zbylo, jest v každém sudě m litrů. Kolik litrů bylo v každém sudě na počátku?

Z počátku jest v jednom x v druhém y litrů, $(x > y)$
po prvním přelití „ „ $x-y$ v „ $2y$ „
po druhém „ „ „ $2(x-y)$ v „ $2y-(x-y) = 3y-x$
po třetím „ „ „ $\underbrace{2(x-y)-(3y-x)}_{3x-5y}$ „ $2(3y-x)$
po čtvrtém „ „ „ $2(3x-5y)$ „ $2\,(3y-x)-(3x-5y)$.
a dle úlohy jest $2(3x-5y) = 2(3y-x)-(3x-5y) = m$, tedy

$$6x - 10y = 11y - 5x = m,$$

t. j.

$$1.\quad 11x = 21y$$

$$2.\quad -5x = m - 11y$$

z toho $x = \dfrac{21m}{16}$, a $y = \dfrac{11m}{16}$.

e) Najdi dvě čísla, která se mají k sobě jako součet jejich k číslu a, a jako rozdíl jejich k číslu b.

Ona čísla jsou x a y, tedy

$$x : y = (x+y) : a = (x-y) : b,\ \text{z čehož}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & ax = y(x+y) \\ 2. & bx = y(x-y) \end{array}\right\}\text{z toho}$$

$$x = \frac{(a+b)^2}{2(a-b)},\quad y = {}^1\!/_2\,(a+b).$$

f) K m librám směsi dvou kovů, které jsou v ní v poměru $a:b$, přidá se $n$krát tolik směsi jiné týchže kovů, které ale jsou v ní v poměru $c:d$. V jakém poměru jsou ony dva kovy v celém kuse?

V 1. kuse jest x lb. jednoho a y lb. druhého kovu, $x+y=m$

v 2. „ „ x' lb. „ a y' lb. „ „ , $x'+y'=n.m$,

tedy

$$x:y=a:b \qquad\qquad x':y'=c:d$$

$$(x+y):x:y=(a+b):a:b \qquad\qquad (x'+y'):x':y'=(c+d):c:d$$

$$x=\frac{am}{a+b},\quad y=\frac{bm}{a+b}. \qquad\qquad x'=\frac{cmn}{c+d},\quad y'=\frac{dmn}{c+d}.$$

V celém kuse jest jednoho kovu $x+x'=x''$ liber a druhého $y+y'=y''$ lib.

t. j.

$$x+x'=x''=\frac{am}{a+b}+\frac{cmn}{c+d}$$

$$y+y'=y''=\frac{bm}{a+b}+\frac{dmn}{c+d}.$$

tedy

$$x'':y''=[a(c+d)+cn(a+b)]:[b(c+d)+dn(a+b)].$$

Příklady.

1) $10x+56y=9$
$25x-24y=2.$

2) $1\,{}^5/_9x-{}^1/_3y={}^1/_2$
$-x+2\,{}^1/_4y={}^1/_2.$

3) $721x-303y=2$
$203x-42y=15.$

4) $x+y=a$
$x-y=b.$

5) $x^2-y^2=a$
$x+y=b.$

6) $x\pm y=a$
$\frac{x}{y}=b.$

7) $ax+y=m$
$x-by=n.$

8) $\frac{1-{}^1/_4x-{}^1/_2y}{2}=3\,{}^1/_2-\frac{7x-y}{4}$
$1-{}^1/_4x-{}^1/_2y={}^1/_3(y-\frac{5-3x}{4}).$

9) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=6$
$-\frac{2x}{5}+\frac{5y}{3}=23\,{}^3/_5.$

10) $(a+b)x-(a-b)y=2a(b+1)$
$(a-b+c)x+(a+b-c)y=2(a^2-b+c).$

11) $(5x-8):(7+10y)=11:26$
$(3+4y):(5x-4)=11:14.$

12) ${}^1/_4[x-5(y-2(x+4)+7)+3y]=19$
${}^1/_4[7y-3(4x-5(y-1)+6)+9x]=4.$

13) $\frac{7}{16x-3y+25}=\frac{13}{5y-4x+2}$
$\frac{5}{2x+7y-20\,{}^1/_2}=\frac{11}{3y-8x+20}.$

14) $\frac{ax+aby+b^2}{bx+by-a}=\frac{a^3}{b^3},\qquad \frac{bx+ay-a}{ax-by+a}=\frac{b^2}{a^2}.$

15) $\frac{x+y}{a+b}-\frac{x-y}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}$, $\qquad \frac{x+a}{a-b}-\frac{x-a}{y+b}=\frac{a^2-b^2}{y^2-b^2}$.

16) $\frac{a^2x-b^2y}{x-y}-\frac{a^2x+b^2y}{x+y}=\frac{\frac{\frac{x+y-b^2}{x-y}}{x+y}}{2xy}$ $\qquad 1x - y = b^2$.

17) $\frac{1}{\frac{2-x+y}{3+y}-\frac{3+x+y}{2+x}}=\frac{9-y(x+1)}{x^2+y^2+3x+4y+5}$,

$\frac{1}{\frac{x+y}{1+x+y}-\frac{x-y}{1+x-y}}=\frac{x^2+7}{2y}-\frac{y-1}{2}$.

18) Součet dvou čísel jest 744 a rozdíl 104; která jsou ta čísla?

19) V shromáždění jest 60 osob, a jakýs návrh byl přijat většinou 8 hlasů; kolik hlasovalo proň a kolik proti němu?

20) 2 libry jednoho a 3 libry druhého zboží jsou dohromady za 1 zl. 94 kr., a 5 liber prvního a libra druhého jest za 3 zl. 49 kr. Zač jest libra každého zboží?

21) Přidám-li k čítateli jakéhos zlomku 4 (a) aneb odejmu-li mu 1 (b), a přidám-li k jeho jmenovateli současně 1 (c) aneb odejmu-li jej od 16 (d), jest jeho hodnota pokaždé 1; který jest ten zlomek?

22) Zvuk vykoná *po* větru za sekundu 1060 stop a *proti* větru mírnému 1040 stop. Jakou rychlost má zvuk a jakou mírný vítr?

23) Parník vykoná *proti* vodě za hodinu $1^1/_2$ míle a *po* vodě $2^1/_2$ míle. Kolik mil za hodinu by parník ten urazil pouze pomocí svého stroje, a kolik pomocí proudu?

24) Připočítám-li k čítateli a jmenovateli jakéhos zlomku 3 (a), dostanu $^4/_5$ (b), a připočítám-li k oběma 7 (c), dostanu $^5/_6$ (d); který jest ten zlomek?

25) Připočítám-li k čítateli a jmenovateli jakéhos zlomku 1 (a), dostanu $^1/_2$ (b), a odečtu-li od obou 1 (c), dostanu $^4/_9$ (d); který jest ten zlomek?

26) Kterých čísel součet jest 5krát a součin 24krát větší nežli jejich rozdíl?

27) Starší bratr byl před 7 lety 10krát tak stár jako jeho sestra, avšak po roce bude pouze 2krát tak stár jako ona; kolik let jest každému z nich?

28) Která čísla mají se k sobě jako jejich součet k 32ti a jako jejich rozdíl k 24ti?

29) Stříbrník smísí jednou 8 K^0 jednoho a 3 K^0 jiného druhu stříbra a dostane směs $766^1/_2$ z čista, po druhé smísí $4^1/_2$ K^0

prvního a $5\frac{1}{2}$ K° druhého druhu stříbra a dostane směs $679\frac{2}{5}$ z čista. Jak čisté bylo stříbro prvního a druhého druhu?

30) Jak se vyjádří obě neznámé, nazveme-li 8, 3, $766\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $679\frac{2}{5}$ vůbec m, n, p, m', n', p'?

31) V 19ti K° směsi dvou kovů mají se tyto k sobě jako 2 : 5, (4 : 9), smísí-li se s tím 5krát (12krát) tolik K° jiné směsi týchže dvou kovů, které jsou v ní v poměru 3 : 7, (5 : 8); v jakém poměru jsou tyto kovy v celém kuse?

C. Určité rovnice prvního stupně o třech a více neznámých.

§. 23.

U řešení rovnic o třech neznámých pracuje se k tomu, aby se kterákoli neznámá a s ní i jedna rovnice odstranila, což se stává některým z uvedených prvé tří návodů (§. 22). Pracuje-li se pomocí návodu vylučovacího, napíšou se činitelé, jimiž se násobí vedle obou dotýčných rovnic; zůstane-li jedna z nich bez proměny, napíše se k ní 1.

a) Skládá-li se rovnice o třech neznámých z rovnic, *z nichž každá má tři neznámé*, odstraní se vždy ze dvou rovnic tatáž neznámá, čímž se přijde na rovnici o dvou neznámých, která se řeší jako prvé. Na př.

$$
\begin{array}{rr|r|r}
1. & 3x+2y-4z=8 & 1 & \\
2. & 4x-3y+5z=2 & & 1 \\
3. & 10x-\ y-3z=4 & +2 & -3 \\
\hline
4. & 23x-10z=16 & +7 & \\
5. & -13x+\ 7z=-5 & +10 & \\
\hline
6. & 161x=112 & & \\
7. & -130x=-50 & & \\
\hline
 & 31x=62 & & \\
 & x=2, & &
\end{array}
$$

vloženo do 4. rovnice dá $z = 3$, a obě hodnoty
vloženy do 3. „ dají $y = 7$. Zkouška?

b) *Jsou-li ve dvou rovnicích tři a v jedné dvě neznámé*, odstraňme z obou rovnic, v nichž jsou tři neznámé onu neznámou, která v rovnici třetí nepřichází, čímž dostaneme dvě rovnice se dvěma neznámýma atd. Na př.

$$\begin{array}{rr|c|c}
1. & 5x-7y+\ z=12 & +\ 2 & \\
2. & 9x+4y-2z=19 & 1 & \\
3. & -\ x+3y\qquad =20 & & +19 \\
\hline
4. & 19x-10y=\ 43 & & 1 \\
5. & -\ 19x+57y=380 & & \\
\hline
 & 47y=423 & & \\
 & y=\ 9, & &
\end{array}$$

vloženo do 3. rovnice dá $x = 7$, a obě hodnoty vloženy do 1 rovnice dají $z = 40$. Zkouška?

c) *Je-li jedna rovnice se třemi neznámými, a mají-li dvě rovnice po dvou neznámých*, vyhledejme z těchto ony neznámé, *které v obou rovnicích přichází pouze jednou.* Hodnoty takto určené vložme do rovnice třetí a dostaneme rovnici o jedné neznámé atd. Na př.

$$\begin{array}{lrl}
 & 1. & x+(a-1)y-z=a^2+ab^2-a-b \\
 & 2. & (a^2+b)x-a^2z=b^2(a^2-1) \\
 & 3. & bx+y=a(ab+1) \\
\hline
\text{Z 2. rovn.} & 4. & z=\dfrac{(a^2+b)x-b^2(a^2-1)}{a^2} \\
\text{Z 3. rovn.} & 5. & y=a(ab+1)-bx
\end{array}\left.\vphantom{\dfrac{a}{a^2}\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\}\text{vloženo do 1. rovn.}$$

$$x+(a-1)\,.\,(a^2b+a-bx)-\frac{(a^2+b)x-b^2(a^2-1)}{a^2}=$$
$$a^2+ab^2-a-b,\text{ z toho}$$

$x = a^2-b$, vloženo do 5. a do 4. rovnice dá:

$y = a+b^2$

$z = a^2-b^2.$

d) *Jsou-li všechny tři rovnice se dvěma neznámýma*, vyhledejme vždy ze *dvou* rovnic ony neznámé, *které v obou přichází pouze jednou*, hodnoty tyto dosaďme do rovnice třetí atd. Na př.

$$\begin{array}{rl}
1. & ax+by=m \\
2. & a'x+cz=n \\
3. & b'y+c'z=p \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Z 2. rov. 4.} & x=\dfrac{n-cz}{a'} \\[2ex]
\text{Z 3. rovn. 5.} & y=\dfrac{p-c'z}{b'}
\end{array}\right\}\text{vloženo do 1. rovn.}$$

$$\frac{an-acz}{a'}+\frac{bp-bc'z}{b'}=m,$$

z toho $z=\dfrac{ab'n+a'bp-a'b'm}{ab'c+a'bc'}$, vloženo do 4. a 5. rovnice dá

$$x=\frac{bc'n-bcp+b'cm}{ab'c+a'bc'},\text{ a}$$

$$y=\frac{acp-ac'n+a'c'm}{ab'c+a'bc'}.$$

Rovnice o čtyřech neb více neznámých řeší se podobně jako rovnice o třech neznámých.

Poznamenání.

a) Rovnice podoby:
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=m$$
$$\frac{a'}{x}+\frac{b'}{y}+\frac{c'}{z}=n$$
$$\frac{a''}{x}+\frac{b''}{y}+\frac{c'}{z}=p,$$
se řeší, položíme-li $^1/_x=x'$, $^1/_y=y'$, $^1/_z=z'$ a vyhledáme-li prvé x', y', z', a pak teprv x, y, z.

b) Rovnice podoby:
$$ayz+bxz+cxy=mxyz,$$
$$a'yz+b'xz+c'xy=nxyz$$
$$a''yz+b''xz+c''xy=pxyz,$$
řeší se, pakli každou rovnici dělíme xyz, čímž dostane podobu rovnice předcházející.

c) Rovnice podoby: $\left.\begin{array}{l} x+y=a\\ x+z=b\\ y+z=c \end{array}\right\}$ se řeší, sečtou-li se, a pak se od nové rovnice *každá* původní dvojnásobná odečte, totiž
$$\begin{array}{r} 2x+2y+2z=a+b+c\\ -2x-2y=-2a\\ \hline z=\dfrac{-a+b+c}{2} \end{array}$$
atd.

Příklady.

1) $5x-y+12z=5$
$x+7y-16z=17^1/_5$
$-30x+5y+z=9^1/_4$.

2) $^x/_3+^y/_7+^z/_{11}=24$
$^x/_{11}+^y/_3+^z/_7=28$
$-^y/_{14}+^z/_{11}=4$.

3) $100x+17y+540z=209{\cdot}04$
$13y+100z=43{\cdot}1$
$111x+10y=7{\cdot}43$

4) $9x+14y=16$
$7y-20z=-9$
$6x+15z=19$.

5) $x+y=16$
$y+z=36$
$x+z=26$.

6) $2^1/_2x+3^1/_4y=5^1/_{11}z-35$
$x:y:z=5:8:11$.

7) $(9x+z):(2x+7y):(3y+z)=31:23:13$.
$x-y+z=6$.

8) $(a+1)x-(a-1)y=2(a+1)$
$(a-1)x+(a+1)z=a^3-1$
$(a+1)y+(a-1)z=a^3-2(a+1)$.

9) $x+y+z=s$
$x:y:z=a:b:c$.

10) $^1/_x+^1/_y=14$
$^1/_x+^1/_z=11$
$^1/_y+^1/_z=16$.

11) $$\frac{x}{a+1}+\frac{y}{b-1}+\frac{z}{a+b}=2a$$
$$\frac{x}{a-1}-\frac{y}{b+1}-\frac{z}{a-b}=2(1-b)$$
$$x+y-z=2(b^2-1).$$

12) $$x+z=(a+1)y+b^2+1$$
$$b(x-y)=(a^2-1)z-ab^2$$
$$a^2(y-z)=(a-1)z-a^2b^2.$$

13) $$(a-b)x+(a+b)y+(a+3b)z=6a^2-5b^2$$
$$(3a+b)x-(2a-b)y+(a-9b)z=a^2-9b^2$$
$$(a+2b)x+(5a+2b)y+(a-5b)z=18a^2+5b^2.$$

14) $$\frac{a+1}{x}+\frac{a-1}{z}=2a(a+1)$$
$$\frac{a-1}{x}+\frac{a+1}{y}=a(a^2+1)-2$$
$$\frac{a-1}{y}-\frac{a+1}{z}=2(a^3-1).$$

15) $$\frac{a}{x}-\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=a^2-b^2+c^2$$
$$\frac{b}{x}-\frac{c}{y}+\frac{a}{z}=b(a+b+c)$$
$$\frac{c}{x}+\frac{a}{y}-\frac{b}{z}=a(a-b+c).$$

16) $$2xy+3yz+5xz=5\tfrac{2}{3}xyz$$
$$3xy+5yz+2xz=7\tfrac{1}{6}xyz$$
$$5xy+2yz+3xz=5\tfrac{1}{2}xyz.$$

17) $$u+x+y+z=a$$
$$u-x-y+z=b$$
$$-u+x+y-z=c$$
$$-u+x-y-z=d.$$

Čemu se rovná v poslední rovnici u, x, y, z, je-li $a = 36$, $b = 4$, $c = -4$ a $d = -26$?

18) Kdosi půjčil na stejná % tři jistiny, dohromady 9400 zl. (m), dostane-li z první jistiny za 3 leta (a) tolik úroků jako z druhé za 4 (b) a z třetí za 5 let (c); jak veliká jest každá jistina?

19) Tři kovy, z nichž v každém jest zlato, stříbro a měď, a sice v prvním v poměru 1 : 2 : 3, v druhém jako 2 : 3 : 4, v třetím jako 3 : 4 : 5, smísí se v kus jeden. V jakém poměru budou ony kovy v tomto kuse a kolik lotů každého kovu jest v 27 lotech směsi?

20) Znám číslo o třech číslicích. Součet jeho číslic jest 12, první číslice v levo jest $\frac{1}{23}$ obou ostatních číslic (co čísla),

a první číslice v pravo jest $^1/_4$ obou ostatních číslic (co čísla). Které jest to číslo?

21) Dvě tělesa pohybují se stejně s bodu A a s bodu B *naproti sobě*, hnuvše se stejným časem. Po 12 sekundách jsou od sebe 17 stop, a po 14 sekundách, minuvše se, opět 17 stop. Kdyby se obě tělesa byla z počátku pohybovala *za sebou*, byla by po 51 sekundách od sebe též 17 stop. Kolik urazilo každé těleso za sekundu a jak daleko bylo z počátku A od B?

22) Nazveme-li v předešlém příkladě 12, 14, 51 sekund vůbec t t' t'' a 17 stop m, jak se vyjádří x, y, z?

23) Znám tři čísla. Dělím-li první do 75 a druhé do 42, jest součet podílů 21, dělím-li první do 75 a třetí do 14, jest součet podílu 22, dělím-li druhé do 56 a třetí do 30, jest součet podílů 23. Která jsou ta čísla?

24) Do kašny teče voda třemi rourami. Kdyby tekla voda pouze rourou A a rourou B, naplnila by se kašna za t (70), rourou A a C za t' (84), a rourou B a C za t'' (140) minut. Kdy by se naplnila kašna ta *každou* rourou, a kdy *všemi třemi*?

V. Neurčité rovnice prvního stupně.

§. 24.

U neurčitých rovnic prvního stupně žádá se obyčejně, aby byly neznámé vždy čísla celá nechť kladná nechť záporná, často také, aby byly pouze čísla celá a kladná. Neurčité rovnice řeší se buď *pomocí shody čísel*, nebo *pomocí zlomků řetězových*.

A. Řešení neurčitých rovnic pomocí shody čísel.

I. *Shoda čísel* záleží v tomto:

1. Každé číslo celé a můžeme vyjádřiti několika-násobným jiného čísla celého m a číslem r, které jest buď 0, 1, 2, 3 . . . $m-1$, t. j.

$$a = mt + r.$$

V takovém rozvedení čísla a říkáme číslu r zbytek čísla a dle *modulu* (při děliteli) m; t jest číslo celé. Na př. $13 = 2 . 5 + 3$, t. j. 3 jest zbytek čísla 13 při modulu (děliteli) 5.

2. *Mají-li dvě čísla a a b dle téhož modulu*, na př. m, *stejné zbytky*, *říkáme, že jsou shodna*. Shoda čísel se poznačuje znaménkem $\equiv$, pročež píšeme

$$a \equiv b \text{ (mod. } m)$$

a čteme: a se shoduje s b při modulu (dle modulu) m. Tak na př. dává

číslo 28 při modulu 9 zbytkem 1, a
„ 37 „ „ 9 „ 1, tedy píšeme
$28 \equiv 37$ (mod. 9).
Podobně se $14 \equiv 39$ (mod. 5).
$19 \equiv -13$ (mod. 8).
(poněvadž jest při modulu 8 zbytek u 19ti 3 a číslu — 13 se do 2 . 8 též 3 nedostávají) atd.

Je-li a násobné b anebo a násobné modulu t. j. $a = cm$, píše se $a \equiv 0$ (mod. m) nebo
$am \equiv 0$ (mod. m).

Promění-li se shoda při *témže* modulu v jinou, netřeba k této modulu připisovati, a naopak není-li modul připsán, rozumí se vždy předcházející.

3. *Každou shodu lze proměniti v rovnici, pakli se k jednomu nebo k druhému dílu jejímu přidá několika-násobné modulu.*

Neboť veškerá čísla, která se při modulu m shodují s číslem b, vyjádřuje výraz

$$b \pm mt$$

(kde t jest číslo celé nechť kladné nechť záporné), poněvadž výraz ten dělený modulem m nedává jiného zbytku nežli jaký dá $b : m$.

Shoduje-li se tedy při mod. m některé číslo na př. a s číslem b, čili

$a \equiv b$ (mod. m),
musí se $a = b \pm mt$, tedy buď
$a = b + mt$, nebo
$a + mt = b$.

Na př. Ze shody $48 \equiv 83$ (mod. 7)
plyne rovnice $48 + 7t = 83$, pro $t = 5$.
Nebo ze shody $28 \equiv 13$ (mod. 15)
plyne rovnice $28 = 13 + 15t$, pro $t = 1$.

Z toho vysvítá naopak. Je-li v některé rovnici jeden díl jednočlen a druhý dvojčlen, mimo to pak jeden člen tohoto násobné kteréhokoli čísla (t), můžeme rovnici tu proměniti ve shodu, kladouce kteréhokoli činitele onoho čísla složitého za modul.

Na př. z rovnice $73 = 45 + 28$ plyne shoda:
$73 \equiv 45$ (mod. 4) a $73 \equiv 45$ (mod. 7), poněvadž $28 = 4 . 7$
$73 \equiv 28$ (mod. 9) a $73 \equiv 28$ (mod. 5), „ $45 = 5 . 9$.

A poněvadž může býti $t = 1$, jest v každé takové rovnici kterýkoli ze sčítanců modulem součtu a sčítance druhého. Na př.

$36 = 7 + 29$,
$36 \equiv 7$ (mod. 29) nebo $36 \equiv 29$ (mod. 7)

4. Z předešlé rovnice $a = b + mt$, plyne

$$\frac{a - b}{m} = t,$$

t. j. *rozdíl dvou čísel, která jsou při modulu m shodná, jest tímto modulem dělitelný.* A proto i naopak: *Je-li rozdíl dvou čísel jiným číslem dělitelný, jsou ona čísla při tomto třetím* (modulu) *shodná.* Na př.

$23 - 13 = 10$, 10 jest dělitelné 2, 5 a 10ti, proto se
$23 \equiv 13$ (mod. 2), nebo $23 \equiv 13$ (mod. 5), nebo $23 \equiv 13$ (mod. 10).

5. *Jsou-li dvě čísla při jakémsi modulu shodná, jsou shodná i při každém jeho děliteli, a jsou-li dvě čísla shodná při několika modulích, jsou i shodná při jejich nejmenším násobném.*

Neboť proměníme-li shodu takovou v rovnici, jest v prvním případě rozdíl shodných čísel dělitelný modulem m, tedy i každým jeho dělitelem, proto jsou i ona čísla při tom kterém děliteli co modulu shodná (dle 4.). Jsou-li v případě druhém ona dvě čísla shodná při modulích m, p, q atd., musí jejich rozdíl býti dělitelný součinem $m \times p \times q \times \ldots$ a proto i nejmenším společným násobným těchto modulů. Na př.

$79 \equiv 58$ (mod. 21), tedy i
$79 \equiv 58$ (mod. 3, neb. mod. 7).
Podobně $161 \equiv 81$ (mod. 4, mod. 5, mod. 10), tedy i
$161 \equiv 81$ (mod. 20), poněvadž jest 20 nejm. sp. n. čísel 4, 5, 10.

6. *Jsou-li dvě čísla a a b, a jiná dvě čísla c a d při témže modulu m shodná,* jest i

$$a + c \equiv b + d \text{ (mod. } m)$$
$$a - c \equiv b - d$$
$$ac \equiv bd.$$

Neboť proměníme-li dané shody
$a \equiv b$ (mod. m)
$c \equiv d$ v rovnici (dle 3.), totiž

$$\left.\begin{array}{l} a = b + mt \\ c = d + mt' \end{array}\right\}$$ dostaneme součtem, rozdílem a součinem

$a + c = b + d + m(t + t')$ čili $a + c \equiv b + d$ (mod. m)
$a - c = b = d + m(t - t')$ „ $a - c \equiv b - d$
$ac = bd + mt''$ „ $ac \equiv bd$,
pakli položíme $dt + bt' + mtt' = t''$.

Poněvadž se každé číslo shoduje se samým sebou, můžeme položiti $c = d$, tedy $c \equiv c$, z čehož pak plyne, že se *shoda neporuší, buď připočteme-li ke každému dílu shody, buď odečteme-li od něho totéž číslo, aneb násobíme-li oba díly shody týmže číslem,* tedy i — 1nicí, mají-li se znaménka obou dílů proměniti v protivná. A poněvadž se může též $a = c$, $b = d$, *můžeme bez porušení shody každý její díl povýšiti na kteroukoli avšak stejnou mocninu,* t. j. je-li

$a \equiv b$ (mod. m), jest i
$a^p \equiv b^p$.

Na př.

$$\begin{array}{rrcl} & 25 & \equiv & 46 \text{ (mod. 7)} \\ & 19 & \equiv & 12 \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \hline \text{jejich součet} & 44 & \equiv & 58 \text{ (mod. 7)} \\ \text{" rozdíl} & 6 & \equiv & 34 \\ \text{" součin} & 475 & \equiv & 552 \\ \text{druhé mocnin.} & 625 & \equiv & 2116 \text{ atd.} \end{array}$$

7. *Shoda se neruší, pakli kterýkoli její díl o kterékoli násobné modulu buď zvětšíme neb zmenšíme.*

Je-li $a \equiv b$ (mod. m)
jest (dle 4.) rozdíl $a - b$ vždy m dělitelný, a proto jest i

$$a \pm cm \equiv b \pm dm \text{ (mod. } m).$$

Neboť $a \pm cm = b \pm dm + mt$, z čehož

$$a \pm cm - (b \pm dm) = mt, \text{ nebo}$$

$$(a - b) \pm m(c - d) = mt.$$

A poněvadž jsou výrazy $a - b$ a $m(c - d)$ dělitelné m, zůstává shoda neporušena.

Položíme-li buď c nebo $d = 0$, jest buď

$$a \equiv b \pm dm, \text{ (mod. } m), \text{ nebo}$$

$$a \pm cm \equiv b.$$

Na př.

$$\begin{array}{rcl} 24 & \equiv & 35 \text{ (mod. 11)} \\ +22 & & \\ \hline 46 & \equiv & 35 \\ -77 & & \\ \hline -31 & \equiv & 35 \\ & & -88 \\ \hline 31 & \equiv & 53 \\ -44, & & +22 \\ \hline -13 & \equiv & 75 \text{ atd.} \end{array}$$

8. Ze shody součinu

$$ap \equiv bp \text{ (mod. } m)$$

plyne shoda $a \equiv b$ (mod. $\frac{m}{a}$),

pak-li a znamená *největší* společnou míru čísel p a m.

Neboť proměníme-li původní shodu v rovnici
$ap = bp + mt$, jest rovnice
$p(a-b) = mt$ dělitelná modulem m, tedy i

$$\frac{p}{a}(a - b) = \frac{m}{a}t.$$

Avšak podíly $\frac{p}{a}$ a $\frac{m}{a}$ jsou prvočísla vespolek, poněvadž jest a *největší* společnou mírou čísel p a m, proto musí rozdíl $a - b$ býti dělitelný podílem $\frac{m}{a}$, aby bylo t číslo celé, jakým býti musí (dle 1.). Je-li $\alpha = 1$, t. j. jsou-li čísla p a m prvočísla vespolek, může se daná shoda číslem p skrátiti při témže modulu. Je-li však $\alpha > 1$, skrátí se shoda číslem p a modul číslem α. Na př.

$$\begin{aligned} 182 &\equiv 56 \quad (\text{mod. } 21), \text{ nebo} \\ 14.13 &\equiv 14.4 \, (\text{mod. } 3.7), \; p = 14, \; \alpha = 7, \text{ tedy} \\ 13 &\equiv 4 \quad (\text{mod. } 3). \\ 306 &\equiv 234 \; (\text{mod. } 12), \text{ nebo} \\ 18.17 &\equiv 18.13 \; (\text{mod. } 6.2), \; p = 18, \; \alpha = 6, \text{ tedy} \\ 17 &\equiv 13 \quad (\text{mod. } 2) \text{ atd.} \end{aligned}$$

9. *Každou shodu lze vyjádřiti čísly kladnými a menšími nežli modul.* Na př.

$29x \equiv 30$ (mod. 9); odečteme-li od 1. dílu $3 . 9x$ a od 2. dílu $3 . 9$, bude se

$2x \equiv 3$.

Nebo $43x \equiv 11$ (mod. 10), odečteme-li od 1. dílu $4 . 10x$ a od 2. dílu $1 . 10$, bude se

$3x \equiv 1$ atd.

O shodách takto upravených říkáme, že mají *nejmenší kladné zbyty* (nikoliv *zbytky*). A nebéře-li se ohled na znaménka obou dílů shody, můžeme každý její díl vyjádřiti číslem, které jest buď polovice aneb menší nežli polovice modulu. Zbytům takovým říkáme *nejmenší zbyty vůbec.* Na př.

$37x \equiv 9$ (mod. 15), odečteme-li od 1. dílu $3 . 15x$ a připočteme-li k 2. dílu $1 . 15$, bude

$-8x \equiv 24$, což děleno -8mi dá

$x \equiv -3$.

10. Abychom ve shodě

$$Ax \equiv B \; (\text{mod. } m)$$

kde A, B, m jsou prvočísla vespolek, odstranili součinitele neznámé x a při tom dostali v druhém dílu číslo celé, upravme ji nejprvé tak, aby obsahovala nejmenší zbyty vůbec (dle 9), a první díl aby byl kladný. Promění-li se za tou příčinou daná shoda na př. ve shodu

$$ax \equiv b \; (\text{mod. } m),$$

kde $m > a$, pracujme dále takto:

Za 1. shodu položme $mx \equiv 0$ (mod. m)

a za 2. shodu „ $\underline{ax \equiv b}$

dělíce $\frac{m}{a}$ dostaneme jakés číslo celé n a zbyt a_1, takže

$$m = an + a_1, \text{ nebo } m - an = a_1.$$

Násobíme-li 2. shodu podílem n, a odečteme-li ji od 1., dostaneme

$$\begin{array}{r} mx \equiv 0 \\ -anx \equiv -bn \\ \hline (m-an)x \equiv -bn, \end{array}$$

je-li $m - an = a_1$, $-bn$ na nejmenší zbyt upraveno $= b_1$, bude 3. shoda $a_1x \equiv b_1$.

Dělíme-li dále součinitele neznámé x v posledních dvou shodách, totiž $\frac{a}{a_1}$, dostaneme opět celé číslo n_1 a zbyt a_2, takže

$$a = a_1n_1 + a_2 \text{ nebo } a - a_1n_1 = a_2.$$

Násobíme-li tedy 3. shodu podílem n_1, a odečteme-li ji od 2., dostaneme

$$\begin{array}{r} ax \equiv b \\ -a_1n_1x \equiv -b_1n_1 \\ \hline (a - a_1n_1)x \equiv b - b_1n_1 \end{array}$$

čili $a - a_1n_1 = a_2$, $b - b_1n_1$ na nejmenší zbyt upraveno $= b_2$, dá 4. shodu $a_2x \equiv b_2$ atd.

Poněvadž jsou čísla m, a, a_1, a_2 atd. kladná, a každé následující menší nežli polovice předcházejícího, bude konečně $a = 1$, tedy poslední shoda na př.

$$x \equiv p \text{ (mod. } m),$$

kde jest x bez součinitele, kladné a p číslo celé. Ze shody té plyne rovnice (dle 2.) $x = mt + p$.

Na př.

$$\begin{array}{rl} & 13x \equiv 17 \text{ (mod. 31)} \\ 1. & 31x \equiv 0 \\ 2. & 13x \equiv 17 \\ \hline \end{array}$$

$^{31}/_{13} = 3$ a zbyt -8, $31 = 39 - 8$, 2. shoda násobena 3mi a odečtěna od 1. dá $(31 - 39)x \equiv -51$, nebo

$8x \equiv 51$, na nejmenší zbyt uvedena, dá

3. $8x \equiv -11$.

Z 2. a 3. shody dá $^{13}/_8$ podíl 2 a zbyt -3.

Násobíme-li 3. shodu 2ma, a odečteme-li ji od 2. shody, dostaneme

$$\begin{array}{l} (13 - 16)x \equiv 17 + 22 \\ -3x \equiv 39, \text{ nebo} \\ 3x \equiv -39, \text{ děleno třemi} \\ x \equiv -13. \end{array}$$

Takto jsme odstranili součinitele veličiny x. Proměníme-li poslední shodu v rovnici, dostaneme

$$x = 31t - 13,$$

kde t jak prvé již podotknuto (v 2.) kterékoli celé číslo, buď kladné buď záporné ano i 0 značiti může.

Je-li $t=0$, jest $x=-13$, což vloženo do 2. sh. dá $-169 \equiv 17$ (mod. 31)
„ $t=1$, „ $x=18$, „ „ „ „ „ $234 \equiv 17$ (mod. 31)
atd.

II. Má-li se rovnice neurčitá o dvou neznámých řešiti pomocí shody, *musejí býti součinitelé obou neznámých prvočísla vespolek*, a nejsou-li, *musí jejich největší mírou společnou i známý člen rovnice býti dělitelný*, tak že po skrácení rovnice onou mírou vyhoví součinitelé uvedené podmínce.

Jsou-li součinitelé obou neznámých prvočísla vespolek, položme menšího součinitele kterékoli neznámé za modul a druhou neznámou se součinitelem větším uveďme ve shodu s číslem známým. Dále pracujme dle předešlého k tomu, aby součinitel neznámé ve shodě $= 1$. Z této shody sestaví se pak rovnice atd.

Na př. $ax + by = c$, jsou-li a, b prvočísla a $a > b$, položme $ax \equiv c$ (mod. b), odstraňme (dle 10.) součinitele a

až bude $x \equiv p$ (mod. b), kde $p \leqq \frac{b}{2}$.

Z této poslední shody sestavme rovnici
$x = bt + p$, což vloženo do rovnice původní dá
$y = -at + q$, kde $q = \frac{c - ap}{b}$.

Na př. a) $47x - 31y = 29$
$47x \equiv 29$ (mod. 31)
$16x \equiv -2$
$8x \equiv -1$
$8x \equiv -32$
$x \equiv -4 \equiv 27$, z čehož
($x = 31t - 4$ a $y = 47t - 7$)
$x = 31t + 27$, $y = 47t + 40$.

Mají-li býti neznámá čísla kladná, položme
$t = 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ldots$
pak jest $x = 27, \ 58, \ 89, \ 120 \ldots$
$y = 40, \ 87, \ 134, \ 181 \ldots$

Kdyby měly býti neznámé čísla záporná, položme $t = -1, -2, -3$ atd.

b) $17x - 43y = 11$
$-43y \equiv 11$ (mod. 17)
$8y \equiv 28$
$2y \equiv 7 \equiv 24$
$y \equiv 12 \equiv -5$.
$y = 17t - 5$ a $x = 43t - 12$.

Je-li $t = 1, \ 2, \ 3, \ldots$
jest $x = 31, \ 74, \ 117 \ldots$
a $y = 12, \ 29, \ 46 \ldots$

Může-li býti x a y záporné, položme $t = 0, -1, -2$, atd.

c) Číslo 360 má se rozděliti na dvě čísla, tak aby jedno 7mi a druhé 19ti bylo dělitelné. Která jsou ta čísla?

$$\begin{aligned} 7x + 19y &= 360 \\ 19y &\equiv 360 \pmod{7} \\ -2y &\equiv 3 \\ 5y &\equiv 10 \\ y &\equiv 2 \end{aligned}$$

$y = 7t + 2$ a $x = 46 - 19t$. Úloze té se vyhoví, dokud $46 > 19t$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Je-li} & t = 0,\ 1,\ 2, \\ \text{jest} & x = 46, 27,\ 8, \\ \text{a} & y = 2,\ 9,\ 16, \end{array}\right\} \text{a } 360 = 322 + 38 = 189 + 171 = 56 + 304.$$

d) Zlomek $\frac{231}{1007}$ má se rozvrhnouti na rozdíl dvou zlomků vůbec, z nichž jeden má jmenovatele 19 a druhý 53.

$$\begin{aligned} \frac{x}{19} - \frac{y}{53} &= \frac{231}{1007} \\ 53x - 19y &= 231 \\ 53x &\equiv 231 \pmod{19} \\ -4x &\equiv -16 \\ x &\equiv 4. \end{aligned}$$

$$x = 19t + 4 \text{ a } y = 53t - 1.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pro} & t = 1,\ 2,\ 3, \ldots \\ & x = 23,\ 42,\ 61 \ldots \\ & y = 52,\ 105,\ 158 \ldots \end{array}\right\} \frac{231}{1000} = \frac{23}{19} - \frac{52}{53} = \frac{42}{19} - \frac{105}{52} = \text{atd.}$$

e) Která čísla dělená 13ti dají 5 a dělená 17ti 13 k zbytku?

$$\begin{aligned} 13x + 5 &= 17y + 13 \\ 13x - 17y &= 8 \\ -17y &\equiv 8 \pmod{13} \text{ atd.} \end{aligned}$$

$$x = 17t - 2, \quad y = 13t - 2.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Je-li} & t = 1,\ 2 \ldots \\ \text{jest} & x = 15,\ 32 \ldots \\ \text{a} & y = 11,\ 24 \ldots \end{array} \quad \text{a žádaná čísla jsou 200, 421, atd.}$$

Poznamenání. Rovnice, ve kterých součinitelé neznámých mají společnou míru, již známý člen dělitelný není, nelze řešiti, tak aby hodnoty neznámých byly celá čísla,

na př. $6x + 9y = 7$ a podobné (srovnej 8.).

III. Je-li n rovnic s $n + 1$ neznámými, vylučuje se jedna neznámá po druhé tak dlouho, až se přijde na rovnici *se dvěma neznámýma*, která se řeší jako předešlé. Na př.

$$1.\quad x + y + z = 61.$$

$$2.\quad \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 11$$

2. rovnice upravená: $35x + 21y + 15z = 1155$

1. rov. 15 nás. se odečte $-15x - 15y - 15z = -915$

$$20x + 6y = 240 \text{ nebo}$$

$$10x + 3y = 120 \text{ atd.}$$

$$x = 3t,\ y = 10(4-t),\ z = 7(t+3).$$

Je-li $t = 1,\ 2,\ 3\ \ldots.$

jest $x = 3,\ 6,\ 9\ \ldots.$

$y = 30,\ 20,\ 10\ \ldots.$

$z = 28,\ 35,\ 42\ \ldots.$

IV. Má-li jediná rovnice *tři neznámé*, jako

$$ax + by + cz = m,$$

béřeme k tomu zřetel, jsou-li buď

a) *všichni součinitelé prvočísla vespolek*, nebo

b) *mají-li součinitelé buď po dvou aneb alespoň dva z nich společnou míru.*

V prvním případě dává se takové rovnici podoba

$$ax + by = m - cz,$$

z které pak pro $a > b$ sestaví se shoda

$$ax \equiv m - cz \text{ (mod. } b.),$$

kde z může býti kterékoli číslo celé. Na př.

$$12x - 17y + 5z = 6$$

$$12x - 17y = 6 - 5z$$

$$-17y \equiv 6 - 5z \text{ (mod. 12.)}$$

$$-5y \equiv 30 - 5z$$

$$y \equiv -6 + z, \text{ tedy}$$

$$y = 12t + z - 6,\ x = 17t + z - 8.$$

Je-li $z = 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4\ \ldots.$

a $t = 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 3\ \ldots.$

jest $x = 10,\ 27,\ 11,\ 45,\ 47\ \ldots.$

$y = 7,\ 19,\ 8,\ 32,\ 34\ \ldots.$

V druhém případě udělejme největší společnou míru dvou součinitelů modulem, položme třetí neznámou (jejíž součinitel míry té nemá) do shody s členem známým, a určeme její hodnotu. Tato se dosadí do rovnice původní, nová rovnice se skrátí onou mírou, a pracuje se jako prvé. Na př.

$$12x + 15y + 25z = 174$$

$$12x \equiv 174 \text{ (mod. 5)}$$

$$2x \equiv 4$$

$$x \equiv 2$$

$x = 5t + 2$, vloženo do rovnice původní dá

$$\begin{aligned} 12(5t + 2) + 15y + 25z &= 174 \\ 12t + 3y + 5z &= 30 \\ 3y + 5z + 30 &- 12t \\ 5z &\equiv 30 - 12t \text{ (mod. 3.)} \\ z &\equiv 0 \end{aligned}$$

$z = 3u$, $y = 10 - 4t - 5u$, kde u jest celé číslo jakékoliv, jako t.

Je-li $t = 0,\ 0,\ 1 \ldots.$
a $u = 1,\ 2,\ 1 \ldots.$
jest $x = 2,\ 2,\ 7 \ldots.$
$y = 5,\ 0,\ 1 \ldots.$
$z = 3,\ 6,\ 3 \ldots.$

B. Řešení neurčitých rovnic pomocí řetězců.

1. Má-li se *neurčitá rovnice o dvou neznámých* podoby

$$ax - by = c$$

řešiti pomocí *řetězce*, a jsou-li a, b, c prvočísla vespolek, proměňme podíl $\frac{a}{b}$ v řetězec a určeme jeho předposlední sbližný zlomek na př. $\frac{p}{p'}$.

Je-li $\frac{p}{p'}$ na místě *sudém*, jest

$$x = bt + cp', \quad \text{a} \quad y = at + cp;$$

je-li však $\frac{p}{p'}$ na místě *lichém*, jest

$$x = bt - cp', \quad \text{a} \quad y = at - cp;$$

kde t znamená, jako prvé, kterékoli číslo celé.

Neboť je-li $\frac{p}{p'}$ předposlední, tedy $\frac{a}{b}$ poslední sbližný zlomek, jest vůbec

$$\frac{p}{p'} - \frac{a}{b} = \frac{bp - ap'}{bp'} = \frac{\pm 1}{bp'}, \text{ tedy}$$

$$bp - ap' = \pm 1.$$

Je-li tedy $\frac{p}{p'}$ na místě *sudém*, jest $\frac{p}{p'} < \frac{a}{b}$ nebo

$$\begin{array}{rl} bp - ap' = -1, & \text{násobeno } c \text{ dá} \\ bcp - acp' = -c, & \text{tato rovnice odečtěna od stejniny} \\ abt = abt & \text{dá} \\ \hline a(bt + cp') - b(at + cp) = c, & \text{poněvadž jest však i} \\ ax - by \qquad = c, & \text{jest} \\ \hline \text{a)} \quad x = bt + cp' & \text{b)} \ y = at + cp. \end{array}$$

Je-li však $\frac{p}{p'}$ na místě *lichém*, jest $\frac{p}{p'} > \frac{a}{b}$, nebo
$bp - ap' = +1$, násobeno c
$bcp - acp' = c$, odečteme-li od této rovnice stejninu
$\underline{abt = abt}$, bude
$a(bt - cp') - b(at - cp) = c$, porovnáme-li ji s rovnicí původní, jest c) $x = bt - cp'$ a d) $y = at - cp$.

2. Má-li původní rovnice podobu

$$ax + by = c,$$

položme $y = -z$, čímž dostaneme

$$ax - bz = c,$$

kterou rovnici řešíme ohledně x a z jako prvé. Dosadíme-li pak y místo $-z$, dostaneme

je-li $\frac{p}{p'}$ na místě *sudém* e) $x = bt + cp'$, f) $y = -at - cp$;

je-li $\frac{p}{p'}$ na místě *lichém*, j) $x = bt - cp'$, h) $y = -at + cp$.

Kdyby byl známý člen c v kterémkoli případě *záporný*, položili bychom v příslušné hodnotě neznámých $-c$ místo c.

Na př. a) $17x - 48y = 3$

$\frac{17}{48}$ proměněno v řetězec, dá jmenovatele členů řetězce 2, 1, 4, 1, 2,

sbližné zlomky jsou $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{6}{17}$, $\frac{17}{48}$, tedy

$\frac{p}{p'} = \frac{6}{17}$ na místě *sudém*, proto

$p = 6$, $p' = 17$, $a = 17$, $b = 48$, $c = 3$, a dle a) a b)
$x = 48t + 3.17 = 48t + 51$, $y = 17t + 3.6 = 17t + 18$.

Mají-li x a y býti kladné, položme
$t = -1,\ 0,\ 1,\ 2\ldots$
pak jest $x = 3,\ 51,\ 99,\ 147\ldots$
a $y = 1,\ 18,\ 35,\ 52\ldots$
Pro $t = -2, -3$ atd. bylo by x a y záporné.

b) $8x - 11y = 17$

$\frac{8}{11}$ dá jmenovatele členů řetězce 1, 2, 1, 2 a sbližné zlomky

$\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{11}$, tedy

$\frac{p}{p'} = \frac{3}{4}$ na místě *lichém*, proto

$p = 3$, $p' = 4$, $a = 8$, $b = 11$, $c = 17$, a dle c) a d)
$x = 11t - 68$, $y = 8t - 51$.

Aby byly x a y kladné, položme

$$t = 7,\ 8,\ 9\ \ldots\ldots$$

pak se $\quad x = 9,\ 20,\ 31\ \ldots\ldots$

a $\quad y = 5,\ 13,\ 21\ \ldots\ldots$

c) $\quad 5x + 9y = 90$

$\frac{5}{9}$ má sbližné zlomky $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{p}{p'} = \frac{1}{2}$ na místě sudém, tedy

$$p = 1,\ p' = 2,\ a = 5,\ b = 9,\ c = 90,$$ a dle e) a f)

$$x = 9t + 180, \quad y = -5t - 90.$$

Mají-li býti x a y kladné, má t pouze tyto tři hodnoty:

$$t = -18, -19, -20.$$

pak se $\quad x = 18,\ 9,\ 0.$

a $\quad y = 0,\ 5,\ 10.$

Je-li při n neznámých $n - 1$ rovnic, přivedou se tyto jako prvé na jedinou rovnici o dvou neznámých, která se řeší jako už pověděno. Je-li dána rovnice o třech neznámých, jichž součinitelé jsou prvočísla vespolek, převede se kterákoli neznámá do druhého dílu rovnice a dosadí se za ni kterékoli číslo celé (kladné), čímž se promění v rovnici o dvou neznámých. Mají-li součinitelé *dvou* neznámých společnou míru, převede se třetí neznámá, jejíž součinitel oné míry nemá, do druhého dílu rovnice a pracuje se jako v případě třetím (A). Ona třetí neznámá má tedy podmínečné hodnoty podoby $mu + n$.

Příklady.

1) $3x + 5y = 46.$ 2) $2x + 3y = 17.$ 3) $5x - 7y = 13.$

4) $10x - 3y = -43.$ 5) $421x - 972y = -1.$ 6) $14x + 63y = 35.$

7) $\frac{x}{9} + \frac{y}{13} = \frac{100}{117}.$ 8) $5x + 11y = 258.$ 9) $\frac{x}{11} - \frac{y}{41} = \frac{375}{902}.$

10) $x + y + z = 360$
$3x + 4y + 5z = 12.$

11) $3x - 7y - 2z = 17$
$2x + 3y + 7z = 19.$

12) ${}^{x}/_{2} + {}^{y}/_{3} + {}^{z}/_{11} = 10$
${}^{x}/_{6} + {}^{y}/_{3} + {}^{z}/_{2} = 15.$

13) $2x + 5y - 3z = 27$
${}^{x}/_{5} - {}^{y}/_{7} + {}^{z}/_{4} = 9.$

14) $5x + 7y + 8z = 59.$

15) ${}^{x}/_{2} + {}^{y}/_{3} + {}^{z}/_{13} = 10.$

16) $21x - 14y + z = 8.$

17) $33x + 5y - 22z = 124.$

18) $16x + 10y + 15z + 77.$

19) $35x + 14y - 25z = 13.$

20) $15x - 12y + 7z = 91.$

21) Dvojnásobné číslo jakés připočtěno k 5tinásobnému číslu jinému dá součtem 43. Která jsou to čísla?

22) 6tinásobné jakés číslo odečtěno od 7minásobného čísla jiného dá rozdílem 53. Která jsou ta čísla?

23) Číslo 25 má se rozvesti na dvě jiná čísla, z nichž jedno 2ma a druhé 3mi jest dělitelné. Která jsou ta čísla?

24) Zlomek $^{53}/_{60}$ má se rozvesti na součet dvou jiných zlomků s jmenovateli 10 a 12. Které jsou ty zlomky?

25) Hodinář má dva druhy hodinek. Jednoho druhu prodává kus po 19 zl., a druhého druhu po 10 zl. Utržil-li by za všechny hodinky prvního druhu o 25 zl. více nežli za všechny druhu druhého, kolik hodinek má každého druhu?

26) Která čísla dělená 13ti dají zbytkem 10, a která dělená 17 dají zbytkem 1?

27) Rozděl číslo 9 na tři díly, tak aby součet dvojnásobného dílu prvního, 5tinásobného dílu druhého a 17tinásobného dílu třetího byl 39. Které jsou ty díly?

28) Rozděl číslo 52 na tři sčítance, tak aby polovice prvního, třetina druhého a pětina třetího sčítance daly součtem 16. Kteří jsou ti sčítanci?

29) Kupec má trojí zboží. Libru jednoho prodává za 10, druhého za 15 a třetího za 17 krejcarů. Kolik liber každého druhu má, utrží-li za vše 149 zl.?

30) Kupec má trojí zboží. Libru jednoho prodává za 16, druhého za 28 a třetího za 49 kr. Utrží-li zaň celkem 188 zl., kolik liber má každého druhu?

Časť štvrtá.

I. Mocniny.

§. 25.

a) *Mocniny jednočlenů.*

Na základě toho, co v §. 3. a jinde o mocninách bylo pověděno, opakujeme pro snadnější přehled toto:

1. *Číslo na mocninu jakousi povýšiti* znamená, je tolikrát samo sebou násobiti, kolik jedností drží mocnitel. Na př.

$$a^m = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \ldots m\text{krát.}$$

Dle toho jest $1^m = 1$, a $0^m = 0$.

Je-li $a = b$, jest samozřejmo, že se $a^m = b^m$, t. j. *oba díly rovnice lze povýšiti na tutouž mocninu.*

2. *Mocniny stejných mocněnců se násobí*, napíše-li se mocněnec jednou a sečtou-li se mocnitelé. Na př.

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$$

$$(a^{3m+n} - a^{2m-3n}) \,.\, (a^{2m+3n} - a^{m-4n}) =$$
$$a^{5m+4n} - a^{4m} - a^{4m-3n} + a^{3m-7n}.$$

3. *Mocniny stejných mocněnců se dělí*, napíšeme-li mocněnce jednou, a odečteme-li mocnitele dělitele od mocnitele dělence. Na př.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

$$(a^{3m-4n} - a^{5m+3n} + a^{4m-5n}) : a^{2m-3n} =$$
$$a^{3m-4n-(2m-3n)} - a^{5m+3n-(2m-3n)} + a^{4m-5n-(2m-3n)} =$$
$$a^{m-n} - a^{3m+6n} + a^{2m-2n}.$$

$$\begin{array}{l}
(a^{5m-n} + 2a^{4m-3n} + a^{3m-5n}) : (a^{3m-2n} + a^{2m-4n}) = a^{2m+n} + a^{m-n}\\
\underline{\underset{-}{a^{5m-n}} \underset{-}{+} a^{4m-3n}\qquad\qquad}\\
\quad „ \qquad a^{4m-3n} + a^{3m-5n}\\
\qquad\qquad \underline{\underset{-}{a^{4m-3n}} \underset{-}{+} a^{3m-5n}}\\
\qquad\qquad\quad „ \qquad\quad „
\end{array}$$

Z dělení mocnin stejných mocněnců plyne:

$$a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1,$$

$$\begin{array}{l} 0^0 = 0^{m-m} = 0^m : 0^m = \frac{0}{0} = z, \\ \infty^0 = \infty^{m-m} = \infty^m : \infty^m = \frac{\infty}{\infty} = z \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{t. j. jakémusi číslu, které jest} \\ \text{po případě určité.} \end{array} \right.$$

K tomu přidáváme:

4. *Mocniny stejných mocnitelů se násobí*, povýší-li se *součin mocněnců* na udanou mocninu. Na př.

$$a^m \,.\, b^m = (ab)^m.$$

Neboť

$$\left. \begin{array}{l} a^m = a\,.\,a\,.\,a\,.\,a \ldots . \mathit{mkrát} \\ b^m = b\,.\,b\,.\,b\,.\,b \ldots \mathit{mkrát} \end{array} \right\} \text{součin}$$

$$\begin{aligned} a^m \,.\, b^m &= a\,.\,a\,.\,a\,.\,a \ldots . \mathit{mkrát} \times b\,.\,b\,.\,b\,.\,b \ldots . \mathit{mkrát} \text{ nebo (§. 2. 3)} \\ &= ab\,.\,ab\,.\,ab\,.\,ab \ldots . \mathit{mkrát} = (ab)^m. \end{aligned}$$

A tedy i naopak, má-li se součin na jakousi mocninu povýšiti, povýší se na ni každý činitel (§. 3.) na př. $(2a)^2 = 4a^2$, $(3ab)^3 = 27a^3b^3$ atd.

Dle toho jest

$$(+a)^m = [a\,.\,(+1)]^m = a^m\,.\,(+1)^m = a^m.$$

t. j. je-li *mocněnec kladný*, jest jeho *mtá* mocnina, nechť jest m jakékoli číslo celé, *kladná*.

Dále se $(-a)^m = [a\,.\,(-1)]^m = a^m\,.\,(-1)^m$.

Z výsledku toho poznáváme, že se, je-li m číslo sudé, tedy $m = 2n$, výraz

$$(-1)^m = (-1)^{2n} = +1, \text{ a } (-a)^m = (-a)^{2n} = +a^{2n};$$

je-li však m liché, tedy $m = 2n + 1$, že jest

$$(-1)^m = (-1)^{2n+1} = -1, \text{ a } (-a)^m = (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Z těchto příčin můžeme vůbec říci

$$(\pm a)^{2n} = +a^{2n},$$

t. j. *při sudém mocniteli jest mocnina vždy kladná, nechť jest mocněnec kladný neb záporný*, avšak

$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1},$$

t. j. *při lichém mocniteli jest mocnina kladná, je-li mocněnec kladný, a záporná, je-li mocněnec záporný.*

Proto jest $(\pm a)^2 = a^2$, $(+a)^3 = a^3$, $(-a)^3 = -a^3$ atd.

5. *Mocniny stejných mocnitelů se dělí*, povýšíme-li podíl mocněnců na udanou mocninu. Na př.

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

Neboť

$$\left. \begin{array}{l} a^m = a\,.\,a\,.\,a\,.\,a \ldots . \mathit{mkrát} \\ b^m = b\,.\,b\,.\,b\,.\,b \ldots . \mathit{mkrát} \end{array} \right\} \text{podíl}$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots . \mathit{mkrát} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

A tedy i naopak, má-li se zlomek povýšiti na některou mocninu, povýší se na ni čitatel i jmenovatel. Na př.

$$\left(\frac{2a}{3b}\right)^2 = \frac{4a^2}{9b^2}, \quad \left(\frac{3ab}{5cde}\right)^3 = \frac{27a^3b^3}{125c^3d^3e^3}.$$

Proto se také, jak už prvé (§. 11. 12) jinak bylo dokázáno,

$$a^{-m} = a^{0-m} = a^0 : a^m = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m.$$

A z rovnice $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ dostaneme pomocí převratných hodnot (§. 11. 9)

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

Tedy i $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m.$

6. *Mocnina se umocňuje*, napíše-li se mocněnec jednou, a násobí-li se mocnitelé. Na př.

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m.$$

Neboť $(a^m)^n = a^m . a^m . a^m . a^m \ldots n\text{krát} =$
$= a^{m+m+m+m \ldots n\text{krát}} = a^{mn}.$

Podobně $(a^n)^m = a^{n+n+n+n \ldots m\text{krát}} = a^{mn}.$

Dle toho jest $(a^3)^4 = a^{12} = (a^4)^3.$

$$(a^m)^2 = (a^2)^m = a^{2m},\ (a^5)^m = a^{5m}.$$
$$(a^{-m})^n = a^{-mn},\ (a^{-m})^{-n} = a^{mn}.$$
$$(a^{2x+3y})^{2xy} = a^{4x^2y+6xy^2},\ (a^3b^5)^2 = a^6b^{10}.$$
$$(5a^3b^2)^4 = 5^4a^{12}b^8,\ (a^mb^n)^p = a^{mp} . b^{np},$$
$$[(2a^2b^3)^{x-y}]^{(x+y)} = (2a^2b^3)^{x^2-y^2} = 2^{x^2-y^2} . a^{2(x^2-y)^2}b^{3(x^2-y^2)}.$$
$$[a^{m+n} . b^{m-n}]^{(2m-3n)} = a^{2m^2-mn-3n^2} . b^{2m^2-5mn+3n^2}$$ atd.

b) Druhá mocnina vícečlenů.

1. Číslo vůbec se zdvojmocní, násobí-li se samo sebou. Proto se i druhá mocnina dvojčlenu

$$(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

t. j. *druhá mocnina dvojčlenu rovná se druhé mocnině členu prvního, dvojnásobnému součinu členu prvního druhým a druhé mocnině členu druhého.*

Tedy $(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a) . (3b) + (3b)^2$
$= 4a^2 + 12ab + 9b^2.$

$$(3a + 7b)^2 = 9a^2 + 42ab + 49b^2.$$
$$(2x + {}^1/x)^2 = 4x^2 + 4 + {}^1/_{x^2}.$$
$$\left(\frac{ax}{b} + \frac{by}{c}\right)^2 = \frac{a^2x^2}{b^2} + \frac{2axy}{c} + \frac{b^2y^2}{c^2}.$$

Je-li některý člen dvojčlenu *záporný*, jest první jeho mocnina záporná a druhá kladná. Na př.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$
$$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4.$$
$$(2a^3 - 5b^4)^2 = 4a^6 - 20a^3b^4 + 25b^8.$$
$$\left(\frac{3a^2b^3}{4c^4} - 1\right)^2 = \frac{9a^4b^6}{16c^8} - 1^1/_2\,\frac{a^2b^3}{c^4} + 1.$$

2. Má-li se *trojčlen* $a + b + c$ zdvojmocniti, považujme dva členy za jeden na př. $a + b = A$, a zdvojmocnivše tento dvojčlen, položme do výsledku opět $A = a + b$ a řešme závorky. Na př.

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (A + c)^2 = A^2 + 2Ac + c^2,\ A = a + b,\\ &= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.\end{aligned}$$

t. j. *druhá mocnina trojčlenu se rovná druhé mocnině každého členu* ($a^2 + b^2 + c^2$) *a dvojnásobnému součinu členu prvního druhým, prvního třetím a druhého třetím.* Tedy

$$(2a+3b+7c)^2 = 4a^2+9b^2+49c^2+12ab+28ac+42bc.$$

Je-li některý člen záporný, jest jeho první mocnina záporná a druhá kladná. Na př.

$(x-y-z)^2=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz.$

$(1-3a+5a^2)^2=1+9a^2+25a^4-6a+10a^2-30a^3.$

$(5a^2b^3-3a^3c^4-b^4c^3)^2$

$=25a^4b^6+9a^6{}^8+b^8c^6-30a^5b^3c^4-10a^2b^7c^3+6a^3b^4c^7.$

$$\left(\frac{2a^2b^3}{3cd^4}-\frac{3a^5c^3}{4b^2d^3}+\frac{4b^2d}{5a^3c^2}\right)^2$$

$$= \frac{4a^4b^6}{9c^2d^8}+\frac{9a^{10}c^6}{16b^4d^6}+\frac{16b^4d^2}{25a^6c^4}-\frac{a^7bc^2}{d^7}+1^1/_{15}\frac{b^5}{ac^3d^3}-1^1/_5\frac{a^2c}{d^2}.$$

3. Má-li se *čtyřčlen* $a + b + c + d$ povýšiti na druhou mocninu, položme $a + b + c = A$, umocněme tento dvojčlen, a dosadivše hodnotu A řešme závorky. Na př.

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 &= (A+d)^2 = A^2+2Ad+d^2\\ &= (a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2\\ &= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc\\ &\quad +2bd+2cd,\end{aligned}$$

t. j. *druhá mocnina čtyřčlenu rovná se druhé mocnině každého členu, dvojnásobnému součinu prvního členu druhým, třetím, čtvrtým, dvojnásobnému součinu druhého členu třetím, čtvrtým, a dvojnásobnému součinu třetího členu čtvrtým.*

Dle toho se rovná druhá mocnina n-členu druhé mocnině každého členu, a dvojnásobnému součinu vždy dvou členů, tedy dvojnásobnému členu prvnímu každým z následujících, dvojnásobnému členu druhému každým z následujících atd. Je-li některý člen záporný, jest, jak prvé povědíno, jeho první mocnina záporná a druhá kladná; znaménka ostatních členů mocniny záležejí na znaménkách vždy dvou členů mocněnce. Na př.

$(2a + 3b - c - 2d + 5e - \ldots)^2 = 4a^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 + 25e^2$
$+ \ldots + 12ab - 4ac - 8ad + 20ae - \ldots - 6bc - 12bd + 30be - \ldots$
$+ 4cd - 10ce + \ldots - 20de + \ldots$

4. Každé *dekadické číslo* lze rozvesti na několikačlen dle mocniny čísla 10, na př.

$$N = a\,.\,10^3 + b\,.\,10^2 + c\,.\,10 + d.$$

Má-li se číslo to zdvojmocniti, učiňme tak v následujícím pořádku:

$$N^2 = a^2.10^6 + 2ab.10^5 + b^2.10^4 + 2(a.10 + b)c.10^3 + c^2.10^2 + 2(a.10^2 + b.10 + c)d.10 + d^2$$

t. j. povyšme číslici na nejvyšším místě na druhou mocninu, tutouž číslici zdvojnásobenou veďme do číslice na místě nejblíže nižším, druhou tuto číslici zdvojmocněme, obě ony číslice (co číslo) zdvojnásobené veďme do číslice na místě nejblíže nižším, tuto třetí číslici zdvojmocněme, veďme všechny ony tři číslice (co číslo) zdvojnásobené do číslice na místě nejblíže nižším atd. Částečné součiny pišme pod sebe, tak aby jednotky každého součinu byly o jedno místo dále v pravo. Na př.

$$\begin{array}{rrl}
357^2 = & 3^2 = & 9. \\
& 2.3.5 = & 30. \\
& 5^2 = & 25. \\
& 2.35.7 = & 490. \\
& 7^2 = & 49 \\
\hline
& & 127449.
\end{array}$$

Je-li dané číslo desetinný zlomek, nebeřme při povyšování žádného ohledu na bod desetinný, v mocnině však oddělme od pravé k levé dvakrát tolik míst bodem desetinným, kolik jich má mocněnec. Na př.

$$\begin{array}{rrl}
73{\cdot}51^2 = & 7^2 = & 49. \\
& 14.3 = & 42. \\
& 3^2 = & 9. \\
& 146.5 = & 730. \\
& 5^2 = & 25. \\
& 1470.1 = & 1470. \\
& 1^2 = & 1 \\
\hline
& & 5403{\cdot}7201.
\end{array}$$

Dodatek. Druhá mocnina čísla o *jedné* cifře jest buď *jedno*- neb *dvouciferná* ($1^2 = 1$, $2^2 = 4 \ldots 9^2 = 81$), druhá mocnina čísla o dvou cifrách jest buď tři- neb čtyřciferná ($10^2 = 100 \ldots 99^2 = 9801$) atd., tedy všeobecně jest druhá mocnina čísla o n cifrách buď $(2n-1)$- nebo $2n$-ciferná. Je-li tedy dán čtverec nějakého čísla, a chceme-li věděti o kolika cifrách jest jeho mocněnec, rozdělme číslo to na třídy o dvou cifrách od pravé k levé, nejvyšší třída může míti i jednu cifru, a na kolik takových tříd onen čtverec rozdělíme, o tolika cifrách jest jeho mocněnec.

c) *Třetí mocnina vícečlenů.*

1. Každá veličina se ztrojmocní, násobí-li se třikrát sama sebou. Na př.

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2 . (a+b) \\
&= (a^2+2ab+b^2) . (a+b) \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \text{ nebo} \\
&= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2,
\end{aligned}$$

t. j. *třetí mocnina dvojčlenu rovná se třetí mocnině každého členu, trojnásobnému čtverci členu prvního druhým a trojnásobnému čtverci členu druhého prvním.*

Je-li některý člen záporný, jest jeho lichá (první a třetí) mocnina záporná a sudá (druhá) kladná (a. 4). Na př.

$$
\begin{aligned}
(2a+5b)^3 &= (2a)^3+(5b)^3+3(2a)^2 . (5b)+3(2a) . (5b)^2 \\
&= 8a^3+125b^3+60a^2b+150ab^2. \\
(3a-1)^3 &= 27a^3-1-27a^2+9a. \\
({}^1/_2a^2-{}^3/_5b^3)^3 &= {}^1/_8a^6-{}^{27}/_{125}b^9-{}^9/_{20}a^4b^3+{}^{27}/_{50}a^2b^6.
\end{aligned}
$$

2. Má-li se *trojčlen* $a+b+c$ ztrojmocniti, položme dva členy na př. $a+b=A$, a pracujme jako prvé. Tedy

$$(a+b+c)^3=(A+c)^3=A^3+c^3+3A^2c+3Ac^2,$$

dosadíme-li $A=a+b$, bude $=(a+b)^3+c^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2$ $=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2+3bc^2+6abc,$

t. j. *třetí mocnina trojčlenu rovná se třetí mocnině každého členu, trojnásobnému čtverci členu prvního druhým a třetím, členu druhého prvním a třetím, členu třetího prvním a druhým a 6tinásobnému součinu všech tří členů.* Na př.

$$
\begin{gathered}
(2a+3b-c)^3 \\
=8a^3+27b^3-c^3+36a^2b-12a^2c+54ab^2-27b^2c+6ac^2+9bc^2-36abc. \\
({}^1/_2x-{}^1/_3y+{}^1/_4z)^3 \\
={}^1/_8x^3-{}^1/_{27}y^3+{}^1/_{64}z^3-{}^1/_4x^2y+{}^3/_{16}x^2z+{}^1/_6xy^2+{}^1/_{12}y^2z \\
+{}^3/_{32}xz^2-{}^1/_{16}yz^2-{}^1/_4xyz. \\
(3x^2-2xy-5y^2)^3 \\
=27x^6-54x^5y-99x^4y^2+172x^3y^3+165x^2y^4-150xy^5-125y^6.
\end{gathered}
$$

3. Dle ztrojmocnění dvoj- a trojčlenu vyvineme snadně vzorec všeobecný pro ztrojmocnění n-členu, seřadíme-li jednotlivé členy dle mocniny $a, b, c \ldots .$ takto:

$$
(a+b+c+d+\ldots)^3=
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r} a^3 \\ +3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}\right\}=(a+b)^3 \\
+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3
\end{array}\right\}=(a+b+c)^3 \\
+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3
\end{array}\right\}=(a+b+c+d)^3 \\
+\text{ atd.}
\end{array}
$$

4. Má-li se *dekadické číslo* povýšiti na třetí mocninu, pracujme dle předešlého všeobecného vzorce (3.) Na př.

$$
\begin{aligned}
N &= a . 10^3+b . 10^2+c . 10+d \\
N^3 &= a^3 . 10^9+3a^2b . 10^8+3ab^2 . 10^7+b^3 . 10^6 \\
&\quad +3(a . 10+b)^2c . 10^5+3(a . 10+b)c^2 . 10^4+c^3 . 10^3 \\
&\quad +3(a . 10^2+b . 10+c)^2d . 10^2+3(a . 10^2+b . 10+c)d^2 . 10+d^3.
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{rrr} 235^3 = 2^3 & = & 8\,. \\ 12.3 & = & 36\,. \\ 27.2 & = & 54\,. \\ 3^3 & = & 27\,. \\ 23^2.3.5 & = & 7935\,. \\ 23.3.5^2 & = & 1725\,. \\ 5^3 & = & 125 \\ \hline & & 12977875. \end{array}$$

Dodatek 1. Třetí mocnina čísla o 1 cifře jest buď jedno-, dvou- neb tříciferná; třetí mocnina čísla o dvou cifrách jest buď čtyř-, pěti- neb šesticiferná, tedy vůbec třetí mocnina čísla o n cifrách jest nejvýše $3n$- a nejméně $(3n-2)$-ciferná. Rozvrhneme-li tedy třetí mocninu kteréhokoli čísla na třídy o třech cifrách od pravé k levé, z nichž poslední třída i dvou- i jednociferná býti může, bude mocněnec té mocniny o tolika cifrách, na kolik tříd jsme ji rozdělili.

Dodatek 2. Má-li se dvoj- neb víceělen povýšiti na mocninu vyšší nežli třetí, rozvrhněme si mocnitele na sčítance 2 a 3, a násobme tyto mocniny vespolek řešivše prvé závorky. Na př.

$(a+b+c+\ldots)^4 = (a+b+c+\ldots)^2 \,.\, (a+b+c+\ldots)^2 =$ atd.

$(a+b+c+\ldots)^5 = (a+b+c+\ldots)^3 \,.\, (a+b+c+\ldots)^2 =$ atd.

Příklady.

1. Násobte:

1) $a^{13} \,.\, a^{15}$. 2) $a^{12} \,.\, a^7 \,.\, b^{13} \,.\, b^6$. 3) $a^x \,.\, a$. 4) $a^{x-1} \,.\, a$.
5) $a \,.\, a^{x-2} \,.\, a$. 6) $a \,.\, a^m \,.\, a^{2m} \,.\, b^{3m} \,.\, b^2$. 7) $a^{2m-n} \,.\, a^{2n} \,.\, b^{m-3n} \,.\, b^{2n}$.
8) $(a^{2x+3y} + b^{2x-y}) \,.\, (a^{2y-3x} - b^{x+2y})$.
9) $(a^{x-y} + b^{x+y}) \,.\, (a^{x-y} - b^{x+y})$.
10) $(a^{3m-n} + a^{2m+n} + a^{m-2n}) \,.\, (a^m - a^{-3n})$.

2. Dělte:

1) $a^{15} : a^{11}$. 2) $a^{4m} : a^m$. 3) $a^{3x-1} : a^{x-2}$. 4) $a^m : a^{m-n}$.
5) $a^{17}b^{19}c^{21} : a^{15}b^{14}c^{10}$. 6) $a^{3m}b^{7n}c^{11p} : a^{2m}b^{5n}c^{9p}$.
7) $8a^{2m}b^{3n} : 4^m b^n$. 8) $(54a^{m-n} \,.\, b^{m+n} : 3a^{n-2m} \,.\, b^{n-m}) : 6a^{m-2n}$.
9) $\dfrac{a^{3m-5n} \,.\, b^{2m+n}}{c^{2p+q} \,.\, d^{3p-4q}} : \dfrac{a^{2m-6n} \,.\, b^{m+2n}}{c^{p-q} \,.\, d^{2p+q}}$
10) $(x^{2a-b} \,.\, y^{a+3b} + x^{2ab-1} \,.\, y^{4+5ab}) : x^{2a-1} \,.\, y^{3b+4}$.
11) $(x^{2m-4n} + {}^5/_6\, x^{m-2n} \,.\, y^{m+3n} - y^{2m+6n}) : (2x^{m-2n} + 3y^{m+3n})$.
12) $(x^{2n+1} + y^{2n+1}) : (x + y)$.
13) $(a^{4m} + a^{3m-1} \,.\, b^{n-1} + a^{3m-1} \,.\, b^{n+1} - a^{2m-2} \,.\, b^{2n} - a^{m+1} \,.\, b^{3n+1} - b^{4n}) :$
$(a^{m+1} + b^{n-1})$.
14) $\left(\dfrac{2a^{2m}}{b^{2n}} - 2\,{}^7/_{30}\, \dfrac{a^{3m}}{b^{4n}} - {}^1/_3\, \dfrac{a^{4m}}{b^{6n}}\right) : \left({}^2/_3\, \dfrac{a^m}{b^n} - {}^5/_6\, \dfrac{a^{2m}}{b^{3n}}\right)$.

3. Násobte:

1) $(4a)^5 \cdot (5a)^5$. 2) $(2ab)^3 \cdot (3ab)^3 \cdot (7ab)^3$.
3) $(2m^2n)^p \cdot (3m^3n^4)^p \cdot (m^5n^6)^p$. 4) $(a-b)^7 \cdot (a+b)^7$.
5) $\left(\frac{x+y}{y-z}\right)^m \cdot \left(\frac{x-y}{y+z}\right)^m \cdot \left(\frac{y-z}{x+y}\right)^m$. 6) $(2a-3b)^m \cdot (3a-5b)^m$.
7) $\left(\frac{2a^m}{3b^n}\right)^p \cdot \left(\frac{4a^{m+1}}{5b^{m-n}}\right)^p \cdot \left(\frac{15b^m}{16a^{m-1}}\right)^p$.

4. Vysaďte stejného mocnitele a buď násobte anebo dělte:

1) a^2b^2. 2) a^4b^2. 3) $4a^6b^8c^{10}$. 4) $125a^3b^6c^9$. 5) $a^{m+n} \cdot b^{2m}$.
6) $a^{m+3} \cdot b^{m+n+3}$. 7) $(4a)^5 : (2a)^5$. 8) $(8a^2b^3)^7 : (4ab^2)^7$.
9) $\left(\frac{6a^4}{35b^3}\right)^m : \left(\frac{3a^3}{7b^2}\right)^m$. 10) $\left(\frac{5a^2b^3c^4}{7d^5e^3}\right)^n : \left(\frac{15a_3b^2c^5}{28d^3e^4}\right)^n$.
11) $(x^4-y^3)^p : (x-y)^p$. 12) $(a^2-b^2+2bc-c^2)^m : (a+b-c)^m$.
13) $\left(\frac{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}}{x^2-\frac{1}{36}}\right)^p : \left(\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{6}}\right)^p$. 14) $[(56a^3)^m]^n : [(7a^2)^m]^n$.
15) $(1\frac{1}{2}x^2)^3 : (\frac{1}{4}x)^3$.

5. Umocněte:

1) $(a^2)^3$. 2) $(2^2a^3)^2$. 3) $[(x^5)^3]^7$. 4) $[(am)^n]^p$.
5) $\left(\frac{a^2b^4c^5}{d^3e^7}\right)^9$. 6) $(a^{-m})^{-n}$. 7) $\left(\frac{a^{-m}}{b^n}\right)^{-mn}$.
8) $(x^{m+1})^{(m-1)}$. 9) $\left(\frac{x^{m-n}}{y^{n-m}}\right)^{(-m-n)}$. 10) $\left(\frac{a^{3+m}}{b^{3-m}}\right)^{m-1}$.

6. Proveďte:

1) $(x+1)^2$. 2) $(x-1)^2$. 3) $(5-2y)^2$.
4) $(7a-5b)^2-(2a+3b)^2$. 5) $(3a^2-2b^3)^2$.
6) $(4a^2b^3-5c^3d^4)^2$. 7) $(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b)^2$. 8) $(2\frac{1}{6}a^2+1\frac{1}{4}b^5)^2$.
9) $(\frac{2}{3}x^2y^4-\frac{1}{8}z^5)^2$. 10) $(2a-b+1)^2$. 11) $(4a^2-5b^3+7c^4)^2$.
12) $(a^4b-b^2c^3-c^4d^2)$. 13) $(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}z^2)^2$.
14) $(2\frac{1}{3}xy^2-1\frac{1}{6}x^2z+\frac{1}{3}yz^2$. 15) $(a^4+b^3+c^2+d)^2$.
16) $\left(\frac{2a}{3b}-\frac{5b}{6c}+\frac{3c}{4a}\right)^2$. 17) $\left(\frac{2a^2b^3}{7c^4d}-\frac{5a^3c^4}{8b^2d^2}+\frac{b^4d^3}{2a^5c^7}\right)^2$.
18) $(a^{-1}b^{-2}-c^{-3}d^{-2}+b^{-3}d^{-4})^2$.

7. Proveďte:

1) $(a-1)^3$. 2) $(5a^2+3)^3$. 3) $(3x-10y)^3$.
4) $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)^3$. 5) $(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}y-1)^3$. 6) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}-\frac{z}{x}\right)^3$.
7) $\left(\frac{2a^2b^4}{3c^4d^3}-\frac{3b^2d^4}{a^2c^5}-\frac{a^3c^4}{2b^2d^7}\right)^3$. 8) $\left(\frac{x^2y^3}{z^4}-\frac{y^2z^4}{x^3}-\frac{x^3z^2}{y^5}\right)^3$.

8. Proveďte:

1) $(a^2-3b^3)^4$. 2) $(2a^3-4b^2+1)^4$.
3) $(\frac{1}{2}a^2b^3-\frac{1}{3}b^2c+c^2d^3)^4$. 4) $(a-2b)^6$.

5) $(m^2-n^2)^6$. 6) $(m^2-m+1)^6$. 7) $[(m+1)^2]^{-5}$.
8) $[(m+n-1)^{-2}]^{-3}$. 9) $[(a^{-3}b^{-1}+a^{-2}b^{-5})^3]^{-2}$.
10) $(^1/_2x-2y)^{-5}$. 11) $(x^{-1}y-xy^{-1})^{-3}$.

9) Umocněte (dle b. 4 a c. 5):

1) 709^2. 2) 916^2. 3) 1004^2.
4) 3567^2. 5) 7658^2. 6) 9207^2. 7) $12{\cdot}345^2$.
8) $327{\cdot}04^2$. 9) $2{\cdot}3578^2$. 10) $0{\cdot}006752^2$. 11) $0{\cdot}3576^2$.
12) $0{\cdot}0035789^2$. 13) 125^3. 14) 367^3. 15) 984^3.
16) $7{\cdot}65^3$. 17) $0{\cdot}0781^3$. 18) $57{\cdot}68^3$. 19) $0{\cdot}4589^3$. 20) $325{\cdot}7^3$.

II. Veličiny kořenové.

§. 26.

1. Máme-li z mocniny x^m vyhledati mocněnce čili kořen x, dobýváme z ní kořene *mtého* stupně (*mtého* kořene), což se naznačuje

$$\sqrt[m]{x^m}=x,$$

a čte se: *mtý* kořen z x^m jest x. Znaménku $\sqrt{}$ říkáme znaménko kořene čili *kořenitko* (místo r = radix), číslo v jeho otvoru (m) jest *odmocnitel* nebo *dobyvatel kořene*, a $\sqrt[m]{x^m}$ *veličina kořenová*. Dle toho, je-li odmocnitel $m=(1), 2, 3, 4\ldots$ říkáme, že se dobývá kořene (*prvního*), *druhého*, *třetího* atd. *stupně*. Jako se však nepíše 1 co mocnitel, nepíše se ani co odmocnitel, tak že se $a=a^1=\sqrt[1]{a}$. Mimo to se nepíše odmocnitel 2, tak že na př. $\sqrt{a}$ se čte jako by tam stálo $\sqrt[2]{a}$, totiž: druhý kořen z a.

2. Má-li stejnina $\sqrt[m]{x^m}=x$ býti pravou, musí se jak samozřejmo

$$x^m=x^m,$$

nebo je-li vůbec $\sqrt[m]{a}=b$, musí se $a=b^m$,

t. j. *při dobývání kořene z dané mocniny hledáme takovou veličinu, která povýšena jsouc na mocninu, jakou udává odmocnitel, rovná se mocnině pod kořenitkem.*

Proto jest $\sqrt{25}=5$ neboť $5^2=25$

$\sqrt[3]{27}=3$ „ $3^3=27$

$\sqrt[4]{16}=2$ „ $2^4=16$ atd.

Dle toho i porozumíme, že se

$\sqrt[0]{1} = a$ t. j. číslu kterémukoli, poněvadž $a^0 = 1$ (§. 25. 3), a

$\sqrt[0]{a} =$ buď 0 nebo ∞, poněvadž $0^0 = \infty^0 = a$ čili jakémusi číslu, které jest po případě určité. (§. 25. 3.)

3. Ze stejniny $a)$ $\sqrt[m]{x^m} = x$, nebo naopak

$b)$ $x = \sqrt[m]{x^m}$

plyne dvojí. Totiž a) *Je-li odmocnitel roven mocniteli, rovná se výsledek mocněnci čili kořenu* a b) *Hodnota kterékoli veličiny se nemění, povýšíme-li tuto na jakoukoli mocninu a dobýváme-li z ní kořene téhož stupně.* Tak na př.

$\sqrt[5]{4^5} = 4$, a naopak $4 = \sqrt[5]{4^5} = \sqrt[6]{4^6} = \sqrt[7]{4^7} = \ldots = \sqrt[m]{4^m}$,

$\sqrt[3]{7^3} = 7$, „ „ $7 = \sqrt[3]{7^3} = \sqrt[8]{7^8} = \ldots\ldots = \sqrt[p]{7^p}$,

$\sqrt[m]{a^m} = a$, „ „ $a = \sqrt[m]{a^m} = \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[p]{a^p} =$ atp.

4. Je-li $\sqrt[m]{a} = b$, jest dle předešlého (2.)

$a = b^m$, a tedy se i

$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b^m} = b$ (dle 3.),

t. j. *z obou dílů rovnice můžeme dobývati kořene téhož stupně.*

Je-li tedy na př. $x^3 = a$, nebo $x^m = b$ atd., jest

$x = \sqrt[3]{a}$, $x = \sqrt[m]{b}$ atd.

5. *Jest vše jedno, povýšíme-li dříve danou veličinu na danou mocninu a dobýváme-li z ní toho kterého kořene, aneb dobýváme-li z ní dříve onoho kořene a povýšíme-li pak výsledek na danou mocninu.*

Na př.

$$\sqrt[m]{b^n} = (\sqrt[m]{b})^n.$$

Neboť (dle §. 25. a. 6) jest $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

Položíme-li $a^m = b$, tedy $a = \sqrt[m]{b}$ (dle 4.), nebo $a^n = (\sqrt[m]{b})^n$ (dle §. 25. a. 1.), bude

$$b^n = (a^n)^m$$

$$\sqrt[m]{b^n} = a^n$$

$$\sqrt[m]{b^n} = (\sqrt[m]{b})^n.$$

Na př. $\sqrt{100^3} = (\sqrt{100})^3 = 10^3 = 1000.$

$\sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ atd.

6. *Hodnota veličiny kořenové se nemění, násobíme-li neb dělíme-li mocnitele i odmocnitele týmže číslem.* Na př.

$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mr]{a^{nr}}$, nebo naopak $\sqrt[mr]{a^{nr}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Neboť z rovnice

$\sqrt[m]{a^n} = b$, plyne (dle 2.)
$a^n = b^m$, nebo (§. 25. a. 1)
$a^{nr} = b^{mr}$, nebo (dle 4.)
$\sqrt[mr]{a^{nr}} = b$, avšak se i
$\sqrt[m]{a^n} = b$, tedy porovnáním

$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mr]{a^{nr}}$, nebo naopak $\sqrt[mr]{a^{nr}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Dle toho se $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot2]{5^2} = \sqrt[3\cdot4]{5^4} = \ldots \sqrt[3m]{5^m}$.

$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[8]{a^4} = \sqrt[10]{a^5} = \ldots \sqrt[2m]{a^m}$.

A naopak

$\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^3}$, $\sqrt[15]{a^{12}} = \sqrt[5]{a^4}$, $\sqrt[2m]{a^2} = \sqrt[m]{a}$ atd.

Pomocí toho můžeme též několik veličin kořenových přivesti na téhož odmocnitele, což se stává, *určí-li se nejprvé nejmenší společné násobné všech odmocnitelů, a převedou-li se naň tito s patřičnou proměnou mocnitelů.* Na př. Mají-li se přivesti na stejného odmocnitele kořenové veličiny:

$\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[5]{a^4}$,

vyhledejme nejmenší společné násobné všech odmocnitelů, které jest 60, dělme každým původním odmocnitelem do 60ti a násobme podílem i odmocnitele i mocnitele. Učinivše tak, dostaneme na místě uvedených veličin kořenových tyto:

$\sqrt[60]{a^{30}}$, $\sqrt[60]{a^{40}}$, $\sqrt[60]{a^{45}}$, $\sqrt[60]{a^{48}}$.

Podobně $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, dá $\sqrt[mn]{a^n}$ a $\sqrt[mn]{b^m}$ atd.

7. Vložíme-li do rovnice

$x = a^p$, $p = {}^m/_n$, dostaneme
$x = a^{m/_n}$, povýšená na mocnost *n*tou dá
$x^n = (a^{m/_n})^n = a^{m/_n \cdot n} = a^m$ (§. 25. a. 6), a dobudeme-li *n*tého kořene
$x = \sqrt[n]{a^m}$, dle předešlého jest však
$x = a^{m/_n}$, proto se

$a^{m/_n} = \sqrt[n]{a^m}$

t. j. *veličina, jejíž mocnitel jest zlomek, jest veličina kořenová, čitatel udává mocnitele a jmenovatel odmocnitele.* Tak na př.

$$5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2},\quad 7^{4/5} = \sqrt[5]{7^4},\quad a^{5/6} = \sqrt[6]{a^5},\quad a^{1/2} = \sqrt{a},\quad a^{1/m} = \sqrt[m]{a}\ \text{atp.}$$

A naopak: *máme-li z mocniny jakés dobývati kořene, dělme mocnitele odmocnitelem.* Na př.

$$\sqrt{a^4} = a^{4/2} = a^2,\quad \sqrt[5]{a^{15}} = a^{15/5} = a^3,$$

$$\sqrt[m+n]{a^{m^2-n^2}} = a^{m-n},\quad \sqrt[x]{a^{-x}} = a^{-1} = \frac{1}{a}\ \text{atp.}\ ^{*})$$

8. Z toho opět plyne:

a) *Je-li odmocnitel zlomek, násobí se mocnitel jeho převratnou hodnotou.* Neboť

$$\sqrt[m/n]{a} = a^{\frac{1}{m/n}} = a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n.$$

$$\sqrt[6/5]{a} = a^{5/6} = \sqrt[6]{a^5},\quad \sqrt[1/2]{a} = a^2,\quad \sqrt[1/m]{a} = a^m,\quad \sqrt[3/5]{a^6} = a^{6\cdot 5/3} = a^{10},$$

$$\sqrt[m/n]{a^r} = a^{rn/m} = \sqrt[m]{a^{rn}},\ \text{atp.}$$

A naopak *umocníme veličinu kořenovou, dělíme-li odmocnitele mocnitelem* (srovnej 6.). Na př.

$$(\sqrt[4]{7})^2 = \sqrt[4/2]{7} = \sqrt{7},\quad (\sqrt[6]{9})^2 = \sqrt[3]{9},\quad (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m/n]{a}\ \text{atp.}$$

b) *Je-li odmocnitel záporný, rovná se veličina kořenová převratné své hodnotě s týmže odmocnitelem kladným* (srovnej §. 25. 5). Na př.

$$\sqrt[-m]{a} = a^{-1/m} = \frac{1}{a^{1/m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}},\quad \sqrt[-m/n]{a^r} = a^{-nr/m} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^{nr}}},$$

$$\sqrt[-m/n]{a^{-r}} = a^{rn/m} = \sqrt[m]{a^{nr}}.$$

---

*) Na základě této poučky lze vysvětliti předešlou poučku pátou a šestou takto:

5. $\sqrt[m]{b^n} = (\sqrt[m]{b})^n$. Neboť $\sqrt[m]{b^n} = b^{n/m}$, a

$$(\sqrt[m]{b})^n = (\sqrt[m]{b^1})^n = b^{1/m\,.\,n} = b^{n/m}$$

tedy $\sqrt[m]{b^n} = (\sqrt[m]{b})^n$.

6. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mr]{a^{nr}}$ nebo naopak $\sqrt[mr]{a^{nr}} = \sqrt[m]{a^n}$. Neboť $\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m} = a^{nr/mr}$, tedy rovněž

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mr]{a^{nr}}.$$

c) *Je-li odmocnitel součin dvou neb vícero činitelů, lze každého z těchto považovati za částečného odmocnitele a dobývati kořene jedním po druhém z dané mocniny.* Na př.

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Neboť dělíme-li odmocnitele a mocnitele činitelem m (dle 6.), dostaneme

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{a^{1/m}} = (\sqrt[n]{a})^{1/m} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

A dělíme-li odmocnitele a mocnitele činitelem n, bude se

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{a^{1/n}} = (\sqrt[m]{a})^{1/n} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Dle toho

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2,$$

$$\sqrt[4]{10000} = \sqrt{\sqrt{10000}} = \sqrt{100} = 10 \text{ atd.}$$

A naopak: *má-li se dobývati kořene z veličiny kořenové, násobí se odmocnitelé.* Na př.

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt[6]{a^{12}} = a^2, \quad \sqrt[4]{\sqrt[5]{a^{60}}} = \sqrt[20]{a^{60}} = a^3,$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[3]{a^{6m}}} = \sqrt[3m]{a^{6m}} = a^2, \text{ atd.}$$

9. *Má-li se kořene dobývati ze součinu, dobývá se ho z každého jeho činitele.* Na př.

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\,.\,\sqrt[m]{b}.$$

Neboť $\sqrt[m]{ab} = (ab)^{1/m} = a^{1/m}\,.\,b^{1/m} = \sqrt[m]{a}\,.\,\sqrt[m]{b}.$

Tedy $\sqrt[4]{ab^6} = \sqrt[4]{a}\,.\,\sqrt{b^3}, \quad \sqrt[5]{a^2b^5c^{10}} = \sqrt[5]{a^2}.b.c^2 = bc^2\sqrt[5]{a^2},$

$$\sqrt[x]{a^{m+3x}} = \sqrt[x]{a^m.a^{3x}} = \sqrt[x]{a^m}\,a^3. = a^3\sqrt[x]{a^m}.$$

A naopak: *má-li se z několika činitelů dobývati kořene téhož stupně, píše se tento pouze jednou k jich součinu.* Na př.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\,.\,\sqrt{c} = \sqrt{abc} \text{ atd.}$$

Je-li mocnitel některého činitele buď roven odmocniteli neb větší tohoto, dobývá se ze součinu udaného kořene dokud možná.

Na př.

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}, \quad \sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 . a} = \sqrt{a^2} . \sqrt{a} = a\sqrt{a},$$

$$\sqrt[5]{a^6b^5} = \sqrt[5]{a^6} . \sqrt[5]{b^5} = ab\sqrt[5]{a},$$

$$\sqrt[4]{a^6b^8} = \sqrt[4]{a^6} . \sqrt[4]{b^8} = ab^2\sqrt[4]{a^2} = ab^2\sqrt{a},$$

$$\sqrt[2x]{a^{4x} . b^{6x}} = \sqrt[2x]{(a^2b^3)^{2x}} = a^2b^3,$$

$$\sqrt[n]{a^{n+3} . b^n} = \sqrt[n]{a^n . a^3 . b^n} = ab\sqrt[n]{a^3},$$

$$\sqrt[x+3]{a^{2x+6} . b^{x+3}} \sqrt[x+3]{(a^2b)^{x+3}} = a^2b \text{ atd.}$$

10. *Ze zlomku dobývá se kořene, dobývá-li se ho i z čitatele i z jmenovatele.* Na př.

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Nebo $$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/m} = \frac{a^{1/m}}{b^{1/m}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Dle toho se $$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}, \quad \sqrt{\frac{a^6}{b^4}} = \frac{\sqrt{a^6}}{\sqrt{b^4}} = \frac{a^3}{b^2},$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^{10}b^5}{c^{15}}} = \sqrt[5]{\left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^5} = \frac{a^2b}{c^3}.$$

A naopak: *má-li se dobývati z čitatele i jmenovatele kořene téhož stupně, píše se tento pouze jednou.* Na př.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt[x]{\frac{a^{x+1}}{b^{x+4}}} = \frac{\sqrt[x]{a^x} . \sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b^x} . \sqrt[x]{b^4}} = \frac{a}{b}\sqrt[x]{\frac{a}{b^4}},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^{n-2}}{b^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a^n \times a^{-2}}}{\sqrt[n]{b^n \times b^{-1}}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{a^{-2}}{b^{-1}}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{b}{a^2}},$$

$$\sqrt[7]{\left(\frac{a^3b^4}{c^5}\right)^4} = \frac{\sqrt[7]{a^{12}b^{16}}}{\sqrt[7]{c^{20}}} = \frac{ab^2}{c^2}\sqrt[7]{\frac{a^5b^2}{c^6}}.$$

11. *Při lichém odmocniteli jest kořen z veličiny kladné vždy kladný, a z veličiny záporné vždy záporný.* Na př.

$$\sqrt[2n+1]{(+a)} = +b, \text{ a } \sqrt[2n+1]{(-a)} = -b.$$

Neboť z první rovnice plyne

$$+a = (+b)^{2n+1}, \text{ a z druhé } -a = (-b)^{2n+1},$$

kteréž obě rovnice se úplně shodují s poučkami v §. 25. 4.

Dle toho se $\sqrt[3]{27} = 3$, neboť $(+3)^3 = +27$.

$\sqrt[3]{-27} = -3$, „ $(-3)^3 = -27$.

$\sqrt[5]{32} = 2$ a $\sqrt[5]{-32} = -2$ atd.

12. *Při sudém odmocniteli jest kořen z veličiny kladné buď kladný buď záporný.* Na př.

$$\sqrt[2n]{(+a)} = \pm b.$$

Neboť z rovnice té plyne

$$(+a) = (\pm b)^{2n}$$

což se opět úplně shoduje s poučkou v §. 25. 4, dle níž každá veličina, nechť kladná nechť záporná, povýšená na mocninu sudou, dává + k mocnině.

Dle toho $\sqrt{4} = \pm 2$, poněvadž $(+2)^2 = 4$ a $(-2)^2 = 4$,

$$\sqrt[4]{1000} = \pm 10, \quad \sqrt[6]{a^{12}} = (\pm a)^2.$$

Je-li tedy vůbec $x^{2n} = a$, jest $x = \pm \sqrt[2n]{a}$.

13. *Při sudém odmocniteli jest kořen z veličiny záporné nemožný.* Na př.

$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a \times -1} = \sqrt[2n]{a} \times \sqrt[2n]{-1}$ (dle 7). Zde můžeme sice položiti na př. $\sqrt[2n]{a} = b$, avšak $\sqrt[2n]{-1}$ není ani + 1 ani − 1, poněvadž $(\pm 1)^{2n} = +1$ a nikoliv − 1.

Z té příčiny říkáme *sudému* kořenu ze *záporné* veličiny *kořen pomyslný* (*imaginaerní*), a klademe pro kratší psaní $\sqrt[2n]{-1} = i$, tak že bychom v předešlém příkladě psali

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a}\,.\,\sqrt[2n]{-1} = b\sqrt[2n]{-1} = bi.$$

Podobně

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{-1} = 2i, \quad \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81}\,.\,\sqrt[4]{-1} = 3i \text{ atd.}$$

Naproti takovýmto veličinám *pomyslným* říkáme všem ostatním veličiny *realné*.

Poznamenání. Přichází-li v některé úloze sudý kořen ze záporné veličiny, žádá se tím něco nemožného; a objeví-li se pomyslná veličina ve výsledku daného úkolu, jest tím vyjádřeno, že úkolem tím se žádala nemožnosť. Nicméně zmocnila se algebra i veličin pomyslných, a stanovíc pravidla, jimiž se tyto řídí, rozšířila se v odbor nový (srovnej §. 29.).

Příklady.

1. Čemu se rovná: 1) $\sqrt{a^2}$. 2) $\sqrt[5]{a^5}$. 3) $\sqrt[6]{a^{12}}$. 4) $\sqrt[7]{a^{21}}$. 5) $\sqrt{a^4b^6}$. 6) $\sqrt[4]{m^8n^{12}}$. 7) $\sqrt[3]{m^6n^3p^{15}}$. 8) $\sqrt[n+1]{a^{n+1}}$. 9) $\sqrt[n+1]{a^{3n+3}}$. 10) $\sqrt[n]{a^{2n}b^nc^{3n}}$. 11) $\sqrt[n-1]{m^{2n-2}}$. 12) $\sqrt[2m]{a^{4m}b^{6m}}$.

2. Vyjádřete odmocnitele menšími čísly: 1) $\sqrt[4]{a^2}$. 2) $\sqrt[30]{a^6}$. 3) $\sqrt[15]{a^5b^{10}}$. 4) $\sqrt[21]{m^{14}n^7}$. 5) $\sqrt[28]{m^8n^{14}p^{16}}$. 6) $\sqrt[36]{a^9b^{27}c^{18}}$. 7) $\sqrt[m^2-1]{a^{m+1}}$. 8) $\sqrt[m^2-1]{a^{m-1}}$. 9) $\sqrt[2mn]{a^n}$. 10) $\sqrt[6mnp]{a^{2np}}$. 11) $\sqrt[ax+bx]{m^{a+b}}$.

3. Uveďte na stejného odmocnitele: 1) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[10]{a}$, $\sqrt[12]{a}$. 2) $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[8]{a^5}$, $\sqrt[9]{a^7}$, $\sqrt[12]{a^{11}}$. 3) $\sqrt[9]{a^2b^5}$, $\sqrt[12]{a^3b^7}$, $\sqrt[15]{a^4b^{11}}$. 4) $\sqrt[10]{x^3y^2z}$, $\sqrt[8]{xy^3z^2}$, $\sqrt[14]{xyz^3}$, $\sqrt[24]{xyz}$, 5) $\sqrt[x+1]{a^2b^3}$, $\sqrt[x-1]{a^2b^3}$. 6) $\sqrt[m]{a^3}$, $\sqrt[n]{a^4}$, $\sqrt[p]{a^5}$.

4. Uveďte odmocnitele na celé číslo: 1) $\sqrt[9/8]{a}$. 2) $\sqrt[5/4]{m}$. 3) $\sqrt[1/2]{m^3}$. 4) $\sqrt[1/3]{m^7}$. 5) $\sqrt[2\,1/2]{a^2}$. 6) $\sqrt[4/3]{m^5n^7}$. 7) $\sqrt[1/3]{m^2np^3}$. 8) $\sqrt[\frac{m+1}{n}]{a^p}$. 9) $\sqrt[\frac{m-1}{n}]{a^pb^q}$. 10) $\sqrt[2\,m/n]{a^{p+1}\,.\,b^{q-1}}$. 11) $\sqrt[\frac{n}{n+1}]{a^{n-1}}$.

5. Proměňte záporného odmocnitele v kladného: 1) $\sqrt[-2]{a}$. 2) $\sqrt[-3]{a^2}$. 3) $\sqrt[-5]{a^3b^4}$. 4) $\sqrt[-2/3]{25}$. 5) $\sqrt[-2/3]{1/36}$. 6) $\sqrt[-3/4]{8/27}$.

7) $\sqrt[-{}^1/_m]{a^n b^p}$. 8) $\sqrt[-\frac{2m}{n}]{a^{2m}b^n}$. 9) $\sqrt[-\frac{m+1}{n}]{a^{-n}}$. 10) $\sqrt[-\frac{m-1}{n}]{a^{-n}}$.

6. Čemu se rovná: 1) $\sqrt{\sqrt[3]{125^2}}$. 2) $\sqrt[3]{\sqrt{64^3}}$. 3) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^{40}}}$.

4) $\sqrt{\sqrt[7]{a^{28}}}$. 5) $\sqrt{\sqrt{a^4b^{12}}}$. 6) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{54}b^{18}}}}$. 7) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{a}}}$.

8) $\sqrt[3]{\sqrt[m]{a^{6m}b^{9m}}}$. 9) $\sqrt{\sqrt[m]{\sqrt[n]{(a^{4n})^{3m}}}}$. 10) $\sqrt[3]{a^{2/3}}$.

11) $\sqrt[4]{a^{3/5}}$. 12) $\sqrt[6]{a^{4/7}}$. 13) $\sqrt[m-1]{a^{n/m}}$.

7. Dobývejte kořene dokuď možná: 1) $\sqrt{a^5}$. 2) $\sqrt{a^7b}$.

3) $\sqrt[4]{a^5b^9c^6}$. 4) $\sqrt[5]{m^3n^{12}p^{11}}$. 5) $\sqrt[7]{a^{14}b^{-36}c^8}$.

6) $\sqrt[5]{a^{-6}b^{-7}c^{-8}}$. 7) $\sqrt[11]{a^{13}b^{-15}c^4}$. 8) $\sqrt[m]{a^{m+n}}$.

9) $\sqrt[m]{a^{m-3}b^{m+4}c^{m-1}}$. 10) $\sqrt[m+1]{a^{m+2}\,.\,b^{m+3}}$. 11) $\sqrt[m+3]{a^{m+5}\,.\,b^{2m+8}\,.\,c^{3m+1}}$.

12) $\sqrt[x+y]{m^{2x+3y}\,n^{3x+2y}}$.

8. Čemu se rovná: 1) $\sqrt{\frac{a^3b}{c^2d^5}}$. 2) $\sqrt{\frac{25m^4n^7}{36p^8q^9}}$.

3) $\sqrt[5]{\frac{m^6n^7}{3^5.p^{10}q^{11}}}$. 4) $\sqrt[x]{\frac{a^{x+1}}{b^{2x+1}}}$. 5) $\sqrt[5]{\left(\frac{a^2\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{ab}}\right)^{2^1/_2}}$.

6) $\sqrt[5]{\left(\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{ab}}\right)^{8/_9}}$. 7) $\sqrt[x]{\frac{a^{x-1}}{b^{-x+2}}}$. 8) $\sqrt[y]{\frac{a^{y+1}}{b^{y-3}c^{-y}}}$.

9) $\sqrt[m]{\frac{1}{a^{m+2}\,.\,b^{-2m}}}$. 10) $\sqrt[11]{\left(\frac{a^3b^4c^5}{d^6e^7}\right)^4}$. 11) $\sqrt[2x]{\frac{a^{2x+1}\,.\,b^{3x+4}}{c^{x+3}\,.\,d^{2x+5}}}$.

III. Počítání veličinami kořenovými.

§. 27.

Kořenové veličiny jsou *stejnorodé*, mají-li *při stejnorodých mocninách stejné odmocnitele.*

1. *Sečítati* a *odčítati* lze pouze *stejnorodé veličiny kořenové.* Součinitelé takových se buď sečtou, buď odečtou, a veličina kořenová se k tomu připíše. Při snímání se daný výraz co možná zjednoduší. Na př.

$$\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{a} = (1+1) . \sqrt[m]{a} = 2\sqrt[m]{a},$$

$$3\sqrt[m]{a^n} + 5\sqrt[m]{a^n} = (3+5) . \sqrt[m]{a^n} = 8\sqrt[m]{a^n},$$

$$4\sqrt{a} + 6\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 16\sqrt{a},$$

$$5\sqrt[m]{p} - 3\sqrt[m]{p} = 2\sqrt[m]{p},$$

$$8a^2\sqrt{m} - 3a^2\sqrt{m} = 5a^2\sqrt{m},$$

$$\sqrt{18} + \sqrt{32} + \sqrt{50} + \sqrt{2} = \sqrt{9.2} + \sqrt{16.2} + \sqrt{25.2} + \sqrt{2},$$

(§. 26. 9)

$$= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 13\sqrt{2},$$

$$2\sqrt{45} + 10\sqrt{405} - 3\sqrt{245} + \sqrt{20} - 9\sqrt{180} =$$

$$2\sqrt{9.5} + 10\sqrt{81.5} - 3\sqrt{49.5} + \sqrt{4.5} - 9\sqrt{36 \cdot 5}$$

$$= 98\sqrt{5} - 75\sqrt{5} = 23\sqrt{5},$$

$$\sqrt[m]{a^{m+2} . b^{m+3}} - \sqrt[m]{a^{m+3} . b^{m+2}} = \sqrt[m]{(ab)^m . a^2 . b^3} - \sqrt[m]{(ab)^m a^3 b^2}$$

$$= ab(\sqrt[m]{a^2 b^3} - \sqrt[m]{a^3 b^2}).$$

2. *Násobiti a děliti* lze pouze kořenové veličiny *stejných odmocnitelů.* V případě tom se kořenitko napíše jednou a mocniny se buď násobí buď dělí (§. 25. 2. 3.). Jsou-li odmocnitelé rozliční, uvedou se prvé na stejné (§. 26. 6).

a) *Součin při stejných odmocnitelích.*

Dle předešlého známo, že $\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$ (§. 26. 8), proto i

$$\sqrt[m]{a^n} . \sqrt[m]{a^2} = \sqrt[m]{a^{n+2}}, \quad \sqrt[m]{a^{n+1}} . \sqrt[m]{a^{n-1}} = \sqrt[m]{a^{2n}},$$

$$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}) \cdot \sqrt{m} = \sqrt{am} \pm \sqrt{bm},$$

$$(6+\sqrt{6}).(3-\sqrt{6}) = 18+3\sqrt{6}-6\sqrt{6}-6 = 12-3\sqrt{6},$$

$$\sqrt[3]{4+\sqrt{5}}.\sqrt[3]{4-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{16-5} = \sqrt[3]{11},$$

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a-b},$$

$$(m \pm \sqrt{n})^2 = m^2 \pm 2m\sqrt{n} + n, \quad (\text{§. 25. b})$$

$$(\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2})^2 = a\sqrt[3]{ab^2} - 2ab + b\sqrt[3]{a^2b}.$$

b) *Součin při rozličných odmocnitelích.*

$$\sqrt[m]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} . \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n.b^m}, \quad (\text{§. 26. 6. 8})$$

$$\sqrt{a} . \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{b^4} = \sqrt[6]{a^3b^4},$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}) . \sqrt[4]{2} = (\sqrt[12]{2^6}+\sqrt[12]{2^4}) . \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{2^3}+\sqrt[12]{2^7},$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b^2}).(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[5]{b^2}) = (\sqrt[60]{a^{30}}+\sqrt[60]{b^{40}}).(\sqrt[60]{a^{45}}-\sqrt[60]{b^{24}}),$$

$$= a\sqrt[4]{a}+\sqrt[12]{a^9b^8}-\sqrt[10]{a^5b^4}-b\sqrt[15]{b},$$

$$(\sqrt{5}+\sqrt[3]{3})^2 = 5+2\sqrt{5}.\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9} = 5+2\sqrt[6]{1125}+\sqrt[3]{9},$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{a-\sqrt{b}}}.\sqrt[4]{\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}} = \sqrt[6]{a-\sqrt{b}}.\sqrt[12]{a+\sqrt{b}}$$

$$= \sqrt[12]{(a-\sqrt{b})^2.(a+\sqrt{b})} = \sqrt[12]{(a^2-b)(a-\sqrt{b})}$$

$$= \sqrt[12]{a^3-ab-a^2\sqrt{b}+b\sqrt{b}}.$$

c) *Součin mocnin a veličin kořenových.*

Má-li se mocnina násobiti veličinou kořenovou, povýší se na mocninu odmocnitele a položí se pod kořenitko. Na př.

$$a . \sqrt{b} = \sqrt{a^2} . \sqrt{b} = \sqrt{a^2b}, \quad a . \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab},$$

$$(m+n) \cdot \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} = \sqrt{m^2-n^2}, \quad \frac{ab}{cd} \cdot \sqrt[5]{\frac{c^3d^2}{a^4b}} = \sqrt[5]{\frac{ab^4}{c^2d^3}},$$

$$\sqrt[5]{a^4 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a}}} = \sqrt[5]{a^4 \cdot \sqrt[6]{a^5}} = \sqrt[30]{a^{29}}.$$

d) *Podíl při stejných odmocnitelích.*

Dle předešlého (§. 26. 10) jest

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Podobně jest tedy: $\sqrt[m]{a^5} : \sqrt[m]{a^2} = \sqrt[m]{a^{5-2}} = \sqrt[m]{a^3}$,

$$\sqrt[9]{\frac{a^8b^5c^5}{d^6e^7}} : \sqrt[9]{\frac{a^5bc^4}{d^2e^5}} = \sqrt[9]{\frac{a^3b^4c}{d^4e^2}},$$

$$\left(\sqrt[m]{a^{2n+1}} - \sqrt[m]{a^{4n+3}}\right) : \sqrt[m]{a^{n+2}} = \sqrt[m]{a^{n-1}} - \sqrt[m]{a^{3n+1}}.$$

$$\begin{array}{l}
(8\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} - 15\sqrt[3]{b^2}) : (4\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{b}) = 2\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{b} \\
\underline{-\ 8\sqrt[3]{a^2} \pm 10\sqrt[3]{ab}} \\
\qquad\quad -\ 12\sqrt[3]{ab} - 15\sqrt[3]{b^2} \\
\qquad\quad \underline{\mp\ 12\sqrt[3]{ab} \mp 15\sqrt[3]{b^2}} \\
\qquad\qquad\quad „ \qquad\quad „
\end{array}$$

e) *Podíl při rozličných odmocnitelích.*

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} : \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}},$$

$$\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^8} : \sqrt[12]{a^9} = \sqrt[12]{\frac{1}{a}}$$

$$(\sqrt[4]{m^3} - \sqrt[5]{m^4} + \sqrt[6]{m^5}) : \sqrt{m} = (\sqrt[60]{m^{45}} - \sqrt[60]{m^{48}} + \sqrt[60]{m^{50}}) : \sqrt[60]{m^{30}}$$

$$= \sqrt[4]{m} - \sqrt[10]{m^3} + \sqrt[3]{m},$$

$$(m\sqrt[12]{m^5} - m\sqrt[4]{m} - \sqrt[6]{m^5} + \sqrt[3]{m^2}) : (\sqrt[4]{m^3} - \sqrt[6]{m}) =$$

$$(\sqrt[12]{m^{17}} - \sqrt[12]{m^{15}} - \sqrt[12]{m^{10}} + \sqrt[12]{m^8}) : (\sqrt[12]{m^9} - \sqrt[12]{m^2}) = \sqrt[3]{m^2} - \sqrt{m}.$$

f) *Podíl mocnin a veličin kořenových.*

Má-li se mocnina děliti veličinou kořenovou (aneb naopak), přivede se prvé na mocninu odmocnitele (§. 26. 3). Na př.

$$a : \sqrt{a} = \sqrt{a^2} : \sqrt{a} = \sqrt{a},$$

$$\sqrt[3]{a^2b} : ab = \sqrt[3]{a^2b} : \sqrt[3]{a^3b^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{ab^2}},$$

$$(3a - 2\sqrt{ab} - 5b) : (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$= (3\sqrt{a^2} - 2\sqrt{ab} - 5\sqrt{b^2}) : (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 3\sqrt{a} - 5\sqrt{b}.$$

Důležité jsou podíly tyto:

$(a \pm b) : (\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}) = (\sqrt[n]{a^n} \pm \sqrt[n]{b^n}) : (\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b})$, (srovnej §. 8. 2).

Totiž: $(\sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n]{b^n}) : (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}) =$

$\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}.b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$, je-li n sudé neb liché.

$$(\sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n]{b^n}) : (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}) =$$

$\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}.b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \ldots - \sqrt[n]{b^{n-1}}$, je-li n sudé.

$$(\sqrt[n]{a^n} + \sqrt[n]{b^n}) : (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}) =$$

$\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}.b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$, je-li n liché.

$(\sqrt[n]{a^n} + \sqrt[n]{b^n}) : (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})$ není dělitelno, ať jest n sudé nebo liché

Dodatek. Jak dále poznáme, jsou mimo uvedené i tyto podíly pozoruhodné:

α) $(a^{mq} - b_n) : (a^m - \sqrt[q]{b^n}) =$

$a^{(q-1)m} + a^{(q-2)m} . \sqrt[q]{b^n} + a^{(q-3)m} . \sqrt[q]{b^{2n}} + \ldots + \sqrt[q]{b^{(q-1)n}}.$

β) $(a^{mq} - b^n) : (a^m + \sqrt[q]{b^n}) =$

$a^{(q-1)m} - a^{(q-2)m} . \sqrt[q]{b^n} + a^{(q-3)m} . \sqrt[q]{b^{2n}} - \ldots - \sqrt[q]{b^{(q-1)n}}.$

γ) $(a^{mq} + b^n) : (a^m + \sqrt[q]{b^n}) =$

$a^{(q-1)m} - a^{(q-2)m} . \sqrt[q]{b^n} + a^{(q-3)m} . \sqrt[q]{b^{2n}} - \ldots + \sqrt[q]{b^{(q-1)n}}.$

Podíly tyto jsou *konečné*, necht jest v případě α) q *sudé* neb *liché*, v β) *musí* býti q *sudé* a v γ) *liché*. Je li v β) q liché a v γ) sudé, není dělenec dělitelný dělitelem. Mimo to má podíl ve všech případech tolik členů, kolik q jednic.

Na př. Je-li $m = 2$, $q = 5$, $n = 3$, bude dle α)

$(a^{10} - b^3) : (a^2 - \sqrt[5]{b^3}) =$

$a^8 + a^6\sqrt[5]{b^3} + a^4b\sqrt[5]{b} + a^2b\sqrt[5]{b^4} + b^2\sqrt[5]{b^2}.$

Je-li $m = 2$, $q = 6$, $n = 5$, bude dle α)

$(a^{12} - b^5) : (a^2 - \sqrt[6]{b^5}) =$

$a^{10} + a^8\sqrt[6]{b^5} + a^6b\sqrt[3]{b^2} + a^4b^2\sqrt{b} + a^2b^3\sqrt[3]{b} + b^4\sqrt[6]{b}.$

Je-li $m = 3$, $q = 4$, $n = 3$, bude dle β)

$(a^{12} - b^3) : (a^3 + \sqrt[4]{b^3}) = a^9 - a^6\sqrt[4]{b^3} + a^3b\sqrt{b} - b^2\sqrt[4]{b}.$

Je-li $m = 3$, $q = 7$, $n = 2$, bude dle γ)

$(a^{21} + b^2) : (a^3 + \sqrt[7]{b^2}) =$

$a^{18} - a^{15}\sqrt[7]{b^2} + a^{12}\sqrt[7]{b^4} - a^9\sqrt[7]{b^6} + a^6b\sqrt[7]{b} - a^3b\sqrt[7]{b^3} + b\sqrt[7]{b^5}.$

A vložíme-li do vzorců α, β, γ místo m všude $^m/_p$, tedy $a^{m/p} = \sqrt[p]{a^m}$, dostaneme tři vzorce jiné, v nichž platí o q vše co prvé pověděno bylo.

Tedy: $\delta)\ (\sqrt[p]{a^{mq}}-b^n):(\sqrt[p]{a^m}-\sqrt[q]{b^n})=$

$\sqrt[p]{a^{(q-1)m}}+\sqrt[p]{a^{(q-2)m}}\,.\,\sqrt[q]{b^n}+\ldots+\sqrt{b^{(q-1)n}}.$

$\varepsilon)\ (\sqrt[p]{a^{mq}-b^n}):(\sqrt[p]{a^m}+\sqrt[q]{b^n})=$

$\sqrt[p]{a^{(q-1)m}}-\sqrt[p]{a^{(q-2)m}}\,.\,\sqrt[q]{b^n}+\ldots-\sqrt[q]{b^{(q-1)n}}.$

$\zeta)\ (\sqrt[p]{a^{mq}}+b^n):(\sqrt[p]{a^m}+\sqrt[q]{b^n})=$

$\sqrt[p]{a^{(q-1)m}}-\sqrt[p]{a^{(q-2)m}}\,.\,\sqrt[q]{b^n}+\ldots+\sqrt[q]{b^{(q-1)n}}.$

Je-li na př. $p=3$, $m=1$, $q=2$, $n=1$ bude dle δ)

$$(\sqrt[3]{a^2}-b):(\sqrt[3]{a}-\sqrt{b})=\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}.$$

Je-li $p=13$, $m=2$, $q=5$, $n=4$, bude dle téhož δ)

$$(\sqrt[13]{a^{10}}-b^4):(\sqrt[13]{a^2}-\sqrt[5]{b^4})=$$

$$\sqrt[13]{a^8}+\sqrt[13]{a^6}\sqrt[5]{b^4}+b\sqrt[13]{a^4}\sqrt[5]{b^3}+b^2\sqrt[13]{a^2}\sqrt[5]{b^2}+b^3\sqrt[5]{b}.$$

Je-li $p=7$, $m=1$, $q=4$, $n=3$, bude dle ε)

$$(\sqrt[7]{a^4}-b^3):(\sqrt[7]{a}+\sqrt[4]{b^3})=$$

$$\sqrt[7]{a^3}-\sqrt[7]{a^2}\,.\,\sqrt[4]{b^3}+b\sqrt[7]{a}\,.\,\sqrt{b}-b^2\sqrt[4]{b}.$$

Je-li $p=4$, $m=3$, $q=5$, $n=2$, bude dle ζ)

$$(a^3\sqrt[4]{a^3}+b^2):(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[5]{b^2})=$$

$$a^3-a^2\sqrt[4]{a}\,.\,\sqrt[5]{b^2}+a\sqrt{a}\,\sqrt[5]{b^4}-b\sqrt[4]{a^3}\sqrt[5]{b}+b\sqrt[5]{b^3}.$$

Příklady.

1, 1) $\sqrt[3]{a^2}+4\sqrt[3]{a^2}+5\sqrt[3]{a^2}$. 2) $4\sqrt[m]{a^n}+7\sqrt[m]{a^n}+12\sqrt[m]{a^n}$.

3) $3\sqrt[12]{a^{30}}+8\sqrt[14]{a^{35}}+7\sqrt[18]{a^{45}}+11\sqrt[16]{a^{40}}$. 4) $\sqrt[15]{a^{10}}-\sqrt[39]{a^{26}}$.

5) $\sqrt{27}-\sqrt{75}$. 6) $\sqrt{45}+\sqrt{125}+\sqrt{80}$.

7) $\sqrt{63}-\sqrt{343}-\sqrt{28}+\sqrt{175}$.

8) $4\sqrt{a^3} - 5\sqrt[6]{a^9} + 6\sqrt[14]{a^{21}} - 7\sqrt[10]{a^{15}}.$

9) $\sqrt[3]{54a^4b^4c} - \sqrt[3]{250ab^4c^4} + \sqrt[3]{16a^4bc^3}.$

10) $\sqrt[m]{a^{m+4}} + \sqrt[m]{a^{m+1}} - \sqrt[m]{a^{m+2}} - \sqrt[m]{a^{m+3}}.$

11) $\sqrt[x]{m^{x+1} . n^{x+2}} - \sqrt{m^{x+2} . n^{x+3}} + \sqrt[x]{m^{x+3} . n^{x+1}}.$

12) $(\sqrt[x]{a^{x+2}b^{2x} - a^{2x}b^{x+2}} + 4\sqrt[x]{a^2(ab^2)^x - (a^2b)^x b^2}.$

2. 1) $\sqrt[3]{a^2} . \sqrt[3]{a}.$ 2) $\sqrt[5]{a^4b^3} . \sqrt[5]{ab^2}.$ 3) $\sqrt[m]{a^{m+1}} . \sqrt[m]{a^{2m-1}}.$

4) $5\sqrt{3} . 4\sqrt{12} . 2\sqrt{27}.$ 5) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{7}) . \sqrt[3]{25}.$

6) $(7 + \sqrt{7}) . (7 - \sqrt{7}).$ 7) $(a + \sqrt{ab}) . (a - \sqrt{ab}).$

8) $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) . (\sqrt{x} - \sqrt{y}).$

9) $(\sqrt{a} + \sqrt{b} - c) . (\sqrt{a} - \sqrt{b} + c) . (a - b - c^2 - 2c\sqrt{b}).$

10) $(\sqrt{a+b} - \sqrt{c}) . (\sqrt{a-b} + \sqrt{c}).$

11) $\sqrt[n]{a + \sqrt{b}} . \sqrt[n]{a - \sqrt{b}}.$ 12) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2.$

13) $(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}) . (5 - 2\sqrt{6} + \sqrt{5}) . (44 + 20\sqrt{6}).$

14) $(a\sqrt[3]{x^2} + b\sqrt[3]{y^2}) . (c\sqrt[3]{x^2} - d\sqrt[3]{y^2})$

$+ (a\sqrt[3]{x^2} - b\sqrt[3]{y^2}) . (c\sqrt[3]{x^2} + d\sqrt[3]{y^2}).$ 15) $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^3.$

3. 1) $\sqrt{3} . \sqrt[3]{2}.$ 2) $\sqrt[5]{a^4} . \sqrt[3]{a^2}.$ 3) $\sqrt[6]{a^5b} . \sqrt[5]{a^4b^3}.$

4) $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} . \sqrt[4]{\frac{a^3}{b}} . \sqrt[6]{\frac{b^5}{a}}.$ 5) $\sqrt{a} . \sqrt[3]{b^{-2}} . \sqrt[5]{a^2} . \sqrt[4]{b^{-1}}.$

6) $\sqrt[m]{a} . \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$ 7) $\sqrt[3]{m} . \sqrt[6]{1/m}.$ 8) $\sqrt[mn]{a} . \sqrt[mp]{a^n} . \sqrt[np]{a^m}.$

9) $(\sqrt{a} . \sqrt[5]{a^3} + \sqrt[3]{a^2}) . \sqrt[3]{a}.$ 10) $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a^2})^2.$

11) $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$ 12) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt[3]{\frac{y}{z}} - \sqrt[4]{\frac{x}{z}}\right)^2.$

13) $(\sqrt[x]{a}+\sqrt[y]{b})^3$. 14) $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[5]{a^3})^5$. 15) $(\sqrt[4]{a}-\sqrt{b})^4$.

16) $\sqrt[3]{\sqrt{5-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{5+\sqrt{2}}}$.

17) $\sqrt[m+1]{\sqrt[m]{a^n-\sqrt{b}}}\cdot\sqrt[m-1]{\sqrt[m]{a^n+\sqrt{b}}}$.

18) $(\sqrt[3]{5-\sqrt{5}}+\sqrt{5+\sqrt{5}})\cdot(\sqrt[3]{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}})$.

19) $(\sqrt{xy}-\sqrt[3]{xy})\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\right)$.

20) $(a^2\sqrt[3]{a^2}+a^2\sqrt[5]{b^3}+ab\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{b}+b\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{b^4}+b^2\sqrt[5]{b^2})$.

$(b^6+a^3b^3\sqrt[3]{a}+a^6\sqrt[3]{a^2})\cdot(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[5]{b^3})$.

4. **Přiveďte** *pod* **kořenitko:** 1) $a\cdot\sqrt[3]{b}$. 2) $3\sqrt{3}$. 3) $2\sqrt{1/_2}$.

4) $3^1/_2\sqrt{2}$. 5) $\frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}$. 6) $(a-b)\sqrt{\frac{ab}{a^2-2ab+b^2}}$.

7) $\frac{a^2b^3}{cd^2}\sqrt[4]{\frac{c^2d}{a^3b^2}}$. 8) $\frac{a^3b^2}{c}\sqrt[x]{\frac{c^{x-1}}{a^{3x-3}\cdot b^{2x-2}}}$.

9) $\frac{a^{-3}\cdot b^2d^{-4}}{e^{-5}}\sqrt[m]{\frac{e^{5-5m}}{a^{3-3m}\cdot b^{2m-2}\cdot d^{4-4m}}}$. 10) $a\sqrt{a\sqrt{a}}$.

11) $a\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$. 12) $\sqrt[3]{\left[\frac{a^2}{b}\cdot\sqrt[4]{\frac{b^3}{a}}\right]}$.

13) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$. 14) $x\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}}$.

15) $^1/_2\sqrt[3]{^4/_5\sqrt{^5/_8}}$. 16) $[(a\sqrt{a\sqrt{a}})^2+\sqrt[3]{a\sqrt{a}}]^2$.

5. Dělte: 1) $\sqrt[6]{a^5}:\sqrt[6]{a^4}$. 2) $32\sqrt[5]{a^4b^3}:-8\sqrt[5]{a^3b^2}$.

3) $\sqrt[m]{a^{2m+1}} : \sqrt[m]{a^{3-m}}$. 4) $\sqrt[x]{a^{3x+2}} : \sqrt[x]{a^{2x+1}}$.

5) $\sqrt[7]{\frac{a^6b^5c^4}{d^3e^6}} : \sqrt[7]{\frac{a^4b^5c^3}{d^3e^4}}$. 6) $\sqrt[x+1]{a^{2x-3} \cdot b^{x+2}} : \sqrt[x+1]{a^{x-4} \cdot b^{3x+4}}$.

7) $(\sqrt[5]{10} - \sqrt[5]{35}) : \sqrt[5]{5}$. 8) $(6\sqrt[4]{12} + 9\sqrt[4]{15} - \sqrt[4]{21}) : 3\sqrt[4]{3}$.

9) $(\sqrt[x]{a^{x-1}} - \sqrt[x]{a^{x+2}}) : \sqrt[x]{a^{x-2}}$. 10) $8a\sqrt[4]{b^3c^{-3}d} : 2\sqrt[4]{bc^{-1}d^{-1}}$.

11) $(4a^3\sqrt[3]{a} + 8ab\sqrt[3]{a^2b^2} - 21b^3\sqrt[3]{b}) : (2a\sqrt[3]{a^2} - 3b\sqrt[3]{b^2})$.

12) $(15b\sqrt[7]{a^4} + 9\sqrt[7]{a^6b^5} - 6a\sqrt[7]{ab^3}) : (5\sqrt[7]{a^3b^5} - 2\sqrt[7]{a^5b^3})$.

13) $(\sqrt[5]{a^2b} - \sqrt[5]{a^4b^{-13}c^6}) : (\sqrt[5]{a^{-1}b^3} - \sqrt[5]{b^{-4}c^3})$.

6. Dělte: 1) $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[3]{a^2}$. 2) $\sqrt{abc} : \sqrt[6]{abc}$. 3) $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{cd^2}} : \sqrt[7]{\frac{c^4d^5}{a^6b^3}}$.

4) $\left(\sqrt[4]{\frac{m^3n}{pq}} : \sqrt[3]{\frac{m^2n}{p^2q}}\right) : \sqrt[6]{\frac{p^5q}{mn^5}}$.

5) $(xy\sqrt{z} + xz\sqrt[3]{y} + yz\sqrt[4]{x}) : \sqrt{xyz}$.

6) $(6x\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{(xy)^5} - 15y\sqrt[3]{y^2}) : (2\sqrt[6]{x^5} - 3\sqrt[6]{y^5})$.

7) $\left(\sqrt[m]{\frac{a^4b^6}{c^4}} : \sqrt[3n]{\frac{a^2b^4}{c^2}}\right) : \left(\sqrt[m]{\frac{a^2b^3}{c^2}} + \sqrt[3n]{\frac{ab^2}{c}}\right)$.

7. Dělte: 1) $(a-b) : (\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b})$. 2) $(a-b) : (\sqrt[7]{a} - \sqrt[7]{b})$.

3) $(a+b) : (\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b})$. 4) $(a-b) : (\sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{b})$.

5) $(a^{12} - b^5) : (a^3 - b\sqrt[4]{b})$. 6) $(a^{15} - b^4) : (a^3 - \sqrt[5]{b^4})$.

7) $(a^{18} - b^7) : (a^3 + b\sqrt[6]{b})$. 8) $(a^{21} + b^9) : (a^3 + b\sqrt[7]{b^2})$.

9) $(\sqrt[7]{a^6} - b^5) : (\sqrt[7]{a^3} - b^2\sqrt{b})$. 10) $(a\sqrt[7]{a^2} - b^5) : (\sqrt[7]{a^3} - b\sqrt[3]{b^2})$.

11) $(a^4\sqrt[5]{a^4} - b^3) : (\sqrt[5]{a^4} + \sqrt{b})$. 12) $(a\sqrt[8]{a^7} + b^7) : (\sqrt[8]{a^5} + b^2\sqrt[3]{b})$.

IV. Veličiny směrné a nesměrné.

§. 28.

1. *Úplného* kořene z celého čísla nelze nikdy vyjádřiti zlomkem, ani pravým ani nepravým, poněvadž zlomek, na kteroukoli mocninu povýšený, dá opět zlomek a nikdy číslo celé. A nedá-li se kořen z celého čísla vyjádřiti opět číslem celým, nelze ho vůbec jakýmkoli číslem *úplně* udati.

Veličiny kořenové, které se nerovnají ani číslům celým ani konečným zlomkům, kterých tedy žádnou jedností měřiti nelze, nazýváme *veličiny nesměrné* (*irracionalné*), co opak *veličin směrných* (*racionalných*), t. j. všech čísel buď celých buď lomených, kladných neb záporných, které i podobu veličin kořenových míti mohou. Veškeré veličiny kořenové tedy, jichž mocnitel jest dělitelný odmocnitelem, jsou směrné, jinak však nesměrné. Tak na př. jsou veličiny *směrné:*

$$\sqrt{a^2} = \pm a, \quad \sqrt[3]{a^6b^9} = a^2b^3, \quad \sqrt{4} = \pm 2, \quad \sqrt{0\cdot25} = \pm 0\cdot5,$$

$$\sqrt[3]{0\cdot27} = 0\cdot3, \quad \sqrt{\frac{36}{49}} = \pm\frac{6}{7}, \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3} \text{ atp.}$$

A veličiny *nesměrné* jsou na př.

$\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[5]{a^3b^4}$, $\sqrt{2}$, který jest větší nežli 1 a menší nežli 2, $\sqrt[3]{9}$, který jest větší nežli 2 a menší nežli 3, vůbec $\sqrt[m]{a^n}$, kde n není dělitelné m.

2. Nesměrnost u zlomků trpí se v algebře pouze v čitateli, nikoli však v jmenovateli. Má-li tedy ten který zlomek *nesměrného jmenovatele*, promění se tento ve *směrného*. Výkonu tomu říkáme *usměrnování jmenovatele*, a případy obyčejnější jsou tyto:

a) Je-li nesměrný jmenovatel *jednočlen*, násobí se čitatel i jmenovatel zlomku veličinou kořenovou, jejíž odmocnitel a mocněnec jest tentýž jako u jmenovatele zlomku, avšak jejíž mocnitel jest rozdíl odmocnitele a mocnitele onoho. Na př.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\,.\,\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}\,.$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}, \quad \frac{5a}{9\sqrt[3]{a}} = \frac{5a\sqrt[3]{a^2}}{9\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a^2}} = \frac{5\sqrt[3]{a^2}}{9},$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ atd.}$$

b) Je-li nesměrný jmenovatel *dvojčlen*, a sice buď *součet* neb *rozdíl* čísla směrného a nesměrného, aneb dvou čísel nesměrných (s odmocnitelem 2), násobme čitatele i jmenovatele, dokud se týče, buď *rozdílem* neb *součtem* obou členů jmenovatele. Na př.

$$\frac{a}{b \pm \sqrt{c}} = \frac{a(b \pm \sqrt{c})}{(b \pm \sqrt{c})\,(b \pm \sqrt{c})} = \frac{a(b \pm \sqrt{c})}{b^2 - c},$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} \pm \sqrt{c})}{(\sqrt{b} \pm \sqrt{c})\,(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b} \pm \sqrt{c})}{b - c},$$

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = 2(\sqrt{5} + \sqrt{3}).$$

c) Je-li nesměrný jmenovatel *troj-* neb *vícečlen*, a jsou-li jeho členy buď naskrz aneb z části nesměrné veličiny (kořene druhého stupně), považujme zatím dvě (tři atd.) z nich za jednu, t. j. proměňme si takový troj- neb vícečlen v dvojčlen a pracujíce dle b) odstraňme podobně nesměrnost z každého výsledku. Na př.

$$\frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - c} = \frac{a}{\sqrt{a} + A}, \text{ kde } A = \sqrt{b} - c, \text{ a dle b)}$$

$$= \frac{a(\sqrt{a} - A)}{a - A^2} = \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b} + c)}{a - (\sqrt{b} - c)^2} = \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b} + c)}{a - b - c^2 + 2c\sqrt{b}}$$

$$= \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b} + c)}{B + 2c\sqrt{b}}, \text{ kde } B = a - b - c^2$$

$$= \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b} + c)\,(B - 2c\sqrt{b})}{B^2 - 4bc^2}$$

$$= \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b} + c)\,(a - b - c^2 - 2c\sqrt{b})}{(a - b - c^2)^2 - 4bc^2} \text{ atd.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1}{A+\sqrt{3}}, \text{ kde } A = \sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{5},$$

$$= \frac{A-\sqrt{3}}{A^2-3} = \frac{A-\sqrt{3}}{11+2\sqrt{14}-(2\sqrt{10}+2\sqrt{35})} = \frac{A-\sqrt{3}}{B-C}$$

kde $B = 11 + 2\sqrt{14}$ a $C = 2\sqrt{10}+2\sqrt{35}$ atd.

d) Je-li nesměrný jmenovatel *dvojčlen*, a každý jeho člen nesměrný s týmže odmocnitelem, tedy zlomek ten podoby

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}}$$

kde n jest jakékoli celé číslo kladné, promění se jmenovatel

$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ ve směrného podoby $a-b$, nechť jest n sudé nebo liché

$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ „ „ „ $a-b$, je-li n sudé, a

$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ „ „ „ $a+b$, je-li n liché,

(dle §. 27. 2. f.). Na př.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3})=V}{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}).(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3})} = \frac{V}{a-b},$$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[6]{a^4b}+\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{ab^4}-\sqrt[6]{b^5}}{a-b},$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}-\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}-\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}}{a+b}.$$

e) Je-li nesměrný jmenovatel *dvojčlen*, a jeden jeho člen směrný, tedy zlomek ten podoby

$$\frac{1}{a^m\pm\sqrt[q]{b^n}}$$

kde jsou m, q, n čísla celá a kladná, promění se jmenovatel

$a^m - \sqrt[q]{b^n}$ ve směrného podoby $a^{mq}-b^n$, nechť jest q sudé nebo liché

$a^m + \sqrt[q]{b^n}$ „ „ „ $a^{mq}-b^n$, je-li q sudé, a

$a^m + \sqrt[q]{b}$ „ „ „ $a^{mq}+b^n$, je-li q liché,

(dle §. 27. Dodatek α), β), γ). Na př.

$$\frac{1}{a^2-\sqrt[5]{b^3}}=\frac{a^8+a^6\sqrt[5]{b^3}+a^4b\sqrt[5]{b}+a^2b\sqrt[5]{b^4}+b^2\sqrt[5]{b^2}}{a^{10}-b^3},$$

$$\frac{1}{a^3+\sqrt[4]{b^3}}=\frac{a^9-a^6\sqrt[4]{b^3}+a^3b\sqrt{b}-b^2\sqrt[4]{b}}{a^{12}-b^3}$$

$$\frac{1}{a^3+\sqrt[7]{b^2}}=\frac{a^{18}-a^{15}\sqrt[7]{b^2}+a^{12}\sqrt[7]{b^4}-a^9\sqrt[7]{b^6}+a^6b\sqrt[7]{b}-a^3b\sqrt[7]{b^3}+b\sqrt[7]{b^5}}{a^{21}+b^2}$$

f) Má-li zlomek nesměrného jmenovatele podoby

$$\frac{1}{\sqrt[p]{a^m}\pm\sqrt[q]{b^n}}$$

uděláme jmenovatele toho směrným buď dle §. 27. Dodatek δ) ε) ζ) a pak dle e) tohoto §., aneb položíme-li $\sqrt[p]{a}=A$, tedy $\sqrt[p]{a^m}=A^m$ a pracujeme-li dle e). A sice:

Jmenovatele $\sqrt[p]{a^{mq}}-\sqrt[q]{b^n}$ proměníme (dle §. 27. Dodatek δ) opět v nesměrného podoby $\sqrt[p]{a^{mq}}-b^n=-(b^n-\sqrt[p]{a^{mq}})$, a pak tohoto (dle *e*) v směrného podoby $a^{mp}-b^{np}$, nechť jest p a q sudé neb liché. Při dvojím tomto usměrnování má první výraz, jímž se čítatel a jmenovatel násobí, tolik členů, kolik má q, a druhý výraz má tolik členů, kolik má p jedností.

Jmenovatele $\sqrt[p]{a^m}+\sqrt[q]{b^n}$, kde p i q jest liché, proměníme podobně ve směrného $a^{mq}+b^{np}$. Je-li p i q sudé, jest onen jmenovatel $-(a^{mq}+b^{np})$; je-li p liché a q sudé, dostaneme za jmenovatele $a^{mq}-b^{np}$, a je-li p sudé a q liché $-(a^{mq}-b^{np})$.

Na př. $$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[5]{b^3}}$$

$$=\frac{(a^2\sqrt[3]{a^2}+a^2\sqrt[5]{b^3}+ab\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{b}+b\sqrt[3]{a^2}\sqrt[5]{b^4}+b^2\sqrt[5]{b^2})=V}{-(b^3-a^3\sqrt[5]{a})}$$

(§. 27. Dodatek δ).

A násobíme-li čitatele a jmenovatele výrazem

$(b^6 + a^3b^3\sqrt[3]{a} + a^6\sqrt[3]{a^2}) = V'$ (dle e), dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[5]{b^3}} = \frac{VV'}{a^{10}-b^9}.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[5]{b^4}} =$$

$$\frac{(a^2\sqrt[3]{a^2}-a^2\sqrt[5]{b^4}+ab\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{b^3}-b^2\sqrt[3]{a^2}\sqrt[5]{b^2}+b^3\sqrt[5]{b}) = V}{b^4+a^3\sqrt[3]{a}}.$$

A násobíme-li opět čitatele a jmenovatele výrazem

$(b^8 - a^3b^4\sqrt[3]{a} + a^6\sqrt[3]{a^2}) = V'$, dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[5]{b^4}} = \frac{V.V'}{a^{10}+b^{12}} \text{ atd.}$$

Příklady.

1. 1) $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$. 2) $\frac{a}{3\sqrt[5]{b^2}}$. 3) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{m}}$.

5) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$. 6) $\frac{5m^2}{7\sqrt[7]{m^3}}$. 7) $\frac{1}{\sqrt{5\sqrt[4]{7}}}$.

2. 1) $\frac{a}{b-c\sqrt{d}}$. 2) $\frac{3}{4+3\sqrt{7}}$. 3) $\frac{2+\sqrt{10}}{3-\sqrt{10}}$.

4) $\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{11}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{11}}$. 5) $\frac{2a\sqrt{b}-3b\sqrt{a}}{2a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}}$. 6) $\frac{m}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}$.

7) $\frac{3}{\sqrt{13-\sqrt{3}}}$. 8) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$. 9) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}}$.

3. 1) $\frac{1}{a+\sqrt{b}-\sqrt{c}}$. 2) $\frac{1}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}$.

3) $\frac{5}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. 4) $\frac{4}{5+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}}$. 5) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

6) $\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}}$. 7) $\frac{a-b\sqrt{c}}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}}$.

8) $\frac{1}{m-\sqrt{m-\sqrt{m}}}$. 9) $\frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}}$.

4\. 1) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$. 2) $\frac{1}{\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}}$. 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

4) $\frac{1}{\sqrt[7]{a}+\sqrt[7]{b}}$. 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$. 6) $\frac{\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}$.

7) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}$.

5\. 1) $\frac{1}{a^3-\sqrt[6]{b^5}}$. 2) $\frac{1}{a^3-\sqrt[8]{b^3}}$. 3) $\frac{1}{a^4+\sqrt[4]{b^3}}$.

4) $\frac{1}{a^5+\sqrt[5]{b^2}}$. 5) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[6]{b^5}}$. 6) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[4]{b^3}}$.

7) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}-\sqrt[3]{b^2}}$. 8) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[6]{b}}$.

V. Veličiny pomyslné, soujemné a spřežité.

§. 29.

Jak v §. 26. 13. povědíno, říkáme záporným veličinám, z nichž se dobývá sudého kořene, *veličiny pomyslné* (*imaginaerní*), a naznačujeme je vůbec výrazem

$$ai = a\sqrt[2n]{-1};$$

Ve výraze tom jest a číslo realné, $\sqrt[2n]{-1}$ buď kladná buď záporná *pomyslná jednost*, kterouž vůbec poznačujeme $\pm i$. Není-li jinak udáno jest $\pm i = \pm\sqrt{-1}$.

Mocniny pomyslných veličin jsou tyto:

$$i = \sqrt{-1},$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1,\ (=\text{veličině pod kořenitkem}).$$

$$i^3 = i^2 . i = -1 . \sqrt{-1} = -\sqrt{-1},$$

$$i^4 = i^3 . i = -\sqrt{-1} . \sqrt{-1} = -(\sqrt{-1})^2 = -(-1) = +1,$$

$$i^5 = i^4 . i = +1 . \sqrt{-1} = \sqrt{-1},$$

$$i^6 = i^5 . i = \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = -1,$$

$$i^7 = i^6 . i = -1 . \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}, \text{ atd.}$$

Z toho patrno, že

$$i^{4n} = +1,$$

$$i^{4n+1} = +\sqrt{-1},$$

$$i^{4n+2} = -1,$$

$$i^{4n+3} = -\sqrt{-1},$$

pakli $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots .$ Z téže příčiny můžeme naopak položiti

$$+1 = i^4, i^8, i^{12} \ldots .$$

$$-1 = i^2, i^6, i^{10} \ldots . \text{ atd.}$$

Na př. $\frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -\sqrt{-1}$, $\frac{1}{i^2} = \frac{i^4}{i^2} = i^2 = -1$,

$\frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i = \sqrt{-1}$, $\frac{-1}{i^9} = \frac{i^{10}}{i^9} = i = \sqrt{-1}$ atd.

2. *Buď součet neb rozdíl čísel pomyslných jest číslo pomyslné.* Na př.

$ai \pm bi = (a \pm b)i$, $\sqrt{-m} \pm \sqrt{-n} = i\sqrt{m} \pm i\sqrt{n} = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})i$ atd.

3. *Buď součin neb podíl dvou čísel pomyslných jest číslo realné.* Na př.

$ai \times bi = ab . i^2 = -ab$,

$$\sqrt{-m} . \sqrt{-n} = i\sqrt{m} . i\sqrt{n} = \sqrt{mn} . i^2 = -\sqrt{mn},$$

$ai : bi = \frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}$, $\sqrt{-m} : \sqrt{-n} = \frac{i\sqrt{m}}{i\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$ atd.

4. a) *Dvojčlen* podoby $x + \sqrt{y}$, kde x jest jakékoli číslo realné a $\sqrt{y}$ číslo pomyslné, nazývá se *číslo soujemné* (komplexní). Všeobecný vzorec čísla soujemného jest

$$a + bi,$$

kde a i b mohou býti pospolu buď kladná buď záporná; je-li $i = 0$, představuje výraz ten každé číslo realné, a je-li $a = 0$, každé číslo pomyslné.

b) Soujemným číslům podoby $a + bi$ a $a - bi$ říkáme *čísla spřežitá.*

5. a) *Buď součet neb rozdíl čísel soujemných jest vůbec číslo soujemné.* Na př.

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i,$$

pouze v tom případě, kdyby se $b = d$, bylo by při rozdílu $(b - d)i = 0$ a tedy rozdíl takových čísel soujemných byl by realný.

b) *Součet čísel spřežitých jest realný a jejich rozdíl pomyslný.* Na př.

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a,$$
$$(a + bi) - (a - bi) = 2bi.$$

6. a) *Buď součin neb podíl dvou čísel soujemných jest vůbec číslo soujemné.* Na př.

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i,$$
$$(\sqrt{a} - i\sqrt{b})^2 = a - 2i\sqrt{ab} - b;$$
$$(mp - npi - mqi - nq) : (m - ni) = p - qi,$$
$$(ac + (a + c)i\sqrt{b} - b) : (a + i\sqrt{b}) = c + i\sqrt{b}.$$

b) *Součin čísel spřežitých jest realný.* Na př.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2.$$

Číslu realnému $a^2 + b^2$, které jest dělitelné $a + bi$ a $a - bi$, říkáme *norma* spřežitých čísel $a + bi$ a $a - bi$.

7. *Součin dvou druhů čísel spřežitých rovná se součinu jejich norem.* Na př.

$$[(a+bi)(a-bi)] . [(c+di)(c-di)] = (a^2 + b^2) . (c^2 + d^2).$$

A násobíme-li tato čísla spřežitá v pořádku

$$[(a+bi)(c+di)] . [(a-bi)(c-di)]$$
$$= (ac+bci+adi-bd)(ac-bci-adi-bd)$$
$$= [(ac-bd) + (bc+ad)i] . [(ac-bd)-(bc+ad)i]$$
$$= (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2,$$

dostaneme porovnáním obou součinů (týchže činitelů) pozoruhodnou stejninu:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(bc+ad)^2.$$

8. *Má-li zlomek pomyslného jmenovatele, promění se tento ve směrného právě tak, jako se nesměrný jmenovatel učiní směrným.*

$$\frac{1}{ai} = \frac{i}{ai^2} = -\frac{i}{a}, \quad \frac{1}{i\sqrt{a}} = \frac{i\sqrt{a}}{i^2a} = -\frac{i\sqrt{a}}{a},$$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}, \quad \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{i\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(i\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(i\sqrt{a}-\sqrt{b})(i\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$= \frac{(a-\sqrt{ab})i + \sqrt{ab} - b}{-a-b} = \frac{(\sqrt{ab}-a)i - \sqrt{ab} + b}{a + b},$$

$$\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(3+2i\sqrt{3})}{21},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}+i\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^2+5}=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{4-2i\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-i\sqrt{3}-i\sqrt{5})\,(4+2i\sqrt{6})}{40}\ \text{atd.}$$

Příklady.

1, Čemu se rovná: i^8, i^9, i^{15}, i^{20}, i^{26}, i^{32}, i^{27}, i^{31}, i^{47}, i^{51}, i^{67}?

2. Čemu se rovná: 1) $(4+3i)\pm(2+5i)$.

2) $(7+11i)\pm(8+15i)$. 3) $i\sqrt{2m}\pm i\sqrt{3n}$. 4) $\sqrt{-5}\pm\sqrt{-7}$.

5) $\sqrt{-4}+\sqrt{-25}-\sqrt{-49}-\sqrt{100}+\sqrt{-9}$.

6) $i^3+i^5+i^8-i^{14}+i^{16}-i^{23}-i+i^2$?

3. 1) $m\sqrt{-m^2n}\times n\sqrt{-mn^2}$. 2) $a^2b^2\sqrt{-a^{-3}b^{-2}}\times\sqrt{-a^7b^5}$.

3) $3m\sqrt{-m^{-5}n^{-3}}\times\sqrt{-mn}\times\sqrt{m^{-3}n^{-5}}\times\sqrt{-mn^{-1}}$.

4) $(3\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-4})-(3\sqrt{-5}\,.\,\sqrt{-2})+(\sqrt{-7}:\sqrt{-8})$.

5) $(2-3\sqrt{-5})\,.\,(3-2\sqrt{-5})$.

6) $(\sqrt{-m}+\sqrt{-n})\,.\,(\sqrt{-m}-\sqrt{-n})$.

7) $(a+\sqrt{-b})\,.\,(a-\sqrt{-b})$.

8) $(\sqrt{-15}+\sqrt{-7})\,.\,(\sqrt{-9}-\sqrt{-10})$.

9) $(x+\sqrt{-y^2})\,.\,(x-\sqrt{-y^2})$.

10) $\sqrt{-a^2b}\times\sqrt{-ab^3}\times\sqrt{-a^2b^2}$.

11) $(i\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$. 12) $(-\frac{1}{2}+\sqrt{-3})^2$. 13) $({}^1\!/_2-\sqrt{-3})^3$.

14) $(4+i\sqrt{7})^4$.

4. 1) $\sqrt{-198}:\sqrt{-11}$. 2) $(2\sqrt{8}-\sqrt{-10}):(-\sqrt{-2})$.

3) $(12\sqrt{-9}-15\sqrt{-12}):3\sqrt{-3}$.

4) $(\sqrt{15}+5i+i\sqrt{15}-5):(\sqrt{3}+i\sqrt{5})$.

5) $(21+7i\sqrt{5}+3i\sqrt{7}-\sqrt{35}):(3+i\sqrt{5})$.

5. 1) $\frac{1}{\sqrt{-3}}$. 2) $\frac{1}{2i\sqrt{5}}$. 3) $\frac{1}{3i\sqrt{m}}$. 4) $\frac{1}{m+i\sqrt{n}}$.

5) $\frac{1}{i\sqrt{3}+i\sqrt{5}}$. 6) $\frac{1}{3i\sqrt{7}+5}$. 7) $\frac{1}{7-2i\sqrt{2}}$.

8) $\frac{\sqrt{-3}-\sqrt{5}}{\sqrt{-3}+\sqrt{5}}$. 9) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}$. 10) $\frac{2}{1+i}$. 11) $\frac{2}{i-1}$.

12) $\dfrac{a+i\sqrt{b}}{a-i\sqrt{b}}+\dfrac{a-i\sqrt{b}}{a+i\sqrt{b}}$. 13) $\dfrac{9-7i\sqrt{10}}{8+5i\sqrt{10}}$.

14) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{-b}-\sqrt{-c}}$. 15) $\dfrac{10+8\sqrt{-5}}{5+\sqrt{-5}}$.

16) $\dfrac{1}{3\sqrt{-10}+5\sqrt{-7}-\sqrt{-3}}$. 17) $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{-2}-3\sqrt{-5}-8}}$.

18) $\left(\dfrac{1}{2+3i}+\dfrac{1}{5+7i}\right)-\left(\dfrac{1}{2-3i}+\dfrac{1}{5-7i}\right)$.

VI. Dobývání kořene druhého stupně.

§. 30.

1. Berouce ohled k povyšování několika členů na mocninu druhého stupně (§. 25. b), *dobýváme* z uspořádaného výrazu algebraického N *kořene druhého stupně* takto:

a) Z prvního členu výrazu N dobudeme kořene druhého na př. a, tento povýšíme na mocninu druhou (a^2), a odečteme ji od N, tak že nám zbyde $N-a^2$.

b) V tomto zbytku jest obsažen dvojnásobný součin známého členu kořene a dosud neznámým členem druhým na př. b, a mimo to čtverec tohoto, tedy $2ab+b^2$. Dělíme-li zbytek $N-a^2$ veličinou $2a$, dostaneme druhý člen kořene b, a poněvadž $2ab+b^2=(2a+b)b$, připočteme k děliteli $2a$ druhý člen b, a násobivše součet tento $(2a+b)$ členem b, odečteme součin od $N-a^2$, totiž $N-(a^2+2ab+b^2)=N-(a+b)^2$.

c) Zůstane-li ještě nějaký zbytek, zkouší se, je-li v něm opět obsažen dvojnásobný součin známého dvojčlenu kořene $(a+b)$ neznámým dosud členem třetím na př. c, a čtverec tohoto, totiž $2(a+b)c+c^2$. Proto se dělí zbytek $N-(a+b)^2$ dvojnásobným známým dvojčlenem kořene $(2(a+b))$ a najde se (možná-li) c, a poněvadž $2(a+b)c+c^2=[2(a+b)+c]c$, připočte se určený člen c k děliteli $(2(a+b))$, a násobí se jím tento výraz. Součin tento $=2(a+b)c+c^2$ odečte se od $N-(a+b)^2$, čímž dostaneme nový zbytek

$$N-[(a+b)^2+2(a+b)c+c^2]=N-(a+b+c)^2.$$

d) Zůstane-li opět nějaký zbytek, dělí se opět dvojnásobným známým trojčlenem kořene, atd. se pracuje jako prvé. Je-li výraz N úplný čtverec jakéhokoli mnohočlenu, nezbude konečně ničehož, není-li však, zůstane jakýs zbytek, z kterého nového členu kořene určiti nelze. Na př.

$\sqrt{4a^2-20ab+25b^2}=2a-5b.$

$\pm 4a^2$

„ $-20ab+25a^2 \;:\; 4a$

$\mp 20ab\pm 25b^2=(4a-5b)\times -5b.$

„ „

$\sqrt{9a^4-12a^3+10a^2-4a+1}=3a^2-2a+1.$

$\pm 9a^4$

„ $-12a^3+10a^2 \quad : 6a^2$

$\mp 12a^3\pm 4a^2 \quad =(6a^2-2a)\times -2a.$

„ $6a^2-4a+1 \quad : (6a^2-4a)$

$\pm 6a^2\mp 4a\pm 1 \quad =(6a^2-4a+1)\times 1$

„ „ „

$\sqrt{{}^4\!/_9m^8-{}^4\!/_5m^6+1{}^2\!/_{75}m^4-{}^3\!/_5m^2+{}^1\!/_4}={}^2\!/_3m^4-{}^3\!/_5m^2+{}^1\!/_2.$

$\pm {}^4\!/_9m^8$

„ $-{}^4\!/_5m^6+{}^{77}\!/_{75}m^4 \quad : {}^4\!/_3m^4$

$\mp {}^4\!/_5m^6\pm {}^9\!/_{25}m^4 \quad =({}^4\!/_3m^4-{}^3\!/_5m^2)\times -{}^3\!/_5m^2$

„ ${}^2\!/_3m^4-{}^3\!/_5m^2+{}^1\!/_4 \quad : ({}^4\!/_3m^4-{}^6\!/_5m^2)$

$\pm {}^2\!/_3m^4\mp {}^3\!/_5m^2\pm {}^1\!/_4 \quad =({}^4\!/_3m^4-{}^6\!/_5m^2+{}^1\!/_2)\times {}^1\!/_2.$

„ „ „

$\sqrt{a^{2n+2}\,.\,b^{2m-2}-2a^{2n-1}\,.\,b^{2m+2}+a^{2n-4}\,.\,b^{2m+6}}=a^{n+1}\,.\,b^{m-1}-a^{n-2}\,.\,b^{m+3}$

$\pm a^{2n+2}\,.\,b^{2m-2}$

„ $-2a^{2n-1}\,b^{2m+2}+a^{2n-4}\,b^{2m+6}:2a^{n+1}\,.\,b^{m-1},\ -a^{n-2}\,.\,b^{m+}$

$\mp 2a^{2n-1}\,b^{2m+2}\pm a^{2n-4}b^{2m+6}$

„ „

$\sqrt{\sqrt[x]{a^6}+2\sqrt[xy]{a^{2x+3y}\,.\,b^x}+\sqrt[y]{a^4b^2}}=\sqrt[x]{a^3}+\sqrt[y]{a^2b}$

$\pm\sqrt[x]{a^6}$

„ $2\sqrt[xy]{a^{2x+3y}\,.\,b^x}+\sqrt[y]{a^4b^2} : 2\sqrt[x]{a^3},\ +\sqrt[y]{a^2b}$

$\underline{2}\sqrt[xy]{a^{2x+8y}b^x}\pm\sqrt[y]{a^4b^2}$

„ „

$$\begin{array}{l}
\sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \text{atd.} \\
\pm a^2 \\
\hline
\quad \text{„} \; - x^2 : 2a, \quad - \frac{x^2}{2a} \\
\quad \mp x^2 \pm \frac{x^4}{4a^2} \\
\hline
\quad \text{„} \; - \frac{x^4}{4a^2} : 2a - \frac{x^2}{a}, \quad - \frac{x^4}{8a^3} \\
\quad \mp \frac{x^4}{4a^2} \pm \frac{x^6}{8a^4} \pm \frac{x^8}{64a^6} \\
\hline
\quad \text{„} \; - \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \text{ atd.}
\end{array}$$

2. Má-li se z *dekadického čísla* dobývati kořene druhého stupně, rozdělme je nejprvé od pravé k levé na třídy o dvou cifrách, třída nejvyšší může býti též jednociferná. Na kolik tříd číslo to rozdělíme, o tolika cifrách bude druhý kořen (§. 25. b. Dodatek). Dále pracujme takto:

a) Z nejvyšší třídy dobuďme kořene druhého, a sice úplného, je-li v třídě té úplná mocnina druhá, aneb nejblíže nižšího, pakli v ní úplné mocniny druhé není. Tím určíme první člen kořene (a), zdvojmocněme jej a odečtěme od téže třídy.

b) K zbytku připišme číslo z třídy sousední, a zatrhnuvše číslici na místě nejnižším, dělme ostatní, co číslo, dvojnásobným prvním členem kořene. Tím určíme druhý člen kořene, který připišme k děliteli, a násobivše jím celého dělitele takto změněného, odečteme součin od celého dělence.

c) K zbytku připišme opět číslo z třídy sousední, zatrhněme opět číslici na posledním místě, a dělme do ostatních dvojnásobným součinem obou členů kořene, čímž určíme třetí člen kořene. Tento připišme i ke kořenu i k děliteli, a násobme jím celého dělitele atd.

d) Kdyby konečně zůstal nějaký zbytek, a kdyby nebylo z daného čísla čeho více dosaditi, udělejme za ním i za kořenem desetinnou tečku, připišme za tento k číslu tolik nicek, kolik vůbec libo, a dosazujme tyto po dvou ke každému z příštích zbytků, pracujíce jinak jako prvé. V případě takovém jest kořen *nekonečný* (*nesměrný*), poněvadž nestává čísla jednociferného, které zdvojmocněné by mělo na konci *nicku*.

e) Má-li se dobývati *kořene druhého stupně ze zlomku desetinného*, rozdělí se *celé číslo* od tečky v levo, a *desetinec* od tečky v pravo na třídy o dvou cifrách. Ostatně se pracuje jako prvé.

Má-li se dobývati kořene ze *zlomku obyčejného*, jehož čítatel a jmenovatel nejsou mocniny druhého stupně, promění se tento prvé buď v zlomek desetinný, aneb se udělá jmenovatel směrným atd.

Na př.

$\sqrt{5|61|69} = 237.$
$4|_{00}|_{00} = (2_{00})^2$
$161_{00} : 43_{00}(= 2\times 2_{00} + 3_0)$
$129 = 43\times 3$
„3269 : 467(= 2×23_0 + 7)
3269 = 467 × 7
„

$\sqrt{56|04|01|96} = 7486.$
„704 : 144
12801 : 1488
„89796 : 14966
„

$\sqrt{11|94{\cdot}39|36} = 34{\cdot}56.$
294 : 64
3839 : 685
41436 : 6906
„

$\sqrt{0\ 00|11|90|25} = 0{\cdot}0345.$
290 : 64
3425 : 685
„

$\sqrt{2{\cdot}_{00}} = 1{\cdot}414\ \ldots.$
100 : 24
„400 : 281
11900 : 2824
„60400.

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{0{\cdot}42857142}\ldots = 0{\cdot}6546\ldots \text{ nebo}$$

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3\times 7}{7^2}} = {}^1/_7\sqrt{21} = \frac{4{\cdot}5825}{7} = 0{\cdot}6546\ldots$$

f) Má-li se určiti *kořen druhého stupně blížívě* na určitý počet míst, vyhledá se dobýváním pouze první polovice těchto, a polovice druhá vypočítá se skráceným dělením, t. j. v posledním děliteli vypouštějí se jednotlivé cifry od pravé k levé jako při skráceném dělení vůbec. Na př. $\sqrt{5}$ na 8 míst desetinných.

$\sqrt{5} = 2{\cdot}2360|6798\ldots$
100 : 42
1600 : 443
27100 : 4466
30400 : 44720
3568 14|1
438 63|6 náhrady
36 32|3
1

j) Má-li se dobývati 2^ntého kořene ($\sqrt[2n]{\ }$) nechť z výrazu algebraického nechť z čísla dekadického, může se tak státi posloupně, t. j. dobývá se nejprvé kořene druhého, z výsledku opět kořene druhého atd., dokud vůbec možná. Na př.

$$\sqrt[4]{1500625} = \sqrt{\sqrt{1|50|06|25}} = \sqrt{12|25} = 35.$$

$$\begin{array}{ll} \underline{50} : 22 & \underline{325} : 65 \\ \underline{606} : 242 & n \\ \underline{12225} : 2445 & \\ n & \end{array}$$

Příklady.

1. Dobývejte kořene druhého stupně z výrazu:

1) $9a^2+42ab+49b^2$.
2) $25a^2-10a+1$. 3) $9a^6-60a^3b^2+100b^4$.
4) $x^2-x+{}^1/_4$. 5) $x^4+2x^3-x^2-2x+1$.
6) $225m^4n^2-390m^2n^3p+169n^4p^2-630m^3np^2+546mn^2p^3+441m^2p^4$.
7) $\frac{25m^2n^2}{49p^2q^2}-1{}^1/_7\frac{m^2}{q^2}+\frac{16m^2p^2}{25n^2q^2}$. 8) $\frac{a^4b^6}{c^2d^8}-\frac{2a^4c}{d^5}+\frac{a^4c^4}{b^6d^2}-\frac{2b^5c^2}{a^2d^7}$
$+\frac{2a^3b^4}{d^3}+\frac{b^4c^6}{a^8d^6}+\frac{2c^5}{a^2bd^4}-\frac{2a^3c^3}{b^2}-\frac{2b^3c^4}{a^3d^2}+a^2b^2c^2d^2$.
9) $5{}^4/_9\frac{a^{-2}b^4c^{-4}}{d^{-4}e^6}-11{}^1/_5\frac{a^{-4}bc}{d^{-1}e^{-1}}+5{}^{19}/_{25}\frac{a^{-6}b^{-2}c^6}{d^2e^{-8}}$.
10) $a^{2m-6}.b^{2n+2}+2a^{2m}b^{2n-3}+a^{2m+6}.b^{2n-8}$.
11) $1{}^7/_9\frac{a^{2m}b^{2n-2}}{c^{-2n}}+4\frac{ab^{2n+1}}{c}+2{}^1/_4\frac{a^{-2m+2}.b^{2n+4}}{c^{2n+2}}$.
12) $4x+12\sqrt{xy}+9y$. 13) $\sqrt[x]{a^6}\pm2\sqrt[xy]{a^{3y}b^{3x}}+\sqrt[y]{b^6}$.
14) $\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ac}-2\sqrt[4]{bc}+\sqrt{c}$.
15) $9b\sqrt[3]{a^2b}-12ab\sqrt[6]{a^2b}+4a^2b-18b\sqrt[6]{a^4b}+12ab\sqrt[3]{a}+9b\sqrt[3]{a^2}$.
16) $\sqrt[m]{a^2}-2a\sqrt[mn]{a^nb^m}+a^2\sqrt[n]{b^2}+2b\sqrt[mp]{a^pc^m}\quad 2ab\sqrt[np]{b^pc^n}+b^2\sqrt[p]{c^2}$.
17) $m^{1{}^1/_3}\pm2m^{{}^2/_3}.n^{{}^1/_6}+n^{{}^1/_3}$. 18) $a^{2{}^1/_2}\pm2a^{4{}^3/_4}+a^7$.
19) a^2+x^2. 20) $1-x$. 21) $1+x$.

2. Dobývejte druhého kořene z čísel:

1) 1225. 2) 45369. 3) 180625. 4) 427716.
5) 501264. 6) 4401604. 7) 15208069041.

8) 18·5761. 9) 1420·913025. 10) 0·00042025.
11) 1·0404. 12) 0·01522756. 13) 1·447209.

3. 1) $\sqrt{6}$ na 6 deset. míst. 2) $\sqrt{7}$ na 8 deset. míst.
3) $\sqrt{3·14159265}$. 4) $\sqrt{23}$ na 6 des. m.
5) $\sqrt{\frac{36}{49}}$. 6) $\sqrt{\frac{100}{121}}$. 7) $\sqrt{{}^2/_3}$. 8) $\sqrt{{}^1/_6}$.
9) $\sqrt{{}^5/_{11}}$. 10) $\sqrt{2^3/_{10}}$. 11) $\sqrt{112^1/_2}$.

4. 1) $\sqrt[4]{16a^4+32a^3\sqrt{b}+24a^2b+8ab\sqrt{b}+b^2}$.
2) $\sqrt[4]{m^2+6m-4(m+1)\,.\,\sqrt{m}+1}$.
3) $\sqrt[4]{{}^1/_{16}x^4+({}^1/_3+{}^1/_2\sqrt{{}^1/_3})x^3+{}^1/_6x^2+{}^2/_3x\sqrt{{}^1/_3}+{}^1/_9}$
4) $\sqrt[4]{20736}$. 5) $\sqrt[4]{25411681}$. 6) $\sqrt[4]{112·550881}$.

VII. Dobývání kořene třetího stupně.

§. 31.

1. Berouce ohled k povyšování několikačlenu na mocninu třetí (§. 25. c), *dobýváme* z uspořádaného algebraického výrazu *N kořene třetího stupně* takto:

a) Z prvního členu výrazu N dobudeme kořene třetího stupně na př. a, tento povýšíme na mocninu třetí (a^3), a odečteme tuto od členu prvního, čímž dostaneme zbytek

$$N-a^3.$$

b) V tomto zbytku jest obsažen: trojnásobný čtverec prvního členu kořene násobený jeho druhým dosud neznámým členem na př. b, trojnásobný první člen kořene násobený čtvercem onoho členu druhého, a třetí mocnosť tohoto členu, tedy $3a^2b+3ab^2+b^3$. Abychom tedy ze zbytku $N-a^3$ určili druhý člen kořene b, dělme jej trojnásobným čtvercem prvního členu ($3a^2$), vyviňme pomocí obou členů kořene součiny $3a^2b$, $3ab^2$, b^3, a odečteme jejich součet od $N-a^3$, totiž

$$N-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=N-(a+b)^3.$$

c) Zůstane-li nový zbytek, zkouší se, není-li v něm obsažen trojnásobný čtverec obou členů kořene, totiž $3(a+b)^2$, čímž by se dostal třetí člen kořene c. Pomocí tohoto a onoho dvojčlenu kořene vyvinuly by se pak součiny $3(a+b)^2c$, $3(a+b)c^2$ a c^3, kteréž by se odečtly od stejnorodých výrazů ve zbytku, tak že by zůstalo

$$N-(a+b+c)^3.$$

d) Není-li tento zbytek $= 0$, dělí se nový zbytek výrazem $3(a+b+c)^2$, čímž se, možná-li, určí čtvrtý člen kořene, atd. se pracuje jako prvé, až buď ničehož nezbude, aneb až jest zbytek takový, že ho více trojnásobným čtvercem dosavadního kořene děliti nelze. Na př.

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{27x^6+54x^5+63x^4+44x^3+21x^2+6x+1} = 3x^2+2x+1. \\
\;\; 27x^6 \\
\underline{\;-\;\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad ,, \quad 54x^5+63x^4+44x^3 : 27x^4[=3\,.\,(3x^2)^2] \\
\qquad\quad \underset{-}{54x^5}\underset{-}{+}36x^4\underset{-}{+}\;8x^3 = 27x^4\,.\,2x+3\,.\,3x^2\,.\,(2x)^2+(2x)^3 \\
\qquad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad ,, \quad 27x^4+36x^3+21x^2+6x+1 : (27x^4+36x^3+12x^2) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [=3(3x^2+2x)^2] \\
\qquad\qquad\quad \underset{-}{27x^4}\underset{-}{+}36x^3\underset{-}{+}21x^2\underset{-}{+}6x\underset{-}{+}1 = 3(3x^2+2x)^2.\,1+3(3x^2 \\
\qquad\qquad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad +2x)\,.\,1^2+1^3 \\
\qquad\qquad\qquad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b} = \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b} \\
\quad a \\
\underline{\;-\;\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\quad ,, -3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b : 3\sqrt[3]{a^2}\,[=3(\sqrt[3]{a})^2] \\
\quad \underset{+}{-}3\sqrt[3]{a^2b}\underset{-}{+}3\sqrt[3]{ab^2}\underset{+}{-}b = 3(\sqrt[3]{a})^2.-\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}.(-\sqrt[3]{b})^2 \\
\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad\qquad\qquad +(-\sqrt[3]{b})^3 \\
\qquad ,, \qquad ,, \qquad ,,
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{a^3-1} = a-\dfrac{1}{3a^2}-\dfrac{1}{9a^5}-\ldots\ldots \\
\quad a^3 \\
\underline{\;-\;\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad ,, -1 : 3a^2 \\
\qquad -1+\dfrac{1}{3a^3}-\dfrac{1}{27a^6} \\
\qquad + \quad - \qquad + \\
\qquad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\quad ,, -\dfrac{1}{3a^3}+\dfrac{1}{27a^6} : \left(3a^2-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{3a^4}\right) \text{atd.}
\end{array}$$

2. *Z dekadického čísla* dobudeme kořene třetího stupně berouce ohled k povyšování čísla vůbec k mocnině třetí, (§. 25. c. 4) takto:

a) Rozdělme dané číslo od pravé k levé na třídy po třech cifrách, nejvyšší třída může býti též o dvou cifrách neb o jedné cifře (§. 25. c. Dodatek).

b) Z nejvyšší třídy vyhledejme první člen kořene (*a*), ztrojmocněme jej (a^3), a odečtěme od té třídy.

c) Ke zbytku připišme třídu sousední, a zatrhnuvše poslední dvě číslice dělme ostatní (co číslo) trojnásobným čtvercem prvního členu kořene. Podíl ten jest druhý člen kořene (b), jehož pomocí vyviňme $3a^2b+3ab^2+b^3$, a odečtěme součet ten od *celého* dělence. (První z těchto součinů klade se pod nejvyšší místa dělence, druhý se pomkne o jedno místo v pravo, a třetí opět o jedno místo v pravo.)

d) Ke zbytku přidá se opět sousední třída, zatrhnou se poslední dvě číslice, a dělí se do ostatních (co čísla) trojnásobným čtvercem známého kořene. Tento podíl připíše se co třetí člen ke kořenu, a pracuje se jako prvé.

e) Nezůstane-li konečně žádného zbytku, jest kořen úplný, zůstane-li zbytek, a není-li více čeho k němu přidati, může se pokračovati v desetinkách, t. j. za číslem pod kořenitkem udělá se tečka desetinná, podobně i za určeným už kořenem, a ke zbytku připisují se dokud libo nicky vždy po třech.

f) Ze *zlomku desetinného* dobývá se *kořene třetího stupně*, rozdělíme-li *celé číslo* na třídy o třech cifrách od tečky v levo a *desetinec* od tečky v pravo. Má-li se dobývati ze *zlomku obyčejného* kořene třetího stupně, promění se prvé buď v zlomek desetinný, aneb udělá se jmenovatel jeho směrným atd. Na př.

$$
\begin{array}{ll}
 & \sqrt[3]{42|875} = 35 \\
 & \;27 \\
\hline
 & \;158\underline{7}5 \;:\; 27(=3\,.\,3^2) \\
\hline
\text{součet} & \left\{\begin{array}{l} 135.. = 3\,.\,3^2\,.\,5 \\ \;\;225. = 3\,.\,3\,.\,5^2 \\ \;\;\;\;125 = 5^3 \\ \hline \end{array}\right. \\
\text{odečtěn} & \\
 & \;\;„
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{12{\cdot}326|391} = 2{\cdot}31 \\
\;\;8 \\
\hline
\;\;43\underline{2}6 \;:\; 12 \\
\hline
\;\;36.. \\
\;\;\;54. \\
\;\;\;\;27 \\
\hline
\;\;\;1593\underline{9}1 \;:\; 1587 \\
\hline
\;\;\;1587.. \\
\;\;\;\;\;\;69. \\
\;\;\;\;\;\;\;\;1 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;„
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\sqrt[3]{10{\cdot}_{000}} = 2{\cdot}15\;.\;.\;.\;. \\
\;\;20\underline{0}0 \;:\; 12 \\
\hline
\;\;12.. \\
\;\;\;\;6. \\
\;\;\;\;\;\;1 \\
\hline
\;\;73900\underline{0}0 \;:\; 1323 \\
\hline
\;\;6615.. \\
\;\;\;1575. \\
\;\;\;\;\;125 \\
\hline
\;\;\;61625 \text{ atd.}
\end{array}
$$

Příklady.

1. Dobývejte kořene třetího stupně z výrazu:

1) $125a^3-75a^2b+15ab^2-b^3$. 2) $m^3-21m^2+147m-343$.
3) $8a^9+60a^6b^2+150a^3b^4+125b^6$.
4) $8a^6b^3+36a^4b^2cd^2+54a^2bc^2d^4+27c^3d^6$.
5) $^8/_{27}a^9-{}^4/_{15}a^6b+{}^2/_{25}a^3b^2-{}^1/_{125}b^3$.
6) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3+9x^2z+36xyz+36y^2z+27xz^2+54yz^2+27z^3$.
7) $8a^6-12a^5+42a^4-37a^3+63a^2-27a+27$.

8) $$\frac{8x^3y^6}{27z^9}-\frac{8x^4y^5}{15z^7}+\frac{8x^5y^4}{25z^5}-\frac{8x^6y^3}{125z^3}-\frac{8x^2y^4}{9z^6}+\frac{16x^3y^3}{15z^4}-\frac{24x^4y^2}{75z^2}+\frac{8xy^2}{27z^3}-\frac{8x^2y}{45z}-\frac{8}{27}\cdot$$

9) $$\frac{8x^6}{27z^9}-\frac{2x^5}{z^7}+4^1/_2\frac{x^4}{z^5}-\frac{6x^3}{z^4}-3^3/_8\frac{x^3}{z^3}+\frac{2x^4}{3z^6}+3^7/_8\frac{x^2}{z^2}+\frac{x^2}{2z^3}-1^1/_8\frac{x}{z}+{}^1/_8.$$

10) $$\frac{m^3n^3}{p^3}x^6-\frac{3m^3n}{p}x^5-3\left(\frac{mn^3}{p}-\frac{m^3p}{n}\right)x^4-\left(\frac{m^3p^3}{n^3}-6mnp\right)x^3-3\left(\frac{mp^3}{n}-\frac{n^3p}{m}\right)x^2-\frac{3np^3}{m}x-\frac{n^3p^3}{m^3}$$

11) $a^{3m-8}+3a^{3m+1}+3a^{3m+5}+a^{3m+9}$.
12) $m^{1/8}-3m^{1\,1/3}+3m^{1\,1/6}-m^{1/9}$.
13) $27a\sqrt{a}-54a^2+36a^2\sqrt{a}-8a^3$.
14) $x\sqrt{-x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{-x}+y\sqrt{y}$.

2. Dobývejte kořene třetího stupně z čísel:

1) 42875. 2) 970299. 3) 76765625. 4) 1061208. 5) 1157605.
6) 10941048. 7) 41278242816. 8) 1860·867. 9) 0·015625.
10) 0·08615125. 11) 0·001331. 12) 0·033076161.
13) 115·145914625

3. 1) $\sqrt[3]{2}$ na 3 deset. místa. 2) $\sqrt[3]{0{\cdot}2}$ a $\sqrt[3]{0{\cdot}02}$ na 4 deset. m.

3) $\sqrt[3]{^1/_5}$. 4) $\sqrt[3]{^1/_6}$. 5) $\sqrt[3]{^5/_9}$. 6) $\sqrt[3]{2^1/_2}$. 7) $\sqrt[3]{4^1/_4}$.

8) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$. 9) $\sqrt[3]{\frac{343}{729}}$. 10) $\sqrt[3]{2{\cdot}4}$. 11) $\sqrt[3]{12{\cdot}07}$.

4. 1) $\sqrt[3]{\sqrt{262144}}.$ 2) $\sqrt{\sqrt[3]{24137596}}.$

3) $\sqrt[3]{\sqrt{52898852801024}}.$ 4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5159780352}}.$

VIII. Jak se přivede buď součet buď rozdíl dvou veličin kořenových druhého stupně pod jediný kořen téhož stupně, a naopak?

§. 32.

1. **Součet** neb rozdíl *dvou* veličin kořenových druhého stupně přivedeme **pod** *jediný* kořen téhož stupně dle vzorce:

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2} = \sqrt{x \pm 2\sqrt{xy} + y}. \text{ (§. 27.)}$$

Dle toho se

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}},$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{3}} + \sqrt{5+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{5-2\sqrt{3}} + \sqrt{5+2\sqrt{3}})^2}$$
$$= \sqrt{10 + 2\sqrt{13}},$$

$$\sqrt{x - y - 2\sqrt{-xy}} - \sqrt{x - y + 2\sqrt{-xy}} = 2\sqrt{-y}.$$

2. **Má-li** se naopak *dobývati kořene druhého stupně buď z nesměrného neb pomyslného dvojčlenu*, rozvede se kořen ten buď na součet neb **na** rozdíl *dvou* veličin kořenových téhož odmocnitele. Aby se tak stalo, pozorujeme toto:

Dle předešlého jest

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - y^2}} \\ \text{a}\quad &\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \sqrt{2x - 2\sqrt{x^2 - y^2}} \end{aligned}\right\} \text{součtem a rozdílem dostaneme}$$

$$\alpha)\quad \sqrt{x+y} = \sqrt{1/_2 (x + \sqrt{x^2 - y^2}} + \sqrt{1/_2 (x - \sqrt{x^2 - y^2})}$$

$$\beta)\quad \sqrt{x-y} = \sqrt{1/_2 (x + \sqrt{x^2 - y^2})} - \sqrt{1/_2 (x - \sqrt{x^2 - y^2})}.$$

Položíme-li místo $x \pm y$ jakýs dvojčlen buď nesměrný neb pomyslný **podoby** buď $\pm m \pm \sqrt{\pm n}$, nebo $\sqrt{\pm m} \pm \sqrt{\pm n}$, dostaneme **z rovnice** α) a β) buď

$$\gamma)\quad \sqrt{\pm m \pm \sqrt{\pm n}} = \sqrt{1/_2[\pm m + \sqrt{m^2 - (\pm n)}]}$$
$$\pm \sqrt{1/_2[\pm m - \sqrt{m^2 - (\pm n)}]}, \text{ aneb}$$

$$\delta)\quad \sqrt{\sqrt{\pm m} \pm \sqrt{\pm n}} = \sqrt{1/_2[\sqrt{\pm m} + \sqrt{\pm m - (\pm n)}]}$$
$$\pm \sqrt{1/_2[\sqrt{\pm m} - \sqrt{\pm m - (\pm n)}]}.$$

Na př.

$$\begin{aligned}\sqrt{3 \pm \sqrt{5}} &= \sqrt{{}^1\!/_2\,(3+\sqrt{9-5})} \pm \sqrt{{}^1\!/_2(3-\sqrt{9-5})}\\ &= \sqrt{{}^5\!/_2} \pm \sqrt{{}^1\!/_2} = {}^1\!/_2(\sqrt{10} \pm \sqrt{2}).\\ \sqrt{\sqrt{32} \pm \sqrt{24}} &= \sqrt{{}^1\!/_2(4\sqrt{2}+2\sqrt{2})} \pm \sqrt{{}^1\!/_2(4\sqrt{2}-2\sqrt{2})}\\ &= \sqrt{3\sqrt{2}} \pm \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}\,(\sqrt{3} \pm 1).\\ \sqrt{-4-3\sqrt{-1}} &= \sqrt{-4-\sqrt{-9}} = \sqrt{{}^1\!/_2\,(-4+5)}\\ &- \sqrt{{}^1\!/_2(-4-5)} = \sqrt{{}^1\!/_2} - 3\sqrt{-{}^1\!/_2}.\end{aligned}$$

$$\sqrt{2m + 2\sqrt{m^2-n^2}} = \sqrt{{}^1\!/_2[2m + \sqrt{4m^2 - (4m^2 - 4n^2)}]}$$
$$+ \sqrt{{}^1\!/_2[2m - \sqrt{4m^2 - (4m^2 - 4n^2)}]} = \sqrt{m+n} + \sqrt{m-n}.$$

Příklady.

1\. Přiveďte pod *jediné* kořenitko výrazy:

1) $\sqrt{3 \pm \sqrt{7}}.$ 2) $2\sqrt{5} \pm 3\sqrt{11}.$ 3) ${}^1\!/_2\sqrt{13} \pm {}^1\!/_3\sqrt{2}.$

4) $\sqrt{10+\sqrt{19}} \pm \sqrt{10-\sqrt{19}}.$ 5) $\sqrt{11+\sqrt{21}} - \sqrt{11-\sqrt{21}}.$

6) $\sqrt{15+\sqrt{56}} + \sqrt{15-\sqrt{56}}.$

7) $\sqrt{-3+4\sqrt{-1}} \pm \sqrt{-3-4\sqrt{-1}}.$

8) $\sqrt{16+2\sqrt{15}} - \sqrt{16-2\sqrt{15}}.$

9) $\sqrt{5(\sqrt{5}+3)} \pm \sqrt{5(\sqrt{5}-3)}.$ 10) $\sqrt{3+\sqrt{-7}} \pm \sqrt{3-\sqrt{-7}}.$

11) $\sqrt{5+2\sqrt{-6}} \pm \sqrt{5-2\sqrt{-6}}.$ 12) $a\sqrt{a} \pm b\sqrt{b}.$

13) $\sqrt{m+\sqrt{n}} \pm \sqrt{m-\sqrt{n}}.$ 14) $\sqrt{m+\sqrt{-n}} \pm \sqrt{m-\sqrt{-n}}.$

15) $\sqrt{-m+\sqrt{-n}} \pm \sqrt{-m-\sqrt{-n}}.$

16) $\sqrt{2m+3n+2\sqrt{3mn}} \pm \sqrt{2m+3n-2\sqrt{3mn}}.$

17) $\sqrt{4x^2+x+4x\sqrt{x}} \pm \sqrt{4x^2+x-4x\sqrt{x}}$

18) $\sqrt{7a^2b^3+cd^2+2abd\sqrt{7bc}} \pm \sqrt{7a^2b^3+cd^2-2abd\sqrt{7bc}}.$

19) $\sqrt{3a-5b+2\sqrt{-15ab}} \pm \sqrt{3a-5b-2\sqrt{-15ab}}.$

2\. Rozveďte na součet neb rozdíl *dvou* kořenů výrazy:

1) $\sqrt{7 \pm 2\sqrt{6}}.$ 2) $\sqrt{6 \pm \sqrt{11}}.$ 3) $\sqrt{13 \pm 4\sqrt{3}}.$

4) $\sqrt{17 \pm 3\sqrt{21}}.$ 5) $\sqrt{-3 \pm 4\sqrt{-1}}.$ 6) $\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}}.$

7) $\sqrt{8 \pm \sqrt{-17}}.$ 8) $\sqrt{-5 \pm 5\sqrt{-3}}.$

9) $\sqrt{\frac{4}{9} \pm \sqrt{-1{}^1\!/_3}}.$ 10) $\sqrt{(m+n)+\sqrt{2mn}}.$

11) $\sqrt{(5m^2-3n)+2m\sqrt{5n}}.$

12) $\sqrt{4m-7n+\sqrt{16m^2+52mn+49n^2}}.$

13) $\sqrt{2a+b\pm2\sqrt{-2ab}}.$ 14) $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}.$

15) $\sqrt{\sqrt{27}-2\sqrt{6}}.$ 16) $\sqrt{\sqrt{41}-\sqrt{32}}.$ 17) $\sqrt{2(\sqrt{11}+\sqrt{2})}.$

18) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{-20}}.$ 19) $\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{-30}}.$

20) $\sqrt{\sqrt{2m+1}+\sqrt{2m}}.$ 21) $\sqrt{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}}.$

22) $\sqrt{9+\sqrt{12}+\sqrt{20}-\sqrt{30}}$, polož $(9+\sqrt{12})=x$, a $(\sqrt{20}-\sqrt{30})=y$.

23) $\sqrt{11-2\sqrt{6}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}}.$ 24) $\sqrt{10+2\sqrt{10}-2(\sqrt{6}+\sqrt{15})}.$

25) $\sqrt{45-10\sqrt{6}-10\sqrt{2}+20\sqrt{3}}.$ 26) $\sqrt{19+4\sqrt{10}+2\sqrt{30}+8\sqrt{3}}.$

IX. Určité rovnice druhého stupně.

§. 33.

1. *Rovnice jest stupně druhého, je-li v ní nejvyšší mocnina neznámé veličiny čtverec.* Je-li neznámá pouze ve čtverci, říkáme rovnici té *prostá*, na př. $ax^2=b$. Je-li však neznámá v druhé a spolu v první mocnině, jest rovnice ta *složitá*, na př. $ax^2+bx=c$.

2. *Prostá rovnice druhého stupně* se řeší, přivedeme-li do jednoho dílu x^2 a do druhého všechny veličiny známé, načež se dobývá z obou dílů rovnice kořene druhého stupně, na př.

$$x^2=a$$
$$x=\pm\sqrt{a} \quad (\text{§. 26. 12}).$$

Rovnice $x=\pm\sqrt{a}$ učí nás, že má neznámá x dvě hodnoty čili *dva kořeny* sobě úplně rovné, avšak opáčných znamének, tak že

$$x_1=+\sqrt{a}, \quad \text{a} \quad x_2=-\sqrt{a}.$$

Každý z těchto kořenů, vložíme-li jej do původní rovnice, činí této zadost, neboť

$$x^2=(+\sqrt{a})^2=(-\sqrt{a})^2=a.$$

Podobně

$$x^2=81$$
$$x=\pm\sqrt{81}=\pm9$$
t. j. $x_1=+9,\ x_2=-9.$

$$x\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}}=\frac{b\sqrt{x}}{x}$$
$$x^2-a=b$$
$$x^2=a+b, \quad x=\pm\sqrt{a+b}.$$

3. *Složitá rovnice druhého stupně* má všeobecnou podobu:

$$ax^2\pm bx=\pm c, \text{ nebo}$$

$$x^2\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{c}{a}.$$

Položíme-li $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, dostaneme rovnici druhého stupně v podobě

$$x^2\pm px=\pm q, \text{ nebo i}$$

$$x^2+px\mp q=0.$$

Této poslední na 0 uvedené rovnici říkáme *trojčlen rovnicový*, a sice jest x^2, px, q první, druhý a třetí člen.

4. Má-li se *složitá rovnice druhého stupně řešiti*, převede se prvé na *prostou* rovnici téhož stupně, což se stane položíme-li na př. při rovnici

$$x^2\pm px=q$$

$$x=y\mp\frac{p}{2},$$

t. j. položíme-li neznámou veličinu x rovnu jiné neznámé a buď — polovičnému součiniteli *xu* v první mocnině, buď + témuž polovičnému součiniteli dle toho, má li druhý člen rovnice buď + nebo —. Neboť dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice původní, dostaneme

$$\left(y\mp\frac{p}{2}\right)^2\pm p\left(y\mp\frac{p}{2}\right)=q, \text{ z čehož plyne}$$

$$y^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+q \text{ nebo}$$

$$y=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}, \text{ tedy}$$

$$x=\mp\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$$

t. j. *v složité rovnici druhého stupně rovná se x polovičnému součiniteli neznámé v první mocnině s opáčným jeho znaménkem a ± kořenu druhého ze čtverce téhož polovičného součinitele a členu známého (třetího).*

Z výsledku $x=\mp\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$ opět patrno, že pro dvojí znaménko před kořenem má neznámá veličina vždy dva kořeny, a sice jest při rovnici

$$x^2+px=q,\quad x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q},$$

a při rovnici

$$x^2-px=q,\quad x_1=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q},\quad x_2=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}.$$

Na př. $x^2+3x=40$, $x=y-{}^3/_2$

$(y-{}^3/_2)^2+3(y-{}^3/_2)=40$

$y^2=({}^3/_2)^2+40$, $y=\pm\sqrt{({}^3/_2)^2+40}$ a

$x=-{}^3/_2\pm\sqrt{({}^3/_2)^2+40}=-{}^3/_2\pm\sqrt{\frac{169}{4}}$

$=-\frac{3}{2}\pm\frac{13}{2}$, z čehož

$x_1=5$, $x_2=-8$. Zkouška?

$x^2-4x=21$, řešena dle pravidla dá

$x=2\pm\sqrt{2^2+21}=2\pm5$

$x_1=7$, $x_2=-3$. Zkouška?

$x^2+(a-2b)x=2ab$

$x=-{}^1/_2(a-2b)\pm\sqrt{{}^1/_4(a^2-4ab+4b^2+8ab)}$

$=-{}^1/_2(a\quad 2b)\pm{}^1/_2(a+2b)$

$={}^1/_2[-(a-2b)\pm(a+2b)]$, z čehož

$x_1=2b$, $x_2=-a$. Zkouška?

5. Abychom se dozvěděli, kdy jest kořen neznámé veličiny (x) realný a co takový buď kladný buď záporný, a kdy jest pomyslný, pozorujme toto:

Poněvadž třetí (známý) člen rovnice složité může býti $\pm q$, dostaneme při rovnici

$$x^2\pm px=+q$$

a) $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$, a $x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$.

b) $x_1=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$, a $x_2=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$,

t. j. je-li q kladné, jest veličina kořenová *vždy realná*, proto jsou i *oba kořeny x-u realné*.

A poněvadž $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}>\frac{p}{2}$, jest v případě

a) i b) x_1 *kladné* a x_2 *záporné*.

Avšak při rovnici

$$x^2\pm px=-q\text{, jest}$$

a) $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$, a $x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

b) $x_1=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$, a $x_2=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

t. j. veličina kořenová jest buď *realná*, je-li $\left(\frac{p}{2}\right)^2>q$, nebo *po-*

myslná je-li $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$. Je-li $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$, jest $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} < \frac{p}{2}$ a proto jsou v případě

a) *oba kořeny neznámé x záporné*, a v případě

b) *oba kořeny neznámé x kladné.*

Je-li $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$ jsou *oba kořeny v obou případech* pomyslné.

6. *Jaká znaménka mají oba kořeny veličiny neznámé*, poznáme snadně z tohoto: Uvedeme-li rovnici složitou na 0, a jdou-li v trojčlenu rovnicovém dvě stejná znaménka za sebou na př. $++$ nebo $--$, říkáme tomu *posloupnosť*, a jdou-li dvě opáčná za sebou na př. $+-$ nebo $-+$, *změna* znamének. Porovnáme-li výsledky předešlé s trojčlenem rovnicovým, na který jsme byli tu kterou rovnici uvedli, poznáme, že má *rovnice ta tolik kořenů kladných, kolik změn, a tolik kořenů záporných, kolik posloupností přichází v jejím trojčlenu rovnicovém.* Tak na př. jest v trojčlenu rovnicovém:

$x^2 + px - q = 0$, jedna posloupnosť $(++)$, a jedna změna $(+-)$
a v rovnici
$x^2 - px - q = 0$, jedna změna $(+-)$, a jedna posloupnosť $(--)$,
proto mají obě rovnice jeden kořen kladný a druhý záporný atd.

7. *Součet obou kořenů rovnice složité druhého stupně rovná se součiniteli neznámé v první mocnině s opáčným znaménkem, a součin týchže kořenů se rovná třetímu (známému) členu rovnicového trojčlenu.*

Neboť nazveme-li v trojčlenu rovnicovém na př.

$$x^2 + px + q = 0$$

oba kořeny x-u vůbec m a n, jest dle předešlého

$$\left.\begin{array}{l} m = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ n = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{jejich součet a} \\ \text{součin} \end{array}$$

$m + n = -p$, nebo $-(m + n) = p$, a
$mn = q$.

8. Je-li tedy dle předešlého
$x = m$ a $x = n$, jest
$x - m = 0$ a
$x - n = 0$ součin obou rovnic dá
$(x - m) . (x - n) = x^2 - (m + n)x + mn = 0.$
Jelikož však $-(m + n) = p$, a $mn = q$, jest
$(x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + mn = x^2 + px + q = 0.$

Výrazům $x - m$ a $x - n$ říkáme *činitelé kořenoví*, a proto jest *každý trojčlen rovnicový součin činitelů kořenových*, tedy i dělitelný každým z těchto.

A naopak známe-li *oba kořeny* té které rovnice druhého stupně a je-li nám rovnice sama neznáma, můžeme ji dle uvedeného sestaviti. Na př.

Je-li jeden kořen $x = a - b$, a druhý kořen $x = a + b$, jest

$$\left.\begin{array}{r} x-(a-b)=0 \\ x-(a+b)=0 \end{array}\right\} \text{součinem}$$

$$\overline{x^2-2ax+a^2-b=0}$$

tedy hledaná rovnice jest $x^2-2ax=b-a^2$.

9. Poněvadž jest každý trojčlen rovnicový tedy i každá složitá rovnice druhého stupně součin dvou kořenových činitelů, můžeme i naopak každý algebraický výraz, který uvesti lze na podobu

$$rV=x^2+px+q,$$

kde r jest jakékoli číslo buď celé neb lomené, rozložiti na dva činitele.

Nebot položíme-li

$$rV=x^2+px+q=0,$$

vyhledejme z rovnice $x^2+px+q=0$ kořeny $x=\pm m$ a $x=\pm n$, z čehož pak bude

$$rV=(x\mp m)\,(x\mp n).$$

Na př. a) $V=x^2-5x+6.$

Položme $x^2-5x+6=0$, čili

$x^2-5x=-6$, z čehož

$x={}^1/_2(5\mp 1)$ t. j. $x_1=3$ a $x_2=2$, a proto se

$V=x^2-5x+6=(x-3)\,.\,(x-2).$

b) $V=3a^2-14a+8$

${}^1/_3V=a^2-{}^{14}/_3a+{}^8/_3$, čili

$a^2-{}^{14}/_3a=-{}^8/_3$, z čehož $a_1=4$, $a_2={}^2/_3$, tedy

${}^1/_3V=a-{}^{14}/_3a+{}^8/_3=(a-4)\,.\,(a-{}^2/_3)$, nebo

$V=3a^2-14a+8=(a-4)\,.\,(3a-2).$

c) $V={}^2/_3a^2+ab+\dfrac{b^2}{3}$, čili

${}^3/_2V=a^2+{}^3/_2ab+{}^1/_2b^2$, nebo

$a^2+{}^3/_2ab=-{}^1/_2b^2$; z čehož

$a_1=-{}^1/_2b$, $a_2=-b$, dosaženo

${}^3/_2V=a^2+{}^3/_2ab+{}^1/_2b^2=(a+{}^1/_2b)\,.\,(a+b)$, tedy

$V={}^2/_3a^2+ab+\dfrac{b^2}{3}={}^1/_3(2a+b)\,.\,(a+b).$

10. Přichází-li v kořenu neznámé veličiny buď nesměrný neb pomyslný dvojčlen na př. podoby $\pm\sqrt{m\pm\sqrt{\pm n}}$, pracujme dle §. 32. 2. Nebot

$$\sqrt{m+\sqrt{\pm n}}=\sqrt{{}^1/_2\,(m+\sqrt{m^2\mp n})}+\sqrt{{}^1/_2\,(m-\sqrt{m^2\mp n})},$$

$$\sqrt{m-\sqrt{\pm n}}=\sqrt{{}^1/_2\,(m+\sqrt{m^2\mp n})}+\sqrt{{}^1/_2\,(m-\sqrt{m^2\mp n})}.$$

S výhodou používá se těchto vzorců je-li $\sqrt{m^2 \mp n}$ číslo směrné, poněvadž se promění jen pak druhý kořen z nesměrného dvojčlenu buď v součet neb v rozdíl dvou neb vícero veličin kořenových. Kdyby však $\sqrt{m^2 - n}$ byl nesměrný, nechává se výraz původní. Na př.

$$x^2 - 2\sqrt{5}\,.\,x = \sqrt{24}, \quad m = 5, \quad \left.\begin{array}{l} m^2 = 25 \\ n \;= 24 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{druhý kořen} \\ \text{z rozdílu}\end{array}$$

$$\overline{\sqrt{m - n} = 1}$$

$$x = \sqrt{5} \pm \sqrt{5 + \sqrt{24}}$$

$$= \sqrt{5} \pm [\sqrt{{}^1/_2(5+1)} + \sqrt{{}^1/_2(5-1)}] = \sqrt{5} \pm (\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}, \qquad x_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

11. Veškeré rovnice podoby

$$\text{a)}\; x^{2m} + px^m = q$$

$$\text{b)}\; \sqrt[n]{x^m} + p\sqrt[2n]{x^m} = q,$$

$$\text{c)}\; \sqrt[n]{x^{2m}} + p\sqrt[n]{x^m} = q,$$

kde m a n jest číslo buď celé buď lomené, buď kladné neb záporné, lze řešiti pomocí rovnic druhého stupně. Aby se tak stalo, klade se obyčejně

v rovnici a) $x^m = y$, tedy $x^{2m} = y^2$,

„ b) $\sqrt[2n]{x^m} = y$, „ $\sqrt[n]{x^m} = y^2$,

„ c) $\sqrt[n]{x^m} = y$, „ $\sqrt[n]{x^{2m}} = y^2$,

ačkoliv můžeme i bez dosazení těchto pomocných veličin ihned určiti x^m, $\sqrt[2n]{x^m}$ a $\sqrt[n]{x^m}$, a z toho konečně x. Na př.

a) $x^6 - ax^3 = b$, položíme-li $x^3 = y$, $x^6 = y^2$, dostaneme $y^2 - ay = b$, a z toho

$$y = x^3 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}, \text{ tedy}$$

$$x = \sqrt[3]{{}^1/_2\,(a \pm \sqrt{a^2 + 4b})}.$$

b) $\sqrt[5]{x^3} - a\sqrt[10]{x^3} = b$,

$$\sqrt[10]{x^3} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b},$$

$$x = \sqrt[3]{\left[{}^1/_2(a \pm \sqrt{a^2 + 4b})\right]^{10}}$$

$$x = \frac{1}{8}\,(a \pm \sqrt{a^2 + 4b})^3\,.\,\sqrt[3]{{}^1/_2\,(a \pm \sqrt{a^2 + 4b})}.$$

$$\text{c)}\quad \sqrt[7]{x^6} + a\sqrt[7]{x^3} = b,$$

$$\sqrt[7]{x^3} = -{}^1/_2\,(a \mp \sqrt{a^2 + 4b}),$$

$$x = \sqrt[3]{[-{}^1/_2\,(a \pm \sqrt{a^2 + 4b})^7]}$$

$$= {}^1/_4(a \mp \sqrt{a^2 + 4b})^2\,.\,\sqrt[3]{-{}^1/_2\,(a \mp \sqrt{a^2+4b})}.$$

Dodatek. Občíslný zlomek řetězový jest nekonečný, a z pojmu o nekonečném vůbec plyne, že se toto nemění, pakli cosi konečného k němu buď přidáme buď od něho odebéřeme. Z té příčiny rovná se i ona část nekonečného řetězce, která po prvním občíslí následuje, úplné hodnotě celého zlomku, a proto můžeme *hodnotu občíslného řetězce vyhledati pomocí složité rovnice druhého stupně.* Neboť nazveme-li celý řetězec x, a je-li jeho občíslí

na př. $\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}$, jest

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + x}} = \cfrac{1}{\cfrac{3 + x}{2 + x}} = \frac{2 + x}{3 + x}, \text{ z čehož}$$

$$3x + x^2 = 2 + x, \text{ nebo}$$
$$x^2 + 2x = 2,$$
$$x = -1 \pm \sqrt{3}, \text{ nebo } x = -1 + \sqrt{3} = 0{\cdot}73205\ \ldots$$

Druhý kořen $x_2 = -1 - \sqrt{3} = -2{\cdot}73205\ \ldots$ nemůže míti zde místa (a nikde v podobných případech), poněvadž se jednak rovná zápornému zlomku nepravému, jednak však *tentýž* řetězec *dvou* hodnot míti nemůže.

12. *Úplná rovnice druhého stupně o dvou neznámých* vyjádřuje se vzorcem

$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$
$$a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0.$$

Je-li kterýkoli součinitel $= 0$, jest rovnice ta *neúplná,* avšak zůstává rovnicí druhého stupně, pakli alespoň jeden ze tří prvních členů $\gtreqless 0$. Je-li

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$$

jest uvedená rovnice stupně prvního.

Řešíme-li úplnou rovnici stupně druhého s ohledem k neznámé x, jest

$$x^2+\frac{b_1y+d_1}{a_1}x=-\frac{c_1y^2+e_1y+f_1}{a_1},\text{ z čehož}$$

$$\mathrm{x}=-\frac{b_1y+d_1}{2a_1}\pm\sqrt{\left(\frac{b_1y+d_1}{2a_1}\right)^2-\frac{c_1y^2+e_1y+f_1}{a_1}}.$$

A vložíme-li tuto hodnotu do druhé rovnice, dostaneme rovnici *stupně čtvrtého*, které na základě pouček dosud známých řešiti nelze.

Abychom tedy rovnici druhého stupně o dvou neznámých mohli řešiti, musí jedna z daných rovnic býti buď stupně prvního, aneb u porovnání s rovnicí druhou alespoň taková, aby po pravidelném oběma nakládání nebyla konečně neznámá veličina leč nejvýše v stupni druhém [nebo dokud se týče v stupni 4tém, 6tém . . . 2*n*tém (dle 11.)].

13. Rovnice druhého stupně o dvou neznámých jsou buď *prosté* buď *složité*. Jedny i druhé řeší se některým ze známých tří návodů (§. 22). Rovnice druhého stupně o třech a více neznámých řeší se podobně. Na př.

$$\left.\begin{array}{ll}1. & \dfrac{x}{y}=a\\ 2. & xy=b\end{array}\right\}\text{ součinem}$$

$$x^2=ab\text{ jest rovnice prostá, tedy}$$

$$x=\pm\sqrt{ab},\text{ dosazeno do 1. rovnice dá}$$

$$y=\frac{x}{a}=\pm\frac{\sqrt{ab}}{a}=\pm\sqrt{\frac{b}{a}},\text{ tedy}$$

$$x_1=\sqrt{ab},\ x_2=-\sqrt{ab},\ y_1=\sqrt{\frac{b}{a}},\ y_2=-\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\begin{array}{ll}1. & x^2+y^2=a\\ 2. & x+y=b^{*}),\text{ povýšena na mocninu druhou}\\ 3. & x^2+2xy+y^2=b^2,\text{ 1. rovnice odečtěna}\\ & -x^2\qquad\ -y^2=-a\\ \hline & 2xy=b^2-a,\text{ nebo}\\ & -4xy=-2b^2+2a,\text{ připočtěna k 3. rovnici dá}\\ & x^2-2xy+y^2=2a-b^2,\text{ z čehož}\\ & x-y=\pm\sqrt{2a-b^2},\text{ a 2. rovnice jest}\\ & x+y=b,\text{ součet a rozdíl obou dá}\\ \hline & x=\frac{1}{2}(b\pm\sqrt{2a-b^2})\\ & y=\frac{1}{2}(b\mp\sqrt{2a-b^2}).\end{array}$$

---

*) Je-li jedna rovnice $x+y$, pracuje se k tomu, aby se dostala rovnice $x-y$, ze součtu a rozdílu obou neznámých snadně se určí x a y.

1. $x^3+y^3=a$
2. $x+y=b$, povýšena na 3. mocninu a s 1. rov. porovnána:

$x^3+y^3=b^3-3x^2y-3xy^2=a$

$b^3-3xy(x+y)=a$, avšak $x+y=b$,
$b^3-3bxy=a$

$xy=\frac{b^3-a}{3b}$, násobena -4mi

$-4xy=-\frac{4b^3-4a}{3b}$, 2. rovn. zdvojmocněna:

$x^2+2xy+y^2=b^2$, obě sečteny

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\pm\sqrt{b^2-\frac{4b^3-4a}{3b}} \\ x+y&=b \end{aligned}\right\}\text{ součet a rozdíl}$$

$$x=\tfrac{1}{2}\left(b\pm\sqrt{\frac{4a-b^3}{3b}}\right)$$

$$y=\tfrac{1}{2}\left(b\mp\sqrt{\frac{4a-b^3}{3b}}\right).$$

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad (x^2+y^2)(x^3+y^3)=a \\ &2.\quad (x^2-y^2)(x^3+y^3)=b \end{aligned}\right\}\text{ součtem}$$

3. $(x^3+y^3)2x^2=a+b$, 1. rovn. dělena 2hou:

$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{a}{b}$, nebo
$bx^2+by^2=ax^2-ay^2$
$y^2(a+b)=x^2(a-b)$, z čehož
$y^2=\frac{x^2(a-b)}{a+b}$, nebo

4. $y=\pm x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, položíme-li $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=m$,

$y=\pm mx$, do 3. rovnice dá
$(x^3\pm m^3x^3)2x^2=a+b$, nebo
$2x^5(1\pm m^3)=a+b$, z čehož

$x=\sqrt[5]{\frac{a+b}{2(1\pm m^3)}}$, do čtvrté rovnice dá

$$y=\pm m\sqrt[5]{\frac{a+b}{2(1\pm m^3)}}.$$

$$\begin{array}{ll} 1. & \sqrt{x^2+y^2+z^2}=a \\ 2. & x+y+z=b \\ 3. & x(y+z)=c \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{z 2. rovn.} & y+z=b-x \\ \text{z 3. „} & y+z=\frac{c}{x} \end{array}\right\}\text{ porovnáním}$$

$x^2-bx=-c$, z čehož

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b}{4}-c}=m,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{z 1. rovn.} & y^2+z^2=a^2-m^2 \\ \text{z 2. „} & 4.\ (y+z)^2=(b-m)^2 \end{array}\right\}\text{ rozdíl}$$

$2yz=b^2-2mb-a^2+2m^2=n$, nebo

$4yz=2n$, odečtěno od 4. rovn. dá

$(y-z)^2=(b-m)^2-2n$, čili

$y-z=\pm\sqrt{(b-m)^2-n}$, ze 4. rovn. jde

$y+z=b-m$, součtem a rozdílem:

$$y=\tfrac{1}{2}\left[b-m\pm\sqrt{(b-m)^2-2n}\right]$$

$$y=\tfrac{1}{2}\left[b-m\mp\sqrt{(b-m)^2-2n}\right].$$

Příklady.

a) *Prosté rovnice druhého stupně o jedné neznámé.*

1) $7x^2=175$. 2) $7x^2-13=15$. 3) $(3-x)(3+x)=x^2-7$.

4) $(2x-3a)(2x+3a)=x^2+18a^2$. 5) $\frac{m}{m-x}=\frac{m+x}{x^2-1}$.

6) $3x+\sqrt{3+x^2}=\frac{3}{\sqrt{3+x^2}}$. 7) $\sqrt{a+\frac{b}{x}}+\sqrt{a-\frac{b}{x}}=c$.

8) $\frac{a+b}{1+\sqrt{x}}-\frac{a-b}{1-\sqrt{x}}=\frac{x^2-2a\sqrt{x}}{1-x}$

9) $\frac{a-b}{ax-a^2}\cdot x+\frac{b}{x}\cdot\frac{x+a}{a+b}=0$.

10) $\frac{1}{x+\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{3-x^2}}=x$.

11) $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{x+a}$.

12) $\frac{1}{\sqrt{x}-a}=\frac{2x}{a(2-x)}+\frac{1}{\sqrt{x}+a}$.

b) Složité rovnice druhého stupně o jedné neznámé.

1) $x^2-5x=6.$ 2) $x^2-14x=-45.$ 3) $12x^2+3\,{}^3/_5x={}^{14}/_{15}.$

4) $x^2+x={}^3/_4.$ 5) $x^2-3mx-n^2=3mn.$

6) $\frac{x^3-1}{x-1}(=x^2+x-1)=4\,{}^3/_4.$ 7) $\frac{x^3-a^3}{x-a}=a^2+ab+b^2.$

8) $120x-11x^2-301=0.$ 9) $(x-a)^2+bc=b(x-a+c).$

10) $(x-5)(x-3)=48.$ 11) $x^2-1=2m(x+1).$

12) $(x-a+b)(a-b-x)=0.$ 13) $x={}^1/_2g\left(t-\frac{x}{c}\right)^2.$

14) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{72}.$ 15) $\frac{12}{x-2}-1=\frac{12}{x}.$

16) $\frac{x(a-b)}{a(x-a)}+\frac{b(x+a)}{x(a+b)}=1.$ 17) $(x-\sqrt{-3})(x-\sqrt{-12})=0.$

18) $x-\sqrt{m^2+x^3}=\frac{x-2m^2}{2\sqrt{m^2+x^2}}.$ 19) $\sqrt{x+a}=x-a.$

20) $2x(\sqrt{a}-\sqrt{b})-x^2+2\sqrt{ab}=a+b.$

21) $x^2\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{2}}=\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{\sqrt{2b}}\right)x.$

22) $\frac{\sqrt{x+a}}{x-a}-\frac{a+1}{\sqrt{(x^2-a^2)(x-a)}}=\frac{x-a}{\sqrt{x+a}}.$

23) $\sqrt{(x+a)(x+b)}+\sqrt{(x-a)(x-b)}=\sqrt{4x^2+2ab}.$

24) $\sqrt{7+2x}\pm\sqrt{19+6x}\pm\sqrt{41+23x}=0.$*)

---

*) Rovnice, ve kterých přichází několik veličin kořenových, řešíme dle tohoto vzorce:

$\sqrt{a+\alpha x}+\sqrt{b+\beta x}+\sqrt{c+\gamma x}=0.$ Dokud se týče znaménka před kořenitkem, jsou zde 4 případy, totiž:

$$\left.\begin{array}{ll}
+\sqrt{a+\alpha x}+\sqrt{b+\beta x}+\sqrt{c+\gamma x}=0, & \text{nebo}\\
-\sqrt{a-\alpha x}+\sqrt{b+\beta x}+\sqrt{c+\gamma x}=0, & \text{„}\\
+\sqrt{a+\alpha x}-\sqrt{b+\beta x}+\sqrt{c+\gamma x}=0, & \text{„}\\
+\sqrt{a+\alpha x}+\sqrt{b+\beta x}-\sqrt{c+\gamma x}=0 &
\end{array}\right\}\text{součin těchto čtyř rovnic:}$$

$$-(a+\alpha x)^2-(b+\beta x)^2-(c+\gamma x)^2+2(a+\alpha x)(b+\beta x)+2(b+\beta x)(c+\gamma x)$$
$$+2(c+\gamma x)(a+\alpha x)=0.$$

Srovnáno:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\alpha\gamma)x^2$$
$$+2(\alpha a+\beta b+\gamma c-\alpha\beta-\alpha b-\gamma b-\beta c-\alpha c-\gamma a)x$$
$$+a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc=0.$$

Dle tohoto konečného výsledku nechť se řeší příklad 24. a 25.

25) a) $\sqrt{16+x}-\sqrt{x}=\sqrt{13-x}$.

25) b) $\dfrac{x+\sqrt{-x}}{x-\sqrt{-x}}=\dfrac{3+2x\sqrt{-x}}{x^2+x}$.

26) $\dfrac{\sqrt{-x}}{a-\sqrt{-x}}+\dfrac{a+\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}=\dfrac{x-a\sqrt{x}}{a-\dfrac{x}{a}}$.

27) $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+x}}=x$.   28) $x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+x}}}$.

29) $x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+x}}}}$.

c) *Rovnice stupňů vyšších.*

1) $x^4+40x^2=441$.   2) $x^4-12{}^1/_2x^2=-3{}^1/_{16}$.   3) $x\pm\sqrt{x}=20$.
4) $x\pm\sqrt{x}=a(a+1)$.   5) $6+\sqrt{x}=x$.   6) $\sqrt[3]{x^2}-30=7\sqrt[3]{x}$.
7) $21+8\sqrt[3]{x}=5\sqrt[3]{x^2}$.   8) $\sqrt[6]{(x+1)^5}+\sqrt[3]{(x+1)^5}=6$.
9) $\sqrt[5]{(x+a)^3}+a\sqrt[10]{(x+a)^3}=b(a+b)$.
10) $\sqrt[7]{(x-1)^4}-\sqrt[7]{(x-1)^2}={}^3/_4$.
11) $x^{3\,{}^1/_3}-2x^{1\,{}^2/_3}=3$.   12) $(x^2-a)^2+x^2=b$.
13) $(m-1)x^{1\,{}^3/_5}+m^2=m+(m^2-1)x^{{}^4/_5}$.
14) $[(a+2)x]^{1\,{}^2/_5}+4[(a+2)x]^{{}^7/_{10}}=a^2(a^2-4)$.
15) $(x^2-2ax+b^2)^2+(x-a)^2=c$.

d) *Rozveďte na činitele výrazy* $(=V)$.

1) $x^2+2x-15$.   2) $x^2+13x+42$.   3) $a^2-2ab-15b^2$.
4) $x^2+6xy-16y^2$.   5) $10a^2-17ab+3b^2$.
6) $4m^2n^2+11mnp-3p^2$.   7) ${}^1/_6a^2+{}^1/_{72}ab-{}^1/_{12}b^2$.
8) $a^2+3ab+4ac+2b^2+5bc+3c^2$.   9) $36a^2-9b^2+30bc-25c^2$.

10) $\frac{a^2}{bc} - \frac{2a}{d} + \frac{ac}{be} + \frac{bc}{d^2} - \frac{c^2}{de}$.

11) $a^4 - a^2b - 6b^2$.

12) $15x^4 + x^2(7y + 11) - 2y^2 + 3y + 2$.

13) $6x^6 + (5y^3 + z)x^3 - 6y^6 + 8y^3z - 2z^2$.

e) Rovnice druhého stupně o dvou a více neznámých.

1) $x^2 + y^2 = a$
$x^2 - y^2 = b$.

2) $x^2 + xy = 113$
$y^2 + xy = 31$.

3) $(7x)^2 - (5y)^2 = 41$
$(3x)^2 + (2y)^2 = 145$.

4) $x \pm y = a$
$xy = b$.

5) $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x}{c}(x + 1)$
$\frac{x}{y} = c$.

6) $x^2 + y^2 = 116$
$x + y = 14$.

7) $x^2 + y^2 = a$
$x - y = b$.

8) $x^2 + y^2 + xy = a$
$xy = b$.

9) $x + y = xy = x^2 - y^2$.

10) $x^2 \pm y^2 = a$
$xy = b$.

11) $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[5]{y^2} = a$
$\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[5]{y} = b$.

12) $x\sqrt{xy} + y^2 = a$
$y\sqrt{xy} + x^2 = {}^1/_2\, a$

1. rovn. se × x, a z této x^2 se vloží do 2. rovn. atd.

13) $(x^2 + ay^2)(x^2 - 2ay^2) = m$.
$x^2 - ay^2 = n$.

14) $x + y = 137$.
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 15$.

15) $x \pm \sqrt{xy} = a$
$x + y = b$.

16) $(x - {}^1/_2)^2 + (y - {}^1/_2)^2 = 25$
$(x - 1{}^1/_2)^2 + (y - 1{}^1/_2)^2 = 5$.

17) $x + y + x^2 + y^2 = a$
$x - y + x^2 - y^2 = b$.

18) $x^4 \pm y^4 = a$
$x \pm y = b$.

19) $x + y = 1027$
$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 13$.

20) $x^3 + y^3 = (x + y) = axy$.

21) $x^a y^b = m$
$x^c y^d = n$.

22) $(x + \frac{1}{x}) + (y + \frac{1}{y}) = a$
$(x - \frac{1}{x}) \cdot (y - \frac{1}{y}) = b$.

23) $$\begin{aligned} xy &= a \\ xz &= b \\ yz &= x. \end{aligned}$$

24) $$\frac{xy}{z} = a \qquad \frac{xz}{y} = b \qquad \frac{yz}{x} = c.$$

25) $$\begin{aligned} xy + xz &= a \\ xy + yz &= b \\ xz + yz &= c. \end{aligned}$$

26) $$\begin{aligned} \frac{x+y}{xyz} &= 35 \\ \frac{y+z}{xyz} &= 20 \\ \frac{x+z}{xyz} &= 27. \end{aligned}$$

27) a) $$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} &= 0 \\ \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) &= 7/_{30} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1\,^1/_{30}. \end{aligned}$$

27) b) $$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ \alpha x + \beta x + \gamma z &= b \\ x^2 + y^2 + z^2 &= c. \end{aligned}$$

28) $$\left.\begin{aligned} x + y + z + u &= a \\ xy + zu &= b \\ xz + yu &= c \\ xu + yz &= d. \end{aligned}\right\}$$ 1. rovn. se zdvojmocní a do této se dosadí 2., 3., 4. rovn., k nové rovn. se dá $\pm$ 4. rovn., pak 2. a 3. rovn. se sečte atd.

29) Několika osobám bylo dáno 60 zl. stejným dílem, kdyby počet osob byl o 3 větší, byla by každá o 1 zl. dostala méně. Kolik osob se podělilo?

30) Dělím-li 360 jakýmsi číslem, dostanu o 15 více nežli kdybych je byl dělil číslem o 2 větším. Kterým číslem jsem dělil?

31) Rozdíl třetích mocností dvou po sobě jdoucích čísel jest 331 (n), která jsou ta čísla?

32) Rozdíl třetích mocností dvou o d jednic rozdílných čísel jest n. Jak se vyjádří ta čísla?

33) Rozděl 13 na takové dva sčítance, aby součet jejich čtverců byl 97. Kteří jsou ti sčítanci.

34) Rozděl číslo a na dva díly, tak aby byl jeden z nich střední měřicky úměrná k číslu a a k dílu druhému. Které jsou ty díly?

35) Jezdec dojede z A do B za $13^1/_2$ hodiny. Současně vyjede druhý jezdec z místa C, které jest za A 3 míle, a jede též do B. Aby tam s prvním jezdcem dorazil touže dobou musí při každých 5ti mílích získati $^3/_4$ hodiny. Jak daleko jest z A do B?

36) Je-li $13^1/_2$, 3, 5 a $^3/_4$ vůbec a, b, c, d, jak se vyjádří vzdálenost A od B?

37) Ze stanic A a B, které jsou od sebe 50 mil vzdáleny vyjedou touže dobou dva parní vlaky a potkají se za 6 hodin. Pakli jeden z nich potřeboval na každou míli 6 minut ($^1/_{10}$ hodiny) více nežli druhý, za který čas urazil každý míli cesty?

38) Jak se vyjádří onen čas, nazveme-li 50, 6, $^1/_{10}$ vůbec m, t, s?

39) Z A do B vyjede dostavník o $1^3/_4$ hodiny dříve nežli z B do A rychlík. Za $2^1/_4$ hodiny po vyjetí rychlíku oba se potkají a dorazí stejným časem dokud se týče do B a do A. Za kolik hodin vykonal každý z nich svou cestu?

40) Jak se vyjádří onen čas, nazveme-li $1^3/_4$ a $2^1/_4$ vůbec m a n?

41) S bodů A a B, jichž vzdálenost jest 1200 stop, pohybují se dvě tělesa proti sobě. Těleso s bodu A vyjde o 4 sekundy později nežli ono s bodu B, avšak urazí za sekundu 5 stop více nežli toto. Potkají-li se obě tělesa na půl cestě, kolik stop urazí každé za sekundu?

42) Jak se vyjádří počet stop, nazveme-li 1200, 4, 5 vůbec m, t, p?

43) Dvě světla jsou postavena v bodech A a B, jichž vzdálenost od sebe jest 18 stop. Mají-li se světlosti onech světel k sobě jako 4 : 1, ve kterém bodě jest světlost obou stejná a) je-li bod ten v přímce AB, b) je-li bod ten 8 stop stranou přímky AB? (Světlosti ubývá v poměru čtverců vzdálenosti.)

44) Jak se vyjádří x v obou případech, nazveme-li 18, 4, 1, 8 vůbec d, a, b, p?

45) Rozdíl čtverců dvou čísel jest 51, přidáme-li k prvnímu číslu 3 a k druhému 1, jest rozdíl jejich čtverců 105. Která jsou ta čísla?

46) Součin dvou čísel, z nichž jedno jest o 16 větší druhého, jest 161. Která jsou to čísla?

47) Rozdíl dvou čísel jest d, a rozdíl jejich mocnin třetího stupně r, jak se vyjádří ona čísla vůbec, a která jsou to, je-li $d = 3$ a $r = 657$?

48) Dva parní vlaky vyjedou současně z A a B, a jedou proti sobě stejnou rychlostí. Když se byly minuly, vykonal vlak z A cestu o 20 mil delší nežli vlak z B. Dorazí-li onen na to za 6 hodin do B a tento za $16^2/_3$ hodiny do A, jak daleko jest A od B?

X. Logaritmy.

A. Výklad a poučky o logaritmech vůbec.

§. 34.

1. V každé rovnici podoby

$$b^m = M$$

říkali jsme dosud veličině b mocněnec čili kořen, m mocnitel a M mocnina. Veličiny tyto mají však ještě jiné jméno, a sice říkáme kořenu b *základ* (*basis*) a m *logaritmus* mocniny nebo vůbec čísla M, tak že píšeme:

$$m = {}^{b}\log. M$$

a čteme: m jest logaritmus čísla M při základě b. Tak jest na př. v rovnici

$$\begin{aligned} 2^5 &= 36, & 5 &= {}^{2}\log.36, \\ 3^2 &= 9, & 2 &= {}^{3}\log.9, \\ 5^3 &= 125, & 3 &= {}^{5}\log.125, \\ 10^4 &= 10000, & 4 &= {}^{10}\log.1000, \text{ atd.} \end{aligned}$$

Kde se základ za známý považuje, nepíše se zvlášť, a logaritmus čísla takového se jen naznačuje skráceně *log.* Z té příčiny budeme při známém základě pouze psáti $m = \log. M$. Je-li však základ jiný nežli jaký se vůbec vyrozumívá, píše se „logaritmus“ skráceně buď *l*, *ln* nebo *λογ*. Vyjádří-li se veškerá čísla dekadická v přirozeném pořádku po sobě jdoucí co mocniny *téhož základu*, a sestaví-li se se svými logaritmy v přehledný celek, nazýváme takový soujem všech čísel *soustavu logaritmickou*. Tato béře své jméno *od základu*, na němž zbudována, a jest vypsána ve zvláštních *tabulkách logaritmických.*

2. *V téže soustavě logaritmické náležejí k stejným číslům stejné logaritmy.* Je-li totiž

$$\begin{aligned} M &= N \text{ a spolu} \\ b^m = M &= N, \text{ jest dle předešlého} \\ m = \log. M &= \log. N \text{ (při známém základě } b). \end{aligned}$$

Z rovnice $\log. M = \log. N$, která vznikla z rovnice

$$M = N,$$

plyne, že *každou rovnici lze logaritmovati*, a spolu i naopak z toho patrno, že *jsou-li si logaritmy dvou čísel rovny i čísla ona sobě rovna jsou.*

3. *Logaritmus každého základu se rovná 1 a log.1=0.* Nebot
z rovnice $b^1 = b$ plyne $1 = \log. b$, a
z rovnice $b^0 = 1$ „ $0 = \log. 1$.

4: *Logaritmus součinu se rovná součtu logaritmů činitelů.*

$$\log. MN = \log. M + \log. N.$$

Nebot je-li $b^m = M$ jest $m = \log. M$
a je-li $b^n = N$ „ $n = \log. N$
součin $b^{m+n} = MN$, a součet $m + n = \log. M + \log. N$ } porovnáním
$b^{m+n} = MN$ znamená, že se $m + n = \log. MN$,
$\log. MN = \log. M + \log. N$.

Na př. $\log. 30 = \log. (5 . 6) = \log. 5 + \log. 6$,
$\log. 3059 = \log. 7 . 19 . 23 = \log. 7 + \log. 19 + \log. 23$ atd.

Jsou-li tedy logaritmy prvočísel známy, lze sečítáním jich dostati logaritmy součinu, tedy i každého čísla složitého.

$$\begin{array}{l}\log.\ 5ab = \log.\ 5 + \log.\ a + \log.\ b,\\ \log.(a^2-1) = \log.(a+1)(a-1) = \log.(a+1) + \log.(a-1),\\ \log.2a(b+c)(d+e) = \log.2 + \log.a + \log.(b+c) + \log.(d+e),\ \text{atd.}\end{array}$$

5. *Logaritmus zlomku rovná se logaritmu čitatele méně logaritmu jmenovatele.*

$$\log.\frac{M}{N} = \log.M - \log.N.$$

$$\begin{array}{llll}\text{Neboť je-li} & b^m = M & \text{jest} & m = \log.M\\ \text{a}\quad „ & b^n = N & „ & n = \log.N\\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{dělením jest } b^{m-n} = \frac{M}{N}, \text{ a odečtěním } m-n = \log.M - \log.N\\ \text{avšak } b^{m-n} = \frac{M}{N} \text{ znamená, že se } m-n = \log.\frac{M}{N},\end{array}\right\}\ \text{porovnáním}$$

$$\log.\ \frac{M}{N} = \log.\ M - \log.\ N.$$

Na př. $\log.\ {}^{12}/_{13} = \log.12 - \log.13,$

$\log.\ {}^{1}/_{41} = \log.1 - \log.41 = -\log.41$ (dle 2),

$\log.\frac{5ab}{7cd} = \log.\ 5ab - \log.\ 7cd = \log.5 + \log.\ a + \log.\ b - (\log.7 + \log.\ c + \log.\ d),$

$\log.\frac{3ab}{a^2-b^2} = \log.3 + \log.a + \log.b - [\log.(a+b) + \log.(a-b)],$

$\log.\ \frac{1}{abc} = -(\log.\ a + \log.\ b + \log.\ c)$, atd.

6. *Logaritmus mocniny se rovná součinu z mocnitele a z logaritmu mocněnce.*

$$\log.M^n = n \log.\ M$$

$$\left.\begin{array}{llll}\text{Neboť je-li} & b^m = M \text{ jest } m = \log.M, & \text{a} & mn = n \log.M\\ „\quad „ & b^{mn} = M^n\ „ & & mn = \log.M^n\end{array}\right\}\ \text{porovnáním}$$

$$\log.M^n = n \log.M.$$

Na př. $\log.\ 125 = \log.\ 5^3 = 3 \log.\ 5,$

$\log.(5a)^2 = 2 \log.\ 5a = 2(\log.\ 5 + \log.\ a),$

$$\begin{array}{rl}\log.\ \frac{a^3b^2}{c^2d^4} & = \log.\ a^3b^2 - \log.\ c^2d^4\\ & = \log.\ a^3 + \log.\ b^2 - (\log.\ c^2 + \log.\ d^4)\\ & = 3 \log.\ a + 2 \log.\ b - (2 \log.\ c + 4\log.\ d)\end{array}$$

$\log.\frac{(a+b)^m}{(c+d)^{x-y}} = m \log.(a+b) - (x-y) \log.(c+d),$

$\log.\ \frac{a^{-m+n}.\ b^2}{c^{-m}.\ d^{m-n}} = (-m+n) \log.\ a + 2\log.\ b - (-m\log.c + (m-n) \log.\ d) = (n-m) \log.\ a + 2 \log.\ b + m \log.c - (m-n) \log.\ d.$

7. *Logaritmus veličiny kořenové se rovná logaritmu veličiny pod kořenitkem dělenému odmocnitelem.*

$$\log.\sqrt[n]{M}=\frac{\log.M}{n}={}^1/_n\log.M$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Neboť je-li } b^m=M, \text{ jest } m=\log.M \text{ a } \dfrac{m}{n}=\dfrac{\log.M}{n} \\ \text{a } „\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{M}, \text{ čili} \\ b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{M} \text{ jest } \quad \dfrac{m}{n}=\log\sqrt[n]{M} \end{array}\right\}\text{porovnáním}$$

$$\log.\sqrt[n]{M}=\frac{\log.M}{n}={}^1/_n\log.M.$$

Na př. $\log.\sqrt[7]{9}=\frac{1}{7}\log.9$,

$\log.\sqrt{ab}={}^1/_2(\log.a+\log.b)$,

$\log.\sqrt{\frac{a}{b}}={}^1/_2(\log.a-\log.b)$,

$\log.\frac{5\sqrt[4]{a^3}}{b^2}=\log.5\sqrt[4]{a^3}-\log.b^2=\log.5+{}^3/_4\log.a-2\log.b$,

$\log.\frac{1}{\sqrt[m]{a^2-b^2}}=-\log.\sqrt[m]{a^2-b^2}=-{}^1/_m[\log.(a+b)+\log.(a-b)]$,

$\log.\frac{m\sqrt[x]{n}}{\sqrt[y]{mn}}=\log.m+{}^1/_x\log.n-{}^1/_y[\log.m+\log.n]$,

$\log.\sqrt[m]{[a\sqrt[n]{(b\sqrt[p]{c}]}}={}^1/_m\log.a\sqrt[n]{(b\sqrt[p]{c})}={}^1/_m[\log.a+{}^1/_n\log.(b\sqrt[p]{c})]={}^1/_m[\log.a+{}^1/_n(\log.b+{}^1/_p\log.c)]$.

8. *Logaritmus nicky jest záporně nekonečný* t. j.

$$\log.0=-\infty.$$

Neboť místo nicky můžeme položiti kterékoli číslo dělené ∞, tedy i

$$0=\frac{b}{\infty}=\frac{b}{b^\infty}, \text{ z toho pak}$$

$\log.0=\log.\frac{b}{b^\infty}=\log.b-\infty\log.b$, $\log.b=1$, proto

$\log.0=-\infty$.

9. *Je-li základ kladný, jest logaritmus záporného čísla pomyslný* (i).

$$\log.(-x) = i.$$

Neboť je-li základ b kladný, jest b^n kladné, a $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ též kladné, za kterouž příčinou může se pouze $n = i$, aby se

$$b^i = -x, \text{ čili } i = \log.(-x).$$

Příklady.

1. Které logaritmy náležejí k číslu 4096 na základě 2, 4, 8 16, 64 a 4096?

2. Jak velký je logaritmus čísla $\frac{64}{81}$ na základě $^2/_3$, a na základě $^4/_9$?

3. Které logaritmy náležejí k číslům $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, a $\frac{1}{125}$ na základě 5, a které k číslům $\frac{5}{7}$, $\frac{25}{49}$, a $\frac{125}{343}$ na základě $^5/_7$?

4. Vypočítejte: 1) $^9\log.3$. 2) $^4\log.64$. 3) $^8\log.32$. 4) $^{81}\log.3$. 5) $^8\log.{}^1/_2$. 6) $^{36}\log.\frac{1}{6}$. 7) $^5\log.\frac{1}{125}$.

5. Kterému číslu se rovná $\log.a$, kterému $\log.(a^x.a^y)$ a $\log.(a^x : a^y)$ na základě a?

6. Čemu se rovná: 1) $\log.(10ab)$. 2) $\log.(100mnp)$. 3) $\log.(a^2-b^2)$. 4) $\log.(a+b)(c+d)$. 5) $\log.a(a^2-1)$. 6) $\log.(a^4-b^4)$. 7) $\log.(x^2-y^2)(x+y)$. 8) $\log.1000(x^2-y^2)(x-y)$?

7. Čemu se rovná: 1) $\log.\frac{ab}{c}$. 2) $\log.\frac{10abc}{de}$. 3) $\log.\frac{a+b}{a-b}$. 4) $\log.\frac{10}{a^2-b^2}$. 5) $\log.\frac{1}{a}$. 6) $\log.\frac{1}{mn}$. 7) $\log.\frac{7abc}{10cd}$. 8) $\log.0{\cdot}7$. 9) $\log.0{\cdot}07$. 10) $\log.0{\cdot}007$. 11) $\log.\frac{a}{a+\frac{b}{c}}$. 12) $\log.\frac{a+b}{a-\frac{b^2}{a}}$?

8. Čemu se rovná: 1) $\log.a^x$. 2) $\log.a^{x+y}$. 3) $\log.a^{xy}$. 4) $\log.(a+b)^{x+y}$. 5) $\log.(a+1)^4$. 6) $\log.(a^xb^y)$. 7) $\log.(ab)^m$. 8) $\log.(ab^m)^n$. 9) $\log.[10(a+b)^m]^n$. 10) $\log.\frac{a^mb^nc}{d^pq}$. 11) $\log.\frac{(a^xb^yc^z)^n}{a^yb^zc^x}$. 12) $\log.a^{-m}$.

13) $\log.\frac{a^{m-1}b^{m+1}}{c^{m+2}d^m}$. 14) $\log.\left(\frac{2a^5b^3c^4}{3d^2e}\right)^6$. 15) $\log.\frac{a^{x-y}.b^{-z}}{c^{-u}.d^{x+y}}$.

16) $\log.\frac{1}{a^mb^nc^p}$. 17) $\log.\frac{1}{a^{-m}b^{-n}c^{-p}}$. 18) $\log.\frac{(a+b)^{\frac{x}{y}}.(ab)^{x-y}}{(a-b)^{xy}.(a:b)^{x+y}}$.

19) $\log.\left(\frac{a^mb^n.c^{mn}.d}{a^nb^m.c.d^{nm}}\right)^n$?

9. Čemu se rovná: 1) $\log.\sqrt{a}$. 2) $\log.\sqrt[3]{a^2}$. 3) $\log.\frac{\sqrt{ab}}{c}$.

4) $\log.\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[4]{a^3b}}$. 5) $\log.\frac{a\sqrt[x]{a}}{b\sqrt[y]{ab}}$. 6) $\log.a^m\sqrt[n]{\left(\frac{b}{c}\right)^p}$.

7) $\log.a^m\sqrt[n]{a\sqrt[p]{a}}$. 8) $\log.\frac{a^mb^n}{\sqrt[n]{(bc^p)^q}}$. 9) $\log.\sqrt[5]{\left(\frac{a^2b^{-3}}{a^{-5}b^2}\right)^3}$.

10) $\log.\frac{\sqrt{a}.\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[4]{a^3}}{a\sqrt[5]{a^4}.\sqrt[6]{a^5}}$. 11) $\log.10\sqrt[7]{\frac{a\sqrt[5]{b^3}}{c\sqrt{d}\sqrt[3]{e^2}}}$.

12) $\log.\left(\frac{a^2b^3\sqrt[5]{a^4}.\sqrt[3]{b^2}}{cd^4\sqrt[3]{a^2}.\sqrt{b}}\right)^4$. 13) $\log.\frac{\sqrt{(a^2-b^2)^{-3}.(c^2-d^2)^{-5}}}{\sqrt[3]{(a^2-c^2)^{-2}.(b^2-d^2)}}$.

14) $\log.\frac{\sqrt[x]{m+n}.\sqrt[y]{mn}}{\sqrt[x+1]{m-n}.\sqrt[y-1]{mn}}$. 15) $\log.\sqrt[m]{[a\sqrt[m]{(a\sqrt[m]{(a\sqrt[m]{a})})}]}$.

16) $\log.2\sqrt{[2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2})})}]}$. 17) $\log.(\log.10^x)$.

18) $\log.(\log.\sqrt[m]{10^n})$. 19) $\log.(\log.a^x)$. 20) $\log.\left(\log.\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}}\right)$.

10. Kterého výrazu jest logaritmus:

1) $\frac{m}{n}\log.p+\frac{m}{p}\log.n-\frac{n}{p}\log.m$.

2) $\frac{m+n}{m-n}[\log.(m+n)-\log.(m-n)]$?

B) Základ soustavy logaritmické.

§. 35.

1. Základem praktické soustavy logaritmické může býti pouze takové číslo, které povyšováno jsouc posloupně na *vyšší mocniny* dává i *větší čísla realná.*

2. Základem soustavy logaritmické nemůže býti 1, poněvadž

$$1^m = \sqrt[m]{1} = 1,$$

tím méně jím může býti nicka.

3. Mocniny čísla záporného na př. $(-a)^m$ jsou buď kladné buď záporné, je-li m kterékoli číslo celé (§. 25. 4), a buď kladné neb záporné, buď realné neb pomyslné, je-li $m < 1$ t. j. je-li m pravý zlomek. Na př.

$$(-a)^{1/2} = \sqrt{-a} = i\sqrt{a},$$

$$(-a)^{2/3} = \sqrt[3]{a^2},$$

$$(-a)^{3/5} = -\sqrt[5]{a^3} \text{ atd.}$$

Z té příčiny nehodí se ani číslo záporné za základ praktické soustavy logaritmické.

4. Kdyby se vzal pravý zlomek na př. $\frac{1}{a}$ za základ soustavy logaritmické, byly by sice logaritmy *menších* čísel nežli $\frac{1}{a}$ *kladné*, avšak čísel *větších*, *záporné*, na př. $\left(\frac{1}{a}\right)^{-3} = a^3$ tedy

$$-3 = \log. a^3, \text{ základ } \frac{1}{a} \text{ atd.}$$

Z té příčiny se ani pravý zlomek nehodí za základ praktické soustavy logaritmické.

Z toho ze všeho patrno, že základem soustavy logaritmické může býti pouze číslo, které jest 1) *kladné* a 2) *větší nežli 1.*

5. Vezme-li se za základ kladné $b > 1$, jest

$$b^0 = 1,\ b^1 = b,\ b^2 = c,\ b^3 = d, \ldots\ldots b^m = M, \text{ kde}$$

$$1 < b < c < d < \ldots\ldots < M,$$

poněvadž mocniny kladného čísla jsou tím větší, čím větší jsou jeho mocnitelé.

Z téhož patrno, že
$0=\log.1$, $1=\log.b$, $2=\log.c$, $3=\log.d$. . . . . $m=\log.M$, t. j. *k větším číslům náležejí větší a tedy k menším číslům menší logaritmy.*

Jsou-li mimo to mocnitelé 1, 2, 3, 4 . . . m kladnými, jsou i mocniny 1, b, c, d, . . . M kladné t. j. *ke kladným číslům větším jednice náležejí kladné logaritmy.*

A poněvadž $b^{-m} = \frac{1}{b^m} = \frac{1}{M}$, jest

$$-m = \frac{1}{M}, \text{ kde } \frac{1}{M} < 1$$

t. j. *pravé zlomky mají záporné logaritmy.*

6. *Je-li znám logaritmus kteréhokoli čísla na základě b, vypočítáme logaritmus téhož čísla na jiném základě na př. e, pakli jeho známý logaritmus na základě b násobíme logaritmem čísla b, vypočítaným na základě e.*

Je-li totiž dán $m=\log.M$, položme
$n=\lambda o\gamma.M$ na základě e, t. j.

$$\left.\begin{array}{l} b^m = M \\ e^n = M \end{array}\right\} \text{porovnáním}$$

$e^n = b^m$, logaritmováno na základě e
$n\,\lambda o\gamma.\,e = m\,\lambda o\gamma.\,b$, $\lambda o\gamma.e = 1$, místo n a m jejich hodnoty dosazeny
$\lambda o\gamma.\,M = \log.M\,.\,\lambda o\gamma.\,b$.

C. *Logaritmy obecné.*

§. 36.

1. V soustavě *logaritmů obecných* čili *Briggových**) jest základem číslo 10. Poněvadž se

$10^0=1$, jest log. $1=0$,
$10^1=10$, „ log. $10=1$,
$10^2=100$, „ log. $100=2$,
$10^3=1000$, „ log. $1000=3$, atd.

A poněvadž se $10^{-1}=0{\cdot}1$, jest log. $0{\cdot}1 = -1$,
$10^{-2}=0{\cdot}01$, „ log. $0{\cdot}01 = -2$,
$10^{-3}=0{\cdot}001$, „ log. $0{\cdot}001 = -3$ atd.

Z toho patrno, že pouze logaritmy *mocnin* čísla 10, nechť kladné nechť záporné, jsou čísla celá. Logaritmy všech čísel mezi

---

*) Brigg je vydal r. 1618.

0 a 10, 10 a 100, 100 a 1000 atd. nejsou tedy čísla celá, nýbrž zlomky, a sice logaritmy čísel od 0—10 zlomky pravé, od 10 však výše (vyjma mocniny čísla 10) zlomky nepravé. Veškeré tyto zlomky vyjádřují se (nekonečnými) desetinci, z kteréž příčiny se každý logaritmus čísel celých (vyjma mocniny čísla 10) skládá z čísla celého, jemuž říkáme *charakteristika* (význak) a která i 0 býti může, a z desetinek, jimž se říká *mantissa* (dodatek). Logaritmy všech *pravých zlomků desetinných* mají *zápornou* charakteristiku, jejich mantissa jest kladná a též (nekonečný) desetinec.

2. *Charakteristika logaritmu čísla celého jest vždy o 1 menší nežli počet cifer téhož čísla.*

Neboť má-li celé číslo M n cifer, jest

$M < 10^n$, avšak $M > 10^{n-1}$, tedy jest i
$\log. M < n$, „ $\log. M > n-1$,

z které příčiny může míti $\log. M$ pouze číslo $(n-1)$ za charakteristiku. Z toho soudíme i naopak, že jest počet cifer čísla celého o 1 větší nežli charakteristika jeho logaritmu. Tak náležejí na př. k číslům

75863,	7586,	758,	75,	7	logaritmy s charakteristikou:
4,	3,	2,	1,	0	atd.

3. *Charakteristika pravého zlomku desetinného jest vždy záporná* (*1*), *a drží tolik jednic, kolik nicek se nalezá před první platnou číslicí, i nicku na místě celých v to počítaje.*

Neboť pravý zlomek desetinný vůbec vyjádřujeme $\frac{a}{10^m}$, tedy jeho logaritmus jest

$$\log. \frac{a}{10^m} = \log. a - m.$$

Je-li čítatel a n-ciferný (má-li n platných číslic co číslo), jest charakteristika jeho logaritmu $n-1$ (2.). Avšak mocnitel m udává vůbec počet míst v desetinci, proto se vyjádřuje charakteristika zlomku desetinného rozdílem charakteristiky platných míst v čítateli a počtem jeho míst vůbec, totiž

$$(n-1)-m.$$

Je-li $n = m$, jest charakteristika -1,
$n = m-1$ jest „ -2,
$n = m-2$ „ „ -3 atd.

Poněvadž však ve výrazu $m-1$, $m-2$ atd. udává menšitel -1, -2 atd. počet nicek před a, a poněvadž charakteristika toho kterého desetince jest ještě o -1 větší, počítá se k těmto nickám i nicka na místě celých.

Tak na př. náležejí k číslům:	7·3,	0·73,	0·073,	0·0073	atd.
logaritmy s charakteristikou:	0,	—1,	—2,	—3	atd.

4. *Mantissa dvou čísel M a N, z nichž jedno jest 10^m-krát větší neb menší druhého* (kde m = číslu celému) *zůstává tatáž, a pouze charakteristika se mění.*

Neboť je-li log.$M=x$ a $N=M.10^{\pm m}$, jest (dle §. 34. 4. 6)

$$\log.N=\log.M\pm m=x\pm m.$$

Poněvadž jest x buď pravý buď nepravý zlomek desetinný a m vždy číslo celé, může se m pouze k číslu celému, které jest v x obsaženo, buď připočísti aneb od něho odečísti, avšak mantissa v x zůstane bez proměny a kladná. Z té příčiny mají na př. čísla 8·675, 86·75, 867·5, 8675, 0·8675, 0·08675 atd. rozličné charakteristiky, avšak tutouž mantissu.

5. Každé číslo větší nežli 10 můžeme přivesti na číslo menší 10ti, dělíme-li je mocninou 10^n, tak na př. číslo 37851 promění se dělením 10^4 v číslo 3·7851 atp. Poněvadž mantissa logaritmů takových čísel jest tatáž, dostaneme logaritmy všech čísel, vypočítáme-li mantissy pouze čísel (celých i desetinců nepravých) od 1 do 10. Návod k takovému *obmezení* mantiss logaritmů všech čísel na mantissy logaritmů čísel od 1 do 10 jest tento:

Z čísla 10 dobývá se kořene druhého stupně, z toho opět kořene druhého stupně a t. d. z každého kořene příštího, až se přijde na kořen, který jest o velmi nepatrné číslo větší nežli 1. Tyto kořeny, totiž $\sqrt{10}$, $\sqrt{\sqrt{10}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$ atd. a jejich logaritmy (na 5 desetinných míst) vypočítané dle vzorce log. $\sqrt[2n]{10}=\frac{1}{2n}$, kde n $=$ 1, 2, 2^2, 2^3 atd. vykazuje tato tabulka:

Číslo	jeho logaritmus	*Číslo*	jeho logaritmus
10·00000	1·00000	1·00225	0·00098
$\sqrt{10}=3·16228$	0·50000$=\frac{1}{2}$	1·00112	0·00049
$\sqrt[4]{10}=1·77828$	0·25000$=\frac{1}{2}^2$	1·00056	0·00024
$\sqrt[8]{10}=1·33352$	0·12500$=\frac{1}{2}^3$	1·00028	0 00012
$\sqrt[16]{10}=1·15478$	0·06250$=\frac{1}{2}^4$	1·00014	0·00006
1·07461	0·03125	1·00007	0·00003
1·03663	0 01562	1·00004	0·00002
1·01831	0·00781	1·00002	0·00001
1·00904	0·00391	1·00001	0·00000
1·00451	0·00195		

Abychom pomocí této tabulky určili na př. logaritmus čísla 5·3, rozvrhněme toto na takové činitele, kteří v tabulce této mezi *čísly* obsaženy jsou, t. j. dělme 5·3 menším z tabulky číslem 3·16228, podíl 1·67600 opět menším číslem 1·33352, podíl 1·25682 číslem 1·15478 atd., až dostaneme poslední podíl, který se od jedničky valně neliší. Součin všech dělitelů dá číslo 5·3 (téměř úplně), a poněvadž logaritmy dělitelů těch v předešlé tabulce jsou udány, bude součet logaritmů $=$ log. 5·3. Celé provedení patrno z této tabulky:

Dělenci	Dělitelé	jejich logaritmy
5·30000	3·16628	0·50000
1·67600	1·33352	0·12500
1·25682	1·15478	0·06250
1·08836	1·07461	0·03125
1·01279	1·00904	0·00391
1·00371	1·00225	0·00098
1·00145	1·00112	0·00049
1·00032	1·00028	0·00012
1·00003	1·00002	0·00001
$1·00000_9$		

Proto součtem se log. 5·3 = 0·72426, a z toho
log. 53 = 1·72426,
log. 530 = 2·72426, atd.
log. 0·53 = 0·72426—1
log. 0·053 = 0·72426—2 atd.

Ačkoli jest návod tento pracný, jest nicméně jednak nejjednodušší ze všech návodů elementarních, jednak však už proto pozoruhodný, že pomocí tak malé tabulky vypočítati lze logaritmy *všech* čísel. Kromě logaritmů nesměrných čísel $=\sqrt[n]{10}$, kde $n=2, 2^2, 2^3 \ldots$ nebo $5, 5^2 \ldots$ nebo vůbec $2^r \cdot 5^s$ (§. 13) jsou všechny ostatní logaritmy *nekonečné* zlomky desetinné.

6. V tabulkách logaritmických jsou sestaveny logaritmy čísel buď od 1—999 s mantissami o čtyřech, buď od 1—9999 s mantissami o pěti neb šesti, buď od 1—99999 s mantissami o sedmi místech atd. Beřeme-li ohled zvláště k nejrozšířenějším tabulkám logaritmickým, v nichž jsou udány logaritmy všech čísel od 1—9999 s mantissami šesticifernými, vyhledáme v nich logaritmy k číslům a čísla k logaritmům takto:

a) Logaritmus *čísla celého*, které v tabulkách *úplně* jest obsaženo, se najde, určí-li se nejprvé charakteristika (dle 2.), a připíše-li se k ní mantissa v tabulkách vedle onoho čísla poznačená. Tak na př. nalezneme

log. 379=2·578639, log. 4578=3·660676, log. 8=0·903090 atd.

b) Logaritmus *nepravého* zlomku desetinného, který bez ohledu na tečku v tabulkách *úplně* jest obsažen, se najde, určí-li se nejprvé charakteristika *dle počtu cifer čísla celého*, a připíše-li se k ní mantissa daného zlomku, jako by byl číslo celé. Na př.

log. 76·35=1·882809, log. 3·456=0 538573 atd.

c) Logaritmus *pravého* zlomku desetinného má zápornou charakteristiku, která se píše za mantissou. Na př.

log. 0·72=0·857333—1, log. 0·037=0·568202—2 atd.

d) Logaritmus čísla, které jest *větší nejvyššího čísla v tabulkách obsaženého* se určí, zatrhneme-li v pravo tolik cifer, až ostatní co číslo jsou v tabulkách obsaženy; k těmto se vyhledá mantissa, a upraví se (interpoluje) k vůli místům zatrhnutým tím, že se k nejnižším její místům připočte součin číslic zatrhnutých co čísla (desetinného) a rozdílu mantiss logaritmu čísla nezatrhnutého a nejblíže nižšího, který rozdíl v tabulkách ve sloupci nadepsaném D. (diference) zanešen jest. Součin ten vyvine se skráceně, tak aby nejnižší jeho místo byly milliontiny. Příčina toho patrna jest z následujícího, na př. log. 24786 není v tabulkách obsažen, avšak leží mezi log. 24780 a log. 24790. Poněvadž jest mantissa log. 2478 tatáž jako 24780 a podobně mantissa log. 2479 tatáž jako log. 24790, nalezneme v tabulkách

k log. 24790 mantissu 394277 a
k log. 24780 „ 394101
rozdíl čísel= 10, rozdíl mantiss= 176 (milliontin).

Rozdíl mantiss jest však k rozdílu čísel tím dokonaleji určen, čím menší jest poměr rozdílu mantiss k číslům samým, z čehož soudíme, že, je-li jako zde

rozdíl čísel 10 a rozdíl mantiss 176, jest
při rozdílu „ 1 „ „ $^{176}/_{10}=176\times 0{\cdot}1$
„ „ „ 2 „ „ $^{176}/_{10}\times 2=176\times 0{\cdot}2$
„ „ „ 3 „ „ $^{176}/_{10}\times 3=176\times 0{\cdot}3$ atd.
„ „ „ 6 „ „ $^{176}/_{10}\times 6=176\times 0{\cdot}6=106$ milliontin.

Z té příčiny musíme k mantisse log. 24780 čili k 394101 připočísti 106 milliontin, abychom dostali mantissu log. 24786. Určíme-li charakteristiku, bude

log. 24786=4·394101	log. 147568=5·168792	
+106	199	D=294,
=4·394207	=5·168991	294×0·68=199.

e) *Číslo k danému logaritmu, jehož mantissa v tabulkách obsažena není*, se vypočítá, vyhledá-li se mantissa nejblíže nižší; číslo, k jehož logaritmu náleží, se vypíše, a mantissa tato se od dané odečte; tento rozdíl se *dělí* (skráceně) rozdílem vedle mantissy vyhledané (v sloupci D.), a podíl se připíše k vypsanému číslu. Celé toto číslo takto zvětšené upraví se dle charakteristiky daného logaritmu. Příčinu toho poznáme z následujícího příkladu:

Je-li log. neznámého čísla jakéhos (x) 4·567894, t. j.

log. x=4·567894,

poznáváme z charakteristiky 4, že číslo tohoto logaritmu jest o 5ti cifrách. Mantissa 567894 není v tabulkách, a nejblíže nižší 567850 náleží k číslu 3697. Poněvadž jest daná mantissa větší, náleží k ní číslo větší nežli 3697, tedy číslo, které leží mezi 36970 a 36980.

K číslu 36980 náleží mantissa 567967
„ „ 36970 „ „ 567850
rozdíl čísel = 10, rozdíl mantiss = 117 (milliontin).

K číslu x náleží mantissa 567894, a
„ „ 3697 „ „ 567850
rozdíl obou = 44 (milliontiny).

Z toho opět soudíme:
Je-li rozdíl mantiss 117 a rozdíl čísel 10, jest
při rozdílu „ 1 „ „ $^{10}/_{117}$
„ „ „ 2 „ „ $^{10}/_{117}\times 2$ atd., tedy zde
„ „ „ 44 „ „ $^{10}/_{117}\times 44={}^{440}/_{117}=38.$

Podíl 38 se připíše k číslu 3697, totiž 369738 a číslo to se upraví dle charakteristiky, totiž

log. x=log. 36973·8=4·567894.

Podobně vyhledáme k danému logaritmu
log. x=5·468976 nejprvé nejblíže nižší mantissu
38, jež náleží k číslu 2944, D.=147, proto
rozdíl = 38 : 147=33, tedy
log. x=log. 294433=5·468976.

f) Má-li se vyhledati *číslo k zápornému logaritmu*, udělá se tento nejprvé kladným tím, že se k němu číslo o 1 větší nežli jeho charakteristika připočte a spolu od něho odečte. Je-li na př.

log. x= — 3·678944, udělejme
log. x=4—3·678944—4, nebo
log. x=0·321056—4, mantissa nejblíže nižší jest
977, a náleží k číslu 2094, D=207
79 : 207=38, tedy
log. 0·000209438 = 0·321056—4.

Dodatek. Mimo logaritmy obecné užívá se v mathematické analysi též *logaritmů přirozených* (logarithmi naturales, Neperiani, hyperbolici), jejichž základem jest číslo

$$e=2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots.=2{\cdot}71828\ldots$$

Tyto se poznačují $^e\log. x$, $\log.\text{nat.}\, x$, $\lambda o\gamma.\, x$ a jinak.

Na základě e lze vypočítati všechny logaritmy způsobem přímým bez obmezování, z kteréž příčiny se logaritmy na jiném základě vypočtěné, tedy i logaritmy obecné nazývají *umělé* (artificiales).

Poznačíme-li přirozené logaritmy skráceně $\lambda o\gamma.$, a položíme-li $b=10$, jest

$$\log. M=\frac{\lambda o\gamma. M}{\lambda o\gamma.\, b}=\lambda o\gamma.\, M\times\frac{1}{\lambda o\gamma. 10}, \text{ (§. 35. 6).}$$

Převratné hodnotě $\lambda o\gamma.\, 10$ totiž $\frac{1}{\lambda o\gamma. 10}$ říkáme *modul*, a píšeme

$$\frac{1}{\lambda o\gamma. 10}=\mu=0{\cdot}4342945\ldots.$$

Modul jest tedy číslo, kterým se násobí přirozené logaritmy, aby se proměnily v obecné. Z rovnice

$$\log. M=\lambda o\gamma.\, M.\mu \text{ plyne}$$

$$\lambda o\gamma.\, M=\log. M.\frac{1}{\mu}, \text{ kde } \frac{1}{\mu}=2{\cdot}302585\ldots$$

t. j. násobíme-li obecné logaritmy převratnou hodnotou modulu, dostaneme logaritmy přirozené.

Příklady.

1. Které logaritmy náležejí k číslům: 13, 17, 319, 7193?

2. Které logaritmy náležejí k číslům: 1) 7, 70, 700, 70000, 0·7, 0·07, 0·0007. 2) 287000, 0·00287, 2870, 28·7, 2·87, 0·287. 3) 0·0357, 357, 35·7, 35700?

3. Které logaritmy náležejí k číslům: 1) 42578, 42579. 2) 42581, 42582. 3) 368964. 4) 54·7605. 5) 3·00071. 6) 7·86007. 7) 0·0789468. 8) 0·0003100069?

4. Vypočítejte: 1) log.(log.757489). 2) log.[log.(log.3576400)]. 3) log.[11+log.(11+log.(11+log.111111))].

5) Vyhledejte čísla k logaritmům: 1) 0·358647. 2) 0·584697. 3) 1·358916. 4) 1·234567. 5) 2·358649. 6) 4·586213. 7) 5·423179. 8) 3·000091. 9) 2·000008. 10) 0·357641—1. 11) 0·257689—2. 12) 0·789999—3. 13) 0·007896—4. 14) 0·070707—1. 15) —2·357861. 16) —1·358967. 17) —0·888888. 18) —3·456753. 19) —0·098989.

D. Počítání pomocí logaritmů.

§. 37.

Pomocí obecných logaritmů lze snadným způsobem vypočítati 1. *součin*, 2. *podíl*, 3. *mocninu* a 4. *veličinu kořenovou*. Dle předešlého (§. 34) se totiž promění naznačený součin v součet logaritmů činitelů, podíl v rozdíl logaritmu dělence a logaritmu dělitele, mocnina v součin mocnitele logaritmem mocněnce a veličina kořenová v podíl logaritmu mocniny odmocnitelem; výsledky jsou logaritmy, a k těm se vyhledají čísla (§. 36. e). Tedy

1. *Činitelé se násobí, sečtou-li se jejich logaritmy.* Na př.

$$79601 \times 5{\cdot}4167 \times 0{\cdot}002357 \times 349{\cdot}6 = x$$

$$\begin{array}{rl}
\log. 79601 & = 4{\cdot}9009185 \\
+\log. 5{\cdot}4167 & = 0{\cdot}7337348 \\
+\log. 0{\cdot}002357 & = 0{\cdot}3723596-3 \\
+\log. 349{\cdot}6 & = 2{\cdot}5435714 \\
\hline
\log. x & = 5{\cdot}5505843, \text{ čili} \\
x & = 355291{\cdot}0\ldots
\end{array}$$

Je-li některý činitel záporný, považuje se *zatím* za kladného a znaménko konečného součinu určí se pak dle znamének všech činitelů. Aby se na záporného činitele nezapomnělo, může se k jeho logaritmu připsati (*z*). Na př.

$$-7{\cdot}685 \times 64{\cdot}12 \times -3{\cdot}45 \times -0{\cdot}358 = x$$

$$\begin{array}{rl}
\log. 7{\cdot}685 & = 0{\cdot}8856439 \ (z) \\
+\log. 64{\cdot}12 & = 1{\cdot}8069935 \\
+\log. 3{\cdot}45 & = 0{\cdot}5378191 \ (z) \\
+\log. 0{\cdot}358 & = 0{\cdot}5538830-1 \ (z) \\
\hline
\log. x & = 2{\cdot}7843395, \text{ čili} \\
x & = -608{\cdot}61.
\end{array}$$

2. *Dvě čísla se dělí, odečte-li se od logaritmu dělence logaritmus dělitele.* Je-li logaritmus dělence menší nežli logaritmus dělitele, připočte se ku charakteristice logaritmu dělence tolik jednic, které se za mantissou odečtou, kolik vůbec zapotřebí, aby zbytek byl kladný. Na př.

$$\begin{aligned} 4{\cdot}587 : 53{\cdot}964 &= x \\ \log.\ 4{\cdot}587 &= 0{\cdot}6615287 \\ +2 &\qquad -2 \\ \log.\ 53{\cdot}964 &= 1{\cdot}7321041 \\ \hline \log.\ x &= 0{\cdot}9294246-2, \text{ čili} \\ x &= 0{\cdot}0850012. \end{aligned}$$

3. *Číslo se povýší na mocninu, násobí-li se mocnitel logaritmem mocněnce.* Na př.

$$\begin{aligned} (1{\cdot}458)^{17} &= x \\ 17.\log.\ 1{\cdot}458 &= 0{\cdot}1637575 \times 17 \\ \hline \log.\ x &= 2{\cdot}7838775, \text{ čili} \\ x &= 607{\cdot}963. \end{aligned}$$

4. *Z čísla dobývá se kořene, dělíme-li logaritmus mocniny odmocnitelem.* Má-li logaritmus mocniny zápornou charakteristiku, která odmocnitelem dělitelna není, přidá se k této tolik jednic záporných, které se kladné připíší před mantissu, kolik vůbec zapotřebí, aby záporná charakteristika byla odmocnitelem dělitelna. Na př.

$$\begin{aligned} \sqrt[11]{0{\cdot}0357^3} &= x \\ {}^{3}/_{11} \log.\ 0{\cdot}0357 &= (0{\cdot}5526682-2) \times {}^{3}/_{11} \\ \log.\ x &= (1{\cdot}6580046-6) : 11 \\ &= (6{\cdot}6580046-11) : 11 \\ &= 0{\cdot}6052731-1, \text{ čili} \\ x &= 0{\cdot}402964. \end{aligned}$$

Dodatek. Má-li se logaritmovati výraz, v němž přichází buď součet buď rozdíl mocnin neb kořenových veličin, nemůže se to státi pomocí obecných logaritmů *najednou*, nýbrž se *každý jednočlen* logaritmuje zvláště a logaritmus ten se ihned převede na číslo, k němuž náleží. Na př.

$$\log.\ \frac{(5{\cdot}678)^5 - \sqrt[3]{11}}{(6{\cdot}24)^4 + 2{\cdot}78\sqrt[8]{3}} = x.$$

Zde se tedy vypočítá nejprvé log. $(5{\cdot}678)^5$, vyhledá se k němu číslo na př. a, pak se určí log. $\sqrt[3]{11}$, vyhledá se k němu číslo na př. b, tak že se promění čitatel ve výraz $a-b=c$. Podobně vypočítáme log. $(6{\cdot}24)^4$, který náleží k číslu d a log. $2{\cdot}78\sqrt[7]{3}$, jenž náleží k číslu e, proto jest jmenovatel $d+e=f$, $x=\frac{c}{f}$, a log. x = log. c — log. f atd. Tedy

$$\log.(5{\cdot}678)^5 = 5\log.5{\cdot}678 = 0{\cdot}7541954 \times 5$$

$$\overline{3{\cdot}7709770} = \log.5901{\cdot}69 \qquad a)$$

$$\log.\sqrt[3]{11} = {}^1\!/_3 \log.11 = 1{\cdot}0413927 : 3$$

$$\overline{0{\cdot}3471309} = \log.\ 2{\cdot}22398 \qquad b)$$

$$\text{rozdíl} = 5899{\cdot}46602 \qquad c)$$

$$\log.(6{\cdot}24)^4 = 4\log.6{\cdot}24 = 0{\cdot}7951846 \times 4$$

$$\overline{3{\cdot}1807384} = \log.1516{\cdot}13 \qquad d)$$

$$\begin{array}{rll} \log.2{\cdot}78\sqrt[7]{3} = \log.2{\cdot}78 & = & 0{\cdot}4440448 \\ +\ {}^1\!/_7 \log.3 & = & \left(\begin{array}{l} \overline{0{\cdot}4771213} : 7 \\ \overline{0{\cdot}0681602} \end{array}\right. \\ & & \overline{0{\cdot}5122050} = \log.\ 3{\cdot}2524 \qquad (e \\ & & \qquad \text{součet } 1519{\cdot}3824 \qquad (f \end{array}$$

$$\log.x = \log.\frac{c}{f} = \log.\frac{5899{\cdot}46602}{1519{\cdot}3824}$$

$$\begin{array}{rl} = \log.5899{\cdot}46602 = & 3{\cdot}7708126 \\ -\log.1519{\cdot}3824 = & -3{\cdot}1816671 \\ & \overline{0{\cdot}5891455}, \text{ čili} \end{array}$$

$$x = 3{\cdot}88280.$$

Příklady.

Vypočítejte za pomocí logaritmů:

1. 1) $6{\cdot}847 \times 95074$. 2) $358{\cdot}4 \times 7532{\cdot}9 \times 0{\cdot}00359$.
3) $0{\cdot}36845 \times 0{\cdot}00583 \times 4237{\cdot}65$,
4) $73{\cdot}561 \times 0{\cdot}75042 \times 0{\cdot}00564372 \times 0{\cdot}0004$.
5) $-3{\cdot}2578 \times 0{\cdot}2432 \times -6758{\cdot}9 \times -0{\cdot}007$.

2. 1) $\dfrac{325789 \times 43{\cdot}2157 \times 0{\cdot}03581}{789457 \times 6257{\cdot}3 \times 28{\cdot}3561}$.

2) $\dfrac{-2{\cdot}3517 \times 0{\cdot}0785 \times 3784{\cdot}5}{37{\cdot}45 \times -528{\cdot}43 \times -32{\cdot}47}$.

3) $\dfrac{63{\cdot}257 \times -3178{\cdot}2 \times 5{\cdot}63279 \times -357{\cdot}4}{0{\cdot}003578 \times -0{\cdot}0398 \times 574326}$.

4) $\dfrac{72{\cdot}54 \times 0{\cdot}000036 \times 8732 \times -3475}{0{\cdot}0073 \times -5613 \times 76{\cdot}35 \times 0{\cdot}0303}$.

3. 1) 7^{10}. 2) 12^{15}. 3) 36893^7. 4) $1{\cdot}34567^5$. 5) $0{\cdot}036891^{12}$.
6) $8{\cdot}135^{-3}$. 7) $56{\cdot}379^{-4}$. 8) $0{\cdot}00357^{-10}$.

9) $\dfrac{2{\cdot}37^5 . 0{\cdot}489^6}{7{\cdot}56^3 . 297^{13}}$. 10) $\dfrac{0{\cdot}076^9 \times 3{\cdot}25^{10} \times 34{\cdot}7^9}{3{\cdot}45^3 \times 03{\cdot}67^5 \times 0{\cdot}079^6}$.

11) $\left(\frac{237\times0{\cdot}458\times0{\cdot}003791}{597\times0{\cdot}075\times369{\cdot}1}\right)^7.$

12) $\left(\frac{7{\cdot}43^{-11}\times5789\times0{\cdot}02791^{-7}}{12{\cdot}35^{-4}\times2376^3\times3{\cdot}5472^2}\right)^{-9}.$

4\. 1) $\sqrt[7]{5}.$ 2) $\sqrt[9]{4^5}.$ 3) $13\sqrt[11]{22^6}.$ 4) ${}^2/_3\sqrt[8]{1{\cdot}237^2}.$

5) ${}^1/_2\sqrt[7]{0{\cdot}03589^4}.$ 6) $\sqrt[13]{\frac{2{\cdot}4789^7}{0{\cdot}0073^5}}.$ 7) $\sqrt[10]{\frac{3{\cdot}5^7\times2{\cdot}7^3\times0{\cdot}731^9}{0{\cdot}31^3\times79{\cdot}5^7\times1{\cdot}111^9}}.$

8) $\frac{2{\cdot}54^3}{3{\cdot}074}\times\sqrt[5]{\frac{0{\cdot}754^4}{1{\cdot}057^5}}.$ 9) $\sqrt[7]{\frac{2{\cdot}135^4}{1{\cdot}408^5}}\times\sqrt[10]{\frac{0{\cdot}351^9}{0{\cdot}0097^7}}.$

10) $\sqrt[5]{{}^3/_7\sqrt[3]{248957}}.$ 11) $5\sqrt[5]{5\sqrt[5]{5}}.$ 12) $\sqrt[11]{7{\cdot}35^8\,.\,\sqrt[7]{0{\cdot}0047^5}}.$

13) $\sqrt[15]{\frac{3{\cdot}2^4}{5{\cdot}1^{11}}\sqrt[14]{\frac{39{\cdot}8^3}{79{\cdot}6^5}}}.$ 14) $\left(\sqrt[5]{\frac{13}{17}\sqrt[3]{\frac{12}{19}\,.\,\sqrt{{}^3/_5}}}\right)^3.$

15) $\left(\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{2{\cdot}2}}{\sqrt{3{\cdot}3}}\,.\,\frac{\sqrt[6]{0{\cdot}22}}{\sqrt[7]{0{\cdot}33}}}\right)^{2\,{}^3/_4}.$

16) $\sqrt[5]{\left\{\frac{421^3}{547{\cdot}1^2}\left[\sqrt[10]{1\,{}^7/_{31}\left(\sqrt[8]{\frac{0{\cdot}37}{1{\cdot}73}\,.\,\sqrt[5]{\frac{473}{37.5}}}\right)^7}\right]^{-1}\right\}^{1\,{}^1/_4}}.$

5\. Vypočítejte *příklady* uvedené na konci §. 34. (8. 9.), je-li $a=3{\cdot}576$, $b=0{\cdot}789$, $c=73{\cdot}54$, $d=1{\cdot}35$, $e=2{\cdot}37$, $m=17$, $n=7$, $p={}^2/_3$, $q={}^4/_5$, $x=11$, $y=9$.

6) Vypočítejte logaritmováním jednočlenů:

1) $\frac{600}{006}[(1{\cdot}06)^7.(\frac{8000\times0{\cdot}06}{600}-1)+1].$

2) $\frac{100}{0{\cdot}05}[(1{\cdot}05)^{20}-1].$ 3) $\frac{365}{0{\cdot}06}[1-(1{\cdot}06)^{-10}].$

4) $\frac{1000000\times0{\cdot}05}{1-(1{\cdot}05)^{-30}}.$ 5) $1000\,(1{\cdot}04)^{12}+\frac{100}{0{\cdot}04}[1{\cdot}04)^{12}-1].$

6) $\frac{1500(1{\cdot}05)^9}{(1{\cdot}05)^{20}-1}.$ 7) $\sqrt[7]{2{\cdot}457-\sqrt[8]{547{\cdot}32}}.$

8) $\dfrac{\sqrt[5]{4\cdot3^4}}{\sqrt[8]{2\cdot1^2+\sqrt{7}}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{3\cdot27^5-\sqrt[3]{254^2}}{\sqrt[7]{27\cdot1^6}+\sqrt[10]{325^3}}}.$

$$\sqrt{3\cdot14159+\sqrt{3\cdot14159+\sqrt{3\cdot14159+\sqrt{3\cdot14159.}}}}$$

E. Logaritmy součtu a rozdílu.

§. 38.

Obecných logaritmů, jak jsme právě viděli, lze s výhodou použiti při součinu, podílu, umocňování a odmocňování, avšak při *součtu* a *rozdílu* jich přímo použiti nelze. Aby se však i takové tvary pomocí logaritmů snadněji řešiti mohly, sestavil *Gauss logaritmy součtu a rozdílu*, které podstatně doplňují obyčejné tabulky logaritmické. Gaussovými logaritmy můžeme tedy vypočítati log. $(a \pm b)$, je-li znám log. a a log. b.

Tabulky tyto jsou jinak a jinak uspořádány, velmi jednoduché a přiměřené upravení jich jest toto:*)

Na každé stránce jsou dva sloupce, z nichž jeden jest nadepsán A a druhý B. V sloupci A umístěny jsou logaritmy podílu $\frac{a}{b}$ a v sloupci B logaritmy podílu $\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1$. Je-li na př.

$$m=\log.\frac{a}{b},\ \text{a}$$

$$n=\log.\frac{a+b}{b},\ \text{jest}$$

$$n=\log.(a+b)-\log.b,\ \text{nebo}$$

$$\log.(a+b)=n+\log.b,\ \text{čili}$$

$$\text{I.}\quad \log.(a+b)=\log.\frac{a+b}{b}+\log.b.$$

Jsou-li tedy dány log. a a log. b, vyhledejme v sloupci A log. $\frac{a}{b}=$ log. a — log. b, a vedle v B log. $\frac{a+b}{b}$, k tomuto připočtěme log. b a dostaneme (dle rovnice I.) log. $(a+b)$, nechť jest $a \gtrless b$. K logaritmu tomu vyhledá se číslo. Na př.

$$\begin{array}{r} \log.\,a = 2\cdot36922 \\ \log.\,b = 1\cdot98677 \\ \hline \log.\,a-\log.\,b = 0\cdot38245. \end{array}$$

---

*) Wittstein's logarithmisch-trigonometrische Tafeln (1868).

Ve sloupci *A* najdeme 0·38, a vypíšeme vedle ze sloupce *B* logaritmus náležející ke 0·382 totiž 0·58274, který se interpoluje pro celé 0·38245, a jest

$$\begin{array}{rl} & 0{\cdot}58306, \text{ k tomu} \\ \log. b = & 1{\cdot}98677 \text{ připočtěno, dá} \\ \hline \log.(a+b) = & 2{\cdot}51983, \text{ čili} \\ a+b = & 331. \end{array}$$

A poněvadž se dle podmínky svrchu uvedené *m* a *n* liší o 1, můžeme též položiti

$$m = \log.\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \log.\frac{a-b}{b}, \text{ a}$$

$$n = \log.\frac{a}{b}.$$

Z rovnice $m = \log.\frac{a-b}{b} = \log.(a-b) - \log.b$, plyne

$$\log.(a-b) = m + \log.b, \text{ čili}$$

$$\text{II.}\quad \log.(a-b) = \log.\frac{a-b}{b} + \log.b.$$

Jsou-li dány $\log.a$ a $\log.b$, vyhledejme v sloupci *B* $\log.\frac{a}{b} = \log.a - \log.b$, a vedle v *A* $\log.\frac{a-b}{b}$.

a k této hodnotě připočtěme $\log.b$, čímž dostaneme (dle rovnice II) $\log.(a-b)$, pro $a > b$. K logaritmu tomu vyhledá se číslo. Na př.

$$\begin{array}{rl} \log.a = & 3{\cdot}94012 \\ \log.b = & 1{\cdot}73957 \\ \hline \log.a - \log.b = & 2{\cdot}20055. \end{array}$$

Tento logaritmus vyhledáme (pomocí interpolace) ve sloupci *B* a vypíšeme k tomu náležející ve sloupci *A*, totiž

$$\begin{array}{rl} & 2{\cdot}19780, \text{ k tomu} \\ \log.b = & 1{\cdot}73957 \text{ připočtěno, dá} \\ \hline \log.a - \log.b = & 3{\cdot}93737, \text{ čili} \\ (a-b) = & 8657{\cdot}1. \end{array}$$

Příklady.

Vypočítejte dle uvedeného:

1) $478^2 + 7532^2$. 2) $785{\cdot}64^3 + 5{\cdot}831^5$. 3) $0{\cdot}6845^7 + 2{\cdot}0071^4$.

4) $\sqrt{17} + \sqrt{23}$. 5) $\sqrt[3]{200} + \sqrt[3]{100}$. 6) $\sqrt[3]{0{\cdot}461} + \sqrt[5]{3{\cdot}257}$.

7) $\sqrt[3]{9{\cdot}357^2} + \sqrt[4]{31{\cdot}45^3}$. 8) $\sqrt{29} - \sqrt{13}$.

9) $\sqrt[3]{27\cdot35} + \sqrt[3]{2\cdot471}$. 10) $\sqrt[5]{2874\cdot3} - \sqrt[6]{3579}$.

11) $\dfrac{45789}{213070} \pm \dfrac{57804}{65625}$. 12) $\dfrac{289\cdot35}{64\cdot16} + \dfrac{35\cdot769}{22\cdot1093}$.

F. Rovnice exponentialní.

§. 39.

Je-li v rovnici neznámá veličina (x) buď mocnitelem buď odmocnitelem, říkáme jí *exponentialní*, a neznámá se určuje pomocí logaritmů. Exponentialní rovnice jsou stupně prvního i stupňů vyšších buď o jedné neb o několika neznámých. Na př.

1) $a^x = b$

$x \log. a = \log. b$

$x = \dfrac{\log. b}{\log. a}$.

2) $7^x = 5\cdot3$

$x \log. 7 = \log. 5\cdot3$

$x = \dfrac{\log. 5\cdot3}{\log. 7} = \dfrac{0\cdot7242759}{0\cdot8450980} = 0\cdot858215$.

Rovnice podoby $(-a)^x = b$ jest pouze možná pro sudé x a podoby
$(-a)^x = -b$ „ „ „ „ liché x, rovnice
$a^x = -b$ „ vždy pouze pomyslná (§. 34. 9).

3) $a^{2x} + ba^x = c$, nebo

$(a^x)^2 + b(a^x) = c$, z čehož

$a^x = -\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + c} = m$,

$x \log. a = \log. m$, tedy

$x = \dfrac{\log. m}{\log. a}$.

4) $3^{2x} + 4\,.\,3^x = 119$, čili

$(3^x)^2 + 4\,.\,(3^x) = 119$, z čehož

$3^x = -2 \pm \sqrt{123}$ t. j.

$3^x = -2 \pm 11\cdot0905$, tedy

$x \log. 3 = \log. 9\cdot0905$ čili

$x = \dfrac{\log 9\cdot0905}{\log. 3} = \dfrac{0\cdot9585878}{0\cdot4771213} = 2\cdot009..$

Druhé hodnoty veličiny $3^x = -13\cdot0905$ nelze použiti (1.).

5) $\sqrt[x]{a} = b$

$\dfrac{1}{x} \log. a = b$

$x = \dfrac{\log. a}{\log. b}$

6) $\sqrt[x]{7\cdot5} = 67\cdot4$

$\dfrac{1}{x} \log. 7\cdot5 = \log. 67\cdot4$

$x = \dfrac{\log.\ 7\cdot5}{\log\ 67\cdot4} = \dfrac{0\cdot8750613}{1\cdot8286599} = 0\cdot478..$

7) $\sqrt[x]{a} + b\sqrt[2x]{a} = c$, nebo

$$(\sqrt[2x]{a})^2 + b(\sqrt[2x]{a}) = c$$

$$\sqrt[2x]{a} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} = m$$

$$\frac{1}{2x}\log. a = \log. m, \text{ z čehož}$$

$$x = \frac{\log. a}{2\log. m}.$$

8) $\sqrt[x]{7} + 6\sqrt[2x]{7} = 15$

$$\sqrt[2x]{7} = -3 + \sqrt{24} = 1{\cdot}899$$

$$\frac{1}{2x}\log. 7 = \log. 1{\cdot}899$$

$$x = \frac{\log. 7}{2\log. 1{\cdot}899} = \frac{0{\cdot}8450980}{0{\cdot}5570500} = 1{\cdot}517.$$

9) $xy = a$

$\underline{x^{\log. y} = b}$

$\log. x + \log. y = \log. a$, $\log. x = \log. a - \log. y$

$\log. y \,.\, \log. x = \log. b$

$\log. y(\log. a - \log. y) = \log. b$

$(\log. y)^2 - \log. a \,.\, \log. y = -\log. b$

$\log. y = {}^1\!/_2 \log. a \pm \sqrt{{}^1\!/_4\, (\log. a)^2 - \log. b}$ atd.

Poznamenání. Mezi rovnicemi exponentialními nalezají se v učebních knihách zhusta i takové, které jsou rovnice exponentialní *pouze na pohled* a kterých tedy *bez pomoci* logaritmů řešiti lze. Každá taková na pohled exponentialní rovnice dá se upraviti ve *dvě sobě rovné mocniny stejných mocněnců*, z nichž soudíme pak *na stejné mocnitele.* Takové rovnice (stupně druhého) mají obyčejně podoby tyto:

1) $a^x = a^n$, $a = a$; tedy $x = n$. Na př. $3^x = 81 = 3^4$, tedy $x = 4$.

2) $(-a)^x = a^n$ pro sudé x, a $(-a)^x = (-a)^n$ pro liché x, v obou případech se $x = n$.

Na př. $(-5)^x = 15625 = (-5)^6$, proto $x = 6$, nebo
$(-7)^x = -343 = (-7)^3$ „ $x = 3$.

3) $a^{x \pm m} = 1$, poněvadž $1 = a^0$, bude i
$a^{x \pm m} = a^0$ čili $x \pm m = 0$, a $x = \mp m$.

Na př. $17^{x \pm 5} = 1 = 17^0$, t. j. $x \pm 5 = 0$, nebo $x = \mp 5$.

4) $a^{m^x} = a^{m^n}$, pro $a = a$ jest $m^x = m^n$, čili $x = n$.

Na př. $4^{3^x} = 262144 = 4^9 = 4^{3^2}$ tedy $x = 2$.

5) $a^{x+m} . b^{x-n} = a^{m+n}$, což dá

$(a^{x+m} : a^{m+n}) . b^{x-n} = a^{x-n} . b^{x-n} = (ab)^{x-n} = 1 = (ab)^0$, tedy

$x - n = 0$ a $x = n$.

Na př. $9^{x+2} . 7^{x-3} = 59049 = 9^5$

$9^{x+2-5} . 7^{x-3} = 1$

$(9 . 7)^{x-3} = (9 \cdot 7)^0$, čili $x - 3 = 0$, $x = 3$.

6) $a^{x-m} . b^{x \pm n} = \dfrac{1}{a^{m \pm n}}$, dá

$a^{x \pm n} . b^{x \pm n} = 1$

$(ab)^{x \pm n} = a^0$, t. j. $x \pm n = 0$, tedy $x = \mp n$.

Na př. $5^{2x-3} . 0{\cdot}023^{2-x} = \dfrac{1}{5^{1-x}}$

$$\frac{5^{x-2}}{0{\cdot}023^{\,x-2}} = 1$$

$$\left(\frac{5}{0{\cdot}023}\right)^{x-2} = \left(\frac{5}{0{\cdot}023}\right)^0,\ \text{t. j. } x - 2 = 0,\ \text{čili } x = 2.$$

7) $\sqrt[x]{a} = a^{mx}$ dá $a^{1/x} = a^{mx}$, t. j. $\dfrac{1}{x} = mx$, $x = \pm \sqrt{\dfrac{1}{m}}$.

Na př. $\sqrt[x]{5} = 125^x$, $5^{\frac{1}{x}} = 5^{3x}$, $\dfrac{1}{x} = 3x$, $x = \pm \sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

8) $\sqrt[x \pm n]{a^{nx \pm p}} = \dfrac{1}{a^{q \pm x}}$, dá $a^{\frac{nx \pm p}{x \pm n}} . a^{q \pm x} = 1$, nebo

$$a^{\frac{nx \pm p}{x \pm n} + q \pm x} = a^0,\ \text{z čehož}$$

$$\frac{nx \pm p}{x \pm n} + q \pm x = 0 \text{ atd.}$$

Na př. $\sqrt[x-1]{\left(\dfrac{8}{5}\right)^{2x+1}} = \left(\dfrac{125}{512}\right)^{3-x}$, dá $\left(\dfrac{5}{8}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(\dfrac{5}{8}\right)^{3(3-x)} = \left(\dfrac{8}{5}\right)^{-3(3-x)}$,

z čehož $\dfrac{2x+1}{x+1} = -3(3-x)$ atd. $x = \dfrac{7 \pm 5}{3}$.

9) $a^{2x} \pm b . a^x = a^m(a^x \pm b)$ dá

$a^x(a^x \pm b) = a^m(a^x \mp b)$ čili $a^x = a^m$ t. j. $x = m$.

Na př. $3^{2x} - 5 . 3^x = 594$ nebo

$3^x(3^x - 5) = 3^3 . 22$ t. j. $3^x = 3^3$, nebo $3^x - 5 = 22$ $\Big\}$ $x = 3$, druhou hodnotu nesměrnou veličiny x způsobem tímto ovšem určiti nelze.

10) $\sqrt[x]{a} + b\sqrt[2x]{a} = a^m(\sqrt[2x]{a \pm b})$, nebo

$\sqrt[2x]{a^2} \pm b\sqrt[2x]{a} = a^m(\sqrt[2x]{a} \pm b)$ čili $\sqrt[2x]{a}\,(\sqrt[2x]{a \pm b}) = a^m(\sqrt[2x]{a \pm b})$

$$a^{\frac{1}{2x}} = a^m \text{ t. j. } \frac{1}{2x} = m,\ x = \frac{1}{2m}.$$

Na př. $\sqrt[x]{1024}-\sqrt[2x]{1024}=2$

$$\sqrt[x]{2^{10}}-\sqrt[2x]{2^{10}}=2$$

$$2^{\frac{5}{x}}(a^{\frac{5}{x}}-1)=2^1\,.\,1,\ \text{z čehož}\ \left.\begin{array}{r}2^{\frac{5}{x}}\quad=2^1\\ \text{nebo}\ 2^{\frac{5}{x}}-1=1\end{array}\right\}\ x=5,\ \text{atd.}$$

Příklady.

1) $a^{5x-1}=b.$ 2) $(a^{2x-1})^{(1-3x)}=\dfrac{b}{a^{6x^2}}.$

3) $\dfrac{\sqrt{a^{3-4x}}}{\sqrt[5]{b^{x-2}}}=\sqrt[3]{b^x}.$ 4) $a^{2x+3}\,.\,b^{-3x+5}=c^{x-2}.$

5) $a^{mx-n}\,.\,b^{px+q}=a^{(x-1)}\,.\,b^{(x-p)n}.$ 6) $a^{b^x}=c.$

7) $2{\cdot}3^x=7.$ 8) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^x=\dfrac{2}{3}.$ 9) $\left(\dfrac{5}{8}\,.\,3^1/_3\right)^x=7^1/_5.$

10) $7^3\,.\,5^{2x-1}=9^{2-3x}.$ 11) $10^{3^x}=2{\cdot}457.$

12) $\sqrt[x]{13^{4x+3}}={}^2/_3\sqrt[3]{7}.$ 13) $\sqrt[x]{\dfrac{7^{3x+1}}{6^{\,2x-3}}}=\sqrt[5]{\dfrac{3}{7}}.$

14) $a^x\,.\,b^y=c$
$c^x\,.\,d^y=a.$

15) $\sqrt[x]{a}\,.\,\sqrt[y]{b}=m$
$\sqrt[y]{a}\,.\,\sqrt[y]{b}=n.$

16) $2^x\,.\,3^y=7{\cdot}13$
$5^x\,.\,7^y=10{\cdot}2.$

17) $\sqrt[3]{5^x}\,.\,\sqrt[5]{7^y}=17$
$\sqrt{5^{-x}}:\sqrt[3]{15^y}=3.$

18) $x^y=13$
$\sqrt[y]{1357}=(^1/_3x)^2.$

19) $2^x\,.\,3^y=11$
$5^x\,.\,7^z=13$
$9^y\,.\,17^z=29.$

20) $\sqrt[x]{3{\cdot}14159^{-3}}+\sqrt[x]{3{\cdot}14159^{-6}}=10.$ 21) $a^{(2x-3)(3x+7)}=b.$

22) $\sqrt[x+1]{17}=15^{2x-1}.$ 23) $a^x b=\sqrt[x]{c}.$ 24) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3x+1}{x-1}}=\left(\dfrac{5}{7}\right)^{7-x}.$

25) $0{\cdot}13^{\frac{x+1}{x+2}}=0{\cdot}07564^{\frac{x+3}{x+4}}.$ 26) $x^{3+\log.x}=758{\cdot}64.$

27) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{2x}-8\left(\dfrac{5}{7}\right)^x=71.$ 28) $3\sqrt[x]{0{\cdot}02}-7\sqrt[2x]{0{\cdot}02}=0{\cdot}002.$

29) $a^{x+y}=b$
$a^{xy}=c.$

30) $17^{(x+2)(y-1)}=15$
$\dfrac{31^{x+y}}{41^{x-y}}=\dfrac{41^{-x+2y}}{31^{2x-y}}.$

XI. Posloupnosť geometrická a její použití.

A. *Výklady a vzorce.*

§. 40.

1. Řadě čísel, ve které každé číslo následující dělené předcházejícím dává tentýž podíl, říkáme *posloupnosť* čili *řada geometrická.* Každé ono číslo nazývá se *člen*, a podíl *udavatel* (*exponent*); počet členů naznačuje *ukazovatel* na př. n.

Je-li první člen a, udavatel q, jest *všeobecný vzorec posloupnosti geometrické*

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 \dots$$

Porovnáme-li mocnitele udavatele q s počtem členů posloupnosti, patrno, že jest onen o 1 menší nežli tento. Je-li tedy ukazovatel n, jest mocnitel udavatele posledního členu q^{n-1} a tedy poslední člen posloupnosti geometrické (který znamenáme u)

$$\text{I.} \quad u = aq^{n-1}.$$

Tak na př. v posloupnosti $3, 3.2, 3.2^2, 3.2^3 \dots$ nebo
$3, 6, 12, 24$ atd.
kde $a=3$, $q=2$, jest na př. 15tý člen $u=3.2^{14}=49152$.

2. Je-li $q > 1$ jest posloupnosť geometrická *vzestupná* na př.
$1, 2, 4, 8, 16 \dots (q=2)$,
je-li $q < 1$ jest posloupnosť *sestupná*, na př.
$1, {}^1/_2, {}^1/_4, {}^1/_8, {}^1/_{16} \dots (q={}^1/_2)$.

Je-li q *kladné*, jsou při kladném prvním členu a veškeré členy kladné, při záporném a však veškeré členy záporné. Je-li q *záporné* jsou při kladném a členy na místech lichých kladné, na místech sudých však záporné, a při záporném a jsou členy na místech lichých záporné a na místech sudých kladné. Na př.

Je-li $q=\pm\frac{1}{2}$, jest 10tý člen posloupnosti $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \dots$
$\pm\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^9=\pm\frac{1}{1024}$,
je li $q=-3$, jest 6tý „ „ $1, -3, 9, -27 \dots$
$1.(-3)^5=-243$, a
7mý člen téže posloupnosti . . . . $1.(-3)^6=729$; nebo
je-li $q=-3$, jest 6tý člen posloupnosti $-1, 3, -9, 27 \dots$
$-1.(--3)^5=243$, a
7mý člen téže posloupnosti jest . . $-1.(-3)^6=-729$, atd.

Je-li počet členů (n) určitý, jest posloupnosť *konečná*, je-li neurčitý, *nekonečná.* Je-li v posloupnosti nekonečné t. j. při $n=\infty$

spolu q zlomek pravý na př. $\frac{1}{p}$, jest její n-tý člen

$u = aq^{\infty} = \frac{a}{p^{\infty}} = \frac{a}{\infty}$ t. j. menší nežli kterékoli číslo tedy $= 0$.

3. *Součet posloupnosti geometrické* dostaneme, sečteme-li všecky členy její. Aby však výraz pro součet ten, který vůbec poznačujeme s, byl co možná jednoduchý, pracujme takto:

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1},\text{ násobeno } q,\text{ dá}$$
$$sq = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots + aq^{n-1} + aq^n,\text{ rozdíl obou}$$
$$s(q-1) = aq^n - a,\text{ nebo}$$

$$\text{II. } s = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}.$$

Poněvadž se poslední člen $u = aq^{n-1}$, tedy

$$uq = aq^n,$$

promění se součet s po dosazení této hodnoty v jiný, totiž

$$\text{II. } s = \frac{uq - a}{q-1}.$$

Na př. Součet 10ti členů posloupnosti 1, 2, 4, 8, 16 .... kde $a = 1$, $q = 2$, $n = 10$ jest

$$s = \frac{1 . 2^{10} - 1}{2 - 1} = 1024.$$

Součet 6ti členů posloupnosti 1, —3, 9, —27 .... kde $a = 1$, $q = -3$, $n = 6$ jest

$$s = \frac{1 . (-3)^6 - 1}{-3 - 1} = -182.$$

Součet posloupnosti v níž se $a = 3$, $q = 5$ a $u = 46875$ jest

$$s = \frac{46875 . 5 - 3}{5 - 1} = 58593.$$

4. Je-li $q < 1$ tedy na př. $q = \frac{1}{p}$, jest $q^n = \frac{1}{p^n}$, při $n = \infty$ jest (dle 2.) $\frac{1}{p^{\infty}} = 0$.

V případě tom jest součet geometrické posloupnosti

$$s = a + \frac{a}{p} + \frac{a}{p^2} + \frac{a}{p^3} + \ldots . \frac{a}{p^{\infty}} (= 0)$$

čili pro $q = \frac{1}{p}$, $q^n = 0$, dle II.

$$s = \frac{-a}{\frac{1}{p} - 1} = \frac{ap}{p-1}.$$

Na př. Jakou hodnotu má desetinný zlomek prostě občíslný $0{\cdot}\dot{3}\dot{1}$? Zde jest $a = \frac{31}{100}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{100}$, tedy $p = 100$, a proto

$$s = \frac{\frac{31}{100} \times 100}{100 - 1} = \frac{31}{99}$$ (srovnej §. 13. 4).

Jakou hodnotu má desetinný zlomek smíšeně občíslný $0{\cdot}36\dot{7}5\dot{6}$?

Zde začíná posloupnost teprv občíslím, a poněvadž předchází občíslí číslo $\frac{36}{10^2}$ položíme

$a = \frac{756}{10^5}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{10^3}$ a proto

$$s = \frac{\frac{756}{10^5} \,.\, 10^3}{10^3 - 1} = \frac{765}{99900},$$ tedy $0{\cdot}36\dot{7}\dot{5}6 = \frac{36}{100} + \frac{756}{99900} = \frac{68}{185}$.

5. V každém z předešlých vzorců, totiž

I. $u = aq^{n-1}$. II. $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, III. $s = \frac{uq - a}{q - 1}$,

přicházejí čtyři veličiny, z nichž tři známé čtvrtou neznámou určují. Tak na př. plyne ze vzorce I $u = aq^{n-1}$

jsou-li znám: u, q, n, rovnice $a = \frac{u}{q^{n-1}}$

„ „ a, u, n, „ $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$

„ „ a, u, q, „ $n = \frac{\log.u - \log.a}{\log.q} + 1.$

Podobně určí se n ze známých a, u, s, nebo q, u, s pomocí vzorce I. a III. takto:

Z I. plyne

$$\log.q = \frac{1}{n-1}(\log.u - \log.a),$$ z III. plyne

$$\log.q = \log.(s - a) - \log.(s - u),$$ tedy

$$n[\log(s - a) - \log.(s - u)] = \log.u - \log.a + \log.(s - a) - \log.(s - u),$$ a

$$n = \frac{\log.u - \log.a}{\log.(s - a) - \log.(s - u)} + 1.$$

Podobně plyne z I.

$\log. a = \log. u - (n-1)\log. q$, a z III. plyne

$\log. a = \log. [qu - s(q-1)]$, tedy

$$n \log. q = \log. u - \log. [qu - s(q-1)] + \log. q, \text{ a}$$

$$n = \frac{\log. u - \log. [qu - s(q-1)]}{\log. q} + 1.$$

Dodatek. Jak patrno, lze ze tří známých veličin vždy čtvrtou neznámou vypočítati, avšak *pomocí počátků algebry* nelze určiti

q ze známých n, s, u, nebo a, n, s,
u „ „ a, n, s, a
a „ „ n, s, u. Proč?

Příklady.

1. První dva členy posloupnosti geometrické jsou 1) 1, 4. 2) 2, 6. 3) 3, 21. 4) 7, 21. 5) 2, 26, vyhledejte u každé člen 7mý, 14tý, 21tý a 30tý?

2. První dva členy posloupnosti geometrické jsou 1) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$. 2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. 3) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$. 4) $\frac{2}{3}$, 6. 5) $\frac{2}{5}$, 4. 6) $\frac{3}{13}$, $1\frac{8}{13}$. 7) $1\frac{1}{2}$, $16\frac{1}{2}$, vyhledejte u každé člen 8mý, 11tý, 21tý a 30tý.

3. Vypočítejte součet každé z předešlých posloupností.

4. Vypočítejte hodnotu občíslných desetinců 1) $0{\cdot}\dot{3}4\dot{5}$. 2 $0{\cdot}\dot{7}43\dot{4}$. 3) $0{\cdot}351\dot{8}\dot{1}$. 4) $0{\cdot}126\dot{4}02\dot{3}$. 5) $0{\cdot}0171\dot{5}584\dot{7}$.

5. Vyhledejte 1) s, jsou-li známy a, n, u, nebo q, n, u.
2) u „ „ a, q, s, „ q, n, s.
3) a „ „ q, n, s, „ q, u, s.
4) q „ „ a, u, s.
5) n „ „ a, q, s.

6. Vypočítejte s, je-li $a=4$, $n=10$ a $u=78732$, nebo je-li $q=1\frac{1}{2}$, $n=8$ a $u=106\frac{403}{512}$.

7. Vypočítejte u, je-li $a=2\frac{1}{2}$, $q=4$, $s=54612\frac{1}{2}$, nebo je-li $q=\frac{1}{2}$, $n=8$, $s=11\frac{61}{64}$.

8. Vypočítejte q, je-li $a=\frac{1}{2}$ $u=\frac{2048}{15625}$, $s=\frac{5248}{15625}$, a vypočítejte n, je-li $a=-0{\cdot}3$, $q=-20$, $s=365714285{\cdot}7$.

9. Vypočítejte a, je-li $q=-2$, $n=11$, $s=-725\frac{11}{16}$. nebo je-li $q=-2$, $u=34$, $s=22\frac{5}{16}$.

10. Kolik lidí dozví se jakési zprávy za den (= 16 hodinám), pakli jediný ji sdělí druhému a každý kdo ji zná, každou hodinu jen jedinému ji poví?

11. Sessa Ebn Daher vymyslil pro indického krále Shehrama hru v šachy. Tato se líbila králi tak, že vyzval důmyslného

nálezce, aby si od něho vyžádal za to odměnu. Tento žádal takový počet zrn pšeničných, aby z nich dáti mohl na první pole šachovnice 1 zrno, na druhé 2, na třetí 4 atd. na každé z následujících (do 64ti) 2krát tolik nežli na předcházející. Kolik zrn by k tomu musilo býti?

12. Kdosi vsadil ve hře 20 kr. a prohrál. Na to vsadil vždy 2krát tolik co předešle a v osmé hře vyhrál 620 zl. Mnoho-li vůbec vyhrál nebo prohrál? Kdyby byl sadil celkem 1968 zl. 20 kr., po kolik her by musil sázeti?

13. V nádobě jest a pinet jakés tekutiny. Vyberu-li z ní b pinet a přileju-li b pinet tekutiny jiné, pak vyberu-li ze směsi opět b pinet a přileju-li opět b pinet druhé tekutiny atd. vyberu-li a přileju-li n-krát po sobě po b pintách; v jakém poměru budou pak obě tekutiny v nádobě? (První tekutiny tam zůstane po $n$krátém vybrání $\left(\frac{a-b}{a}\right)^n$, tedy druhé $1-\left(\frac{a-b}{a}\right)^n$ atd.)

14. V nádobě jest 100 pinet vína. Vyberu-li z toho 1 pintu a přileju-li 1 pintu vody, pak vyberu-li ze směsi opět 1 pintu a přileju-li opět 1 pintu vody atd., kolikrát to mohu opakovati, aby ve směsi bylo konečně 50 pinet vína?

15. Vypočítejte součet sestupné posloupnosti geometrické podoby:

$$a,\ b,\ \frac{b^2}{a},\ \frac{b^3}{a^2},\ \ldots .$$

a) je-li počet členů n a b) je-li $n = \infty$.

16. Čemu by se rovnal součet předešlé posloupnosti, kdyby bylo $\frac{b}{a}$ záporné, tedy posloupnosti $a,\ -b,\ \frac{b^2}{a},\ -\frac{b^3}{a^2},\ \ldots$?

17. V nekonečné jakés posloupnosti geometrické jest první člen $=$ udavateli $= \frac{a}{a+b}$, čemu se rovná její součet?

18. Těleso A jest míli před tělesem B. Začnou-li se obě současně pohybovati a sice A rychlostí desetkrát menší nežli B, které za každou hodinu urazí míli, kdy dohoní B těleso A? (Na počátku jsou od sebe míli, B tu míli vykoná za 1 hodinu, v kterémž čase vykoná A $\frac{1}{10}$ míle dále, když tuto $\frac{1}{10}$ míle vykoná B, jest A $\frac{1}{100}$ míle před ním, atd. zdá se, že B nikdy A nedohoní (klamný úsudek Zenonův.) Avšak B neprobíhá prostory $1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100}$ míle atd. v stejném čase, a proto dohoní A za $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots\ldots = ?$ hodin).

19. Čemu se rovná součet 1) $a + 2aq + 3aq^2 + \ldots naq^{n-1}$
2) $1 + \frac{3}{p} + \frac{5}{p^2} + \frac{7}{p^3} + \ldots$
3) $1 + \frac{4}{p} + \frac{9}{p^2} + \frac{16}{p^3} + \ldots$? $\left\{\begin{array}{r} a+2aq+3aq^2+\ldots = a+aq+aq^2+aq^3+\ldots \\ aq+aq^2+aq^3+\ldots \\ aq^2+aq^3+\ldots \end{array}\right\}$ součet atp.

20. Geometrická posloupnost má 11 členů, první člen jest a^2, a udavatel $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, které jsou všechny její členy, a který jest jejich součet?

B. Složité úrokování a počet o stálém důchodu č. rentě.

§. 41.

Posloupnosti geometrické užívá se s výhodou

I. *při složitém úrokování* a

II. *při vypočítání stálého důchodu* čili *renty.*

I. Přidávají-li se úroky po jakési jednici času (po roce, po $^1/_2$-, $^1/_4$ roce atp.) k jistině počáteční, a zúročují-li se s touto na stejná ze sta, říkáme tomu *složité úrokování.*

1. Při složitém úrokování rozeznáváme *jistinu počáteční* J, *jistinu konečnou* K, *úroky ze sta* P a *počet časových jednic* (na př. roků) n. Jsou-li z těchto čtyř veličin kterékoliv tři známy, lze čtvrtou neznámou vypočítati. Na př. Jak veliká jest konečná jistina K, uloží-li se jistina J na $P\%$ po n roků?

Nazveme-li jistinu počáteční čili na počátku prvního roku J, na konci prvního roku J_1, na konci druhého roku J_2 atd. až na konci n-tého roku J_n = jistině konečné K, a poznačíme-li úroky ze sta vůbec P, má se

$$\begin{array}{l} J : J_1 = 100 : (100 + P) \\ J_1 : J_2 = 100 : (100 + P) \\ J_2 : J_3 = 100 : (100 + P) \\ \text{— — — — — — — — —} \\ J_{n-1} : K = 100 : (100 + P), \end{array}$$

z čehož plyne

$$J : K = 100^n : (100 + P)^n = 1 : \left(\frac{100 + P}{100}\right)^n, \text{ nebo}$$

$$J : K = 1 : (1 + p)^n, \text{ pakli } \frac{P}{100} = p = \text{úrokům na př.}$$

z 1 zlat. Z toho se konečná jistina po n rocích čili

a) $K = J(1 + p)^n$, nebo $\log. K = \log. J + n \log. (1 + p)$.

Z rovnice té, jsou-li známy veličiny K, p, n, určí se

b) $J = \frac{K}{(1+p)^n}$, nebo $\log. J = \log. K = n \log. (1 + p)$,

jsou-li známy K, J, p, jest

c) $n = \frac{\log. K - \log. J}{\log. (1 + p)}$,

a jsou-li známy K, J, n, určí se nejprvé

d) $(1 + p) = \sqrt[n]{\frac{K}{J}}$, nebo $\log. (1 + p) = \frac{1}{n}(\log. K - \log. J)$,

a pak teprv p

2. *Rovná-li se konečná jistina několikanásobné jistině počáteční,* t. j. je-li $K = mJ$, promění se vzorec a), c), d) v tyto:

e) $m = (1 + p)^n$, nebo $\log. m = n \log. (1 + p)$,

f) $n = \frac{\log. m}{\log. (1 + p)}$

g) $(1 + p) = \sqrt[n]{m}$, nebo $\log. (1 + p) = \frac{1}{n} \log. m$, z čehož pak p.

3. Až dosud bralo se u za počet *celých* roků. Kdyby však časová jednice byla *několik\ý* na př. $m$tý. díl roku, vyměnilo by se v předešlých vzorcích p za $\frac{p}{m}$ a n za mn. Tím by se na př. vzorec a) proměnil v tento:

$K = J\left(1 + \frac{p}{m}\right)^{mn}$ a dle toho podobně i ostatní.

Na př. 1) Nač vzroste 100 zl. na 6% za 10 roků, přirážejí-li se k nim úroky a) celoročně, b) půlletně.

a) Dle $K = J(1 + p)^n$, jest

$K = 100\,(1{\cdot}06)^{10}$, a

$\log. K = \log. 100 = 2$

$+\ 10 \log. 1{\cdot}06 = 0.2530590$

$\log. K = 2{\cdot}2530590$, t. j.

$K = 179{\cdot}08$ zl.

b) Dle $K = J\left(1 + \frac{p}{2}\right)^{2n}$, jest

$K = 100(1{\cdot}03)^{20}$, a

$\log. K = 20 \log. 1{\cdot}03 = 0{\cdot}0128372 \times 20$

$0{\cdot}2567440$

$+ \log. 100 = 2$

$\log. K = 2{\cdot}2567440$, t. j.

$K = 180{\cdot}61$ zl.

2) Která jistina vzroste za 8 roků při $4^1/_2$% na 10000 zl., přirážejí-li se úroky a) celoročně, b) půlletně.

a) Dle $J = \frac{K}{(1+p)^n}$, jest

$$J = \frac{10000}{(1{\cdot}045)^8}, \text{ a}$$

$$\begin{array}{rl}
\log. J = \log. 10000 = & 4{\cdot}0000000 \\
- 8 \log. 1{\cdot}045 = & \underline{0{\cdot}0191163 \times 8} \\
= & 0{\cdot}1529304 \\
\hline
\log. J = & \overline{3}{\cdot}8470696, \\
J = & 7031{\cdot}85 \text{ zl.}
\end{array}$$

b) Dle $J = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{2}\right)^{2n}}$

$$J = \frac{10000}{(1{\cdot}0225)^{16}}$$

$$\begin{array}{rl}
\log. J = \log. 10000 = & 4{\cdot}0000000 \\
- 16 \log. 1{\cdot}0225 = & \underline{0{\cdot}0096633 \times 16} \\
= & 0{\cdot}1546128 \\
\hline
\log. J = & 3{\cdot}8453872, \\
J = & 7004{\cdot}66 \text{ zl.}
\end{array}$$

3) Za kolik roků na 6% zdvoj- a za kolik ztrojnásobí se 100 zl., přirážejí-li se úroky celoročně?

Dle $n = \frac{\log. m}{\log. (1+p)}$, jest

$$n = \frac{\log. 2}{\log. (1{\cdot}06)} \text{ nebo}$$

$$n = \frac{0{\cdot}3010300}{0{\cdot}0253059} = 11{\cdot}89 \text{ roku}$$

$$= 11 \text{ r. } 10 \text{ m. } 20 \text{ dní.}$$

$$n = \frac{\log. 3.}{\log. (1{\cdot}06)}$$

$$n = \frac{0{\cdot}4771213}{0{\cdot}0253059} = 18{\cdot}85 \ldots \text{ roku}$$

$$= 18 \text{ r. } 10 \text{ m. } 6 \text{ dní.}$$

4) Na kolik ze sta musila by se uložiti jistina, k níž by se *měsíčně* úroky přirážely, aby vzrostla tak, jako by se k ní 3% *celoročně* přirážely.

$$\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12} = 1+p = 1{\cdot}04$$

$$12 \log. \left(1+\frac{x}{12}\right) = \log. 1{\cdot}04 = 0{\cdot}0170333$$

$$\log. \left(1+\frac{x}{12}\right) = \frac{0{\cdot}0170333}{12} = 0{\cdot}0014194, \text{ tedy}$$

$$1+\frac{x}{12} = 1{\cdot}00327$$

$$\frac{x}{12} = 0{\cdot}00327$$

$$x = 0{\cdot}03924 \text{ pro } p \text{ nebo}$$

$$100x = 100p = P\% = 3{\cdot}924\%.$$

II. Splácí-li se určitá suma v stejných dobách na př. každého roku, a počítá-li se na složitý úrok, můžeme ji nazvati vůbec *stálý důchod* čili *rentu.* Není-li jinak udáno, máme za to, že se renta splácí na *konci* každého roku. Jak se rozličné renty vypočítají, ukazují tyto úlohy:

1. *Vypláci-li* se z jistiny J (vklad, mise), která jest na $P\%$ po n roků na úroky z úrok uložená, ročně renta R, mnoho-li zůstane po čase tom v pokladně, t. j. o mnoho-li převyšuje konečná jistina, na kterou vzrostla jistina J, veškeré vyplacené renty?

Jistina J vzroste koncem 1. roku na $J(1+p)$, kde opět $p = \frac{P}{100}$ (dle I. 1.), a odebéře-li se od toho renta R, *zbude* v pokladně

koncem 1. roku $J(1+p) - R$, zbytek ten se zúročuje v roce druhém (dle I. 1.), tak že po odečtení renty zbude

„ 2. „ $[J(1+p)^2 - R(1+p)] - R$, podobně zbude

„ 3. „ $[J(1+p)^3 - R(1+p)^2 - R(1+p)] - R$ atd., tedy

„ n. „ $[J(1+p)^n - R(1+p)^{n-1} - R(1+p)^{n-2} - \ldots - R(1+p)] - R$

čili $J(1+p)^n - R[1+(1+p)+(1+p)^2+\ldots+(1+p)^{n-1}]$.

Výraz v menšiteli uzávorkovaný jest posloupnost geomentrická a součet její dle vzorce $s = \frac{a(q^n+1)}{q-1}$, kde $a = 1$, $q = 1+p$, jest $\frac{(1+p)^n - 1}{p}$. Nazveme-li tedy zbytek v pokladně D, jest

$$D = J(1+p)^n - \frac{R}{p}[(1+p)^n - 1], \text{ nebo}$$

$$D = \frac{1}{p}[Jp(1+p)^n - R(1+p)^n + R] = \frac{1}{p}[(1+p)^n . (Jp - R) + R],$$

čili

a) $D = \frac{R}{p}[(1+p)^n . (\frac{Jp}{R} - 1) + 1]$.

Kdyby se R nebylo ročně vybíralo, nýbrž *přidávalo* za stejnými podmínkami, bylo by R v předešlém provedení *kladné*, a pro ten případ by se proměnil vzorec *a*) v tento:

$$\text{b)}\quad D = \frac{R}{p}\left[(1+p)^{\text{n}}.\left(\frac{Jp}{R}+1\right)-1\right].$$

Z obou těchto vzorců můžeme pomocí *čtyř* veličin známých dle potřeby pátou neznámou (vyjma p) určiti.

Na př. kdosi uloží 8000 zl. na 6% na úroky z úrok a béře po 7 roků 600 zl. renty; mnoho-li mu po tom čase zbude?

Dle vzorce *a*) jest

$$D = \frac{600}{0{\cdot}06}\left[(1{\cdot}06)^7.\left(\frac{8000\times 0\;06}{600}-1\right)+1\right] =$$

$$10000[(1{\cdot}06)^7 \times -0{\cdot}2+1].\text{*)}$$

$$\log.\ D = \log.\ 1000 + \log.\ [(1.06)^7 \times -0.2+1]$$

$$7\log.\ 1{\cdot}06 = \frac{0{\cdot}0253059 \times 7}{0{\cdot}1771413}$$

$$\log.\ 2 = \underline{0{\cdot}3010300-1}\ (z)$$

$$0{\cdot}4781713-1\ (z),\ \text{náleží k číslu} -0{\cdot}300726$$

$$1-0{\cdot}300726 = 0{\cdot}699274.$$

$$\log.\ D = \log.\ 1000 \quad = 4$$

$$+\log.\ 0{\cdot}699274 = \underline{0{\cdot}8446474-1}$$

$$\log.\ D = \quad 3{\cdot}8446474,\ \text{tedy}$$

$$D = 6992{\cdot}74\ \text{zl.}$$

zbude v pokladně, když se byla R po sedmé vyplatila.

Kdyby se bylo $R = 600$ zl. *přidávalo* k $J = 8000$ zl. při stejných podmínkách, pracovali bychom dle vzorce *b*), totiž

$$D = \frac{600}{0{\cdot}06}\left[(1{\cdot}06)^7.\left(\frac{8000\times 0{\cdot}06}{600}+1\right)-1\right],\ \text{nebo}$$

$$D = 1000\,[(1{\cdot}06)^7 \times 1{\cdot}8-1]$$

$$\log.\ D = \log.\ 10000 + \log.\ [(1{\cdot}06)^7 \times 1{\cdot}8-1],\ \text{z čehož}$$

$$D = 17065{\cdot}3\ \text{zl.}$$

jest v pokladně, když se byla R po sedmé uložila.

Dodatek. Pakli se R ročně přidává a spolu úročuje na *jiná* % nežli J, na př. Q%, kde tedy $\frac{Q}{100} = q$, vložme do předešlé rovnice první

$$D = J(1+p)^{\text{n}} - \frac{R}{p}\left[(1+p)^{\text{n}}-1\right]$$

---

*) V příkladech podobných jedná se hlavně o to, jak by se *nejdříve* přišlo k cíli, z kteréž příčiny se může to které snadnější násobení neb dělení atd. prvé provésti nežli se logaritmuje.

nejprvé $+R$ místo $-R$ a pak v menšiteli q místo p, čímž dostaneme vzorec:

$$D = J(1+p)^n + \frac{R}{p}[(1+q)^n - 1].$$

2. Ukládá-li se *koncem* každého roku R zlatých na úroky z úrok po n let na $P\%$, mnoho-li jest v pokladně po uplynutí tohoto času?

V případě tom nestává žádného vkladu J, t. j. $J = O$, a jelikož se R koncem roku *přidává*, vyjádří se konečná jistina v pokladně dle vzorce b)

$$\text{c)}\quad D = \frac{R}{p}[(1+p)^n - 1].$$

Kdyby se R ukládalo *počátkem* každého roku při týchže podmínkách, vzrostlo by R už na konci prvního roku na $R(1+p)$, tak že by se vzorec c) proměnil v tento:

$$\text{d)}\quad D = \frac{R}{p}(1+p)[(1+p)^n - 1].$$

Z každého obou vzorců můžeme určiti dle potřeby buď R nebo n, jsou-li ostatní veličiny známy; určování veličiny p vede na rovnici stupně vyššího.

Na př. Otec vložil pro svého syna toho dne, kdy tento *po druhé* své narozeniny slavil, 100 zl. do spořitelny, a přidával k nim téhož dne každého roku vždy 100 zl. Přirážejí-li se úroky k jistině a zúročuje-li spořitelna na 5%, mnoho-li tam bude míti onen syn koncem svého 20tého roku.

Dle vzorce c) jest

$$D = \frac{100}{0\cdot05}[(1\cdot05)^{20} - 1] = 2000[(1\cdot05)^{20} - 1].$$

$$\log. D = \log. 2000 + \log. [(1\cdot05)^{20} - 1]$$

$$\begin{array}{l} 20 \log. 1\cdot05 = 0\cdot0211893 \times 20 \\ \hline \qquad\qquad 0\cdot4237860 \text{ náleží k číslu } 2\cdot65329 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. D = \log. 2000 = & 3\cdot3010300 \\ + \log. 1\cdot65329 = & 0\cdot2183491 \\ \hline \log. D = & 3\cdot5193791 \\ D = & 3306\cdot59 \text{ zl.} \end{array}$$

Kdyby se bylo prvních 100 zl. vložilo do spořitelny téhož dne, kdy se dítě narodilo, a ostatní podmínky se neměnily, pracovalo by se dle vzorce *d*), totiž

$$D = \frac{100}{0\cdot05} \times 1\cdot05 [(1\cdot05)^{20} - 1) = 2000 \times 1\cdot05 [(1\cdot05)^{20} - 1].$$

Dle předešlého jest

$$(1{\cdot}05)^{20} - 1 = 1{\cdot}65329, \text{ tedy}$$
$$\log. D = \log. 2000 = 3{\cdot}3010300$$
$$+ \log. 1{\cdot}05 = 0{\cdot}0211893$$
$$+ \log. 1{\cdot}65329 = 0{\cdot}2183491$$
$$\log. D = 3{\cdot}5405684, \text{ a}$$
$$D = 3471{\cdot}91 \text{ zl.}$$

Dodatek. Ukládá-li se renta R jak právě povědíno vždy buď *na konci* neb na *počátku* každého roku, a má-li se rovnati konečná hodnota všech rent několika (na př. m-) násobnému renty R, vložme do vzorce *c*) a *d*) $D = mR$, čímž se promění vzorce *c*) a *d*) v tyto:

$$D = mR = \frac{R}{p}[(1+p)^n - 1] \text{ čili}$$

$$\text{c}') \quad m = \frac{1}{p}[(1+p)^n - 1], \text{ a podobně}$$

$$\text{d}') \quad m = \frac{1+p}{p}[(1+p)^n - 1].$$

Je-li známo, m a p, snadně se vypočítá počet roků n.

3. Jak se vypočítá *výkupné* za rentu R, která se má spláceti po n let při $P\%$ *na konci* každého roku, počítajíce úroky na úrok?

V případě tom hledá se vklad čili jistina, která by se za uvedenými podmínkami měla uložiti hned, tak aby se z ní mohla vypláceti koncem každého roku renta R, a po n letech aby v pokladně ničeho nezbylo, t. j. aby se $D = 0$. Vklad tento $= J$ vypočítáme ze vzorce *a*), ve kterémž položíme $D = 0$, tedy

$$0 = \frac{R}{p}\left[(1+p)^n . \left(\frac{Jp}{R} - 1\right) + 1\right], \text{ z čehož}$$

$$\text{e}) \quad J = \frac{R[(1+p) - 1]}{p(1+p)^n} = \frac{R}{p}[1 - (1+p)^{-n}].$$

Z tohoto vzorce, jsou-li J, p, n známy, dostaneme vzorec *pro rentu*:

$$\text{f}) \quad R = \frac{Jp(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} = \frac{Jp}{1 + (1+p)^{-n}}.$$

A jsou-li J, R, p známy, dostaneme vzorec *pro počet roků*:

$$\text{j}) \quad n = \frac{\log. R - \log. (R - Jp)}{\log. (1+p)}.$$

Na př. 1) Kdosi má po 10 let platiti koncem každého roku 365 zl. Jak veliké jest výkupné při 6% s úroky na úrok?

Dle vzorce *e*) se

$$J = \frac{365}{0{\cdot}06}[1-(1{\cdot}06)^{-10}].$$

$$\begin{array}{rl}
-10\log.\ 1{\cdot}06 = -0{\cdot}2530590 = 0{\cdot}7469410 - 1 = \log.\ 0{\cdot}558394 & \\
1 - 0{\cdot}558394 = 0{\cdot}441606 & \\
\log. J = \log.\ 365 = & 2{\cdot}5622929 \\
+\log.\ 0{\cdot}441606 = & 0{\cdot}6450349 - 1 \\
\hline
 & 2{\cdot}2073278 \\
-\log.\ 0{\cdot}06 = & 0{\cdot}7781513 - 2 \\
- & \qquad\qquad + \\
\hline
\log. J = & 3{\cdot}4291765 \\
J = 2686{\cdot}44 \text{ zl.} = & \text{výkupnému.}
\end{array}$$

2. Dluh 1 milion zlatých na 5% má se umořiti za 30 let. Zapraví-li se renta koncem každého roku, jak veliká musí býti?

Dle vzorce *f*) se

$$R = \frac{1000000\times 0{\cdot}05}{1-(1{\cdot}05)^{-30}}.$$

$$\begin{array}{rl}
-30\log.\ 1{\cdot}05 = -0{\cdot}6356790 = 0{\cdot}3643210 - 1 = \log.\ 0{\cdot}231377 & \\
1 - 0{\cdot}231377 = 0{\cdot}768623 & \\
\log. R = \log.\ 1000000 = & 6 \\
+\log.\ 0{\cdot}05 = & 0{\cdot}6989700 - 2 \\
\hline
 & 4{\cdot}6989700 \\
-\log.\ 0{\cdot}768623 = & 0{\cdot}8857133 - 1 \\
- & \qquad\qquad + \\
\hline
\log. R = & 4{\cdot}8132567 \\
R = & 65051{\cdot}40 \text{ zl.}
\end{array}$$

3. Kdosi složí 6000 zl. na 4%, aby dostával koncem každého roku 380 zl. renty. Kolik let může této renty požívati?

Dle vzorce *j*) jest

$$n = \frac{\log.\ 380 - \log.\ (380 - 6000\times 0{\cdot}04)}{\log.\ 1{\cdot}04}$$

$$\begin{array}{rl}
n = \log.\ 380 = & \left.\begin{array}{r} 2{\cdot}5797836 \\ -\ 2{\cdot}1461280 \end{array}\right\} : \log.\ 1{\cdot}04\ (= 0{\cdot}0170333) \\
-\log.\ 140 = & \\
\hline
 & 0{\cdot}4336556 \\
n = & \dfrac{0{\cdot}4336556}{0{\cdot}0170333} = 25 \text{ roků } 5 \text{ m. } 12 \text{ d.}
\end{array}$$

4. Jaké výkupné musí se složiti za rentu, která se má platiti „věčně“? V případě tom jest $n = \infty$, položí-li se tedy do vzorce *e*) místo

$$(1+p)^{-n} = \frac{1}{(1+p)^n} = \frac{1}{(1+p)^{\infty}} = 0,$$ dostaneme

h) $$J = \frac{R}{p} = \frac{100R}{P},$$ a z toho

i) $$R = pJ = \frac{PJ}{100}$$

t. j. v případě tom složí se taková jistina, která ročně vynáší R (srovnej §. 17.).

Na př. Obec má platiti ročně „po všechny časy“ 50 zl.; jakou sumou by se mohla závazku toho sprostiti při 5%?

Dle vzorce h) jest

$$J = \frac{50}{0{\cdot}05} = 1000 \text{ zl.}$$

t. j. **jistina**, která při 5% vynáší ročně 50 zl. úroků.

5. Ukládá-li se renta R v periodách o m rocích n-krát (tedy po mn rocích) na P% na úroky z úrok, *a*) jak veliká jest její **konečná** hodnota ($=D$), *b*) jaké výkupné ($=J$) by se jí rovnalo?

Úlohu tu řešíme pomocí vzorců *c*) a *e*), do kterých položíme na **místě** $1+p$ výraz $(1+p)^m$, tedy místo p výraz $(1+p)^m-1$.

Tím se ony vzorce promění v tyto:

k) $$D = \frac{R[(1+p)^{mn} - 1]}{(1+p)^m-1)},$$ a

l) $$J = \frac{R[1-(1+p)^{-mn}]}{(1+p)^m-1}.$$

Této poslední rovnice užívá se zhusta v tom případě, když se **perioda** m opakuje *bez konce* t. j. když $n = \infty$. Za touto pod**mínkou** jest $(1+p)^{-mn} = \frac{1}{(1+p)^{mn}} = 0$. Vložíme-li hodnotu tuto do b), bude výkupné na konci periody m roků

m) $$J = \frac{R}{(1+p)^m-1}.$$

Kdyby se však právě perioda m roků neskončila, nýbrž nová **perioda** už dostoupila do roku *kého*, musili bychom poslední **vzorec** m násobiti výrazem $(1+p)^k$. Nazveme-li toto výkupné v *ktém* roce periody na př. V, bude

n) $$V = J(1+p)^k = \frac{R(1+p)^k}{(1+p)^m-1}.$$

Na př. Dle starých závazků jest obec povinna vystavěti v jiné obci most, když jest toho vůbec zapotřebí. Most ten stavěl se průměrně v 20 letech nákladem průměrným 1500 zl. Jakou sumou může se obec první z této závaznosti vykoupiti *a*) v čase když byla právě nový most vystavěla, aneb *b*) 9 roků po vystavení mostu nového?

Počítáme-li na 4%, řešíme úlohu *a*) pomocí vzorce m) totiž

$$J=\frac{1500}{(1{\cdot}05)^{20}-1}$$

20 log. 1·05 = 0·4237860, náleží k číslu 2·65329.

$\log. J = \log. 1500 = 3{\cdot}1760913$
$-\log. 1{\cdot}65329 = 0{\cdot}2183491$
$2{\cdot}9577422$
$J = 907{\cdot}28$ zl.

V případě *b*) jest dle vzorce *n*)

$$V=\frac{1500.(1{\cdot}05)^9}{(1{\cdot}05)^{20}-1} \text{ nebo } V=907{\cdot}28\times(1{\cdot}05)^9.$$

$\log. V = \log. 1500 = 3{\cdot}1760913$	$\log. V = \log. 907{\cdot}28 = 2{\cdot}9577422$
$+9 \log. 1{\cdot}05 = 0{\cdot}1907037$	$9 \log. 1{\cdot}05 = 0{\cdot}1907037$
$3{\cdot}3667950$	$\log. V = 3{\cdot}1484459$
$-\log. 1{\cdot}65329 = 0{\cdot}2183491$	$V = 1407{\cdot}49$ zl.
$\log. V = 3{\cdot}1484459$	
$V = 1407{\cdot}49$ zl.	

Příklady.

1. Nač vzroste jistina 1000 zl. za 20 roků na 4% při úrocích z úroků?

2. Les jak stojí dal by 5000 sáhů dříví. Mnoho-li sáhů by dal po 30 letech, pakli ho ročně přibývá o $2\frac{1}{4}$%?

3. Město počítá 8000 lidí. Přibývá-li obyvatelů průměrně 2% ročně, kolik jich asi bude za 10 roků?

4. Za kolik roků by z 1 zl. uloženého na 6% bylo 100 zl. a) při ročním, b) při půlletním složitém úrokování?

5. Spořitelna dává 5% a béře 6%, mnoho-li vydělá při 1 zl. za 15 roků?

6. Která jistina uložená na $3\frac{1}{2}$% vzroste za 21 let na 2059·43 zl.

7. Kdosi má platiti třikrát 2560 zlatých a sice věřiteli *A* za rok, věřiteli *B* za dvě leta a věřiteli *C* za tři leta. Mnoho-li může zaplatiti každému hned při srážce 6%?

8. Kdosi má zapraviti 8640 zl. za $7\frac{1}{2}$ roku. Zapraví-li je hned, povolí se mu buď srážka $7\frac{1}{2}$% jednoduchých nebo 7% úroků z úrok. Které nabídnutí bude proň výhodnější?

9. Kolik ze sta platí se z jistiny, která v 13 letech z 830 zl. vzrostla na 1587 zl. a) při ročním, b) při půlletním úrokování?

10. O kolik ze sta rozmnožilo se obyvatelstvo některého města, pakli po 50 letech z 7500 vzrostlo na 10000 obyvatelů?

11. Za 20 roků se jakás jistina zdvacetinásobí. Na kolik % byla uložena?

12. Jakás jistina ztrojnásobí se při $5\frac{1}{2}\%$ za 17 roků, na kolik % musí býti uložena, aby se ztrojnásobila za 10 roků?

13. Za kolik roků vzroste 1 zlatý na 200 zl. při 6%?

14. Za kolik roků vzroste les, který drží 2000 sáhů, na 3000 sáhů, pakli ho ročně přibývá o $2\frac{1}{2}\%$?

15. Za kolik roků zdvojnásobilo by se obyvatelstvo některého města, kdyby ho ročně přibývalo o $1\frac{1}{2}\%$?

16. Za kolik let zdvojnásobí se jistina, která jest uložena a) na 4%, b) na $4\frac{1}{2}\%$, c) na 5% a d) na 6%?

17. Je-li jistina uložena na $P\%$ vzroste za n let k m-násobnému. Za kolik let vzroste k m-násobnému, je-li uložena na $Q\%$?

18. Kdosi uloží u pojišťovacího ústavu 10000 zl., a béře koncem každého roku 800 zl. renty; a) mnoho-li mu zbude po 10 letech? b) mnoho-li by tam měl za stejnými podmínkami, kdyby byl 800 zl. ročně přidával?

19. Spořitelna úrokuje na 5% veškeré vklady. Vybíral-li kdosi rentu 450 zl. na konci každého roku, a zbylo-li mu tam po 11 letech ještě 1000 zl., jak velkou jistinu tam uložil?

20. Kdosi uložil do spořitelny 3800 zl. a vybíral koncem každého roku rentu 200 zl. Zůstalo-li mu tam konečně 1200 zl., kolik let onu rentu vybíral, počítáme-li úroky z úrok na 5%?

21. Kdosi ukládá počátkem každého roku 20 zl. na 5% po 12 let; mnoho-li má po tomto čase a) při ročním, b) při půlletním složitém úrokování?

22. Ukládá-li se počátkem každého roku 100 zl. na 5%, za kolik let bude z toho jistina 1000 zl. při složitém úrokování?

23. Mnoho-li musí uložiti otec na den druhých narozenin svého dítěte a téhož dne roků příštích, chce-li, aby, až mu bude 17 let, náležela mu jistina 4000 zl., počítá-li se na 4% při složitém úrokování?

24. Kdosi má za 5 let dostati 3860 zl. beze všech úroků, a smluví se se svým dlužníkem, aby mu tyto peníze vyplaceny byly v 5ti ročních stejných lhůtách. Mnoho-li dostane každého roku, počítá-li se na 4% úroků na úrok, a) když se mu první lhůta vyplatí hned a b) když se mu první lhůta vyplatí po roce?

25. Ukládá-li se počátkem každého roku 200 zl. na $4\frac{1}{2}\%$, za kolik let se jistina ta zdesítinásobí?

26. Kdosi dostává 500 zl. výslužného a chce je prodati. Soudí-li se z jeho věku a jeho zdraví, že ještě 15krát výslužného užije, mnoho-li zaň dostane, počítá-li se na 6% úroků na úrok?

27. Výměnkář dostává roční výměnek v ceně 256 zl. Jak veliké dostal by zaň výkupné počítané na $5\frac{1}{2}\%$, kdyby se za to mělo, že ještě bude 18 let živ?

28. Příjem státu převyšuje vydání ročně o 800000 zl. Přebytku toho z 18ti po sobě jdoucích let má se ihned použiti k stavbě železné dráhy, za kterouž příčinou si stát peníze ty na $4^0/_0$ vypůjčí. Jak velká bude to půjčka?

29. 5tipercentová státní půjčka 8000000 zl. umořuje se ročními 500000 zl. (jistiny i úroků). Za kolik let se dluh ten zapraví?

30. Kdosi má 10000 zl. jmění, a chce zaň dostávati rentu 700 zl. ročně. Kolik let bude jí užívati při $4^0/_0$?

31. Dluh 14600 zl. uplácí se v ročních lhůtách po 800 zl., které se skládají koncem každého roku. Za kolik let bude splacen při $4^0/_0$ a za kolik při $6^0/_0$?

32. Jaké výkupné musí se dáti za roční rentu 93 zl., která se „věčně“ opakuje, při $3^0/_0$ a jaké při $5^1/_2{}^0/_0$?

33. Úvěrní ústav béře od dlužníka $7^0/_0$, pro sebe počítá z nich $5^0/_0$, za kolik let zaplatí dlužník svůj dluh pouhými úroky?

34. V lese, který drží 80000 sáhů dříví, vyseká se ročně 2500 sáhů. Kolik sáhů bude držeti ten les za 8 roků, přibývá-li ho ročně o $2^1/_2{}^0/_0$?

35. Les dává průměrně za 80 roků 1500 zl. čistého užitku. Zač by se mohl užitek tento prodati a) v čase, kdy čistý příjem uvedenou jistinu dostihl, a b) 16 roků později, počítá-li se na $5^0/_0$ úroků z úrok?

36. Obec užívá jakés louky vždy 7mý rok, a užitek z ní páčí na 100 zl. Zač může tato právo odprodati a) v čase, kdy jí právě užila a b) 2 roky později, počítá-li se na $4^0/_0$ úroků z úrok?

Část pátá.

I. Skladna.

§. 42.

Skladna se zabývá pravidelným seřaďováním daných předmětů, které se znamenají vůbec buď písmenkami a, b, c, d... nebo a_0, a_1, a_2, a_3 . . . nebo číslicemi 1, 2, 3, 4 . . . Každému předmětu samému o osobě, tedy i každé písmence nebo číslici říkáme *prvek*, a dle toho, je-li buď v abecedě buď v řadě čísel dále neb blíže počátku, považujeme jej za prvek *vyšší* neb *nižší*. Tak na př. jest b vyšší prvek nežli a, c vyšší nežli b, a_1 vyšší nežli a_0, a_3 vyšší nežli a_2, 2 vyšší nežli 1 atp.

Spojení několika prvků v jakékoli posloupnosti zove se *soujem* (komplexe), a tento jest opět buď vyšší buď nižší, dle toho přichází-li v něm od levé k pravé na témže místě prvek buď vyšší buď nižší.

Tak na př. jest soujem $a_3a_1a_2$ vyšší nežli $a_1a_3a_2$,
$acbd$ „ „ $abcd$
13542 „ „ 13452 atd.

Nejnižší soujem jest ten, ve kterém přicházejí prvky od levé k pravé v přirozeném pořádku (vzestupně) na př. $a_0a_1a_2a_3$ . . . nebo $abcd$ . . . nebo 1234 . . ., a nejvyšší jest soujem ten, ve kterém pořádek ten zachován od pravé k levé (sestupně) na př. $a_4a_3a_2a_1a_0$, nebo $dcba$, nebo 54321 atd.

K skladně náleží: *přestavování* (permutace), *sestavování* (kombinace) a *obměňování* (variace).

A. Přestavování.

§. 43.

Uděláme-li *ze všech daných prvků* nejnižší soujem, a vyměňujíce pravidelně každý nižší prvek za nejblíže vyšší, přijdeme-li na soujem nejvyšší, říkáme že *přestavujeme;* každý soujem zove se *přestava* a celý výkon *přestavování.*

Při přestavování jest úloha dvojí; totiž

1. *z daných prvků veškeré přestavy utvořiti*, a

2. *počet přestav vypočítati.* V obou případech mohou býti buď veškeré prvky rozličné buď některé stejné.

1. Abychom z daných prvků *rozličných* veškeré přestavy utvořili, pracujme takto:

a) Udělejme nejprvé přestavu nejnižší.

b) Nechajíce první prvky od levé k pravé bez proměny přestavme pouze poslední dva.

c) Vyměňme pak od pravé k levé po pořadě prvek třetí, čtvrtý, pátý atd. za prvek nejblíže vyšší a přestavujme za tím všechny ostatní prvky.

d) Tak se pracuje dále, až se přijde na nejvyšší přestavu, kterou se celý výkon končí. Na př.

a_0a_1	a, b, c	1, 2, 3, 4,			
a_1a_0.	*abc*	1234	2134	3124	4123
	acb	1243	2143	3142	4132
	bac	1324	2314	3214	4213
	bca	1342	2341	3241	4231
	cab	1423	2413	3412	4312
	cba	1432	2431	3421	4321.

Přestavám, v nichž *tentýž prvek* přichází na *prvním* místě, říkáme *skupiny;* kolik prvků tolik skupin.

Podobně se pracuje, jsou-li některé prvky stejné. Na př.

a, *b*, *b*, *c*
abbc *babc* *bbca* *cabb*
abcb *bacb* *bcab* *cbab*
acbb *bbac* *bcba* *cbba.*

2. Počet veškerých přestav při n prvcích poznačujeme $n!$ (čti: až do n), při $(n-1)$ prvků $(n-1)!$ atd. Abychom z daných n prvků rozličných vypočítali *počet veškerých přestav* čili $n!$, považme, že n prvků dává n skupin, že v každé skupině mimo první prvek, který v celé skupině *svého místa* nemění, přichází ještě $(n-1)$ prvků, které se o sobě opět přestavují, pročež se

$$n! = n(n-1)!$$

Avšak $(n-1)$ prvků dá $(n-1)$ skupin, a v každé mimo první prvek přichází $(n-2)$ prvků, jež se opět o sobě přestavují, tedy

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)!$$

Podobně se

$$(n-2)! = (n-2)(n-3)!$$

$$(n-3)! = (n-3)(n-4)! \text{ atd. až}$$

$$[n-(n-2)]! = [n-(n-2)] \,.\, [n-(n-1)] = 2 \,.\, 1.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnice $n! = n(n-1)!$ dostaneme

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1, \text{ nebo}$$

$$n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots (n-2)(n-1)n,$$

t. j. *počet přestav při n rozličných prvcích rovná se součinu všech celých čísel od 1 až do n.*

Dle toho pro $n=1$ jest $n!=1!=1$,
„ $n=2$ „ $n!=2!=1.2=2$,
„ $n=3$ „ $n!=3!=1.2.3=6$,
„ $n=4$ „ $n!=4!=1.2.3.4=24$
„ $n=6$ „ $n!=6!=1.2.3.4.5.6=720$, atd.

3. Je-li při n prvcích m stejných jednoho, p stejných druhého, q stejných třetího atd. druhu, vypočítáme počet *rozličných* přestav těchto n prvků takto:

Dejme tomu, že jest všech *rozličných* přestav x. V každé z těchto x přestav naleză se m, p, q atd. stejných prvků rozličných druhů. Opatříme-li nejprvé oněch m stejných prvků ukazovateli 1, 2, 3, 4... t. j. považujeme-li je za prvky rozličné, dostaneme tím, neměníce nijak místa prvků ostatních, v *každé* z oněch x přestav tolik přestav nových, kolik prvků udává m, tedy $x.m!$ Považujeme-li podobně ve všech těchto nových $x.m!$ přestavách veškeré stejné p-prvky za rozličné, dostaneme z *každé* přestavy tolik nových, kolikrát p-prvků vůbec lze přestaviti, tedy $x.m!p!$ A považujeme-li podobně každý z q stejných prvků za rozličný, dostaneme z *každé* z oněch $x.m!p!$ přestav tolik nových, kolikrát lze q-prvků vůbec přestaviti, tedy $x.m!p!q!$ atd. Avšak počet přestav vyjádřený výrazem $x.m!p!q!$ rovná se $n!$ přestavám, kdyby, jak se právě za to mělo, veškeré n-prvky byly rozličné, tedy:

$x.m!\,p!\,q!=n!$, z čehož *počet rozličných přestav*

$$x=\frac{n!}{m!\,p!\,q!},$$

t. j. *počet přestav n-prvků, mezi nimiž jest m, p, q atd. prvků stejných rozličného druhu, vyjadřuje se počtem přestav n-prvků, děleným součinem počtu přestav stejných prvků prvního, druhého, třetího atd. druhu.*

Na př. Kolik rozličných přestav dají prvky
a, a, b, b, c, d, d, d?
$n=8$, $m=2$, $p=2$, $q=3$, tedy

$$x=\frac{8!}{2!\,2!\,3!}=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.1.2.1.2.3}=1680 \text{ přestávám.}$$

Příklady:

a) Kolik čísel 5ticiferných lze sestaviti z lichých číslic 1, 3 5, 7, 9?

$n=5$ tedy $n!=5!=1.2.3.4.5=120$.

b) Činitelé 2.3.5.6.7.8 dávají v kterémkoli pořádku byvše násobeni tentýž součin. Kolikrát by se musili násobiti, aby se to dokázalo?

$n=6$, $n!=6!=1.2.3.4.5.6=720$kráte.

c) Kolikráte lze přestaviti písmenky slova „samostatnost,“ aby přestavy byly rozličné?

$n=12$, $m=2$, $p=2$, $q=3$, $r=3$, tedy

$$\frac{12!}{2!\,2!\,3!\,3!} = 3326400\text{krát.}$$

d) Kolikátá přestava prvků *á*, *o*, *p*, *r*, *v* jest slovo „právo“?

á bude na 1. místě $4! = 1 . 2 . 3 . 4 = 24$krát
o „ „ 1. „ $4! = 1 . 2 . 3 . 4 = 24$ „
pa „ „ počátku $3! = 1 . 2 . 3 = 6$ „
po „ „ „ $3! = 1 . 2 . 3 = 6$ „
práov bude $1! = 1 = 1$nou
právo „ $1! = 1 = 1$ „

„právo“ jest přestava 62há.

e) Kolikátá přestava prvků *a*, *á*, *c*, *i*, *í*, *l*, *p*, *r*, *s*, *v* jest věta „v práci síla“?

První přestava jest
ácilprsv. Z písmenek před *v* stojících, totiž
a, *á*, *c*, *i*, *í*, *l*, *p*, *r*, *s*, bude každá první 9! tedy
dohromady $9 . 9! = 3265920$ přest.
va, *vá*, *vc*, *vi*, *ví*, *vl*, přijde každé 8! tedy celkem $6 . 8! = 241920$ „
vpa, *vpá*, *vpc*, *vpi*, *vpí*, *vpl*, přijde každá 7! „ $6 . 7! = 30240$ „
vpra přijde . . . . . 6! „ $6! = 720$ „
vprá „ . . . . . 5! „ $5! = 120$ „
vpráca „ . . . . . 4! „ $4! = 24$ „
vprácia „ . . . . . 3! „ $3! = 6$ „
vprácií „ . . . . . 3! „ $3! = 6$ „
vprácil „ . . . . . 3! „ $3! = 6$ „
vprácisa „ . . . . . 2! „ $2! = 2$ „
vprácisíal „ . . . . . 1! „ $1! = 1$ „
v práci síla přijde . . . 1! „ $1! = 1$ „

Věta „v práci síla“ jest přestava 3538966tá.

Příklady.

1. Které jsou veškeré přestavy prvků: a) *a*, *m*, *o*, *s*; b) *a*, *h*, *i*, *k*, *n*; c) a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.

2. Kolik čísel 5ticiferných lze sestaviti ze sud 2, 4, 6, 8, 0, a kolik 6ticiferných z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6?

3. Kolik čísel o 9ti cifrách při rozličných prvcích jest vůbec možných?

4. Kolikrát lze přestaviti činitele součinů a) *abcdefgh*, b) $a^2b^3=aabbb$, c) $a^4b^3c^5$, d) $m^2n^3p^4q^5$?

5. Kolik přestav dá slovo: „pilnost“ a kolik „nedbalost“?

6. Kolik 5ticiferných čísel lze vyjádřiti číslicemi 2, 3, 4, 4, 4?

7. Kolik rozl. přestav dá slovo: „rozprava“, a kolik „rozhovor“?

8. Kolikátá přestava jest slovo „Svatopluk“ prvků *a*, *k*, *l*, *o*, *p*, *s*, *t*, *u*, *v*, a kolikátá slovo „Vyšehrad“ prvků *a*, *d*, *e*, *h*, *r*, *š*, *v*, *y*?

B. Sestavování.

§. 44.

Sestavovati znamená z daných *n* prvků bráti v soujem buď po jednom, neb po dvou, po třech atd., a sice tak, aby *každý soujem byl vzestupný*. Takovému soujmu říkáme *sestava*, a celému výkonu *sestavování*. Dle toho béře-li se v sestavu buď 1 prvek buď 2, 3, 4 prvky, neb 5, 6, 7 . . . *k* prvků, říkáme tomu sestavy *třídy první* (*uniony*, *extrata*), *třídy druhé* (*amba*), *třetí* (*terna*), *čtvrté* (*kvaterna*), *páté* (*kvinterna*), atd. vůbec třídy *kté*. Jsou-li veškeré dané prvky rozličné, zoveme to *sestuvování bez opakování*, může-li se však ten neb onen prvek opakovati, *sestavování s opakováním*.

Při sestavování jest úloha dvojí, totiž

1. *z daných prvků veškeré sestavy* 2, 3, 4, 5 . . . . *kté třídy utvořiti*, a
2. „ „ *počet sestav* 2, 3, 4, 5 . . . . „ „ *vypočítati.*

V obou případech může se sestavovati buď bez opakování nebo s opakováním.

1. Z daných prvků utvoříme sestavy té které třídy *bez opakování* takto:

a) Spojíme-li každý prvek, nejnižším počínajíce, s každým vyšším, dostaneme *amba*.

Na př. z prvků *a*, *b*, *c*, *d*, *e* . . . sestavíme *amba*
ab, *ac*, *ad*, *ae*, . . .
bc, *bd*, *be*, . . .
cd, *ce*, . . .
de, . . .

b) Z *amb* sestavíme *terna*, přidáme-li ku každému ambu prvek vyšší, tak aby každé terno bylo vzestupné. Tak dostaneme při prvcích *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, . . . z předešlého amba

ab, terna *abc*, *abd*, *abe*
ac, „ *acd*, *ace*
ad, terno *ade*
bc, terna *bcd*, *bce*
bd, terno *bde*
cd, „ *cde*.

c) Podobně sestavíme z *teren kvaterna*, z těchto *kvinterna* atd. přidáme-li ke každé sestavě třídy třetí, čtvrté atd. *každý prvek vyšší.*

2. Z daných prvků sestaví se *amba s opakováním*, přidáme-li k prvnímu prvku nejprvé tento samý a pak po pořadě každý vyšší. Podobně se přidá k druhému prvku on sám a pak každý vyšší atd. Na př. prvky

a, *b*, *c*, *d*

dají amba s opakováním:

aa, *ab*, *ac*, *ad*,
bb, *bc*, *bd*,
cc, *cd*,
dd.

Z *amb* dostaneme *terna*, a z těchto *každou sestavu třídy vyšší s opakováním*, spojíme-li *každou* sestavu třídy předcházející nejprvé s prvkem stejnojmenným, a pak po pořadě s každým prvkem vyšším, tak aby žádná sestava se neopakovala. Na př. pomocí amb předešlých dostaneme terna takto:

z amba *aa* budou terna *aaa*, *aab*, *aac*, *aad*
„ *ab* „ „ *abb*, *abc*, *abd*
„ *ac* „ „ *acc*, *acd*
„ *ad* bude terno *add*
„ *bb* budou terna *bbb*, *bbc*, *bbd*
„ *bc* „ „ *bcc*, *bcd*
„ *bd* bude terno *bdd*
„ *cc* budou terna *ccc*, *ccd*
„ *cd* bude terno *cdd*
„ *dd* „ „ *ddd*.

3. *Počet* sestav *kté* třídy při n prvcích *bez opakování* naznačujeme vůbec buď $\overset{k}{C}_n$, neb $\binom{n}{k}$ (čti: n nad k). Počet *amb* dostaneme, spojíme-li každý prvek s každým z ostatních bez ohledu na to, je-li vyšší neb nižší. Tím dostaneme n řad po $(n-1)$ ambách, čili $n(n-1)$ amb. V těchto ambách jest však každé ambo dvakrát, tedy počet *rozličných* amb jest

$$\overset{2}{C}_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}.$$

Z amb dostaneme terna, spojíme-li každé ambo s každým z ostatních $(n-2)$ prvků.

Tím doděláme se $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$ řad po $(n-2)$ ternách čili

$$\binom{n}{2}(n-2) = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2) \text{ ternám.}$$

Poněvadž se však každé ambo spojilo s $(n-2)$ prvky bez ohledu na to, jsou-li vyšší neb nižší, jest každé terno v počtu tom třikrát (na př. *ab c*, *a bc*, *ac b*), z kteréž příčiny jest při n prvcích *rozličných* teren

$$\overset{3}{C}_n = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Nazveme-li dle toho počet sestav *kté* třídy při n prvcích $\binom{n}{k}$, dostaneme počet všech soustav $(k+1)$ní třídy, pakli

$\binom{n}{k}\times(n-k)$. V těchto sestavách jest však $(k+1)$ sestav stejných, proto bude *rozličných* sestav $(k+1)$ třídy

$$\overset{k+1}{C_n}=\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}.$$

Poněvadž se ale dle předešlého

$$\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},$$ bude se

$$\binom{n}{4}=\binom{n}{3}\frac{n-3}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4},$$

$$\binom{n}{5}=\binom{n}{4}\frac{n-4}{5}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$$ tedy vůbec

$$\overset{k}{C_n}=\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{n-(k-1)}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots\ldots k}$$ t. j.

počet sestav bez opakování při n prvcích vyjadřuje zlomek, jehož čitatel jest součin z k činitelů, z nichž první jest n a každý z ostatních o 1 menší, a jehož jmenovatel jest též součin z k činitelů, z nichž první jest 1 a každý z ostatních o 1 větší (až do *k*).

Všeobecnému tomu vzorci můžeme dáti ještě jinou podobu. Násobíme-li totiž jeho čitatele a jmenovatele součinem $1.2.3.4\ldots(n-k)$, promění se čitatel v součin $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\times(n-k)(n-k-1)\ldots3.2.1=1.2.3\ldots n$, a jmenovatel v součin $1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots(n-k)$, proto se také

$$\binom{n}{k}=\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots(n-k)},$$ a poněvadž jest $n>k$, můžeme psáti

$$\binom{n}{k}=\frac{1.2.3\ldots k.(k+1)(k+2)\ldots(n-1)n}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots\ldots(n-k)},$$ čili po skrácení

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(k+1)}{1.2.3\ldots(n-k)}=\binom{n}{n-k}$$ t. j.

počet sestav bez opakování při n prvcích vyjadřuje též zlomek, jehož čitatel jest součin (n—k) činitelů, z nichž první jest n a každý z ostatních o 1 menší, a jehož jmenovatel se skládá též z (n—k) činitelů, z nichž první jest 1 a každý z ostatních o 1 větší (do n—k).

Dle toho se $\binom{n}{n}=1$, $\binom{1}{n+1}$, $\binom{n}{n+2}$ atd. $=0$, poněvadž v čitateli jest činitel 0.

Na př. $\binom{13}{9}=\binom{13}{13-9}=\binom{13}{4}=\frac{13.12.11.10}{1.2.3.4}=715.$

$\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7.6}{1.2}=21$, $\binom{3}{4}=\frac{3.2.1.0}{1.2.3.4}=0.$

V třídě se vyučuje 9ti předmětům a sice 5ti každého dne, kolikrát lze pořádek ten změniti?

$$\binom{9}{5}=\binom{9}{4}=\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}=126\text{krát.}$$

Dvě přímky se protínají v jediném bodě, v kolika bodech na nejvýše může se protínati 6 přímek?

$$\binom{6}{2}=\frac{6.5}{1.2}=15.$$

4. Vzorec $\binom{n}{k}$ jest té vlastnosti, že se

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}.$$

Neboť

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}=\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$$

Tedy

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n}{k-1}\left(\frac{n-k+1}{k}+1\right)$$

$$=\binom{n}{k-1}\frac{n+1}{k}=\binom{n+1}{k}.$$

5. Počet sestav s opakováním *k*té třídy při *n* prvcích poznačuje se vůbec $C_n^{0,k}$. Počet amb s opakováním čili $C_n^{0,2}$ dostaneme, připočteme-li k počtu amb bez opakování $\binom{n}{2}$ všechna amba ze stejných prvků, jichž jest *n*, tedy

$$C_n^{0,2}=\binom{n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{1.2}.$$

Je-li známo $C_n^{0,k}$, dostaneme počet sestav s opakováním třídy $(k+1)$ní, čili $C_n^{0,k+1}$, spojíme-li nejprvé každou dřívější sestavu s *každým* z *k* prvků, z nichž se skládá a pak s každým z *n* prvků bez rozdílu. Tím nabudeme z každé sestavy $(n+k)$ sestav nových nebo

$$C_n^{0,k}\,(n+k)\text{ sestav vůbec.}$$

Avšak v těchto sestavách jest každá sestava $(k+1)$nou, tedy počet *rozličných* sestav s opakováním udává výraz:

$$C_n^{0,k+1}=C_n^{0,k}\,\frac{n+k}{k+1}.$$

A poněvadž dle předešlého

$$C_n^{0,2}=\frac{n(n+1)}{1.2},\text{ bude}$$

$$C_n^{0,3} = C_n^{0,2}\frac{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

$$C_n^{0,4} = C_n^{0,3}\frac{n+3}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$ tedy vůbec

$$C_n^{0,k} = C_n^{0,k-1}\frac{n+k-1}{k} = \frac{n(n+1)(n+2)\;.\;.\;.\;(n+k-1)}{1.2.3\;.\;.\;.\;.\;k},$$

t. j. *počet sestav s opakováním při n prvcích vyjádřuje zlomek, jehož čitatel jest součin k činitelů, z nichž první jest n a každý příští o 1 větší, a jehož jmenovatel jest též součin k činitelů, z nichž první jest 1 a každý z ostatních o 1 větší* (až do k). Vzorec ten se též píše

$$C_n^{0,k} = \binom{n+k-1}{k},$$ a dle toho se

$$C_n^{0,2} = \binom{n+1}{2}$$

$$C_n^{0,3} = \binom{n+2}{3}$$ atd.

Na př. Kolik rozličných vrhů lze udělati dvěma a kolik třemi kostkami? $n=6$, $k=2$, $(=3)$ tedy

$$C_6^{0,2} = \binom{6+1}{2} = \frac{6.7}{1.2} = 21.$$

$$C_6^{0,3} = \binom{6+2}{3} = \frac{6.7.8}{1.2.3} = 56.$$

Poznamenání. Poněvadž se

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3.4\ldots.k}$$ bude se

$$\binom{n+k-2}{k} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-2)}{1.2.3.4\ldots k}$$ atd., tedy

na př. $$\binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}$$ atd.

Příklady.

1. Sestavte veškerá amba, terna atd. z prvků 1, 2, 3, 4, 5, bez opakování a z prvků 1, 2, 3, 4 s opakováním.

2. Kolik sestav dá 6 prvků *bez opakování* a kolik *s opakováním*.

3. Kolik amb . . . kvinteren lze sestaviti z 90ti čísel malé lotterie?

4. Kolik amb . . . kvinteren dá 5 čísel?

5. Hráč si vybéře 10 čísel z 90ti, a sestaví z nich veškerá možná amba, terna, kvaterna a kvinterna. Sadí-li na každé ambo

a, terno b, kvaterno c a kvinterno d (krejcarů, zlatých atd.), mnoho-li sadil dohromady.

6. Lučba zná 61 prvků. Kolik těles je vůbec možných, která se skládají ze 2, 3, 4 prvků?

7. V kolika bodech může se protínati 5, 8, n přímek?

8. Tři roviny sbíhají se v *roh*. Kolik rohů takových dostane se 12ti (n) rovinami?

9. V kolika bodech protíná se n přímek, mezi nimiž jest jich p rovnoběžných?

10. Na kolikerý způsob lze sestaviti n prvků do 4 skupin, tak aby v 1. skupině jich bylo a, v 2. b, v 3. c a ve 4. d= zbytku $n-(a+b+c)$?

$$\left[\overset{0,a}{C_n} \times \overset{0,b}{C}_{(n-a)} \times \overset{0,c}{C}_{(n-a-b)} \times \overset{0,d}{C}_{(n-a-b-c)} = \frac{n!}{a!\ b!\ c!\ d!}.\right]$$

C. *Obměňování.*

§. 45.

1. Máme-li dvě řádky aneb několik řádek prvků, a sestavíme-li z nich soujmy tak, aby v každém soujmu byl jeden prvek z každé řádky, říkáme soujmům těm *obměny* a celému výkonu *obměňování.*

V každé obměně přichází tedy tolik prvků kolik řádek, proto udává počet řádek *třídu obměny* (k).

Abychom na př. z prvků
$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$
sestavil veškeré obměny, dělejme takto:

$a_1\ a_2\ a_3$	$a_1\ c_2\ a_3$	$b_1\ b_2\ a_3$	$c_1\ a_2\ a_3$	$c_1\ c_2\ a_3$
$a_1\ a_2\ b_3$	$a_1\ c_2\ b_3$	$b_1\ b_2\ b_3$	$c_1\ a_2\ b_3$	$c_1\ c_2\ b_3$
$a_1\ a_2\ c_3$	$a_1\ c_2\ c_3$	$b_1\ b_2\ c_3$	$c_1\ a_2\ c_3$	$c_1\ c_2\ c_3$
$a_1\ b_2\ a_3$	$b_1\ a_2\ a_3$	$b_1\ c_2\ a_3$	$c_1\ b_2\ a_3$	
$a_1\ b_2\ b_3$	$b_1\ a_2\ b_3$	$b_1\ c_2\ b_3$	$c_1\ b_2\ b_3$	
$a_1\ b_2\ c_3$	$b_1\ a_2\ c_3$	$b_1\ c_2\ c_3$	$c_1\ b_2\ c_3$	

2. Počet obměn $k$té třídy při $n, p, q \ldots$ prvcích řádky první, druhé, třetí atd. poznačuje se vůbec výrazem $\overset{k}{V}_{n,p,q\ldots}$ Poněvadž každý prvek z každé řádky spojen jest s každým prvkem z řádek ostatních do třídy $k$té, jest počet obměn

$$\overset{k}{V}_{n,p,q\ldots} = n \,.\, p \,.\, q \ldots$$

t. j. *počet obměn všech prvků sestavených v* k *řádkách, tak že jest v každé po pořadě* n, p, $q \ldots$ *prvků, rovná se součinu* npq.. Na př.

a) Má-li první řádka 2, druhá 3, a třetí 5 prvků, jest $k=3$, $n=2$, $p=3$ a $q=5$, proto

$$\overset{3}{V}_{2,3,5} = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 30 \text{ obměnám.}$$

b) Jsou-li v první řádce 2, v druhé a v třetí po 4 a ve čtvrté je-li 7 prvků, jest $k=4$. $n=3$, $p=q=4$, $r=7$, tedy

$$V^{4}_{3,\,4,\,4,\,7} = 3\,.\,4\,.\,4\,.\,7 = 336 \text{ obměnám.}$$

c) Kolik dělitelů má číslo $N=a^{\mathrm{m}}\,.\,b^{\mathrm{n}}\,.\,c^{\mathrm{p}}\,.\,d\,.\,e$, jsou a, b, c, d, e prvočísla?

Počítáme-li k dělitelům těm i 1 i číslo N, položme

do	1.	řádky	prvky	$1,\ a,\ a^2,\ a^3\ \ldots\ldots\ a^{\mathrm{m}}$.	tedy	jich	bude	$(m+1)$
„	2.	„	„	$1,\ b,\ b^2,\ b^3\ \ldots\ldots\ b^{\mathrm{n}}$,	„	„	„	$(n+1)$
„	3.	„	„	$1,\ c,\ c^2,\ c^3\ \ldots\ldots\ c^{\mathrm{p}}$,	„	„	„	$(p+1)$
„	4.	„	„	$1,\ d$	„	budou		2
„	5.	„	„	$1,\ e$	„	„		2

proto se počet dělitelů $= V^{5}_{(\mathrm{m}+1),\,(\mathrm{n}+1),\,(\mathrm{p}+1),\,2,\,2} = 4(m+1)(n+1)(p+1)$.

Dle toho má číslo $1800=2^3.3^2.5^2$ dělitelů

$$V^{3}_{4,3,3} = 4\,.\,3\,.\,3 = 36 \text{ (srovnej §. 10. 4.).}$$

3. Je-li počet prvků ve všech řádkách tentýž, t. j. je-li $n=p=q=\ldots$ vyjadřuje se počet obměn

$$V^{\mathrm{k}}_{\mathrm{n}} = n^{\mathrm{k}}.$$

Na př. a) 5 řádek po 3 prvcích dá obměn

$$V^{5}_{3} = 3^5 = 243.$$

b) Kolik vrhů vůbec lze udělati 3mi kostkami?

$$V^{3}_{6} = 6^3 = 216.$$

c) Kolik dělitelů má číslo $2310=2\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,11$? Sestavíme-li dělitele tyto po dvou do 5ti řádek totiž 1, 2; 1, 3; 1, 5; 1, 7; 1, 11, dostaneme

$$V^{5}_{2} = 2^5 = 32 \text{ dělitelům.}$$

Příklady.

1. Kolikrát můžeme po třech sestaviti 3 bílé, 2 červené a 4 modré kuličky? ($k=3$, $n=3$, $p=2$, $q=4$).

2. Kdosi má rozličné 3 kabáty, 7 vest a 5tero kalhot. Kolikrát se může jinak obléci?

3. Kolik rozličných vrhů jest možná 5ti (n) kostkami?

4. Optický telegraf má 5 ramen, a každému ramenu lze dáti čtyři rozličné směry, kolik znamení může se jím naznačiti?

5. Kolik dělitelů má číslo $2520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7$, a kolik číslo $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$?

6. Kolik dělitelů má číslo $210 = 2 . 3 . 5 . 7$, a kolik číslo a, které se skládá z n prvočinitelů?

II. Poučka dvojčlenová (binomialní).

§. 46.

1. Mají-li se násobiti dvojčleny

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) \ldots (x+a^n),$$

násobme $(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + (a_1+a_2)x + a_1 a_2$, pak

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3 + (a_1+a_2+a_3)x^2 + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)x \\ + a_1 a_2 a_3,$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = x^4 + (a_1+a_2+a_3+a_4)x^3 \\ + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4)x^2 \\ + (a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4)x \\ + a_1 a_2 a_3 a_4 \text{ atd.}$$

Zákon, kterým se jednotlivé členy součinu vyvinují jest patrný, totiž: první člen součinu jest první člen dvojčlenu, x, na tolikátou mocninu, kolik dvojčlenů se násobí, a poslední člen jest součin všech druhých členů dvojčlenů $(a_1 a_2 a_3 \ldots)$. Mocnitel každého z ostatních xů jest vždy o 1 menší předcházejícího, tak že poslední člen součinu jest $x^0 = 1$. Z té příčiny jest počet členů v součinu po náležitém vysazení stejných mocnin veličiny x vždy o 1 větší nežli počet dvojčlenů, které jsme násobili, tedy vůbec při n dvojčlenech jest počet členů v součinu $n+1$. Součinitelé veličiny x jsou vůbec *součty sestav* a sice: první součinitel jest 1, druhý jest součet všech unionů, třetí součet všech amb, čtvrtý součet všech teren atd. veličin a_1, a_2, $a_3 \ldots$ do třídy počtu dvojčlenů, které násobíme. Je-li počet tento n, jest *počet sestav* v 2. členu $\binom{n}{1}$, v 3. členu $\binom{n}{2}$, ve 4. čl. $\binom{n}{3} \ldots$ v$(n-1)$ čl. $\binom{n}{n-2}$, v n-tém čl. $\binom{n}{n-1}$, a v $(n+1)$ čl. $\binom{n}{n} = 1$.

Položíme-li $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_n = a$ bude

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) \ldots (x+a_n) = (x+a)^n;$$

dále bude se $a_1 a_2 = a_1 a_3 \ldots = a^2$, $a_1 a_2 a_3 = a_1 a_2 a_4 \ldots = a^3$, $a_1 a_3 a_3 a_4 \ldots = a^4$ až $a_1 a_2 a_3 \ldots a^n = a^n$, t. j. za tou podmínkou rostou mocnitelé druhého členu daných dvojčlenů vždy o 1, až bude poslední a^n. Součinitelům mocniny a, totiž $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ atd. říkáme *součinitelé dvojčlenoví*. Z té příčiny se

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 + \dots$$
$$+ \binom{n}{n-2}x^2a^{n-2} + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + a^n,$$

aneb, poněvadž se $\binom{n}{n-2}=\binom{n}{2}$, $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}$ atd. (§. 44. 3), jest

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \binom{n}{1}xa^{n-1} + a^n.$$

Poučce této říká se *Newtonova poučka dvojčlenová* (*vzorec dvojčlenový*), její pomocí můžeme každý dvojčlen na kteroukoli mocninu povýšiti. Je-li n *číslo celé a kladné* poznáváme vlastnosti dvojčlenové poučky, které už prvé byly naznačeny, z tohoto vzorce ještě patrněji, a jsou přehledně tyto:

1. Povýší-li se dvojčlen na $n$tou mocninu, jest počet všech členů $n+1$.

2. První člen mocniny jest první člen dvojčlenu s mocnitelem n.

3. Tento první člen má v každém následujícím členu mocnitele o 1 menšího, až v posledním členu docela zmizí ($x^0=1$).

4. Druhý člen dvojčlenu schází v prvním členu mocniny (jest $a^0=1$), a počínaje členem druhým v mocnině 1, jest v každém následujícím členu s mocnitelem o 1 vyšším, až v posledním členu má mocnitele n.

5. Součet mocnitelů obou členů jest v každém členu mocniny $= n$.

6. Součinitelé dvojčlenoví vždy dvou členů od obou konců stejně daleko vzdálených jsou sobě rovni, totiž součinitel členů prvního a posledního $= \binom{n}{n} = 1$, členu druhého a předposledního $= \binom{n}{1}$ atd. Z toho snadno poznáme, že v praktickém počítání netřeba vypočítávati součinitele leč buď do polovice $= \frac{n+1}{2}$ (je-li n liché) neb do jednoho členu přes $\frac{n}{2}$ (je-li n sudé). Ostatní součinitelé se opakují v opáčném pořádku.

7. Je-li kterýkoliv člen dvojčlenu záporný, jest jeho sudá mocnina + a lichá —. Na př.

$$(a\pm b)^5 = a^5 \pm \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 \pm \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{1}ab^4 \pm b^5$$
$$= a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5.$$

$$(2x+3y)^7 = (2x)^7 + 7(2x)^6.3y + \frac{7.6}{1.2}(2x)^5(3y)^2 + \frac{7.6.5}{1.2.3}(2x)^4(3y)^3$$
$$+ \frac{7.6.5}{1.2.3}(2x)^3(3y)^4 + \frac{7.6}{1.2}(2x)^2(3y)^5 + 7(2x)(3y)^6 + (3y)^7.$$

$$=128x^7+1344x^6y+6048x^5y^2+15120x^4y^3+22680x^3y^4+20412x^2y^5$$
$$+10206xy^6+2187y^7.$$

$$\left(x^2-\frac{y}{z^3}\right)^{10}=x^{20}-\frac{10x^{18}y}{z^3}+\frac{45x^{16}y^2}{z^6}-\frac{120x^{14}y^3}{z^9}+\frac{210x^{12}y^4}{z^{12}}$$
$$-\frac{252x^{10}y^5}{z^{15}}+\frac{210x^8y^6}{z^{18}}-\frac{120x^6y^7}{z^{21}}+\frac{45x^4y^8}{z^{24}}-10\frac{x^2y^9}{z^{27}}+\frac{y^{10}}{z^{30}}.$$

Poněvadž se

$(a+b)^n=\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$, můžeme položiti $\frac{b}{a}=z$, a proto n-tou mocninu každého dvojčlenu vyvinouti pomocí:

$$(1+z)^n=1+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\binom{n}{3}z^3+\ldots.+\binom{n}{3}z^{n-3}$$
$$+\binom{n}{2}z^{n-2}+\binom{n}{1}z^{n-1}+z^n.$$

Na př.

$$(a+b)^4=a^4\left(1+\frac{b}{a}\right)^4=a^4(1+z)^4=a^4\left[1+\binom{4}{1}z+\binom{4}{2}z^2+\binom{4}{1}z^3+z^4\right]$$
$$=a^4\left[1+4z+6z^2+4z^3+z^4\right].$$

3. Součet všech dvojčlenových součinitelů ve vzorci dvojčlenovém (je-li n číslo celé a kladné) rovná se 2^n. Neboť položíme-li ve všeobecném vzorci $(x+a)^n$, $x=a=1$ bude

$$(1+1)^n=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+1=2^n.$$

Je-li kterýkoliv člen daného dvojčlenu *záporný*, jest součet všech součinitelů dvojčlenových $=0$.

Neboť

$$(1-1)^n=1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots\pm1=0.$$

Na doklad toho srovnejme předešlý provedený příklad $(a+b)^5$, kde součet dvojčlenových součinitelů $=32=2^5$, a $(a-b)^5$, kde součet dvojčlenových součinitelů $=0$.

4. Jsou-li známi dvojčlenoví součinitelé n-té mocniny dvojčlenu $x+a$, dostaneme součinitele dvojčlenu $(x+a)^{n+1}$, pakli v předešlé mocnině dva sousední sečteme (první a poslední součinitel zůstane tentýž), neboť

$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$ (§. 44. 4.) Na př.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, součet dvou sousedních součinitelů jest 1, 4, 6, 4, 1, proto
$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, zde opět 1, 5, 10, 10, 5, 1, proto
$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ atd., tedy vůbec

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2+\binom{n+1}{3}a^{n-2}b^3+\dots+b^{n+1}.$$

Dodatek. Pomocí poučky dvojčlenové můžeme povýšiti každý vícečlen na n-tou mocninu, na př.

$$(a+b+c+d+\dots)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\dots\right)^n.$$

Položíme-li $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\dots=z$ a vyvineme-li $(1+z)^n$, můžeme v provedeném tom umocnění dosaditi místo z původní hodnotu a pracovati podobně dále.

5. Až dosud jsme považovali n za číslo celé a kladné, avšak i pak kdyby n bylo *zlomek*, vyvine se mocnina daného dvojčlenu pomocí poučky dvojčlenové. Počet členů jest v případě tom nekonečný. Na př.

$$(1+x)^{\frac{m}{n}}=1+\binom{\frac{m}{n}}{1}x+\binom{\frac{m}{n}}{2}x^2+\binom{\frac{m}{n}}{3}x^3+\dots$$

Neboť povýšíme-li oba díly této rovnice na mocnost n-tou, bude se

$$(1+x)^m=\left[1+\binom{\frac{m}{n}}{1}x+\binom{\frac{m}{n}}{2}x^2+\binom{\frac{m}{n}}{3}x^3+\dots\right]^n,$$ a položíme-li uzávorkovaný výraz $=1+z$, bude
$(1+x)^m=(1+z)^n$. Dle předešlého jest

$(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\dots$ a podobně

$(1+z)^n=1+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\binom{n}{3}z^3+\dots$ čili po dosazení hodnoty veličiny z

$$\begin{aligned}(1+z)^n=1&+n\binom{\frac{m}{n}}{1}x+n\binom{\frac{m}{n}}{2}x^2+n\binom{\frac{m}{n}}{3}x^3+\dots\\ &+\binom{n}{2}\binom{\frac{m}{n}}{1}^2x^2+2\binom{n}{2}\binom{\frac{m}{n}}{1}\binom{\frac{m}{n}}{2}x^3+\dots\\ &+\binom{n}{3}\binom{\frac{m}{n}}{1}^3x^3+\dots \text{ atd.}\end{aligned}$$

Má-li býti rovnice $(1+x)^m$ jednostejná s rovnicí $(1+z)^n$, musejí se součinitelé mocniny x v jedné rovnici rovnati součinitelům téhož

x v rovnici druhé. A porovnáme-li součinitele stejných mocnin veličiny x, pozorujeme skutečně, že jsou si rovny, neboť

$$\binom{m}{1} = n\binom{\frac{m}{n}}{1} = n.\frac{m}{n} = m.$$

$$\binom{m}{2} = n\binom{\frac{m}{n}}{2} + \binom{n}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m(m-1)}{1.2} \text{ atd.}$$

Na př. $\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}=1+{}^1/_2x+\frac{{}^1/_2({}^1/_2-1)x^2}{1.2}$

$$+\frac{{}^1/_2({}^1/_2-1)({}^1/_2-2)x^3}{1.2.3}+\ldots$$

$$=1+{}^1/_2x-{}^1/_8x^2+{}^1/_{16}x^3-\ldots$$

$$\sqrt{38}=\sqrt{36+2}+6\sqrt{1+\tfrac{1}{18}}=6(1+\tfrac{1}{18})^{\frac{1}{2}}$$

$$=6\left[+{}^1/_2 . {}^1/_{18}+\frac{{}^1/_2({}^1/_2-1)}{1.2}.\frac{1}{18^2}+\frac{{}^1/_2({}^1/_2-1)({}^1/_2-2)}{1.2.3}\frac{1}{18^3}+\ldots\right] \text{ atd.}$$

6. Dle poučky dvojčlenové pracuje se též je-li n *záporné*. Počet členů jest i zde nekonečný. Na př.

$$(1+x)^{-n}=1+\binom{-n}{1}x+\binom{-n}{2}x^2+\binom{-n}{3}x^3+\ldots$$

Abychom se o pravosti toho přesvědčili vyviňme si tentýž dvojčlen s kladným n, totiž $(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots$

a násobme obě rovnice dohromady, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}(1+x)^0=1+\binom{-n}{1}x&+\binom{-n}{2}x^2 &&-\binom{-n}{3}x^3+\ldots\\ \binom{n}{1}x&+\binom{-n}{1}\binom{n}{1}x^2&&+\binom{-n}{2}\binom{n}{1}x^3+\ldots\\ &+\binom{n}{2}x^2&&+\binom{-n}{1}\binom{n}{2}x^3+\ldots\\ &&&+\binom{n}{3}x^3+\ldots\end{aligned}$$

$$(1+x)^0=1=1+(-n+n)x+\left(\frac{(-n)(-n-1)}{1.2}+(-n).n+\frac{n(n-1)}{1.2}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{1.2.3}+\frac{(-n)(-n-1)n}{1.2}+\frac{(-n)n.(n-1)}{1.2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right)x^3+\ldots$$

Provedeme-li naznačené zde počítání, shledáme, že veškeří součinitelé veličiny x se rovnají 0, a tedy celý pravý díl $= 1$, z čehož jednostejnost poslední rovnice jest dokázána. Na př.

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots \quad \text{(srovnej §. 8. d.)}$$

$$(1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-2x+x^2} = 1-(-2)x + \frac{(-2)(-2-1)}{1\,.\,2}x^2 - \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$
$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots$$

Příklady.

1) $(a+x)^9$. 2) $(a-x)^7$. 3) $(2a-3b)^5$. 4) $(3a+10b)^6$.
5) $(a^3-2b^2)^8$. 6) $\left(\frac{2a}{h^2}-\frac{3c^4}{d^3}\right)^7$. 7) $(\frac{1}{2}-x)^{10}$. 8) $(\frac{1}{2}a-\frac{3}{5}b)^5$.
9) $\left(\frac{2a^2b^3}{3c}-\frac{2c^2}{5ab^4}\right)^8$. 10) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^7$. 11) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{10}$.
12) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\pm\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^9$. 13) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4$.
14) $(1+\sqrt{-a})^5-(1-\sqrt{-a})^5$. 15) $(a-b)^{1/3}$. 16) $(a+b)^{1/m}$.
17) $(a+b)^{2/3}$. 18) $(a-b)^{3/4}$. 19) $(x-\frac{1}{2})^{5/6}$. 20) $(\frac{1}{2}y+1)^{2/7}$.
21) $\sqrt[5]{x-a}$. 22) $\sqrt[7]{1-x}$. 23) $\sqrt{11}$. 24) $\sqrt{47}$. 25) $\sqrt{2}$.
26) $\sqrt[3]{28}$. 27) $\sqrt[3]{120}$. 28) $\sqrt[5]{20}$. 29) $\sqrt[5]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.
30) $(a+b\sqrt{-1})^{1/3}+(a-b\sqrt{-1})^{1/3}$. 31) $(a+b)^{-3}$. 32) $(a-b)^{-5}$.
33) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^{-4}$. 34) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{c}\right)^{-7}$. 35) $(a-b)^{-2/3}$. 36) $(1-x)^{-5/7}$.
37) $(1-x)^{-1/4}+(1+x)^{-1/4}$. 38) $(1+\sqrt{-x})^{-1/5}$. 39) $(68)^{-1/3}$.
40) $(65)^{-1/2}$. 41) $(68)^{-1/6}$.

III. Posloupnosť aritmetická a čísla obrazcová.

§. 47.

1. Řadě čísel, ve které rozdíl vždy dvou čísel po sobě jdoucích jest tentýž, říkáme *posloupnosť* čili *řada aritmetická*. Je-li rozdíl ten *kladný*, jest posloupnosť *vzestupná*, a je-li *záporný*, *sestupná*; každé číslo posloupnosti jmenujeme *člen*.

Poznačíme-li první člen aritmetické posloupnosti a, rozdíl dvou sousedních členů d, a člen poslední z, jest n členů posloupnosti takové $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ a+(n-1)d$.

Poslední člen posloupnosti aritmetické jest tedy

$$\text{I.}\quad z = a + (n-1)d,$$

z kteréhož vzorce, jsou-li kterékoli tři veličiny známy, čtvrtou neznámou určiti můžeme. (2.)

Abychom dostali *součet* s, aritmetické posloupnosti

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \ldots. + (a+(n-1)d)$$

dejme jí podobu

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots. + (z-2d) + (z-d) + z.$$

Sečteme-li člen první a poslední, druhý a předposlední atd. vždy dva členy stejně daleko od obou konců, dostaneme

$$s = (a+z) + (a+z) + (a+z) + \ldots$$

Zde se $a+z$ opakuje, při n členech, co sčítanec $^1/_2 n$-krát, tedy

$$\text{II.}\quad s = (a+z)\frac{n}{2} = \frac{a+z}{2} \,.\, n,$$

t. j. *součet aritmetické posloupnosti rovná se polovičnému součtu členu prvního a posledního, násobenému počtem členů.*

Vložíme-li do II. vzorce $z = a + (n-1)d$, bude se

$$\text{III.}\quad s = [2a + (n-1)d]\frac{n}{2} = na + \binom{n}{2} d,$$

a z obou těchto vzorců můžeme, jsou-li kterékoli tři veličiny známy, čtvrtou neznámou určiti. (2.) Na př.

a) Který jest 10. člen aritmetické posloupnosti, jejíž první člen jest -3 a rozdíl $=2$?

$$z = -3 + (10-1)2 = 15.$$

b) Který jest součet čísel 1, 2, 3, 4 .... n; který čísel lichých 1, 3, 5 . . . $2n-1$, a který čísel sudých 2, 4, 6, . . . $2n$?

$$\begin{array}{l|l} \text{Je-li}\quad a = d = 1, & a = 1,\ d = 2, \\ \text{jest}\quad s = (1+n)\frac{n}{2} = \binom{n+1}{2}, & s = (1+2n-1)\frac{n}{2} = n^2. \end{array}$$

$$\text{je-li } a = d = 2,$$

$$\text{jest } s = n(n+1) = 2\binom{n+1}{2}.$$

2. Ve vzorcích

$$\text{I. } z = a + (n-1)d. \quad \text{II. } s = \frac{a+z}{2} \,.\, n. \quad \text{III. } s = [2a + (n-1)d]\,\frac{n}{2}$$

přichází vůbec pět rozličných veličin (a, d, n, s, z), z nichž vždy tři známé určují čtvrtou neznámou. Jsou-li tedy tři veličiny dány, můžeme jimi každou z ostatních dvou neznámých vyjádřiti, a jsou-li čtyři veličiny dány, můžeme vždy třemi z nich pátou neznámou 4krát jinak a jinak určiti. Na př.

Dány jsou d, n, s, z, má se určiti a?

Pomocí d, n, z vyjádříme $a = z - (n-1)d$, ze vzor. I.

„ d, n, s „ $a = \frac{s}{n} - (n-1)\frac{d}{2}$, ze vzor. III.

Pomocí n, s, z vyjádříme $a = \frac{2s}{n} - z$, ze vzor. II.

„ d, s, z „ a ze vzorce I. a II., z nichž vyloučíme prvé veličinu pátou n, totiž $n = \frac{z-a}{d} + 1$, a

$$n = \frac{2s}{a+z}, \text{ porovnáním}$$

$$\frac{z-a}{d} + 1 = \frac{2s}{a+z}, \text{ z čehož}$$

$$a = {}^1/_2[d \pm \sqrt{(d+2z)^2 - 8ds}].$$

Na př.

a) Rozděl 1000 ($=s$) na taková čísla, aby každé následující bylo o 2($=d$) větší předcházejícího; a poslední aby bylo 64($=z$). Která jsou ta čísla? Jelikož jsou dány $d=2$, $s=1000$ a $z=64$, vypočítáme a pomocí předešlého vzorce, totiž

$a = {}^1/_2[2 \pm \sqrt{(2+128)^2 - 8.2.1000}]$, z čehož buď
$a = 16$ nebo $a = -14$.

Abychom z daných d, s, z určili n, vylučme ze vzorce I. a II. veličinu a, a vyhledejme

$n = \frac{d+2z \pm \sqrt{(d+2z)^2 - 8ds}}{2d}$, po dosazení daných veličin bude $n = 40$ nebo $n = 25$.

Řada ta jest tedy buď: 16, 18, 20, ... 64 co člen 25tý,
nebo —14, —12, —10, ... 64 co člen 40tý.

b) Součet 25ti čísel jest 100 a poslední člen 9, které číslo jest člen první a jaký jest rozdíl dvou sousedních?

Dány jsou $n=25$, $s=100$, $z=9$; z II. vzorce plyne

$$a = \frac{2s}{n} - z = \frac{2 \,.\, 100}{25} - 9 = -1.$$

Vyloučíme-li a ze vzorce I. a II., dostaneme

$$z - (n-1)d = \frac{2s}{n} - z, \text{ z čehož}$$

$$d = \frac{2(nz-s)}{n(n-1)} = \frac{2(25 \,.\, 9 - 100)}{25 \,.\, 24} = {}^5/_{12}.$$

Řada čísel těch jest tedy: -1, $-{}^7/_{12}$, $-{}^1/_6$, $+{}^1/_4$, ${}^2/_3$ atd.

Dodatek. Aritmetické posloupnosti čili řadě, jak jsme ji byli právě poznali, říkáme aritmetická řada *prvního řádu*, rozdíly vždy dvou sousedních členů jsou si rovny. Stává však i takových řad aritmetických, v nichž rozdíly vždy dvou po sobě jdoucích členů nejsou si rovny, nýbrž tvoří novou řadu aritmetickou, a rozdíly vždy dvou členů v této třeba opět novou atd., až teprv na př. *k*tá řada takto vyvozená má rozdíly stejné. Takovým řadám aritmetickým říkáme řady *vyšších řádů*, a sice řádu druhého, třetího . . . . *k*tého, dle toho mají-li v druhé, v třetí . . . v *k*té řadě vždy dva sousední členy stejné rozdíly.

3. Položíme-li v aritmetické řadě prvního řádu podoby

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots .\ a+(n-1)d$$

$a=d=1$, dostaneme řadu obyčejných čísel 1, 2, 3, 4, . . . n.

Sečteme-li v řadě této člen první a druhý; první, druhý a třetí atd. nechavše prvním členem 1, dostaneme řadu novou druhého řádu, jíž říkáme *řada čísel trojúhelníkových* (*trojúhelníkem dobených, trigonalných*), totiž 1, 3, 6, 10, 15 atd. A sečteme-li opět v této řadě podobně členy dva, tři, čtyři atd. nechavše opět prvním členem 1, dostaneme řadu novou třetího řádu, kterou zoveme *řada čísel čtyřstěnem dobených* (*tetraedrových*) totiž 1, 4, 10, 20, 35 atd. Pracujíce takto dále můžeme vyvinouti řady nové, které vesměs jsou řádů vyšších (srovn. 5.). Veškerým číslům v řadách takto vyvozených říkáme *čísla obrazcová* čili *figurovaná* toho kterého vůbec $k$tého řádu, neboť jednice na př. $n$tého čísla trojúhelníkového můžeme sestaviti do trojúhelníku v rovnoběžné řádky, tak že na každé *straně* jest n jednic, a podobně lze sestaviti jednice $n$tého čísla tetraedrového v trojúhelníky na tetraedru, a sice n jednic na každou *hranu*. Obrazcová čísla řádů vyšších podobným způsobem ovšem sestaviti nelze.

4. Vzorec $\binom{n+k-1}{k}$, který jsme poznali při *sestavování* n-prvků $k$té třídy (§. 44), nazývá se též n*té obrazcové číslo* k*tého řádu.* Zmenšíme-li n posloupně o 1, 2, 3, . . . $(n-1)$ jednici, dostaneme řadu

$$\binom{k}{k}, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}, \ldots \binom{n+k-2}{k}, \binom{n+k-1}{k},$$

která vyjadřuje veškerá čísla obrazcová $k$tého řádu. První člen $\binom{k}{k}$ ukazuje spolu, že první obrazcové číslo každého řádu jest 1. Položíme-li v řadě této

$k=1$, dostaneme 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . t. j. obrazc. čísla 1. řádu
$k=2$, „ 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . „ „ „ 2. „
$k=3$, „ 1, 4, 10, 20, 35, 56, . . . „ „ „ 3. „
$k=4$, „ 1, 5, 15, 35, 70, 126, . . . „ „ „ 4. „

5. $n$té obrazcové číslo $k$tého řádu rovná se součtu prvních obrazcových čísel řádu $(k-1)$ního, nebo naopak: součet n-obrazcových čísel $(k-1)$ního řádu jest $n$té číslo obrazcové řádu $k$tého t. j.

$$\binom{n+k-1}{k}=\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+\binom{k+1}{k-1}+\binom{k+2}{k-1}+\ldots+\binom{n+k-2}{k-1}.$$

Neboť dle §. 45. 4 jest vůbec $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$, tedy obdobně i

$$\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-2}{k}+\binom{n+k-2}{k-1}, \text{ podobně}$$

$$\binom{n+k-2}{k}=\binom{n+k-3}{k}+\binom{n+k-3}{k-1},$$

$$\binom{n+k-3}{k}=\binom{n+k-4}{k}+\binom{n+k-4}{k-1}$$

. . . .

$\binom{n+k-(n-1)}{k} = \binom{k+1}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}$ a
$\binom{k}{k} = \binom{k-1}{k} + \binom{k-1}{k-1}$, kde $\binom{k-1}{k} = 0$ (§. 44. 3.)

Položíme-li tedy $\binom{k-1}{k-1}$ na místě $\binom{k}{k}$ pak

$\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}$ „ „ $\binom{k+1}{k}$
$\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+\binom{k+1}{k-1}$ „ „ $\binom{k+2}{k}$ atd., dostaneme
$\binom{n+k-1}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \,..\, \binom{n+k-2}{k-1}$ jako bylo tvrzeno.

Je-li $k=2$, 3, 4, atd. dostaneme

$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\ldots+\binom{n}{1} = 1+2+3+\ldots+n = \binom{n+1}{2} =$
*n*té číslo obraz. 2. řádu,

$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2} = 1+3+6+\ldots+\binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3} =$
*n*té číslo obraz. 3. řádu,

$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\ldots+\binom{n+2}{3} = 1+4+10+\ldots+\binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4} =$
*n*té číslo obraz. 4. řádu atd.

6. Položíme-li v aritmetické řadě a, $a+d$, $a+2d$ atd. $a=1$, a spolu $d=p-2$, kde $p=3$, 4, 5 atd., dostaneme řadu

$1,\ 1+(p-2),\ 1+2(p-2),\ 1+3(p-2), \ldots\ 1+(n-1)(p-2).$

Sečteme-li první dva, tři, atd. členy této řady, nechavše opět prvním členem 1, dostaneme novou řadu obrazcových čísel, jimž říkáme *řada čísel mnohoúhelníkových* (*mnohoúhelníkem dobených*, *polygonalných*), čili vůbec *p*úhelníkových. Čísla *p*úhelníková jsou řádu druhého. Součet *n*členů této řady vyjádřuje vůbec *n*té číslo *p*úhelníkové, které též zoveme *p-úhelník čísla n*, tak že

p-úhelník čísla $n = n + (p-2)\,.\binom{n}{2}$ dle 1. vzorec II.

Je-li $p=3$, jest

trojúhelník čísla $n = n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} = \binom{n+1}{2}$,

t. j. trojúhelník čísla n se rovná *n*tému číslu obrazcovému druhého řádu (5.).

Je-li $p=4$, jest

čtyrúhelník čísla $n = n + 2\binom{n}{2} = n + \frac{2n(n-1)}{1\,.\,2} = n^2$,

t. j. čtyrúhelníky čísel jsou čtverce 1^2, 2^2, $3^2 \ldots n^2$.

Je-li $p=5$, jest

pětiúhelník čísla $n = \frac{n(3n-1)}{2}$,

t. j. pětiúhelníky čísel jsou 1, 5, 12, 22, 35 atd.

Podobně pro $p=6$ jsou šestiúhelníky čísel
1, 6, 15, 28, 45, ... $n(2n-1)$ atd.

Z jednic kteréhokoli čísla *p*úhelníkového můžeme sestaviti podobné *p*úhelníky se společným vrcholem.

7. Vložíme-li do vzorce pro *p*úhelník čísla $n = n+(p-2)\binom{n}{2}$ nejprvé $p = 3, 4, 5, 6.$ atd. a při tom pokaždé $n = 1, 2, 3, 4$ atd. (jak už ukázáno), a sečteme-li v jednotlivých těchto řadách jako doprvé první dva, tři, atd. členy, nechavše prvním členem 1, dostaneme zase nové řady čísel obrazcových, jimž říkáme *řady čísel jehlanových* (*jehlanem dobených, pyramidalných*). Čísla jehlanová jsou řádu třetího. Součet *n* členů *p*úhelníku vůbec nazýváme *p-stranný jehlan čísla n.* Dosadíme-li do vzorce pro *p*úhelník čísla *n* po sobě $n=1, 2, 3, \dots$ a poznačíme-li výsledky toho p_1, p_2, p_3 atd., bude se

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 1\\
p_2 &= 2+(p-2)\binom{2}{2}\\
p_3 &= 3+(p-2)\binom{3}{2}\\
p_4 &= 4+(p-2)\binom{4}{2}\\
&\dots\dots\dots\\
p_n &= n+(p-2)\binom{n}{2}
\end{aligned}
$$

Součet $1+2+3+\dots+n=\binom{n+1}{2}$, součet $(p-2)\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{n}{2}\right]$ drží v závorce (dle 5) obrazcová čísla řádu druhého až do předposledního. Z té příčiny se $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{n}{2}=\binom{n+2}{3}-\binom{n+1}{2}=\binom{n+1}{3}$ (§. 45. 4), a po dosazení toho se úplný součet čili

*p*stranný jehlan čísla $n=\binom{n+1}{2}+(p-2)\binom{n+1}{3}$.

Je-li $p=3, 4, 5$, atd. a spolu po každé $n=1, 2, 3, 4$ atd., jest

třístranný jehlan čísla $n=1, 4, 10, \dots \binom{n+2}{3}$ = číslu obraz. 3. řádu
čtyřstranný „ „ $n=1, 5, 14, \dots \binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}$,
pětistranný „ „ $n=1, 6, 18, \dots \frac{n+1}{2} . n^2$,
šestistranný „ „ $n=1, 7, 22, \dots \binom{n+1}{2}\frac{4n-1}{3}$ atd.

Na př. a) Jsou-li kule sestaveny v trojstranný jehlan, jehož podstava jest pravidelný trojúhelník, a je-li po jedné straně 10 kulí $(=n)$, jest v jehlanu tom

$$\binom{10+2}{3}=\frac{10.11.12}{1.2.3}=220 \text{ kulí.}$$

b) Jsou-li kule sestaveny v jehlanu, jehož podstava jest čtverec, tak že na straně tohoto jest jich $10(=n)$, jest kulí těch

$$\binom{10+1}{2}.\frac{20+1}{3}=375.$$

c) Jsou-li kule seřaděny na hromadě, tak že podstava této jest obdélník (rectangulus), po jehož šířce leží n a délce $n+r$ kulí, jest na hromadě té tolik kulí, kolik jich drží 4stranný jehlan zšíři n a r trojúhelníků čísla n, totiž

$$\binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}+r\binom{n+1}{2}=\binom{n+1}{2}\left[\frac{2n+1}{3}+r\right].$$

Řada nejvyšší má $1+r$ kulí.

Je-li tedy na př. po šířce 10 kulí a po délce $30(=10+20)$, jest všech kulí

$$\binom{10+1}{2}\left[\frac{20+1}{3}+20\right]=1485.$$

Příklady.

1. První člen aritmetické řady jest -7, a rozdíl dvou členů sousedních jest $1\frac{1}{4}$, které jsou její členy do členu 12tého? a které by byly, kdyby první člen byl $+7$ a rozdíl $-1\frac{1}{4}$?

2. Jsou dány a, z, s nechť se určí n, d,

a, d, z „ „ „ s, n,
a, n, z „ „ „ d,
d, n, z „ „ „ s,
a, d, s „ „ „ n, z,
a, n, s „ „ „ d, z,
d, n, s „ „ „ z,
a, z, s „ „ „ d, n,
d, z, s „ „ „ n,
n, z, s „ „ „ d,

3. Jak veliký jest součet a) prvních 1000 čísel? b) aritmetické řady, je-li $a=12$, $z=38$ a $n=6$? c) je-li $a=-3$, $d=\frac{1}{4}$ a $z=3$, a kolik členů má tato řada?

4. $s=150$, $a=12$, $d=5\frac{1}{5}$, jak veliké jest z a n?

5. a) $a=100$, $d=-10\frac{7}{8}$, $n=22$, nechť se určí s a z. b) $a=13$, $d=-10\frac{7}{8}$, $s=-274\frac{1}{2}$, nechť se určí z a n. c) $a=23\frac{7}{8}$, $n=10$, $s=-250\frac{7}{8}$, nechť se určí d a z. d) $a=78\frac{1}{4}$, $n=15$, $d=-10\frac{7}{8}$, nechť se určí s a z.

6. První člen aritmetické řady $=a$, rozdíl $=-d$ a poslední člen $=-a$, má se určiti s a n.

7. Hodiny bijí čtvrtě i hodiny, a) kolikrát udeří vůbec za 24 hodin, a *b*) kolikrát by udeřily v čase tom, kdyby se při každé čtvrti opakovaly hodiny?

8. Kdosi sadil 1 zl. v první hře, a v každé následující o 1 zl. více. Po několika ztracených hrách vyhrál 36kráte svou poslední sázku, a tím vyhrál celkem 663 zl. Kolikrát sadil?

9. $a=1000$, $d=-31^1/_4$, $z=-1000$, jak veliké jest n a s?

10. Na přímce od A do B pohybuje se těleso stejně zrychleně, a vykoná v první sekundě 18″ a v každé následující o 4″ více. Za kolik sekund vykoná ono těleso 186″, za kolik sekund by vykonalo 302″, a jak daleko by bylo za 11 sekund od bodu A, je-li A od B vzdáleno 440″?

11. Jaký jest všeobecný vzorec obrazcových čísel řádu 6tého, 7mého a 8mého? Nechť se určí prvních 10 obrazcových čísel každého z těchto řádů.

12. Které číslo jest 7miúhelník čísla 10, 15, 20, a které 8miúhelník těchto čísel?

13. Které číslo jest 7mistranný jehlan čísla 7, 13, 17, a které 9tistranný jehlan čísla 19, 23, 29?

14. Kule jsou sestaveny v trojstranný jehlan pravidelné podstavy; podél strany této leží a) 8, b) 12 a c) 15 kulí; kolik kulí jest v jehlanu? Kdyby byl jehlan čtyřstranný a podstava čtverec, kolik kulí by držel za týmiž podmínkami a) b) c)?

15. Kule leží na hromadě, jejíž podstava jest obdélník; v jeho šíři jest jich 9 a v délce 23. Kolik kulí jest v té hromadě, a kolik by jich tam bylo, kdyby jich leželo zšíří 12 a zdélí 25?

IV. Počet o (pravdě-) podobnosti.

§. 48.

1. Je-li n případů *možných* a mezi nimi m takových, které si přejeme čili m *příznivých*, jsou všechny ostatní *nepříznivé*, a počet jejich jest $n-m$.

Poměr případů příznivých ke všem možným čili $m:n=\frac{m}{n}$ *nazýváme prostou čili mathematickou (pravdě-) podobnosť pro případy příznivé, a poměr případů nepříznivých ke všem možným* tedy $\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}$ *prostou čili mathematickou (pravdě-) podobnosť pro případy nepříznivé.* Nazveme-li první podobnosť p a druhou q, jest

a) $p=\frac{m}{n}$, b) $q=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-p$.

Součet obou podobností rovná se *jistině* $=1$, neboť

c) $p+q=\frac{m}{n}+1-\frac{m}{n}=1$.

Ze vzorce a) vysvitá, že jest podobnost pro případy příznivé (p) tím větší (menší), čím větší (menší) jest počet těchto a čím menší (větší) jest počet všech případů možných, a ze vzorce b) patrno, že čím větší jest podobnost pro případy příznivé *při stejném počtu případů možných*, tím menší jest podobnost pro případy nepříznivé. Vůbec jest případ jakýs

nemožný, je-li jeho podobnost $= 0$

pravdě nepodobný " " " $< \frac{1}{2}$,

nejistý " " " $= \frac{1}{2}$,

pravdě podobný " " " $> \frac{1}{2}$,

jistý " " " $= 1$.

Na př.

a) Podobnost, že se kostkou vrhne *určité* číslo, jest $1 : 6 = {}^1/_6$, že se vrhne kterékoli ze dvou, ze tří, ze čtyř určitých jest ${}^2/_6$, ${}^3/_6$, ${}^4/_6$. Podobnost, že se z 90ti čísel vytáhne jedno určité (extrato) jest ${}^1/_{90}$, že se vytáhne buď suda neb licha ${}^1/_2$ atd. A naopak jest podobnost, že se kostkou určité číslo nevrhne $1-{}^1/_6={}^5/_6$, že se z 90 čísel určité nevytáhne $1-{}^1/_{90}={}^{89}/_{90}$ atd.

b) Dvěma kostkama jest vůbec $6^2=36$ vrhů možných. Mezi těmi jest možných 6 vrhů dvou stejných čísel (od 1 do 6), a tolikéž vrhů do součtu 7 (1, 6; 2, 5; 3, 4; 4, 3; 5, 2; 6, 1). Podobnost tedy, že dvěma kostkama vrhneme buď dvě čísla stejná, nebo součtem 7, jest ${}^6/_{36}={}^1/_6$, že vrhneme součtem 8 jest ${}^5/_{36}$ atd.

c) V malé lotterii vytáhne se z 90ti čísel 5. Sadí-li kdosi 12 čísel a sice všecka extrata, amba, terna atd., které z těchto sestaviti lze, jak veliká jest podobnost, že vyhraje nejvýše 1 extrato, 1 ambo atd.? Z 90ti čísel může se 5 čísel vytáhnouti způsobem $C_{90}^{5} = 43949268$merým. Z případů těchto vůbec možných jsou pouze ty příznivé extratu, ve kterých se *jediné* z oněch 12 čísel ve vytažených 5ti číslech (v kvinterně) nalezá, což jest opět tolikráte možné, kolikrát daných 12 čísel se čtyřmi (s kvaternami) ze všech ostatních čili z $90-12=78$ čísel do kvinterna sestaviti lze. Takových kvateren z 78 čísel jest však možných C_{78}^{4}, a poněvadž každé vyjíti může s jedním z 12 daných čísel, jest $C_{12}^{1}\, C_{78}^{4} = 12 C_{78}^{4}$ počet všech případů extratu příznivých. Z toho plyne pak podobnost p_1, že pouze extrato z oněch 12 čísel vytaženo bude

$$p_1 = \frac{C_{12}^{1} \,.\, C_{78}^{4}}{C_{90}^{5}} = \frac{17117100}{43949268} = \frac{1}{2{\cdot}56\ldots}$$

Podobně se určí podobnost, že z 12 sazených čísel vyjde nejvýše *jedno* ambo. Neboť počet všech případů příznivých, ve kterých se kterákoli dvě čísla z daných 12ti se třemi ze všech ostatních 78ti v kvinterno spojiti mohou, jest $C_{12}^{2}\,C_{78}^{3}$, a proto podobnost p_2, že vyjde ambo, jest

$$p_2 = \frac{C_{12}^{2}\,C_{78}^{3}}{C_{90}^{5}} = \frac{2095016}{43949268} = \frac{1}{20\cdot98\ldots}$$

Pokračujeme-li podobně dále u vypočítávání podobnosti, že nejvýše jedno terno, kvaterno atd. se vytáhne z daných 12 čísel, najdeme

pro terno $p_3 = \dfrac{C_{12}^{3}\,C_{78}^{2}}{C_{90}^{5}}$, pro kvaterno $p_4 = \dfrac{C_{12}^{4}\,C_{78}^{1}}{C_{90}^{5}}$, pro kvinterno

$$p_5 = \frac{C_{1}^{5}}{C_{90}^{5}}.$$

Nazveme-li tedy vůbec n počet všech čísel, z kterých se vytahuje, k počet čísel, která se vytáhnou a s počet čísel sazených, vyjádří se podobnost pro p_1, p_2, p_3, ... (extrato, ambo, terno..)

$$p_1 = \frac{C_{s}^{1}\,C_{(n-s)}^{(k-1)}}{C_{n}^{k}};\quad p_2 = \frac{C_{s}^{2}\,C_{(n-s)}^{(k-2)}}{C_{n}^{k}};\quad p_3 = \frac{C_{s}^{3}\,C_{(n-s)}^{(k-3)}}{C_{k}^{n}}\ \text{atd. až}$$

$$p_k = \frac{C_{s}^{k}}{C_{n}^{k}}\quad \text{je-li } s > k \text{ a}$$

$$p_s = \frac{C_{(n-s)}^{(k-s)}}{C_{n}^{k}}\quad \text{je-li } s < k.$$

d) Pěti kostkami jest vůbec $6^5 = 7776$ rozličných vrhů možných, a pouze *tři* stejná čísla mohou padnouti $\binom{5}{3}\,.\,6\,.\,5\,.\,4$-krát. Neboť tři stejná čísla mohou býti na *třech* kostkách z pěti $\binom{5}{3} =$ 10krát, a poněvadž jest stejných čísel 6tero, může se tak státi $\binom{5}{3}\,.\,6$. Při *každém* z těchto vrhů může ukazovati čtvrtá kostka kterékoli číslo z ostatních pěti a pátá kostka kterékoli z ostatních čtyř. Proto se podobnost, že se 5ti kostkami vrhnou *pouze* 3 stejná čísla (a ostatní rozličná) vyjádří

$$\frac{\binom{5}{3}.\,6\,.\,5\,.\,4}{6^5} = \frac{25}{162} = \frac{1}{6\cdot48\ldots}$$

e) V nádobě jest n kuliček, které se mohou vybírati po jedné, po dvou, po třech atd. vůbec

$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^n - 1$ rozličnými způsoby (§. 46. 3),

a sice v lichém počtu

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots \text{ způsoby,}$$

a v sudém počtu

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\dots \text{ způsoby.}$$

Avšak $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots=2^n$

a $1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots=0$, součet a rozdíl dá

$$2+2\binom{n}{2}+2\binom{n}{4}+\dots=2^n, \text{ a}$$

$$2\binom{n}{1}+2\binom{n}{3}+2\binom{n}{5}+\dots=2^n, \text{ nebo}$$

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}\dots=2^{n-1}-1$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}\dots=2^{n-1}.$$

Jest tedy podobnost, že jediným hmatnutím vybeřeme část kuliček v sudém počtu $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$ a v lichém počtu $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$.

2. Jsou-li možné případy A, B, C,..., a známe-li podobnost každého z případů těchto, tedy na př. podobnost

p_1 že se přihodí A
p_2 „ „ „ B
p_3 „ „ „ C atd.

vyjádříme podobnost p, že se *kterýkoli* z případů A, B, C .... přihodí *součtem podobností případů jednotlivých.* Nazveme-li tedy počet všech možných případů pro A, B, C,... vůbec N, a počet případů A, B, C,... příznivých po pořadě m_1 m_2 m_3 ...jest při N případech možných $m_1+m_2+m_3+\dots$ případů příznivých, v nichž se přihodí buď A, buď B, C, . . . t. j.

$$p=p_1+p_2+p_3+\dots=\frac{m_1+m_2+m_3+\dots}{N}=\frac{m_1}{N}+\frac{m_2}{N}+\frac{m_3}{N}+\dots$$

Na př. Podobnost, že se kostkou vrhne buď 1 nebo 2 nebo 3, jest $1/_6+1/_6+1/_6=1/_2$.

Podobnost, že dvěma kostkama vrhneme buď 2 stejná čísla anebo 7, jest $1/_6+1/_6=1/_3$, že dvěma kostkama vrhneme buď 5 nebo 8 nebo 9 jest $1/_9+5/_{36}+1/_9=13/_{36}$ atd.

3. Případům A, B, C, ... říkáme *příčné* (contrarii), je-li jisto, že se jeden z nich přihoditi *musí.* Poněvadž se podobnost, že se přihodí kterýkoli případ, tedy buď A, buď B, buď C atd., rovná součtu podobností případů těchto, a poněvadž se u případů příčných jeden přihoditi *musí*, jest (dle 2.)

$$m_1+m_2+m_3+\dots=N, \text{ nebo}$$

$$p=\frac{m_1+m_2+m_3+\dots}{N}=1, \text{ t. j.}$$

součet případů příčných se rovná jistotě. A naopak: je-li součet podobností daných případů $=1$, jsou případy ty příčné.

Na př. Že penízem hodím „hlavu“ jest podobnost $={}^1/_2$, a že hodím „písmo“ $1-{}^1/_2={}^1/_2$, že tedy hodím buď „hlavu“ buď „písmo“ jest podobnost ${}^1/_2+{}^1/_2=1$, případy ty jsou příčné.

4. Podobnosti říkáme *vztažitá*, pakli se pravdě podobá, že z případů A, B, C. . . přihodí se jediný, na př. A. Podobnost vztažitou vyjádřujeme poměrem, jejž udává podobnost prostá případu na př. A a součet prostých podobností všech případů A, B, C, . . . Neboť (dle 2.) jest za předešlými podmínkami mezi $m_1+m_2+m_3+\ldots$ příznivými případy m_1 případů A příznivých, tedy vztažitá podobnost případů A jest

$$\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3+\ldots}=\frac{\frac{m_1}{N}}{\frac{m_1}{N}+\frac{m_2}{N}+\frac{m_3}{N}+\ldots}=\frac{p_1}{p_1+p_2+p_3+\ldots}.$$

Na př. Jaká jest podobnost vztažitá, že se dvěma kostkama vrhne spíše 7 nežli 11 a naopak?

Podobnost prostá, že se vrhne 7, jest ${}^1/_6=p_1$ a že se vrhne 11, jest ${}^2/_{36}={}^1/_{18}=p_2$, že se tedy vrhne spíše 7 nežli 11, jest podobnost vztažitá

$$\frac{p_1}{p_1+p_2}=\frac{{}^1/_6}{{}^1/_6+{}^1/_{18}}={}^3/_4,$$

a že se vrhne spíše 11 než 7, jest podobnost vztažitá

$$\frac{p_2}{p_1+p_2}=\frac{{}^1/_{18}}{{}^1/_6+{}^1/_{18}}={}^1/_4.$$

5. Podobnosti říkame *složitá*, pakli se příklady A, B, C . . . udati mají buď *současně*, buď *po sobě v určitém pořádku. Podobnost složitá vyjádřuje se součinem podobností případů jednotlivých.* Nazveme-li všechny *možné* případy, v nichž se totiž přihodí $A, B, C\ldots$ po pořadě n_1, n_2, n_3, . . ., všechny A, B, C. . . *příznivé* případy m_1, m_2, m_3, . . . pak podobnost prostou pro každý případ p_1, p_2, p_3, . . . a podobnost složitou P, jest

$$P=p_1p_2p_3\ldots=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}\cdot\frac{m_3}{n_3}\ldots$$

Neboť *každý z možných* případů n_1 může se přihoditi *s každým z možných* případů n_2, čímž dostaneme vůbec n_1n_2 možných případů (pro A, B), a *každý* z těchto může se spojiti s každým z n_3 možných případů, tak, že jest počet jejich $n_1n_2n_3$ (pro A, B, C) atd. Podobně se každý z případů m_1 *příznivých* A spojiti může s každým z m_2 případů *příznivých* B, čímž dostaneme vůbec m_1m_2 příznivých případů (pro A, B), a každý z těchto se může spojiti s každým z m_3 (pro A, B, C) atd., čímž se vysvětluje uvedená prvé hodnota P.

Jsou-li podobnosti jednotlivých případů vesměs sobě rovny, a počet jejich k, jest případ složitý

$$P=\left(\frac{m_1}{n_1}\right)^k.$$

Příklady. a) Podobnosť, že vrhnu kostkou prvním hodem 1 a druhým 2, jest $P={}^1/_6 \,.\, {}^1/_6={}^1/_{36}$, a podobnosť, že vrhnu kostkou třikrát po sobě 5, jest $P=({}^1/_6)^3={}^1/_{216}$.

b) Je-li v nádobě 6 čísel od 1 do 6ti, jest podobnosť, že se ve třech tazích vytáhne nejprvé 1, pak buď 2 nebo 3, a po třetí buď 4, 5 nebo 6

$$P={}^1/_6 \,.\, {}^2/_5 \,.\, {}^3/_4={}^1/_{20}.$$

Neboť podobnosť, že se vytáhne 1 ze šesti čísel, jest ${}^1/_6$, že se vytáhne buď 2 buď 3 z 5ti zbylých čísel, jest ${}^1/_5+{}^1/_5={}^2/_5$ [dle 2.], a že se vytáhne buď 4, 5 nebo 6 ze zbylých 5 čísel, jest ${}^1/_4+{}^1/_4+{}^1/_4={}^3/_4$, proto atd.

c) V nádobě jest 5 bílých a 6 černých kuliček. Vytáhnu-li z nich 4, jaká jest podobnosť, že mezi nimi budou 2 bílé a jaká, že mezi nimi budou 3 černé? Všech možných případů jest zde $\binom{5+6}{4}=\binom{11}{4}$. Že vytáhnu z 5ti bílých kuliček 2 bílé, jest podobnosť $\binom{5}{2}$, a že ostatní dvě vytažené budou černé, jest podobnosť $\binom{6}{2}$, proto jest

$$P=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{11}{4}}={}^{15}/_{33}.$$

A že vytáhnu ze 6ti černých kuliček 3 černé, jest podobnosť $\binom{6}{3}$, že pak ta 4tá bude bílá $\binom{5}{1}$, proto jest

$$P=\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{11}{4}}={}^{10}/_{33}.$$

d) V nádobě A jest 9 kuliček bílých a 7 černých, a v nádobě B jest 5 kuliček bílých a 8 černých. Vytáhnu-li z A 10 a z B 6 kuliček, jaká jest podobnosť, že mezi těmi 10ti jest 7 bílých a spolu mezi těmi 6ti že jsou dvě bílé?

$$P=\binom{9}{7}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{4}:\binom{16}{10}\cdot\binom{13}{6}=\frac{882000}{13741728}=\frac{1}{15{\cdot}58\ldots}.$$

e) Podobnosť, že osoba A po 10 letech bude ještě na živě, budiž ${}^1/_8$ (t. j. dle věku osoby A najde se v tabulce o smrtelnosti, kolik roků průměrně bývají ještě živi lidé jejího věku, a ${}^1/_8$ naznačuje, že po 10 letech z 8 osob udaného stejného věku bývá průměrně pouze jedna na živě), a že osoba B po 10 letech bude na živě, budiž podobnost $^2/_7$. Jaká jest podobnost, že po 10 letech budou *obě* osoby ještě živy?

$$P = {^1/_8} \cdot {^2/_7} = {^1/_{28}}.$$

f) Nazveme-li opět podobnost prostou případů A a B jako prvé p_1 a p_2, vyjádří se dle předešlého podobnost, že se přihodí

A i B výrazem $p_1 p_2$
A nikoli B „ $p_1(1-p_2)$, dle 1.)
nikoli A nýbrž B „ $(1-p_1)p_2$
ani A ani B „ $(1-p_1)(1-p_2)$.

Jeden z těchto případů musí se přihoditi, proto jsou případy ty příčné (3), a skutečně se součet jejich

$$p_1 p_2 + p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2 + (1-p_1)(1-p_2) = 1.$$

Beřeme-li zřetel k příkladu e), jest podobnost, že budou po 10ti letech

osoby A i B živy . . ., $^1/_8 \cdot {^2/_7} = {^1/_{28}}$,
že bude živa A nikoli B . . . . $^1/_8 \cdot (1-{^2/_7}) = {^5/_{56}} = {^1/_{11{\cdot}2}}$,
že nebude živa A nýbrž B . . . . $(1-{^1/_8}) \cdot {^2/_7} = {^1/_4}$,
„ „ „ A ani B . . . $(1-{^1/_8}) \cdot (1-{^2/_7}) = {^5/_8} = {^1/_{1{\cdot}6}}$.

A součet podobností těchto, z nichž se jedna přihoditi musí, jest

$$^1/_{28} + {^1/_{11{\cdot}2}} + {^1/_4} + {^1/_{1{\cdot}6}} = 1.$$

j) Nazveme-li opět podobnost prostou případů A, B, C, . . . p_1, p_2, p_3 . . . vyjádří se dle předešlého podobnost, že se nepřihodí A nýbrž B, výrazem $(1-p_1)p_2$, že se nepřihodí ani A ani B nýbrž C, výrazem $(1-p_1)(1-p_2)p_3$, tedy vyjádří se podobnost, že se přihodí buď A, nebo když se nepřihodí A tedy B, nebo když se nepřihodí ani A ani B, že se přihodí C, výrazem

$$P = p_1 + (1-p_1)p_2 + (1-p_1)(1-p_2)p_3 \text{ atd.}$$

h) V nádobě A jest 7 kuliček bílých a 2 černé, a v nádobě B jest 5kuliček bílých a 3 černé. Jaká jest podobnost, že sáhnu-li do kterékoli nádoby a vytáhnu-li jedinou kuličku, tato bude bílá?

Že sáhnu nejprvé do nádoby A, jest podobnost $p_1 = {^1/_2}$, že z této vytáhnu kuličku bílou, jest $p_2 = {^7/_9}$, že tedy sáhnu do A a vytáhnu kuličku bílou, jest podobnost $^1/_2 \cdot {^7/_9}$. Právě tak jest podobnost, že sáhnu nejprvé do B a vytáhnu kuličku bílou $^1/_2 \cdot {^5/_8}$, tedy podobnost ($= P$), že sáhnu do kterékoli nádoby a vytáhnu kuličku bílou, jest

$$P = {^1/_2} \cdot {^7/_9} + {^1/_2} \cdot {^5/_8} = {^{101}/_{144}} = {^1/_{1{\cdot}42\cdots}}$$

6. Při *sázkách*, kde se jedná o výhru a ztrátu určité sumy, říkáme součinu z podobnosti a této sumy *mathematická naděje*. Je-li totiž $m_1 + m_2 = n$ případů možných, m_1 příznivých osobě A, a m_2 příznivých osobě B, a je-li sázka první osoby a_1 a druhé a_2, vyjádří se mathematická naděje e

$$\left.\begin{aligned} &\text{pro } A \quad e_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot a_2 = a_2 p_1 \\ &\text{pro } B \quad e_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot a_1 = a_1 p_2. \end{aligned}\right\} \text{z čehož } \begin{aligned} e_1 : e_2 &= a_2 p_1 : a_1 p_2 \\ &= \frac{p_1}{a_1} : \frac{p_2}{a_2}. \end{aligned}$$

Je-li $a_1 = a_2$, má se

$$e_1 : e_2 = p_1 : p_2$$

t. j. mathematické naděje jsou (mají býti) úměrny k podobnostem, a má-li býti mathematická naděje u obou hráčů stejná, musí $e_1 = e_2$ t. j. $a_2 p_1 = a_1 p_2$.

Na př. a) Ve hře v kostky může kdosi vyhrati 5 zl., vrhne-li 7 dvěma kostkama. Jak veliká jest jeho mathematická naděje?

$$e = {}^1/_6 \,.\, 5 = {}^5/_6 \text{ zl.}$$

b) Kdosi sadí na terno 1 zl., kdyby vyšlo, vyhrál by 4800 zl., jak veliká jest jeho mathematická naděje? Podobnosť, že v 5ti číslech vyjdou 3, jest $\frac{1}{11748}$, tedy

$$e = \frac{1}{11748} \,.\, 4800 = \frac{400}{979} \text{ zl.}$$

c) *A* se sadí s *B*, že na první vrh udělá 2ma kostkama 7. Sadí-li *A* 1 zl., mnoho-li má saditi *B*? Podobnost že *A* vrhne 7, jest ${}^1/_6$, a že nevrhne 7, ${}^5/_6$, a poněvadž se má míti

$$e_1 : e_2 = p_1 : p_2, \text{ tedy}$$
$$e_1 : e_2 = {}^1/_6 : {}^5/_6 = 1 : 5$$

B má saditi 5 zl.

Dodatek. Má-li tedy býti sázka při lotteriích, sázkách a p. ve shodě s možnou výhrou, má se dle předešlého *mathematická naděje hráče rovnati sázce.* Nazveme-li sázku *s*, podobnosť *p*, výhru *a* a mathematickou naději *e*, musí se

$$s = e = ap, \quad \text{nebo } a = \frac{s}{p}.$$

Tohoto pravidla se však nešetří, poněvadž se nepochybně počítá na chuť hráčů, kteří bez práce a namáhání chtějí zbohatnouti. Tak na př. v malé lotterii jest podobnosť, že vyjde

extrato	$\frac{1}{18}$
nominato	$\frac{1}{90}$
ambo	$\frac{1}{400{\cdot}5}$
terno	$\frac{1}{11748}$

Sadí-li se na některé z těchto na př. 1 zl., mělo by se vyhrati

dle $a = \frac{s}{p}$ na extrato $1 : \frac{1}{18} = 18$ zl.

„ nominato $1 : \frac{1}{90} = 90$ zl.

„ ambo $1 : \frac{1}{400{\cdot}5} = 400{\cdot}5$ zl., a

„ terno $1 : \frac{1}{11748} = 11748$ zl.

Avšak se vyplácí sázka

při extratě	14tinásobně,	tedy	14 zl.	při	1	zl.	sázky
„ nominatě	67ti	„	„ 67 zl.	„	1	„	„
„ ambu	240ti	„	„ 240 zl.	„	1	„	„
„ ternu	4800ti	„	„ 4800 zl.	„	1	„	„

Příklady.

1. Jaká jest podobnost, že jednou kostkou vrhnu a) 5, b) 3 nebo 6, c) 2, 4 nebo 6?

2. Jaká jest podobnost, že se hodí mincí a) hlava, b) písmo?

3. Jaká jest podobnost, že dvěma kostkama vrhnu a) 5 a 5; b) 11; c) 5; d) 12?

4. Jaká jest podobnost, že třemi kostkami vrhnu a) 4; b) 15; c) 12; nebo 8mi kostkami a) 8; b) 9; c) 10?

5. Na n losů připadne 1 výhra; je-li všech losů mn, jaká jest podobnost, že se vyhraje na a) 1 los, b) na $k<n$, a c) na n losů?

6. Kdosi obsadí 10 čísel v malé lotterii a sice sadí veškerá extrata, amba a terna. Jaká jest podobnost, že vyhraje buď extrato, buď ambo, buď terno?

7. Jaká jest podobnost, že vytáhnu z nádoby, ve které jest 20 čísel, 7 určitých a jaká, že vytáhnu 3 určitá čísla?

8. Jaká jest podobnost, že 6ti kostkami vrhnu pouze 4 čísla stejná a jaká že 8 kostkami vrhnu pouze 5 čísel stejných?

9. V kapse mám 24 krejcarů. Jaká jest podobnost, že jedním hmatnutím vyberu z nich několik v počtu sudém a jaká, že vybrané budou v počtu lichém?

10. Jaká jest podobnost, že z 52 karet vytáhnu na jednou a) 3 „coeurs“, b) 3 esa, c) 3 karty stejné barvy; d) 3 karty stejné hodnoty; e) 3 karty rozličných barev?

11. Jaká jest podobnost, že dvěma kostkama vrhnu buď 2 nebo 8 nebo 11?

12. Jaká jest podobnost, že z 90 čísel vytáhnu číslo 29 a podruhé číslo 50, pakli se a) první vytažené číslo zase k ostatním přidá aneb b) pakli se k nim nepřidá? Jaká jest podobnost, že ve dvou tazích vytáhnu obě čísla (29 a 50)?

13. Jaká jest podobnost že 6ti kostkami jedním vrhem hodí se čísla od 1 do 6?

14. V nádobě jest 6 bílých a 11 černých kuliček. Jaká jest podobnost, že mezi 5, které najednou vytáhnu, budou 3 bílé a jaká, že mezi nimi budou 3 černé?

15. V nádobě A jest 5 kuliček bílých a 6 černých, v nádobě B jest 7 kuliček bílých a 5 černých. Vytáhnu-li z A 8 a z B 9 kuliček, jaká jest podobnost, že mezi těmi 8mi jest 5 černých a mezi těmi 9ti že jsou 3 černé?

16. Podobnost, že bude osoba A po 5 letech živa, jest $^1/_4$, a že po témže čase bude B živa jest $^1/_{10}$. Jaká jest podobnost, že po 5ti letech budou a) obě živy, b) že bude živa A a nikoli B, c) že nebude živa A nýbrž B a d) že nebude živa ani A ani B?

17. Z 90 čísel obsadí kdosi 10, jaká jest podobnost, že mezi 5ti, které se vytáhnou, bude v 1. a v 5. kouli jedno z oněch 10?

18. Jaká jest vztažitá podobnost, že se v lotterii udělá spíše ambo než terno, a spíše terno než kvaterno?
